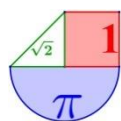
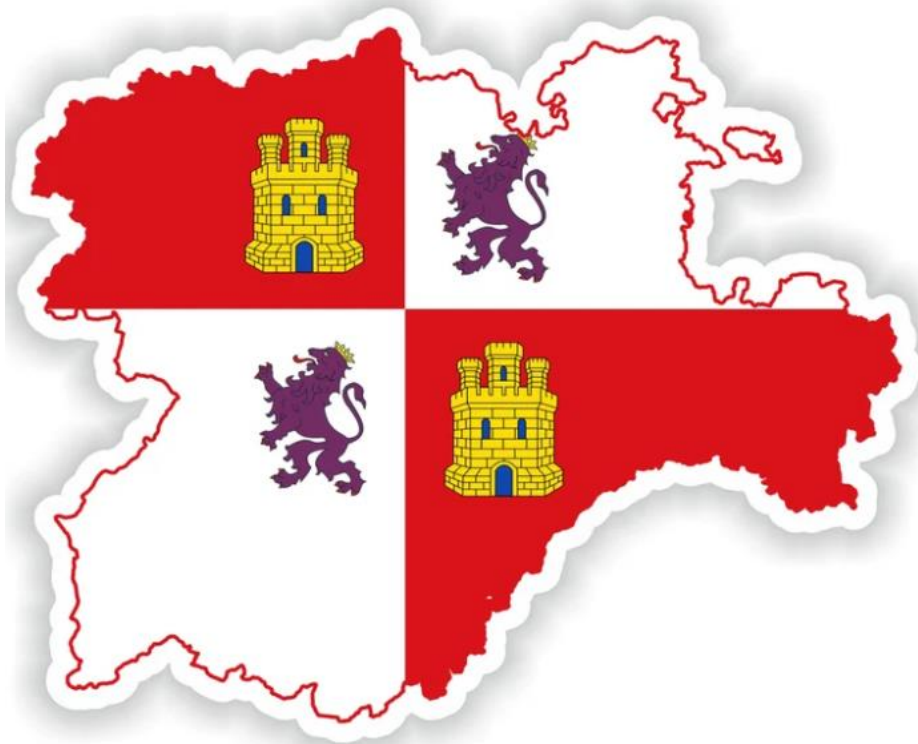


Matemáticas II

PAU 2017 a 2026
Castilla y León



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM
WWW.MATEMATICASPAU.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad de Castilla y León desde el año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU Extraordinaria 2026.....	3
PAU Ordinaria 2026.....	21
PAU Extraordinaria 2025.....	36
PAU Ordinaria 2025.....	48
EBAU Extraordinaria 2024.....	60
EBAU Extraordinaria 2024 (Mejora de nota).....	75
EBAU Ordinaria 2024.....	90
EBAU Ordinaria 2024 (Mejora de nota).....	107
EBAU Extraordinaria 2023.....	125
EBAU Ordinaria 2023.....	138
EBAU Extraordinaria 2022.....	151
EBAU Ordinaria 2022.....	165
EBAU Extraordinaria 2021.....	179
EBAU Ordinaria 2021.....	191
EBAU Extraordinaria 2020.....	205
EBAU Ordinaria 2020.....	218
EBAU Extraordinaria 2019.....	232
EBAU Ordinaria 2019.....	244
EBAU Extraordinaria 2018.....	257
EBAU Ordinaria 2018.....	273
EBAU Septiembre 2017.....	290
EBAU Junio 2017.....	303

PAU Extraordinaria 2026

	Pruebas de Acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	-----------------------	---------------------------------------

INDICACIONES

- 1. OPTATIVIDAD:** El examen consta de cuatro apartados: un apartado con un problema obligatorio y 3 apartados con la posibilidad de elegir entre dos problemas. Se deberá responder a un máximo de **CUATRO PROBLEMAS**: el problema obligatorio (apartado 3) y solamente un problema de cada uno de los tres apartados restantes. No es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciados, pero se expresará claramente cuáles son los elegidos. En caso de responder a dos problemas de un mismo apartado, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego y que no aparezca totalmente tachado.
- 2. CALCULADORA:** Se podrá usar una calculadora científica no programables, que no admita memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones ni cálculo matricial, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas y sin conexión a internet. Durante el desarrollo de la prueba no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.
- 3. CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:** Cada uno de los problemas se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.
- 4. DEDUCCIONES POR ERRORES ORTOGRÁFICOS Y GRAMATICALES:** Se penalizarán los errores ortográficos (grafías, tildes y puntuación) cometidos, hasta un máximo de un punto en la nota global del examen, teniéndose en cuenta que la repetición del mismo error se contabilizará como sólo uno, los dos primeros errores no se penalizarán y, a partir del tercer error ortográfico, se deducirá 0,1 puntos por error. Por errores en la redacción, en la presentación, incoherencia o incorrección léxica o gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto de la nota global. La máxima deducción global es de un punto.
- 5.** El examen debe realizarse usando **bolígrafo azul o negro** (sólo un color). No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.
- 6. Respuestas numéricas exactas o con tres dígitos decimales.**

APARTADO 1: (obligatorio)

Problema 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Resolver la ecuación matricial $\frac{1}{4}A^2 - AX = B$. (0,5 puntos)

b) Discutir el sistema de ecuaciones: $(A - \alpha I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1,5 puntos)

c) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$, calcular el valor de $\begin{vmatrix} g-5a & 2d & a \\ 2h-10b & 4e & 2b \\ i-5c & 2f & c \end{vmatrix}$. **(0,5 puntos)**

APARTADO 2: (elegir UN problema)

Problema 2A. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{4(x+1)}{(4+x^2)^2}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{x}{4}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

a) Estudiar las asíntotas de $f(x)$. **(1,5 puntos)**

b) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$. **(1 punto)**

Problema 2B. (Propuesto en la Comunidad de Cantabria en junio de 2024).

Considere la función $f(x) = x \ln(x)$ con $x > 0$

a) Calcular la derivada de $f(x)$. **(0,75 puntos)**

b) Calcular una primitiva de $f(x)$. **(0,75 puntos)**

c) Calcular el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX (abscisas) y las dos rectas $x=1$ y $x=2$. **(1 punto)**

APARTADO 3: (elegir UN problema)**Problema 3A.**

Dado el plano $\pi \equiv x + y = 0$, el punto $A(1, -1, 0)$ y la recta $s \equiv x = y = z$. Hallar la recta r , en su forma paramétrica, que pasa por A, está contenida en π , y corta a la recta s . **(2,5 puntos)**

Problema 3B.

Los puntos $A(1,1,1)$ y $B(0,2,0)$ son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD. El centro del paralelogramo es $E(0,0,1)$.

a) Calcular las coordenadas de los otros vértices. **(1 punto)**

b) Hallar la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo. **(1 punto)**

c) Hallar el volumen del tetraedro formado por los vértices ABEO, siendo O(0,0,0) el origen de coordenadas. **(0,5 puntos)**

APARTADO 4: (elegir UN problema)**Problema 4A.**

El agua almacenada diariamente en el pantano de Riaño durante el año 2.025 (365 días), sigue una distribución normal con media $337,2 \text{ hm}^3$ y desviación típica de $40,5 \text{ hm}^3$.

a) Elegido al azar un día del año 2.025, calcular la probabilidad de que el agua almacenada haya sido superior a $299,94 \text{ hm}^3$. **(1 punto)**

b) Calcular el número probable de días que en 2.025 tuvieron almacenada una cantidad de agua comprendida entre $299,94 \text{ hm}^3$ y $350,16 \text{ hm}^3$. **(1 punto)**

c) Razonar, utilizando sólo resultados de los apartados anteriores, si, en este contexto, es correcto afirmar que: “el número de días con una cantidad de agua almacenada comprendida entre 310 hm^3 y 330 hm^3 debería estar entre 170 y 180”. **(0,5 puntos)**

Problema 4B.

Lucía, Gloria y María se reparten los ejercicios que la profesora de matemáticas asigna a su grupo. Lucía resuelve el 45%, Gloria el 30% y María el resto. Además, sabemos que Lucía resuelve correctamente el 90% de los ejercicios que realiza, Gloria el 95% y María el 80%.

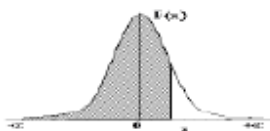
- a) Describir los sucesos y todas las probabilidades que se mencionan utilizando una notación adecuada. (0,5 puntos)

Si la profesora escoge un ejercicio al azar:

- b) Calcular la probabilidad de que el ejercicio esté resuelto correctamente. (1 punto)
 c) Sabiendo que el ejercicio es incorrecto, calcular la probabilidad de que lo haya resuelto Gloria. (1 punto)

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5190	0,5220	0,5250	0,5280	0,5310
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7010	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9600	0,9608	0,9618	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES**Problema 1.**

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Resolver la ecuación matricial $\frac{1}{4}A^2 - AX = B$. (0,5 puntos)

b) Discutir el sistema de ecuaciones: $(A - \alpha I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1,5 puntos)

c) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$, calcular el valor de $\begin{vmatrix} g-5a & 2d & a \\ 2h-10b & 4e & 2b \\ i-5c & 2f & c \end{vmatrix}$. (0,5 puntos)

a) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$\frac{1}{4}A^2 - AX = B \Rightarrow \frac{1}{4}A^2 - B = AX \Rightarrow X = A^{-1} \left(\frac{1}{4}A^2 - B \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{4}A^{-1}AA - A^{-1}B \Rightarrow X = \frac{1}{4}A - A^{-1}B$$

Determinamos la inversa de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 16 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}{16} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X = \frac{1}{4}A - A^{-1}B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} + 1 & 2 - \frac{1}{2} & -3 + 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} - \frac{2}{4} - \frac{11}{4} & -1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} & \frac{6}{4} - \frac{2}{4} - \frac{8}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & -2 \\ -1 & 1/2 & -1 \\ -5/2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) La matriz de coeficientes asociada al sistema es

$$A - \alpha I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 \\ 0 & 2-\alpha & 0 \\ 2 & 0 & 4-\alpha \end{pmatrix} \text{ y la matriz ampliada es}$$

$$A/B = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\alpha & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4-\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 \\ 0 & 2-\alpha & 0 \\ 2 & 0 & 4-\alpha \end{vmatrix} = (2-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = (2-\alpha)^2(4-\alpha)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (2-\alpha)^2(4-\alpha) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = 4 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 4$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha = 2$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B

usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{Fila 1^a \leftrightarrow Fila 3^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{Fila 3^a \leftrightarrow Fila 2^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{2 & 0 & 2 & 1}^{A/B} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \underbrace{0 & 0 & 0 & 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $\alpha = 4$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B

usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila 3^a + Fila 1^a \\ 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ -2 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \rightarrow Nueva Fila 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila 3^a + Fila 2^a \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rightarrow Nueva Fila 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{-2 & 2 & 0 & 0}^{A/B} \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ \underbrace{0 & 0 & 0 & 1}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 4$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución), si $\alpha = 2$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) y si $\alpha = 4$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

c) Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} g-5a & 2d & a \\ 2h-10b & 4e & 2b \\ i-5c & 2f & c \end{vmatrix} = \{ \text{Columna } 1^a + 5 \cdot \text{Columna } 3^a \} = \begin{vmatrix} g & 2d & a \\ 2h & 4e & 2b \\ i & 2f & c \end{vmatrix} =$$

$$= \{ \text{Sacamos factor común 2 en la } 2^a \text{ columna} \} = 2 \begin{vmatrix} g & d & a \\ 2h & 2e & 2b \\ i & f & c \end{vmatrix} =$$

$$= \{ \text{Sacamos factor común 2 en la } 2^a \text{ fila} \} = 4 \begin{vmatrix} g & d & a \\ h & e & b \\ i & f & c \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Trasponemos la matriz y el} \\ \text{determinante no cambia} \end{array} \right\} = 4 \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \\ \text{El determinante cambia de signo} \end{array} \right\} =$$

$$= -4 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -4 \cdot (-2) = \boxed{8}$$

Problema 2A. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{4(x+1)}{(4+x^2)^2}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{x}{4}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

a) Estudiar las asíntotas de $f(x)$.

(1,5 puntos)

b) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$.

(1 punto)

a) Los denominadores nunca se anulan y el dominio de la función son todos los números reales.

Asíntotas verticales. $x = a$

No tiene pues el dominio es $\mathbb{R}$.

Asíntotas horizontales. $y = b$

Estudiamos que ocurre cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4(x+1)}{(4+x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4\left(\frac{x}{x^4} + \frac{1}{x^4}\right)}{\left(\frac{4}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)}{\left(\frac{4}{x^2} + 1\right)^2} = \frac{4\left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}\right)}{\left(\frac{4}{\infty} + 1\right)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Estudiamos que ocurre cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{x}{4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{2(1+e^x)\cancel{e^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(1+e^x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = \frac{+\infty}{4} = +\infty$$

$$\dots = 0 + \infty = +\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Cuando x tiende a $-\infty$ no tiene asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.

Estudiamos que ocurre cuando x tiende a $+\infty$.

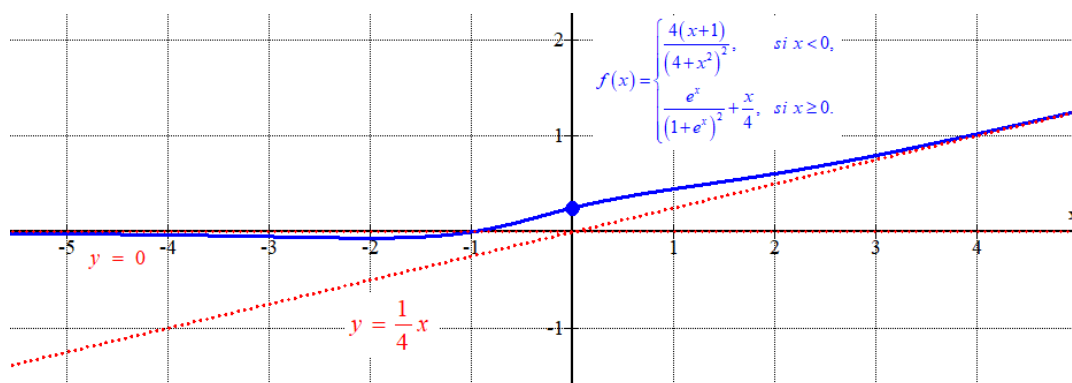
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{x}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x(1+e^x)^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x(1+e^x)^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} = \dots$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x(1+e^x)^2} &= \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2 + 2x(1+e^x)e^x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2 + 2x(e^x + e^{2x})} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2(1+e^x)e^x + 2(e^x + e^{2x}) + 2x(e^x + 2e^{2x})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2(1+e^x)e^x + 2(1+e^x)e^x + 2x(1+2e^x)e^x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(1+e^x) + 2(1+e^x) + 2x(1+2e^x)} = \frac{1}{+\infty} = 0 \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\dots = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{x}{4} - \frac{1}{4}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Calculado} \\ \text{previamente} \end{array} \right\} = 0$$

La recta $y = \frac{1}{4}x$ es asíntota oblicua de la función cuando x tiende a $+\infty$.



b) En el intervalo $(0, 1)$ la función tiene la expresión $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{x}{4}$. Calculamos su integral.

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{x}{4} dx = \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \int \frac{x}{4} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 1+e^x = t \rightarrow e^x = t-1 \rightarrow e^x dx = dt \rightarrow \\ \rightarrow dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t-1} dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{t-1}{t^2} \frac{1}{t-1} dt + \frac{1}{4} \int x dx = \int \frac{1}{t^2} dt + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} = \int t^{-2} dt + \frac{x^2}{8} = \frac{t^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{8} = \frac{x^2}{8} - \frac{1}{t} = \boxed{\frac{x^2}{8} - \frac{1}{1+e^x} + K}$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{x^2}{8} - \frac{1}{1+e^x} \right]_0^1 = \left[\frac{1^2}{8} - \frac{1}{1+e^1} \right] - \left[\frac{0^2}{8} - \frac{1}{1+e^0} \right] = \frac{1}{8} - \frac{1}{1+e} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{8} - \frac{1}{1+e}}$$

Problema 2B. (Propuesto en la Comunidad de Cantabria en junio de 2024).

Considere la función $f(x) = x \ln(x)$ con $x > 0$

- a) Calcular la derivada de $f(x)$. (0,75 puntos)
 b) Calcular una primitiva de $f(x)$. (0,75 puntos)
 c) Calcular el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX (abscisas) y las dos rectas $x=1$ y $x=2$. (1 punto)

a) Utilizamos la fórmula de la derivada de un producto de funciones.

$$f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = 1 + \ln x, \text{ con } x > 0$$

b) Para calcular la integral utilizamos el método de integración por partes.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

La integral indefinida de $f(x)$ es $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$. Considerando $C = 0$ obtenemos una primitiva de la función que tiene la expresión $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$.

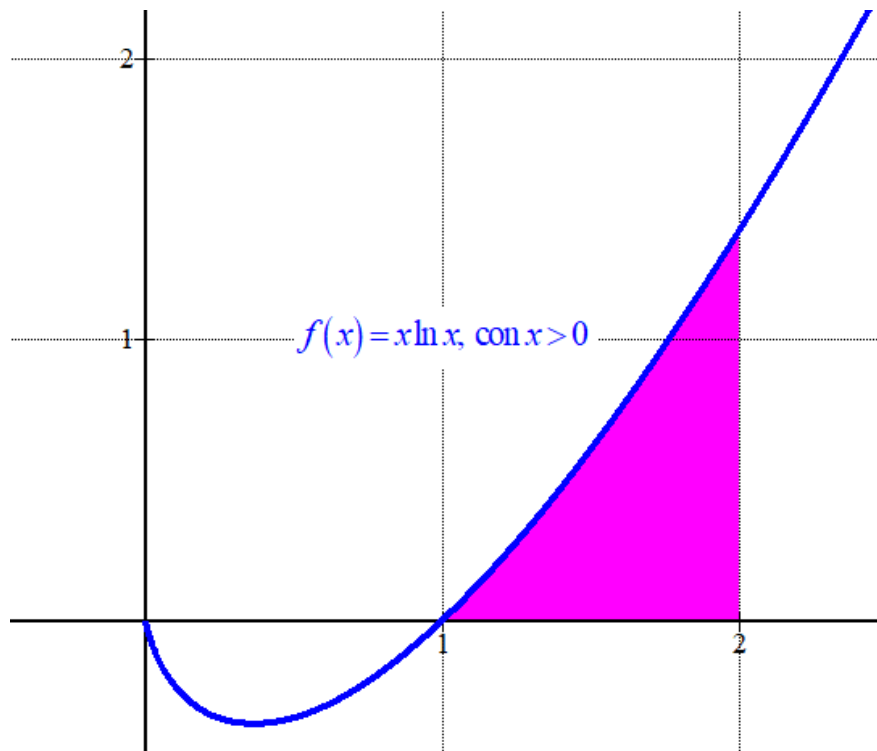
c) Averiguamos si la función corta el eje de abscisas entre 1 y 2.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x \ln x \\ \text{eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \ln x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (0, +\infty) \\ \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

La función no corta el eje en $(1, 2)$, por lo que el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$ se obtiene con la integral definida entre 1 y 2 de la función. Sabemos que $f(x) = x \ln x > 0$, con $x > 1$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{2^2}{2} \ln 2 - \frac{2^2}{4} \right] - \left[\frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1^2}{4} \right] = 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = \boxed{\ln 4 - \frac{3}{4} \approx 0.64 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El área del recinto tiene un valor de $\ln 4 - \frac{3}{4} \approx 0.64$ unidades cuadradas.



Problema 3A.

Dado el plano $\pi \equiv x + y = 0$, el punto $A(1, -1, 0)$ y la recta $s \equiv x = y = z$. Hallar la recta r , en su forma paramétrica, que pasa por A, está contenida en π , y corta a la recta s . (2,5 puntos)

El punto A pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, -1, 0) \\ \pi \equiv x + y = 0 \\ \text{¿} A \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 1 - 1 = 0? \Rightarrow \text{¡¡ SI !!} \Rightarrow A \in \pi$$

La recta s debe cortar al plano. Hallamos el punto P de corte de la recta con el plano.

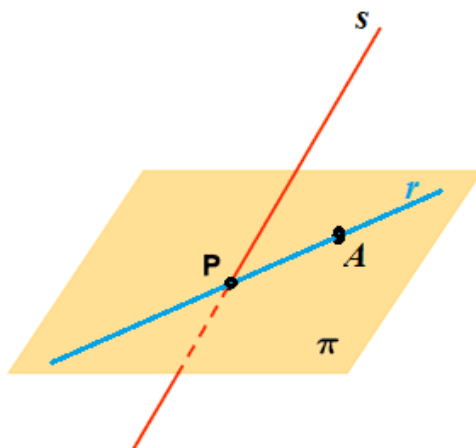
$$s \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_s(0, 0, 0) \\ \vec{v}_s = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y = 0 \\ s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + \lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow P(0, 0, 0)$$

La recta r debe cortar a la recta s y estar contenida en el plano, por lo que la recta debe pasar por el punto P. Podemos tomar como vector director de la recta r el vector $\overrightarrow{PA}$. Hallamos la recta r como la recta que pasa por A(1, -1, 0) con vector director $\overrightarrow{PA}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = \overrightarrow{PA} = (1, -1, 0) - (0, 0, 0) = (1, -1, 0) \\ A(1, -1, 0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$.

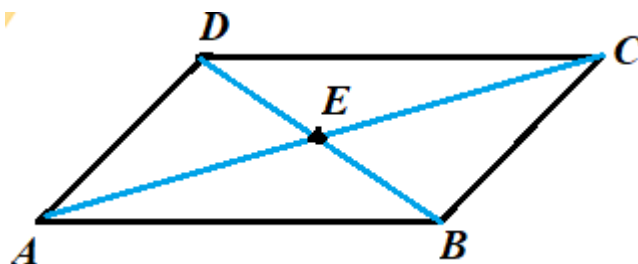


Problema 3B.

Los puntos $A(1,1,1)$ y $B(0,2,0)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$. El centro del paralelogramo es $E(0,0,1)$.

- a) Calcular las coordenadas de los otros vértices. **(1 punto)**
 b) Hallar la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo. **(1 punto)**
 c) Hallar el volumen del tetraedro formado por los vértices $ABEO$, siendo $O(0,0,0)$ el origen de coordenadas. **(0,5 puntos)**

a) Dibujamos el paralelogramo $ABCD$.



El vértice C se puede obtener sumándole al punto E el vector $\overrightarrow{AE}$.

$$\overrightarrow{AE} = (0,0,1) - (1,1,1) = (-1,-1,0)$$

$$C = E + \overrightarrow{AE} = (0,0,1) + (-1,-1,0) = (-1,-1,1)$$

El vértice C tiene coordenadas $C(-1,-1,1)$.

El vértice D se puede obtener sumándole al punto E el vector $\overrightarrow{BE}$.

$$\overrightarrow{BE} = (0,0,1) - (0,2,0) = (0,-2,1)$$

$$D = E + \overrightarrow{BE} = (0,0,1) + (0,-2,1) = (0,-2,2)$$

El vértice D tiene coordenadas $D(0,-2,2)$.

b) Hallamos la ecuación del plano π que contiene los puntos A , B y E .

$$\left. \begin{array}{l} A(1,1,1) \in \pi \\ B(0,2,0) \in \pi \\ E(0,0,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AE} = (-1,-1,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{BE} = (0,-2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 0 + 2(z-1) - 0 + y - 0 = 0 \Rightarrow -x + 2z - 2 + y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - y - 2z + 2 = 0}$$

La ecuación del plano que contiene el paralelogramo $ABCD$ es $\pi: x - y - 2z + 2 = 0$.

c) El volumen del tetraedro $ABEO$ es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OE}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AE} = (-1, -1, 0) \\ \overrightarrow{BE} = (0, -2, 1) \\ \overrightarrow{OE} = (0, 0, 1) - (0, 0, 0) = (0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OE}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

El volumen del tetraedro ABEO es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \simeq 0.333$ unidades cúbicas.

Problema 4A.

El agua almacenada diariamente en el pantano de Riaño durante el año 2025 (365 días), sigue una distribución normal con media 337,2 hm³ y desviación típica de 40,5 hm³.

- a) Elegido al azar un día del año 2.025, calcular la probabilidad de que el agua almacenada haya sido superior a 299,94 hm³. **(1 punto)**
- b) Calcular el número probable de días que en 2.025 tuvieron almacenada una cantidad de agua comprendida entre 299,94 hm³ y 350,16 hm³. **(1 punto)**
- c) Razonar, utilizando sólo resultados de los apartados anteriores, si, en este contexto, es correcto afirmar que: “el número de días con una cantidad de agua almacenada comprendida entre 310 hm³ y 330 hm³ debería estar entre 170 y 180”. **(0,5 puntos)**

- a) Consideramos X = El agua almacenada en el pantano de Riaño en hm³. $X = N(337.2, 40.5)$.
Nos piden calcular $P(X > 299.94)$.

$$P(X > 299.94) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 337.2}{40.5} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{299.94 - 337.2}{40.5}\right) =$$

$$= P(Z > -0.92) = P(Z < 0.92) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.8212}$$

	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8212

- b) Calculamos $P(299.94 < X < 350.16)$.

$$P(299.94 < X < 350.16) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 337.2}{40.5} \end{array} \right\} = P\left(\frac{299.94 - 337.2}{40.5} < Z < \frac{350.16 - 337.2}{40.5}\right) =$$

$$= P(-0.92 < Z < 0.32) = P(Z < 0.32) - P(Z < -0.92) =$$

$$= P(Z < 0.32) - P(Z > 0.92) = P(Z < 0.32) - [1 - P(Z \leq 0.92)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.6255 - [1 - 0.8212] = \boxed{0.4467}$$

	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6654	0,6691	0,6729

La probabilidad de que un día cualquiera el pantano tenga almacenada una cantidad de agua comprendida entre $299,94 \text{ hm}^3$ y $350,16 \text{ hm}^3$ es de 0.4467. Multiplicamos esta cifra por los 365 días del año y obtenemos que $365 \cdot 0.4467 = 163$ días el pantano tendrá almacenada una cantidad de agua comprendida entre $299,94 \text{ hm}^3$ y $350,16 \text{ hm}^3$.

- c) Sabemos que “el número de días con una cantidad de agua almacenada comprendida entre $299,94 \text{ hm}^3$ y $350,16 \text{ hm}^3$ es de 163”.

El intervalo (310, 330) tiene menos amplitud que el intervalo (299.94, 350.16) por lo que “el número de días con una cantidad de agua almacenada comprendida entre 310 hm^3 y 330 hm^3 debe ser menor de 163”.

La afirmación “el número de días con una cantidad de agua almacenada comprendida entre 310 hm^3 y 330 hm^3 debería estar entre 170 y 180” no es correcta, pues 170 es mayor que 163.

Problema 4B.

Lucía, Gloria y María se reparten los ejercicios que la profesora de matemáticas asigna a su grupo. Lucía resuelve el 45%, Gloria el 30% y María el resto. Además, sabemos que Lucía resuelve correctamente el 90% de los ejercicios que realiza, Gloria el 95% y María el 80%.

- a) Describir los sucesos y todas las probabilidades que se mencionan utilizando una notación adecuada. **(0,5 puntos)**

Si la profesora escoge un ejercicio al azar:

- b) Calcular la probabilidad de que el ejercicio esté resuelto correctamente. **(1 punto)**
 c) Sabiendo que el ejercicio es incorrecto, calcular la probabilidad de que lo haya resuelto Gloria. **(1 punto)**

- a) Llamamos L al suceso “el ejercicio lo ha resuelto Lucía”, G a “el ejercicio lo ha resuelto Gloria”, M a “el ejercicio lo ha resuelto María” y C al suceso “el ejercicio se ha resuelto correctamente”. Considerando el experimento “la profesora elige un ejercicio al azar” tenemos las siguientes probabilidades: $P(L) = 0.45$, $P(G) = 0.3$, $P(M) = 1 - 0.45 - 0.3 = 0.25$, $P(C/L) = 0.90$, $P(C/G) = 0.95$ y $P(C/M) = 0.80$.

- b) Debemos calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap L) + P(C \cap G) + P(C \cap M) = \\ &= P(L)P(C/L) + P(G)P(C/G) + P(M)P(C/M) = \\ &= 0.45 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0.95 + 0.25 \cdot 0.8 = \boxed{0.89} \end{aligned}$$

La probabilidad de que un ejercicio elegido al azar esté resuelto correctamente vale 0.89.

- c) Debemos calcular $P(G/\bar{C})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(G/\bar{C}) = \frac{P(G \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(G)P(\bar{C}/G)}{1 - P(C)} = \frac{0.3 \cdot (1 - 0.95)}{1 - 0.89} = \boxed{\frac{3}{22} \approx 0.1364}$$

La probabilidad de que un ejercicio resuelto de forma incorrecta lo haya resuelto Gloria tiene un valor de $\frac{3}{22} \approx 0.1364$.

PAU Ordinaria 2026

	Pruebas de Acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	---	-----------------------	--

INDICACIONES

- 1. OPTATIVIDAD:** El examen consta de cuatro apartados: un apartado con un problema obligatorio y 3 apartados con la posibilidad de elegir entre dos problemas. Se deberá responder a un máximo de **CUATRO PROBLEMAS**: el problema obligatorio (apartado 3) y solamente un problema de cada uno de los tres apartados restantes. No es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciados, pero se expresará claramente cuáles son los elegidos. En caso de responder a dos problemas de un mismo apartado, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego y que no aparezca totalmente tachado.
- 2. CALCULADORA:** Se podrá usar una calculadora científica no programables, que no admita memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones ni cálculo matricial, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas y sin conexión a internet. Durante el desarrollo de la prueba no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.
- 3. CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:** Cada uno de los problemas se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.
- 4. DEDUCCIONES POR ERRORES ORTOGRÁFICOS Y GRAMATICALES:** Se penalizarán los errores ortográficos (grafías, tildes y puntuación) cometidos, hasta un máximo de un punto en la nota global del examen, teniéndose en cuenta que la repetición del mismo error se contabilizará como sólo uno, los dos primeros errores no se penalizarán y, a partir del tercer error ortográfico, se deducirá 0,1 puntos por error. Por errores en la redacción, en la presentación, incoherencia o incorrección léxica o gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto de la nota global. La máxima deducción global es de un punto.
5. El examen debe realizarse usando **bolígrafo azul o negro** (sólo un color). No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.
6. **Respuestas numéricas exactas o con tres dígitos decimales.**

APARTADO 1: (elegir UN problema)

Problema 1A.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m-10)x - 2y - z = -1 \\ 7x + (m+2)y + 2z = m+1, \text{ donde } m \in \mathbb{R} \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

- Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m . **(1,5 puntos)**
- Resolver, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$. **(1 punto)**

Problema 1B. (Propuesto en Galicia, Modelo 0 de 2025)

- Calcular A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

- b) Si $M = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x, y, z sabiendo que $(3z)M^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
Entiéndase que I es la matriz identidad. **(1,5 puntos)**

APARTADO 2: (elegir UN problema)**Problema 2A.**

- a) Calcular $\int_0^1 \frac{x^3 - 5}{\sqrt{x}} dx$. **(1,25 puntos)**
- b) Probar que la función $f(x) = 2 - e^x$ posee una sola raíz real., encontrando un intervalo que la contenga. **(1,25 puntos)**

Problema 2B.

- a) Dada la función $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$. Determinar su dominio de definición, su monotonía y sus asíntotas. Justifica la existencia o no de extremos relativos. **(1,5 puntos)**
- b) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(x) dx$. **(1 punto)**

APARTADO 3: (obligatorio)**Problema 3.**

Dados el plano $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$ y el plano π_2 determinado por el punto $P(0, 2, 4)$ y los vectores directores $\vec{v}_1 = (0, 2, 6)$ y $\vec{v}_2 = (1, 0, b)$, se pide:

- a) Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos y distintos. **(0,75 puntos)**
- b) Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2 . **(0,75 puntos)**
- c) Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2 . **(1 punto)**

APARTADO 4: (elegir UN problema)**Problema 4A.**

Una empresa fabrica móviles de tres marcas distintas: A , N y M . El 20% de los móviles son de la marca A y el 40% de la marca N . Se decide instalar un software oculto que permita espiar a los usuarios de estos móviles. El software oculto se instala en el 15% de los móviles de la marca A , en un 10% de la marca N y en un 12% de los móviles de la marca M . Se pide:

- a) Describir todas las probabilidades, condicionadas y no condicionadas, que se deducen directamente del enunciado. **(0,3 puntos)**
- b) Determinar la probabilidad de que un móvil fabricado por esta empresa tenga instalado el software espía. **(1 punto)**
- c) Si un móvil fabricado por esta empresa tiene instalado el software espía, calcular la probabilidad de que sea de la marca A . **(1,2 puntos)**

Problema 4B.

De una bolsa de 20 fichas numeradas del 1 al 20 se extraen sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento. Se pide:

- a) Calcular la probabilidad de que ambos números sean múltiplos de 3. **(0,5 puntos)**

- b) Calcular la probabilidad de que el primer número sea múltiplo de 6 y el segundo sea múltiplo de 3. **(0,75 puntos)**
- c) Calcular la probabilidad de que ninguno de los dos números sean múltiplos de 2. **(0,75 puntos)**
- d) Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un número impar, sabiendo que la primera también lo ha sido. **(0,5 puntos)**

SOLUCIONES**Problema 1A.**

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m-10)x - 2y - z = -1 \\ 7x + (m+2)y + 2z = m+1, \text{ donde } m \in \mathbb{R} \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m .

(1,5 puntos)

b) Resolver, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$.

(1 punto)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m-10 & -2 & -1 \\ 7 & m+2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$\text{es } A/B = \begin{pmatrix} m-10 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & m+2 & 2 & m+1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m-10 & -2 & -1 \\ 7 & m+2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (m-10)(m+2) - 20 - 14 + 5m + 10 + 14 - 4m + 40 =$$

$$= m^2 + 2m - 10m - 20 - 20 + 5m + 10 - 4m + 40 = m^2 - 7m + 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 = 0 \Rightarrow m = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = 5 = m \\ \frac{7-3}{2} = 2 = m \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $m \neq 5$ y $m \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $m = 5$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & 7 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B

usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & 7 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 5 \cdot \text{Fila } 2^a + 7 \cdot \text{Fila } 1^a & & & \\ 35 & 35 & 10 & 30 \\ -35 & -14 & -7 & -7 \\ \hline 0 & 21 & 3 & 23 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a & & & \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & -2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{A/B} & & \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 21 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \underbrace{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $m=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B

usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 8 \cdot \text{Fila } 2^a + 7 \cdot \text{Fila } 1^a & & & \\ 56 & 32 & 16 & 24 \\ -56 & -14 & -7 & -7 \\ \hline 0 & 18 & 9 & 17 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 8 \cdot \text{Fila } 3^a + 5 \cdot \text{Fila } 1^a & & & \\ 40 & 16 & 8 & 8 \\ -40 & -10 & -5 & -5 \\ \hline 0 & 6 & 3 & 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 18 & 9 & 17 \\ 0 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a & & & \\ 0 & 18 & 9 & 9 \\ 0 & -18 & -9 & -17 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{A/B} & & \\ -8 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 18 & 9 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ & \underbrace{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $m \neq 5$ y $m \neq 2$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución), si $m=5$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) y si $m=2$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

b) Para $m=3$ el sistema es compatible determinado (caso 1). Lo resolvemos.

$$\begin{cases} -7x - 2y - z = -1 \\ 7x + 5y + 2z = 4 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + \text{Ecuación } 1^a \\ 7x \quad +5y \quad +2z \quad = 4 \\ -7x \quad -2y \quad -z \quad = -1 \\ \hline 3y \quad +z \quad = 3 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7x - 2y - z = -1 \\ 3y + z = 3 \rightarrow z = 3 - 3y \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7x - 2y - 3 + 3y = -1 \\ 5x + 2y + 3 - 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7x + y = 2 \rightarrow y = 2 + 7x \\ 5x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow 5x - 2 - 7x = -2 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2 + 7 \cdot 0 = 2} \Rightarrow \boxed{z = 3 - 3 \cdot 2 = -3}$$

Para $m = 3$ la solución del sistema es $x = 0$, $y = 2$, $z = -3$.

Problema 1B. (Propuesto en Galicia, Modelo 0 de 2025)

a) Calcular A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. (1 punto)

b) Si $M = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x, y, z sabiendo que $(3z)M^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
Entiéndase que I es la matriz identidad. (1,5 puntos)

a) La matriz A debe ser una matriz cuadrada de orden 2. Suponemos que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ c-d=0 \\ a+b=2 \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ c=d \\ a+b=2 \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+1+b=2 \rightarrow 2b=1 \rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}} \\ d+d=1 \rightarrow 2d=1 \rightarrow \boxed{d=\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}} \\ \boxed{c=\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) Multiplicamos la ecuación matricial por M , sustituimos las matrices y resolvemos el sistema.

$$(3z)M^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (3z)M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - I \Rightarrow (3z)M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3z)M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (3z)M \cdot M^{-1} = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (3z)I = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3z & 0 \\ 0 & 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-x & 3x \\ y-z & 3z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3z = 3-x \\ 0 = 3x \rightarrow \boxed{x=0} \\ 0 = y-z \\ 3z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3z = 3-0 \rightarrow \boxed{z=1} \\ z = y \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=1}$$

Los valores buscados son $x = 0, y = 1, z = 1$.

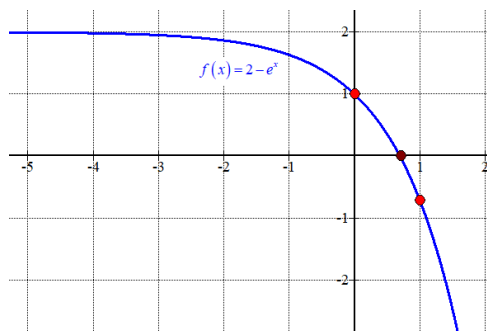
Problema 2A.

a) Calcular $\int_0^1 \frac{x^3 - 5}{\sqrt{x}} dx$.

(1,25 puntos)b) Probar que la función $f(x) = 2 - e^x$ posee una sola raíz real., encontrando un intervalo que la contenga. **(1,25 puntos)**

a) Calculamos la integral definida pedida.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{x^3 - 5}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x}} - \frac{5}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{x^{1/2}} - \frac{5}{x^{1/2}} dx = \int_0^1 x^{3-\frac{1}{2}} - 5x^{-1/2} dx = \\
 &= \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} - 5x^{-1/2} dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - 5 \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 = \left[\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - 5 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \left[\frac{2\sqrt{x^7}}{7} - 10\sqrt{x} \right]_0^1 = \\
 &= \left[\frac{2\sqrt{1^7}}{7} - 10\sqrt{1} \right] - \left[\frac{2\sqrt{0^7}}{7} - 10\sqrt{0} \right] = \frac{2}{7} - 10 = \boxed{\frac{-68}{7}}
 \end{aligned}$$

b) La función $f(x) = 2 - e^x$ es continua en $\mathbb{R}$. Si consideramos el intervalo $[0, 1]$ comprobamos que $f(0) = 2 - e^0 = 1 > 0$ y $f(1) = 2 - e^1 \simeq -0.72 < 0$.Si aplicamos el teorema de Bolzano a la función $f(x) = 2 - e^x$ en el intervalo $[0, 1]$ podemos afirmar que existe $c \in (0, 1)$ para el que $f(c) = 0$.Justificamos que esa raíz es única. La derivada de la función es $f'(x) = -e^x$ que es siempre negativa, por lo que la función siempre es decreciente.La función es continua y decreciente por lo que es positiva en el intervalo $(-\infty, 0)$ y negativa en el intervalo $(1, +\infty)$. La función no tiene ninguna raíz real en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.En el intervalo $(0, 1)$ hemos visto que existe $c \in (0, 1)$ para el que $f(c) = 0$. Si existiese otro valor $d \in (0, 1)$ para el que $f(d) = 0$ aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x) = 2 - e^x$ en el intervalo (c, d) la función es continua en $[c, d]$ y derivable en (c, d) con $f(c) = f(d) = 0$. Aplicando el teorema de Rolle debería existir $a \in (c, d)$ tal que $f'(a) = 0$. Y esto no es posible pues la derivada es $f'(x) = -e^x$ y nunca se anula.La hipótesis de partida es errónea y podemos afirmar que la raíz de la función que existe en el intervalo $(0, 1)$ es única.

Problema 2B.

a) Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$. Determinar su dominio de definición, su monotonía y sus asíntotas.

Justifica la existencia o no de extremos relativos.

(1,5 puntos)

b) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x) \cos(x) dx$.

(1 punto)

a) El dominio de la función es $\mathbb{R}$, pues el denominador de la fracción nunca se anula, pues e^x siempre es mayor que cero.

Utilizamos la derivada para hallar los posibles puntos críticos.

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot (1+e^x) - 1 \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$$

Esta expresión de la derivada siempre es negativa.

$$\left. \begin{array}{l} e^x > 0 \rightarrow -e^x < 0 \\ (1+e^x)^2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0$$

La función siempre es decreciente. La función no tiene puntos críticos y por tanto no tiene extremos relativos.

Asíntotas verticales. $x = a$

No existen, pues el dominio lo forman todos los números reales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

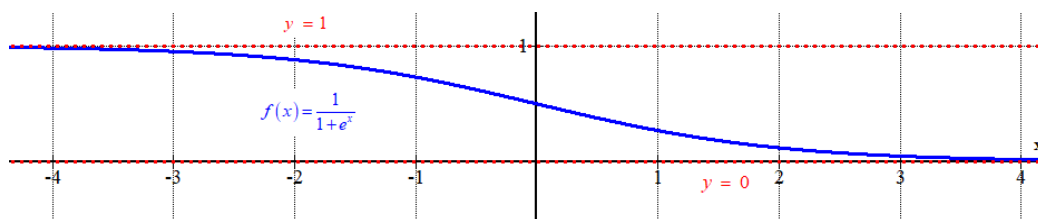
$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función cuando x tiende a $+\infty$.

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal de la función cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.



b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \operatorname{sen}(x) \cos(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \operatorname{sen}(x) = t \rightarrow \cos(x) dx = dt \end{array} \right\} = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2} + K$$

Calculamos el valor de la integral definida pedida.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x) \cos(x) dx = \left[\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} \right] - \left[\frac{\operatorname{sen}^2(0)}{2} \right] = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Problema 3.

Dados el plano $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$ y el plano π_2 determinado por el punto $P(0, 2, 4)$ y los vectores directores $\vec{v}_1 = (0, 2, 6)$ y $\vec{v}_2 = (1, 0, b)$, se pide:

- a) Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos y distintos. **(0,75 puntos)**
 b) Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2 . **(0,75 puntos)**
 c) Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2 . **(1 punto)**

a) Hallamos la ecuación del plano π_2 .

$$\left. \begin{array}{l} P(0, 2, 4) \in \pi_2 \\ \vec{v}_1 = (0, 2, 6) \\ \vec{v}_2 = (1, 0, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2bx + 6y - 12 + 0 - 2z + 8 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2bx + 6y - 2z - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_2 : bx + 3y - z - 2 = 0}$$

Para que los planos sean paralelos o coincidentes deben tener un vector normal con coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_2 : bx + 3y - z - 2 = 0 \\ \pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a \\ \pi_1 \parallel \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{3}{-3} = \frac{-1}{1} \Rightarrow \frac{b}{2} = -1 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

Para este valor las ecuaciones de los dos planos quedan $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$ y

$$\pi_2 : -2x + 3y - z - 2 = 0.$$

Le cambiamos el signo a la ecuación del plano π_2 y quedan los planos con las ecuaciones

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z - a = 0 \text{ y } \pi_2 : 2x - 3y + z + 2 = 0.$$

Los dos planos son coincidentes si $a = -2$ y son paralelos para cualquier valor de a distinto de -2 .

Para cualquier valor de a distinto de -2 y $b = -2$ los planos π_1 y π_2 son paralelos y distintos.

- b) Para $a = 1$ y $b = 0$ los planos son secantes y coinciden en una recta. Determinamos sus ecuaciones paramétricas.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x - 3y + z = 1 \\ \pi_2 : -3y + z + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z = 1 - 2x + 3y \\ -3y + z + 2 = 0 \end{array} \Rightarrow -\cancel{3y} + 1 - 2x + \cancel{3y} + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = 2x \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 - 2 \cdot \frac{3}{2} + 3y \\ -3y + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2 + 3y \\ -3y + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = -2 + 3y \Rightarrow r: \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

La recta intersección de los dos planos tiene ecuación $r: \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$

c) Para $a = 4$ y $b = -2$ los dos planos son paralelos. Los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2 son los puntos pertenecientes a un plano π_3 paralelo a ambos situado a mitad de distancia de π_1 a π_2 .

Para $a = 4$ y $b = -2$ los planos quedan $\pi_1: 2x - 3y + z - 4 = 0$ y $\pi_2: -2x + 3y - z - 2 = 0$.

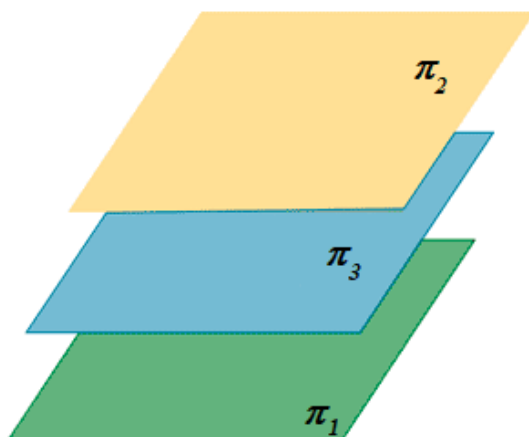
Sea el punto $P(x, y, z)$ equidistante de ambos planos. Se debe cumplir:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: 2x - 3y + z - 4 = 0 \\ \pi_2: -2x + 3y - z - 2 = 0 \\ d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|2x - 3y + z - 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{|-2x + 3y - z - 2|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |2x - 3y + z - 4| = |-2x + 3y - z - 2| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z - 4 = -2x + 3y - z - 2 \rightarrow -4 = -2 \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ 2x - 3y + z - 4 = 2x - 3y - z - 2 \rightarrow 0 \\ 2x - 3y + z - 4 = -(2x - 3y - z - 2) \rightarrow 4x - 6y + 2z - 2 = 0 \rightarrow \pi_3: 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

El plano equidistante de los planos tiene ecuación $\pi_3: 2x - 3y + z - 1 = 0$.



Problema 4A.

Una empresa fabrica móviles de tres marcas distintas: A , N y M . El 20% de los móviles son de la marca A y el 40% de la marca N . Se decide instalar un software oculto que permita espiar a los usuarios de estos móviles. El software oculto se instala en el 15% de los móviles de la marca A , en un 10% de la marca N y en un 12% de los móviles de la marca M . Se pide:

- a) Describir todas las probabilidades, condicionadas y no condicionadas, que se deducen directamente del enunciado. **(0,3 puntos)**
- b) Determinar la probabilidad de que un móvil fabricado por esta empresa tenga instalado el software espía. **(1 punto)**
- c) Si un móvil fabricado por esta empresa tiene instalado el software espía, calcular la probabilidad de que sea de la marca A . **(1,2 puntos)**

a) Llamamos A , N y M a los sucesos “elegir un móvil de la marca A , N o M ”, respectivamente.

Llamamos S al suceso “tener instalado software espía en el móvil”.

Por los datos proporcionados sabemos

$$P(A) = 0.20, P(N) = 0.40, P(M) = 1 - 0.20 - 0.40 = 0.40.$$

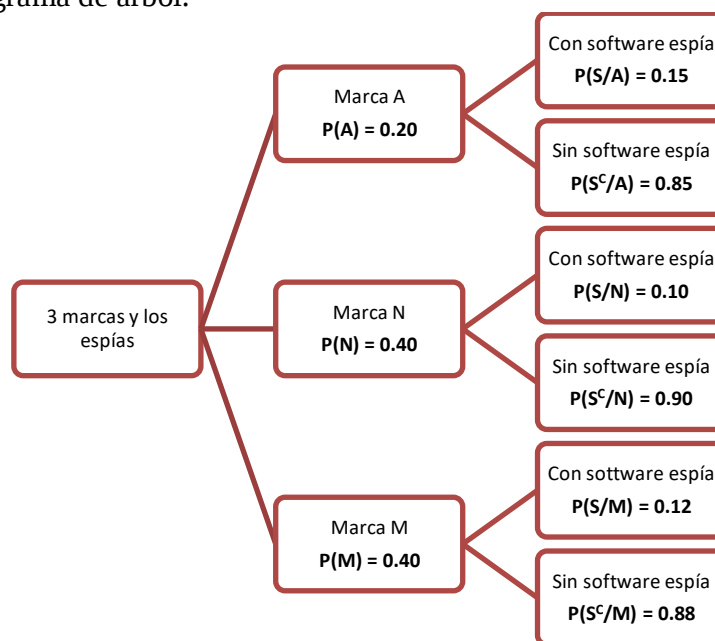
También sabemos que:

El software oculto se instala en el 15% de los móviles de la marca $A \rightarrow P(S/A) = 0.15$.

En un 10% de la marca $N \rightarrow P(S/N) = 0.10$.

En un 12% de los móviles de la marca $M \rightarrow P(S/M) = 0.12$

Realizamos un diagrama de árbol.



b) Nos piden calcular $P(S)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A)P(S/A) + P(N)P(S/N) + P(M)P(S/M) = \\ &= 0.2 \cdot 0.15 + 0.4 \cdot 0.10 + 0.4 \cdot 0.12 = \boxed{0.118} \end{aligned}$$

c) Debemos calcular $P(A/S)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/S) = \frac{P(S \cap A)}{P(S)} = \frac{P(A)P(S/A)}{0.118} = \frac{0.2 \cdot 0.15}{0.118} = \frac{15}{59} \approx 0.2542$$

Problema 4B.

De una bolsa de 20 fichas numeradas del 1 al 20 se extraen sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento. Se pide:

- a) Calcular la probabilidad de que ambos números sean múltiplos de 3. **(0,5 puntos)**
- b) Calcular la probabilidad de que el primer número sea múltiplo de 6 y el segundo sea múltiplo de 3. **(0,75 puntos)**
- c) Calcular la probabilidad de que ninguno de los dos números sean múltiplos de 2. **(0,75 puntos)**
- d) Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un número impar, sabiendo que la primera también lo ha sido. **(0,5 puntos)**

- a) Del 1 al 20 son múltiplos de 3 el 3, 6, 9, 12, 15 y 18. Al sacar una primera ficha hay 20 resultados posibles y 6 son favorables a obtener un múltiplo de 3. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de extraer una primera ficha múltiplo de 3 vale $\frac{6}{20}$.

Suponiendo que la primera ficha extraída es múltiplo de 3 nos quedan en la bolsa 19 fichas, siendo 5 las fichas que nos quedan que son múltiplo de 3. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de extraer una segunda ficha múltiplo de 3 habiendo extraído previamente una primera ficha múltiplo de 3 vale $\frac{5}{19}$.

Al extraer sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento la probabilidad de que ambos números sean múltiplos de 3 vale $\frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3}{38} \approx 0.0789$.

- b) Del 1 al 20 son múltiplos de 6 el 6, 12 y 18. Al sacar una primera ficha hay 20 resultados posibles y 3 son favorables a obtener un múltiplo de 6. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de extraer una primera ficha múltiplo de 6 vale $\frac{3}{20}$.

Suponiendo que la primera ficha extraída es múltiplo de 6 nos quedan en la bolsa 19 fichas, siendo 5 las fichas que nos quedan que son múltiplo de 3. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de extraer una segunda ficha múltiplo de 3 habiendo extraído previamente una primera ficha múltiplo de 6 vale $\frac{5}{19}$.

Al extraer sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento la probabilidad de que el primer número sea múltiplo de 6 y el segundo sea múltiplo de 3 vale $\frac{3}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3}{76} \approx 0.03947$.

- c) Del 1 al 20 no son múltiplos de 2 el 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 y 19. Al sacar una primera ficha hay 20 resultados posibles y 10 son favorables a obtener un número que no es múltiplo de 2. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de extraer una primera ficha que no es múltiplo de 2 vale $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

Suponiendo que la primera ficha extraída no es múltiplo de 2 nos quedan en la bolsa 19 fichas, siendo 9 las fichas que nos quedan que no son múltiplo de 2. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de extraer una segunda ficha que no es múltiplo de 2 habiendo extraído previamente una primera ficha que no es múltiplo de 2 vale $\frac{9}{19}$.

Al extraer sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento la probabilidad de que ambas no sean múltiplo de 2 vale $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{38} \approx 0.2368$.

- d) Del 1 al 20 hay 10 fichas impares. Si la primera ficha extraída es impar nos quedan en la bolsa 19 fichas, siendo 9 las fichas que nos quedan que son impares. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de extraer una segunda ficha impar habiendo extraído previamente una primera ficha impar vale $\frac{9}{19}$.

PAU Extraordinaria 2025

	Pruebas de Acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	-----------------------	-----------------------------------

INDICACIONES

- 1. OPTATIVIDAD:** El examen consta de cuatro apartados: un apartado con un problema obligatorio y 3 apartados con la posibilidad de elegir entre dos problemas. Se deberá responder a un máximo de **CUATRO PROBLEMAS**: el problema obligatorio (apartado 1) y solamente un problema de cada uno de los tres apartados restantes. No es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciados, pero se expresará claramente cuáles son los elegidos. En caso de responder a dos problemas de un mismo apartado, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego y que no aparezca totalmente tachado.
- 2. CALCULADORA:** Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones ni cálculo matricial, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
- 3. CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:** Cada uno de los problemas se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.
- 4. DEDUCCIONES POR ERRORES ORTOGRÁFICOS Y GRAMATICALES:** Se penalizarán los errores ortográficos (grafías, tildes y puntuación) cometidos, hasta un máximo de un punto en la nota global del examen, teniéndose en cuenta que la repetición del mismo error se contabilizará como sólo uno, los dos primeros errores no se penalizarán y, a partir del tercer error ortográfico, se deducirá 0,1 puntos por error. Por errores en la redacción, en la presentación, incoherencia o incorrección léxica o gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto de la nota global.
- 5.** El examen debe realizarse usando **bolígrafo azul o negro** (sólo un color). No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

APARTADO 1: (obligatorio)

Problema 1.

a) Dado $k \in \mathbb{R}$, se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} kx - y - z = 1 \\ x + ky + 2kz = k \end{cases}$$

Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ y resolverlo para $k = -1$.
(1,5 puntos)

b) Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 = I + 3A$, donde I denota la matriz identidad. Demostrar que el determinante de A no es cero y expresar A^{-1} en función de A y de I . **(1 punto)**

APARTADO 2: (elegir UN problema)

Problema 2A.

Sea la función $f(x) = 12x + 3x^2 - 2x^3$.

- a) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y su recta tangente en el punto $x=1$.
(1,5 puntos)
- b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{xf'(x)}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano.
(1 punto)

Problema 2B.

Se considera la función $f(x) = x^2 e^{-x}$.

- a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
(1,5 puntos)
- b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$.
(1 punto)

APARTADO 3: (elegir UN problema)**Problema 3A.**

Sean el plano $\pi \equiv 5x + my + z = 2$ y la recta $r \equiv (x, y, z) = (1, 1, 0) + t(-1, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

- a) Determinar la posición relativa de r y π en función de m .
(1,5 puntos)
- b) Para $m=1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .
(1 punto)

Problema 3B.

Sean el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

- a) Calcular la ecuación de un plano π' paralelo al plano π y que esté a una distancia de $2\sqrt{3}$ unidades de la recta r . ¿Es único ese plano? Justificar la respuesta.
(1,5 puntos)
- b) Calcular la ecuación de un plano π'' perpendicular al plano π y que pasa por los puntos $P(1, 0, 1)$ y $Q(0, 1, 0)$.
(1 punto)

APARTADO 4: (elegir UN problema)**Problema 4A.**

El tamaño de las truchas que hay en el río Tormes, entre el pantano de Santa Teresa y su paso por Fresno Alhándiga, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 28 cm y desviación típica de 6 cm.

- a) Calcular el porcentaje de truchas cuyo tamaño está entre 19 cm y 40 cm.
(1,5 puntos)
- b) Sabiendo que una de las truchas capturadas medía más de 38 cm, ¿cuál es la probabilidad de que midiera más de 42 cm?
(1 punto)

Problema 4B.

Un grupo de WhatsApp, formado por los alumnos de un gimnasio de judo, está compuesto por un 55% de mujeres y el resto hombres. Se sabe que el 15% del grupo es cinturón verde y que una quinta parte de las mujeres es cinturón verde.

- a) ¿Qué porcentaje de hombres son cinturón verde?
(1 punto)
- b) Si el grupo recibe un mensaje enviado por un cinturón verde, calcular la probabilidad de que lo haya enviado una mujer.
(0,75 puntos)
- c) Si el mensaje no tiene información sobre el sexo y el color del cinturón del remitente, calcular la probabilidad de que sea hombre y cinturón verde.
(0,75 puntos)

SOLUCIONES**Problema 1.**

a) Dado $k \in \mathbb{R}$, se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} kx - y - z = 1 \\ x + ky + 2kz = k \end{cases}$$

Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ y resolverlo para $k = -1$.

(1,5 puntos)

b) Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 = I + 3A$, donde I denota la matriz identidad. Demostrar que el determinante de A no es cero y expresar A^{-1} en función de A y de I . **(1 punto)**

c) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ 1 & k & 2k \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 2k & k \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de A . Si quitamos la tercera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 + 1 \neq 0$. Este menor de

orden 2 tiene determinante no nulo. El rango de A es 2 independientemente del valor de k .

El rango de la matriz ampliada A/B también es 2. Los dos rangos son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) para cualquier valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

Resolvemos el sistema para $k = -1$.

$$\begin{cases} -x - y - z = 1 \\ x - y - 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y - z = 1 \\ x - 2z + 1 = y \end{cases} \Rightarrow -x - x + 2z - 1 - z = 1 \Rightarrow -2x + z = 2 \Rightarrow z = 2 + 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x - 2(2 + 2x) + 1 = x - 4 - 4x + 1 = -3 - 3x \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

Para $k = -1$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$.

b) Se cumple $A^2 = I + 3A$.

$$A^2 = I + 3A \Rightarrow A^2 - 3A = I \Rightarrow A(A - 3I) = I$$

Como se cumple que $A(A - 3I) = I$ entonces la inversa de la matriz A es $A - 3I$.

Si aplicamos los determinantes a la igualdad tenemos:

Problema 2A.

Sea la función $f(x) = 12x + 3x^2 - 2x^3$.

a) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y su recta tangente en el punto $x=1$. **(1,5 puntos)**

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{xf'(x)}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano. **(1 punto)**

a) Hallamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto $x=1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 12 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^3 = 13 \\ f'(x) &= 12 + 6x - 6x^2 \rightarrow f'(1) = 12 + 6 \cdot 1 - 6 \cdot 1^2 = 12 \\ y - f(1) &= f'(1)(x-1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 13 = 12(x-1) \Rightarrow \boxed{y = 12x + 1}$$

Hallamos los puntos de corte de la función con la recta tangente $y = 12x + 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 12x + 3x^2 - 2x^3 \\ y &= 12x + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12x + 3x^2 - 2x^3 = 12x + 1 \Rightarrow -2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} -2 \quad 3 \quad 0 \quad -1 \\ 1 \mid \quad -2 \quad 1 \quad 1 \\ \hline -2 \quad 1 \quad 1 \quad \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2 \quad -1 \\ 1 \mid \quad -2 \quad -1 \\ \hline -2 \quad -1 \quad \boxed{0} \end{array} \Rightarrow -2x^3 + 3x^2 - 1 = (x-1)(x-1)(-2x-1)$$

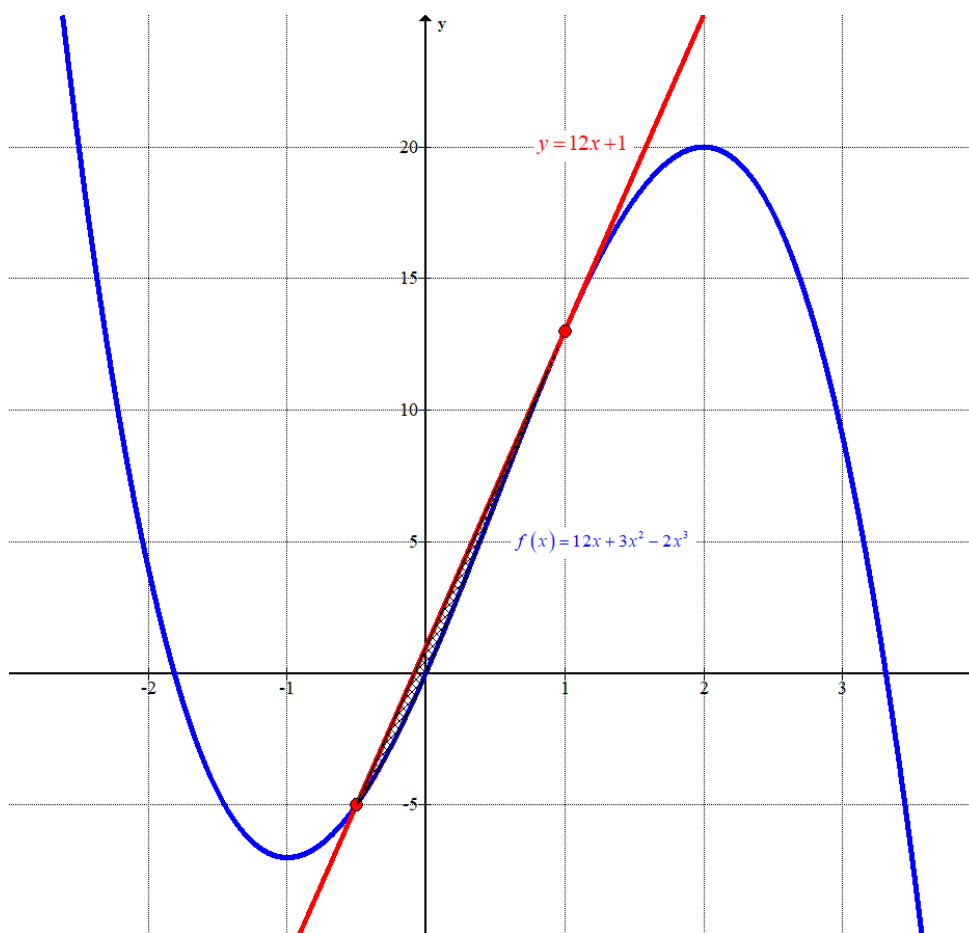
$$-2x-1=0 \Rightarrow -2x=1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

La recta tangente corta la gráfica de la función en dos puntos $x=1$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Calculamos la integral definida entre -0.5 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \int_{-0.5}^1 f(x) - (12x+1) dx &= \int_{-0.5}^1 12x + 3x^2 - 2x^3 - 12x - 1 dx = \int_{-0.5}^1 3x^2 - 2x^3 - 1 dx = \\ &= \left[x^3 - \frac{2x^4}{4} - x \right]_{-0.5}^1 = \left[x^3 - \frac{x^4}{2} - x \right]_{-0.5}^1 = \left[1^3 - \frac{1^4}{2} - 1 \right] - \left[(-0.5)^3 - \frac{(-0.5)^4}{2} + 0.5 \right] = \\ &= 1 - 0.5 - 1 + 0.125 + 0.03125 - 0.5 = \frac{-27}{32} = -0.84375 \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $\frac{27}{32} = 0.84375$ unidades cuadradas.



b) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x(12x+3x^2-2x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{12x^2+3x^3-2x^4} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{24x+9x^2-8x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(24x+9x^2-8x^3)(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(24+9x-8x^2)(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(24+9x-8x^2)(1+x^2)} = \frac{2}{24 \cdot 1} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

Problema 2B.

Se considera la función $f(x) = x^2 e^{-x}$.

- a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. **(1,5 puntos)**
- b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$. **(1 punto)**

- a) El dominio de la función es $\mathbb{R}$, pues es producto y composición de funciones continuas (exponencial y polinómica).

Asíntotas verticales. $x = a$

No existen, pues el dominio lo forman todos los números reales.

Asíntota horizontal. $y = b$

Cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

La función tiene la recta $y = 0$ como asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = (-\infty)^2 e^{+\infty} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Cuando x tiende a $+\infty$ la función tiene asíntota horizontal y no tiene asíntota oblicua.

Cuando x tiende a $-\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = (-\infty) e^{+\infty} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

La función no tiene asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

Resumiendo: La función no tiene asíntotas verticales ni oblicuas. Solo la recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = x^2 e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 (-1) e^{-x} = e^{-x} (2x - x^2) = x(2 - x) e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(2 - x) e^{-x} = 0 \Rightarrow \{e^{-x} \neq 0\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2 - x = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

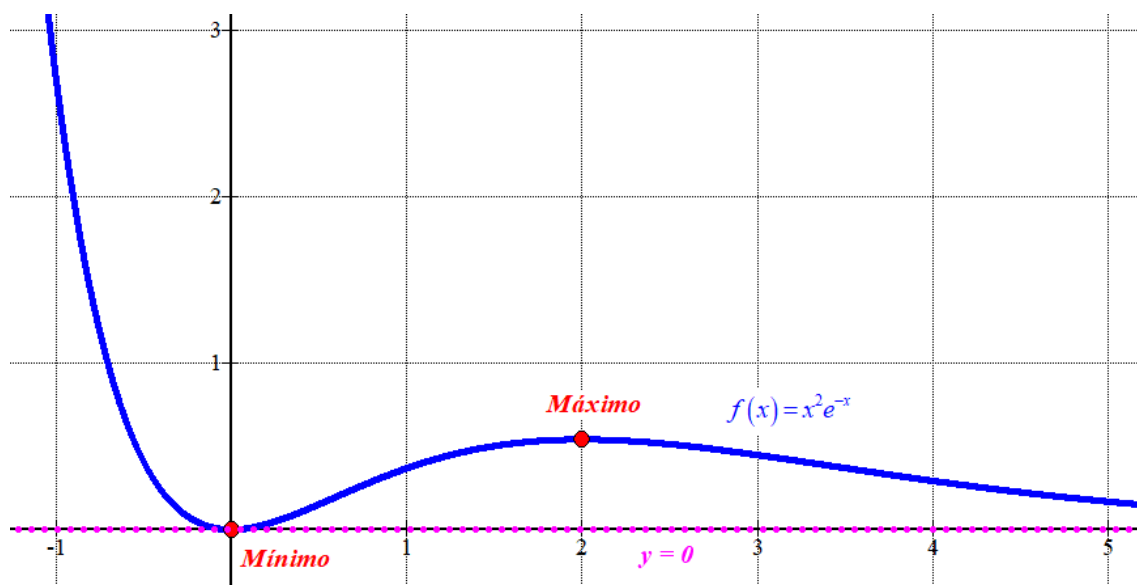
- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = (-1)(2+1)e^1 = -3e < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 1(2-1)e^{-1} = \frac{1}{e} > 0$. La función crece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 3(2-3)e^{-3} = \frac{-3}{e^3} < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(0, 2)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 2$.

Como $f(0) = 0^2 e^{-0} = 0$ las coordenadas del mínimo relativo son $(0, 0)$.

Como $f(2) = 2^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2}$ las coordenadas del máximo relativo son $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$.



b) Hallamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 e^{-x} \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 e^{-x} = 0 \Rightarrow \{e^{-x} \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

El punto de corte es uno de los extremos de la región. Como la función es positiva cuando $x > 0$ entonces el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$ es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 2.

Calculamos primero la integral indefinida de la función.

$$\int f(x) dx = \int x^2 e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ e^{-x} dx = dv \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = -x^2 e^{-x} - \int -2x e^{-x} dx =$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ e^{-x} dx = dv \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = -x^2 e^{-x} + 2 \left[-x e^{-x} - \int -e^{-x} dx \right] =$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} = -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + K$$

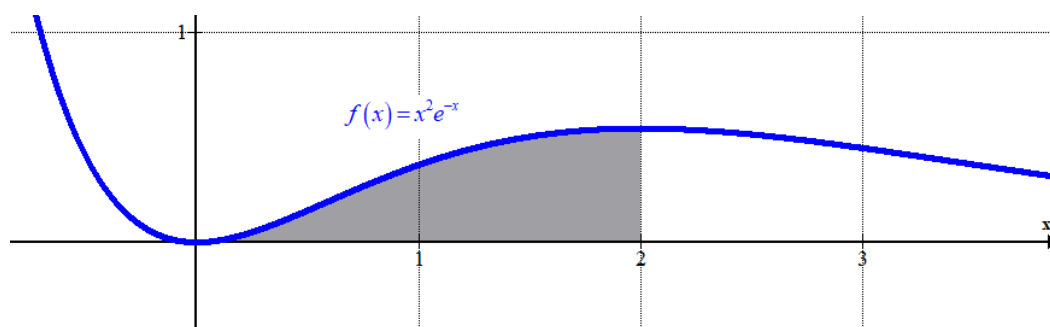
Calculamos el área pedida.

$$\text{Área} = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} (x^2 + 2x + 2) \right]_0^2 =$$

$$= \left[-e^{-2} (2^2 + 2 \cdot 2 + 2) \right] - \left[-e^{-0} (0^2 + 2 \cdot 0 + 2) \right] = -10e^{-2} + 2 = \boxed{2 - \frac{10}{e^2} \approx 0.6466 \text{ u}^2}$$

El área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$ tiene un valor de $2 - \frac{10}{e^2} \approx 0.6466$ unidades cuadradas.

Dibujamos la gráfica y la región del plano de la cual hemos calculado el área.



Problema 3A.

Sean el plano $\pi \equiv 5x + my + z = 2$ y la recta $r \equiv (x, y, z) = (1, 1, 0) + t(-1, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

- a) Determinar la posición relativa de r y π en función de m . (1,5 puntos)
 b) Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π . (1 punto)

a) Obtenemos un vector director y un punto de la recta, y un vector normal del plano.

$$\pi \equiv 5x + my + z = 2 \Rightarrow \vec{n} = (5, m, 1)$$

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 1, 0) + t(-1, -1, 2), t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, 1, 0) \\ \vec{v}_r = (-1, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 1 - \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

Averiguamos cuando el vector normal del plano y el director de la recta son perpendiculares.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, -1, 2) \\ \vec{n} = (5, m, 1) \\ \vec{v}_r \perp \vec{n} \rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (-1, -1, 2)(5, m, 1) = 0 \Rightarrow -5 - m + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{-3 = m}$$

Para $m = -3$ el producto escalar es nulo y la recta y el plano son paralelos o coincidentes.

Averiguamos si para $m = -3$ el punto $P_r(1, 1, 0)$ de la recta pertenece el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 5x - 3y + z = 2 \\ \text{¿} P_r(1, 1, 0) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 5 - 3 + 0 = 2? \Rightarrow \text{¡SIIIII!}$$

Para $m = -3$ la recta está contenida en el plano.

Para $m \neq -3$ el producto escalar es distinto de cero. La recta corta el plano en un único punto.

b) Para $m = 1$ la recta corta al plano π en un punto.

El plano π' que contiene a r y es perpendicular a π tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal del plano π . Además, el punto $P_r(1, 1, 0)$ pertenece al plano π' .

$$\pi \equiv 5x + y + z = 2 \Rightarrow \vec{n} = (5, 1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, 1, 0) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (-1, -1, 2) \\ \vec{v} = \vec{n} = (5, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 1 + 10y - 10 - z + 5z + y - 1 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': -3x + 11y + 4z - 8 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi': -3x + 11y + 4z - 8 = 0$.

Problema 3B.

Sean el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

- a) Calcular la ecuación de un plano π' paralelo al plano π y que esté a una distancia de $2\sqrt{3}$ unidades de la recta r . ¿Es único ese plano? Justificar la respuesta. **(1,5 puntos)**
- b) Calcular la ecuación de un plano π'' perpendicular al plano π y que pasa por los puntos $P(1,0,1)$ y $Q(0,1,0)$. **(1 punto)**

- a) La ecuación de un plano π' paralelo al plano $\pi \equiv x + y - z - 2 = 0$ es $\pi' \equiv x + y - z + D = 0$.

El plano π' tiene como vector normal el vector $\vec{n} = (1, 1, -1)$. Este vector es perpendicular al vector $\vec{v}_r = (-3, 2, -1)$ por lo que la recta es paralela al plano o está contenida en él.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-3, 2, -1) \\ \vec{n} = (1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = (-3, 2, -1) \cdot (1, 1, -1) = -3 + 2 + 1 = 0$$

Determinamos la expresión de la distancia del plano π' a la recta r .

Como la recta es paralela al plano esta distancia es el valor de la distancia del punto $P_r(1, 0, 2)$ de la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, 0, 2) \\ \pi' \equiv x + y - z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi') = d(P_r, \pi') = \frac{|1 + 0 - 2 + D|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|D - 1|}{\sqrt{3}}$$

Buscamos el valor de D para que la distancia del plano π' a la recta r sea de $2\sqrt{3}$ unidades.

$$d(r, \pi') = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{|D - 1|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow |D - 1| = 6 \Rightarrow \begin{cases} D - 1 = 6 \rightarrow \boxed{D = 7} \\ D - 1 = -6 \rightarrow \boxed{D = -5} \end{cases}$$

Existen dos planos que cumplen lo pedido: $\pi'_1 \equiv x + y - z + 7 = 0$ y $\pi'_2 \equiv x + y - z - 5 = 0$.

- b) El plano π'' perpendicular al plano π y que pasa por los puntos $P(1, 0, 1)$ y $Q(0, 1, 0)$ tiene como vectores directores el vector normal del plano $\vec{n} = (1, 1, -1)$ y el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{PQ} = (0, 1, 0) - (1, 0, 1) = (-1, 1, -1) \\ Q(0, 1, 0) \in \pi'' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi'': \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + y - 1 + z + z + y - 1 + x = 0 \Rightarrow 2y + 2z - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi'': y + z - 1 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi'': y + z - 1 = 0$.

Problema 4A.

El tamaño de las truchas que hay en el río Tormes, entre el pantano de Santa Teresa y su paso por Fresno Alhándiga, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 28 cm y desviación típica de 6 cm.

a) Calcular el porcentaje de truchas cuyo tamaño está entre 19 cm y 40 cm. **(1,5 puntos)**

b) Sabiendo que una de las truchas capturadas medía más de 38 cm, ¿cuál es la probabilidad de que midiera más de 42 cm? **(1 punto)**

Sea X = El tamaño en centímetros de las truchas que hay en el río Tormes, entre el pantano de Santa Teresa y su paso por Fresno Alhándiga. $X = N(28, 6)$.

a) Calculamos la probabilidad de que una trucha tenga un tamaño entre 19 y 40 cm.

$$P(19 \leq X \leq 40) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{19-28}{6} \leq Z \leq \frac{40-28}{6}\right) =$$

$$= P(-1.5 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1.5) =$$

$$= P(Z \leq 2) - P(Z \geq 1.5) = P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 1.5)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9772 - 1 + 0.9332 = \boxed{0.9104}$$

El porcentaje de truchas cuyo tamaño está entre 19 cm y 40 cm es del 91.04%.

b) Debemos calcular $P((X > 42)/(X > 38))$.

$$P((X > 42)/(X > 38)) = \frac{P((X > 42) \cap (X > 38))}{P(X > 38)} = \frac{P(X > 42)}{P(X > 38)} = \frac{1 - P(X \leq 42)}{1 - P(X \leq 38)} =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = \frac{1 - P\left(Z \leq \frac{42-28}{6}\right)}{1 - P\left(Z \leq \frac{38-28}{6}\right)} = \frac{1 - P(Z \leq 2.33)}{1 - P(Z \leq 1.67)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en} \\ \text{la } N(0, 1) \end{array} \right\} = \frac{1 - 0.9901}{1 - 0.9525} = \boxed{0.2084}$$

	0.99	0.91	0.82	0.73	0.64	0.55	0.46	0.37
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8188	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932

La probabilidad de que una trucha que mide más de 38 cm midiera más de 42 cm vale 0.2084.

Problema 4B.

Un grupo de WhatsApp, formado por los alumnos de un gimnasio de judo, está compuesto por un 55% de mujeres y el resto hombres. Se sabe que el 15% del grupo es cinturón verde y que una quinta parte de las mujeres es cinturón verde.

- a) ¿Qué porcentaje de hombres son cinturón verde? **(1 punto)**
 b) Si el grupo recibe un mensaje enviado por un cinturón verde, calcular la probabilidad de que lo haya enviado una mujer. **(0,75 puntos)**
 c) Si el mensaje no tiene información sobre el sexo y el color del cinturón del remitente, calcular la probabilidad de que sea hombre y cinturón verde. **(0,75 puntos)**

Realizamos una tabla de contingencia.

	Cinturón verde	No cinturón verde	TOTALES
Hombres			
Mujeres	$55/5 = 11$		55
TOTALES	15		100

Completamos la tabla.

	Cinturón verde	No cinturón verde	TOTALES
Hombres	4	41	45
Mujeres	11	44	55
TOTALES	15	85	100

- a) El 45% del grupo son hombres y de estos el 4% del grupo son hombres con cinturón verde.

Entonces $\frac{4}{45} \approx 0.0889$, es decir, el 8.89% de los hombres son cinturón verde.

- b) En el grupo hay un 15% de sus componentes que son cinturón verde y de estos el 11% son mujeres con cinturón verde. La probabilidad de que un mensaje enviado por un cinturón verde lo haya enviado una mujer tiene un valor de $\frac{11}{15} \approx 0.7333$.

- c) Solo un 4% del grupo es hombre con cinturón verde. La probabilidad de que el remitente de un mensaje sea hombre y cinturón verde es de 0.04.

PAU Ordinaria 2025

	Pruebas de Acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	---	-----------------------	---------------------------------------

INDICACIONES

- 1. OPTATIVIDAD:** El examen consta de cuatro apartados: un apartado con un problema obligatorio y 3 apartados con la posibilidad de elegir entre dos problemas. Se deberá responder a un máximo de **CUATRO PROBLEMAS**: el problema obligatorio (apartado 2) y solamente un problema de cada uno de los tres apartados restantes. No es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciados, pero se expresará claramente cuáles son los elegidos. En caso de responder a dos problemas de un mismo apartado, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego y que no aparezca totalmente tachado.
- 2. CALCULADORA:** Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones ni cálculo matricial, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
- 3. CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:** Cada uno de los problemas se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.
- 4. DEDUCCIONES POR ERRORES ORTOGRÁFICOS Y GRAMATICALES:** Se penalizarán los errores ortográficos (grafías, tildes y puntuación) cometidos, hasta un máximo de un punto en la nota global del examen, teniéndose en cuenta que la repetición del mismo error se contabilizará como sólo uno, los dos primeros errores no se penalizarán y, a partir del tercer error ortográfico, se deducirá 0,1 puntos por error. Por errores en la redacción, en la presentación, incoherencia o incorrección léxica o gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto de la nota global.
5. El examen debe realizarse usando **bolígrafo azul o negro** (sólo un color). No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

APARTADO 1: (elegir UN problema)

Problema 1A. (Propuesto en Extremadura, Modelo 0 de 2025)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + 2y + z = 1 \\ 2x + my + z = m \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \text{ donde } m \in \mathbb{R}$$

- Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m , indicando el número de soluciones en cada caso. **(1,5 puntos)**
- Resolver, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$. **(1 punto)**

Problema 1B.

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$,

- a) Calcular la matriz $M = A^t A - B B^t$, donde A^t y B^t representan las matrices transpuestas de A y B , respectivamente. (1 punto)
- b) Hallar la matriz X que cumple la igualdad $XN = C$. (1,5 puntos)

APARTADO 2: (obligatorio)**Problema 2.**

Se considera la función $f(x) = 2xe^{-2x^2}$.

- a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. (1,5 puntos)
- b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$. (1 punto)

APARTADO 3: (elegir UN problema)**Problema 3A.**

Sean las rectas $r \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv x-1 = \frac{y-m}{m-1} = \frac{z-3}{3}$.

- a) Comprobar que las rectas r y s se cortan para cualquier valor de m . (1,5 puntos)
- b) Para $m = 6$ hallar el punto de intersección de las rectas r y s . (1 punto)

Problema 3B.

Se considera el vector $\vec{u} = (3, -1, 5)$.

- a) Determinar a para que el vector $\vec{t} = (1, a, 0)$ sea perpendicular a $\vec{u}$. (0,75 puntos)
- b) Determinar un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u} = (3, -1, 5)$ y $\vec{v} = (2, 6, 0)$. (0,75 puntos)
- c) Dados $\vec{u} = (3, -1, 5)$, $\vec{v} = (2, 6, 0)$ y $\vec{w} = (-3, 1, 2)$. Determinar el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. (1 punto)

APARTADO 4: (elegir UN problema)**Problema 4A.**

Se sabe que la probabilidad de que un autobús de línea regular entre Madrid y Burgos sufra un accidente en día nublado es 0,09 y en día seco 0,005. Durante un periodo de 10 días ha habido 7 días secos y 3 nublados. Sabiendo que se ha producido un accidente en esos días, se pide:

- a) Hallar la probabilidad de que fuera en día nublado. (1,25 puntos)
- b) Hallar la probabilidad de que fuera en día seco. (1,25 puntos)

Problema 4B.

De una urna que contiene cuatro bolas rojas y dos azules, extraemos una bola y, sin devolverla a la urna, extraemos otra a continuación.

- a) Hallar la probabilidad de que sean de distinto color. (0,75 puntos)
- b) Hallar la probabilidad de que la segunda bola sea azul. (0,75 puntos)
- c) Si la segunda bola es azul, hallar la probabilidad de que la primera sea roja. (1 punto)

SOLUCIONES**Problema 1A. (Propuesto en Extremadura, Modelo 0 de 2025)**

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + 2y + z = 1 \\ 2x + my + z = m \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \text{ donde } m \in \mathbb{R}$$

- a) Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m , indicando el número de soluciones en cada caso. **(1,5 puntos)**
 b) Resolver, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$. **(1 punto)**

d) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 & m \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 10 + 4 - 5m - 4 - 2m = m^2 - 7m + 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 = 0 \Rightarrow m = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = \boxed{5 = m} \\ \frac{7-3}{2} = \boxed{2 = m} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $m \neq 5$ y $m \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $m = 5$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B

usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 10 \quad 25 \quad 5 \quad 25 \\ -10 \quad -4 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 21 \quad 3 \quad 23 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 5 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ -5 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{5 \quad 2 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ \hline 0 & 21 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $m = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 10 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \\ -10 \quad -10 \quad -5 \quad -5 \\ \hline 0 \quad -6 \quad -3 \quad -3 \rightarrow \text{Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{2 \quad 2 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ \hline 0 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos. El sistema es **incompatible**.

Resumiendo: Si $m \neq 5$ y $m \neq 2$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución), si $m = 5$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) y si $m = 2$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

e) Para $m = 3$ el sistema es compatible determinado (caso 1). Lo resolvemos.

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ 5 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ -3 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 2x = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 2y + z = 1 \\ 0 + 3y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 - 2y \\ 3y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y + 1 - 2y = 3 \Rightarrow \boxed{y = 2} \Rightarrow \boxed{z = 1 - 2 \cdot 2 = -3}$$

Para $m = 3$ la solución del sistema es $x = 0$, $y = 2$, $z = -3$.

Problema 1B.

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$,

a) Calcular la matriz $M = A^t A - BB^t$, donde A^t y B^t representan las matrices transpuestas de A y B , respectivamente. **(1 punto)**

b) Hallar la matriz X que cumple la igualdad $XN = C$. **(1,5 puntos)**

a) Calculamos la matriz M .

$$M = A^t A - BB^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$XN = C \Rightarrow X = CN^{-1}$$

Hallamos la matriz inversa de N .

$$|N| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0$$

$$N^{-1} = \frac{\text{Adj}(N^T)}{|N|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$X = CN^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & 2+2 \\ 1+2 & -2-2 \\ -2+4 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{2 \quad \cdot \quad 2} \times 2 \longrightarrow 3 \times 2$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 2.

Se considera la función $f(x) = 2xe^{-2x^2}$.

- a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. **(1,5 puntos)**
- b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$. **(1 punto)**

- a) El dominio de la función es $\mathbb{R}$, pues es producto y composición de funciones continuas (exponencial y producto).

Asíntotas verticales. $x = a$

No existen, pues el dominio lo forman todos los números reales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2xe^{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^{2x^2}} = \frac{\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{4xe^{2x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = 2xe^{-2x^2} \Rightarrow f'(x) = 2e^{-2x^2} + 2x \cdot (-4x)e^{-2x^2} = 2e^{-2x^2} - 8x^2e^{-2x^2} = 2(1 - 4x^2)e^{-2x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(1 - 4x^2)e^{-2x^2} = 0 \Rightarrow \{e^{-2x^2} \neq 0\} \Rightarrow 1 - 4x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\pm 1}{2}$$

La función presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = 2(1 - 4(-1)^2)e^{-2(-1)^2} = -6e^{-2} = -\frac{6}{e^2} < 0. \text{ La función decrece en } \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right).$$

- En el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = 2(1 - 4 \cdot 0^2)e^{-2 \cdot 0^2} = 2 > 0. \text{ La función crece en } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

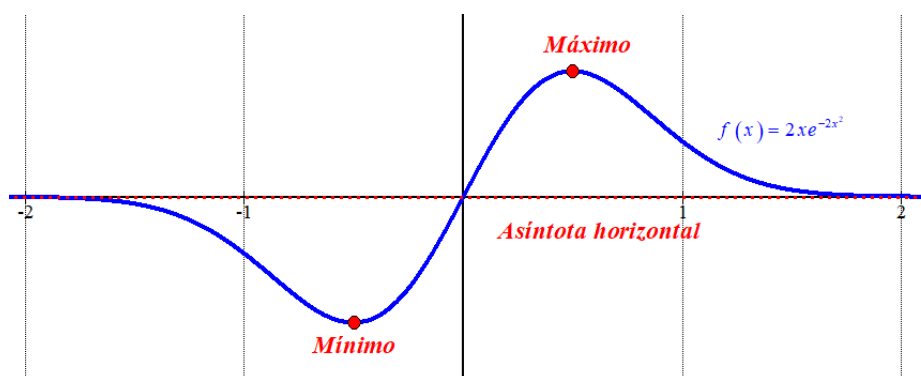
$$f'(1) = 2(1 - 4 \cdot 1^2)e^{-2 \cdot 1^2} = -6e^{-2} = -\frac{6}{e^2} < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

La función decrece en $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y crece en $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{-1}{2}$ y un máximo relativo en $x = \frac{1}{2}$.

Como $f\left(\frac{-1}{2}\right) = 2\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2} = -e^{-1/2} = \frac{-1}{\sqrt{e}} = \frac{-\sqrt{e}}{e}$ las coordenadas del mínimo relativo son $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{e}}{e}\right)$.

Como $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2}e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)^2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$ las coordenadas del máximo relativo son $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$.



b) Hallamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

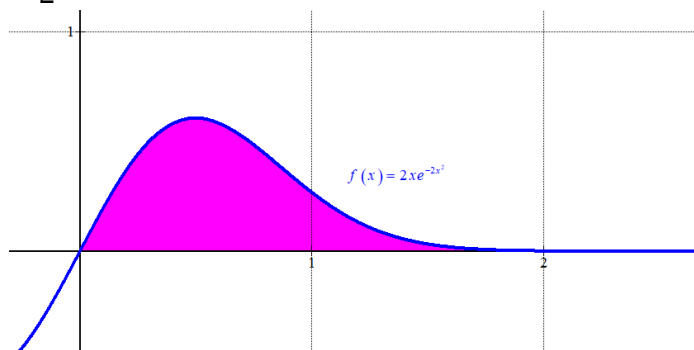
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 2xe^{-2x^2} \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2xe^{-2x^2} = 0 \Rightarrow \{e^{-2x^2} \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

El punto de corte es uno de los extremos de la región. Como la función es positiva cuando $x > 0$ entonces el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$ es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 2.

$$\text{Área} = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 2xe^{-2x^2} dx = 2 \int_0^2 xe^{-2x^2} dx = \frac{2}{-4} \int_0^2 -4xe^{-2x^2} dx =$$

$$= \left[\frac{-1}{2} e^{-2x^2} \right]_0^2 = \left[\frac{-1}{2} e^{-2 \cdot 2^2} \right] - \left[\frac{-1}{2} e^{-2 \cdot 0^2} \right] = \boxed{\frac{-1}{2e^8} + \frac{1}{2} \approx 0.4998 \text{ u}^2}$$

El área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$ tiene un valor de $\frac{-1}{2e^8} + \frac{1}{2} \approx 0.4998$ unidades cuadradas.



Problema 3A.

Sean las rectas $r \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv x-1 = \frac{y-m}{m-1} = \frac{z-3}{3}$.

- a) Comprobar que las rectas r y s se cortan para cualquier valor de m . **(1,5 puntos)**
 b) Para $m = 6$ hallar el punto de intersección de las rectas r y s . **(1 punto)**

a) Obtenemos un vector director y un punto de cada recta así como sus ecuaciones paramétricas.

$$r \equiv \frac{x-0}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-0}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,1,0) \\ \vec{u}_r = (4,-2,2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-m}{m-1} = \frac{z-3}{3} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(1,m,3) \\ \vec{v}_s = (1,m-1,3) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = m + (m-1)\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 3\alpha \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (4, -2, 2) \\ \vec{v}_s = (1, m-1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{1} \neq \frac{2}{3}$$

Las rectas se cortan o cruzan.

Para que se corten debe ser nulo el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$. Lo comprobamos.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0,1,0) \\ Q_s(1,m,3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, m, 3) - (0, 1, 0) = (1, m-1, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (4, -2, 2) \\ \vec{v}_s = (1, m-1, 3) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, m-1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & m-1 & 3 \\ 1 & m-1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 12(m-1) - 6 + 2(m-1) - 2(m-1) + 6 - 12(m-1) = 0$$

El producto mixto es nulo y las rectas se cortan para cualquier valor de m .

- b) Para $m = 6$ las rectas quedan $r \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv x-1 = \frac{y-6}{5} = \frac{z-3}{3}$.

Planteamos un sistema formado por sus ecuaciones paramétricas y al resolverlo obtendremos el punto A de intersección entre ellas.

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 6 + 5\alpha \\ z = 3 + 3\alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda = 1 + \alpha \\ 1 - 2\lambda = 6 + 5\alpha \\ 2\lambda = 3 + 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda - 1 = \alpha \\ -2\lambda = 5 + 5\alpha \\ 2\lambda = 3 + 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda = 5 + 5(4\lambda - 1) \\ 2\lambda = 3 + 3(4\lambda - 1) \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda = 5 + 20\lambda - 5 \\ 2\lambda = 3 + 12\lambda - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -22\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \\ -9\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(0,1,0)}
 \end{aligned}$$

Para $m = 6$ el punto de intersección de las dos rectas es $A(0,1,0)$.

Problema 3B.

Se considera el vector $\vec{u} = (3, -1, 5)$.

- a) Determinar a para que el vector $\vec{t} = (1, a, 0)$ sea perpendicular a $\vec{u}$. **(0,75 puntos)**
- b) Determinar un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u} = (3, -1, 5)$ y $\vec{v} = (2, 6, 0)$. **(0,75 puntos)**
- c) Dados $\vec{u} = (3, -1, 5)$, $\vec{v} = (2, 6, 0)$ y $\vec{w} = (-3, 1, 2)$. Determinar el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. **(1 punto)**

a) Para que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (3, -1, 5) \\ \vec{t} = (1, a, 0) \\ \vec{u} \perp \vec{t} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{t} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (3, -1, 5)(1, a, 0) = 0 \Rightarrow 3 - a + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

Para que sean perpendiculares debe ser $a = 3$.

b) Un vector perpendicular a dos vectores es el producto vectorial de los dos vectores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (3, -1, 5) \\ \vec{v} = (2, 6, 0) \\ \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 30i - 2k - 18k - 10j = 30i - 10j - 20k = (30, -10, -20)$$

Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ puede ser $\vec{w}_1 = \vec{u} \times \vec{v} = (30, -10, -20)$ o bien

$$\vec{w}_2 = \frac{1}{10} \vec{u} \times \vec{v} = (3, -1, -2).$$

c) El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

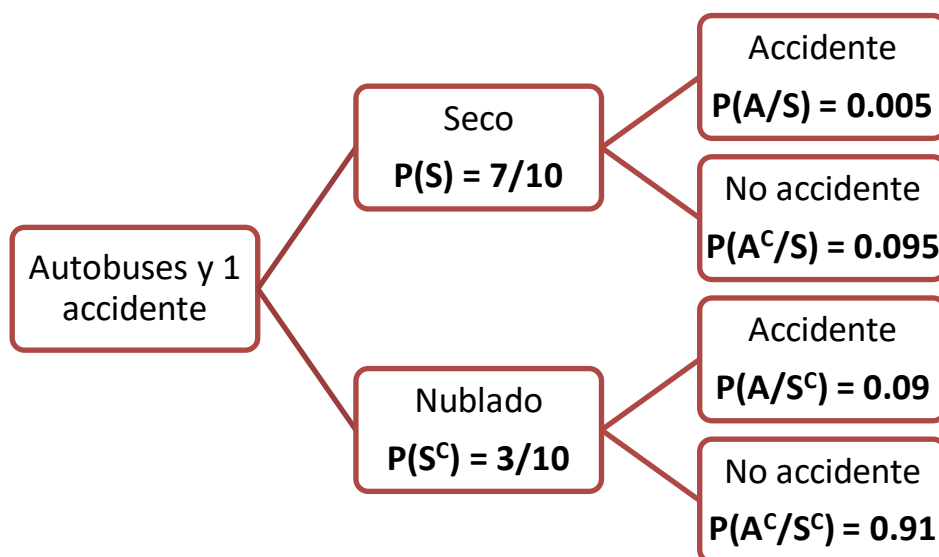
$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (3, -1, 5) \\ \vec{v} = (2, 6, 0) \\ \vec{w} = (-3, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Volumen} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 36 - 0 + 10 + 90 + 4 - 0 = \boxed{140 \text{ u}^3}$$

Problema 4A.

Se sabe que la probabilidad de que un autobús de línea regular entre Madrid y Burgos sufra un accidente en día nublado es 0,09 y en día seco 0,005. Durante un periodo de 10 días ha habido 7 días secos y 3 nublados. Sabiendo que se ha producido un accidente en esos días, se pide:

- a) Hallar la probabilidad de que fuera en día nublado. (1,25 puntos)
 b) Hallar la probabilidad de que fuera en día seco. (1,25 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol. Llamamos S al suceso “Día seco” y S^c a “Día nublado”, también llamamos A al suceso “sufrir un accidente”.



- a) Nos piden calcular $P(S^c / A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(S^c / A) &= \frac{P(S^c \cap A)}{P(A)} = \frac{P(S^c)P(A/S^c)}{P(S)P(A/S) + P(S^c)P(A/S^c)} = \\
 &= \frac{\frac{3}{10} \cdot 0.09}{\frac{7}{10} \cdot 0.005 + \frac{3}{10} \cdot 0.09} = \boxed{\frac{54}{61} \approx 0.8852}
 \end{aligned}$$

- b) Nos piden hallar $P(S / A)$. Este suceso es el contrario del anterior.

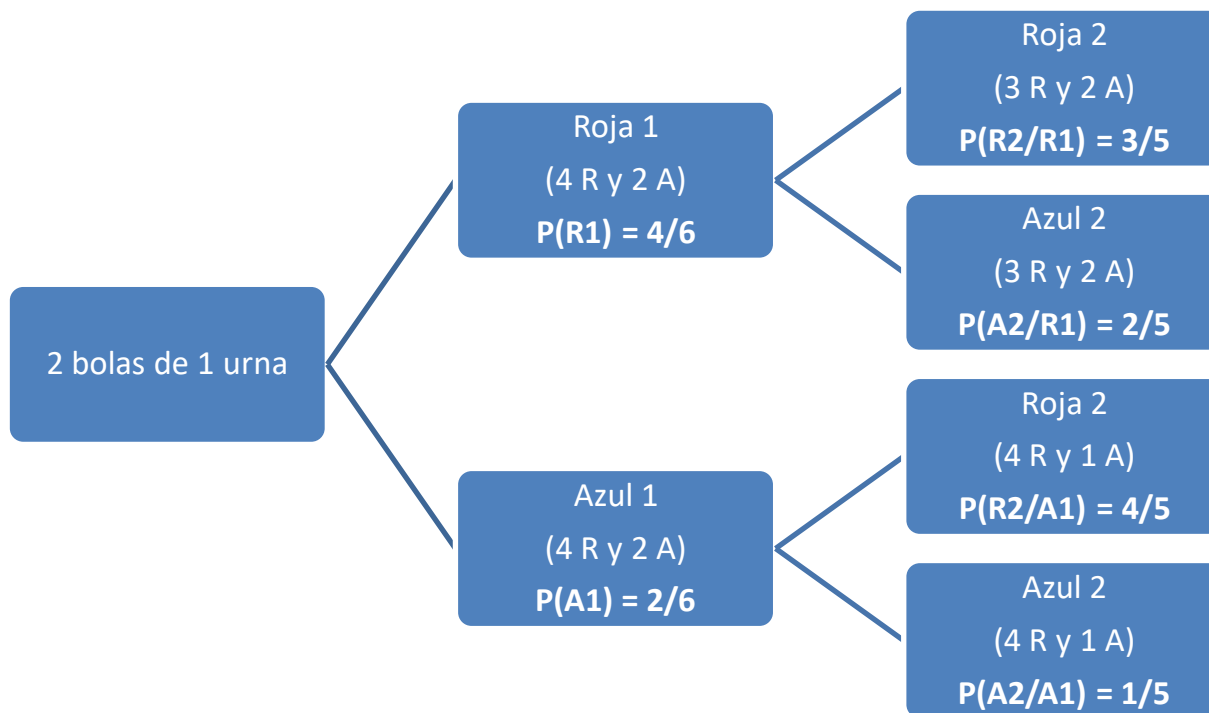
$$P(S / A) = 1 - P(S^c / A) = 1 - \frac{54}{61} = \boxed{\frac{7}{61} \approx 0.1148}$$

Problema 4B.

De una urna que contiene cuatro bolas rojas y dos azules, extraemos una bola y, sin devolverla a la urna, extraemos otra a continuación.

- a) Hallar la probabilidad de que sean de distinto color. **(0,75 puntos)**
 b) Hallar la probabilidad de que la segunda bola sea azul. **(0,75 puntos)**
 c) Si la segunda bola es azul, hallar la probabilidad de que la primera sea roja. **(1 punto)**

Para entender mejor lo que ocurre en este experimento compuesto realizamos un diagrama de árbol.



- a) Si miramos el diagrama de árbol este suceso ocurre cuando sacas Roja 1 y luego Azul 2 o bien Azul 1 y luego Roja 2. El suceso del que queremos hallar la probabilidad es el suceso $(R1 \cap A2) \cup (A1 \cap R2)$.

$$P((R1 \cap A2) \cup (A1 \cap R2)) = P(R1 \cap A2) + P(A1 \cap R2) =$$

$$= P(R1)P(A2/R1) + P(A1)P(R2/A1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \boxed{\frac{8}{15} \approx 0.5333}$$

- b) Nos piden calcular $P(A2)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A2) = P(R1)P(A2/R1) + P(A1)P(A2/A1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{3} \approx 0.3333}$$

- c) Nos piden determinar el valor de $P(R1/A2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R1/A2) = \frac{P(R1 \cap A2)}{P(A2)} = \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{4}{5} = 0.8}$$

EBAU Extraordinaria 2024

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	-----------------------	---------------------------------------

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

- a) Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema:
$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$$
 (1.2 puntos)
- b) Resolverlo para $\lambda = 1$. (0.8 puntos)

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X

tal que $AB + CX = D$ (2 puntos)

E3.- (Geometría)

Dados la recta $r \equiv x = y = z$, el plano $\pi \equiv x + 2y - 3z = 0$ y el punto $P = (1, 1, 1)$, se pide:

- a) Determinar la posición relativa de r y π . (1 punto)
- b) Hallar la recta perpendicular a r y contenida en π que pasa por P. (1 punto)

E4.- (Geometría)

Determinar el plano que pasa por los puntos $P = (1, 1, 2)$ y $Q = (3, -1, 1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv x - 1 = y = z$. (2 puntos)

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = e^x + x^3 - 2$ demostrar que $f(x)$ se anula para algún valor de x y que ese valor es único. (2 puntos)

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - a}{bx^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, ¿qué valores tienen que tomar los parámetros

$a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$? **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

Calcular los valores de a , b y c para los cuales la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 2$ y además la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas para $x = 1$.

(2 puntos)**E8.- (Análisis)**

a) Dada la función $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2}$, hallar su dominio de definición y determinar sus asíntotas horizontales y verticales. **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$. **(1 punto)**

E9.- (Probabilidad y estadística)

Entre los automóviles que se fabrican de una cierta marca, un 50% son convencionales (es decir, con motor de gasolina o de gasoil), un 30% híbridos y un 20% eléctricos. De ellos, un 70% de los convencionales, un 80% de los híbridos y un 85% de los eléctricos tienen potencia < 140 CV y el resto la tienen ≥ 140 CV. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea convencional con potencia ≥ 140 CV. Lo mismo para híbrido o eléctrico con potencia ≥ 140 CV. **(1 punto)**

b) Si se sabe que el coche elegido tiene al menos 140 CV, ¿cuál es la probabilidad de que sea de tipo convencional? **(1 punto)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

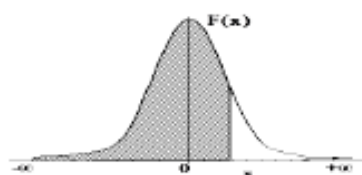
Suponiendo que el tiempo que dura una partida de torneo entre maestros de ajedrez sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos, calcular:

a) La probabilidad de que una determinada partida de ajedrez jugada en un torneo de maestros acabe en menos de dos horas. **(1 punto)**

b) El porcentaje de partidas de torneo entre maestros de ajedrez que duran más de tres horas y 50 minutos. **(1 punto)**

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES**E1.- (Álgebra)**

- a) Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema:
$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 2y + \lambda z = 1 \end{cases} \quad \text{(1.2 puntos)}$$
- b) Resolverlo para $\lambda = 1$. (0.8 puntos)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 0 + 2 - 0 + \lambda - 4\lambda = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2 = \lambda} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1 = \lambda} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $\lambda = 1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B

usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a + \text{Fila 1}^a \\ -1 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ 0 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $\lambda = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B

usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 2 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ -2 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 6 \quad 6 \quad 3 \\ 0 \quad -6 \quad -6 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución), si $\lambda = 1$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) y si $\lambda = 2$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

- b) Para $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado (caso 2). Lo resolvemos a partir de la matriz equivalente obtenida en el apartado a).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ z = 1 - 2y \end{array} \right\} \Rightarrow x + y - 1 + 2y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 - 3y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 - 3\alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión: $x = 2 - 3\alpha$; $y = \alpha$; $z = 1 - 2\alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X tal que $AB + CX = D$ **(2 puntos)**

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AB + CX = D \Rightarrow CX = D - AB \Rightarrow X = C^{-1}(D - AB)$$

Comprobamos que la matriz C es invertible, calculamos su inversa y hacemos las operaciones para obtener la expresión de la matriz X.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$C^{-1} = \frac{\text{Adj}(C^T)}{|C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D - AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0+0-1 & 2+0+1 \\ 0+1+0 & 2+0+0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = C^{-1}(D - AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz X buscada tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E3.- (Geometría)

Dados la recta $r \equiv x = y = z$, el plano $\pi \equiv x + 2y - 3z = 0$ y el punto $P = (1, 1, 1)$, se pide:

- a) Determinar la posición relativa de r y π . (1 punto)
 b) Hallar la recta perpendicular a r y contenida en π que pasa por P . (1 punto)

a) Hallamos un vector director de la recta y un vector normal del plano.

$$\pi \equiv x + 2y - 3z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, -3) \quad r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}$$

Comprobamos si los vectores son perpendiculares o no.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 2, -3) \\ \vec{v}_r = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (1, 2, -3)(1, 1, 1) = 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{v}_r$$

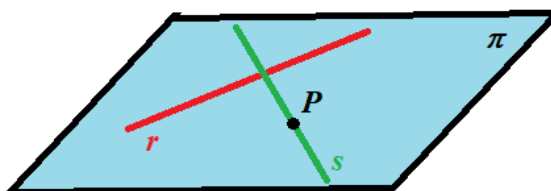
Como el vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Averiguamos si el punto $P_r(0, 0, 0)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P_r(0, 0, 0) \in \pi? \\ \pi \equiv x + 2y - 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0?$$

La igualdad es cierta, por lo que el punto pertenece al plano y la recta está contenida en el plano.

b) Queremos hallar la recta s del dibujo.



La recta s perpendicular a la recta r tiene como vector director un vector perpendicular al vector director de r y perpendicular al vector normal del plano (s está contenida en el plano), por lo que nos sirve como vector director de s el producto vectorial $\vec{n} \times \vec{v}_r$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 2, -3) \\ \vec{v}_r = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 3j + k - 2k - j + 3i = 5i - 4j - k = (5, -4, -1)$$

Hallamos la ecuación de la recta s como la recta con vector director $\vec{n} \times \vec{v}_r$ y que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \vec{n} \times \vec{v}_r = (5, -4, -1) \\ P = (1, 1, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 1 - 4\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

La recta perpendicular a r y contenida en π que pasa por P es $s: \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 1 - 4\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$.

E4.- (Geometría)

Determinar el plano que pasa por los puntos $P = (1, 1, 2)$ y $Q = (3, -1, 1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv x - 1 = y = z$. **(2 puntos)**

Si el plano es paralelo a la recta r uno de sus vectores directores es el vector director de la recta.

El otro vector director es el vector $\overrightarrow{PQ}$.

Hallamos el vector director de la recta r .

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \vec{w}_r = (1, 1, 1)$$

Hallamos la ecuación del plano pedido.

$$\left. \begin{array}{l} Q = (3, -1, 1) \\ P = (1, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (3, -1, 1) - (1, 1, 2) = (2, -2, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (2, -2, -1) \\ \vec{v} = \vec{w}_r = (1, 1, 1) \\ P(1, 1, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x-1) - (y-1) + 2(z-2) + 2(z-2) - 2(y-1) + x-1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + 2 - y + 1 + 2z - 4 + 2z - 4 - 2y + 2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -x - 3y + 4z - 4 = 0}$$

El plano que pasa por los puntos P y Q y es paralelo a la recta r es $\pi: -x - 3y + 4z - 4 = 0$.

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = e^x + x^3 - 2$ demostrar que $f(x)$ se anula para algún valor de x y que ese valor es único. **(2 puntos)**

La función tiene como dominio de definición $\mathbb{R}$. La función es continua en todo su dominio. La función es derivable en todo su dominio siendo su derivada $f'(x) = e^x + 3x^2$. Esta función derivada siempre es positiva pues es suma de valores positivos, por lo que la función es siempre creciente.

Consideremos el intervalo $[0, 2]$. En este intervalo la función es continua. También es derivable en el intervalo $(0, 2)$. Y tenemos que $f(0) = e^0 + 0^3 - 2 = -1 < 0$ y $f(2) = e^2 + 2^3 - 2 = e^2 + 6 > 0$.

Podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

Como la función siempre es creciente podemos decir que la función es negativa para cualquier valor menor que c y es positiva para cualquier valor mayor que c . No podemos aplicar el teorema de Bolzano en ningún intervalo que no incluya el intervalo $(0, 2)$.

Por lo que no existe otro valor que anule la función.

Existe un único valor c tal que $f(c) = 0$.

OTRA FORMA DE RAZONARLO

Si existiese otro valor d tal que $f(d) = 0$ tendríamos que la función es continua en el intervalo $[c, d]$ y derivable en (c, d) , además $f(c) = f(d) = 0$, aplicando el teorema de Rolle existe $a \in (c, d)$ tal que $f'(a) = 0$.

Y esto no es posible pues la derivada de la función nunca se anula.

Por lo tanto, existe un único valor c tal que $f(c) = 0$.

He supuesto que $d > c$, se razonaría igualmente suponiendo $c > d$.

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - a}{bx^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, ¿qué valores tienen que tomar los parámetros

$a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$?

(2 puntos)

Para que esta función sea continua debe serlo en $x = 0$.

- Existe $f(0) = 1$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - a}{bx^2} = \frac{\cos 0 - a}{b \cdot 0^2} = \frac{1 - a}{0} = \dots$

Como debe existir el límite para que sea continua debe ser $a = 1$, en caso contrario el límite valdría ∞ .

$$\dots = \{a = 1\} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2bx} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2b} = \frac{-1}{2b}$$

- El valor de la función y el límite deben ser iguales $\rightarrow \frac{-1}{2b} = 1 \Rightarrow -1 = 2b \Rightarrow b = \frac{-1}{2}$

Los valores que hacen que la función sea continua son $a = 1$ y $b = \frac{-1}{2}$.

E7.- (Análisis)

Calcular los valores de a , b y c para los cuales la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 2$ y además la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas para $x = 1$.

(2 puntos)

Si la función tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 2$ significa que la derivada se anula para estos valores $\rightarrow f'(0) = 0$ y $f'(2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = 0 \\ f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 0^2 + 2a \cdot 0 + b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2) = 0 \\ b = 0 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 \Rightarrow 12 + 4a = 0 \Rightarrow 4a = -12 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-12}{4} = -3}$$

Tenemos que $a = -3$ y $b = 0$, la función queda $f(x) = x^3 - 3x^2 + c$.

Como la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas para $x = 1$, esto implica que $f(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x^2 + c \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1^3 - 3 \cdot 1^2 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

Los valores buscados son $a = -3$, $b = 0$ y $c = 2$.

E8.- (Análisis)

a) Dada la función $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2}$, hallar su dominio de definición y determinar sus asíntotas horizontales y verticales. **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$. **(1 punto)**

a) El dominio de la función son todos los números reales mayores que 0 (debe existir $\ln x$) que no anulen el denominador.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2=x} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

El dominio de la función es $(0,1) \cup (1,2) \cup (2,+\infty)$

Asíntotas verticales. $x = a$.

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\ln 0^+}{2} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(2x - 3)} = \frac{1}{1(2 - 3)} = -1 \end{aligned}$$

$x = 1$ no es asíntota vertical.

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\ln 2}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

Estudiamos la situación en $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(2x-3)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la gráfica de f cuando x tiende a $+\infty$.

b) Calculamos la integral usando el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = \dots$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2 = x} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1 = x} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A(x-2) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow 1 = -A \rightarrow A = -1 \\ x=2 \rightarrow 1 = B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

$$\dots = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} dx = -\int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-2} dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C$$

Tenemos que $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = \ln|x-2| - \ln|x-1| + C = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C.$

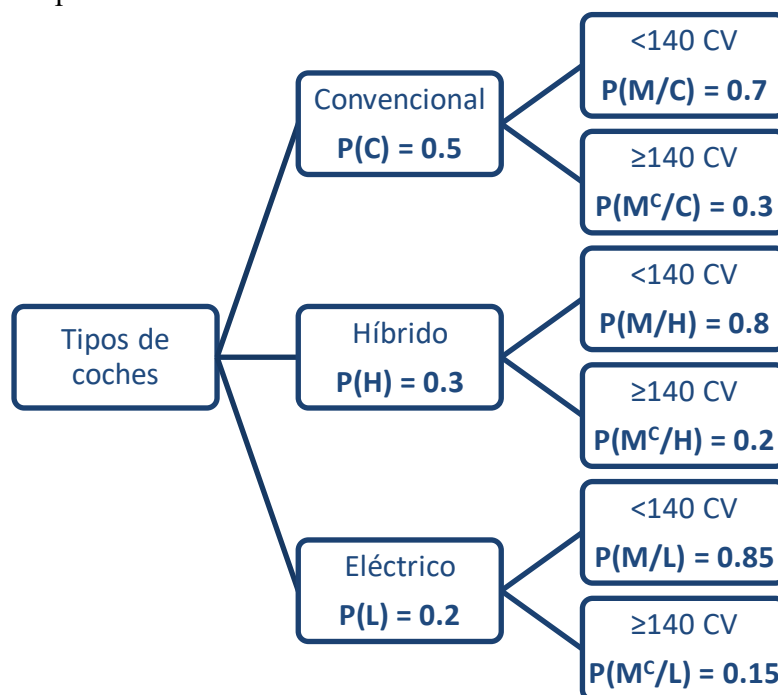
E9- (Probabilidad y estadística)

Entre los automóviles que se fabrican de una cierta marca, un 50% son convencionales (es decir, con motor de gasolina o de gasoil), un 30% híbridos y un 20% eléctricos. De ellos, un 70% de los convencionales, un 80% de los híbridos y un 85% de los eléctricos tienen potencia <140 CV y el resto la tienen ≥ 140 CV. Se pide:

- a) Calcular la probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea convencional con potencia ≥ 140 CV. Lo mismo para híbrido o eléctrico con potencia ≥ 140 CV. **(1 punto)**
- b) Si se sabe que el coche elegido tiene al menos 140 CV, ¿cuál es la probabilidad de que sea de tipo convencional? **(1 punto)**

Hacemos un diagrama de árbol para organizar toda la información proporcionada.

Llamamos C a “el coche es convencional”, H a “el coche es híbrido”, L a “el coche es eléctrico” y M a “el coche tiene potencia <140 CV”.



- a) Nos piden calcular $P(C \cap M^c)$.

$$P(C \cap M^c) = P(C)P(M^c / C) = 0.5 \cdot 0.3 = \boxed{0.15}$$

La probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea convencional con potencia ≥ 140 CV es de 0.15.

También nos piden calcular $P((H \cup L) \cap M^c)$.

$$P((H \cup L) \cap M^c) = P(H \cap M^c) + P(L \cap M^c) =$$

$$= P(H)P(M^c / H) + P(L)P(M^c / L) = 0.3 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.15 = \boxed{0.09}$$

La probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea híbrido o eléctrico con potencia ≥ 140 CV es de 0.09.

- b) Nos piden hallar $P(C / M^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C / M^c) = \frac{P(C \cap M^c)}{P(M^c)} = \frac{P(C \cap M^c)}{P(C \cap M^c) + P(H \cap M^c) + P(L \cap M^c)} = \frac{0.15}{0.15 + 0.09} = \boxed{\frac{5}{8} = 0.625}$$

La probabilidad de que el coche elegido sea de tipo convencional sabiendo que tiene al menos 140 CV (≥ 140 CV) es de 0.625.

E10.- (Probabilidad y estadística)

Suponiendo que el tiempo que dura una partida de torneo entre maestros de ajedrez sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos, calcular:

a) La probabilidad de que una determinada partida de ajedrez jugada en un torneo de maestros acabe en menos de dos horas. **(1 punto)**

b) El porcentaje de partidas de torneo entre maestros de ajedrez que duran más de tres horas y 50 minutos. **(1 punto)**

Llamamos X = el tiempo que dura una partida de torneo entre maestros de ajedrez en minutos.
 $X = N(160, 30)$

a) Nos piden calcular $P(X < 120)$.

$$P(X < 120) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 160}{30} \end{array} \right\} = P\left(Z < \frac{120 - 160}{30}\right) =$$

$$= P(Z < -1.33) = P(Z > 1.33) = 1 - P(Z \leq 1.33) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9082 = \boxed{0.0918}$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9250

La probabilidad de que una determinada partida de ajedrez jugada en un torneo de maestros acabe en menos de dos horas es de 0.0918.

b) 3 horas y 50 minutos son $3 \cdot 60 + 50 = 230$ minutos. Nos piden calcular $P(X > 230)$.

$$P(X > 230) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 160}{30} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{230 - 160}{30}\right) =$$

$$= P(Z > 2.33) = 1 - P(Z \leq 2.33) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9901 = \boxed{0.0099}$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9250
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9494
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9903
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927

El porcentaje de partidas de torneo entre maestros de ajedrez que duran más de tres horas y 50 minutos es del 0.99 %, aproximadamente un 1 %.

EBAU Extraordinaria 2024 (Mejora de nota)

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	---------------------------------	---------------------------------------

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

Dado el siguiente sistema:
$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ (a+1)x + y - az = 0 \\ x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según el valor del parámetro a .

(1,2 puntos)

b) Resolver si $a = 0$.

(0,8 puntos)

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa?

(0,4 puntos)

b) Estudiar el rango de la matriz según los valores de a .

(0,6 puntos)

c) Hallar a para que se cumpla $A^{-1} = \frac{1}{4}A$

(1 punto)

E3.- (Geometría)

Calcular las ecuaciones paramétricas, en forma continua e implícita de la recta s que pasa por el punto $A(1, -2, 2)$ y es paralela a la recta $r: \begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x - y + 2z = 9 \end{cases}$

(2 puntos)

E4.- (Geometría)

Dado el plano $\pi \equiv 3x + 3y + mz = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$. Determinar m para que sean:

a) Perpendiculares.

(1 punto)

b) Paralelos.

(1 punto)

E5.- (Análisis)

- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$. (1 punto)
- b) Demostrar que la ecuación $x \cdot \operatorname{sen} x = 1$ tiene alguna solución. (1 punto)

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$, se pide:

- a) Determinar sus extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
- b) Calcular $\int \frac{2x}{(x+1)^2} dx$. (1 punto)

E7.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ e^{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$:

- a) Hallar de forma razonada, los valores de a y b para los que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 0$. (1,5 puntos)
- b) Hallar la recta tangente a la función en $x = 1$. (0,5 puntos)

E8.- (Análisis)

- a) Calcular los valores de a , b y c para que la función $f(x) = ax^3 - bx + c$ presente en el punto $(1, 2)$ un extremo local y además se cumpla que $\int_0^1 f(x) dx = 1$. (1,6 puntos)
- b) ¿El extremo del apartado anterior es un máximo o un mínimo? ¿Por qué? (0,4 puntos)

E9.- (Probabilidad y estadística)

A las semifinales de un torneo de tenis de Grand Slam llegan cuatro jugadores A , B , C y D . La probabilidad de que gane A es igual a la probabilidad de que gane B . La probabilidad de que gane A es el triple de la probabilidad de que gane C . La probabilidad de que gane C es la misma que la probabilidad de que gane D . Calcular la probabilidad de que:

- a) gane cada uno de ellos. (1 punto)
- b) ganen C o D . (0,5 puntos)
- c) no gane A . (0,5 puntos)

E10.- (Probabilidad y estadística)

En un determinado grupo se estudia la incidencia de la miopía en relación con el sexo de los sujetos estudiados.

- Se estudian 550 mujeres de las cuales 280 son miopes.
- Se estudian 420 hombres de los que 190 son miopes.

Nombrando los sucesos: $A = \text{"ser mujer"}$, $B = \text{"ser hombre"}$, $M = \text{"padecer miopía"}$.

- a) Calcular $P(A)$; $P(M/A)$; $P(B \cap M)$. (0,5 puntos)
- b) Si se elige al azar un sujeto, calcular la probabilidad de que sea miope. (0,5 puntos)
- c) Si se elige al azar un sujeto que resulta ser miope, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

SOLUCIONES**E1.- (Álgebra)**

Dado el siguiente sistema:
$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ (a+1)x + y - az = 0 \\ x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según el valor del parámetro a .

(1.2 puntos)

b) Resolver si $a = 0$.

(0.8 puntos)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ a+1 & 1 & -a & 0 \\ 1 & a+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix} = -a + (a+1)^2 - 1 + a^2(a+1) = -(a+1) + (a+1)^2 + a^2(a+1) =$$

$$= (a+1)^2 + (a^2 - 1)(a+1) = [a+1+a^2-1](a+1) = (a^2+a)(a+1) = a(a+1)(a+1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a(a+1)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a+1 = 0 \rightarrow a = -1 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $a = 0$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B

usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \underbrace{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B

usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & \\ \hline -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & \underbrace{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución), si $a = 0$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) y si $a = -1$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

- b) Para $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado (caso 2). Lo resolvemos a partir de la matriz equivalente obtenida en el apartado a).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=-y \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión: $\begin{cases} x=-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} .$

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$.

- a) ¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa? **(0,4 puntos)**
 b) Estudiar el rango de la matriz según los valores de a . **(0,6 puntos)**
 c) Hallar a para que se cumpla $A^{-1} = \frac{1}{4}A$ **(1 punto)**

a) Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de cero.

- b) Si $a \neq 0$ el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.
 Si $a = 0$ el determinante de A es nulo y el rango de A es menor de 3.

La matriz A queda $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Si observamos las columnas solo hay una con elementos no nulos, por lo que el rango de A es 1.

- c) Si $A^{-1} = \frac{1}{4}A$ entonces $AA^{-1} = \frac{1}{4}AA$, por lo que $I = \frac{1}{4}A^2 \Rightarrow 4I = A^2$.

Utilizamos esta última igualdad para determinar el valor de a que hace posible la primera igualdad.

$$4I = A^2 \Rightarrow 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & -2a+4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2+a & a^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \rightarrow a = \sqrt{4} = \pm 2 \\ -2a+4 = 0 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2 \\ -2+a = 0 \rightarrow a = 2 \\ a^2 = 4 \rightarrow a = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Para que se cumplan todas las igualdades debe ser $a = 2$.

E3.- (Geometría)

Calcular las ecuaciones paramétricas, en forma continua e implícita de la recta s que pasa por el punto $A(1, -2, 2)$ y es paralela a la recta $r: \begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x - y + 2z = 9 \end{cases}$ **(2 puntos)**

Hallamos un vector director de la recta r .

$$r: \begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x - y + 2z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x = y - 2z + 9 \end{cases} \Rightarrow 2(y - 2z + 9) - y + z = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y - 4z + 18 - y + z = 8 \Rightarrow y - 3z = -10 \Rightarrow y = -10 + 3z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -10 + 3z - 2z + 9 \Rightarrow x = -1 + z \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -10 + 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_r = (1, 3, 1)}$$

La recta s que pasa por el punto $A(1, -2, 2)$ y es paralela a la recta r tiene como vector director el mismo que la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} A(1, -2, 2) \in s \\ \vec{u}_s = \vec{v}_r = (1, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + 3\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \text{ (paramétricas)} \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{1} \text{ (continua)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} \rightarrow 3x-3 = y+2 \rightarrow 3x-y-5=0 \\ \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{1} \rightarrow y+2 = 3z-6 \rightarrow y-3z+8=0 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} 3x-y-5=0 \\ y-3z+8=0 \end{cases} \text{ (implícita)}$$

E4.- (Geometría)

Dado el plano $\pi \equiv 3x + 3y + mz = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$. Determinar m para que sean:

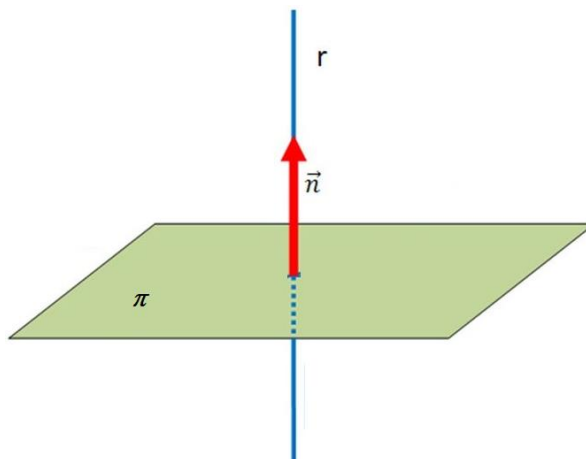
a) Perpendiculares.

(1 punto)

b) Paralelos.

(1 punto)

a) Si la recta es perpendicular al plano el vector director de la recta y el normal del plano deben tener coordenadas proporcionales (misma dirección).



Hallamos las coordenadas del vector director de la recta y el normal del plano.

$$\pi \equiv 3x + 3y + mz = 3 \Rightarrow \vec{n} = (3, 3, m)$$

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x = 2 + y \end{cases} \Rightarrow 2(y + 2) - y + 3z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y + 4 - y + 3z = 1 \Rightarrow y + 3z = -3 \Rightarrow 3z = -3 - y \Rightarrow z = -1 - \frac{1}{3}y \Rightarrow$$

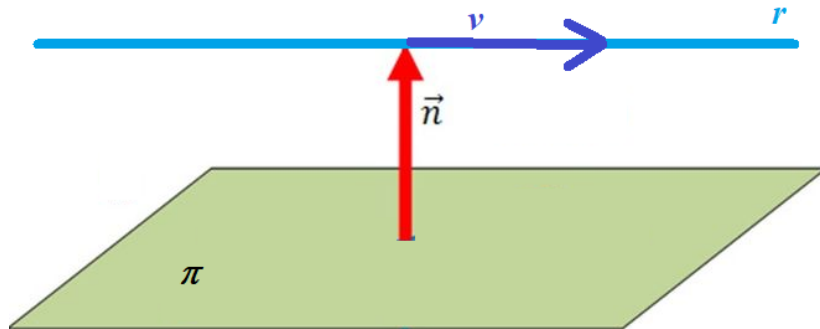
$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -1 - \frac{1}{3}\alpha \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \left(1, 1, -\frac{1}{3}\right)$$

Hacemos que sus coordenadas sean proporcionales y obtenemos el valor de m .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (3, 3, m) \\ \vec{v}_r = \left(1, 1, -\frac{1}{3}\right) \\ \pi \perp r \rightarrow \vec{n} \parallel \vec{v}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{3}{1} = \frac{m}{-1/3} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{3m}{-1} \Rightarrow -3 = 3m \Rightarrow \boxed{m = \frac{-3}{3} = -1}$$

Para que recta y planos sean perpendiculares debe ser $m = -1$.

- b) Si el plano π es paralelo a la recta r el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, por lo que su producto escalar debe ser nulo.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (3, 3, m) \\ \vec{v}_r = \left(1, 1, \frac{-1}{3}\right) \\ \pi \parallel r \rightarrow \vec{n} \perp \vec{v}_r \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (3, 3, m) \cdot \left(1, 1, \frac{-1}{3}\right) = 0 \Rightarrow 3 + 3 - \frac{m}{3} = 0 \Rightarrow 6 = \frac{m}{3} \Rightarrow \boxed{m=18}$$

Para que recta y plano sean paralelos debe ser $m = 18$.

E5.- (Análisis)

- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$. (1 punto)
- b) Demostrar que la ecuación $x \cdot \operatorname{sen} x = 1$ tiene alguna solución. (1 punto)

a) Calculamos el límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} &= \frac{\operatorname{tg} 0 - \operatorname{sen} 0}{0 \cdot \operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0} = \{\text{Simplificamos la expresión}\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\operatorname{sen} x} \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x \cdot \cancel{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{\cos x}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cos x} = \frac{1 - \cos 0}{0 \cdot \cos 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} 0}{\cos 0 - 0 \cdot \operatorname{sen} 0} = \frac{0}{1} = \boxed{0} \end{aligned}$$

Hemos comprobado que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = 0$.

- b) Consideramos la función $f(x) = 1 - x \cdot \operatorname{sen} x$. Debemos encontrar un valor c tal que $f(c) = 0$.

Como $f(0) = 1 - 0 \cdot \operatorname{sen} 0 = 1 > 0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2} \approx -0.57 < 0$ consideramos el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Queremos aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x) = 1 - x \cdot \operatorname{sen} x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

La función $f(x) = 1 - x \cdot \operatorname{sen} x$ es continua en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, siendo $f(0) > 0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.

Podemos aplicar el teorema de Bolzano y asegurar que existe $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$.

Para el valor $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ se cumple la igualdad $1 - c \cdot \operatorname{sen} c = 0 \Rightarrow c \cdot \operatorname{sen} c = 1$.

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Determinar sus extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{2x}{(x+1)^2} dx$. **(1 punto)**

a) El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 2x(2)(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1) - 2x(2)}{(x+1)^3} = \frac{2x+2-4x}{(x+1)^3}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{2-2x}{(x+1)^3} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2-2x}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow 2-2x = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

La función presenta un punto crítico en $x = 1$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -1$ (excluido del dominio) y $x = 1$ (punto crítico).

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{2-2(-2)}{(-2+1)^3} = -6 < 0$.

La función decrece en $(-\infty, -1)$.

- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{2-2(0)}{(0+1)^3} = 2 > 0$. La

función crece en $(-1, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2-2(2)}{(2+1)^3} = \frac{-2}{27} < 0$. La

función decrece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(-1, 1)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 1$. No tiene mínimo relativo pues $x = 1$ no pertenece al dominio de la función.

b) Calculamos la integral usando descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{2x}{(x+1)^2} dx = \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(x+1)^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{2x}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} \Rightarrow 2x = A(x+1)+B \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow 0=A+B \rightarrow A=-B \\ x=-1 \rightarrow -2=B \end{cases} &\Rightarrow A=2 \Rightarrow \frac{2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\dots = \int \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2}{x+1} dx - \int \frac{2}{(x+1)^2} dx = 2 \int \frac{1}{x+1} dx - 2 \int (x+1)^{-2} dx =$$

$$= 2 \ln|x+1| - 2 \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \boxed{\ln(x+1)^2 + \frac{2}{x+1} + C}$$

Hemos visto que $\int \frac{2x}{(x+1)^2} dx = \ln(x+1)^2 + \frac{2}{x+1} + C.$

E7.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ e^{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$:

- a) Hallar de forma razonada, los valores de a y b para los que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 0$. **(1,5 puntos)**
 b) Hallar la recta tangente a la función en $x = 1$. **(0,5 puntos)**

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ deben coincidir el valor de la función y los límites laterales.

- Existe $f(0) = 0^2 + a \cdot 0 + b = b$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + ax + b = b$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x} = e^0 = 1$
- Los tres valores son iguales $\rightarrow b = 1$.

Para que la función sea continua en $x = 0$ debe ser $b = 1$.

La función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 0 \\ e^{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Hallamos la expresión de la derivada de la función en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 0 \\ 2e^{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x + a = a \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2e^{2x} = 2e^0 = 2 \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 2$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ debe ser $a = 2$.

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = 1$.

b) La recta tangente en $x = 1$ tiene ecuación $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= e^2 \\ f'(1) &= 2e^2 \\ y - f(1) &= f'(1)(x - 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - e^2 = 2e^2(x - 1) \Rightarrow y - e^2 = 2e^2x - 2e^2 \Rightarrow \boxed{y = 2e^2x - e^2}$$

La recta tangente en $x = 1$ tiene ecuación $y = 2e^2x - e^2$.

E8.- (Análisis)

- a)** Calcular los valores de a , b y c para que la función $f(x) = ax^3 - bx + c$ presente en el punto (1, 2) un extremo local y además se cumpla que $\int_0^1 f(x) dx = 1$. **(1,6 puntos)**
- b)** ¿El extremo del apartado anterior es un máximo o un mínimo? ¿Por qué? **(0,4 puntos)**

- a) Si la función presenta en el punto (1, 2) un extremo local debe cumplirse que $f(1) = 2$ y que $f'(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 - bx + c \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = a \cdot 1^3 - b + c \Rightarrow \boxed{2 = a - b + c}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 - b \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 1^2 - b \Rightarrow 3a - b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 3a}$$

Aplicamos la condición $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 (ax^3 - bx + c) dx = 1 \Rightarrow \left[a \frac{x^4}{4} - b \frac{x^2}{2} + cx \right]_0^1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a \frac{1^4}{4} - b \frac{1^2}{2} + c \right] - \left[a \frac{0^4}{4} - b \frac{0^2}{2} + c \cdot 0 \right] = 1 \Rightarrow \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c = 1 \Rightarrow \boxed{a - 2b + 4c = 4}$$

Reunimos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a - b + c = 2 \\ b = 3a \\ a - 2b + 4c = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a - 3a + c = 2 \\ a - 6a + 4c = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2a + c = 2 \\ -5a + 4c = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = 2 + 2a \\ -5a + 4c = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5a + 4(2 + 2a) = 4 \Rightarrow -5a + 8 + 8a = 4 \Rightarrow 3a = -4 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-4}{3}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{b = 3 \frac{-4}{3} = -4} \\ \boxed{c = 2 + 2 \frac{-4}{3} = \frac{-2}{3}} \end{array} \right.$$

Los valores que hacen que se cumpla lo pedido son $a = \frac{-4}{3}$; $b = -4$; $c = \frac{-2}{3}$.

- b) Para los valores $a = \frac{-4}{3}$; $b = -4$; $c = \frac{-2}{3}$ la función queda $f(x) = \frac{-4}{3}x^3 + 4x - \frac{2}{3}$.

Hallamos la expresión de la segunda derivada y comprobamos el signo de la segunda derivada para $x = 1$.

$$f(x) = \frac{-4}{3}x^3 + 4x - \frac{2}{3} \Rightarrow f'(x) = -4x^2 + 4 \Rightarrow f''(x) = -8x \Rightarrow f''(1) = -8 < 0$$

Como el signo de la segunda derivada es negativo la función presenta un máximo relativo en el punto (1, 2).

E9- (Probabilidad y estadística)

A las semifinales de un torneo de tenis de Grand Slam llegan cuatro jugadores A , B , C y D . La probabilidad de que gane A es igual a la probabilidad de que gane B . La probabilidad de que gane A es el triple de la probabilidad de que gane C . La probabilidad de que gane C es la misma que la probabilidad de que gane D . Calcular la probabilidad de que:

- a) gane cada uno de ellos. (1 punto)
 b) ganen C o D . (0.5 puntos)
 c) no gane A . (0.5 puntos)

a) Llamamos A , B , C y D a “gana el jugador A , B , C o D respectivamente”.

“La probabilidad de que gane A es igual a la probabilidad de que gane B ” $\rightarrow P(A) = P(B)$.

“La probabilidad de que gane A es el triple de la probabilidad de que gane C ” $\rightarrow P(A) = 3P(C)$.

“La probabilidad de que gane C es la misma que la probabilidad de que gane D ” $\rightarrow P(C) = P(D)$.

Sabemos que $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1 \\ P(A) = P(B) = 3P(C) \\ P(D) = P(C) \end{array} \right\} \Rightarrow 3P(C) + 3P(C) + P(C) + P(C) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8P(C) = 1 \Rightarrow \boxed{P(C) = \frac{1}{8}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(A) = \frac{3}{8} \\ P(B) = \frac{3}{8} \\ P(C) = \frac{1}{8} \\ P(D) = \frac{1}{8} \end{array} \right.$$

Hemos obtenido que $P(A) = P(B) = \frac{3}{8}$; $P(C) = P(D) = \frac{1}{8}$.

b) Nos piden calcular $P(C \cup D)$. Como los sucesos son incompatibles tenemos:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

La probabilidad de que gane C o D es de $\frac{1}{4} = 0.25$.

c) Como A gana 3 de cada 8 veces entonces pierde las restantes 5 veces.

La probabilidad de que no gane A es $\frac{5}{8} = 0.625$.

E10.- (Probabilidad y estadística)

En un determinado grupo se estudia la incidencia de la miopía en relación con el sexo de los sujetos estudiados.

- Se estudian 550 mujeres de las cuales 280 son miopes.
- Se estudian 420 hombres de los que 190 son miopes.

Nombrando los sucesos: $A = \text{"ser mujer"}$, $B = \text{"ser hombre"}$, $M = \text{"padecer miopía"}$.

a) Calcular $P(A)$; $P(M / A)$; $P(B \cap M)$. **(0,5 puntos)**

b) Si se elige al azar un sujeto, calcular la probabilidad de que sea miope. **(0,5 puntos)**

c) Si se elige al azar un sujeto que resulta ser miope, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **(1 punto)**

- a) Son $550 + 420 = 970$ personas las que participan en el estudio.
Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(A) = \frac{N^{\circ} \text{ mujeres}}{N^{\circ} \text{ personas}} = \frac{550}{970} = \frac{55}{97} \approx 0.567$$

$$P(M / A) = \frac{N^{\circ} \text{ Mujeres miopes}}{N^{\circ} \text{ mujeres}} = \frac{280}{550} \approx 0.5091$$

$$P(B \cap M) = \frac{N^{\circ} \text{ hombres miopes}}{N^{\circ} \text{ personas}} = \frac{190}{970} = \frac{19}{97} \approx 0.1959$$

- b) Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos la regla de Laplace. Hay $280 + 190 = 470$ personas miopes de un total de 970 personas.

$$P(M) = \frac{470}{970} = \frac{47}{97} \approx 0.4845$$

- c) Nos piden calcular $P(A / M)$. Volvemos a aplicar la regla de Laplace. Hay 470 personas miopes y 280 mujeres miopes.

$$P(A / M) = \frac{280}{470} = \frac{28}{47} \approx 0.5957$$

EBAU Ordinaria 2024

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	-----------------------	---------------------------------------

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} + z = 0 \\ 2ax + y = 0 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases} \quad (1.2 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $a=1$. (0.8 puntos)

E2.- (Álgebra)

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$,

a) Calcular el determinante y el rango de M para cada valor $a \in \mathbb{R}$. (1 punto)

b) Para $a=0$, calcular el determinante de la matriz P cuando $2PM = M^3$. (1 punto)

E3.- (Geometría)

Hallar el punto simétrico del punto $P = (1, 0, -1)$ respecto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.
(2 puntos)

E4.- (Geometría)

a) Determinar los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para los que las dos rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=kt \\ z=k-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad r_2 \equiv \begin{cases} x+2y+2z=-1 \\ x+y+z=k \end{cases}$$

Son paralelas.

(1 punto)

b) Para $k=2$ ¿Existe algún plano que contenga a las rectas r_1 y r_2 ? En caso afirmativo calcular el plano o los planos que las contengan.

(1 punto)

E5.- (Análisis)

Probar que la ecuación $e^{-x}(x-1)=1$ no tiene solución para $x \in \mathbb{R}$.

(2 puntos)

E6.- (Análisis)

Se considera la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Determinar el valor de los parámetros A , B y C tales que $f(-1) = 0$, la función f presenta un extremo relativo en $x = 0$ y la recta tangente a la gráfica de la función f en $x = -1$ es paralela a la recta de ecuación $y + 3x = 0$.

(2 puntos)

E7.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = e^x x^{-1}$, determinar su dominio de definición, asíntotas verticales y horizontales, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.

(2 puntos)

E8.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{\cos(x) - 1}$

(1 punto)

b) $\int_0^2 e^{-x}(x-1)dx$

(1 punto)

E9.- (Probabilidad y estadística)

Entre los vehículos que revisa un taller mecánico:

- El 48% de ellos son coches, de los cuales las tres cuartas partes requieren reparación.
- El 28% son motocicletas y entre ellas la mitad requieren reparación.
- El 24% son furgonetas, de las cuales un tercio requieren reparación.

Se consideran los sucesos:

C = "coche", M = "motocicleta", F = "furgoneta" y R = "requiere reparación".

a) Indicar qué probabilidades de sucesos, condicionados o no, se consideran en el enunciado y cuáles son sus valores.

(0,2 puntos)

b) Calcular $P(R \cap F)$, $P(R)$ y $P(C/R)$.

(1,3 puntos)

c) ¿Son independientes los sucesos C y R ?

(0,5 puntos)

E10.- (Probabilidad y estadística)

Se sabe que la cantidad de tiempo que los habitantes de Astorga usan el móvil cada día sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos. Calcular:

a) La probabilidad de que un habitante determinado de Astorga use el móvil cada día menos de dos horas.

(1 punto)

b) El porcentaje de habitantes de Astorga que usan el móvil cada día más de tres horas y 50 minutos. **(1 punto)**

SOLUCIONES**E1.- (Álgebra)**

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} + z = 0 \\ 2ax + y = 0 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases} \quad (1.2 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $a=1$. (0.8 puntos)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 2a & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = a + 0 + 2a - 2 - a^2 - 0 = -a^2 + 3a - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(-2)}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{-2} = \boxed{1=a} \\ \frac{-3-1}{-2} = \boxed{2=a} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $a=1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B

usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ -2 \quad -1 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ -2 \quad -1 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B

usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 4 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 4 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ -4 \quad -2 \quad -4 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -4 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \\ -2 \quad -1 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad -4 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución) y si $a = 1$ o $a = 2$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

b) Para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado (caso 2). Lo resolvemos a partir de la matriz equivalente obtenida en el apartado a).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{y}{2} + z = 0 \\ -2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 2z = 0 \\ \boxed{z = 0} \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow \boxed{y = -2x}$$

Las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión: $x = \lambda$, $y = -2\lambda$, $z = 0$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

E2.- (Álgebra)

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$,

- a) Calcular el determinante y el rango de M para cada valor $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**
 b) Para $a = 0$, calcular el determinante de la matriz P cuando $2PM = M^3$. **(1 punto)**

a) Calculamos el determinante de M .

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a + 0 + 2a - 2 - 2a - a^2 - 0 = -a^2 + 3a - 2$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de M .

$$|M| = 0 \Rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(-2)}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{-2} = \boxed{1=a} \\ \frac{-3-1}{-2} = \boxed{2=a} \end{cases}$$

Distinguimos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$.

En este caso el determinante de M no es nulo y el rango es 3.

CASO 2. Si $a = 1$.

En este caso el determinante de M es nulo y el rango es menor de 3. Si tomamos el menor que resulta de quitar la columna primera y la fila tercera $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$. El rango de M es 2.

CASO 3. Si $a = 2$.

En este caso el determinante de M es nulo y el rango es menor de 3. Si tomamos el menor que resulta de quitar la columna primera y la fila tercera $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. El rango de M es 2.

Resumiendo: Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el rango de M es 3 y si $a = 1$ o $a = 2$ el rango de M es 2.

b) Para $a = 0$ la matriz queda $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $|M| = -0^2 + 3 \cdot 0 - 2 = -2 \neq 0$.

Aplicamos las propiedades de los determinantes.

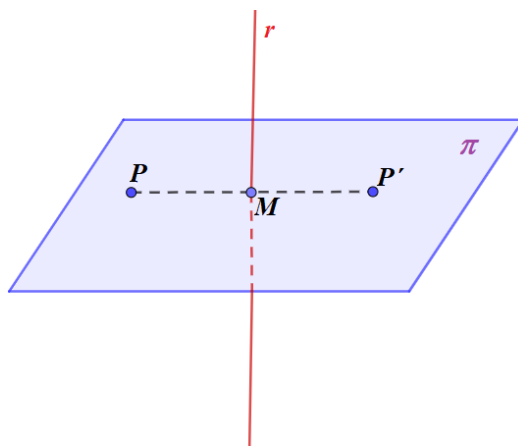
$$\begin{aligned} 2PM = M^3 &\Rightarrow |2PM| = |M^3| \Rightarrow \{PM \text{ es } 3 \times 3\} \Rightarrow 2^3 |PM| = |M|^3 \Rightarrow 8|P| \cdot (-2) = (-2)^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -16|P| = -8 \Rightarrow |P| = \frac{-8}{-16} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

El determinante de M vale $1/2$.

E3.- (Geometría)

Hallar el punto simétrico del punto $P = (1, 0, -1)$ respecto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$. **(2 puntos)**

Vamos a determinar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r calculando previamente el plano π perpendicular a la recta que contiene el punto P , después el punto M de corte de recta y plano. Por último, hallamos el punto P' sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$ ya que M es el punto medio del segmento PP' .



Hallamos la ecuación del plano π . Su vector normal es el vector director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 2, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 2, 2) \\ P(1, 0, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + 2y + 2z + D = 0 \\ P(1, 0, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 0 - 2 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x + 2y + 2z + 1 = 0}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(1, 0, 0) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 2) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + 2y + 2z + 1 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda + 2(2\lambda) + 2(2\lambda) + 1 = 0 \Rightarrow 2 + 9\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \\ y = 2 \cdot \frac{-2}{9} = \frac{-4}{9} \\ z = 2 \cdot \frac{-2}{9} = \frac{-4}{9} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{-4}{9}\right)$$

Hallamos las coordenadas del punto P' .

$$\overrightarrow{PM} = \left(\frac{7}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{-4}{9}\right) - (1, 0, -1) = \left(\frac{-2}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{5}{9}\right)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = \left(\frac{7}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{-4}{9}\right) + \left(\frac{-2}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{5}{9}\right) = \left(\frac{5}{9}, \frac{-8}{9}, \frac{1}{9}\right)$$

El punto P' simétrico de P respecto de la recta r tiene coordenadas $P' \left(\frac{5}{9}, \frac{-8}{9}, \frac{1}{9}\right)$.

E4.- (Geometría)

a) Determinar los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para los que las dos rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = kt \\ z = k - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + y + z = k \end{cases}$$

Son paralelas.

b) Para $k = 2$ ¿Existe algún plano que contenga a las rectas r_1 y r_2 ? En caso afirmativo calcular el plano o los planos que las contengan. **(1 punto)**

a) Hallamos un vector director y un punto de cada una de las rectas.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = kt \\ z = k - 2t \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} P_1(1, 0, k) \\ \vec{u}_1 = (0, k, -2) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + y + z = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2y - 2z \\ x + y + z = k \end{cases} \Rightarrow -1 - 2y - 2z + y + z = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y - z = k + 1 \Rightarrow y + z = -1 - k \Rightarrow y = -1 - k - z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 - 2(-1 - k - z) - 2z = -1 + 2 + 2k + 2z - 2z = 1 + 2k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 - k - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} Q_2(1 + 2k, -1 - k, 0) \\ \vec{v}_2 = (0, -1, 1) \end{cases}$$

Para que sean rectas paralelas los vectores directores deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (0, k, -2) \\ \vec{v}_2 = (0, -1, 1) \\ \vec{u}_1 \parallel \vec{v}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{k}{-1} = \frac{-2}{1} \Rightarrow -k = -2 \Rightarrow \boxed{k = 2}$$

Comprobamos que no son coincidentes para $k = 2$.

$$\text{Sus ecuaciones quedan } r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \text{ y } r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + 4 = 5 \\ y = -3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}. \text{ Se aprecia que no tienen las mismas}$$

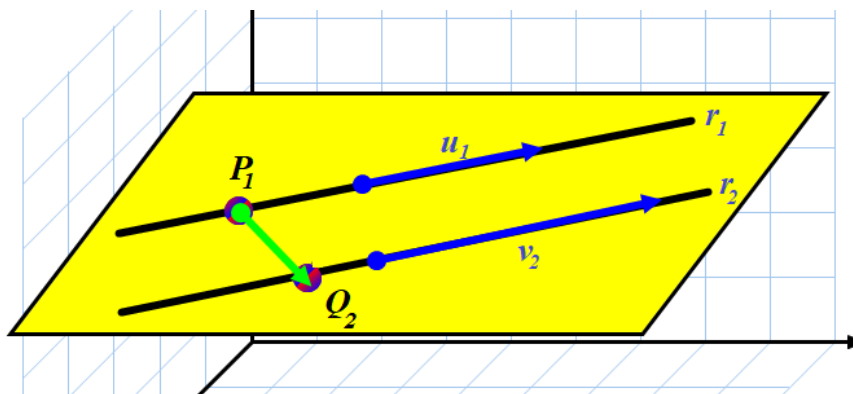
ecuaciones pues la primera coordenada (x) son totalmente distintas en cada recta.

Para que las rectas sean paralelas debe ser $k = 2$.

b) Para $k = 2$ las rectas son paralelas. Si existe un plano que las contiene. Lo hallamos.

Las rectas quedan $r_1 \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=2t \\ z=2-2t \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x=5 \\ y=-3-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} Q_2(5, -3, 0) \\ \vec{v}_2 = (0, -1, 1) \end{cases}$

Hallamos el plano que contiene el punto $P_1(1, 0, 2)$ de la recta r_1 y que tiene como uno de sus vectores directores el vector $\vec{v}_2 = (0, -1, 1)$ que es el vector director de la recta r_2 y el otro vector director del plano es el vector $\overrightarrow{P_1Q_2}$



$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_2 = (0, -1, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{P_1Q_2} = (5, -3, 0) - (1, 0, 2) = (4, -3, -2) \\ P_1(1, 0, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-1) + 4y + 0 + 4(z-2) - 0 + 3(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2 + 4y + 4z - 8 + 3x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{5x + 4y + 4z - 13 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi \equiv 5x + 4y + 4z - 13 = 0$.

E5.- (Análisis)Probar que la ecuación $e^{-x}(x-1)=1$ no tiene solución para $x \in \mathbb{R}$.**(2 puntos)**

$$e^{-x}(x-1)=1 \Rightarrow e^{-x}(x-1)-1=0$$

Buscamos valores que anulen la función $f(x)=e^{-x}(x-1)-1$.

Averiguamos los máximos y mínimos de la función.

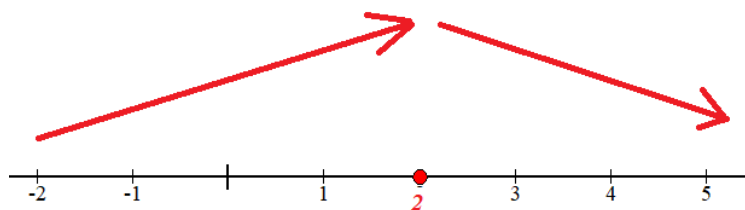
$$f(x)=e^{-x}(x-1)-1 \Rightarrow f'(x)=-e^{-x}(x-1)+e^{-x}(1)=e^{-x}(-x+1+1)=e^{-x}(2-x)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow e^{-x}(2-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x}=0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ 2-x=0 \rightarrow \boxed{x=2} \end{cases}$$

En $x=2$ la función tiene un punto crítico, vemos como es el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(-\infty, 2)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=e^0(2-0)=2>0$. La función crece en $(-\infty, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3)=e^{-3}(2-3)=-\frac{1}{e^3}<0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente

La función tiene un máximo absoluto en $x=2$.Como $f(2)=e^{-2}(2-1)-1=\frac{1}{e^2}-1 \approx -0.86 < 0$ y este es el máximo absoluto de la funciónconcluimos que no es posible encontrar un valor $x \in \mathbb{R}$ tal que se anule la función y por tanto no es posible encontrar un valor $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^{-x}(x-1)=1$.

E6.- (Análisis)

Se considera la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Determinar el valor de los parámetros A , B y C tales que $f(-1) = 0$, la función f presenta un extremo relativo en $x = 0$ y la recta tangente a la gráfica de la función f en $x = -1$ es paralela a la recta de ecuación $y + 3x = 0$. **(2 puntos)**

Aplicamos la primera condición: $f(-1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C \\ f(-1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = (-1)^3 + A(-1)^2 + B(-1) + C \Rightarrow \boxed{0 = -1 + A - B + C}$$

Aplicamos la segunda condición: La función f presenta un extremo relativo en $x = 0$, lo que implica que la derivada se anula en $x = 0 \rightarrow f'(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 0^2 + 2A \cdot 0 + B \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

La función queda $f(x) = x^3 + Ax^2 + C$

Aplicamos la tercera condición: La recta tangente a la gráfica de la función f en $x = -1$ es paralela a la recta de ecuación $y + 3x = 0$. Las dos rectas tienen la misma pendiente.

$$y + 3x = 0 \Rightarrow y = -3x \Rightarrow \text{pendiente} = -3$$

Como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en $x = -1$ es el valor de la derivada $\rightarrow f'(-1) = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + Ax^2 + C \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2Ax \\ f'(-1) = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow -3 = 3(-1)^2 + 2A(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 = 3 - 2A \Rightarrow 2A = 6 \Rightarrow \boxed{A = \frac{6}{2} = 3}$$

Sustituimos estos valores en la primera ecuación obtenida para hallar el valor de C .

$$\left. \begin{array}{l} -1 + A - B + C = 0 \\ B = 0 \\ A = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + 3 - 0 + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = -2}$$

Los valores que hacen que se cumpla lo pedido son $A = 3$, $B = 0$ y $C = -2$.

E7.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = e^x x^{-1}$, determinar su dominio de definición, asíntotas verticales y horizontales, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica. (2 puntos)

El dominio de la función $f(x) = e^x x^{-1} = \frac{e^x}{x}$ son todos los números reales menos los que anulan el denominador $\rightarrow$ Dominio $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$.

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = \frac{e^0}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

Estudiamos la situación en $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{e^{+\infty}}{+\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = e^{+\infty} = +\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Estudiamos la situación en $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^{-x}} = \frac{1}{(-\infty)e^{+\infty}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la gráfica de f cuando x tiende a $-\infty$.

Estudiamos su crecimiento y decrecimiento usando la derivada para encontrar sus puntos críticos.

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x \cdot x - 1 \cdot e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{(x-1)e^x}{x^2} = 0 \Rightarrow (x-1)e^x = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

La función tiene un punto crítico en $x = 1$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 1$ y $x = 0$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{(-1-1)e^{-1}}{(-1)^2} = \frac{-2}{e} < 0$. La

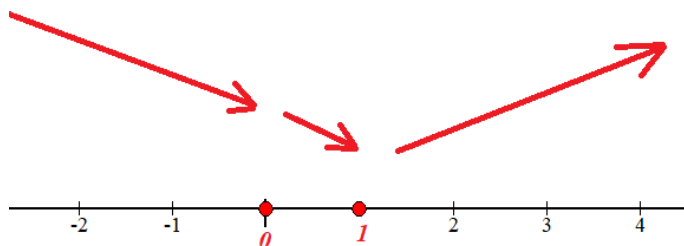
función decrece en $(-\infty, 0)$.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{(0.5-1)e^{0.5}}{0.5^2} = \frac{-e^{0.5}}{0.5} < 0$.

La función decrece en $(0,1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{(2-1)e^2}{2^2} = \frac{e^2}{4} > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.

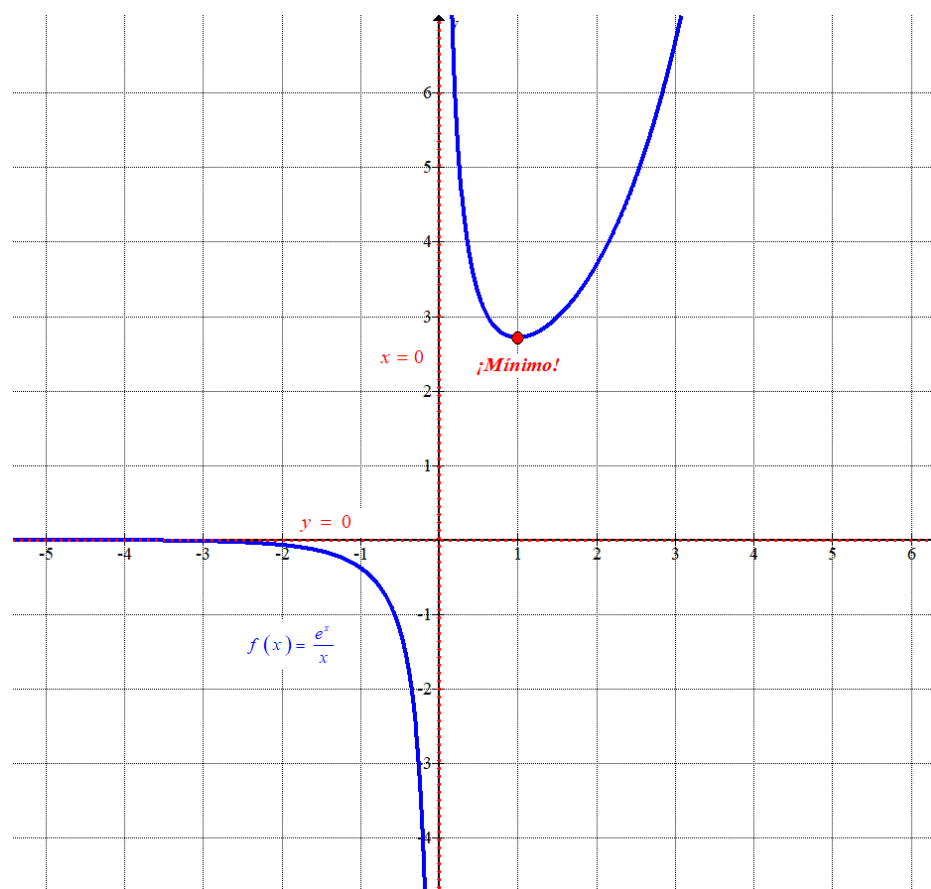


La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 1$. Como $f(1) = e^1(1)^{-1} = e$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(1, e)$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y = \frac{e^x}{x}$
-1	$-e^{-1}$
0.5	$2e^{0.5}$
1	e
2	$e^2/2$



E8.- (Análisis)

Calcular:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{\cos(x) - 1} \quad (1 \text{ punto})$$

$$\text{b) } \int_0^2 e^{-x} (x-1) dx \quad (1 \text{ punto})$$

a) Calculamos el límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{\cos(x) - 1} = \frac{0(e^0 - 1)}{\cos(0) - 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) + xe^x}{-\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + e^x - 1}{-\sin(x)} = \frac{0e^0 + e^0 - 1}{-\sin(0)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x + e^x}{-\cos(x)} = \frac{e^0 + 0e^0 + e^0}{-\cos(0)} = \frac{1+1}{-1} = \boxed{-2}$$

b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int e^{-x} (x-1) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x-1 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = -e^{-x} (x-1) - \int -e^{-x} dx =$$

$$= (1-x)e^{-x} + \int e^{-x} dx = (1-x)e^{-x} - e^{-x} = -xe^{-x} + K$$

Calculamos la integral definida.

$$\int_0^2 e^{-x} (x-1) dx = \left[-xe^{-x} \right]_0^2 = -2e^{-2} - (-0e^{-0}) = \boxed{\frac{-2}{e^2}}$$

E9- (Probabilidad y estadística)

Entre los vehículos que revisa un taller mecánico:

- El 48% de ellos son coches, de los cuales las tres cuartas partes requieren reparación.
- El 28% son motocicletas y entre ellas la mitad requieren reparación.
- El 24% son furgonetas, de las cuales un tercio requieren reparación.

Se consideran los sucesos:

C = "coche", M = "motocicleta", F = "furgoneta" y R = "requiere reparación".

a) Indicar qué probabilidades de sucesos, condicionados o no, se consideran en el enunciado y cuáles son sus valores. **(0,2 puntos)**

b) Calcular $P(R \cap F)$, $P(R)$ y $P(C/R)$. **(1,3 puntos)**

c) ¿Son independientes los sucesos C y R ? **(0,5 puntos)**

a) Los datos del ejercicio nos permiten decir que $P(C) = 0.48$, $P(R/C) = \frac{3}{4} = 0.75$, $P(M) = 0.28$,

$$P(R/M) = \frac{1}{2} = 0.5, P(F) = 0.24, P(R/F) = \frac{1}{3}.$$

Las probabilidades que no son condicionadas son las probabilidades de C , M y F .

Las probabilidades que son condicionadas son las probabilidades de R/C , R/M y R/F .

b) $P(R \cap F) = P(F)P(R/F) = 0.24 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{0.08}$

Para calcular $P(R)$ usamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(R) &= P(C)P(R/C) + P(M)P(R/M) + P(F)P(R/F) = \\ &= 0.48 \cdot 0.75 + 0.28 \cdot 0.5 + 0.24 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{0.58} \end{aligned}$$

Para calcular $P(C/R)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{P(C)P(R/C)}{P(R)} = \frac{0.48 \cdot 0.75}{0.58} = \boxed{\frac{18}{29} \approx 0.6207}$$

c) Los sucesos C y R son independientes si se cumple la igualdad $P(C \cap R) = P(C)P(R)$.

$$\left. \begin{aligned} P(C \cap R) &= P(C)P(R/C) = 0.48 \cdot 0.75 = 0.36 \\ P(C)P(R) &= 0.48 \cdot 0.58 = 0.2784 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(C \cap R) = 0.36 \neq 0.2784 = P(C)P(R)$$

Al no cumplirse la igualdad los sucesos C y R no son independientes.

E10.- (Probabilidad y estadística)

Se sabe que la cantidad de tiempo que los habitantes de Astorga usan el móvil cada día sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos. Calcular:

a) La probabilidad de que un habitante determinado de Astorga use el móvil cada día menos de dos horas. **(1 punto)**

b) El porcentaje de habitantes de Astorga que usan el móvil cada día más de tres horas y 50 minutos. **(1 punto)**

Llamamos X = La cantidad de minutos que los habitantes de Astorga usan el móvil cada día.
 $X = N(160, 30)$

a) Nos piden calcular $P(X < 120)$.

$$P(X < 120) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 160}{30} \end{array} \right\} = P\left(Z < \frac{120 - 160}{30}\right) = P(Z < -1.33) = P(Z > 1.33) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.33) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9082 = \boxed{0.0918}$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.4
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9

La probabilidad de que un habitante determinado de Astorga use el móvil cada día menos de dos horas es de 0.0918.

b) Calculamos $P(X > 230)$.

$$P(X > 230) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 160}{30} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{230 - 160}{30}\right) = P(Z > 2.33) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2.33) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9901 = \boxed{0.0099}$$

El porcentaje de habitantes de Astorga que usan el móvil cada día más de tres horas y 50 minutos es del 0.99 %.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.4
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9

EBAU Ordinaria 2024 (Mejora de nota)

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	-----------------------	---------------------------------------

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

Dado el sistema
$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \\ mx + 5y - 4z = -1 \end{cases}$$

a) Estudiar el sistema en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

(1,2 puntos)

b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

(0,8 puntos)

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ siendo $a \in \mathbb{R}$,

a) Calcular AB .

(0,5 puntos)

b) Estudiar para qué valores de a la matriz AB tiene inversa, calculándola cuando $a = 1$.

(1,5 puntos)

E3.- (Geometría)

Dado el plano $\pi \equiv 2x + y = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a π , que contenga a r .

(1

punto)

b) ¿Existe algún plano paralelo a π que contenga a r ? En caso afirmativo calcularlo.

(1 punto)

E4.- (Geometría)

a) Encontrar el valor de $a \in \mathbb{R}$, para que las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{cases} \text{ y } s \equiv x+1=\frac{y-3}{a}=\frac{z}{2} \text{ sean paralelas.} \quad (1 \text{ punto})$$

b) Si $a = 9$, calcular la ecuación del plano que las contiene. (1 punto)

E5.- (Análisis)

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si } x < 0 \\ a \cdot \text{sen}(x) + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcular a y b para que f sea continua y derivable en 0. (2 puntos)

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = e^{x^2}$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.

(2 puntos)

E7.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{\text{sen}^2(x)}$ (1 punto)

b) $\int_0^1 xe^x dx$ (1 punto)

E8.- (Análisis)

Dadas las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$:

a) Comprobar que sólo se cortan en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ (0,5 puntos)

b) Hallar el área de la parte del plano limitada por las gráficas de dichas funciones. (1,5 puntos)

E9.- (Probabilidad y estadística)

a) Un mensaje es transmitido con errores con una probabilidad de 0,2. Emitimos de forma independiente 3 mensajes. Calcular la probabilidad de que al menos 2 de los 3 mensajes hayan sido transmitidos con errores.

(1 punto)

b) Se consideran los sucesos A y B , con $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ y $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Calcular $P(A \cap B)$ y $P(A/B)$.

punto)

(1

E10.- (Probabilidad y estadística)

Las notas que han obtenido 1000 opositores siguen una distribución normal de media 4 y desviación típica $\frac{100}{51}$.

a) ¿Cuántos opositores ha obtenido una calificación superior a 5? (1 punto)

- b)** Sabiendo que los opositores con nota superior a 2 y por debajo de 5 formarán la bolsa de empleo, determinar qué porcentaje de opositores ha quedado en esa situación. **(1 punto)**

SOLUCIONES**E1.- (Álgebra)**

Dado el sistema
$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \\ mx + 5y - 4z = -1 \end{cases}$$

a) Estudiar el sistema en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

(1.2 puntos)

b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

(0.8 puntos)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 5 & -4 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ m & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 5 & -4 \end{vmatrix} = 12 + 4m - 5 - m + 8 - 30 = 3m - 15$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3m - 15 = 0 \Rightarrow 3m = 15 \Rightarrow m = \frac{15}{3} = 5$$

Distinguimos dos casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $m \neq 5$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $m = 5$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B

usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad -3 \quad 6 \quad 9 \\ -3 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -5 \quad 7 \quad 8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 1^a & & & \\ 15 & 15 & -12 & -3 \\ -15 & -10 & 5 & -5 \\ \hline 0 & 5 & -7 & -8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & -7 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a & & & \\ 0 & 5 & -7 & -8 \\ 0 & -5 & 7 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 3 & 2 & -1 & 1 \end{matrix}}^{A/B} \\ 0 & -5 & 7 & 8 \\ \underbrace{0 & 0 & 0 & 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $m \neq 5$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución) y si $m = 5$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

- b) Resolvemos el sistema para $m = 5$. Lo resolvemos a partir de la matriz equivalente obtenida en el apartado a).

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ -5y + 7z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 7z = 8 + 5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ z = \frac{8 + 5y}{7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 2y - \frac{8 + 5y}{7} = 1 \Rightarrow 21x + 14y - 8 - 5y = 7 \Rightarrow 21x = 15 - 9y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x = 5 - 3y \Rightarrow x = \frac{5 - 3y}{7} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - 3\lambda}{7} \\ y = \lambda \\ z = \frac{8 + 5\lambda}{7} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Para $m = 5$ las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión: $\begin{cases} x = \frac{5 - 3\lambda}{7} \\ y = \lambda \\ z = \frac{8 + 5\lambda}{7} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ siendo $a \in \mathbb{R}$,

a) Calcular AB . (0,5 puntos)

b) Estudiar para qué valores de a la matriz AB tiene inversa, calculándola cuando $a = 1$. (1,5 puntos)

a) Calculamos la expresión de AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1-2 & 1+0+2a \\ 0+1-a & 0+0+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1+2a \\ 1-a & a^2 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de AB y averiguamos cuando se anula.

$$|AB| = \begin{vmatrix} -1 & 1+2a \\ 1-a & a^2 \end{vmatrix} = -a^2 - (1-a)(1+2a) = -a^2 - (1+2a-a-2a^2) = a^2 - a - 1$$

$$|AB| = 0 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = a \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} = a \end{cases}$$

Distinguimos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

Si $a \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $a \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ el determinante de AB no es nulo y la matriz tiene inversa.

Si $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ o $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ el determinante de AB es nulo y no existe la inversa.

La matriz AB tiene inversa para $a \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $a \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Para $a = 1$ existe la inversa. La calculamos.

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1+2 \\ 1-1 & 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |AB| = -1 \neq 0$$

$$(AB)^{-1} = \frac{\text{Adj}((AB)^t)}{|AB|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para $a = 1$ la matriz inversa de AB tiene la expresión $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E3.- (Geometría)

Dado el plano $\pi \equiv 2x + y = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a π , que contenga a r .

(1 punto)

b) ¿Existe algún plano paralelo a π que contenga a r ? En caso afirmativo calcularlo. **(1 punto)**

a) Si el plano π' que buscamos es perpendicular a π el vector normal del plano π es un vector director del plano π' . Como contiene a la recta r el otro vector director es el vector director de la recta. Y un punto del plano π' es cualquier punto de la recta r .

$$\pi \equiv 2x + y = 3 \Rightarrow \vec{n} = (2, 1, 0) \quad r \equiv \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + 0\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -2, 0) \\ P_r(0, 1, 1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (2, 1, 0) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -2, 0) \\ P_r(0, 1, 1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(z-1) - (z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': z-1=0}$$

El plano π' perpendicular a π , que contiene a r tiene ecuación $\pi': z-1=0$.

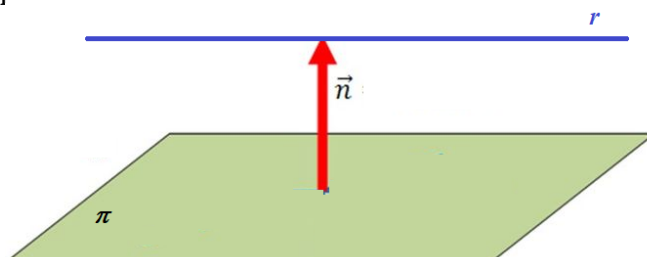
b) Estudiamos la posición relativa del plano y la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (2, 1, 0) \\ \vec{v}_r = (1, -2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (2, 1, 0) \cdot (1, -2, 0) = 2 - 2 = 0$$

Como el producto escalar es nulo el vector normal del plano es perpendicular al vector director de la recta. Plano y recta son paralelos o la recta está contenida en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P_r(0, 1, 1) \in \pi? \\ \pi \equiv 2x + y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 0 + 1 = 3? \Rightarrow \text{¡Falso!}$$

La recta es paralela al plano.



Existe un plano paralelo a π que contiene a r . Hallamos su ecuación.

El plano α que buscamos es paralelo a $\pi \equiv 2x + y = 3$ y tiene ecuación $\alpha \equiv 2x + y = D$.

Determinamos D usando el hecho de que el plano contiene el punto $P_r(0,1,1)$ de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv 2x + y = D \\ P_r(0,1,1) \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 + 1 = D \Rightarrow D = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha \equiv 2x + y = 1}$$

El plano α paralelo a π que contiene a r tiene ecuación $\alpha \equiv 2x + y = 1$.

E4.- (Geometría)a) Encontrar el valor de $a \in \mathbb{R}$, para que las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{cases} \quad y \quad s \equiv x+1=\frac{y-3}{a}=\frac{z}{2} \quad \text{sean paralelas.} \quad (1 \text{ punto})$$

b) Si $a = 9$, calcular la ecuación del plano que las contiene. (1 punto)

a) Hallamos un vector director y un punto de cada una de las rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-5z=-3 \\ z=1+2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-5(1+2x)=-3 \\ z=1+2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-5-10x=-3 \\ z=1+2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-9x=2 \\ z=1+2x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2+9\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r=(1,9,2) \\ P_r(0,2,1) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{a}=\frac{z-0}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s=(1,a,2) \\ Q_s(-1,3,0) \end{cases}$$

Para que sean rectas paralelas los vectores directores deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r=(1,9,2) \\ \vec{u}_s=(1,a,2) \\ \vec{v}_r \parallel \vec{u}_s \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{9}{a}=\frac{2}{2} \Rightarrow \frac{9}{a}=1 \Rightarrow \boxed{a=9}$$

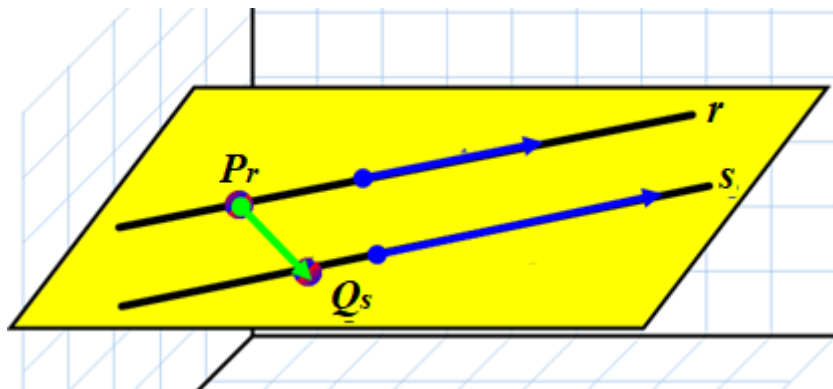
Comprobamos que no son coincidentes para $a = 9$.Comprobamos que el punto $P_r(0,2,1)$ de la recta r no pertenece a la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P_r(0,2,1) \in s? \\ s \equiv \frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{9}=\frac{z-0}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \frac{0+1}{1}=\frac{2-3}{9}=\frac{1-0}{2}? \Rightarrow \text{¿} 1 \neq \frac{-1}{9} \neq \frac{1}{2}? \quad \text{¡No se cumple!}$$

Para $a = 9$ las rectas son paralelas.

$$b) \text{ Para } a = 9 \text{ las rectas quedan } r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r=(1,9,2) \\ P_r(0,2,1) \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} \vec{u}_s=(1,9,2) \\ Q_s(-1,3,0) \end{cases}.$$

Hallamos el plano que contiene el punto $P_r(0,2,1)$ de la recta r y que tiene como uno de sus vectores directores el vector $\vec{v}_r=(1,9,2)$ que es el vector director de la recta r . El otro vector director del plano es el vector $\overrightarrow{P_rQ_s}$



$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (1, 9, 2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{P_r Q_s} = (-1, 3, 0) - (0, 2, 1) = (-1, 1, -1) \\ P_r(0, 2, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 1 & 9 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9x - 2(y-2) + z-1 + 9(z-1) + y-2 - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9x - 2y + 4 + z - 1 + 9z - 9 + y - 2 - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -11x - y + 10z - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 11x + y - 10z + 8 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi \equiv 11x + y - 10z + 8 = 0$.

E5.- (Análisis)

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si } x < 0 \\ a \cdot \text{sen}(x) + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcular a y b para que f sea continua y derivable en 0.

(2 puntos)

Para que la función sea continua en 0 el valor de la función debe coincidir con el valor de los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= a \cdot \text{sen}(0) + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} a \cdot \text{sen}(x) + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^x = 0e^0 = 0 \\ f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = 0$$

Para $b = 0$ la función es continua en 0.

Para que la función sea derivable en 0 deben coincidir las derivadas laterales.

$$f'(x) = \begin{cases} e^x + xe^x & \text{si } x < 0 \\ a \cdot \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x + xe^x = e^0 + 0e^0 = 1 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} a \cdot \cos(x) = a \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1$$

La función es continua y derivable en 0 para $a = 1$ y $b = 0$.

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = e^{x^2}$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.

(2 puntos)

La función es exponencial. El dominio de definición de la función es $\mathbb{R}$.
Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = e^{x^2} \\ \text{eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow e^{x^2} = 0 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = e^{x^2} \\ \text{eje } OY \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow A(0,1)$$

La derivada de la función es $f'(x) = 2xe^{x^2}$. Buscamos sus puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2xe^{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 0$.

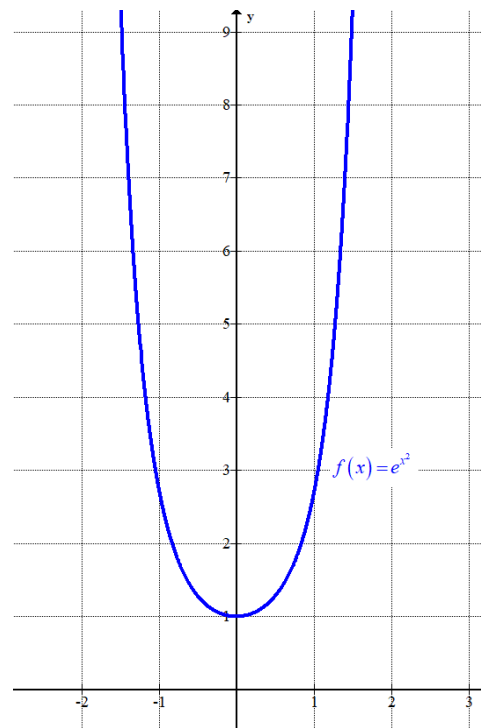
- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 2(-1)e^{(-1)^2} = -2e < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 2e^{1^2} = 2e > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$.

Obtenemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = e^{x^2}$
-2	e^4
-1	e
0	1 <i>Mínimo</i>
1	e
2	e^4



E7.- (Análisis)

Calcular:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{\sin^2(x)} \quad (1 \text{ punto})$$

$$\text{b) } \int_0^1 x e^x dx \quad (1 \text{ punto})$$

a) Calculamos el límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{\sin^2(x)} &= \frac{\cos(0^2) - 1}{\sin^2(0)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x \cdot \sin(x^2)}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \cdot \sin(x^2)}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{-0 \cdot \sin(0^2)}{\sin(0)\cos(0)} = \frac{0}{0} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x^2) - x \cdot (2x \cdot \cos(x^2))}{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)(-\sin(x))} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x^2) - 2x^2 \cdot \cos(x^2)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} &= \frac{-\sin(0^2) - 2 \cdot 0^2 \cdot \cos(0^2)}{\cos^2(0) - \sin^2(0)} = \frac{-0 + 0}{1 - 0} = \boxed{0} \end{aligned}$$

b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int x e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + K$$

Calculamos la integral definida.

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x - e^x]_0^1 = [1 \cdot e^1 - e^1] - [0 \cdot e^0 - e^0] = e - e + 1 = \boxed{1}$$

E8.- (Análisis)

Dadas las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$:

- a) Comprobar que sólo se cortan en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ **(0,5 puntos)**
 b) Hallar el área de la parte del plano limitada por las gráficas de dichas funciones. **(1,5 puntos)**

a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x \\ g(x) = x^3 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x = x^3 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Se cumple que las gráficas de las dos funciones sólo se cortan en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

- b) Como las gráficas de las dos funciones se cortan en tres puntos el área de la parte del plano limitada por las gráficas de dichas funciones se calcula como la suma del valor absoluto de dos integrales definidas: una entre -1 y 0 de la diferencia de las dos funciones y la otra entre 0 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

Área de la región 1.

$$\int_{-1}^0 f(x) - g(x) dx = \int_{-1}^0 x - x^3 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 = \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4} \right] - \left[\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^4}{4} \right] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

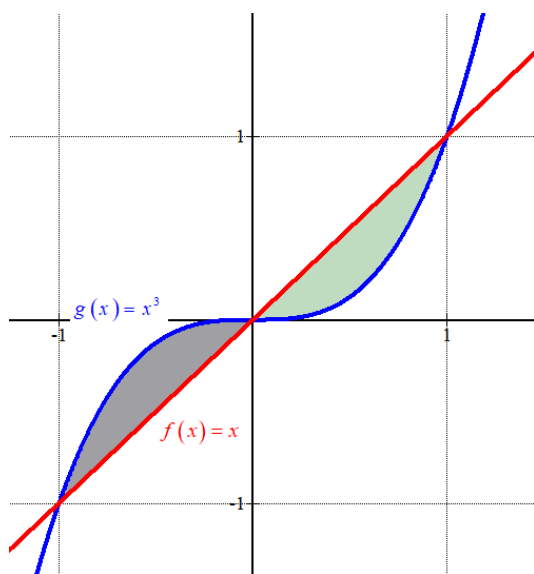
El área de la región 1 tiene un valor de 0.25 unidades cuadradas.

Área de la región 2.

$$\int_0^1 f(x) - g(x) dx = \int_0^1 x - x^3 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} \right] - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

El área de la región 2 tiene un valor de 0.25 unidades cuadradas.

El área de la parte del plano limitada por las gráficas de dichas funciones es la suma de ambas áreas: $0.25 + 0.25 = 0.5$ unidades cuadradas.



E9- (Probabilidad y estadística)

- a) Un mensaje es transmitido con errores con una probabilidad de 0,2. Emitimos de forma independiente 3 mensajes. Calcular la probabilidad de que al menos 2 de los 3 mensajes hayan sido transmitidos con errores.

(1 punto)

- b) Se consideran los sucesos A y B , con $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ y $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Calcular $P(A \cap B)$ y $P(A/B)$.**(1****punto)**

- a) Llamamos A_1 al suceso “Mensaje 1 con error”, A_2 a “Mensaje 2 con error” y A_3 a “Mensaje 3 con error”. Sabemos que los sucesos son independientes entre si y que $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0.2$.

Llamamos B al suceso “al menos 2 de los 3 mensajes han sido transmitidos con errores”.

Para que al menos 2 de los 3 mensajes hayan sido transmitidos con errores deben de mandarse los 3 mensajes con errores o el primero bien y los siguientes con error o el segundo bien y los otros con error o el tercero bien y los dos primeros con error.

$$P(B) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) =$$

$$= 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = \boxed{0.104}$$

La probabilidad de que al menos 2 de los 3 mensajes hayan sido transmitidos con errores es de 0.104.

- b) Calculamos $P(A \cap B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = \frac{1}{3} \\ P(B) = \frac{1}{5} \\ P(A \cup B) = \frac{1}{2} \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{30}}$$

Hemos obtenido que $P(A \cap B) = \frac{1}{30}$.

Utilizamos el teorema de Bayes para obtener $P(A/B)$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{5}} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

Hemos obtenido que $P(A/B) = \frac{1}{6}$.

E10.- (Probabilidad y estadística)

Las notas que han obtenido 1000 opositores siguen una distribución normal de media 4 y desviación típica $\frac{100}{51}$.

a) ¿Cuántos opositores ha obtenido una calificación superior a 5? **(1 punto)**

b) Sabiendo que los opositores con nota superior a 2 y por debajo de 5 formarán la bolsa de empleo, determinar qué porcentaje de opositores ha quedado en esa situación. **(1 punto)**

Llamamos X = La nota de un opositor. $X = N(4, 100/51)$

a) Hallamos $P(X > 5)$.

$$P(X > 5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 4}{100/51} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{5 - 4}{100/51}\right) =$$

$$= P(Z > 0.51) = 1 - P(Z \leq 0.51) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6950 = \boxed{0.305}$$

	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324

La probabilidad de que un opositor tenga una nota superior a 5 es de 0.305. Multiplicamos este resultado por los 1000 opositores y obtenemos $1000 \cdot 0.305 = 305$.

De los 1000 opositores se espera que 305 obtengan una nota superior a 5.

b) Calculamos $P(2 < X < 5)$.

$$P(2 < X < 5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 4}{100/51} \end{array} \right\} = P\left(\frac{2 - 4}{100/51} < Z < \frac{5 - 4}{100/51}\right) =$$

$$= P(-1.02 < Z < 0.51) = P(Z \leq 0.51) - P(Z < -1.02) =$$

$$= P(Z \leq 0.51) - P(Z > 1.02) =$$

$$= P(Z \leq 0.51) - [1 - P(Z \leq 1.02)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.695 - 1 + 0.8461 = \boxed{0.5411}$$

	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8212
1,0	0,8413	0,8438	0,8461
1,1	0,8643	0,8665	0,8686

La probabilidad de que un opositor tenga una nota entre 2 y 5 es de 0.5411.

El porcentaje de opositores que formarán la bolsa de empleo es del 54.11 %.

EBAU Extraordinaria 2023

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	---	-----------------------	---------------------------------------

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Obtener todas las soluciones del sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$ **(1 punto)**

b) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para que $x = 5, y = -2, z = -2$ sea solución del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \\ ax + 2ay + bz = b \end{cases}$$

¿Para cuáles de esos valores la solución del sistema es única? **(1 punto)**

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

a) Calcular la matriz C , siendo $c_{11} = 2$, tal que $AC = B$. **(1 punto)**

b) Si $D = B^t A$ siendo B^t la traspuesta de B , determinar los valores de a para los que D tiene matriz inversa. **(1 punto)**

E3.- (Geometría)

Dadas las rectas $r_1 = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, y $r_2 \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.

a) Razonar si existe un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1 . **(1 punto)**

b) Calcular la recta con vector director perpendicular a los de las rectas r_1 y r_2 y que contiene al punto $(1,0,0)$. **(1 punto)**

E4.- (Geometría)

Sea r la recta que pasa por los puntos $(1, 0, -1)$ y $(0, 1, 1)$.

a) Determinar el plano que contiene a la recta r y al punto $P = (0, 0, 1)$.

(1 punto)

b) Calcular la distancia de la recta r al punto $P = (0, 0, 1)$.

(1 punto)

E5.- (Análisis)

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{si } x < 1 \\ \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad en $x = 1$.

(1 punto)

b) Estudiar sus asíntotas verticales y horizontales.

(1 punto)

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = x^2(x+3)$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. (2 puntos)

E7.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^3 + 4x^2}.$

(1 punto)

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos^3(x) dx$

(1 punto)

E8.- (Análisis)

Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^3$.

a) Comprobar que las gráficas de dichas funciones en $[-1, 0]$ sólo se cortan para $x = -1$ y $x = 0$.

Demostrar que en $[-1, 0]$ $g(x) \geq f(x)$

(1 punto)

b) Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de dichas funciones.

(1 punto)

E9.- (Probabilidad y estadística)

Sean A, B y C sucesos de un experimento aleatorio con probabilidades $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$ y $P(C) = 0,5$ tales que A y B son independientes y A y C son incompatibles. Calcular las probabilidades $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(A \cap \bar{C})$, $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ siendo $\bar{A}$, $\bar{B}$ y $\bar{C}$ los sucesos complementarios de A, B y C respectivamente.

(2 puntos)

E10.- (Probabilidad y estadística)

De las camionetas que recogen los envases reciclados de una localidad el 45% son de la marca C1, el 30% de la marca C2 y el 25% de la marca C3. La probabilidad de que una camioneta se averíe es: 0,02 si es de la marca C1, 0,05 si es de la marca C2 y 0,04 si es de la marca C3.

a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado

(0,6 puntos)

b) Si se selecciona una de esas camionetas al azar ¿qué probabilidad tiene de averiarse?

(0,7 puntos)

c) Suponiendo que una de esas camionetas se ha averiado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido una camioneta de la marca C3?

(0,7 puntos)

SOLUCIONES**E1.- (Álgebra)**

a) Obtener todas las soluciones del sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$ **(1 punto)**

b) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para que $x = 5, y = -2, z = -2$ sea solución del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \\ ax + 2ay + bz = b \end{cases}$$

¿Para cuáles de esos valores la solución del sistema es única? **(1 punto)**

a)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ x + 2y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow 1 - y - z + 2y - z = 3 \Rightarrow y - 2z = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 + 2z \Rightarrow x = 1 - (2 + 2z) - z = -1 - 3z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

b) Sustituimos los valores de $x = 5, y = -2, z = -2$ en el sistema.

$$\begin{cases} 5 - 2 - 2 = 1 \\ 5 + 2(-2) - (-2) = 3 \\ 5a - 4a - 2b = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 3 = 3 \\ a = 3b \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 3b}$$

Los valores buscados son $a = 3b, b \in \mathbb{R}$. El sistema queda $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \\ 3bx + 6by + bz = b \end{cases}$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3b & 6b & b \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3b & 6b & b \end{vmatrix} = 2b - 3b + \cancel{6b} - \cancel{6b} - b + 6b = 4b$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4b = 0 \Rightarrow b = 0$$

Si $b \neq 0$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de la matriz

ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3b & 6b & b & b \end{pmatrix}$ es igual que el número de incógnitas. El sistema tiene una

única solución.

Si $b = 0$ entonces el rango de A es menor de 3 y la solución del sistema, si la hay, no es única.

Para que $x = 5, y = -2, z = -2$ sea solución del sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \\ ax + 2ay + bz = b \end{cases}$ y además sea su única

solución debe ser $a = 3b, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$.

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

a) Calcular la matriz C , siendo $c_{11} = 2$, tal que $AC = B$.

(1 punto)

b) Si $D = B^t A$ siendo B^t la traspuesta de B , determinar los valores de a para los que D tiene matriz inversa.

(1 punto)

a) Para que sea posible el producto AC y el resultado tenga las mismas dimensiones que B la matriz C debe ser de dimensiones 2×2 .

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$c_{11} = 2$

$$AC = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2+c_{21} & c_{12}+c_{22} \\ ac_{21} & ac_{22} \\ 2+c_{21} & c_{12}+c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2+c_{21} = 3 \rightarrow \boxed{c_{21} = 1} \\ c_{12} + c_{22} = -1 \\ ac_{21} = a \rightarrow \{a \neq 0\} \rightarrow c_{21} = 1 \\ ac_{22} = 0 \rightarrow \{a \neq 0\} \rightarrow \boxed{c_{22} = 0} \end{cases} \Rightarrow c_{12} + 0 = -1 \Rightarrow \boxed{c_{12} = -1} \Rightarrow \boxed{C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Hallamos la expresión de la matriz D .

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 3 & a & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = B^t A = \begin{pmatrix} 3 & a & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3 & 3+a^2+3 \\ -1-1 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6+a^2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|D| = \begin{vmatrix} 6 & 6+a^2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -12 - (-2)(6+a^2) = -12 + 12 + 2a^2 = 2a^2$$

$$|D| = 0 \Rightarrow 2a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

La matriz D es invertible para cualquier valor de $a \neq 0$.

E3.- (Geometría)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=-1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$ y $r_2 \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}.$

a) Razonar si existe un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1 . (1 punto)

b) Calcular la recta con vector director perpendicular a los de las rectas r_1 y r_2 y que contiene al punto $(1,0,0)$. (1 punto)

a) Estudiamos la posición relativa de las rectas.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=-1+t \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} \vec{u}_1 = (1, 2, 1) \\ P_1(1, 0, -1) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} \vec{v}_2 = (3, 2, 2) \\ Q_2(1, 0, 0) \end{cases}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 2, 1) \\ \vec{v}_2 = (3, 2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{1}{2}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Estudiamos el valor nulo o no de $[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}]$.

$$\overrightarrow{P_1Q_2} = (1, 0, 0) - (1, 0, -1) = (0, 0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 2, 1) \\ \vec{v}_2 = (3, 2, 2) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = (0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - 0 - 6 - 0 = -4 \neq 0$$

Las rectas r_2 y r_1 se cruzan.

Para que pueda existir un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1 los vectores directores de las rectas deben ser perpendiculares.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 2, 1) \\ \vec{v}_2 = (3, 2, 2) \\ \vec{u}_1 \perp \vec{v}_2 \rightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1, 2, 1)(3, 2, 2) = 0 \Rightarrow 3 + 4 + 2 = 9 \neq 0$$

Los vectores directores de las rectas no son perpendiculares y no existe el plano pedido.

b) Si el vector director es perpendicular a los de las rectas r_1 y r_2 nos sirve como vector director de la recta que busco el producto vectorial de los vectores directores de r_1 y r_2 .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 2, 1) \\ \vec{v}_2 = (3, 2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} = \vec{u}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2i + j - 4k = (2, 1, -4)$$

La recta t pedida es la recta con vector director $\vec{v} = (2, 1, -4)$ y que pasa por el punto $(1, 0, 0)$.

$$t: \begin{cases} \vec{v} = (2, 1, -4) \\ (1, 0, 0) \in t \end{cases} \Rightarrow t: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -4\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

E4.- (Geometría)

Sea r la recta que pasa por los puntos $(1, 0, -1)$ y $(0, 1, 1)$.

a) Determinar el plano que contiene a la recta r y al punto $P = (0, 0, 1)$.

(1 punto)

b) Calcular la distancia de la recta r al punto $P = (0, 0, 1)$.

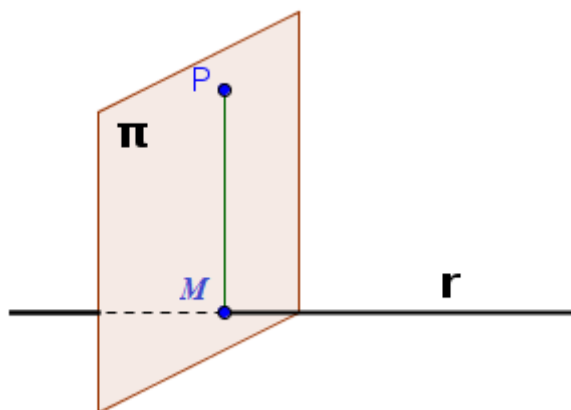
(1 punto)

a) El plano que contiene a la recta r y al punto $P = (0, 0, 1)$ es el plano que contiene a los tres puntos dados en el ejercicio.

$$\pi : \begin{cases} P(0, 0, 1) \in \pi \\ Q(1, 0, -1) \in \pi \\ R(0, 1, 1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (1, 0, -1) - (0, 0, 1) = (1, 0, -2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PR} = (0, 1, 1) - (0, 0, 1) = (0, 1, 0) \\ P(0, 0, 1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : z-1+2x=0 \Rightarrow \boxed{\pi : 2x+z-1=0}$$

b) Seguimos el esquema del dibujo para obtener la distancia de la recta r al punto P .



Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta que pasa por P .

$$r : \begin{cases} Q(1, 0, -1) \\ R(0, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = \overrightarrow{QR} = (0, 1, 1) - (1, 0, -1) = (-1, 1, 2) \\ R(0, 1, 1) \in r \end{cases}$$

$$\pi : \begin{cases} \vec{n} = \vec{u}_r = (-1, 1, 2) \\ P(0, 0, 1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi : -x + y + 2z + D = 0 \\ P(0, 0, 1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow \boxed{\pi : -x + y + 2z - 2 = 0}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\pi: -x + y + 2z - 2 = 0$$

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_r = (-1, 1, 2) \\ R(0, 1, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = -\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 + 2\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + 1 + \alpha + 2 + 4\alpha - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{6} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{6} \\ y = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \\ z = 1 + 2 \cdot \frac{-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{M\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right)}$$

La distancia del punto P a la recta es la distancia del punto P al punto M (proyección ortogonal del punto P en la recta r).

$$\left. \begin{array}{l} M\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right) \\ P(0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{MP} = (0, 0, 1) - \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{-1}{6}, \frac{-5}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

$$d(P, r) = d(P, M) = |\overrightarrow{MP}| = \sqrt{\left(\frac{-1}{6}\right)^2 + \left(\frac{-5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{30}}{6} \approx 0.913 \text{ unidades}}$$

E5.- (Análisis)

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{si } x < 1 \\ \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad en $x = 1$.**(1 punto)****b)** Estudiar sus asíntotas verticales y horizontales.**(1 punto)**

a) Comparamos el valor de la función con el de los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \ln(1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = \ln(1) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

La función no es continua en $x = 1$.Por lo tanto, tampoco es derivable en $x = 1$.b) El dominio de la función es $\mathbb{R}$.

En $(-\infty, 1)$ la función es $f(x) = \frac{1}{2-x}$. El denominador se anula para $x = 2$ que es mayor que 1 y por tanto no está incluido en el dominio.

En $[1, +\infty)$ la función es $f(x) = \ln(x)$ que existe pues $x > 0$.

Asíntota vertical. $x = a$.

Al ser el dominio todos los números reales no tiene asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \infty$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

 $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = x^2(x+3)$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. **(2 puntos)**

$f(x) = x^2(x+3) = x^3 + 3x^2$ es una función polinómica, por lo que el Dominio = $\mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + 3x^2 \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow A(0,0)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2(x+3) \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow A(0,0) \\ x+3 = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow B(-3,0) \end{cases}$$

La función tiene dos puntos de corte con los ejes: A(0, 0) y B(-3, 0).

Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos

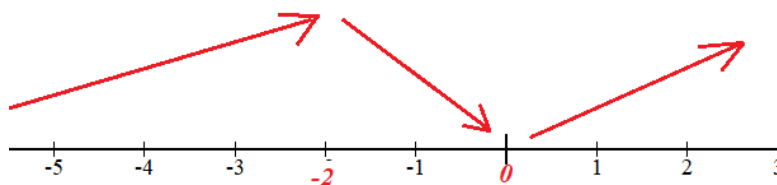
Para estudiar el crecimiento y decrecimiento usamos la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 6x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -2$ y $x = 0$.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = 3(-3)^2 + 6(-3) = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, -2)$.
- En el intervalo $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) = -3 < 0$. La función decrece en $(-2, 0)$.
- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 9 > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función sigue el esquema:



La función decrece en $(-2, 0)$ y crece en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

E7.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^3 + 4x^2}.$ (1 punto)

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x) \cos^3(x) dx$ (1 punto)

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^3 + 4x^2} = \frac{\operatorname{sen}(0)}{0^3 + 4 \cdot 0^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(x^2)}{3x^2 + 8x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cancel{x} \cos(x^2)}{\cancel{x} (3x + 8)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x^2)}{3x + 8} = \frac{2 \cos(0^2)}{3 \cdot 0 + 8} = \frac{2}{8} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \operatorname{sen}(x) \cos^3(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = \cos(x) \rightarrow dt = -\operatorname{sen}(x) dx \\ dx = \frac{dt}{-\operatorname{sen}(x)} \end{array} \right\} = \int \cancel{\operatorname{sen}(x)} t^3 \frac{dt}{-\cancel{\operatorname{sen}(x)}} =$$

$$= -\int t^3 dt = -\frac{t^4}{4} = -\frac{\cos^4(x)}{4} + K$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x) \cos^3(x) dx = \left[-\frac{\cos^4(x)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[-\frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4} \right] - \left[-\frac{\cos^4(0)}{4} \right] = \boxed{\frac{1}{4}}$$

E8.- (Análisis)

Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^3$.

a) Comprobar que las gráficas de dichas funciones en $[-1, 0]$ sólo se cortan para $x = -1$ y $x = 0$.

Demostrar que en $[-1, 0]$ $g(x) \geq f(x)$

(1 punto)

b) Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de dichas funciones.

(1 punto)

a) Averiguamos donde se cortan las gráficas de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 \\ g(x) = x^3 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 = x^3 \Rightarrow x^3 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

Las gráficas de las dos funciones sólo se cortan en $x = -1$ y $x = 0$.

Como son funciones continuas basta darle un valor del intervalo $[-1, 0]$ para saber que función es mayor en todo el intervalo. Tomamos $x = -0.5$ y comparamos el valor de las funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(-0.5) = -(-0.5)^2 = -0.25 \\ g(-0.5) = (-0.5)^3 = -0.125 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-0.5) = -0.25 < -0.125 = g(-0.5) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

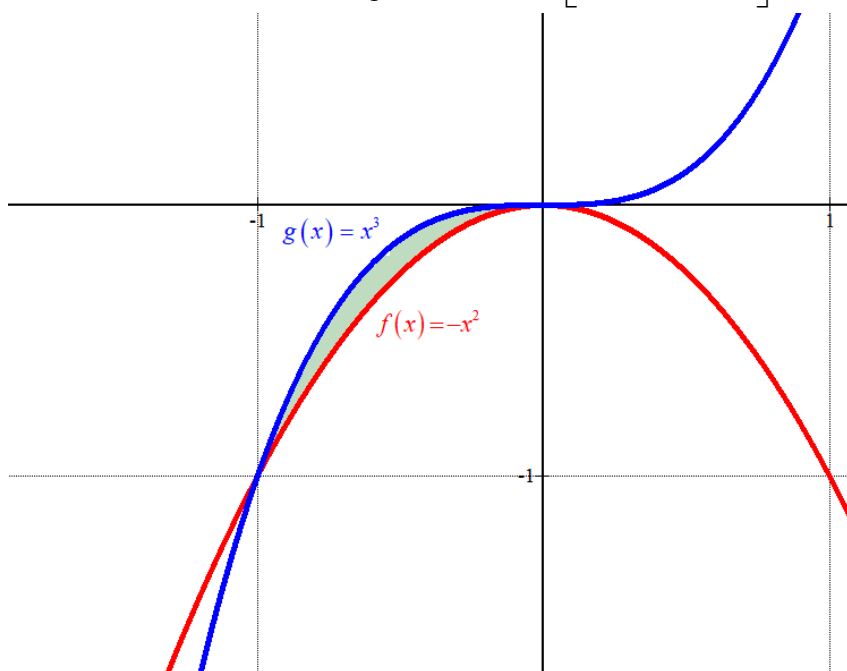
b) El área pedida se obtiene con la integral definida de la diferencia entre las dos funciones entre -1 y 0 .

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int g(x) - f(x) dx = \int x^3 - (-x^2) dx = \int x^3 + x^2 dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + K$$

Calculamos el valor del área.

$$\text{Área} = \int_{-1}^0 g(x) - f(x) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = \left[\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3} \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \approx 0.083 \text{ u}^2$$



E9- (Probabilidad y estadística)

Sean A , B y C sucesos de un experimento aleatorio con probabilidades $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$ y $P(C) = 0,5$ tales que A y B son independientes y A y C son incompatibles. Calcular las probabilidades $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(A \cap \bar{C})$, $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ siendo $\bar{A}$, $\bar{B}$ y $\bar{C}$ los sucesos complementarios de A , B y C respectivamente. **(2 puntos)**

A y B son independientes $\rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.3 \cdot 0.4 = \boxed{0.12}$$

A y C son incompatibles $\rightarrow \boxed{P(A \cap C) = 0}$

$$P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap \bar{C}) \Rightarrow 0.3 = 0 + P(A \cap \bar{C}) \Rightarrow \boxed{P(A \cap \bar{C}) = 0.3}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.12 = \boxed{0.58}$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \{Leyes de Morgan\} = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.12 = \boxed{0.88}$$

E10.- (Probabilidad y estadística)

De las camionetas que recogen los envases reciclados de una localidad el 45% son de la marca C1, el 30% de la marca C2 y el 25% de la marca C3. La probabilidad de que una camioneta se averíe es: 0,02 si es de la marca C1, 0,05 si es de la marca C2 y 0,04 si es de la marca C3.

- a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado **(0,6 puntos)**
 b) Si se selecciona una de esas camionetas al azar ¿qué probabilidad tiene de averiarse? **(0,7 puntos)**
 c) Suponiendo que una de esas camionetas se ha averiado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido una camioneta de la marca C3? **(0,7 puntos)**

a) $P(C1) = 0.45$; $P(C2) = 0.30$; $P(C3) = 0.25$

Si llamamos A al suceso “La camioneta se avería”.

$$P(A/C1) = 0.02; P(A/C2) = 0.05; P(A/C3) = 0.04$$

- b) Nos piden calcular $P(A)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap C1) + P(A \cap C2) + P(A \cap C3) = \\ &= P(C1)P(A/C1) + P(C2)P(A/C2) + P(C3)P(A/C3) = \\ &= 0.45 \cdot 0.02 + 0.30 \cdot 0.05 + 0.25 \cdot 0.04 = \boxed{0.034} \end{aligned}$$

- c) Nos piden calcular $P(C3/A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C3/A) = \frac{P(C3 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(C3)P(A/C3)}{P(A)} = \frac{0.25 \cdot 0.04}{0.034} = \boxed{\frac{5}{17} \approx 0.2941}$$

EBAU Ordinaria 2023

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	---	-----------------------	---------------------------------------

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

Calcular λ y μ para que el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + 2y + z = \mu \\ \lambda x + y = 1 \\ y + \lambda z = -1 \end{cases}$$
 tenga infinitas soluciones.

(2 puntos)

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ z & x+y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ para que AB sea igual a la inversa C^{-1} de la matriz C .

(2 puntos)

E3.- (Geometría)

Calcular la ecuación del plano π que es perpendicular al plano $\sigma \equiv x + 2y + 3z = 0$ y pasa por los puntos $P = (0,0,0)$ y $Q = (0,1,1)$.

(2 puntos)

E4.- (Geometría)

Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{1}$, se pide:

- a) Comprobar que r es paralela a π . **(1 punto)**
- b) Hallar el plano σ , distinto de π y paralelo a π , cuya distancia a r coincide con la de π . **(1 punto)**

E5.- (Análisis)

- a) Determinar a y b de modo que las funciones $f(x) = x^2 - a$ y $g(x) = (x - b)e^x$ tomen el mismo valor en un punto en el que ambas tengan un extremo relativo. **(1 punto)**

b) Demostrar que la función $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x$ solo se anula en el punto $x = 0$. **(1 punto)**

E6.- (Análisis)

a) Determinense el dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen, de la función $f(x) = x(\ln x - 1)$. **(1 punto)**

b) Calcúlese $\int x(\ln x - 1) dx$ **(1 punto)**

E7.- (Análisis)

Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3 + x - 1} - \sqrt{x^3 + 1}}{x - 2}$. **(2 puntos)**

E8.- (Análisis)

Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = xe^{-x}$ y el eje de abscisas cuando x varía en el intervalo $[-1, 0]$. **(2 puntos)**

E9.- (Probabilidad y estadística)

Un 50% de los participantes en un torneo abierto de ajedrez celebrado en Salamanca son españoles, un 30% son europeos no españoles y los demás proceden del resto del mundo. De ellos, dos tercios de los españoles, la mitad de los europeos no españoles y un tercio de los no europeos no pasan de los 40 años.

a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado **(0,6 puntos)**

b) Si se selecciona un participante al azar ¿Calcular la probabilidad de que no tenga más de 40 años? **(0,7 puntos)**

c) Si se elige al azar un participante del torneo y no tiene más de 40 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea español? **(0,7 puntos)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

Si lanzamos al mismo tiempo dos dados idénticos y del tipo usual (es decir, que sean cúbicos, que todas sus caras tengan la misma probabilidad de quedar hacia arriba y que en cada una de ellas aparezca un número de puntos que varíe desde el uno hasta el seis), ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones obtenidas en los dos dados coincida con la suma más frecuente?

(2 puntos)

SOLUCIONES**E1.- (Álgebra)**

Calcular λ y μ para que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + 2y + z = \mu \\ \lambda x + y = 1 \\ y + \lambda z = -1 \end{cases}$ tenga infinitas soluciones.

(2 puntos)

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

Para que tenga infinitas soluciones el rango de A y el de A/B debe ser iguales y menores de 3 (el número de incógnitas).

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + 0 + \lambda - 0 - 2\lambda^2 - 0 = -2\lambda^2 + 2\lambda$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow -2\lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ el determinante es no nulo y el rango de A es 3. El sistema tiene una única solución.

Si $\lambda = 0$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos el rango de A y de A/B en este caso.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 & 2 & 1}^{A/B} & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. El sistema no tiene solución.

Si $\lambda = 1$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos el rango de A y de A/B en este caso.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ -1 \quad -2 \quad -1 \quad -\mu \\ \hline 0 \quad -1 \quad -1 \quad 1-\mu \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & -1 & -1 & 1-\mu \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad 1-\mu \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\mu \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & -1 & -1 & 1-\mu \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2. El rango de A/B depende del valor de μ . Si queremos que el rango de A/B sea 2 debe ser $\mu = 0$.

Con $\lambda = 1$ y $\mu = 0$ el rango de A es 2 y el de A/B también siendo menor que el número de incógnitas. El sistema tiene infinitas soluciones.

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ z & x+y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ para que AB sea igual a la inversa C^{-1} de la matriz C . **(2 puntos)**

Comprobamos que C es invertible y determinamos su inversa.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$$C^{-1} = \frac{\text{Adj}(C^T)}{|C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hacemos que $AB = C^{-1}$.

$$AB = C^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ z & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+z & x+y \\ -x+y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+z=2 \\ x+y=1 \\ -x+y=1 \\ 1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-z \\ x+y=1 \\ -x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-z+y=1 \\ -2+z+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z+y=-1 \\ z+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1+z \\ z+y=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z-1+z=3 \Rightarrow 2z=4 \Rightarrow \boxed{z=2} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=-1+2=1} \\ \boxed{x=2-2=0} \end{cases}$$

Los valores buscados son $x = 0$; $y = 1$; $z = 2$.

E3.- (Geometría)

Calcular la ecuación del plano π que es perpendicular al plano $\sigma \equiv x + 2y + 3z = 0$ y pasa por los puntos $P = (0,0,0)$ y $Q = (0,1,1)$. **(2 puntos)**

Si el plano π es perpendicular al plano σ tendrá como uno de sus vectores directores el vector normal del plano σ . El otro vector director necesario para definir el plano es el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\sigma \equiv x + 2y + 3z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, 3)$$

$$\pi \equiv \begin{cases} \vec{u} = \vec{n} = (1, 2, 3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (0, 1, 1) - (0, 0, 0) = (0, 1, 1) \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ P(0, 0, 0) \in \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x + 0 + z - 0 - y - 3x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv -x - y + z = 0}$$

E4.- (Geometría)

Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{1}$, se pide:

- a) Comprobar que r es paralela a π . **(1 punto)**
 b) Hallar el plano σ , distinto de π y paralelo a π , cuya distancia a r coincide con la de π . **(1 punto)**

- a) Hallamos el vector director de la recta y el vector normal del plano y comprobamos si son ortogonales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + 2y - 2z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, -2) \\ r \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \vec{v}_r = (-2, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (-2, 2, 1) \cdot (1, 2, -2) = -2 + 4 - 2 = 0$$

Son ortogonales, por lo que la recta es paralela al plano o está contenida en él. Comprobamos si el punto $P(0, 4, 1)$ perteneciente a la recta r está en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + 2y - 2z = 0 \\ \text{¿} P(0, 4, 1) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 0 + 8 - 2 = 0? \text{ ¡No es cierto!}$$

El punto P de la recta no está en el plano, por lo que la recta es paralela al plano.

- b) Si el plano σ es paralelo a π tendrá ecuación $\sigma \equiv x + 2y - 2z + D = 0$.

Como la recta r es paralela a π también es paralela al plano σ , la distancia de la recta al plano será la distancia del punto $P(0, 4, 1)$ al plano. Determinamos el valor de D haciendo que esta distancia sea la misma que al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + 2y - 2z = 0 \\ P(0, 4, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|0 + 8 - 2|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{17}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma \equiv x + 2y - 2z + D = 0 \\ P(0, 4, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \sigma) = d(P, \sigma) = \frac{|0 + 8 - 2 + D|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{|6 + D|}{\sqrt{17}}$$

$$d(r, \pi) = d(r, \sigma) \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{17}} = \frac{|6 + D|}{\sqrt{17}} \Rightarrow 6 = |6 + D| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 = 6 + D \rightarrow D = 0 \rightarrow \pi \equiv x + 2y - 2z = 0 \\ -6 = 6 + D \rightarrow D = -12 \rightarrow \boxed{\sigma \equiv x + 2y - 2z - 12 = 0} \end{cases}$$

El plano buscado tiene ecuación $\sigma \equiv x + 2y - 2z - 12 = 0$.

E5.- (Análisis)

a) Determinar a y b de modo que las funciones $f(x) = x^2 - a$ y $g(x) = (x - b)e^x$ tomen el mismo valor en un punto en el que ambas tengan un extremo relativo. **(1 punto)**

b) Demostrar que la función $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x$ solo se anula en el punto $x = 0$. **(1 punto)**

a) Buscamos los extremos relativos en ambas funciones.

$$f(x) = x^2 - a \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{En } x = 0 \text{ hay un mínimo de } f(x)$$

$$g(x) = (x - b)e^x \Rightarrow g'(x) = e^x + (x - b)e^x = (x - b + 1)e^x$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow (x - b + 1)e^x = 0 \Rightarrow x - b + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = b - 1}$$

$$g''(x) = e^x + (x - b + 1)e^x = (x - b + 2)e^x \Rightarrow g''(b - 1) = (b - 1 - b + 2)e^{b-1} = e^{b-1} > 0$$

En $x = b - 1$ hay un mínimo de $g(x)$

Como deben coincidir en los extremos relativos.

$$\left. \begin{array}{l} b - 1 = 0 \\ g(b - 1) = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 1} \quad \left. \begin{array}{l} g(b - 1) = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) = f(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0 - 1)e^0 = 0^2 - a \Rightarrow -1 = -a \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Los valores buscados son $a = 1$; $b = 1$.

b) La función $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

También sabemos que $f(0) = 2 \cdot 0 + \operatorname{sen} 0 = 0$.

Si existiese algún $x = c$ tal que $f(c) = 0$ tendríamos que $f(0) = f(c) = 0$ y aplicando el teorema de Rolle en el intervalo $[0, c]$ o $[c, 0]$, según fuese c positivo o negativo existiría un valor d en el intervalo tal que $f'(d) = 0$, pero la derivada de la función es $f'(x) = 2 + \cos x$ y no se puede anular pues el coseno no puede alcanzar el valor -2 .

Por lo que podemos afirmar que no existe un valor $c \neq 0$ donde la función se anule.

E6.- (Análisis)

a) Determinénse el dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen, de la función $f(x) = x(\ln x - 1)$. **(1 punto)**

b) Calcúlese $\int x(\ln x - 1) dx$ **(1 punto)**

a) El logaritmo neperiano solo existe de un número positivo. $\rightarrow$ Dominio = $(0, +\infty)$.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento usamos la derivada.

$$f'(x) = (\ln x - 1) + x \frac{1}{x} = \ln x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 1$.

- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \ln 0.5 < 0$. La función decrece en $(0, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \ln 2 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función decrece en $(0, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 1$. No presenta máximos relativos.

b) Usamos el método de integración por partes.

$$\int x(\ln x - 1) dx = \int x \ln x - x dx = \int x \ln x dx - \int x dx = \dots$$

$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$$

$$\dots = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{2x^2}{4} = \boxed{\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + K}$$

E7.- (Análisis)

Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3 + x - 1} - \sqrt{x^3 + 1}}{x - 2}$.

(2 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3 + x - 1} - \sqrt{x^3 + 1}}{x - 2} = \frac{\sqrt{2^3 + 2 - 1} - \sqrt{2^3 + 1}}{2 - 2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (conjugado)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^3 + x - 1} - \sqrt{x^3 + 1})(\sqrt{x^3 + x - 1} + \sqrt{x^3 + 1})}{(x - 2)(\sqrt{x^3 + x - 1} + \sqrt{x^3 + 1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^3 + x - 1})^2 - (\sqrt{x^3 + 1})^2}{(x - 2)(\sqrt{x^3 + x - 1} + \sqrt{x^3 + 1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x - 1 - (x^3 + 1)}{(x - 2)(\sqrt{x^3 + x - 1} + \sqrt{x^3 + 1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x^3} + x - 1 - \cancel{x^3} - 1}{(x - 2)(\sqrt{x^3 + x - 1} + \sqrt{x^3 + 1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x} - 2}{(\cancel{x} - 2)(\sqrt{x^3 + x - 1} + \sqrt{x^3 + 1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x^3 + x - 1} + \sqrt{x^3 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2^3 + 2 - 1} + \sqrt{2^3 + 1}} = \frac{1}{3 + 3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

E8.- (Análisis)

Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = xe^{-x}$ y el eje de abscisas cuando x varía en el intervalo $[-1,0]$. **(2 puntos)**

Comprobamos si la función corta el eje de abscisas en el intervalo $[-1,0]$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = xe^{-x} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow xe^{-x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{-x} = 0 \end{cases} \text{ ¡Imposible!}$$

Como la gráfica de la función no corta el eje en ningún punto intermedio del intervalo $[-1,0]$ el área pedida se obtiene con la integral definida de la función entre -1 y 0 .

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int xe^{-x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = -e^{-x} \cdot x - \int -e^{-x} dx = \\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + K \end{aligned}$$

Calculamos la integral definida.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 xe^{-x} dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x} \right]_{-1}^0 = \\ &= \left[-0e^{-0} - e^{-0} \right] - \left[-(-1)e^{-(-1)} - e^{-(-1)} \right] = -1 - e + e = -1 \end{aligned}$$

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida y es de 1 unidad cuadrada.

E9- (Probabilidad y estadística)

Un 50% de los participantes en un torneo abierto de ajedrez celebrado en Salamanca son españoles, un 30% son europeos no españoles y los demás proceden del resto del mundo. De ellos, dos tercios de los españoles, la mitad de los europeos no españoles y un tercio de los no europeos no pasan de los 40 años.

- a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado **(0,6 puntos)**
 b) Si se selecciona un participante al azar ¿Calcular la probabilidad de que no tenga más de 40 años? **(0,7 puntos)**
 c) Si se elige al azar un participante del torneo y no tiene más de 40 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea español? **(0,7 puntos)**

Llamamos A al suceso “Ser español”, B al suceso “ser europeo no español”, C al suceso “ser del resto del mundo” y D al suceso “No pasar de 40 años”.

a)

$$P(A) = 0.50; P(B) = 0.30; P(C) = 1 - 0.50 - 0.30 = 0.20$$

$$P(D/A) = \frac{2}{3}; P(D/B) = \frac{1}{2}; P(D/C) = \frac{1}{3}$$

b) Usamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \\ &= 0.5 \cdot \frac{2}{3} + 0.30 \cdot \frac{1}{2} + 0.20 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{11}{20} = 0.55} \end{aligned}$$

c) Nos piden calcular $P(A/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{1 - P(D)} = \frac{0.5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)}{0.55} = \boxed{\frac{20}{33} \approx 0.61}$$

E10.- (Probabilidad y estadística)

Si lanzamos al mismo tiempo dos dados idénticos y del tipo usual (es decir, que sean cúbicos, que todas sus caras tengan la misma probabilidad de quedar hacia arriba y que en cada una de ellas aparezca un número de puntos que varíe desde el uno hasta el seis), ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones obtenidas en los dos dados coincida con la suma más frecuente?

(2 puntos)

Al lanzar dos dados podemos obtener 36 pares de valores distintos que podemos organizar en una tabla.

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Como cada uno de los sucesos elementales de la tabla son equiprobables tenemos que la probabilidad de cada uno de ellos es $1/36$.

He marcado de rojo los sucesos elementales que suman 7. Siendo esta suma la que puede suceder de más formas distintas entonces tendrá la probabilidad más alta ($6/36$).

$$P(\text{Sumar } 2) = \frac{1}{36}$$

$$P(\text{Sumar } 3) = \frac{2}{36}$$

$$P(\text{Sumar } 4) = \frac{3}{36}$$

$$P(\text{Sumar } 5) = \frac{4}{36}$$

$$P(\text{Sumar } 6) = \frac{5}{36}$$

$$P(\text{Sumar } 7) = \frac{6}{36}$$

$$P(\text{Sumar } 8) = \frac{5}{36}$$

$$P(\text{Sumar } 9) = \frac{4}{36}$$

$$P(\text{Sumar } 10) = \frac{3}{36}$$

$$P(\text{Sumar } 11) = \frac{2}{36}$$

$$P(\text{Sumar } 12) = \frac{1}{36}$$

La probabilidad más alta es la de sumar 7 siendo su probabilidad $P(\text{Sumar } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.16$

EBAU Extraordinaria 2022

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	---	-----------------------	---------------------------------------

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Discuta según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + mz = 4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad (1.2 \text{ puntos})$$

b) Resuélvalo para $m = 2$. (0.8 puntos)

E2.- (Álgebra)

a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, hállese la matriz X tal que $AX + B = C$ (1.2 puntos)

b) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, explíquese cuales de los productos MN , MP , NP pueden calcularse, y calcúlense cuando se pueda. (0.8 puntos)

E3.- (Geometría)

a) Calcule el plano que pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 2, 3)$. (1.5 puntos)

b) Calcule el plano paralelo a $3x + 2y + 2z + 1 = 0$ que pasa por el punto $(1, 2, 3)$. (0.5 puntos)

E4.- (Geometría)

a) Encuéntrense las ecuaciones de la recta que está contenida en el plano $\alpha \equiv x - y = 0$, es paralela al plano $\beta \equiv 2x - 3y + z = 4$ y pasa por el punto $P = (1, 1, 3)$. (1 punto)

b) Hállese la ecuación del plano que es paralelo a $r \equiv x - 1 = y + 2 = \frac{z - 1}{2}$ y pasa por los puntos

$$A = (0, 3, 1) \text{ y } B = (-2, 1, -1). \quad (1 \text{ punto})$$

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$, se pide:

- a) Encuentre su dominio y calcule sus asíntotas, si las tiene. (1 punto)
 b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si los tiene. (1 punto)

E6.- (Análisis)

- a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$ (1 punto)
 b) Estudiando previamente el signo de la función en el intervalo $[0,3]$, hállese el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 9x$ y el eje de abscisas, cuando x varía en el intervalo $[0,3]$. (1 punto)

E7.- (Análisis)

- a) Enuncie el teorema de Bolzano. (1 punto)
 b) Averigüe si la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x - 2$ se anula en algún punto del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (1 punto)

E8.- (Análisis)

- a) Estudie el signo de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ en el intervalo $[0,2]$. (0.5 puntos)
 b) Calcule el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$. (1.5 puntos)

E9.- (Probabilidad y estadística)

Entre los participantes de un torneo internacional de ajedrez:

- El 28% de ellos son rusos, de los cuales las tres cuartas partes son grandes maestros.
- El 24% son estadounidenses y entre ellos la mitad son grandes maestros.
- El 48% son del resto del mundo, de los cuales un tercio son grandes maestros.

Considerando los sucesos: $R =$ "ser ruso", $E =$ "ser estadounidense", $M =$ "no ser ruso ni estadounidense" y $GM =$ "ser gran maestro"

- a) Indique cuáles son los valores de $P(GM/R)$, $P(GM/E)$ y $P(GM/M)$. (0,3 puntos)
 b) Calcule la probabilidad de que al elegir al azar a uno de los participantes en el torneo, sea un gran maestro. (0,7 puntos)
 c) Si se elige al azar a uno de los grandes maestros del torneo, ¿cuál es la probabilidad de que sea ruso? (1 punto)

E10.- (Probabilidad y estadística)

La variable agudeza visual de una población se ajusta a una distribución normal de media 2 cpg (ciclos por segundo) y desviación típica 1 cpg. A los individuos con una agudeza visual inferior a 1.1 cpg se les considera con "problemas visuales graves".

- a) ¿Qué porcentaje de la población tiene "problemas visuales graves"? (1 punto)
 b) ¿Qué porcentaje de la población tiene una agudeza visual entre 2 y 2.9 cpg? (1 punto)

SOLUCIONES**E1.- (Álgebra)**

a) Discuta según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + mz = 4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad (1.2 \text{ puntos})$$

b) Resuélvalo para $m = 2$. (0.8 puntos)

a) Podemos obtener un sistema equivalente al dado, pero con una expresión más sencilla utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + mz = 4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x & -y & +2z & = 3 \\ -2x & -2y & -2mz & = -8 \\ \hline & -3y & +(2-2m)z & = -5 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x & -2y & +z & = 0 \\ -x & -y & -mz & = -4 \\ \hline & -3y & +(1-m)z & = -4 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + mz = 4 \\ -3y + (2-2m)z = -5 \\ -3y + (1-m)z = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 2^a \\ -3y & +(1-m)z & = -4 \\ 3y & +(-2+2m)z & = 5 \\ \hline & (-1+m)z & = 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + mz = 4 \\ -3y + (2-2m)z = -5 \\ (-1+m)z = 1 \end{cases}$$

El sistema equivalente obtenido tiene dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

Si $-1+m=0 \Rightarrow m=1$ el sistema queda

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y = -5 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

El sistema no tiene solución pues la última ecuación es imposible.

Si $m \neq 1$ en la última ecuación se puede despejar el valor de “z” y obtener el resto de valores de las incógnitas con facilidad. El sistema es compatible determinado (una única solución)

Resumiendo: Si $m \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución). Si $m = 1$ el sistema es incompatible (sin solución).

b) Si $m = 2$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado a).

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ -3y - 2z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2 = 4 \\ -3y - 2 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ -3y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

La solución es $x = 1, y = 1, z = 1$.

E2.- (Álgebra)

a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, hállese la matriz X tal que $AX + B = C$

(1.2 puntos)

b) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, explíquese cuales de los productos MN, MP, NP pueden calcularse, y calcúlense cuando se pueda. **(0.8 puntos)**

a) Despejamos en la ecuación la matriz X.

$$AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

Calculamos la inversa de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe la inversa de A.}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos los valores de las matrices y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X = A^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = X$$

b) Comprobamos si se pueden realizar los productos indicados.

$$MN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \text{¡No es posible!}$$

$2 \times \boxed{3 \cdot 2} \times 2$

$$MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \rightarrow 2 \times 2$

$$NP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{¡No es posible!}$$

$2 \times \boxed{2 \cdot 3} \times 2$

E3.- (Geometría)

- a)** Calcule el plano que pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 2, 3)$. **(1.5 puntos)**
- b)** Calcule el plano paralelo a $3x + 2y + 2z + 1 = 0$ que pasa por el punto $(1, 2, 3)$. **(0.5 puntos)**

a)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (1, 1, 1) \\ \vec{v} = (1, 2, 3) \\ P(1, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 3 + y + 2z - 2 - z + 1 - 3y - 2x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0}$$

- b)** El plano paralelo a $3x + 2y + 2z + 1 = 0$ tiene ecuación $\pi' \equiv 3x + 2y + 2z + D = 0$. Hallamos el valor de D para que el plano contenga al punto $(1, 2, 3)$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv 3x + 2y + 2z + D = 0 \\ (1, 2, 3) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + 4 + 6 + D = 0 \Rightarrow D = -13 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv 3x + 2y + 2z - 13 = 0}$$

E4.- (Geometría)

a) Encuéntrense las ecuaciones de la recta que está contenida en el plano $\alpha \equiv x - y = 0$, es paralela al plano $\beta \equiv 2x - 3y + z = 4$ y pasa por el punto $P = (1, 1, 3)$. **(1 punto)**

b) Hállese la ecuación del plano que es paralelo a $r \equiv x - 1 = y + 2 = \frac{z-1}{2}$ y pasa por los puntos $A = (0, 3, 1)$ y $B = (-2, 1, -1)$. **(1 punto)**

a) Si está contenida en el plano $\alpha \equiv x - y = 0$ entonces el vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano α .

Si es paralela al plano $\beta \equiv 2x - 3y + z = 4$ entonces el vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano β .

Al ser perpendicular a los dos vectores normales nos sirve como vector director de la recta el producto vectorial de los vectores normales de α y β .

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv x - y = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (1, -1, 0) \\ \beta \equiv 2x - 3y + z = 4 \rightarrow \vec{n}_2 = (2, -3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)$$

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = (-1, -1, -1) \\ P(1, 1, 3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

b) Si el plano es paralelo a la recta r tendrá como uno de sus vectores directores el vector director de la recta r . Además, como pasa por los puntos A y B el otro vector director del plano es $\overrightarrow{AB}$.

$$r \equiv x - 1 = y + 2 = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \vec{u} = (1, 1, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 1, -1) - (0, 3, 1) = (-2, -2, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (1, 1, 2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2) \\ A(0, 3, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x - 4y + 12 - 2z + 2 + 2z - 2 + 2y - 6 + 4x = 0 \Rightarrow 2x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - y + 3 = 0}$$

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$, se pide:

- a)** Encuentre su dominio y calcule sus asíntotas, si las tiene. **(1 punto)**
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si los tiene. **(1 punto)**

- a) El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{2-x} = \frac{2^2}{2-2} = \frac{2}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2-x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Grado del numerador} \\ \text{mayor que el grado del denominador} \end{array} \right\} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x-x^2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Grado del denominador} \\ \text{igual que el del numerador} \end{array} \right\} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2-x} + x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{2-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2-x} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Grado del denominador} \\ \text{igual que el del numerador} \end{array} \right\} = \frac{2}{-1} = -2$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = -x - 2$

- b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(2-x) - (-1)(x^2)}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0 \Rightarrow x(4-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores. Incluyo el valor excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

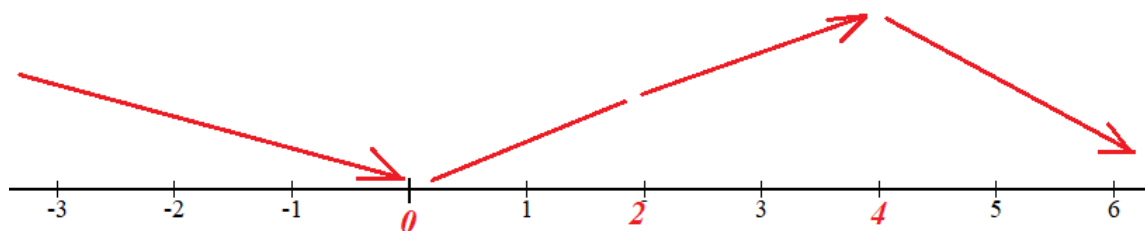
$$f'(-1) = \frac{4(-1) - (-1)^2}{(2 - (-1))^2} = \frac{-5}{9} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{4 - 1^2}{(2 - 1)^2} = 3 > 0$. La función crece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, 4)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{12 - 3^2}{(2 - 3)^2} = 3 > 0$. La función crece en $(2, 4)$.

- En el intervalo $(4, +\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5) = \frac{20 - 5^2}{(2 - 5)^2} = \frac{-5}{9} < 0$. La función decrece en $(4, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y crece en $(0, 2) \cup (2, 4)$

La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 4$.

Como $f(0) = \frac{0^2}{2-0} = 0$ y $f(4) = \frac{4^2}{2-4} = -8$ entonces las coordenadas del mínimo relativo son $(0, 0)$ y las del máximo relativo son $(4, -8)$

E6.- (Análisis)

- a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$ (1 punto)
- b) Estudiando previamente el signo de la función en el intervalo $[0,3]$, hállese el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 9x$ y el eje de abscisas, cuando x varía en el intervalo $[0,3]$. (1 punto)

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} = \frac{\ln(1+0)}{e^0 - 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{e^x} = \frac{1+0}{e^0} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

b) Veamos primero si la gráfica de la función corta el eje de abscisas entre 0 y 3.

$$f(x) = x^3 - 9x \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \end{cases}$$

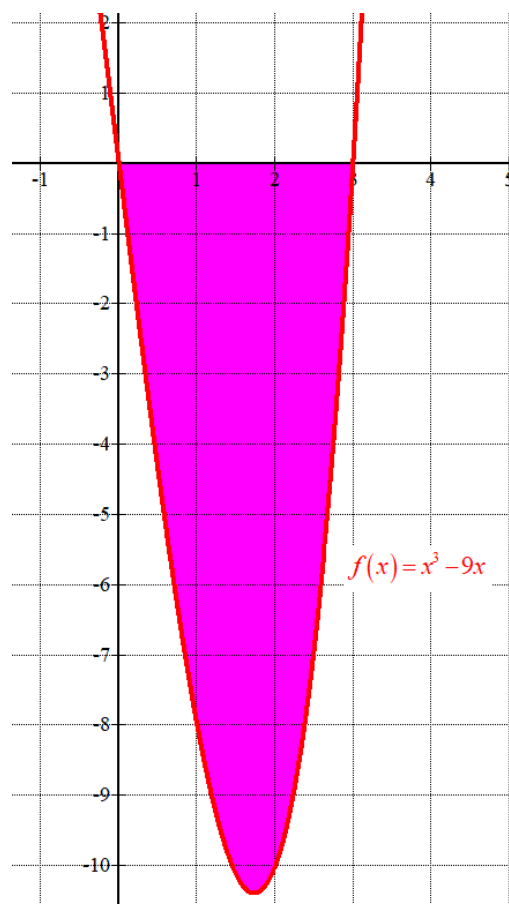
Esos valores de corte están situados en los extremos del intervalo $[0,3]$.Comprobamos si la función $f(x) = x^3 - 9x$ es positiva o negativa en el intervalo $[0,3]$.Tomamos $x=1 \in [0,3]$ y la función vale $f(1) = 1^3 - 9 = -8 < 0$.La función es negativa en el intervalo $(0, 3)$.

El área pedida es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y 3.

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 x^3 - 9x dx = \left[\frac{x^4}{4} - 9 \frac{x^2}{2} \right]_0^3 =$$

$$= \left[\frac{3^4}{4} - 9 \frac{3^2}{2} \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 9 \frac{0^2}{2} \right] = \frac{81}{4} - \frac{81}{2} = -\frac{81}{4}$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^3 f(x) dx \right| = \left| -\frac{81}{4} \right| = \boxed{\frac{81}{4} = 20.25 u^2}$$



E7.- (Análisis)**a)** Enuncie el teorema de Bolzano.**(1 punto)****b)** Averigüe si la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x - 2$ se anula en algún punto del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **(1 punto)****a)** Disponible en cualquier libro de texto.**b)** Aplicamos el teorema de Bolzano a la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x - 2$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

La función $f(x) = x + \operatorname{sen} x - 2$ es continua en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo, aplicando el teorema de Bolzano existe un valor $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$.

Comprobamos los signos de la función en $x = 0$ y en $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 + \operatorname{sen} 0 - 2 = -2 < 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{\pi}{2} + 1 - 2 = 0.57 > 0 \end{aligned} \right\}$$

Se puede aplicar el teorema de Bolzano y existe un valor $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$.

E8.- (Análisis)

a) Estudie el signo de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ en el intervalo $[0, 2]$. **(0.5 puntos)**

b) Calcule el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$. **(1.5 puntos)**

a) Averiguamos cuando la función se anula.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{4+2}{2} = 3 = x \\ \frac{4-2}{2} = 1 = x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

De los tres valores donde la función se anula el valor $x = 1 \in (0, 2)$

Por lo tanto tenemos que $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$. Estudiamos que ocurre antes y después de $x = 1$.

- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la función vale

$$f(0.5) = 0.5^3 - 4 \cdot 0.5^2 + 3 \cdot 0.5 = 0.625 > 0. \text{ La función es positiva en } (0, 1).$$

- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la función vale

$$f(1.5) = 1.5^3 - 4 \cdot 1.5^2 + 3 \cdot 1.5 = -1.125 < 0. \text{ La función es negativa en } (1, 2).$$

Resumiendo: La función se anula en $x = 0$, es positiva en $(0, 1)$, se anula en $x = 1$ y es negativa en $(1, 2]$.

b) Esta área se calcula sumando el valor absoluto de dos integrales definidas: una entre 0 y 1 y otra entre 1 y 2 de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^3 - 4x^2 + 3x dx = \left[\frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1^4}{4} - 4 \frac{1^3}{3} + 3 \frac{1^2}{2} \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 4 \frac{0^3}{3} + 3 \frac{0^2}{2} \right] = \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \boxed{\frac{5}{12} \approx 0.417 u^2} \end{aligned}$$

Para calcular el área de la región 2 hacemos primero la integral definida que saldrá con valor negativo. El área será el valor absoluto de dicha integral definida.

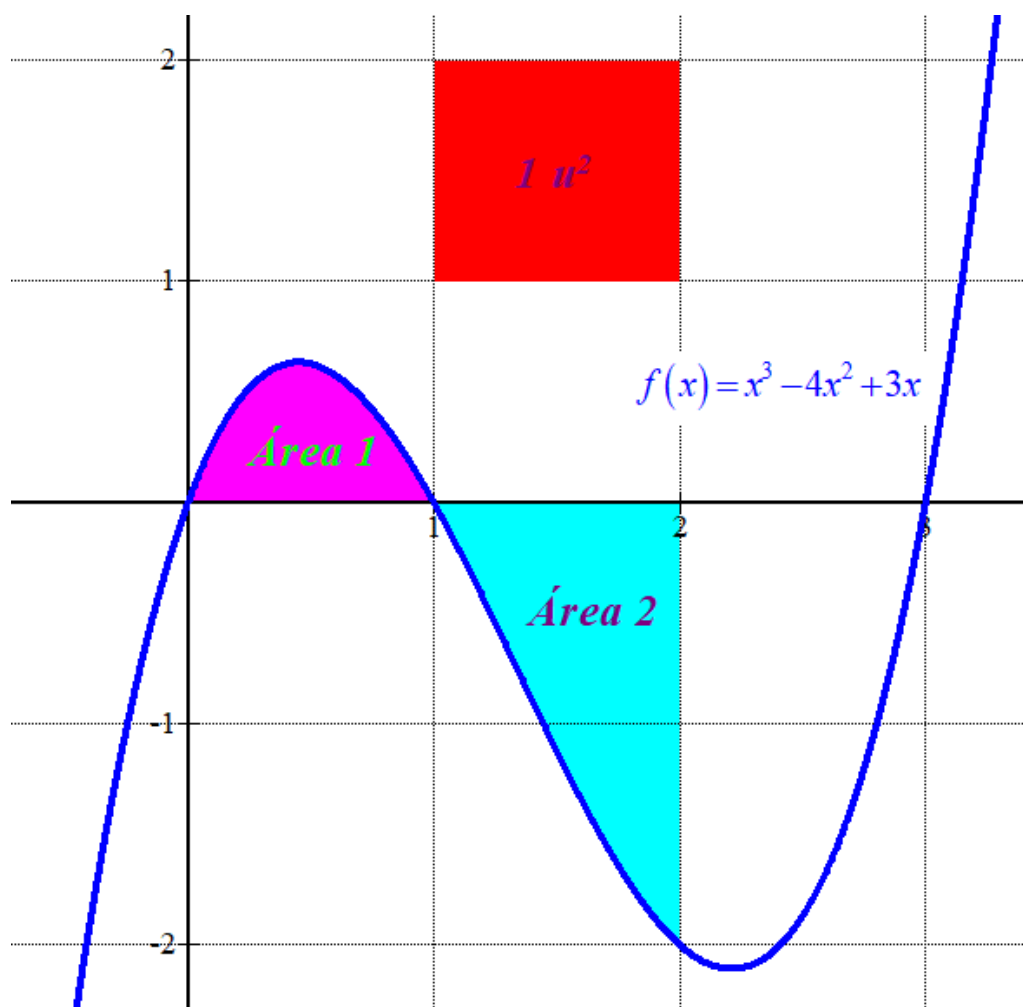
$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 x^3 - 4x^2 + 3x dx = \left[\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{2^4}{4} - 4\frac{2^3}{3} + 3\frac{2^2}{2} \right] - \left[\frac{1^4}{4} - 4\frac{1^3}{3} + 3\frac{1^2}{2} \right] = 4 - \frac{32}{3} + 6 - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{13}{12}$$

$$\text{Área 2} = \left| -\frac{13}{12} \right| = \boxed{\frac{13}{12} \simeq 1.083u^2}$$

El área limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$ es la suma del área 1 y el área 2.

$$\text{Área} = \text{Área 1} + \text{Área 2} = \frac{5}{12} + \frac{13}{12} = \frac{18}{12} = \boxed{1.5u^2}$$



E9- (Probabilidad y estadística)

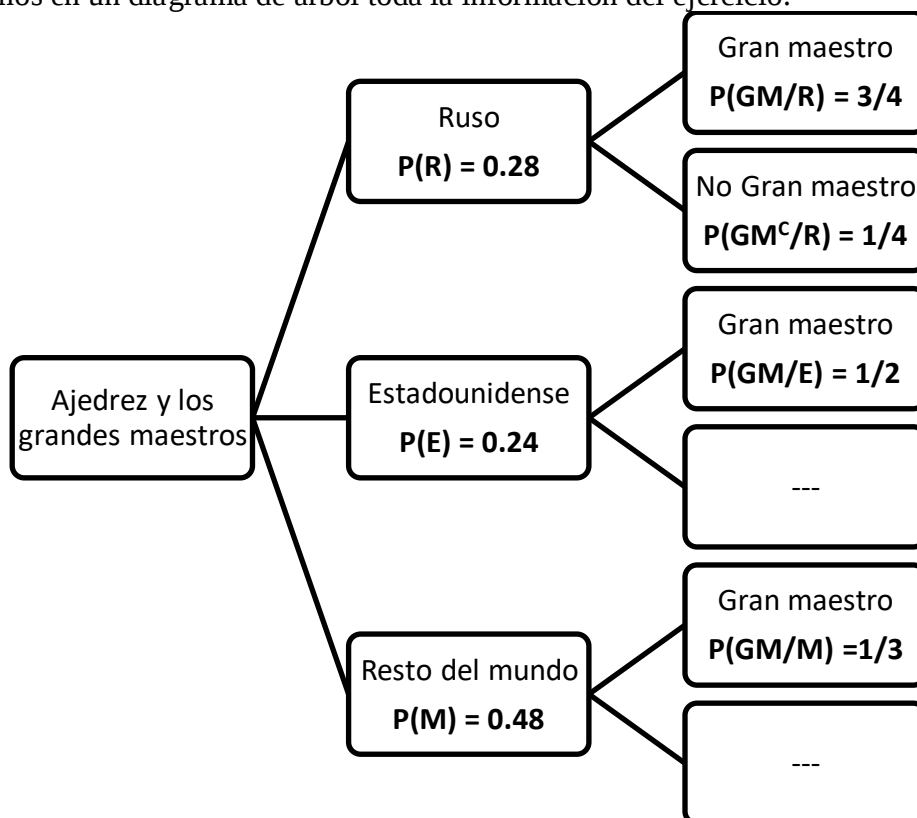
Entre los participantes de un torneo internacional de ajedrez:

- El 28% de ellos son rusos, de los cuales las tres cuartas partes son grandes maestros.
- El 24% son estadounidenses y entre ellos la mitad son grandes maestros.
- El 48% son del resto del mundo, de los cuales un tercio son grandes maestros.

Considerando los sucesos: R = "ser ruso", E = "ser estadounidense", M = "no ser ruso ni estadounidense" y GM = "ser gran maestro"

- a) Indique cuáles son los valores de $P(GM/R)$, $P(GM/E)$ y $P(GM/M)$. **(0,3 puntos)**
- b) Calcule la probabilidad de que al elegir al azar a uno de los participantes en el torneo, sea un gran maestro. **(0,7 puntos)**
- c) Si se elige al azar a uno de los grandes maestros del torneo, ¿cuál es la probabilidad de que sea ruso? **(1 punto)**

Representamos en un diagrama de árbol toda la información del ejercicio.



- a) Estos datos nos los proporciona el ejercicio.

$$P(GM / R) = \frac{3}{4} = 0.75 \quad P(GM / E) = \frac{1}{2} = 0.5 \quad P(GM / M) = \frac{1}{3} \approx 0.33$$

- b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(GM) &= P(R)P(GM / R) + P(E)P(GM / E) + P(M)P(GM / M) = \\ &= 0.28 \cdot \frac{3}{4} + 0.24 \cdot \frac{1}{2} + 0.48 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{0.49} \end{aligned}$$

- c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R / GM) = \frac{P(R \cap GM)}{P(GM)} = \frac{P(R)P(GM / R)}{P(GM)} = \frac{0.28 \cdot \frac{3}{4}}{0.49} = \boxed{\frac{3}{7} \approx 0.429}$$

E10.- (Probabilidad y estadística)

La variable agudeza visual de una población se ajusta a una distribución normal de media 2 cpg (ciclos por segundo) y desviación típica 1 cpg. A los individuos con una agudeza visual inferior a 1.1 cpg se les considera con “problemas visuales graves”.

a) ¿Qué porcentaje de la población tiene “problemas visuales graves”? (1 punto)

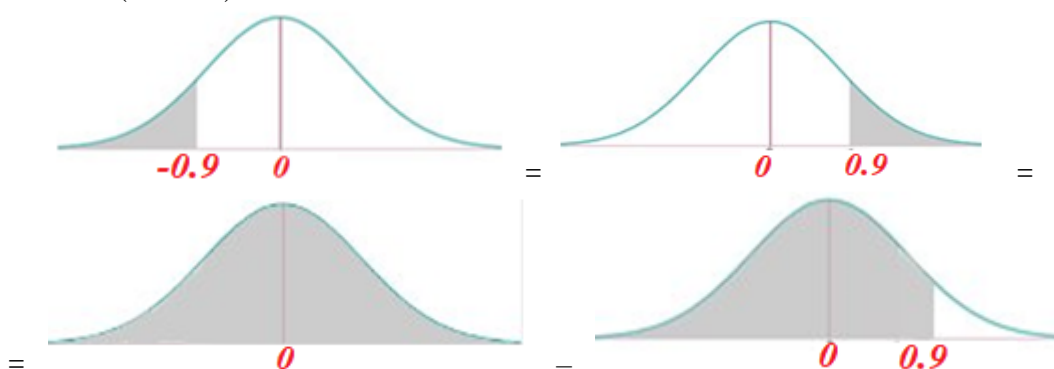
b) ¿Qué porcentaje de la población tiene una agudeza visual entre 2 y 2.9 cpg? (1 punto)

X = La agudeza visual de una población (en cpg). $X = N(2, 1)$.

a) Nos piden calcular $P(X < 1.1)$.

$$P(X < 1.1) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 2}{1} < \frac{1.1 - 2}{1}\right) = P(Z < -0.9) = P(Z > 0.9) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.9) = \dots$$



$$= \{\text{Buscamos en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 0.8159 = 0.1841 = \boxed{18.41\%}$$

	0.00	0.5
0.0	0.5400	0.5
0.1	0.5698	0.5
0.2	0.5793	0.5
0.3	0.6179	0.6
0.4	0.6554	0.6
0.5	0.6915	0.6
0.6	0.7257	0.7
0.7	0.7580	0.7
0.8	0.7881	0.7
0.9	0.8159	0.8
1.0	0.8413	0.8

b) Nos piden calcular $P(2 \leq X \leq 2.9)$.

$$P(2 < X < 2.9) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{2 - 2}{1} < \frac{X - 2}{1} < \frac{2.9 - 2}{1}\right) = P(0 < Z < 0.9) =$$

$$= P(Z < 0.9) - P(Z < 0) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = 0.8159 - 0.5 = 0.3159 = \boxed{31.59\%}$$

EBAU Ordinaria 2022

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	---	-----------------------	---------------------------------------

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

Dado el sistema:
$$\begin{cases} 2x + 2my - z = 0 \\ x + 2y + mz = 0 \\ x - my + mz = 0 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los distintos valores de m .

(1 punto)

b) Resuelva el sistema si $m = -2$.

(1 punto)

E2.- (Álgebra)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de a que hace que:

$$A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

E3.- (Geometría)

a) Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{4}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + mz = 0$, calcule m para que la recta y el plano sean perpendiculares.

(1 punto)

b) Calcule el plano perpendicular a los planos $\pi \equiv x + y + z = 1$ y $\pi_1 \equiv x - y + z = 2$, que pasa por el punto $(1,2,3)$.

(1 punto)

E4.- (Geometría)

Considere el punto $P = (2,2,1)$ y el plano $\pi \equiv 2x + 3y - 3z + 6 = 0$.

a) Halle la recta que pasa por P y es perpendicular a π .

(1 punto)

b) Calcule la distancia del punto $Q = (2,2,-2)$ al plano π .

(1 punto)

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = xe^x$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica. (2 puntos)

E6.- (Análisis)

Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$ (1 punto)

b) $\int_0^1 xe^x dx$ (1 punto)

E7.- (Análisis)

Dadas las curvas de ecuaciones $y = \sqrt{3x}$, $y = \frac{1}{3}x^2$.

a) Dibuje las curvas y señale el recinto plano comprendido entre ambas. (1 punto)

b) Calcule el área de dicho recinto. (1 punto)

E8.- (Análisis)

a) Halle el área del recinto del plano limitado por la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. (1 punto)

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x}$ (1 punto)

E9.- (Probabilidad y estadística)

Una corporación fabrica herramientas de 3 tipos de calidades. Un 10% de calidad Alta; un 70% de calidad Estándar y un 20% de calidad Baja. Se sabe que son defectuosas el 1%; el 10% y el 30% del total de las herramientas respectivamente.

a) Se elige una herramienta al azar. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que sea defectuosa. (1 punto)

b) Se elige una herramienta que resulta ser defectuosa. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que la elegida sea de calidad estándar. (1 punto)

E10.- (Probabilidad y estadística)

El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.

a) ¿Qué porcentaje de impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento? (1 punto)

b) Si compramos 500 impresoras ¿Cuántas de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso? (1 punto)

SOLUCIONES**E1.- (Álgebra)**

Dado el sistema:
$$\begin{cases} 2x + 2my - z = 0 \\ x + 2y + mz = 0 \\ x - my + mz = 0 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los distintos valores de m .

(1 punto)

b) Resuelva el sistema si $m = -2$.

(1 punto)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 2m & -1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & -m & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2m & -1 & 0 \\ 1 & 2 & m & 0 \\ 1 & -m & m & 0 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2m & -1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & -m & m \end{vmatrix} = 4m + 2m^2 + m + 2 - 2m^2 + 2m^2 = 2m^2 + 5m + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m^2 + 5m + 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)2}}{2(2)} = \frac{-5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2} = m \\ \frac{-5-3}{4} = -2 = m \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $m \neq -\frac{1}{2}$ y $m \neq -2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = -\frac{1}{2}$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -5 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 5 \cdot \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a & & & \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La matriz A y la matriz A/B tienen rango 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $m = -2$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} 2 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a & & & \\ 2 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & 0 \\ \hline 0 & -8 & 3 & 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 3^a & & & \\ 2 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & 0 \\ \hline 0 & -8 & 3 & 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a & & & \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La matriz A y la matriz A/B tienen rango 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $m = -2$ el sistema es compatible indeterminado (CASO 3).

Resolvemos el sistema utilizando el sistema equivalente obtenido en el apartado a).

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - 4y - z = 0 \\ -8y + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - 4y - z = 0 \\ y = \frac{3}{8}z \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 4 \cdot \frac{3}{8}z - z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - \frac{12}{8}z - z = 0 \Rightarrow 2x - \frac{3}{2}z - z = 0 \Rightarrow 2x - \frac{5}{2}z = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Solución: } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5}{4}t \\ y = \frac{3}{8}t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{array} \right.$$

E2.- (Álgebra)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de a que hace que:

$$A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Lo primero es que debe existir A^{-1} y para ello su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a$$

La primera condición es que $a \neq 0$.

Hallamos la matriz inversa de A.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}}{a} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el valor de A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 + a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos estos valores en la igualdad $A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & a^2 + a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & a^2 + a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{a} \\ a^2 + a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 1 \rightarrow \boxed{a = \sqrt[3]{1} = 1} \\ a^2 + a = 2 \end{cases} \Rightarrow 1^2 + 1 = 2 \text{ ¡Se cumple!}$$

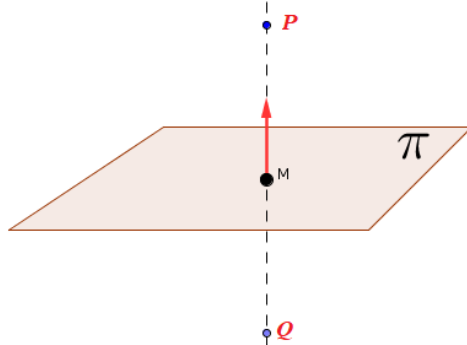
Para que se cumpla la igualdad debe ser $a = 1$.

E3.- (Geometría)

a) Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{4}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + mz = 0$, calcule m para que la recta y el plano sean perpendiculares. **(1 punto)**

b) Calcule el plano perpendicular a los planos $\pi \equiv x + y + z = 1$ y $\pi_1 \equiv x - y + z = 2$, que pasa por el punto $(1, 2, 3)$. **(1 punto)**

a) Para que recta y plano sean perpendiculares el vector director de la recta y el normal del plano deben tener coordenadas proporcionales (indicar la misma dirección).

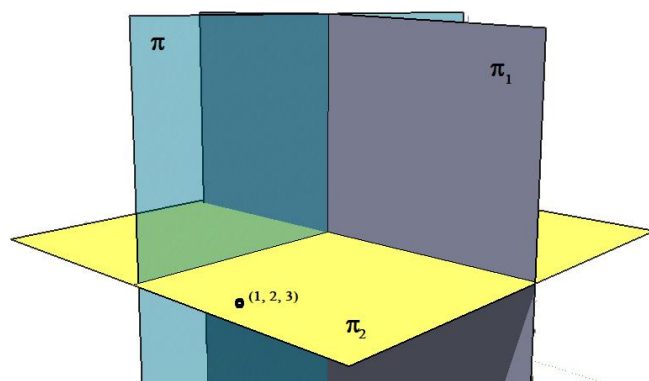


$$\left. \begin{aligned} r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{4} &\Rightarrow \vec{v}_r = (2, 1, 4) \\ \pi \equiv 2x + y + mz = 0 &\Rightarrow \vec{n} = (2, 1, m) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{4}{m} \Rightarrow 1 = \frac{4}{m} \Rightarrow \boxed{m=4}$$

b) Los planos son secantes pues los vectores normales no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{aligned} \pi \equiv x + y + z = 1 &\rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1) \\ \pi_1 \equiv x - y + z = 2 &\rightarrow \vec{n}_1 = (1, -1, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$$

Los planos son secantes y se cortan en una recta.



El plano π_2 perpendicular a π y π_1 debe tener como vectores directores los normales de cada plano.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} = \vec{n} &= (1, 1, 1) \\ \vec{v} = \vec{n}_1 &= (1, -1, 1) \\ (1, 2, 3) &\in \pi_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1+y-2-z+3-z+3-y+2+x-1=0 \Rightarrow 2x-2z+4=0 \Rightarrow \boxed{\pi_2 : x-z+2=0}$$

E4.- (Geometría)

Considere el punto $P = (2,2,1)$ y el plano $\pi \equiv 2x + 3y - 3z + 6 = 0$.

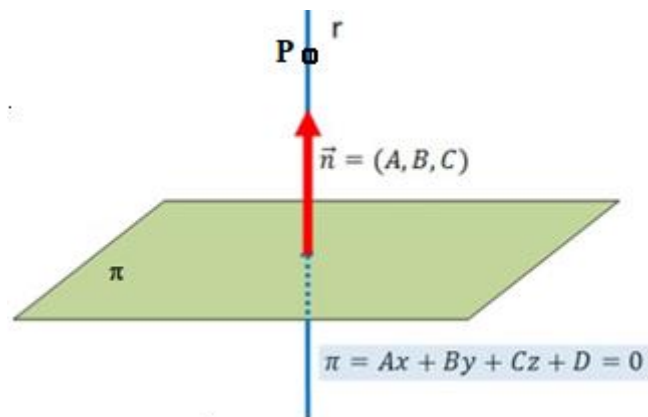
a) Halle la recta que pasa por P y es perpendicular a π .

(1 punto)

b) Calcule la distancia del punto $Q = (2,2,-2)$ al plano π .

(1 punto)

a) La recta perpendicular al plano tiene como vector director el vector normal del plano.



$$\pi \equiv 2x + 3y - 3z + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 3, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, 3, -3) \\ P(2, 2, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$$

b) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + 3y - 3z + 6 = 0 \\ Q(2, 2, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow d(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) + 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \frac{22}{\sqrt{22}} = \sqrt{22} \approx 4.69u$$

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = xe^x$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica. **(2 puntos)**

El dominio es todo $\mathbb{R}$, ya que no plantea ningún problema.

Asíntota vertical. $x = a$.

No tiene pues no hay ningún valor excluido del dominio.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty e^{+\infty} = +\infty \text{ No hay asíntota horizontal en } +\infty.$$

O bien

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = -\infty e^{-\infty} = -\infty \cdot 0 = \text{Indeterminación} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{e^{+\infty}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

Hay una asíntota horizontal en $-\infty$ con ecuación $y = 0$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = e^{+\infty} = +\infty$$

No hay asíntota oblicua.

Buscamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$f(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1+x)e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+x=0 \rightarrow x=-1 \\ 0 \\ e^x=0 \text{ ¡Imposible!} \end{cases}$$

Vemos el signo de la derivada antes y después de -1 .

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = (1-2)e^{-2} = -e^{-2} < 0$. La función decrece en el intervalo $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = (1+0)e^0 = e > 0$. La función crece en el intervalo $(-1, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, -1)$ y crece en $(-1, +\infty)$.

Tiene un mínimo relativo en $x = -1$.

Para el estudio de la concavidad utilizamos la segunda derivada.

$$f'(x) = e^x + xe^x \Rightarrow f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x = (2+x)e^x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (2+x)e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2+x=0 \rightarrow x=-2 \\ 0 \\ e^x=0 \text{ ¡Imposible!} \end{cases}$$

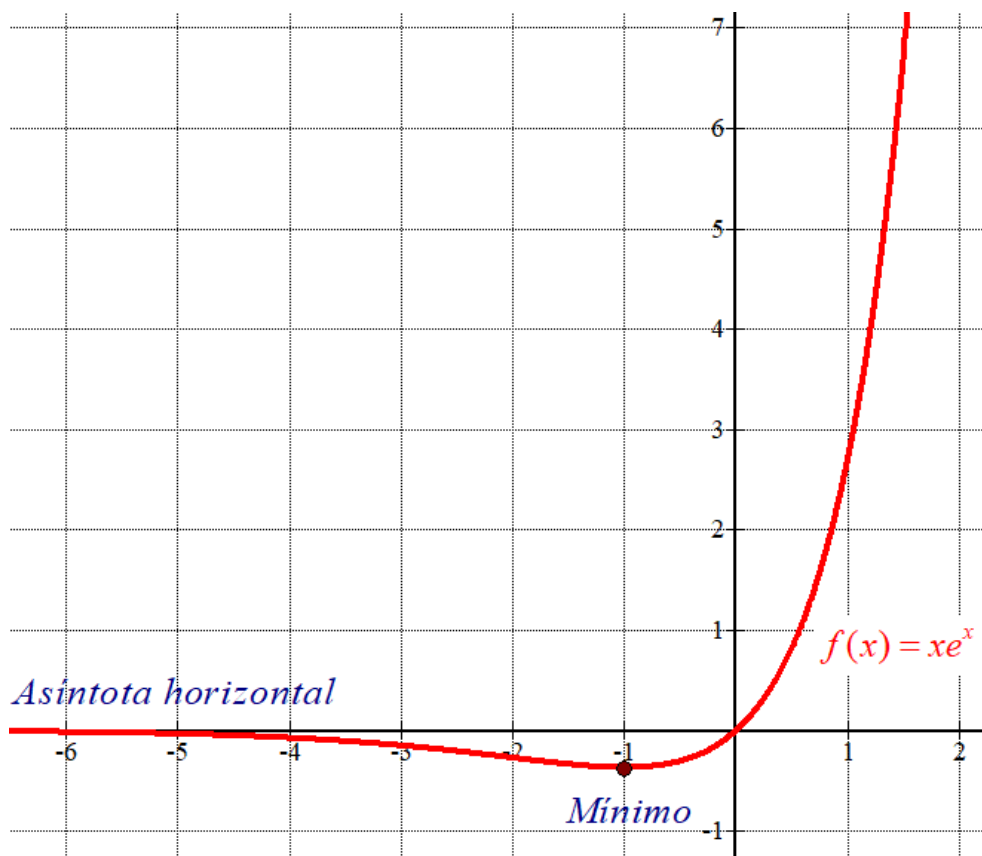
Vemos el signo de la derivada segunda antes y después de -2 .

- En $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f''(-3) = (2-3)e^{-3} = -e^{-3} < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en el intervalo $(-\infty, -2)$.
- En $(-2, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f''(0) = (2+0)e^0 = 2 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en el intervalo $(-2, +\infty)$.

La función presenta un punto de inflexión en $x = -2$.

Haciendo una tabla de valores y usando todo lo obtenido hasta ahora tenemos que la gráfica es:

x	$y = xe^x$
-2	$-2e^{-2} \approx -0.27$
-1	$-e^{-1} \approx -0.37$
0	0
1	$e \approx 2.71$
2	$2e^2 \approx 14.8$



E6.- (Análisis)

Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$

(1 punto)

b) $\int_0^1 x e^x dx$

(1 punto)**a)**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{e^0 - 0 - 1}{0^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int x e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + K$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x - e^x \right]_0^1 = \left[1 \cdot e^1 - e^1 \right] - \left[0 \cdot e^0 - e^0 \right] = 0 + 1 = \boxed{1}$$

E7.- (Análisis)

Dadas las curvas de ecuaciones $y = \sqrt{3x}$, $y = \frac{1}{3}x^2$.

a) Dibuje las curvas y señale el recinto plano comprendido entre ambas.

(1 punto)

b) Calcule el área de dicho recinto.

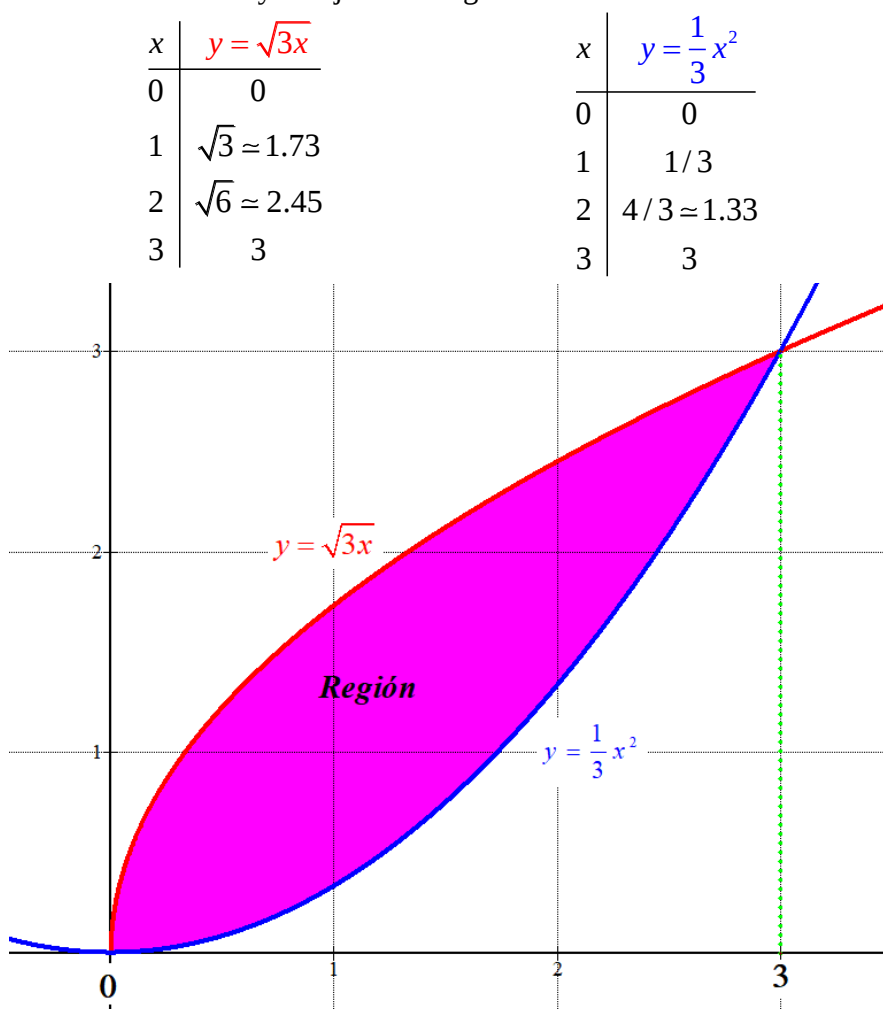
(1 punto)

a) Averiguamos los puntos de corte de las gráficas de las curvas.

$$\left. \begin{array}{l} y = \sqrt{3x} \\ y = \frac{1}{3}x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{3x} = \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow 3\sqrt{3x} = x^2 \Rightarrow (3\sqrt{3x})^2 = (x^2)^2 \Rightarrow 9 \cdot 3x = x^4 \Rightarrow x^4 - 27x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^3 - 27) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos sus gráficas.



b) Contando los cuadraditos rosas el área valdrá entre 3 y 4 unidades cuadradas. Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral.

$$\text{Área} = \int_0^3 \sqrt{3x} - \frac{1}{3}x^2 dx = \int_0^3 \sqrt{3} \cdot x^{1/2} - \frac{1}{3}x^2 dx = \left[\sqrt{3} \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \left[\sqrt{3} \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{9} \right]_0^3 =$$

$$= \left[\sqrt{3} \frac{3^{3/2}}{3/2} - \frac{3^3}{9} \right] - \left[\sqrt{3} \frac{0^{3/2}}{3/2} - \frac{0^3}{9} \right] = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{3} - 3 = \frac{2\sqrt{3^4}}{3} - 3 = \frac{2 \cdot 9}{3} - 3 = 6 - 3 = \boxed{3u^2}$$

E8.- (Análisis)

a) Halle el área del recinto del plano limitado por la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. (1 punto)

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{2 - 2 \cos x}$ (1 punto)

a) Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 4x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Observamos que uno de los puntos de corte $x = -2$ no pertenece al intervalo $[0, 2]$ y que los otros dos valores están en los extremos del intervalo por lo que el área del recinto pedido se obtiene como el valor absoluto de la integral definida entre $x = 0$ y $x = 2$ de la función $f(x) = x^3 - 4x$.

$$\text{Área} = \left| \int_0^2 x^3 - 4x dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 \right| = \left| \left[\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 \right] \right| = |4 - 8| = \boxed{4u^2}$$

b) Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{2 - 2 \cos x} = \frac{0 \cdot \operatorname{sen} 0}{2 - 2 \cos 0} = \frac{0}{0} = \text{In det er min acción}(L'Hôpital) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{-2(-\operatorname{sen} x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{2 \operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} 0 + 0 \cos 0}{2 \operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0} = \text{In det er min acción}(L'Hôpital) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x + x(-\operatorname{sen} x)}{2 \cos x} = \frac{\cos 0 + \cos 0 + 0(-\operatorname{sen} 0)}{2 \cos 0} = \frac{1 + 1 + 0}{2} = \boxed{1}$$

E9- (Probabilidad y estadística)

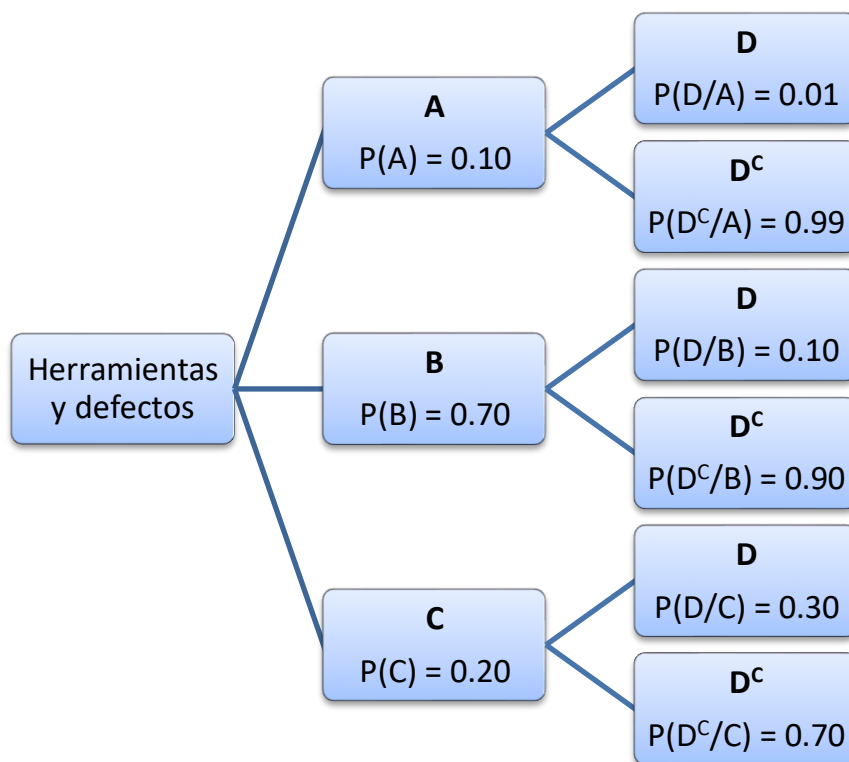
Una corporación fabrica herramientas de 3 tipos de calidades. Un 10% de calidad Alta; un 70% de calidad Estándar y un 20% de calidad Baja. Se sabe que son defectuosas el 1%; el 10% y el 30% del total de las herramientas respectivamente.

a) Se elige una herramienta al azar. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que sea defectuosa. **(1 punto)**

b) Se elige una herramienta que resulta ser defectuosa. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que la elegida sea de calidad estándar. **(1 punto)**

Llamamos A = “Herramienta de calidad Alta”, B = “Herramienta de calidad Estándar”, C = “Herramienta de calidad baja”, D = “Herramienta defectuosa”.

Realizamos un diagrama de árbol y en él colocamos las probabilidades de cada suceso.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= 0.10 \cdot 0.01 + 0.70 \cdot 0.10 + 0.20 \cdot 0.30 = \boxed{0.131}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{P(D)} = \frac{0.70 \cdot 0.10}{0.131} = \boxed{\frac{70}{131} \approx 0.534}$$

E10.- (Probabilidad y estadística)

El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.

a) ¿Qué porcentaje de impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento? **(1 punto)**

b) Si compramos 500 impresoras ¿Cuántas de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso? **(1 punto)**

X = El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras (en horas). $X = N(1500, 200)$.

a) Nos piden calcular $P(X < 1000)$.

$$\begin{aligned}
 P(X < 1000) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 1500}{200} < \frac{1000 - 1500}{200}\right) = \\
 &= P(Z < -2.5) = P(Z > 2.5) = 1 - P(Z \leq 2.5) = \dots
 \end{aligned}$$

$$= \{\text{Buscamos en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 0.9938 = 0.0062 = \boxed{0.62\%}$$

b) Calculamos la probabilidad de que se averíe una impresora entre las 1000 y 2000 horas.

$$\begin{aligned}
 P(1000 < X < 2000) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{1000 - 1500}{200} < \frac{X - 1500}{200} < \frac{2000 - 1500}{200}\right) = \\
 &= P(-2.5 < Z < 2.5) = P(Z < 2.5) - P(Z < -2.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la tabla} \\ \text{y utilizamos el resultado} \\ \text{del apartado a)} \end{array} \right\} = \\
 &= 0.9938 - 0.0062 = \boxed{0.9876}
 \end{aligned}$$

De 500 impresoras se averiarán entre las 1000 y 2000 horas $0.9876 \cdot 500 = \mathbf{493.8}$ impresoras.

EBAU Extraordinaria 2021

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	-----------------------	---------------------------------------

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuales son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - \lambda y = 1 \\ 2x + \lambda z = 1 \end{cases} \quad (1,2 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. (0,8 puntos)

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, hallar la matriz P que verifica que $M^{-1}PM = N$ (2 puntos)

E3.- (Geometría)

Dadas las rectas $r \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y s . (1 punto)

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y s . (1 punto)

E4.- (Geometría)

Dada la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$

a) Calcular el plano π_1 que pasa por $A = (1,2,3)$ y es perpendicular a la recta r . (0,5 puntos)

b) Calcular el plano π_2 que pasa por $B = (-1,1,-1)$ y contiene a la recta r . (1,5 puntos)

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = x^5 - 5x - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión. **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Calcular el valor de $m > 0$ para el cual se verifica que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(mx)}{x^2} = 2$ **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

a) Estudiar la continuidad de la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int x \ln(x^2) dx$. **(1 punto)**

E8.- (Análisis)

Se considera la función $f(x) = x - \cos(x)$.

a) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0, \pi/2]$. **(1 punto)**

b) Probar que la ecuación $f(x) = 0$ solo puede tener una solución en el intervalo $[0, \pi/2]$, de modo que la solución del apartado anterior es la única. **(1 punto)**

E9.- (Probabilidad y estadística)

Dentro de una caja hay bolas de varios colores que tienen todas el mismo tamaño y aspecto, siendo algunas de madera y las otras de metacrilato. Concretamente:

- El 48% son blancas y entre ellas dos tercios son de madera.
- El 24% son rojas, y de ellas las tres cuartas partes son de madera.
- El 28% son verdes, de las cuales la mitad son de madera.

Considerando los sucesos: B = "ser blanca", R = "ser roja", V = "ser verde" y M = "ser de madera"

a) Indicar cuales son los valores de $P(M/B)$, $P(M/R)$ y $P(M/V)$. **(0'3 puntos)**

b) Calcular la probabilidad de que al sacar al azar una de las bolas de la caja, sea de madera. **(0'7 puntos)**

c) Si solo sabemos que una de las bolas de la caja, elegida al azar, es de madera, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca? **(1 punto)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

Se sabe que el coeficiente intelectual de la población adulta española sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20.

a) ¿Qué porcentaje de españoles adultos se espera que tengan un coeficiente intelectual entre 95 y 105? **(1 punto)**

b) Si se considera que una persona es superdotada cuando su coeficiente intelectual es mayor que 160, calcular el porcentaje de españoles adultos que son superdotados. **(1 punto)**

SOLUCIONES**E1.- (Álgebra)**

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - \lambda y = 1 \\ 2x + \lambda z = 1 \end{cases} \quad (1,2 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. (0,8 puntos)

a) La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 2\lambda - \lambda = -\lambda^2 + \lambda$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Así como el de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $\lambda = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos como queda el sistema y lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 1 \\ 2x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 1 \\ x = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $\lambda = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos como queda el sistema y lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \\ 2x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = x - 1 \\ z = 1 - 2x \end{cases} \Rightarrow x + x - 1 + 1 - 2x = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Resuelto en el apartado anterior. Sus soluciones son $\begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, hallar la matriz P que verifica que $M^{-1}PM = N$

(2 puntos)

Hallamos la inversa de la matriz M.

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos de la expresión matricial la matriz P.

$$M^{-1}PM = N \Rightarrow MM^{-1}PMM^{-1} = MNM^{-1} \Rightarrow P = MNM^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

E3.- (Geometría)

Dadas las rectas $r \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y s .

(1 punto)

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y s .

(1 punto)

a) Obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2} \Rightarrow r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, -1, 2) \\ \vec{v}_r = (1, 1, 2) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 + x \\ z = 3 + 2x \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(0, 3, 3) \\ \vec{u}_s = (1, 1, 2) \end{cases}$$

¿Los vectores directores tienen coordenadas proporcionales?

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 1, 2) \\ \vec{u}_s = (1, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{2}{2}$$

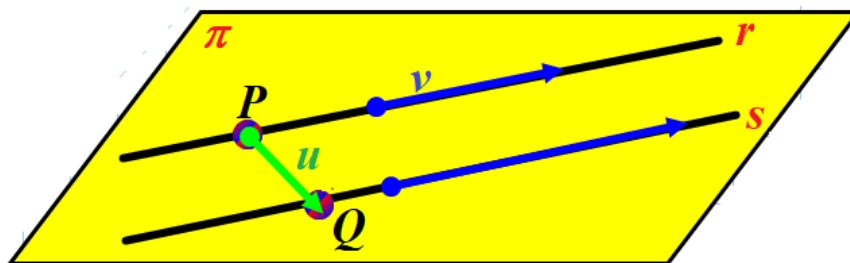
Las rectas son paralelas o coincidentes. Para decidir en qué caso estamos vemos si la recta

$r \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ pasa por el punto $Q_s(0, 3, 3)$

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2} \\ \text{¿} Q_s(0, 3, 3) \in r? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 0 = 3 + 1 = \frac{3-2}{2} \text{? } \text{¡¡No es cierto!!}$$

Las rectas r y s tienen la misma dirección, pero no pasan por los mismos puntos, luego son paralelas.

b) Para hallar la ecuación del plano π que contiene a ambas rectas tomamos como vectores directores del plano el vector director de r y el vector $\overrightarrow{P_r Q_s}$.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, 3, 3) - (0, -1, 2) = (0, 4, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, 1, 2) \\ P_r(0, -1, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

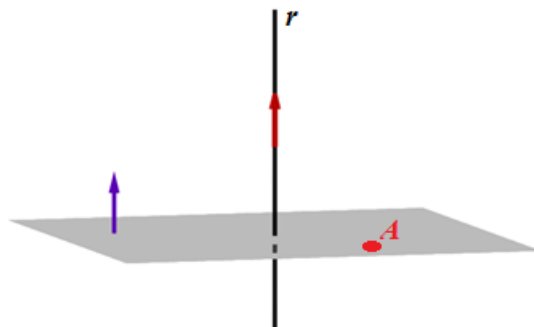
$$\Rightarrow 8x + y + 1 - 4z + 8 - x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 7x + y - 4z + 9 = 0}$$

E4.- (Geometría)

Dada la recta $r \equiv x-1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$

- a) Calcular el plano π_1 que pasa por $A = (1,2,3)$ y es perpendicular a la recta r . **(0,5 puntos)**
 b) Calcular el plano π_2 que pasa por $B = (-1,1,-1)$ y contiene a la recta r . **(1,5 puntos)**

- a) El plano π_1 perpendicular a la recta r tendrá como vector normal el director de la recta.

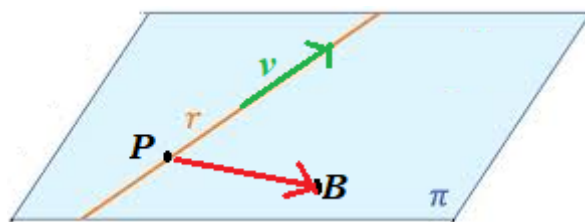


$$r \equiv x-1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, -1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ A(1, 2, 3) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x - y + 2z + D = 0 \\ A(1, 2, 3) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 2 + 6 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_1 \equiv x - y + 2z - 5 = 0}$$

- b) El plano π_2 que contiene a la recta r tendrá como uno de sus vectores directores el director de la recta. El otro vector director del plano puede ser el vector que une un punto cualquiera de la recta con el punto B.



$$r \equiv x-1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_r(1, 2, 1) \\ \vec{v}_r = (1, -1, 2) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{P_r B} = (-1, 1, -1) - (1, 2, 1) = (-2, -1, -2) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ B(-1, 1, -1) \in \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x - 2 - 2y + 2 + 2z + 2x + z + 1 + 4y - 4 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_2 \equiv -4x + 2y + 3z - 3 = 0}$$

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = x^5 - 5x - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión. **(2 puntos)**

Hallamos la derivada e igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

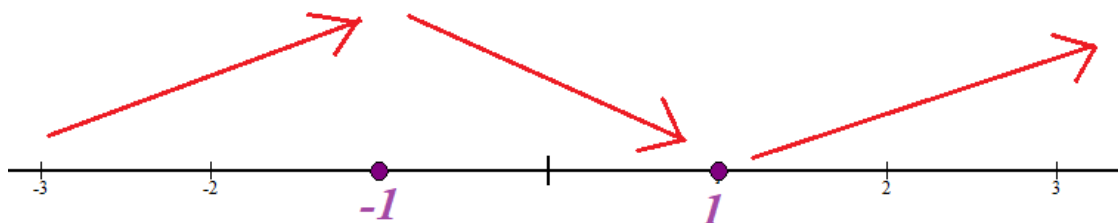
$$f(x) = x^5 - 5x - 1 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 5$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[4]{1} = \pm 1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -1$ y $x = 1$.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 80 - 5 = 75 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -5 < 0$. La función decrece en $(-1, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 80 - 5 = 75 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = -1$. Como $f(-1) = (-1)^5 - 5(-1) - 1 = 3$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-1, 3)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 1$. Como $f(1) = 1^5 - 5 - 1 = -5$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(1, -5)$.

Para el estudio de la concavidad y convexidad utilizamos la derivada segunda.

$$f'(x) = 5x^4 - 5 \Rightarrow f''(x) = 20x^3$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 20x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = 0$.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale $f''(-1) = 20(-1)^3 = -20 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale $f''(1) = 20 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $(0, +\infty)$.

La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 0)$ y convexa ($\cup$) en $(0, +\infty)$.

La función presenta un punto de inflexión en $x = 0$. Como $f(0) = -1$ las coordenadas del punto de inflexión son $(0, -1)$.

E6.- (Análisis)

Calcular el valor de $m > 0$ para el cual se verifica que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(mx)}{x^2} = 2$ **(2 puntos)**

Calculamos el valor del límite y lo igualamos a 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(mx)}{x^2} = \frac{1 - \cos(0)}{0^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + m \sin(mx)}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m \sin(mx)}{2x} = \frac{m \sin(0)}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 \cos(mx)}{2} =$$

$$= \frac{m^2 \cos(0)}{2} = \frac{m^2}{2}$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(mx)}{x^2} = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{2} = 2 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Como $m > 0$ el valor de m que verifica lo pedido es solo $m = 2$.

E7.- (Análisis)

a) Estudiar la continuidad de la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int x \ln(x^2) dx$. **(1 punto)**

a) En $x \neq 0$ la función es continua pues es cociente de funciones continuas y el denominador solo se anula para $x = 0$.

Solo falta comprobar la continuidad en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos 0^-}{0^-} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos 0^+}{0^+} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{1} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

La función es continua en $x = 0$ y por tanto es continua en $\mathbb{R}$

b) Usamos el método de integración por partes.

$$\int x \ln(x^2) dx = \int 2x \ln|x| dx = 2 \int x \ln|x| dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln|x| \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \left[\frac{x^2}{2} \ln|x| - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right] = 2 \left[\frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \int x dx \right] = 2 \left[\frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right] = \boxed{x^2 \ln|x| - \frac{x^2}{2} + K}$$

E8.- (Análisis)

Se considera la función $f(x) = x - \cos(x)$.

- a) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0, \pi/2]$. (1 punto)
- b) Probar que la ecuación $f(x) = 0$ solo puede tener una solución en el intervalo $[0, \pi/2]$, de modo que la solución del apartado anterior es la única. (1 punto)

a) La función es continua en todo $\mathbb{R}$ y por lo tanto es continua en $[0, \pi/2]$, como además se tiene que $f(0) = 0 - \cos(0) = -1 < 0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$ aplicando el teorema de Bolzano se puede asegurar que existe $c \in (0, \pi/2)$ tal que $f(c) = 0$.

b) Si existiera otro valor $d \in (0, \pi/2)$ tal que $f(d) = 0$ como la función es continua en $[0, \pi/2]$ y también es derivable en $(0, \pi/2)$ y además $f(c) = f(d) = 0$ aplicando el teorema de Rolle debe existir un valor e comprendido en el intervalo (c, d) o (d, c) tal que $f'(e) = 0$.

Pero la derivada de $f(x) = x - \cos(x)$ es $f'(x) = 1 + \sin(x)$ y esta expresión de la derivada es siempre positiva en el intervalo $[0, \pi/2]$, pues el seno es positivo entre 0° y 90° .

Obtenemos una contradicción y la suposición inicial no es cierta, es decir, no existe un segundo valor en el intervalo $(0, \pi/2)$ para el que se anule la función $f(x) = x - \cos(x)$.

E9- (Probabilidad y estadística)

Dentro de una caja hay bolas de varios colores que tienen todas el mismo tamaño y aspecto, siendo algunas de madera y las otras de metacrilato. Concretamente:

- El 48% son blancas y entre ellas dos tercios son de madera.
- El 24% son rojas, y de ellas las tres cuartas partes son de madera.
- El 28% son verdes, de las cuales la mitad son de madera.

Considerando los sucesos: B = "ser blanca", R = "ser roja", V = "ser verde" y M = "ser de madera"

a) Indicar cuales son los valores de $P(M/B)$, $P(M/R)$ y $P(M/V)$.

(0'3 puntos)

b) Calcular la probabilidad de que al sacar al azar una de las bolas de la caja, sea de madera.

(0'7 puntos)

c) Si solo sabemos que una de las bolas de la caja, elegida al azar, es de madera, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?

(1 punto)

Tenemos que $P(B) = 0.48$, $P(R) = 0.24$ y $P(V) = 0.28$.

a) $P(M/B) = 2/3 = 0.66$

$P(M/R) = 3/4 = 0.75$

$P(M/V) = 1/2 = 0.5$

b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(B)P(M/B) + P(R)P(M/R) + P(V)P(M/V) =$$

$$= 0.48 \cdot \frac{2}{3} + 0.24 \cdot \frac{3}{4} + 0.28 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{0.64}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(B/M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{P(B)P(M/B)}{P(M)} = \frac{0.48 \cdot \frac{2}{3}}{0.64} = \boxed{0.5}$$

E10.- (Probabilidad y estadística)

Se sabe que el coeficiente intelectual de la población adulta española sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20.

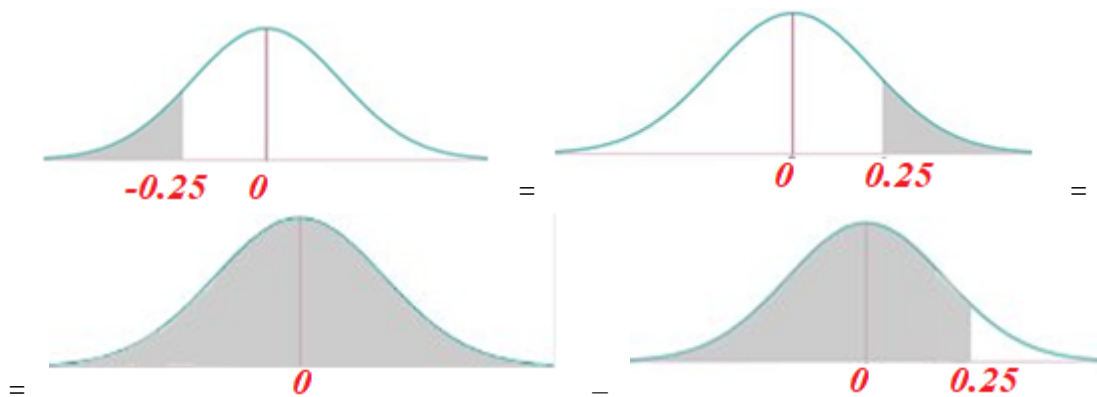
- a) ¿Qué porcentaje de españoles adultos se espera que tengan un coeficiente intelectual entre 95 y 105? **(1 punto)**
- b) Si se considera que una persona es superdotada cuando su coeficiente intelectual es mayor que 160, calcular el porcentaje de españoles adultos que son superdotados. **(1 punto)**

X = El coeficiente intelectual de un español adulto. $X = N(100, 20)$.

a)

$$P(95 < X < 105) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{95-100}{20} < Z < \frac{105-100}{20}\right) =$$

$$= P(-0.25 < Z < 0.25) = P(Z < 0.25) - P(Z < -0.25) = P(Z < 0.25) - P(Z > 0.25) = \dots$$



$$= P(Z < 0.25) - (1 - P(Z < 0.25)) = \{ \text{Buscamos en la tabla } N(0,1) \} = 0.5987 - (1 - 0.5987) =$$

$$= 0.1974 = \boxed{19.74 \%}$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.1
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5833	0.5873	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406

b) Calculamos el valor de $P(X > 160)$.

$$P(X > 160) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z > \frac{160-100}{20}\right) =$$

$$= P(Z > 3) = 1 - P(Z \leq 3) =$$

$$= \{ \text{Miramos en la tabla} \} = 1 - 0.9987 = 0.0013 = \boxed{0.13 \%}$$

EBAU Ordinaria 2021

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	-----------------------	---------------------------------------

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases} \quad (1,2 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $\lambda = -1$. (0,8 puntos)

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de n para los que la matriz A^2 tiene inversa. (1 punto)

b) Para $n = 2$, hallar la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. (1 punto)

E3.- (Geometría)

a) Hallar la recta perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ que pasa por el punto $A = (0,0,0)$. (0,8 puntos)

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos $P = (1,1,1)$ y $Q = (1,3, -1)$ son simétricos. (1,2 puntos)

E4.- (Geometría)

Dados la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$ y el punto $P = (0,0,0)$, hallar la ecuación del plano π que contiene a r y pasa por el punto P , (2 puntos)

E5.- (Análisis)

Representar la función $f(x) = e^{(x^2)}$, determinando antes sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus asíntotas. **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos(3x)}{\sin^2(x)}$ **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

- a) Dadas las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 8$, hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que $g(x) \geq f(x)$. **(0,5 puntos)**
- b) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

E8.- (Análisis)

Hallar los valores de a , b y c para los cuales el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ cumple las siguientes condiciones:

- $P(0) = 1$
- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en $x = 0$ es $m = 1$.
- $\int_0^2 P(x) dx = 12$. **(2 puntos)**

E9.- (Probabilidad y estadística)

En un club deportivo, el 55% de los socios son hombres y el 45 % mujeres. Entre los socios, el 60% de los hombres practica la natación, así como el 40% de las mujeres.

- a) Describir los sucesos y sus probabilidades, y calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar practique la natación. **(1,25 puntos)**
- b) Sabiendo que una persona practica la natación, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer? **(0,75 puntos)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

El tiempo empleado, en minutos, para obtener la respuesta de un test para detectar cierta enfermedad sigue una distribución normal de media 20 y de desviación típica 4.

- a) ¿En qué porcentaje de test se obtiene el resultado entre 16 y 26 minutos? **(1 punto)**
- b) ¿Cuántos minutos son necesarios para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96,41% de los test? **(1 punto)**

SOLUCIONES**E1.- (Álgebra)**

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases} \quad (1,2 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $\lambda = -1$. (0,8 puntos)

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + 1 + 2 - 1 + 2\lambda + 1 = 3\lambda + 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Analizamos dos casos distintos.

CASO 1. $\lambda \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (solución única)

CASO 2. $\lambda = -1$

En este caso la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Triangulamos la matriz A/B para establecer los rangos de A y A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - 2 \cdot \text{Fila 1}^a \\ -2 \quad 2 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -3 \quad 0 \\ \text{Nueva fila 2}^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 1}^a \\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 2 \quad -2 \quad 0 \\ \text{Nueva fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $\lambda = -1$ estamos en el caso 2 estudiado en el apartado anterior y podemos resolverlo a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A/B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ \boxed{y = z} \end{cases} \Rightarrow x - z + z = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

La solución es $x = 0$, $y = t$, $z = t$, siendo $t \in \mathbb{R}$.

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de n para los que la matriz A^2 tiene inversa. (1 punto)

b) Para $n = 2$, hallar la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. (1 punto)

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante no se anula.

$$A = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n-1)^2 & 0 \\ n-1-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n-1)^2 & 0 \\ n-2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A^2| = \begin{vmatrix} (n-1)^2 & 0 \\ n-2 & 1 \end{vmatrix} = (n-1)^2$$

$$|A^2| = 0 \Rightarrow (n-1)^2 = 0 \Rightarrow n-1 = 0 \Rightarrow n = 1$$

La matriz A^2 tiene inversa cuando $n \neq 1$.

b) Para $n = 2$ la matriz A tiene inversa pues su determinante no se anula.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación matricial planteada.

$$AX + A = 2I \Rightarrow AX = 2I - A \Rightarrow X = A^{-1}(2I - A) = 2A^{-1} - A^{-1}A = 2A^{-1} - I$$

$$X = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

E3.- (Geometría)

a) Hallar la recta perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ que pasa por el punto $A = (0, 0, 0)$.

(0,8 puntos)

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos $P = (1, 1, 1)$ y $Q = (1, 3, -1)$ son simétricos.

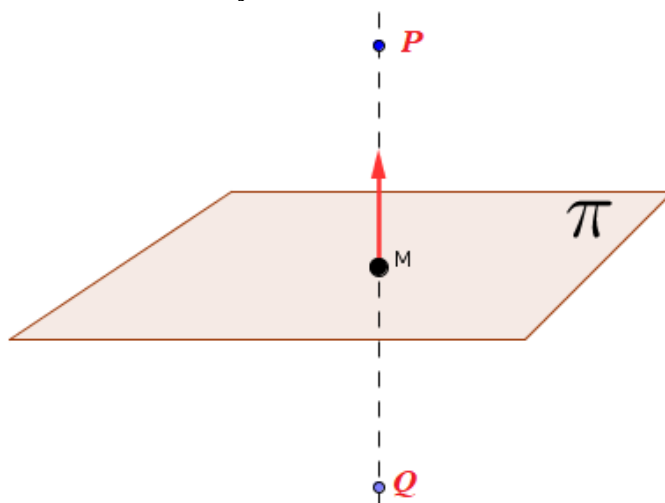
(1,2 puntos)

a) La recta perpendicular al plano tiene como vector director el normal del plano.

$$\pi \equiv x + y + z = 1 \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 1) \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda, \text{ siendo } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array} \right. \Rightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

$$A(0, 0, 0) \in r$$

b) La situación planteada es la del dibujo.



Hallamos las coordenadas del punto medio M del segmento $\overline{PQ}$ que pertenece al plano que buscamos.

Determinamos el vector $\overline{PQ}$ que será el vector normal del plano.

$$M = \frac{(1, 1, 1) + (1, 3, -1)}{2} = \frac{(2, 4, 0)}{2} = (1, 2, 0)$$

$$\overline{PQ} = (1, 3, -1) - (1, 1, 1) = (0, 2, -2)$$

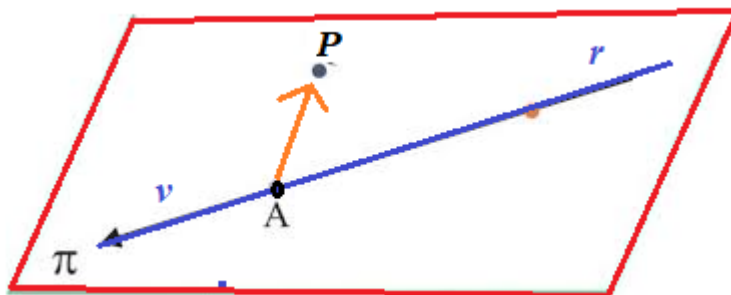
$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overline{PQ} = (0, 2, -2) \\ M(1, 2, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2y - 2z + D = 0 \\ M(1, 2, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 4 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 2y - 2z - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv y - z - 2 = 0}$$

E4.- (Geometría)

Dados la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$ y el punto $P = (0,0,0)$, hallar la ecuación del plano π que contiene a r y pasa por el punto P , **(2 puntos)**

El plano pedido tiene como vectores directores el director de la recta y el vector que une un punto cualquiera de la recta con el punto P .



Hallamos el vector director y un punto de la recta r .

$$r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-1, 1, -2) \\ A(-1, 2, 0) \in r \end{cases}$$

Hallamos las coordenadas del vector $\overrightarrow{AP}$.

$$\overrightarrow{AP} = (0, 0, 0) - (-1, 2, 0) = (1, -2, 0)$$

Hallamos la ecuación del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (-1, 1, -2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AP} = (1, -2, 0) \\ P(0, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - 2y + 2z - z - 0 - 4x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv -4x - 2y + z = 0}$$

E5.- (Análisis)

Representar la función $f(x) = e^{(x^2)}$, determinando antes sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus asíntotas. **(2 puntos)**

Estudiamos sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos relativos.

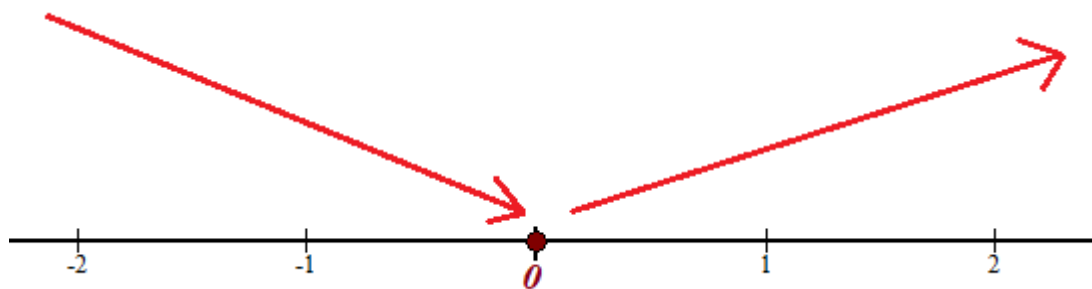
$$f(x) = e^{(x^2)} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{(x^2)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2xe^{(x^2)} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Vemos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = -2e^1 = -2e < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$
- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 2e^1 = 2e > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$. Como $f(0) = e^0 = 1$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(0, 1)$.

Estudiamos los intervalos de concavidad y convexidad.

$$f(x) = e^{(x^2)} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{(x^2)} \Rightarrow f''(x) = 2e^{(x^2)} + 2x(2x)e^{(x^2)} = e^{(x^2)}(2 + 4x^2)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (2 + 4x^2)e^{(x^2)} = 0 \Rightarrow 2 + 4x^2 = 0 \Rightarrow 1 + 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-\frac{1}{2}} = \text{¡No existe!}$$

No hay punto de inflexión y la curva de la gráfica siempre es cóncava o convexa.

Como $f''(x) = e^{(x^2)}(2 + 4x^2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale

$$f''(0) = e^0(2 + 0) = 2 > 0. \text{ La función es siempre convexa (U).}$$

Calculamos sus asíntotas

Asíntota vertical. $x = a$

No tiene, pues su dominio son todos los reales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x^2)} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(x^2)} = e^{+\infty} = +\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(x^2)}}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2xe^{(x^2)}}{1} = +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{(x^2)}}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2xe^{(x^2)}}{1} =$$

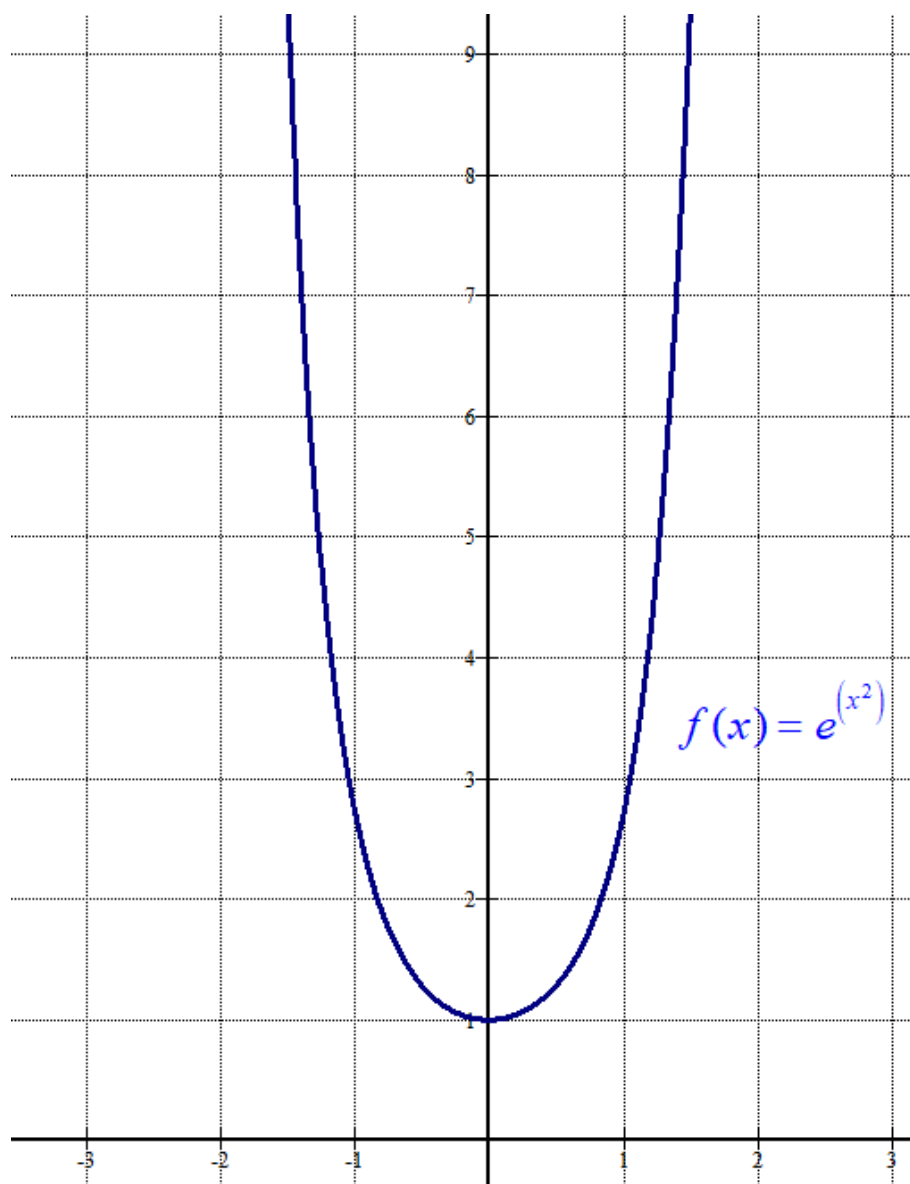
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{(x^2)} = 2(-\infty)e^{+\infty} = -\infty$$

No tiene asíntota oblicua.

La función no tiene ninguna asíntota.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y = e^{(x^2)}$
-2	$e^4 \approx 54.6$
-1	$e \approx 2.71$
0	1
1	$e \approx 2.71$
2	$e^4 \approx 54.6$



E6.- (Análisis)

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos(3x)}{\sin^2(x)}$

(2 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos(3x)}{\sin^2(x)} = \frac{e^0 - 0 - \cos(0)}{\sin^2(0)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - 3(-\sin(3x))}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 3\sin(3x)}{2\sin(x)\cos(x)} = \frac{e^0 - 1 + 3\sin(0)}{2\sin(0)\cos(0)} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 + 3 \cdot 3 \cos(3x)}{2\cos(x)\cos(x) + 2\sin(x)(-\sin(x))} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 9\cos(3x)}{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)} = \frac{e^0 + 9\cos(0)}{2\cos^2(0) - 2\sin^2(0)} = \frac{1+9}{2} = \boxed{5}$$

E7.- (Análisis)

- a) Dadas las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 8$, hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que $g(x) \geq f(x)$. **(0,5 puntos)**
- b) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

a) $g(x) \geq f(x) \Rightarrow -x^2 + 8 \geq x^2 \Rightarrow 8 \geq 2x^2 \Rightarrow 4 \geq x^2$

Vemos cuando se cumple la igualdad y luego establecemos en que intervalos se cumple la desigualdad pedida.

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

En $(-\infty, -2)$ tomo $x = -5$ y veo si se cumple la inecuación: $4 \geq (-5)^2$? **¡No se cumple!**

En $(-2, 2)$ tomo $x = 0$ y veo si se cumple la inecuación: $4 \geq (0)^2$? **¡Si se cumple!**

En $(2, +\infty)$ tomo $x = 5$ y veo si se cumple la inecuación: $4 \geq 5^2$? **¡No se cumple!**

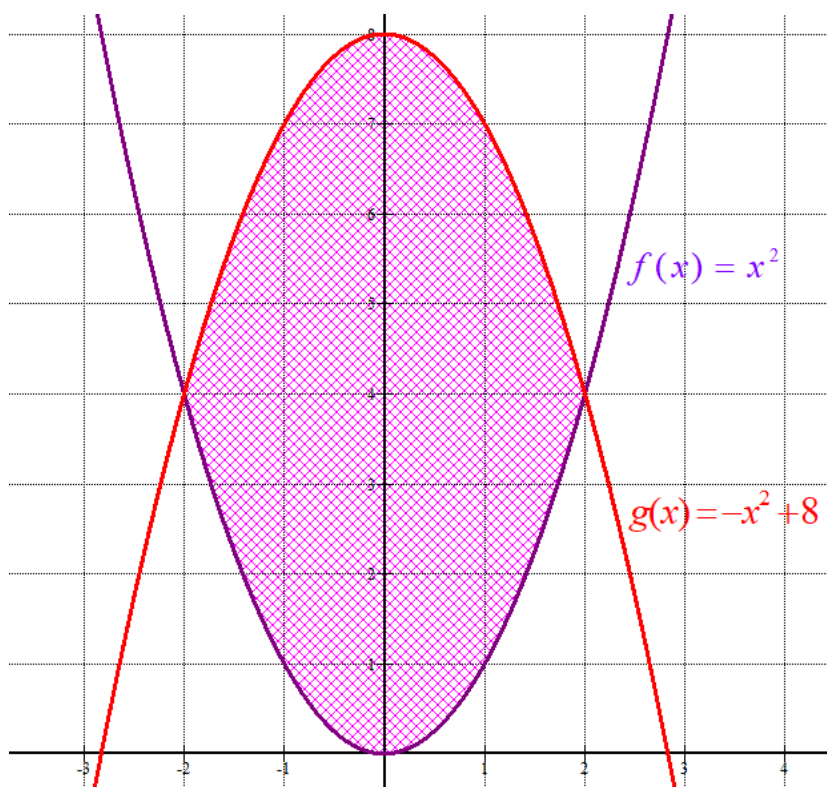
Se cumple solo en el intervalo $[-2, 2]$.

- b) Como en el apartado anterior hemos visto donde se cortan las funciones: $x = -2$ y $x = 2$. También que $g(x) \geq f(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$.

El área pedida se calcula con la integral definida entre -2 y 2 de $g(x) - f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^2 -x^2 + 8 - x^2 dx = \int_{-2}^2 -2x^2 + 8 dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 8x \right]_{-2}^2 = \\ &= \left[-\frac{2}{3}2^3 + 16 \right] - \left[-\frac{2}{3}(-2)^3 + 8(-2) \right] = -\frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} + 16 = \boxed{\frac{64}{3} \approx 21.3 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

No piden el dibujo, pero dibujamos la gráfica para comprobar todo lo obtenido.



E8.- (Análisis)

Hallar los valores de a , b y c para los cuales el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ cumple las siguientes condiciones:

- $P(0) = 1$
- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en $x = 0$ es $m = 1$.
- $\int_0^2 P(x) dx = 12$.

(2 puntos)

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = ax^2 + bx + c \\ P(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en $x = 0$ sea $m = 1$ significa que $P'(0) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = ax^2 + bx + c \\ P'(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = 2a \cdot 0 + b \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

Ya tenemos que el polinomio es $P(x) = ax^2 + x + 1$. Nos falta determinar el valor de “a”.

Utilizamos la tercera condición: $\int_0^2 P(x) dx = 12$.

Calculamos la integral definida.

$$\begin{aligned} \int_0^2 P(x) dx &= \int_0^2 ax^2 + x + 1 dx = \left[\frac{a}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{a}{3} 2^3 + \frac{1}{2} 2^2 + 2 \right] - \left[\frac{a}{3} 0^3 + \frac{1}{2} 0^2 + 0 \right] = \frac{8}{3} a + 2 + 2 = \frac{8}{3} a + 4 \end{aligned}$$

Como debe ser 12.

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^2 P(x) dx = 12 \\ \int_0^2 P(x) dx = \frac{8}{3} a + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{8}{3} a + 4 = 12 \Rightarrow \frac{8}{3} a = 8 \Rightarrow \boxed{a = \frac{24}{8} = 3}$$

Los valores son $a = 3$, $b = c = 1$.

E9- (Probabilidad y estadística)

En un club deportivo, el 55% de los socios son hombres y el 45 % mujeres. Entre los socios, el 60% de los hombres practica la natación, así como el 40% de las mujeres.

a) Describir los sucesos y sus probabilidades, y calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar practique la natación. **(1,25 puntos)**

b) Sabiendo que una persona practica la natación, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer? **(0,75 puntos)**

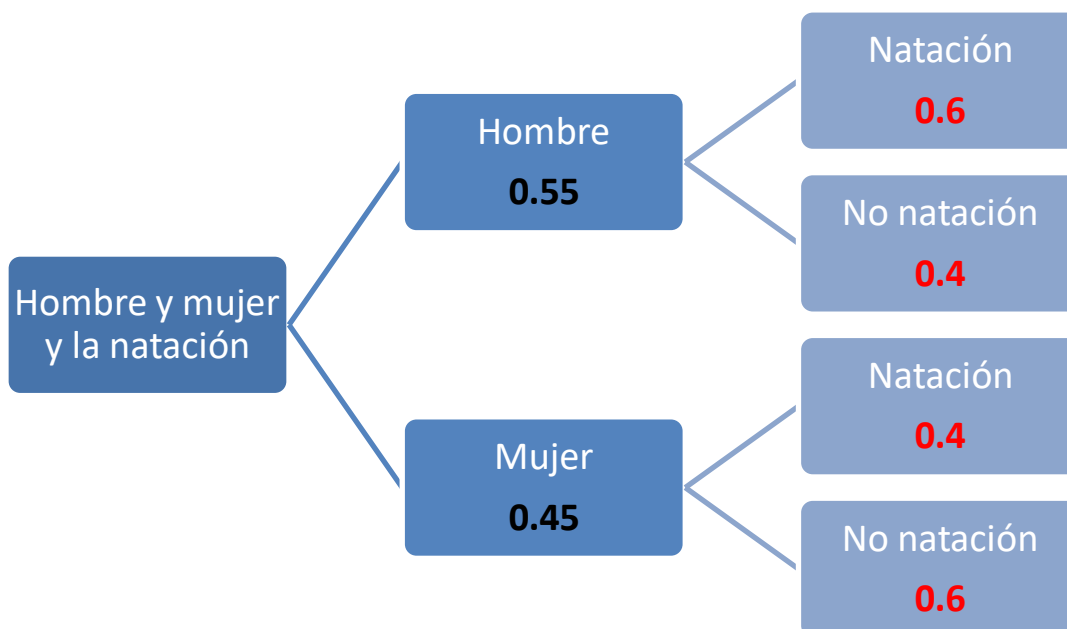
a) Llamamos H al suceso “Elegir un hombre”, por lo que el suceso contrario $\overline{H}$ es el suceso “Elegir una mujer”.

Llamamos N = “Elegir una persona que practica natación”.

Aplicando la regla de Laplace tenemos que $P(H) = \frac{55}{100} = 0.55$ y $P(\overline{H}) = \frac{45}{100} = 0.45$.

También sabemos que $P(N/H) = \frac{60}{100} = 0.6$ y que $P(N/\overline{H}) = \frac{40}{100} = 0.4$

Realizamos un diagrama de árbol.



Observando el diagrama de árbol y aplicando el teorema de la probabilidad total tenemos que:

$$\begin{aligned}
 P(N) &= P(H \cap N) + P(\overline{H} \cap N) = \\
 &= P(H)P(N/H) + P(\overline{H})P(N/\overline{H}) = 0.55 \cdot 0.6 + 0.45 \cdot 0.4 = \boxed{0.51}
 \end{aligned}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{H}/N) = \frac{P(\overline{H} \cap N)}{P(N)} = \frac{P(\overline{H})P(N/\overline{H})}{P(N)} = \frac{0.45 \cdot 0.4}{0.51} = \frac{6}{17} \approx 0.35$$

E10.- (Probabilidad y estadística)

El tiempo empleado, en minutos, para obtener la respuesta de un test para detectar cierta enfermedad sigue una distribución normal de media 20 y de desviación típica 4.

a) ¿En qué porcentaje de test se obtiene el resultado entre 16 y 26 minutos? **(1 punto)**

b) ¿Cuántos minutos son necesarios para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96.41% de los test? **(1 punto)**

X = El tiempo empleado, en minutos, para obtener la respuesta de un test. $X = N(20, 4)$.

a) Nos piden calcular $P(16 < X < 26)$.

$$\begin{aligned}
 P(16 < X < 26) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{16-20}{4} < Z < \frac{26-20}{4}\right) = \\
 &= P(-1 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < -1) = P(Z < 1.5) - (P(Z > 1)) = \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P(Z < 1.5) - (1 - P(Z < 1)) = \{\text{Buscamos en la tabla } N(0,1)\} = 0.9332 - (1 - 0.8413) = \\
 &= 0.7745 = \boxed{77.45\%}
 \end{aligned}$$

b) Llamemos “a” a los minutos que son necesarios para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96.41% de los test.

$$P(X \leq a) = 0.9641 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-20}{4}\right) = 0.9641 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Buscamos esta probabilidad } 0.9641 \text{ en la tabla } N(0,1)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a-20}{4} = 1.8 \Rightarrow a = 4 \cdot 1.8 + 20 = \boxed{27.2 \text{ minutos}}$$

	0.00	0.0
0.0	0.5000	0.50
0.1	0.5398	0.54
0.2	0.5793	0.58
0.3	0.6179	0.62
0.4	0.6554	0.65
0.5	0.6915	0.69
0.6	0.7257	0.72
0.7	0.7580	0.76
0.8	0.7881	0.79
0.9	0.8159	0.81
1.0	0.8413	0.84
1.1	0.8643	0.86
1.2	0.8849	0.88
1.3	0.9032	0.90
1.4	0.9192	0.92
1.5	0.9332	0.93
1.6	0.9452	0.94
1.7	0.9554	0.95
1.8	0.9641	0.96
1.9	0.9713	0.97
2.0	0.9772	0.97
...	...	...

EBAU Extraordinaria 2020

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	-----------------------	---------------------------------------

El alumno deberá escoger libremente CINCO problemas completos de los DIEZ propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ :

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad (1,2 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. (0,8 puntos)

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$

a) Encontrar los valores de m y n para que se verifique:

$$A^2 = A^t \quad (A^t \equiv \text{la traspuesta de } A) \quad (1,2 \text{ puntos})$$

b) ¿Para qué valores de m y n la matriz A no es invertible? (0,8 puntos)

E3.- (Geometría)

Dado el punto $P = (2, 1, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$,

a) Hallar la recta paralela a r que pase por P (0,8 puntos)

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r . (1,2 puntos)

E4.- (Geometría)

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \quad (1 \text{ punto})$$

b) Calcular el punto simétrico del $(1, 2, 3)$ respecto del plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$. (1 punto)

E5.- (Análisis)

Determinar la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, conociendo que tiene un punto de inflexión en $x = 1$ y que la recta tangente a su gráfica en el punto $(-1, 0)$ es el eje de abscisas. **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Demuestre que la ecuación $x^4 + 3x = 1 + \operatorname{sen} x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2]$. Probar que la solución es única. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{2x - 1}}{1 - x}$. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x) = \frac{2x - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}}$, hallar la función primitiva cuya $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$. **(1 punto)**

E8.- (Análisis)

a) Dada la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo $[1, 3]$ y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. **(1 punto)**

E9.- (Probabilidad y estadística)

El consumo de azúcar en un determinado país, calculado en Kg (kilogramos) por persona y año, varía según una distribución normal de media 15 y desviación típica 5.

a) ¿Qué porcentaje de personas de ese país consumen menos de 10 Kg de azúcar al año? **(1 punto)**

b) ¿Cuál es el porcentaje de personas del país cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 Kg? **(1 punto)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

Los estudiantes, que comienzan los estudios de Medicina, en el conjunto formado por las comunidades autónomas de Andalucía, Baleares y Castilla y León, se distribuyen de la siguiente forma: un 50% de Andalucía, un 15% de Baleares y un 35% provienen de Castilla y León. Los porcentajes de dichos estudiantes que no consiguen el título de Médico son los siguientes: 15% de Andalucía, 10% de Baleares y 5% de Castilla y León

a) Calcular la probabilidad de que uno de dichos estudiantes, elegido al azar, no consiga el título de Licenciado en Medicina. **(1 punto)**

b) Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, ¿es más probable que provenga de Andalucía o de Castilla y León? **(1 punto)**

SOLUCIONES**E1.- (Álgebra)**a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ :

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad (1,2 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. (0,8 puntos)a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Con determinante $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 - 1 - \lambda = \lambda^2 - \lambda$. Igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Estudiamos 3 situaciones distintas.

CASO 1. $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.**CASO 2.** $\lambda = 0$

El sistema queda:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=1} \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ x + 1 + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{¡IMPOSIBLE!}$$

Resolviendo el sistema se llega a una situación imposible pues una expresión ($x + y$) no puede dar dos valores diferentes (1 y 2).**El sistema es incompatible.****CASO 3.** $\lambda = 1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a = \text{Ecuación 3}^a \\ \text{Quito ecuación 3}^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1 - y} \\ x + z = 2 - y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - y + z = 2 - y \Rightarrow \boxed{z = 1}$$

El sistema es compatible indeterminado.Tiene infinitas soluciones: $x = 1 - t; y = t; z = 1$ con $t \in \mathbb{R}$ b) Para $\lambda = 1$ las soluciones son $x = 1 - t; y = t; z = 1$ con $t \in \mathbb{R}$. Resuelto en apartado a) CASO 3.

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$

a) Encontrar los valores de m y n para que se verifique:

$$A^2 = A^t \quad (A^t \equiv \text{la traspuesta de } A)$$

(1,2 puntos)

b) ¿Para qué valores de m y n la matriz A no es invertible?

(0,8 puntos)

a)

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m+nm & n^2 \end{pmatrix} \\ A^t &= \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix} \\ A^2 &= A^t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m+nm & n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 1 &= 1 \\ m &= 0 \\ 0 &= m+nm \\ n &= n^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \boxed{m=0} \\ \Rightarrow 0 &= m+nm \\ n &= n^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 0 &= 0+0 \\ n &= n^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n = n^2 \Rightarrow n^2 - n = 0 \Rightarrow n(n-1) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \boxed{n=0} \\ o \\ \boxed{n=1} \end{aligned} \right.$$

Los valores son: $m = n = 0$ o $m = 0$ y $n = 1$

b) Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero, para averiguar esos valores para los que la matriz A no es invertible.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{vmatrix} = n$$

$$|A| = 0 \Rightarrow n = 0$$

Para $n = 0$ y cualquier valor de m la matriz no es invertible.

E3.- (Geometría)

Dado el punto $P = (2, 1, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$,

a) Hallar la recta paralela a r que pase por P

(0,8 puntos)

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r .

(1,2 puntos)

a) Si la recta s es paralela a la recta r tiene el mismo vector director.

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r = (1, -1, -3)$$

Hallamos la ecuación de la recta s paralela a r que pasa por $P = (2, 1, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} P = (2, 1, 1) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{v}_r = (1, -1, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$$

b) Si el plano π contiene al punto P y a la recta r entonces debe tener como vectores directores el director de la recta $\vec{v}_r$ y también el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo Q un punto cualquiera de la recta r .

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3} \Rightarrow Q = (2, 3, 4)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (2, 3, 4) - (2, 1, 1) = (0, 2, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} P = (2, 1, 1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (0, 2, 3) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -1, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-6x + 12 + 3y - 3 - 2z + 2 + 3x - 6 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv -3x + 3y - 2z + 5 = 0}$$

E4.- (Geometría)

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 3) y es paralela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \quad (1 \text{ punto})$$

b) Calcular el punto simétrico del (1, 2, 3) respecto del plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$. (1 punto)

a) Hallamos el vector director de la recta r mediante el producto escalar de los vectores normales de los planos que la definen.

$$\vec{v}_r = \vec{n} \times \vec{n}' = (1, -1, -1) \times (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i - j + k + k - j + i = -2j + 2k = (0, -2, 2)$$

La recta s paralela a r que pasa por (1, 2, 3) tiene ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} (1, 2, 3) \in s \\ \vec{v}_s = (0, -2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2}$$

b) Hallamos la ecuación de la recta t perpendicular al plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$ que pasa por el punto P(1, 2, 3).

$$\left. \begin{array}{l} (1, 2, 3) \in t \\ \vec{v}_t = \vec{n} = (3, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\alpha \\ y = 2 + 2\alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte M de la recta t y el plano π .

$$t \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\alpha \\ y = 2 + 2\alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3(1 + 3\alpha) + 2(2 + 2\alpha) + 3 + \alpha + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 + 9\alpha + 4 + 4\alpha + 3 + \alpha + 4 = 0 \Rightarrow$$

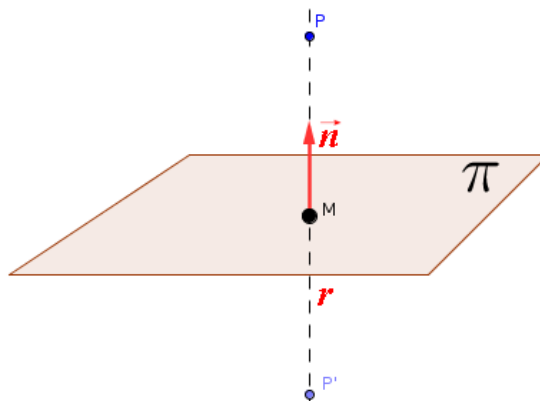
$$\Rightarrow 14\alpha + 14 = 0 \Rightarrow 14\alpha = -14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 3 = -2 \\ y = 2 - 2 = 0 \\ z = 3 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-2, 0, 2)$$

El punto simétrico $P'(a, b, c)$ es un punto tal que el vector $\overrightarrow{P'M} = \overrightarrow{MP}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{P'M} = (-2, 0, 2) - (a, b, c) = (-2 - a, -b, 2 - c) \\ \overrightarrow{MP} = (1, 2, 3) - (-2, 0, 2) = (3, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow (-2 - a, -b, 2 - c) = (3, 2, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 - a = 3 \rightarrow a = -5 \\ -b = 2 \rightarrow b = -2 \\ 2 - c = 1 \rightarrow c = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P'(-5, -2, 1) \text{ Simétrico de P respecto del plano } \pi}$$



E5.- (Análisis)

Determinar la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, conociendo que tiene un punto de inflexión en $x = 1$ y que la recta tangente a su gráfica en el punto $(-1, 0)$ es el eje de abscisas. **(2 puntos)**

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f'''(x) = 6$$

Al tener un punto de inflexión en $x = 1$ significa que se anula la derivada segunda y la tercera es no nula.

$$\left. \begin{array}{l} f''(1) = 6 + 2a = 0 \\ f'''(1) = 6 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6 + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

La función tiene la expresión $f(x) = x^3 - 3x^2 + bx + c$ y la derivada es $f'(x) = 3x^2 - 6x + b$

Falta determinar el valor de “b” y “c”.

Si la recta tangente a su gráfica en el punto $(-1, 0)$ es el eje de abscisas ($y = 0$) significa que $f(-1) = 0$ y que $f'(-1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + b(-1) + c \Rightarrow -1 - 3 - b + c = 0 \Rightarrow c - b = 4 \\ f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) + b = 0 \Rightarrow 3 + 6 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -9} \end{array} \right\} \Rightarrow c + 9 = 4 \Rightarrow \boxed{c = -5}$$

Las constantes son $a = -3$; $b = -9$; $c = -5$ y la función es $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5}$

E6.- (Análisis)

Demuestre que la ecuación $x^4 + 3x = 1 + \operatorname{sen} x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2]$. Probar que la solución es única. **(2 puntos)**

A partir de la ecuación planteada consideramos la función $f(x) = x^4 + 3x - 1 - \operatorname{sen} x$.

En $x = 0$ la función vale $f(0) = 0^4 + 0 - 1 - \operatorname{sen} 0 = -1 < 0$.

En $x = 2$ la función vale $f(2) = 2^4 + 6 - 1 - \operatorname{sen} 2 = 21 - \operatorname{sen} 2 > 0$.

La función $f(x) = x^4 + 3x - 1 - \operatorname{sen} x$ es continua en $[0, 2]$ y toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo, por el teorema de Bolzano existe $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = 0$.

Esto implica que existe $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = c^4 + 3c - 1 - \operatorname{sen} c = 0 \Rightarrow c^4 + 3c = 1 + \operatorname{sen} c$

Además, esta solución es única, ya que si hubiese otro valor $d \in [0, 2]$ tal que $f(d) = 0$.

Podríamos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^4 + 3x - 1 - \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[c, d]$, pues la función es derivable en (c, d) , continua en $[c, d]$.

El teorema de Rolle nos asegura la existencia de un valor $e \in (c, d)$ tal que $f'(e) = 0$.

Pero la derivada de la función es $f'(x) = 4x^3 + 3 - \cos x$, si la igualamos a cero obtenemos:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 + 3 - \cos x = 0 \Rightarrow 4x^3 = -3 + \cos x.$$

Esta igualdad es imposible para $x \in (0, 2)$ pues $\left. \begin{array}{l} 4x^3 > 0 \\ \cos x \leq 1 \Rightarrow -3 + \cos x < 0 \end{array} \right\}$

La contradicción obtenida permite afirmar que la solución de la ecuación inicial es única.

E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{2x - 1}}{1 - x}$. (1 punto)

b) Dada la función $f(x) = \frac{2x - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}}$, hallar la función primitiva cuya $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$.

(1 punto)

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{2x - 1}}{1 - x} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{1}}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} - \frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}{-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x+1}{2\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{-1}{2} + \frac{2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) Como la derivada de $x^2 + e^{-x}$ es $2x - e^{-x}$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{2x - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}} dx = \ln(x^2 + e^{-x}) + K$$

Como debe cumplirse que $F(0) = 3$ entonces $\ln|0^2 + e^{-0}| + K = 3 \Rightarrow K = 3$.

$$\boxed{F(x) = \ln(x^2 + e^{-x}) + 3}$$

E8.- (Análisis)

- a) Dada la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**
- b) Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo $[1, 3]$ y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. **(1 punto)**

a) El dominio de la función es $(0, +\infty)$, pues no existe el logaritmo de un número negativo.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

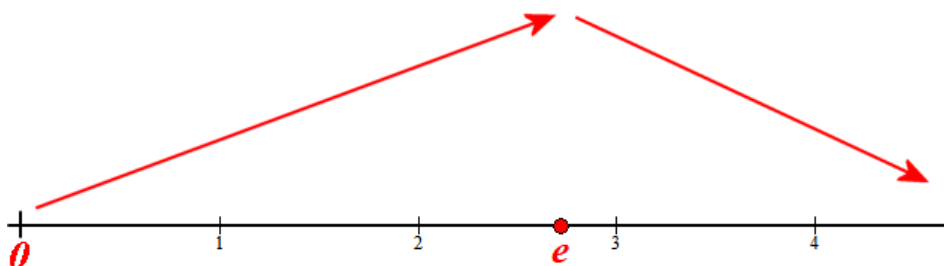
$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

Estudiamos el comportamiento de la función antes y después de $x = e$.

- En $(0, e)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1^2} = 1 > 0$. La función crece en $(0, e)$.
- En $(e, +\infty)$ tomamos $x = e^2$ y la derivada vale $f'(e^2) = \frac{1 - \ln e^2}{e^4} = \frac{-1}{e^4} < 0$. La función decrece en $(e, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(0, e)$ y decrece en $(e, +\infty)$.

Tiene un máximo relativo en $x = e$.

Como $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ el punto $\left(e, \frac{1}{e}\right)$ es un máximo relativo de la función.

b) Vemos donde se anula la función.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

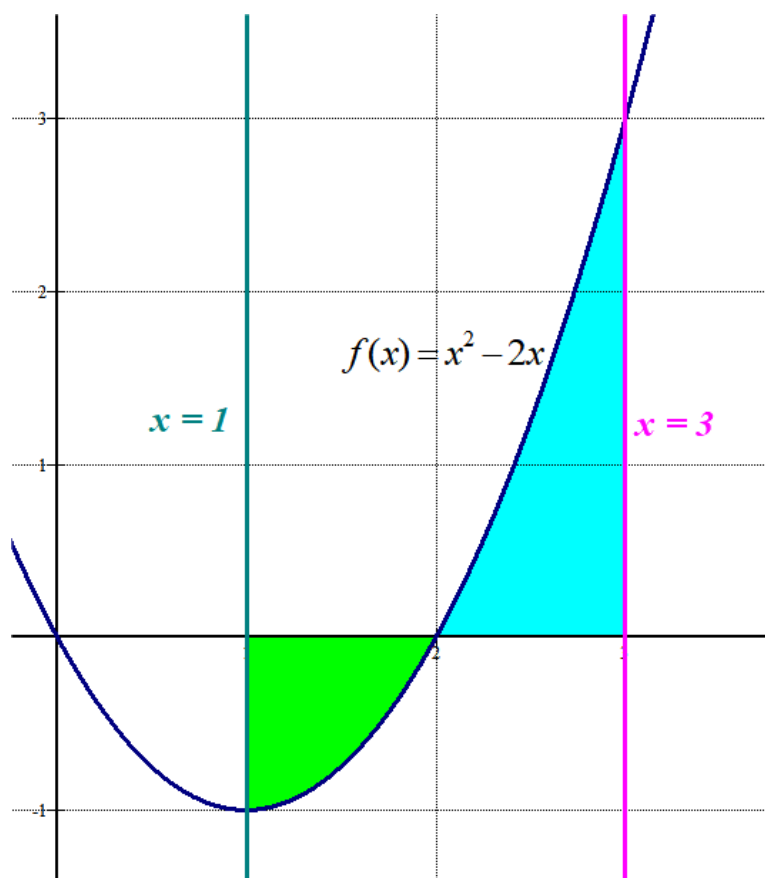
$x = 2$ pertenece al intervalo $[1, 3]$ por lo que se divide en dos partes, vemos el signo de la función en cada una de ellas.

- En $[1, 2)$ tomamos $x = 1,5$ y la función vale $f(1,5) = 1,5^2 - 3 = -0,75 < 0$. Es negativa en el intervalo $[1, 2)$.

- En $(2,3]$ tomamos $x = 2,5$ y la función vale $f(2,5) = 2,5^2 - 5 = 1,25 > 0$. Es positiva en el intervalo $(2,3]$.

El área del recinto es la suma de las integrales definidas siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^2 -(x^2 - 2x) dx + \int_2^3 x^2 - 2x dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^3 = \\ &= \left[-\frac{2^3}{3} + 2^2 \right] - \left[-\frac{1^3}{3} + 1^2 \right] + \left[\frac{3^3}{3} - 3^2 \right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 \right] = \\ &= -\frac{8}{3} + 4 + \frac{1}{3} - 1 + 9 - 9 - \frac{8}{3} + 4 = -\frac{15}{3} + 7 = \boxed{2 \text{ u}^2} \end{aligned}$$



Si contamos cuadraditos en el dibujo (cada cuadradito es 1 unidad cuadrada) vemos que es coherente con el resultado obtenido (aproximadamente 2 cuadraditos)

E9- (Probabilidad y estadística)

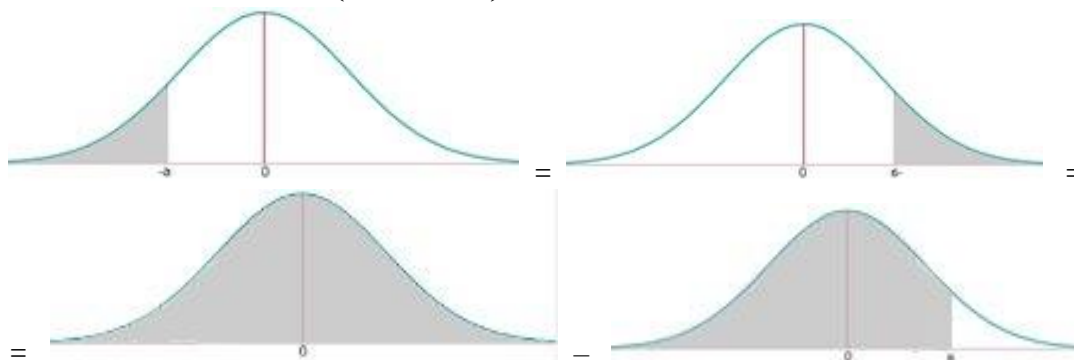
El consumo de azúcar en un determinado país, calculado en Kg (kilogramos) por persona y año, varía según una distribución normal de media 15 y desviación típica 5.

a) ¿Qué porcentaje de personas de ese país consumen menos de 10 Kg de azúcar al año? **(1 punto)**

b) ¿Cuál es el porcentaje de personas del país cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 Kg? **(1 punto)**

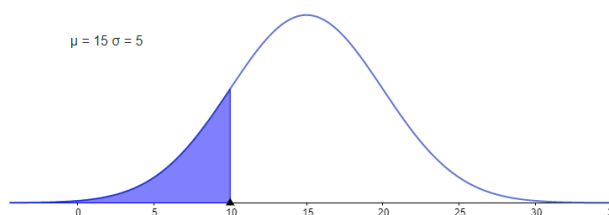
X = Consumo de azúcar (kg/año) en un país. $X = N(15, 5)$.

$$a) P(X \leq 10) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{10-15}{5}\right) = P(Z \leq -1) = \dots$$

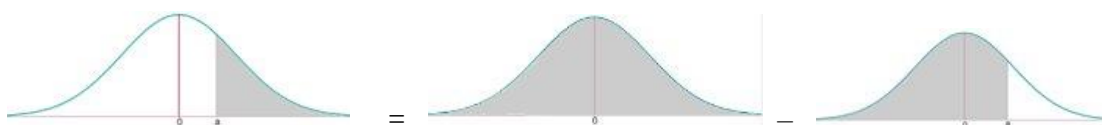


$$\dots = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = \{\text{Buscamos en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 0,8413 = \boxed{0,1587}$$

Un porcentaje del 15,87% de personas consumen menos de 10 kg de azúcar al año.

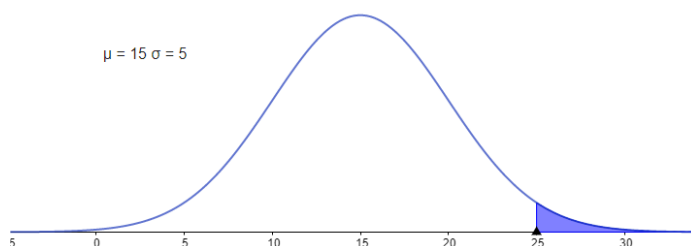


$$b) P(X \geq 25) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{25-15}{5}\right) = P(Z \geq 2) = \dots$$



$$\dots = 1 - P(Z \leq 2) = \{\text{Buscamos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0,9772 = \boxed{0,0228}$$

Un porcentaje de 2,28% de personas consumen más de 25 kg de azúcar al año.



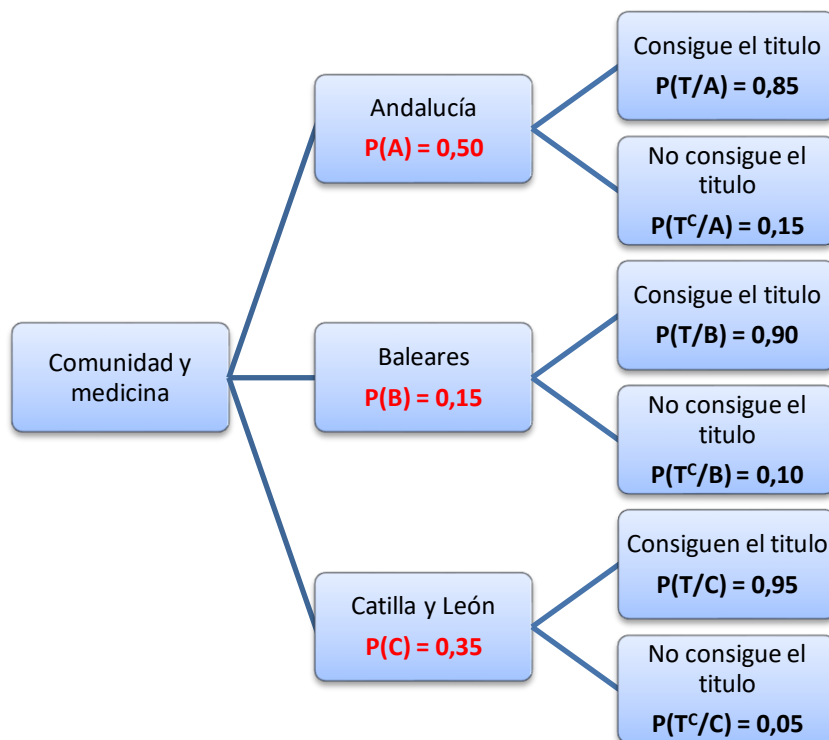
E10.- (Probabilidad y estadística)

Los estudiantes, que comienzan los estudios de Medicina, en el conjunto formado por las comunidades autónomas de Andalucía, Baleares y Castilla y León, se distribuyen de la siguiente forma: un 50% de Andalucía, un 15% de Baleares y un 35% provienen de Castilla y León. Los porcentajes de dichos estudiantes que no consiguen el título de Médico son los siguientes: 15% de Andalucía, 10% de Baleares y 5% de Castilla y León

a) Calcular la probabilidad de que uno de dichos estudiantes, elegido al azar, no consiga el título de Licenciado en Medicina. **(1 punto)**

b) Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, ¿es más probable que provenga de Andalucía o de Castilla y León? **(1 punto)**

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total y sumamos las probabilidades de las tres ramas donde “no se consigue el título de médico”.

$$P(T^c) = P(A)P(T^c/A) + P(B)P(T^c/B) + P(C)P(T^c/C) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,15 + 0,15 \cdot 0,10 + 0,35 \cdot 0,05 = 0,0750 + 0,0150 + 0,0175 = \boxed{0,1075}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes para calcular las probabilidades de que sea de Andalucía o de Castilla y León.

$$P(A/T^c) = \frac{P(A/T^c)}{P(T^c)} = \frac{P(A)P(T^c/A)}{P(T^c)} = \frac{0,50 \cdot 0,15}{0,1075} = \frac{30}{43} = 0,6976$$

$$P(C/T^c) = \frac{P(C/T^c)}{P(T^c)} = \frac{P(C)P(T^c/C)}{P(T^c)} = \frac{0,35 \cdot 0,05}{0,1075} = \frac{7}{43} = 0,1627$$

Comparando las probabilidades de que sea de Andalucía (30/43) y la de que sea de Castilla y León (7/43) concluimos que es más probable que sea de la comunidad autónoma andaluza.

EBAU Ordinaria 2020

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	-----------------------	---------------------------------------

El alumno deberá escoger libremente CINCO problemas completos de los DIEZ propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x - y + az = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + ay - 2z = 0 \end{cases}$$

- a) Estudie la existencia y número de soluciones según los valores del parámetro real a . **(1,2 puntos)**
- b) Resuélvalo, si es posible, para el valor del parámetro $a = -1$. **(0,8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{pmatrix}$

- a) Indique para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1} . **(0,5 puntos)**
- b) Si $a = 4$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, encuentre la matriz X que verifica que $B + XA = C$ **(1,5 puntos)**

E3.- (Geometría)

Sea el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ y el punto $A = (1, 3, -1)$.

Hallar la ecuación del plano que pasa por A , es paralelo a r y perpendicular a π . **(2 puntos)**

E4.- (Geometría)

Dado el punto $A = (1, 2, 4)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$,

- a) Hallar un punto B de la recta r de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano $\pi \equiv x + 2z = 0$ **(1,5 puntos)**
- b) Hallar un vector (a, b, c) perpendicular a $(1, 0, -1)$ y $(2, 1, 0)$. **(0,5 puntos)**

E5.- (Análisis)

Representar gráficamente la función $f(x) = xe^x$, calculando previamente sus extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y sus asíntotas. **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Demuestre que la ecuación $x^3 - 12x = -2$ tiene una solución en el intervalo $[-2, 2]$ y pruebe además que esa solución es única. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{e^x + \sin x - 1}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx$. **(1 punto)**

E8.- (Análisis)

a) Calcule los puntos de corte de las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$. **(0,5 puntos)**

b) Sabiendo que en el intervalo $[1, 2]$ se verifica que $g(x) \geq f(x)$ calcular el área del recinto limitado por la gráfica de ambas funciones en dicho intervalo. **(1,5 puntos)**

E9.- (Probabilidad y estadística)

El peso de los alumnos de 2º de bachillerato de un instituto de León, sigue una distribución normal, de media 75 kg y de desviación típica 5. Si se elige al azar un alumno, calcular la probabilidad de que:

- a) Tenga un peso entre 70 y 80 kg. **(1 punto)**
- b) Tenga un peso superior a 85 kg. **(1 punto)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

La probabilidad de que a un puerto llegue un barco de tonelaje bajo, medio o alto es 0,6, 0,3 y 0,1, respectivamente. La probabilidad de que necesite mantenimiento en el puerto es 0,25 para los barcos de bajo tonelaje, 0,4 para los de tonelaje medio y 0,6 para los de tonelaje alto.

- a) Si llega un barco a puerto, calcule la probabilidad de que necesite mantenimiento. **(1 punto)**
- b) Si un barco ha necesitado mantenimiento, calcule la probabilidad de que sea de tonelaje medio. **(1 punto)**

SOLUCIONES**E1.- (Álgebra)**

Se considera el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x - y + az = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + ay - 2z = 0 \end{cases}$$

- a) Estudie la existencia y número de soluciones según los valores del parámetro real a . **(1,2 puntos)**
 b) Resuélvalo, si es posible, para el valor del parámetro $a = -1$. **(0,8 puntos)**

a) El sistema tiene asociada una matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{pmatrix}$.

Calculamos su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = 2 + a^2 - 2 + a = a^2 + a$$

Igualamos a cero el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos,

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq -1$.

En este caso el determinante de A no se anula y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. **El sistema tiene solución y esta solución es única.** El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a = 0$.

En este caso el determinante de A se anula y su rango no es 3.

Para $a = 0$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Se observa que la 2ª y 3ª fila son proporcionales, por lo que tomamos el menor resultante de quitar la 3ª fila y la columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

El rango de A es 2.

El rango de la matriz $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ es también 2 ya que le hemos añadido una

columna de ceros a la matriz A para obtener la matriz ampliada A/B .

Como $\text{Rango de } A = \text{Rango de } A/B = 2 < 3 = n^\circ \text{ de incógnitas}$ entonces el sistema es compatible indeterminado, **tiene infinitas soluciones.**

CASO 3. $a = -1$.

En este caso el determinante de A se anula y su rango no es 3.

Para $a = -1$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Se observa que la 1ª y 3ª columna son proporcionales, por lo que tomamos el menor resultante de quitar la 1ª columna y la 1ª fila $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

El rango de A es 2.

El rango de la matriz $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ es también 2 ya que le hemos añadido una

columna de ceros a la matriz A para obtener la matriz ampliada A/B .

Como Rango de $A =$ Rango de $A/B = 2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas entonces el sistema es compatible indeterminado, **tiene infinitas soluciones**.

- b) Para $a = -1$ estaríamos en el caso 3 el sistema es compatible indeterminado y se puede resolver, aunque las soluciones son infinitas y dependen de un parámetro.

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ \boxed{x = z} \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - y - z = 0 \\ 2z - y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

La solución es $x = t$; $y = 0$; $z = t$

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{pmatrix}$

a) Indique para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1} . (0,5 puntos)

b) Si $a = 4$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

encuentre la matriz X que verifica que $B + XA = C$ (1,5 puntos)

a) Veamos cuando el determinante se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{vmatrix} = (a+1)(a-3) - (a-3) = a^2 - 2a - 3 - a + 3 = a^2 - 3a$$

Iguálamos a cero el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 3a = 0 \Rightarrow a(a-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 3 \end{cases}$$

El determinante se anula cuando $a = 0$ o $a = 3$. En estos dos casos no existe la inversa.

Cuando $a \neq 0$ y $a \neq 3$ la matriz A tiene inversa.

b) Si $a = 4$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y tiene inversa por ser $a \neq 0$ y $a \neq 3$.

Calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial $B + XA = C$.

$$B + XA = C \Rightarrow XA = C - B \Rightarrow X = (C - B)A^{-1}$$

Sustituyendo

$$X = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1-1 & 1+5 \\ -1-1 & 1+5 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

E3.- (Geometría)

Sea el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ y el punto $A = (1, 3, -1)$.

Hallar la ecuación del plano que pasa por A , es paralelo a r y perpendicular a π .

(2 puntos)

Si el plano π' es paralelo a r y perpendicular a π tiene como vectores directores el director de la recta r y el normal del plano.

Obtengamos las ecuaciones paramétricas de la recta y podremos obtener un vector director de la misma.

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + t \\ z = -1 + 0t \end{cases}$$

El vector director de la recta es $\vec{v}_r = (1, 1, 0)$.

El vector normal del plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$ es $\vec{n} = (1, -2, 2)$.

La ecuación del plano π' pedido es:

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 3, -1) \in \pi' \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, 1, 0) \\ \vec{u} = \vec{n} = (1, -2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi' \equiv 2x - 2 - 2z - 2 - z - 1 - 2y + 6 = 0$$

$$\boxed{\pi' \equiv 2x - 2y - 3z + 1 = 0}$$

E4.- (Geometría)

Dado el punto $A = (1, 2, 4)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$,

a) Hallar un punto B de la recta r de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano $\pi \equiv x + 2z = 0$ **(1,5 puntos)**

b) Hallar un vector (a, b, c) perpendicular a $(1, 0, -1)$ y $(2, 1, 0)$. **(0,5 puntos)**

a) Pasamos la ecuación de la recta a paramétricas.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_r(1, 1, 1) \in r \\ \vec{v}_r = (2, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \left. \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{array} \right\}$$

El punto B pedido tiene coordenadas $B(1+2t, 1+t, 1+2t)$ y el vector $\overrightarrow{AB}$ tiene coordenadas:

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 4) \\ B(1+2t, 1+t, 1+2t) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1+2t, 1+t, 1+2t) - (1, 2, 4) = (2t, -1+t, -3+2t)$$

Como $\overrightarrow{AB}$ debe ser paralelo al plano $\pi \equiv x + 2z = 0$ esto implica que debe ser perpendicular al vector normal del plano $\vec{n} = (1, 0, 2)$. El producto escalar de ambos debe ser cero.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2t, -1+t, -3+2t) \\ \vec{n} = (1, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (2t, -1+t, -3+2t) \cdot (1, 0, 2) = 0$$

$$2t - 6 + 4t = 0 \Rightarrow 6t = 6 \Rightarrow t = 1$$

Por lo que el punto B tiene coordenadas:

$$\left. \begin{array}{l} t = 1 \\ B(1+2t, 1+t, 1+2t) \end{array} \right\} \Rightarrow B(1+2, 1+1, 1+2) \Rightarrow \boxed{B(3, 2, 3)}$$

b) Si debe ser perpendicular a $(1, 0, -1)$ y $(2, 1, 0)$ nos sirve el producto vectorial de ambos.

$$(a, b, c) = (1, 0, -1) \times (2, 1, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2j + k + i = i - 2j + k = (1, -2, 1)$$

E5.- (Análisis)

Representar gráficamente la función $f(x) = xe^x$, calculando previamente sus extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y sus asíntotas. **(2 puntos)**

Determinemos sus asíntotas.

Asíntota vertical. $x = a$

No tiene pues la función es continua en $\mathbb{R}$.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty \cdot e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = -\infty \cdot e^{-\infty} = -\infty \cdot 0 = \text{Indeterminación} = \{\text{Convierto producto en división}\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{e^{+\infty}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (aplico L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-e^{+\infty}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe pues tiene una asíntota horizontal.

Para calcular sus extremos relativos necesitamos su derivada.

$$f(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

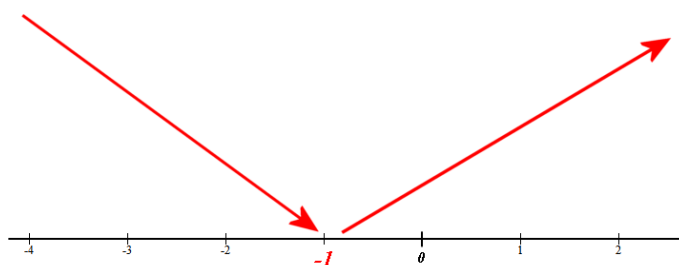
Igualemos a cero la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1+x)e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+x=0 \Rightarrow x=-1 \\ e^x=0 \rightarrow \text{No es posible} \end{cases}$$

El punto crítico de la función es $x = -1$.

Estudiemos el comportamiento de la función antes y después de este valor.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = (1-2)e^{-2} = \frac{-1}{e^2} < 0$, la función decrece en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = (1+0)e^0 = 1 > 0$, la función crece en $(-1, +\infty)$.



La función decrece en $(-\infty, -1)$ y crece en $(-1, +\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $x = -1$.

Estudiemos su concavidad, para ello necesitamos la segunda derivada.

$$f'(x) = e^x + xe^x \Rightarrow f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x = (2+x)e^x$$

Iguamos a cero la segunda derivada en busca de puntos de inflexión.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (2+x)e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2+x=0 \Rightarrow x=-2 \\ e^x=0 \Rightarrow \text{No es posible} \end{cases}$$

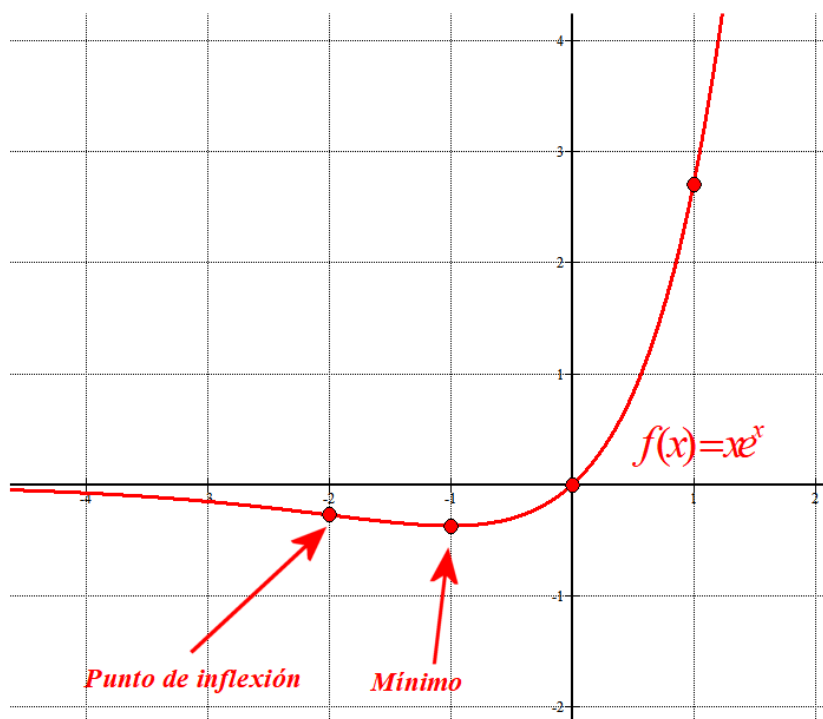
Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = -2$.

- En $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada segunda vale $f''(-3) = (2-3)e^{-3} = \frac{-1}{e^3} < 0$, la función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, -2)$.
- En $(-2, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = (2+0)e^0 = 2 > 0$, la función es convexa ($\cup$) en $(-2, +\infty)$.

La función es cóncava en $(-\infty, -2)$ y convexa en $(-2, +\infty)$ y presenta un punto de inflexión en $x = -2$.

Hacemos una tabla de valores donde colocamos el mínimo, el punto de inflexión y algunos valores más.

x	$y = xe^x$
-3	$-3e^{-3} = -0,15$
-2	$-2e^{-2} = -0,27$
-1	$-e^{-1} = -0,37$
0	0
1	$e = 2,7$



E6.- (Análisis)

Demuestre que la ecuación $x^3 - 12x = -2$ tiene una solución en el intervalo $[-2, 2]$ y pruebe además que esa solución es única. **(2 puntos)**

A partir de la ecuación planteada consideramos la función $f(x) = x^3 - 12x + 2$.

En $x = -2$ la función vale $f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 2 = -8 + 24 + 2 = 18 > 0$.

En $x = 2$ la función vale $f(2) = 8 - 24 + 2 = -14 < 0$.

La función $f(x) = x^3 - 12x + 2$ es continua en $[-2, 2]$ y toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo, por el teorema de Bolzano existe $c \in [-2, 2]$ tal que $f(c) = 0$.

Esto implica que existe $c \in [-2, 2]$ tal que $f(c) = c^3 - 12c + 2 = 0 \Rightarrow c^3 - 12c = -2$

Además, esta solución es única, ya que si hubiese otro valor $d \in [-2, 2]$ tal que $f(d) = 0$.

Podríamos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^3 - 12x + 2$ en el intervalo $[c, d]$, pues la función es derivable en (c, d) , continua en $[c, d]$, ya que es una función polinómica.

El teorema de Rolle nos asegura la existencia de un valor $e \in (c, d)$ tal que $f'(e) = 0$.

Pero la derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 - 12$, si la igualamos a cero obtenemos:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \text{ y ninguno de estos valores}$$

está en el intervalo $(-2, 2)$. La contradicción obtenida permite afirmar que la solución de la ecuación inicial es única.

E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{e^x + \operatorname{sen} x - 1}$. (1 punto)

b) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + \cos x) dx$. (1 punto)

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{e^x + \operatorname{sen} x - 1} = \frac{1-1-0}{1+0-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplico L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \operatorname{sen} x - 1}{e^x + \cos x} = \frac{1+0-1}{1+1} = \boxed{0}$$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + \cos x) dx = [-\cos x + \operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} = \left[-\cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right] - [-\cos 0 + \operatorname{sen} 0] =$$

$$= 1+1 = \boxed{2}$$

E8.- (Análisis)

a) Calcule los puntos de corte de las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$.

(0,5 puntos)

b) Sabiendo que en el intervalo $[1, 2]$ se verifica que $g(x) \geq f(x)$ calcular el área del recinto limitado por la gráfica de ambas funciones en dicho intervalo.

(1,5 puntos)

a) Hallamos los puntos de corte de las dos funciones.

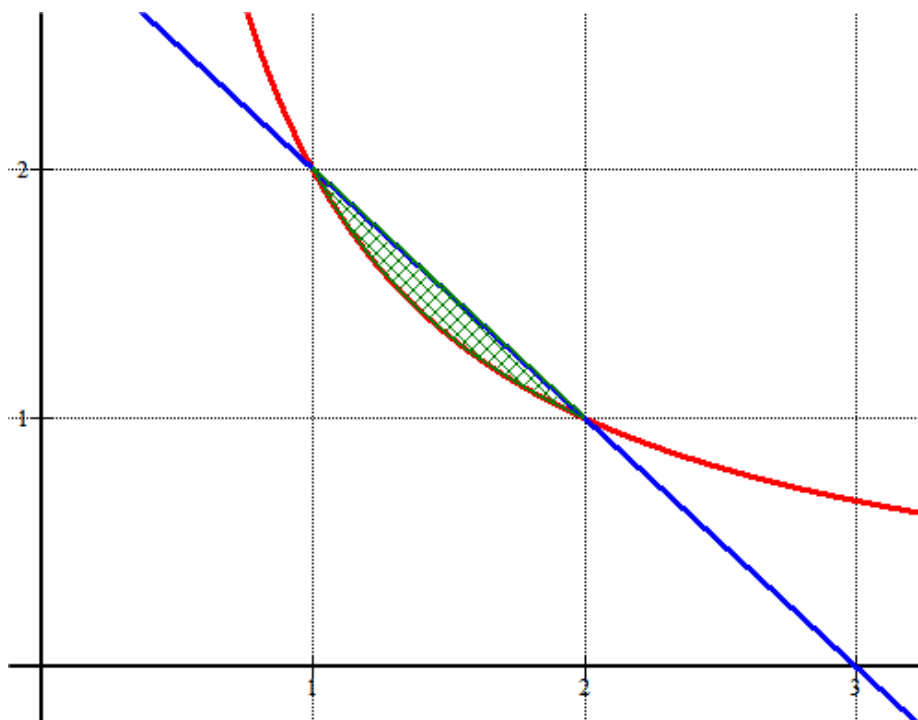
$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{2}{x} = 3 - x \Rightarrow 2 = 3x - x^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 = x \\ \frac{3-1}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Las gráficas se cortan en $x = 2$ y en $x = 1$.

b) El área del recinto limitado por ambas gráficas es la integral definida entre 1 y 2 de una función menos la otra, como sabemos que $g(x) \geq f(x)$, entonces el integrando será $g(x) - f(x)$.

$$\begin{aligned} \int_1^2 3 - x - \frac{2}{x} dx &= \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2 \ln x \right]_1^2 = \left[3 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - 2 \ln 2 \right] - \left[3 - \frac{1^2}{2} - 2 \ln 1 \right] = \\ &= 6 - 2 - 2 \ln 2 - 3 + \frac{1}{2} + 0 = \boxed{\frac{3}{2} - 2 \ln 2 = 0,114 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

No piden dibujar el recinto pero lo hacemos para comprobar la solución.



El área del recinto es muy pequeña. Mucho más pequeño de 1 cuadrado.

E9- (Probabilidad y estadística)

El peso de los alumnos de 2º de bachillerato de un instituto de León, sigue una distribución normal, de media 75 kg y de desviación típica 5. Si se elige al azar un alumno, calcular la probabilidad de que:

a) Tenga un peso entre 70 y 80 kg.

(1 punto)

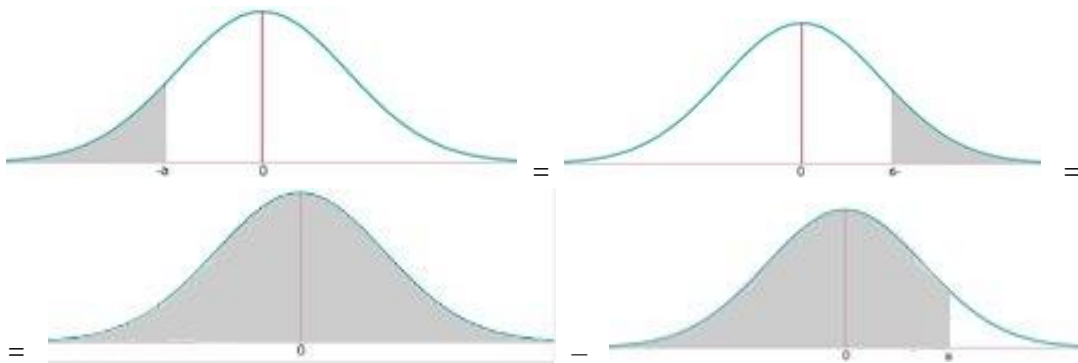
b) Tenga un peso superior a 85 kg.

(1 punto)

X = Peso de un estudiante de 2º de bachillerato. $X = N(75, 5)$.

a) Nos piden hallar $P(70 < X < 80)$.

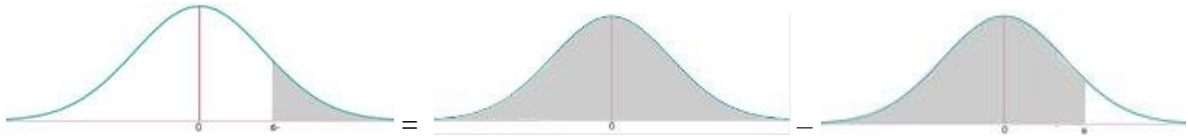
$$\begin{aligned} P(70 < X < 80) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{70-75}{5} < Z < \frac{80-75}{5}\right) = \\ &= P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) = \\ &= P(Z < 1) - (P(Z > 1)) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 1)) = \\ &= 2P(Z < 1) - 1 = \{\text{Buscamos en la tabla } N(0,1)\} = \\ &= 2 \cdot 0,8413 - 1 = 1,6826 - 1 = \boxed{0,6826} \end{aligned}$$

b) Nos piden hallar $P(X > 85)$.

$$P(X > 85) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{85-75}{5}\right) = P(Z > 2) =$$



$$= 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = \boxed{0,0228}$$

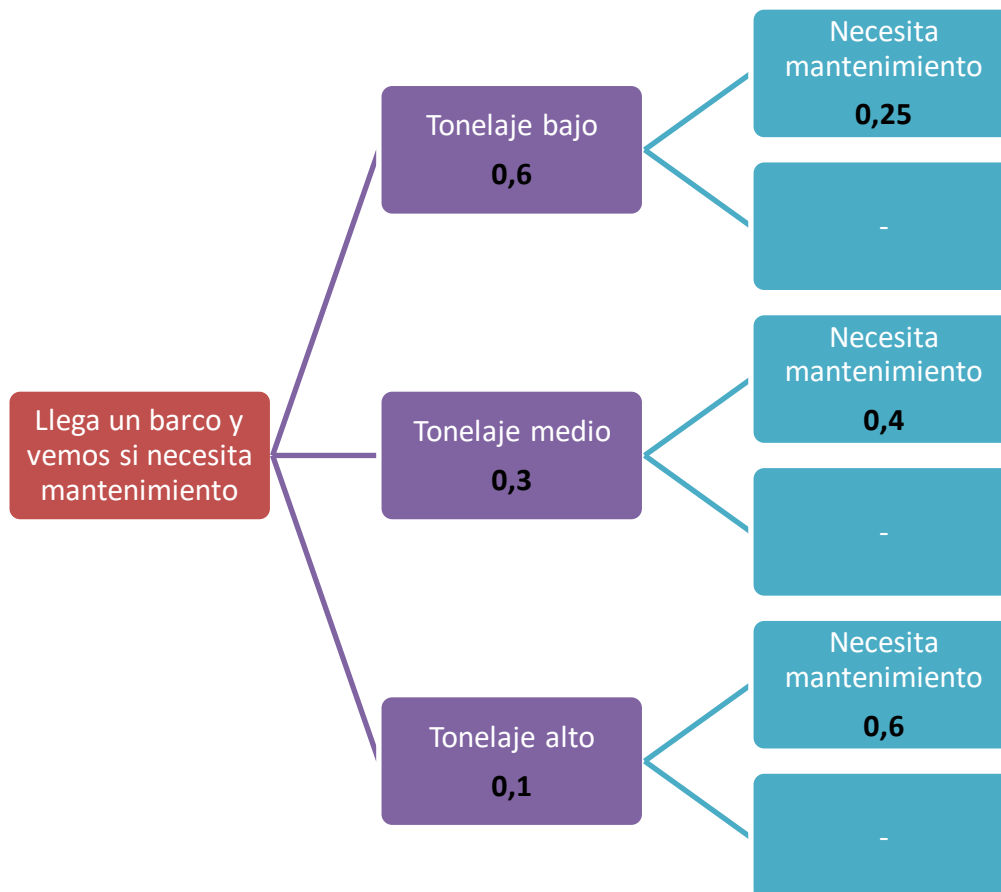
E10.- (Probabilidad y estadística)

La probabilidad de que a un puerto llegue un barco de tonelaje bajo, medio o alto es 0,6, 0,3 y 0,1, respectivamente. La probabilidad de que necesite mantenimiento en el puerto es 0,25 para los barcos de bajo tonelaje, 0,4 para los de tonelaje medio y 0,6 para los de tonelaje alto.

a) Si llega un barco a puerto, calcule la probabilidad de que necesite mantenimiento. **(1 punto)**

b) Si un barco ha necesitado mantenimiento, calcule la probabilidad de que sea de tonelaje medio. **(1 punto)**

Construimos un diagrama de árbol.



Con los datos que nos proporciona el diagrama respondemos a las preguntas.

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Necesita mantenimiento}) = 0,6 \cdot 0,25 + 0,3 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,6 = \boxed{0,33}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Tonelaje medio} / \text{Ha necesitado mantenimiento}) =$$

$$= \frac{P(\text{Tonelaje medio} \cap \text{Necesite mantenimiento})}{P(\text{Necesite mantenimiento})} = \frac{0,3 \cdot 0,4}{0,33} = \frac{12}{33} = \boxed{0,3636}$$

EBAU Extraordinaria 2019

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	---	---

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- a) Discutir según los valores del parámetro el sistema de ecuaciones lineales m

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 2x + y + mz = 4 \end{array} \right\}$$

(1 punto)

b) Resolverlo para $m=1$.

(1 punto)

E2.- a) Consideremos los vectores $\vec{u} = (1, 1, a)$ y $\vec{v} = (1, -1, a)$. Calcular a para que sean perpendiculares.

(0,5 puntos)

b) Calcular un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{p} = (1, 2, 3)$ y $\vec{q} = (1, -2, -3)$

(1,5 puntos)

E3.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 4x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

a) Probar que posee un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 2 .

(1,4 puntos)

b) Probar que no posee extremo relativo en 0 .

(0,6 puntos)

E4.- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - \cos x}$.

(1 punto)

b) Calcular a , siendo $a > 1$, para que el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = ax$ y $x = 1$ sea 1 .

(1 punto)

E5.- La temperatura del cuerpo humano sigue una distribución normal de media 37°C y desviación típica $0,5^\circ\text{C}$.

a) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36°C y 38°C

(1 punto)

b) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor que $36,5^\circ\text{C}$.

(1 punto)

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de

x e y , para que el producto AM sea igual a la inversa de la matriz N . **(2 puntos)**

E2.- Hallar a y b para que los vectores $(a, -1, 2)$ y $(1, b, -2)$ sean perpendiculares y las dos primeras coordenadas de su producto vectorial sean iguales. **(2 puntos)**

E3.- a) Enunciar el teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Indicar un punto en el que la función $f(x) = 2x - \sin x$ tome el valor 0, y demostrar (o bien usando el teorema del apartado previo o bien con algún otro razonamiento) que esta función sólo se anula en ese punto. **(1 punto)**

E4.- Determinénse los valores de a y de b para los cuales la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 2bx + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

es continua y verifica que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$. **(2 puntos)**

E5.- En una empresa de alquiler de vehículos con conductor:

- Trabajan 50 conductores de menos de 45 años, de los cuales 15 hablan inglés.
- Trabajan 30 conductores de entre 45 y 55 años, de los cuales 6 hablan inglés.
- Trabajan 20 conductores de más de 55 años, de los cuales 3 hablan inglés.

Considerando los sucesos: $A =$ “tener menos de 45 años”, $B =$ “tener entre 45 y 55 años”, $C =$ “tener más de 55 años” e $I =$ “hablar inglés”:

a) Calcular $P(I/A)$, $P(I/B)$ y $P(I/C)$. **(0,9 puntos)**

b) Si se elige al azar un conductor, y éste habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 45 años? **(1,1 puntos)**

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

E1.- a) Discutir según los valores del parámetro el sistema de ecuaciones lineales m

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + mz = 4 \end{cases}$$

(1 punto)

b) Resolverlo para $m = 1$.

(1 punto)

a) El sistema tiene más incógnitas que ecuaciones por lo que no es compatible determinado, despejemos y discutamos el sistema.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + mz = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = z + 1 \\ 2x + y = 4 - mz \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ya que $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$.

El sistema es compatible indeterminado siempre. No depende del valor de m .

b) Para $m = 1$ el sistema queda $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 + z \\ 2x + y = 4 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + z - y \\ 2x + y = 4 - z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 2z - 2y + y = 4 - z \Rightarrow -y = 2 - 3z \Rightarrow \boxed{y = -2 + 3z}$$

$$x = 1 + z + 2 - 3z \Rightarrow \boxed{x = 3 - 2z}$$

La solución es $x = 3 - 2t$, $y = -2 + 3t$, $z = t$.

E2.- a) Consideremos los vectores $\vec{u} = (1, 1, a)$ y $\vec{v} = (1, -1, a)$. Calcular a para que sean perpendiculares. **(0,5 puntos)**

b) Calcular un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{p} = (1, 2, 3)$ y $\vec{q} = (1, -2, -3)$ **(1,5 puntos)**

a) Para que sean perpendiculares su producto escalar debe ser 0.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 1, a)(1, -1, a) = 1 - 1 + a^2 = a^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

b) Un vector $\vec{r}$ perpendicular a los vectores $\vec{p} = (1, 2, 3)$ y $\vec{q} = (1, -2, -3)$ es su producto vectorial.

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6i - 3j + 2k + 2k - 3j + 6i = -6j + 4k = (0, -6, 4)$$

Hay muchos vectores perpendiculares, pero todos son de coordenadas múltiplo de las obtenidas.

$$\vec{r} = c(0, -6, 4) = (0, -6c, 4c)$$

Como además debe ser unitario, es decir, de módulo 1, se debe cumplir:

$$|\vec{r}| = |(0, -6c, 4c)| = \sqrt{(-6c)^2 + (4c)^2} = \sqrt{36c^2 + 16c^2} = \sqrt{52c^2}$$

$$|\vec{r}| = 1 \Rightarrow \sqrt{52c^2} = 1 \Rightarrow 52c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{52} \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{52}}}$$

El vector es $\vec{r} = \left(0, \frac{-6}{\sqrt{52}}, \frac{4}{\sqrt{52}}\right)$

E3.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 4x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

- a)** Probar que posee un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 2 . **(1,4 puntos)**
b) Probar que no posee extremo relativo en 0 . **(0,6 puntos)**

a) En $x = -1$ la función es $f(x) = -x^2 - 2x$. Esta función tiene derivada $f'(x) = -2x - 2$, sustituyendo el valor $x = -1$ se tiene $f'(-1) = -2(-1) - 2 = 2 - 2 = 0$ y además $f''(x) = -2 < 0$. Luego en $x = -1$ la función tiene un máximo relativo.

En $x = 2$ la función es $f(x) = x^2 - 4x$. Esta función tiene derivada $f'(x) = 2x - 4$, sustituyendo el valor $x = 2$ se tiene $f'(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$ y además $f''(x) = 2 > 0$. Luego en $x = 2$ la función tiene un mínimo relativo.

b) Veamos el signo de la derivada antes de 0 ($x < 0$) y después de 0 ($x > 0$).

Para $x < 0$ la función es $f(x) = -x^2 - 2x$ la derivada es $f'(x) = -2x - 2$ y si tomamos un valor muy próximo a 0 , por ejemplo $-0,01$ la derivada es $f'(-0,01) = -2(-0,01) - 2 = 0,02 - 2 = -1,98 < 0$

Para $x > 0$ la función es $f(x) = x^2 - 4x$ la derivada es $f'(x) = 2x - 4$ y si tomamos un valor muy próximo a 0 , por ejemplo $0,01$ la derivada es $f'(0,01) = 2(0,01) - 4 = 0,02 - 4 = -3,98 < 0$

La derivada de la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 4x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es $f'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y no cambia de signo en un entorno de $x = 0$, es negativa y por tanto es decreciente en $x = 0$.

E4.- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - \cos x}$.

(1 punto)

b) Calcular a , siendo $a > 1$, para que el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = ax$ y $x = 1$ sea 1.

(1 punto)

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - \cos x} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} = \{\text{Aplico L'Hôpital}\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x + \operatorname{sen} x} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

b) Veamos primero si las dos funciones se cortan.

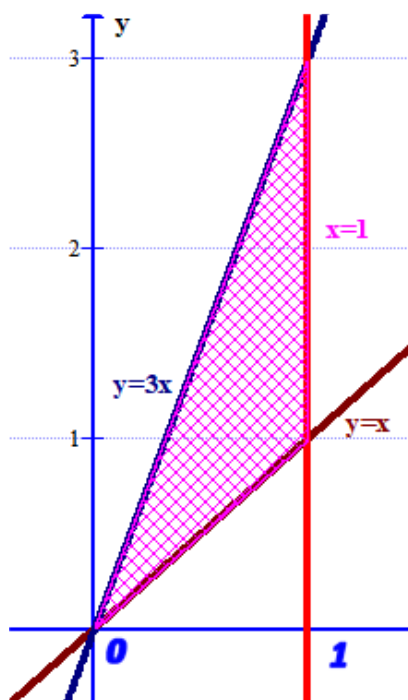
$$f(x) = g(x) \Rightarrow x = ax \Rightarrow x - ax = 0 \Rightarrow x(1-a) = 0 \Rightarrow x = 0$$

El área de la región del plano es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\text{Área} = \left| \int_0^1 (x - ax) dx \right| = \left| \left[\frac{x^2}{2} - \frac{ax^2}{2} \right]_0^1 \right| = \left| \left[\frac{1^2}{2} - \frac{a}{2} \right] - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0}{2} \right] \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{a}{2} \right| = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} u^2$$

Ya que $a > 1$ y por tanto $\frac{a}{2} > \frac{1}{2}$ y por tanto $\frac{a}{2} - \frac{1}{2} > 0$.

Como el área debe ser 1, entonces $\frac{a}{2} - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{a-1}{2} = 1 \Rightarrow a-1 = 2 \Rightarrow \boxed{a=3}$



E5.- La temperatura del cuerpo humano sigue una distribución normal de media 37°C y desviación típica $0,5^{\circ}\text{C}$.

- a)** Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36°C y 38°C **(1 punto)**
b) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor que $36,5^{\circ}\text{C}$. **(1 punto)**

Sea X = Temperatura del cuerpo humano. $X = N(37, 0.5)$. Nos piden:

- a)** Nos piden hallar el valor de $P(36 < X < 38)$.

$$\begin{aligned} P(36 < X < 38) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{36-37}{0,5} < \frac{X-37}{0,5} < \frac{38-37}{0,5}\right) = \\ &= P(-2 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -2) = \\ &= P(Z < 2) - (1 - P(Z < 2)) = 0,9772 - (1 - 0,9772) = \boxed{0,9544} \end{aligned}$$

- b)** Nos piden hallar el valor de $P(X < 36,5)$.

$$\begin{aligned} P(X < 36,5) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X-37}{0,5} < \frac{36,5-37}{0,5}\right) = \\ &= P(Z < -1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,843 = \boxed{0,157} \end{aligned}$$

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de x e y , para que el producto AM sea igual a la inversa de la matriz N . **(2 puntos)**

Calculemos primero la inversa de la matriz N , comprobando previamente si existe.

$$|N| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \text{ Existe la inversa y la calculamos.}$$

$$N^{-1} = \frac{\text{Adj}(N^t)}{|N|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} +2 & -(-1) \\ -(-1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Averigüemos ahora el valor de x para que se cumpla $AM = N^{-1}$.

$$AM = N^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+x-y & 1 \\ -x+y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2x-y & 1 \\ -x+y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=2 \\ -x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=2 \\ y=1+x \end{cases} \Rightarrow 2x-(1+x)=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-1-x=2 \Rightarrow \boxed{x=3} \Rightarrow \boxed{y=1+x=1+3=4}$$

La solución es $x = 3$ e $y = 4$.

E2.- Hallar a y b para que los vectores $(a, -1, 2)$ y $(1, b, -2)$ sean perpendiculares y las dos primeras coordenadas de su producto vectorial sean iguales. **(2 puntos)**

Para que los vectores $(a, -1, 2)$ y $(1, b, -2)$ sean perpendiculares su producto escalar debe ser 0.

$$(a, -1, 2) \cdot (1, b, -2) = a - b - 4 = 0 \Rightarrow a - b = 4$$

Además, su producto vectorial es:

$$(a, -1, 2) \times (1, b, -2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & -1 & 2 \\ 1 & b & -2 \end{vmatrix} = 2i + 2j + abk + k + 2aj - 2bi =$$

$$= (2 - 2b)i + (2a + 2)j + (ab + 1)k = (2 - 2b, 2a + 2, ab + 1)$$

Como debe tener las dos primeras coordenadas iguales, debe cumplirse:

$$2 - 2b = 2a + 2 \Rightarrow -2b = 2a \Rightarrow a = -b$$

Juntando las dos condiciones tenemos un sistema de ecuaciones que resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a - b = 4 \\ a = -b \end{array} \right\} \Rightarrow -b - b = 4 \Rightarrow -2b = 4 \Rightarrow \boxed{b = -2} \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

La solución es $a = 2$ y $b = -2$.

E3.- a) Enunciar el teorema de Rolle.**(1 punto)**

b) Indicar un punto en el que la función $f(x) = 2x - \operatorname{sen} x$ tome el valor 0, y demostrar (o bien usando el teorema del apartado previo o bien con algún otro razonamiento) que esta función sólo se anula en ese punto.

(1 punto)

a) Disponible en cualquier libro de texto.

b) La función toma el valor 0 para $x = 0$.

$$f(0) = 2 \cdot 0 - \operatorname{sen} 0 = 0$$

La derivada de la función es $f'(x) = 2 - \cos x$.

Esta expresión de la derivada es positiva para cualquier valor de x .

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos x \leq 1 \Rightarrow 2 - 1 \leq 2 - \cos x \leq 2 + 1 \Rightarrow 1 \leq 2 - \cos x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq f'(x) \leq 3$$

La función siempre es creciente.

Tenemos una solución para $x = 0$.

La solución es única, ya que si hubiese otro valor d tal que $f(d) = 0$.

Podríamos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = 2x - \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, d]$, pues la función es derivable en $(0, d)$, continua en $[0, d]$, ya que es una función polinómica.

El teorema de Rolle nos asegura la existencia de un valor $e \in (0, d)$ tal que $f'(e) = 0$.

Pero la derivada de la función es $f'(x) = 2 - \cos x$, que no se anula en ningún momento.

La contradicción obtenida permite afirmar que la solución es única.

E4.- Determinénse los valores de a y de b para los cuales la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 2bx + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

es continua y verifica que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$.

(2 puntos)

Para que $f(x) = \begin{cases} a + \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 2bx + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea continua debe cumplir:

- $f(0)$ existe y vale $f(0) = a + \cos 0 = a + 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2bx + 1) = 1$ existe.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a + \cos x) = a + 1$ existe.
- Los tres valores son iguales. $a + 1 = 1 \rightarrow a = 0$

La segunda condición implica que:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^2 - 2bx + 1dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3} - bx^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\left[\frac{1^3}{3} - b \cdot 1^2 + 1 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - b \cdot 0^2 + 0 \right] = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} - b + 1 = \frac{1}{3}$$

$$-b + 1 = 0$$

$$b = 1$$

Los valores pedidos son $a = 0$ y $b = 1$.

E5.- En una empresa de alquiler de vehículos con conductor:

- Trabajan 50 conductores de menos de 45 años, de los cuales 15 hablan inglés.
- Trabajan 30 conductores de entre 45 y 55 años, de los cuales 6 hablan inglés.
- Trabajan 20 conductores de más de 55 años, de los cuales 3 hablan inglés.

Considerando los sucesos: A = “tener menos de 45 años”, B = “tener entre 45 y 55 años”, C = “tener más de 55 años” e I = “hablar inglés”:

a) Calcular $P(I/A)$, $P(I/B)$ y $P(I/C)$.

(0,9 puntos)

b) Si se elige al azar un conductor, y éste habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 45 años?

(1,1 puntos)

a) Calculamos las probabilidades pedidas usando el teorema de Bayes.

$$P(I/A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{50}{100}} = \frac{15}{50} = \boxed{0,30}$$

$$P(I/B) = \frac{P(I \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{100}}{\frac{30}{100}} = \frac{6}{30} = \boxed{0,20}$$

$$P(I/C) = \frac{P(I \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{20}{100}} = \frac{3}{20} = \boxed{0,15}$$

b) UNA FORMA DE HACERLO

$$P(A/I) = \frac{P(I \cap A)}{P(I)} = \frac{P(I \cap A)}{P(A) \cdot P(I/A) + P(B) \cdot P(I/B) + P(C) \cdot P(I/C)} =$$

$$= \frac{\frac{15}{100}}{\frac{50}{100} \cdot \frac{15}{50} + \frac{30}{100} \cdot \frac{6}{30} + \frac{20}{100} \cdot \frac{3}{20}} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{15}{24}} = \frac{15}{24} = \boxed{0,625}$$

OTRA FORMA DE HACERLO.

Por pura lógica.

Si sabemos que habla inglés es uno de los $15 + 6 + 3 = 24$ que hablan inglés.

Como de todos estos solo 15 son menores de 45 años, la probabilidad pedida es $\frac{15}{24} = \boxed{0,625}$

EBAU Ordinaria 2019

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	-----------------------	--

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada uno de los ejercicios se puntuará sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- a) Estudie la existencia y unicidad de soluciones según los valores del parámetro m . **(1 punto)**
b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior para el caso $m=2$. **(1 punto)**

E2.- a) Calcular la ecuación del plano π que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ y pasa por el punto $A=(1,2,1)$. **(1 punto)**

b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $B=(2,1,2)$ y es perpendicular a las rectas $s_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ y $s_2 \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$. **(1 punto)**

E3.- Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, para $x \in \mathbb{R}$.

- a) Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**
b) Calcule el máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-2,2]$. **(1 punto)**

E4.- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x \sin(x)}$. **(1 punto)**

b) Calcular el área encerrada por las gráficas de $(x)=4x$ y de $(x)=x^3$ en el intervalo $[0,2]$, probando anteriormente que en dicho intervalo $f \geq g$. **(1 punto)**

E5.- Las notas de Matemáticas II de 500 alumnos presentados al examen de EBAU tienen una distribución normal con media 6,5 y desviación típica 2.

- a) Calcule la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de 8 puntos. **(1 punto)**
b) ¿Cuántos alumnos obtuvieron notas menores de 5 puntos? **(1 punto)**

OPCIÓN B

E1.- a) Encontrar los valores de k para que la matriz $A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea invertible.

(1 punto)
(1 punto)

b) Encontrar la inversa de A para $k=2$.

E2.- Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi \equiv x + y + kz = 0$.

Encontrar m y k para que:

a) La recta r sea perpendicular al plano π .

(1 punto)

b) La recta r esté contenida en el plano π .

(1 punto)

E3.- Sea el polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ del cual sabemos que $f(0)=1$, $f(1)=0$ y que tiene extremos relativos en $x=0$ y $x=1$. Calcular a , b , c y d .

(2 puntos)

E4.- a) Sea $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=2$.

(1 punto)

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{3 \cos(x) - 3}$.

(1 punto)

E5.- En una competición de tiro olímpico hay 10 rifles, 4 con visor telescópico y 6 sin él. La probabilidad de que un tirador haga blanco con un rifle con visor telescópico es 0,95 y sin él es de 0,65.

a) Halla la probabilidad de hacer blanco escogiendo un rifle al azar.

(1 punto)

b) Si el tirador hace blanco. ¿Es más probable que haya disparado con un rifle con visor telescópico o sin él?

(1 punto)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

E1.- Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- a)** Estudie la existencia y unicidad de soluciones según los valores del parámetro m . **(1 punto)**
b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior para el caso $m=2$. **(1 punto)**

a) Estudiemos el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4m - 2m - 4 = 2m - 2.$$

Lo igualamos a cero para ver los distintos casos (dependiendo del valor de m).

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m - 2 = 0 \Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1$$

Hay 2 casos distintos: $m = 1$ y $m \neq 1$

CASO 1. $m \neq 1$.

Aquí la matriz A tiene inversa y la solución sería

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

CASO 2. $m = 1$

El determinante de A es 0, por lo que el rango no es 3. Como tiene un menor de orden 2 no

nulo, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$, el rango de la matriz A es 2.

Veamos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right). \text{ Tomamos el menor de orden 3 con las tres últimas columnas y vemos si es}$$

$$\text{nulo } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 8 - 6 - 6 = 2 \neq 0. \text{ El rango de la ampliada es 3 distinto al de la matriz de}$$

los coeficientes. El sistema es INCOMPATIBLE. No tiene solución.

b) Para $m = 2$ el sistema tiene como solución
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Hallamos la inversa de la matriz A.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)}{2 \cdot 2 - 2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3-6 \\ -8-3+12 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

E2.- a) Calcular la ecuación del plano π que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ y pasa por el punto $A=(1,2,1)$. **(1 punto)**

b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $B=(2,1,2)$ y es perpendicular a las rectas $s_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ y $s_2 \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$. **(1 punto)**

a) Para definir el plano necesitamos un punto $A=(1,2,1)$ y dos vectores directores. Tenemos el director de la recta $\vec{v}_r = (2, 3, 2)$, el otro vector podemos obtenerlo como el que une el punto A con el punto de la recta $B(1,1,1)$, es decir, $\overrightarrow{AB} = (1,1,1) - (1,2,1) = (0, -1, 0)$.

La ecuación del plano es:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 3, 2) \\ \overrightarrow{AB} = (0, -1, 0) \\ \text{Pasa por } A(1,2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2z + 2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - z = 0}$$

b) Una recta perpendicular a otras dos (s_1 y s_2) tiene la dirección del producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_{s_1} = (2, 2, 2) \\ \vec{v}_{s_2} = (-1, 3, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_{s_1} \times \vec{v}_{s_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4i - 2j + 6k + 2k - 4j - 6i =$$

$$= -2i - 6j + 8k \Rightarrow \vec{v}_r = (-2, -6, 8)$$

Y pasa por el punto $B=(2,1,2)$, por lo que su ecuación es

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-2, -6, 8) \\ \text{Pasa por el punto } B(2,1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z-2}{8}}$$

E3.- Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, para $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(1 punto)

b) Calcule el máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-2, 2]$.

(1 punto)

a) Calculemos la derivada de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

Averiguamos sus puntos críticos igualando la derivada a cero.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Hay un punto crítico en $x = -2$ y otro en $x = 1$. La recta real se divide en 3 partes, veamos que ocurre con el signo de la derivada en cada una de ellas.

- En $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

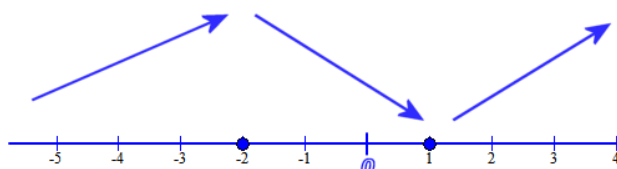
$$f'(-3) = 6(-3)^2 + 6(-3) - 12 = 54 - 18 - 12 = 24 > 0 \text{ La función crece.}$$

- En $(-2, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 6(0)^2 + 6(0) - 12 = -12 < 0$ La función decrece.

- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = 6(2)^2 + 6(2) - 12 = 24 + 12 - 12 = 24 > 0 \text{ La función crece.}$$

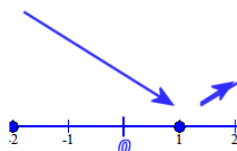
El esquema de cómo evoluciona la función quedaría



La función tiene un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 1$.

Crece en $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-2, 1)$.

b) Para calcular los máximos y mínimos absolutos en el intervalo $[-2, 2]$, restringimos el dibujo a la zona a estudiar.



El mínimo absoluto está en $x = 1$ como se aprecia en el esquema.

El máximo absoluto está en uno de los extremos: en $x = -2$ o en $x = 2$. Veamos donde toma el valor más alto la función.

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) = -16 + 12 + 24 = 20$$

$$f(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 12(2) = 16 + 12 - 24 = 4$$

El máximo absoluto se alcanza en $x = -2$.

E4.- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x \sin(x)}$.

(1 punto)

b) Calcular el área encerrada por las gráficas de $f(x) = 4x$ y de $g(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 2]$, probando anteriormente que en dicho intervalo $f \geq g$. (1 punto)

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x \sin(x)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \{L'Hôpital\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{\sin(x) + x \cos(x)} = \frac{0}{0} =$$

$$= \{L'Hôpital\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \sin(x)} = \frac{-1}{1+1-0} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

b) Hallemos los puntos de intersección de las gráficas de las funciones dadas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 4x = x^3 \Rightarrow 4x - x^3 = 0 \Rightarrow x(4 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Como pide el recinto en el intervalo $[0, 2]$ no incluimos el valor -2 .

Las funciones no se cortan en dicho intervalo, solo en los extremos. Veamos cual es mayor viéndolo en $x = 1$.

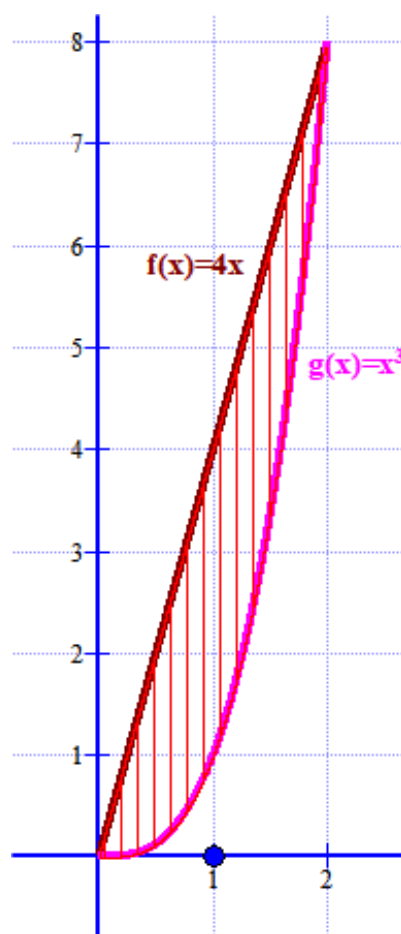
$f(1) = 4$ y $g(1) = 1^3 = 1$. Luego $f(x) \geq g(x)$.

$$\text{Área} = \int_0^2 4x - x^3 dx =$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 =$$

$$= \left[2(2)^2 - \frac{2^4}{4} \right] - \left[2(0)^2 - \frac{0^4}{4} \right] =$$

$$= 8 - 4 = \boxed{4 \text{ u}^2}$$



E5.- Las notas de Matemáticas II de 500 alumnos presentados al examen de EBAU tienen una distribución normal con media 6,5 y desviación típica 2.

a) Calcule la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de 8 puntos.

(1 punto)

b) ¿Cuántos alumnos obtuvieron notas menores de 5 puntos?

(1 punto)

X = Puntuación en Matemáticas II. $X = N(6.5, 2)$

a) Nos piden calcular $P(X > 8)$.

$$P(X > 8) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 6,5}{2} > \frac{8 - 6,5}{2}\right) = P(Z > 0,75) =$$

$$= 1 - P(Z < 0,75) = 1 - 0,7734 = \boxed{0,2266}$$

b) Calculamos $P(X < 5)$.

$$P(X < 5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 6,5}{2} < \frac{5 - 6,5}{2}\right) = P(Z < -0,75) =$$

$$= 1 - P(Z < 0,75) = 1 - 0,7734 = 0,2266$$

Como son 500 alumnos $0,2266 \cdot 500 = 113,3$. Aproximadamente 113 alumnos.

OPCIÓN B

E1.- a) Encontrar los valores de k para que la matriz $A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea invertible. **(1 punto)**

b) Encontrar la inversa de A para $k=2$.

(1 punto)

a) Para que una matriz sea invertible debe tener determinante no nulo.

$$\text{En nuestro caso } |A| = \begin{vmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 2k - k + 2 + 2 + 2k - 4 = k^2 - k$$

Si igualamos a cero

$$|A| = 0 \Rightarrow k^2 - k = 0 \Rightarrow k(k-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=1 \end{cases}$$

La matriz es invertible cuando $k \neq 0$ y $k \neq 1$

b) Para $k=2$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa pues su determinante es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Utilizamos la fórmula $A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|}$.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t\right)}{2} = \frac{1}{2} \text{Adj}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E2.- Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi \equiv x + y + kz = 0$.

Encontrar m y k para que:

a) La recta r sea perpendicular al plano π .

(1 punto)

b) La recta r esté contenida en el plano π .

(1 punto)

a) La recta r es perpendicular al plano π cuando el vector director de recta y normal del plano son paralelos (coordenadas proporcionales).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (m, 2, 4) \\ \vec{n} = (1, 1, k) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r // \vec{n} \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{2}{1} = \frac{4}{k} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{1} = \frac{2}{1} \Rightarrow \boxed{m=2} \\ \frac{2}{1} = \frac{4}{k} \Rightarrow \boxed{k=2} \end{cases}$$

b) Para que la recta r esté contenida en el plano π deben de ser el vector director de la recta y normal del plano perpendiculares (su producto escalar debe valer 0) y además el punto $P(1,1,1)$ de la recta debe estar en el plano (debe cumplir su ecuación).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (m, 2, 4) \\ \vec{n} = (1, 1, k) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = (m, 2, 4) \cdot (1, 1, k) = 0 \Rightarrow m + 2 + 4k = 0$$

Y además

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + kz = 0 \\ P(1,1,1) \text{ está en el plano} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 1 + k = 0 \Rightarrow \boxed{k = -2}$$

Sustituyendo en la igualdad anterior:

$$\left. \begin{array}{l} m + 2 + 4k = 0 \\ k = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow m + 2 - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 6}$$

La recta r esté contenida en el plano π si $k = -2$ y $m = 6$.

E3.- Sea el polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ del cual sabemos que $f(0)=1$, $f(1)=0$ y que tiene extremos relativos en $x=0$ y $x=1$. Calcular a , b , c y d . **(2 puntos)**

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 1 \\ a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{d=1} \\ a+b+c+d=0 \end{array} \right\} \Rightarrow a+b+c+1=0$$

Además, como son extremos relativos su derivada debe ser cero en $x=0$ y en $x=1$.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ \text{Extremo en } x=0 \\ \text{Extremo en } x=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(0) = 0 \Rightarrow 3a(0)^2 + 2b(0) + c = 0 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 3a(1)^2 + 2b(1) + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{c=0} \\ 3a+2b+0=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3a+2b=0$$

Resolvamos el sistema formado por las dos ecuaciones que quedan.

$$\left. \begin{array}{l} a+b+c+1=0 \\ 3a+2b=0 \\ \boxed{c=0} \\ \boxed{d=1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+b+1=0 \\ 3a+2b=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=-b-1 \\ 3a+2b=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(-b-1)+2b=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3b-3+2b=0 \Rightarrow -b-3=0 \Rightarrow \boxed{b=-3} \Rightarrow \boxed{a=3-1=2}$$

La solución es $a=2$, $b=-3$, $c=0$ y $d=1$

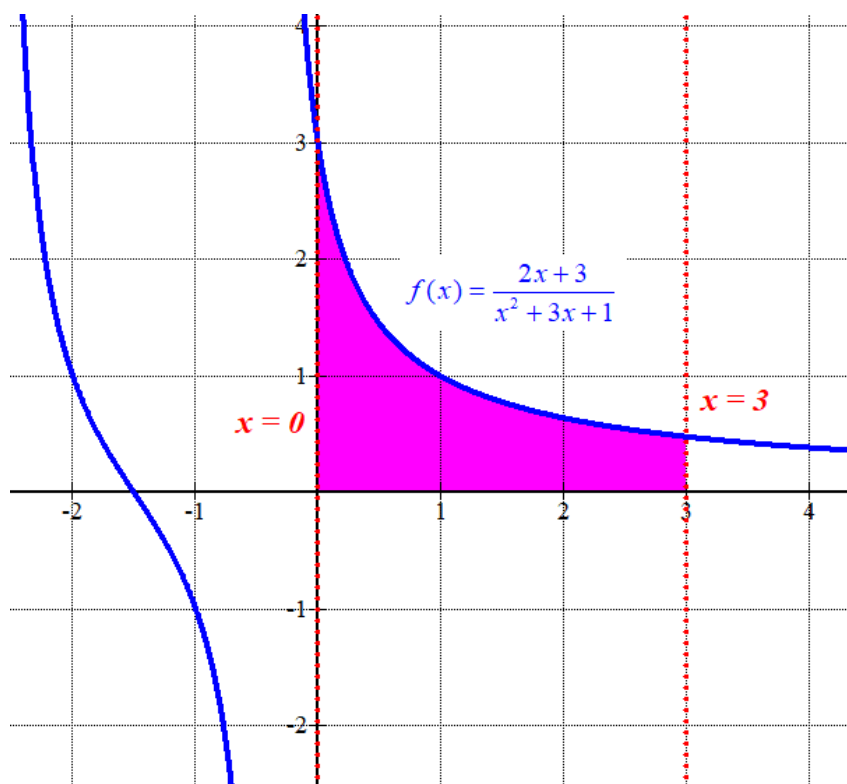
- E4.- a)** Sea $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. **(1 punto)**
- b)** Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{3 \cos(x) - 3}$. **(1 punto)**

a) Hallemos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX .

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x+3}{x^2+3x+1} = 0 \Rightarrow 2x+3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} = -1,5$$

Este valor está fuera del recinto, ya que $-1,5 < 0$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+1} dx = \left[\ln(x^2+3x+1) \right]_0^2 = \\ &= \left[\ln(2^2+3 \cdot 2+1) \right] - \left[\ln(0^2+3 \cdot 0+1) \right] = \ln 11 - \ln 1 = \ln 11 = \boxed{2,39 u^2} \end{aligned}$$



b) Calculamos el valor del límite.

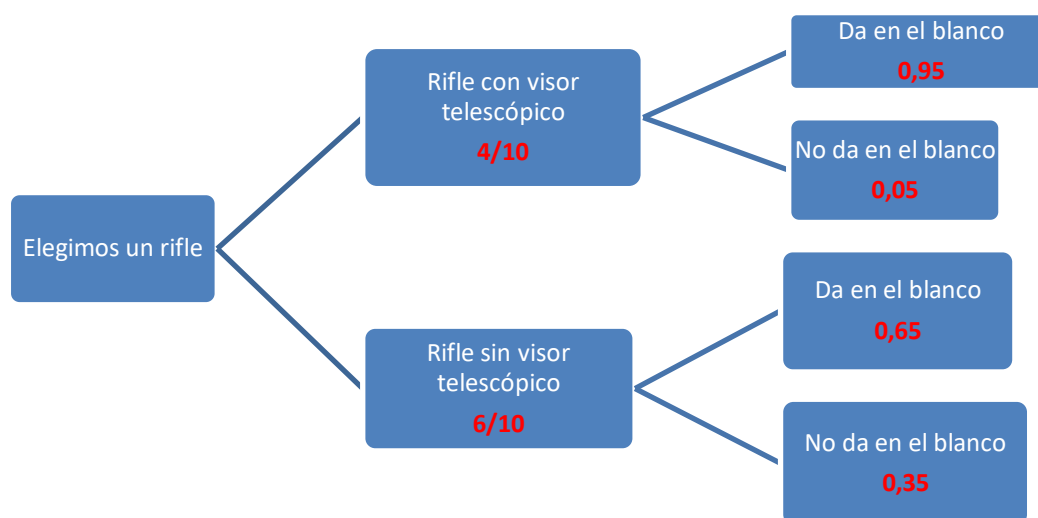
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{3 \cos(x) - 3} &= \frac{0}{0} = \{ \text{Re gla de L'Hôpital} \} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) + x \cos(x)}{-3 \operatorname{sen}(x)} = \frac{0}{0} = \\ &= \{ \text{Re gla de L'Hôpital} \} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + \cos(x) - x \operatorname{sen}(x)}{-3 \cos(x)} = \boxed{\frac{2}{-3}} \end{aligned}$$

E5.-En una competición de tiro olímpico hay 10 rifles, 4 con visor telescópico y 6 sin él. La probabilidad de que un tirador haga blanco con un rifle con visor telescópico es 0,95 y sin él es de 0,65.

a) Halla la probabilidad de hacer blanco escogiendo un rifle al azar. **(1 punto)**

b) Si el tirador hace blanco. ¿Es más probable que haya disparado con un rifle con visor telescópico o sin él? **(1 punto)**

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar la situación planteada.



a) $P(\text{Dar en el blanco}) = P(\text{Coger rifle con visor y dar en el blanco o Coger rifle sin visor y dar en el blanco}) = P(\text{Coger rifle con visor y dar en el blanco}) + P(\text{Coger rifle sin visor y dar en el blanco})$
 $= P(\text{Coger rifle con visor}) \cdot P(\text{Dar en el blanco con rifle con visor}) + P(\text{Coger rifle sin visor}) \cdot P(\text{Dar en el blanco con rifle con visor}) = 0,4 \cdot 0,95 + 0,6 \cdot 0,65 = 0,77$

b) No está claro porque con visor se acierta más pero hay menos rifles con visor. Calculemos la probabilidad de que lo haya hecho con rifle con visor.

$$P(\text{Coger rifle con visor} / \text{Da en el blanco}) = \frac{P(\text{Coger rifle con visor} \cap \text{Da en el blanco})}{P(\text{Da en el blanco})} =$$

$$= \frac{0,4 \cdot 0,95}{0,77} = 0,49 = 49 \%$$

Hay un 49 % de probabilidades de haber utilizado rifle con visor y 51 % de haber utilizado rifle sin visor.

Si el tirador ha hecho blanco es más probable que haya disparado con un rifle sin visor.

EBAU Extraordinaria 2018

	Evaluación de Bachillerato para acceder a estudios universitarios Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	--	-----------------------	--

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada uno de los ejercicios se puntuará sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- Tres números x, y, z cumplen lo siguiente:

- El primero de ellos, x , es la suma de los otros dos.
- El segundo, y , es la mitad del primero más el triple del tercero.

a) Demostrar que hay infinitos números que cumplen estas condiciones, encontrando una expresión general de la solución. **(1,5 puntos)**

b) Encontrar tres números concretos que cumplan estas condiciones. **(0,5 puntos)**

E2.- Dados el plano $\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

a) Calcular el punto de intersección del plano π y de la recta r . **(1 punto)**

b) Encontrar la ecuación de la recta s contenida en el plano π y que corta perpendicularmente a r . **(1 punto)**

E3.- Sea la función $f(x) = \frac{1}{x} + ax + b$

a) Encontrar a y b para que la función tenga un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{1}{2}, 6\right)$. **(1 punto)**

b) Suponiendo que $a = 4$ y $b = 2$, estudia su continuidad y, en el caso de tenerlas, sus asíntotas. **(1 punto)**

E4.- Sea la función $f(x) = \sin x$

a) Encontrar las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)$ en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$.
Encontrar el punto en que se cortan ambas rectas tangentes. **(1 punto)**

b) Hallar el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas de ecuaciones:
 $y = x$ e $y = -x + \pi$. **(1 punto)**

E5.- Se lanzan tres monedas al aire:

a) Halla el espacio muestral. **(1 punto)**

b) Halla la probabilidad de:

- i) Obtener más caras que cruces. ii) Obtener las mismas caras que cruces. (1 punto)

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Discutir, según los valores de k , cuándo A tiene inversa y calcularla para $k=2$. (1 punto)
 b) Para $k=2$, resolver la siguiente ecuación matricial: $AX + B = AB$. (1 punto)

E2.- Dados el plano $\pi \equiv ax + y - z + b = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

- a) Encontrar a y b para que la recta este contenida en el plano. (1 punto)
 b) ¿Existen valores a y b para que la recta sea perpendicular al plano? Razonar la posible respuesta negativa o encontrarlos en su caso. (1 punto)

E3.- De todos los rectángulos de perímetro 40 cm encontrar el que tiene la diagonal de menor longitud. (2 puntos)

E4.- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - \operatorname{sen} x}{e^x + x}$. (1 punto)

b) Encontrar el área del recinto limitado por las funciones $f(x) = |x| - 1$ y $g(x) = 1 - x^2$. (1 punto)

E5.- El diámetro interior de un anillo se distribuye normalmente con una media de 10 cm y una desviación típica de 0,03.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo tenga un diámetro mayor de 10,075? (1 punto)
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo tenga un diámetro entre 9,97 y 10,03? (1 punto)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

E1.- Tres números x , y , z cumplen lo siguiente:

- El primero de ellos, x , es la suma de los otros dos.
- El segundo, y , es la mitad del primero más el triple del tercero.

a) Demostrar que hay infinitos números que cumplen estas condiciones, encontrando una expresión general de la solución. **(1,5 puntos)**

b) Encontrar tres números concretos que cumplan estas condiciones. **(0,5 puntos)**

a) Por la información proporcionada los tres números pedidos deben cumplir el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x = y + z \\ y = \frac{x}{2} + 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = y + z \\ 2y = x + 6z \end{array} \right\}$$

Podemos resolver el sistema y hallar sus soluciones.

$$\left. \begin{array}{l} x = y + z \\ 2y = x + 6z \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = y + z + 6z \Rightarrow \boxed{y = 7z} \Rightarrow \boxed{x = 7z + z = 8z}$$

Las soluciones del problema son $x = 8t$; $y = 7t$; $z = t$. Siendo $t \in \mathbb{R}$.

Los valores que podemos darle a “ t ” son infinitos y por tanto las soluciones del problema planteado son infinitas.

b) Le damos a “ t ” un valor concreto y obtenemos una de las infinitas soluciones:

$$t = 1 \Rightarrow x = 8 \cdot 1 = 8; \quad y = 7 \cdot 1 = 7; \quad z = 1. \text{ Una solución es } x = 8; y = 7; z = 1$$

Un ejemplo de números que cumplen lo pedido son 1, 7 y 8.

E2.- Dados el plano $\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

a) Calcular el punto de intersección del plano π y de la recta r . **(1 punto)**

b) Encontrar la ecuación de la recta s contenida en el plano π y que corta perpendicularmente a r . **(1 punto)**

a) Expresamos la recta r en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ x - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow (-y - z) - y + z = 2 \Rightarrow -2y = 2 \Rightarrow \boxed{y = -1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -(-1) - z = 1 - z} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 - z \\ y = -1 \\ z = z \end{cases}$$

La intersección de la recta r con el plano π se deduce al sustituir las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación de π :

$$\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow 2(1 - t) + (-1) + t - 3 = 0 \Rightarrow 2 - 2t - 1 + t - 3 = 0 \Rightarrow -t - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - (-2) = 3 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(3, -1, -2)}$$

El punto de intersección tiene coordenadas $P(3, -1, -2)$.

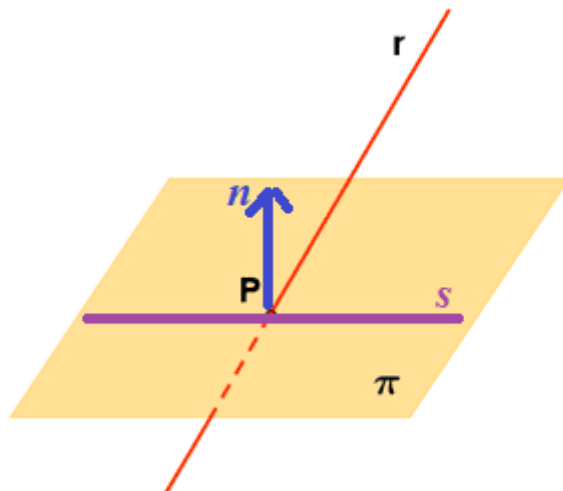
OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Podría haberse determinado las coordenadas (x, y, z) del punto P resolviendo el sistema formado por la ecuación general del plano y las ecuaciones implícitas de la recta:

$$\begin{cases} 2x + y + z - 3 = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z - 3 = 0 \\ x = -y - z \\ x - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(-y - z) + y + z - 3 = 0 \\ -y - z - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y - z - 3 = 0 \\ -2y = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y - z - 3 = 0 \\ \boxed{y = -1} \end{cases} \Rightarrow +1 - z - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{-2 = z} \Rightarrow \boxed{x = -(-1) - (-2) = 3} \Rightarrow \boxed{P(3, -1, -2)}$$

- b) La recta s está contenida en el plano π , luego su vector director, $\vec{v}_s$, es perpendicular al vector normal al plano, $\vec{n} = (2, 1, 1)$. También es perpendicular a la recta r , por lo que $\vec{v}_s$ es, a su vez, perpendicular al vector director de r , $\vec{v}_r = (-1, 0, 1)$.



Por todo lo anterior nos sirve como vector director de la recta s el producto vectorial de $\vec{n} = (2, 1, 1)$ y $\vec{v}_r = (-1, -1, 1)$.

$$\vec{v}_s \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i - j + k - 2j = i - 3j + k = (1, -3, 1)$$

Como la recta s corta a la recta r el punto P debe pertenecer a la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = \vec{v}_r \times \vec{n} = (1, -3, 1) \\ P(3, -1, -2) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = -2 + t \end{cases} \text{ Siendo } t \in \mathbb{R}$$

E3.- Sea la función $f(x) = \frac{1}{x} + ax + b$

a) Encontrar a y b para que la función tenga un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{1}{2}, 6\right)$. **(1 punto)**

b) Suponiendo que $a = 4$ y $b = 2$, estudia su continuidad y, en el caso de tenerlas, sus asíntotas. **(1 punto)**

a) La función presenta un mínimo relativo cuando $x = 1/2$, por lo que ha de cumplirse que la derivada se anule en dicho valor $\rightarrow f'(1/2) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} + ax + b \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} + a \\ f'(x) &= -\frac{1}{x^2} + a \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \left\{ \Rightarrow -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + a = 0 \Rightarrow -4 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 4} \right.$$

Teniendo en cuenta que la gráfica de la función pasa por el punto $\left(\frac{1}{2}, 6\right)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} + 4x + b \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= 6 \end{aligned} \left\{ \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} + 4 \cdot \frac{1}{2} + b = 6 \Rightarrow 2 + 2 + b = 6 \Rightarrow \boxed{b = 2} \right.$$

Los valores buscados son $a = 4$ y $b = 2$.

Se comprueba que en $x = 1/2$ hay, efectivamente, un mínimo, evaluando el signo de $f''(1/2)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 4 = -x^{-2} + 4 \Rightarrow f''(x) = +2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 16 > 0$$

b) La función queda $f(x) = \frac{1}{x} + 4x + 2$.

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$, ya que en $x = 0$ la función no está definida.

En consecuencia: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical. $x = a$

Evaluamos el límite de la función cuando $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} + 4x + 2 = \frac{1}{0^-} + 0 + 2 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + 4x + 2 = \frac{1}{0^+} + 0 + 2 = +\infty \end{cases}$$

La función presenta una asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntota horizontal. $y = b$

Evalúamos los límites infinitos de la función:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 4x + 2 = \frac{1}{+\infty} + \infty + 2 = 0 + \infty + 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + 4x + 2 = \frac{1}{-\infty} - \infty + 2 = 0 - \infty + 2 = -\infty$$

No presenta asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 4x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 4 + \frac{2}{x} = \frac{1}{\infty^2} + 4 + \frac{2}{\infty} = 0 + 4 + 0 = 4$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{x} + \cancel{4x} + 2 \right) - \cancel{4x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 2 \right) = \frac{1}{\infty} + 2 = 0 + 2 = 2$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = 4x + 2$

E4.- Sea la función $f(x) = \operatorname{sen} x$

a) Encontrar las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)$ en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$.
Encontrar el punto en que se cortan ambas rectas tangentes. **(1 punto)**

b) Hallar el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas de ecuaciones:

$$y = x \text{ e } y = -x + \pi.$$

(1 punto)

a) La recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en un punto (x_0, y_0) viene dada por la expresión $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Como $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = \cos x$. La recta tangente a la gráfica de f cuando $x = 0$ es:

$$\left. \begin{array}{l} y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \\ x_0 = 0 \\ y_0 = f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \\ f'(x_0) = f'(0) = \cos 0 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x}$$

Y la recta tangente a la gráfica de f cuando $x = \pi$ es:

$$\left. \begin{array}{l} y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \\ x_0 = \pi \\ y_0 = f(\pi) = \operatorname{sen} \pi = 0 \\ f'(x_0) = f'(\pi) = \cos \pi = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = -1(x - \pi) \Rightarrow \boxed{y = -x + \pi}$$

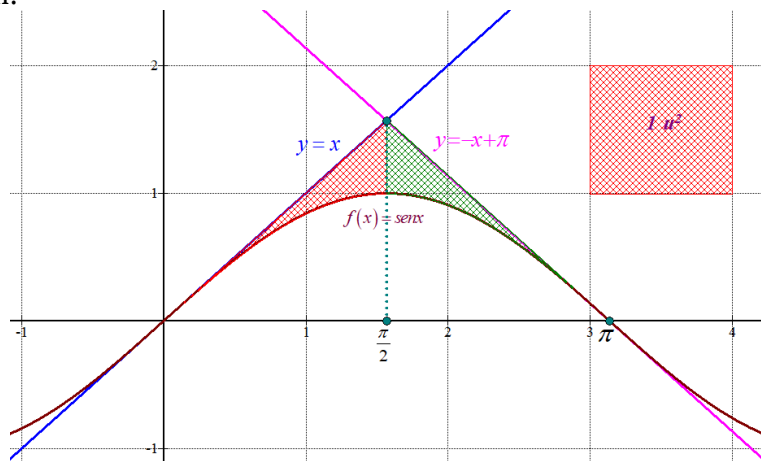
Las rectas $y = x$ (tangente a la gráfica de f en $x = 0$) e $y = -x + \pi$ (tangente a la gráfica de f en $x = \pi$) se cortan en:

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ y = -x + \pi \end{array} \right\} \Rightarrow x = -x + \pi \Rightarrow 2x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

b) Averiguamos donde corta la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \operatorname{sen} x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases}$$

Se trata de calcular el área del recinto que aparece de color verde y naranja en la siguiente representación:



Las rectas $y = x$ (tangente a la gráfica de f en $x = 0$) e $y = -x + \pi$ (tangente a la gráfica de f en $x = \pi$) se cortan en $x = \frac{\pi}{2}$.

El área pedida se calcula como la suma de dos integrales definidas:

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x - \operatorname{sen} x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -x + \pi - \operatorname{sen} x dx = \left[\frac{x^2}{2} + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{x^2}{2} + \pi x + \cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\
 &= \left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] - \left[\frac{0^2}{2} + \cos 0 \right] + \left[-\frac{\pi^2}{2} + \pi \cdot \pi + \cos \pi \right] - \left[-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \pi \left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \\
 &= \frac{\pi^2}{8} + 0 - 0 - 1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - 1 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} - 0 = \\
 &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} + \cancel{\pi^2} - \cancel{\frac{\pi^2}{2}} - \cancel{\frac{\pi^2}{2}} - 2 = \boxed{\frac{\pi^2}{4} - 2 \approx 0.46 u^2}
 \end{aligned}$$

E5.- Se lanzan tres monedas al aire:

a) Halla el espacio muestral.

(1 punto)

b) Halla la probabilidad de:

i) Obtener más caras que cruces. **ii)** Obtener las mismas caras que cruces.

(1 punto)

a) Llamamos $C = \{\text{Sacar cara al lanzar una moneda}\}$ y $X = \{\text{Sacar cruz al lanzar una moneda}\}$.

$$E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$$

b)

i. Obtenemos más caras que cruces en los 4 sucesos elementales: CCC, CCX, CXC, XCC.

Teniendo en cuenta la Ley de Laplace:

$$P(\text{Más caras que cruces}) = \frac{\text{Nº de casos en los que salen más caras que cruces}}{\text{Nº de casos posibles}} = \frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

ii. No hay ningún suceso elemental en el que salga el mismo número de caras que cruces, por lo que este es un suceso imposible y su probabilidad es cero.

$$P(\text{Mismas caras que cruces}) = \boxed{0}$$

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Discutir, según los valores de k , cuándo A tiene inversa y calcularla para $k=2$. **(1 punto)**

b) Para $k=2$, resolver la siguiente ecuación matricial: $AX + B = AB$. **(1 punto)**

a) Para que una matriz A tenga inversa, debe cumplirse que $|A| \neq 0$. Así que evaluamos el valor de $|A|$ en función del parámetro k :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix} = k + 0 + 0 - 1 - 0 - 0 = k - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$$

Por lo que la matriz A tiene inversa cuando k es cualquier valor distinto de 1.

Para $k = 2$ existe la inversa y la calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{2-1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) Despejamos X en la ecuación matricial $AX + B = AB$

$$AX + B = AB \Rightarrow AX = AB - B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}AB - A^{-1}B \Rightarrow X = B - A^{-1}B$$

Sustituimos los valores de cada matriz y resolvemos.

$$X = B - A^{-1}B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2-1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1+1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

E2.- Dados el plano $\pi \equiv ax + y - z + b = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

- a)** Encontrar a y b para que la recta este contenida en el plano. **(1 punto)**
b) ¿Existen valores a y b para que la recta sea perpendicular al plano? Razonar la posible respuesta negativa o encontrarlos en su caso. **(1 punto)**

- a) La recta r pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y su vector director es $\vec{v}_r = (1, -1, 1)$. Para que r esté contenida en el plano π , el vector $\vec{v}_r$ debe ser perpendicular al vector normal al plano, $\vec{n} = (a, 1, -1)$ y por ello su producto escalar debe ser nulo:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (1, -1, 1)(a, 1, -1) = 0 \Rightarrow a - 1 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Además, también ha de cumplirse que el punto P de r pertenezca al plano π :

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y - z + b = 0 \\ P(1, 2, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 2 - 3 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Expresamos r en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Si hacemos $\lambda = 1$, obtenemos otro punto Q de la recta: $Q(2, 1, 4)$.

Para que r pertenezca al plano $\pi \equiv ax + y - z + b = 0$ los puntos P y Q deben pertenecer a dicho plano y satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv ax + y - z + b = 0 \\ P(1, 2, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow a + 2 - 3 + b = 0 \Rightarrow \boxed{a + b = 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv ax + y - z + b = 0 \\ Q(2, 1, 4) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + 1 - 4 + b = 0 \Rightarrow \boxed{2a + b = 3}$$

Resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones:

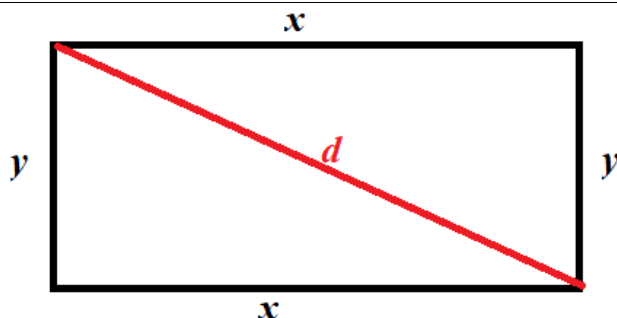
$$\left. \begin{array}{l} a + b = 1 \\ 2a + b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 1 - a \\ 2a + b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + 1 - a = 3 \Rightarrow \boxed{a = 2} \Rightarrow \boxed{b = 1 - 2 = -1}$$

- b) Si la recta r fuese perpendicular al plano π , el vector director de r , $\vec{v}_r = (1, -1, 1)$, sería proporcional al vector normal de π , $\vec{n} = (a, 1, -1)$. Para ello:

$$\frac{1}{a} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Es decir, cualquier plano de la forma $\pi \equiv -x + y - z + b = 0$ será perpendicular a la recta r , sea cual sea el valor de b (hay infinitos planos, paralelos entre sí, dependiendo del valor que demos a b , que serán perpendiculares a r).

E3. De todos los rectángulos de perímetro 40 cm encontrar el que tiene la diagonal de menor longitud. **(2 puntos)**



Sea “ x ” la base del rectángulo, “ y ” su altura y “ d ” la longitud de su diagonal (todas en cm). Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Teniendo en cuenta que el perímetro del rectángulo debe ser 40 cm:

$$2x + 2y = 40 \Rightarrow x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$$

Sustituyendo en la expresión de la diagonal, se obtiene una expresión que sólo es función de x :

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (20 - x)^2} = \sqrt{x^2 + (400 - 40x + x^2)} = \sqrt{2x^2 - 40x + 400}$$

Como queremos calcular las dimensiones del rectángulo que hacen que su diagonal sea mínima, debemos minimizar la función $d(x)$, para lo cual se deriva e iguala a cero:

$$d(x) = \sqrt{2x^2 - 40x + 400} \Rightarrow d'(x) = \frac{4x - 40}{2\sqrt{2x^2 - 40x + 400}} = \frac{2x - 20}{\sqrt{2x^2 - 40x + 400}}$$

$$d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x - 20}{\sqrt{2x^2 - 40x + 400}} = 0 \Rightarrow 2x - 20 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 10}$$

Siendo la longitud de la base del rectángulo de 10 cm, la altura debe ser:

$$x = 20 \Rightarrow y = 20 - 10 = 10$$

Conviene comprobar que en $x = 10$, efectivamente, aparece un mínimo relativo en la función $d(x)$. Para ello, evaluamos el signo de $d'(x)$ antes y después de $x = 10$.

- En $(0, 10)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $d'(5) = \frac{10 - 20}{\sqrt{2 \cdot 5^2 - 40 \cdot 5 + 400}} = -\frac{10}{\sqrt{250}} < 0$. La función decrece en $(0, 10)$
- En $(10, +\infty)$ tomamos $x = 15$ y la derivada vale $d'(15) = \frac{30 - 20}{\sqrt{2 \cdot 15^2 - 40 \cdot 15 + 400}} = \frac{10}{\sqrt{250}} > 0$. La función crece en $(10, +\infty)$

La función presenta un mínimo en $x = 10$.

La diagonal tiene longitud mínima en un rectángulo de base y altura de 10 cm (un cuadrado).

E4. a) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - \operatorname{sen} x}{e^x + x}$. (1 punto)

b) Encontrar el área del recinto limitado por las funciones $f(x) = |x| - 1$ y $g(x) = 1 - x^2$. (1 punto)

a) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - \operatorname{sen} x}{e^x + x} = \frac{3e^{+\infty} - \operatorname{sen}(+\infty)}{e^{+\infty} + \infty} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - \cos x}{e^x + 1} = \frac{3e^{+\infty} - \cos(+\infty)}{e^{+\infty} + 1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x + \operatorname{sen} x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x}{e^x} + \frac{\operatorname{sen} x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{\operatorname{sen} x}{e^x} = 3 + \frac{\operatorname{sen}(+\infty)}{e^{+\infty}} = 3 + \frac{\operatorname{sen}(+\infty)}{+\infty} = 3 + 0 = \boxed{3}$$

Hemos utilizado que la función seno es una función que toma valores entre -1 y 1 , mientras que la función exponencial crece cuando $x \rightarrow +\infty$.

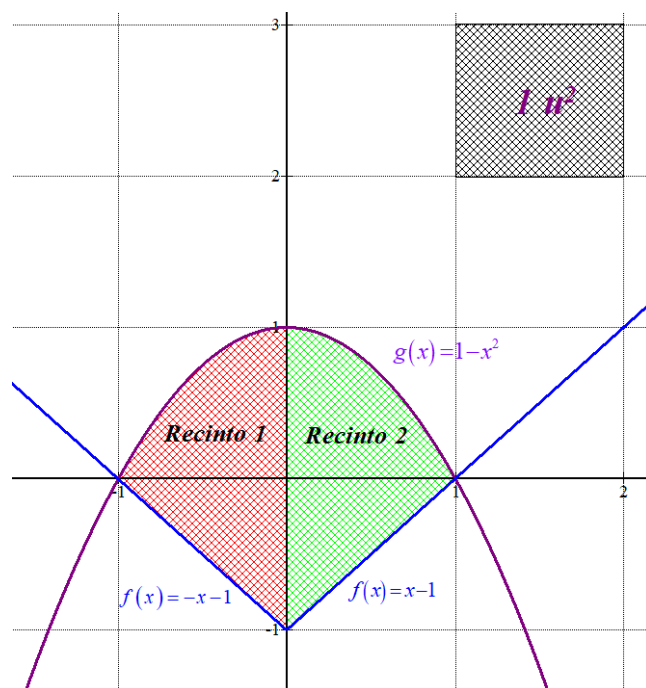
$$\left. \begin{array}{l} -1 < \operatorname{sen} x < 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = e^{+\infty} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x} = \frac{\operatorname{sen}(+\infty)}{+\infty} = \frac{\text{acotado}}{+\infty} = 0$$

b) Redefinimos la función $f(x)$ como $f(x) = |x| - 1 = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

La gráfica de $f(x)$ está formada por dos rectas: la primera, cuando x es negativa, que es decreciente; la segunda, cuando x es positiva, que es creciente. Ambas se cortan en el punto $(0, -1)$.

Por su parte, la función $g(x)$ es una parábola, cuyo vértice es un máximo, en el punto $(0, 1)$, y que corta al eje de las x en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

Con esta información podemos esbozar sus gráficas e identificar el recinto cuya área hay que calcular:



El área pedida es la suma de las áreas del recinto 1 y 2 de la figura. Como ambos recintos tienen el mismo valor de área calculamos la del recinto 1 y el área pedida es el doble de la obtenida.

$$\text{Área recinto 1} = \int_{-1}^0 (1-x^2) - (-x-1) dx = \int_{-1}^0 1-x^2+x+1 dx = \int_{-1}^0 -x^2+x+2 dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 = \left[-\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 0 \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) \right] = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \boxed{\frac{7}{6} u^2}$$

El área pedida es $\boxed{\text{Área} = 2 \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{3} \approx 2.33 u^2}$

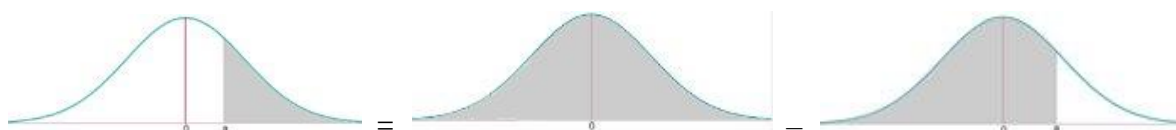
E5.- El diámetro interior de un anillo se distribuye normalmente con una media de 10 cm y una desviación típica de 0,03.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo tenga un diámetro mayor de 10,075? **(1 punto)**
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo tenga un diámetro entre 9,97 y 10,03? **(1 punto)**

a) El diámetro interior de un anillo es una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 10$ cm y desviación típica $\sigma = 0.03$ cm: $X \sim N(10; 0.03)$

Se nos pide la probabilidad $P(X > 10.075)$.

$$P(X > 10.075) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{10.075 - 10}{0.03}\right) = P(Z > 2.5) = \dots$$



$$\dots = 1 - P(Z < 2.5) = 1 - 0.9938 = \boxed{0.0062}$$

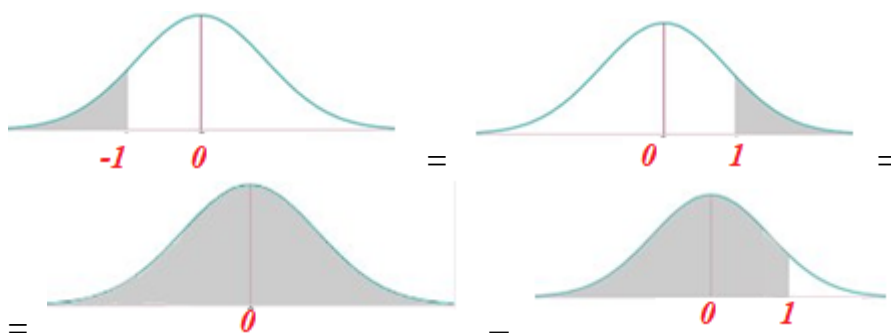
	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5832
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7611
0.8	0.7881	0.7910
0.9	0.8159	0.8188
1.0	0.8413	0.8438
1.1	0.8643	0.8665
1.2	0.8849	0.8869
1.3	0.9032	0.9049
1.4	0.9192	0.9207
1.5	0.9332	0.9345
1.6	0.9452	0.9463
1.7	0.9544	0.9554
1.8	0.9611	0.9624
1.9	0.9671	0.9684
2.0	0.9772	0.9778
2.1	0.9821	0.9826
2.2	0.9861	0.9864
2.3	0.9893	0.9896
2.4	0.9918	0.9920
2.5	0.9938	0.9940
2.6	0.9953	0.9955
2.7	0.9965	0.9966

b) En este caso, se nos pide la probabilidad $P(9.97 < X < 10.03)$. Tipificando de nuevo la variable:

$$P(9.97 < X < 10.03) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{9.97 - 10}{0.03} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{10.03 - 10}{0.03}\right) =$$

$$= P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) = P(Z < 1) - P(Z > 1) =$$

$$= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 1)) = 0.8413 - (1 - 0.8413) = \boxed{0.6826}$$



	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5832
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7611
0.8	0.7881	0.7910
0.9	0.8159	0.8188
1.0	0.8413	0.8438
1.1	0.8643	0.8665
1.2	0.8849	0.8869

EBAU Ordinaria 2018

	Evaluación de Bachillerato para acceder a estudios universitarios Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	--	------------------------------	---

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 4 primeros ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2,25 puntos, y el quinto ejercicio sobre un máximo de 1 punto. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ :

$$\begin{cases} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

(1,2 puntos)

b) Resolverlo para $\lambda = 1$.

(0,8 puntos)

E2.- Determinar la recta s que es simétrica de $r \equiv x + 2 = y = z - 2$, respecto del plano

$$\pi \equiv x - z + 2 = 0.$$

(2 puntos)

E3. Dada la función $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que $f(x)$ se anula.

(2 puntos)

E4. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x \cos x$ y el eje de las x ,

cuando x pertenece al intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(2 puntos)

E5.- a) Se tira una moneda tres veces. Calcular la probabilidad de que, sin tener en cuenta el orden, salgan una cara y dos cruces.

(1 punto)

b) Una persona elige al azar, sin verlas, dos cartas de una baraja española (de 40 cartas, de las cuales 10 son de cada uno de los 4 palos: oros, copas, espadas y bastos). Calcular la probabilidad de que ninguna de las dos cartas elegidas sea de copas.

(1 punto)

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, calcúlense a y b para que se verifiquen $|MA|=2$ y $|M+B|=3$, donde se está usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz. **(2 puntos)**

E2.- Dada la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y+1}{2} = z - 1$ y el plano $\pi \equiv x - y + z = 0$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π . **(0,8 puntos)**

b) Hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de r que π . **(1,2 puntos)**

E3. Dada la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$, determínese su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica. **(2 puntos)**

E4. a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(1+x)}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ **(1 punto)**

E5.- La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país. **(2 puntos)**

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

E1.- a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ :

$$\begin{cases} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

(1,2 puntos)

b) Resolverlo para $\lambda = 1$.

(0,8 puntos)

a) Recurriremos al teorema de Rouché–Frobenius para discutir el número de soluciones de este sistema. Así que comenzaremos por definir la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada con los términos independientes:

$$\text{Matriz de los coeficientes} \rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz ampliada} \rightarrow A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

A continuación, evaluamos el rango de A, en función de los valores de λ para los que $|A| = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 1 - 1 + \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - 2$$

$$\text{Si } |A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{2} = \begin{cases} = \frac{-1+3}{2} = 1 = \lambda \\ = \frac{-1-3}{2} = -2 = \lambda \end{cases}$$

Caso 1. Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2$ el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución (**Sistema Compatible Determinado**).

Caso 2. Si $\lambda = 1$ el determinante de A es cero por lo que su rango no es 3. Averiguamos el rango de A y de A/B en este valor concreto del parámetro. Utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \text{Fila 3ª - Fila 1ª} \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3ª} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{ccc|c} & \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\
 & \rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc|c} & \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Rango de A/B es 2} \\ \text{Rango de A es 2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

En este caso el rango de $A = \text{Rango de } A/B = 2 < 3 = \text{Número de incógnitas}$, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones (**Sistema Compatible Indeterminado**).

Caso 3. Si $\lambda = -2$ el determinante de A es cero por lo que su rango no es 3. Averiguamos el rango de A y de A/B en este valor concreto del parámetro. Utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc|c} & 2 \cdot \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a & & \\ 2 & 2 & -4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 2 & -3 & 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \\
 & \left\{ \begin{array}{ccc|c} & 2 \cdot \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a & & \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 3 & 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\
 & \rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc|c} & \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a & & \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Rango de A es 2} \\ \text{Rango de A/B es 3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

En este caso el rango de $A = 2 \neq 3 = \text{Rango de } A/B$, por lo que el sistema no tiene solución (**Sistema Incompatible**).

- b) Para $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado, por lo que debemos hallar la expresión de sus infinitas soluciones.

Como hemos visto en el caso 2 estudiado en el apartado anterior tenemos que la matriz ampliada

del sistema $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$ es equivalente a $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$.

Resolvemos el sistema a partir de esta matriz.

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{array} \right\}, \text{ siendo } t \in \mathbb{R}$$

E2.- Determinar la recta s que es simétrica de $r \equiv x+2 = y = z-2$, respecto del plano

$$\pi \equiv x - z + 2 = 0.$$

(2 puntos)

Estudiamos la posición relativa de la recta r y el plano π .

De la ecuación de $r \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-2}{1}$ deducimos que pasa por el punto $P_r = (-2, 0, 2)$ y su vector director es $\vec{v}_r = (1, 1, 1)$.

De la ecuación de $\pi \equiv x - z + 2 = 0$ obtenemos su vector normal $\vec{n} = (1, 0, -1)$. Es fácil comprobar que el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1, 1, 1)(1, 0, -1) = 1 + 0 - 1 = 0$$

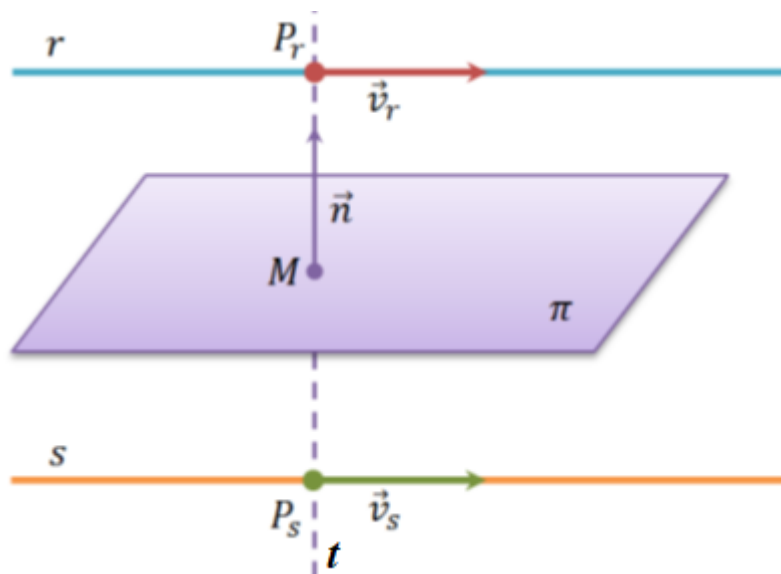
Por lo que recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Averiguamos si el punto $P_r = (-2, 0, 2)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P_r = (-2, 0, 2) \in \pi? \\ \pi \equiv x - z + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} -2 - 2 + 2 = 0? \Rightarrow \text{¡Falso!}$$

La recta no está contenida en el plano. Recta y plano son paralelos.

La recta s buscada es la del dibujo.



La recta s buscada es paralela a la recta r y por tanto debe tener el mismo vector director.

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r = (1, 1, 1)$$

Solo nos falta conocer el punto P_s por el que debe pasar la recta s buscada.

Para ello hallamos la recta t perpendicular al plano π que pasa por el punto $P_r = (-2, 0, 2)$, luego hallamos el punto M de corte de recta t y plano π . Y por último el punto P_s es el punto simétrico de P_r respecto del punto M (el punto M es el punto medio del segmento que une los puntos P_r y P_s).

Ecuación de la recta t :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_t = \vec{n} = (1, 0, -1) \\ P_r = (-2, 0, 2) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

Punto de corte de recta t y plano π :

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - z + 2 = 0 \\ t \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + \lambda - (2 - \lambda) + 2 = 0 \Rightarrow -2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 1 = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow M(-1, 0, 1)$$

Hallo P_s como el punto simétrico de P_r respecto de M :

$$\overrightarrow{P_r M} = (-1, 0, 1) - (-2, 0, 2) = (1, 0, -1)$$

$$P_s = M + \overrightarrow{P_r M} = (-1, 0, 1) + (1, 0, -1) = (0, 0, 0)$$

La ecuación de la recta s es:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ P_s = (0, 0, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha, \text{ siendo } \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$$

E3. Dada la función $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que $f(x)$ se anula. **(2 puntos)**

Comenzamos calculando la derivada de la función $f(x)$:

$$f'(x) = 12x^3 + 3x^2$$

Obtenemos los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2(4x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Determinamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento evaluando el signo de $f'(x)$ antes, entre y después de estos valores de x :

- En $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

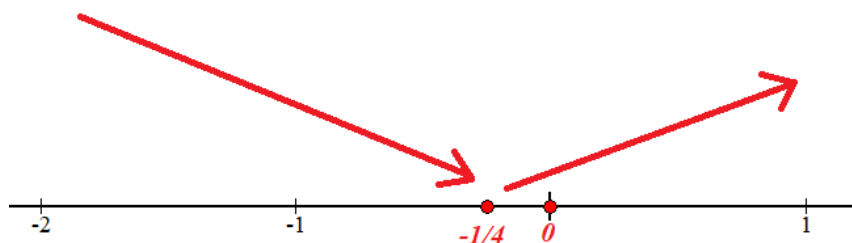
$$f'(-1) = 12(-1)^3 + 3(-1)^2 = -12 + 3 = -9 < 0. \text{ La función decrece en } \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$$

- En $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ tomamos $x = -\frac{1}{8}$ y la derivada vale $f'\left(-\frac{1}{8}\right) = 12\left(-\frac{1}{8}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{8}\right)^2 > 0$. La función crece en $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$

- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 12 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 = 15 > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$

Resumiendo: La función decrece en $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$ y crece en $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

La función se comporta como indica el gráfico:



Por la evolución del crecimiento y decrecimiento de la función se deduce que presenta un mínimo en $x = -\frac{1}{4}$. En $x = 0$ presentará un punto de inflexión.

Para determinar el número de puntos en los que $f(x)$ se anula recurriremos al teorema de Bolzano. En primer lugar, tendremos en cuenta que la función decrece hasta alcanzar el mínimo cuando

$$x = -\frac{1}{4}, \text{ y que } f\left(-\frac{1}{4}\right) = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^4 + \left(-\frac{1}{4}\right)^3 - 1 = -1.003 < 0 \text{ (negativo).}$$

Además, comprobamos que: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 + x^3 - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 = +\infty$ (positivo)

Como $f(x)$ es siempre continua y cambia de signo entre $-\infty$ y $-1/4$, entonces podemos asegurar que existe un valor $x = a$ para el cual $f(a) = 0$.

Además, sabemos que en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$ la función es siempre decreciente, lo cual nos permite garantizar que a es el único valor de x , perteneciente a dicho intervalo, en el cual la función se anula.

De la misma manera, razonaremos lo que ocurre cuando $x > -1/4$. Se comprueba que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^4 + x^3 - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^4 = +\infty \text{ (positivo)}$$

Así que $f(x)$ cambia de signo entre $-1/4$ y $+\infty$, por lo que existe un valor $x = b$ para el cual $f(b) = 0$. Como en el intervalo $(-1/4, +\infty)$ la función es siempre creciente, no existe otro valor de x en dicho intervalo, en el cual la función sea nula.

Resumiendo: La función se anula únicamente para dos valores de x : un valor $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$ y otro

valor $b \in \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$

E4. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x \cos x$ y el eje de las x , cuando x pertenece al intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **(2 puntos)**

Encontremos los puntos donde la gráfica de la función corta el eje de las x .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x \cos x \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La gráfica solo corta el eje de las x en los extremos del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, por lo que el área del recinto pedido se calcula con la integral definida de la función entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{Área} = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \right|$$

Resolvemos primero la integral indefinida.

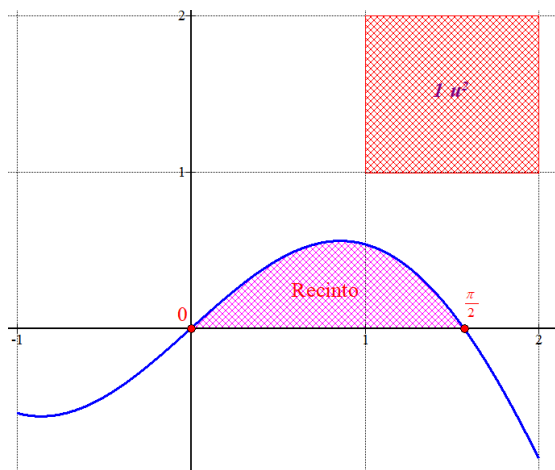
$$\int x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right\} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x - (-\cos x)$$

$$\boxed{\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + K}$$

Aplicándolo al cálculo del área:

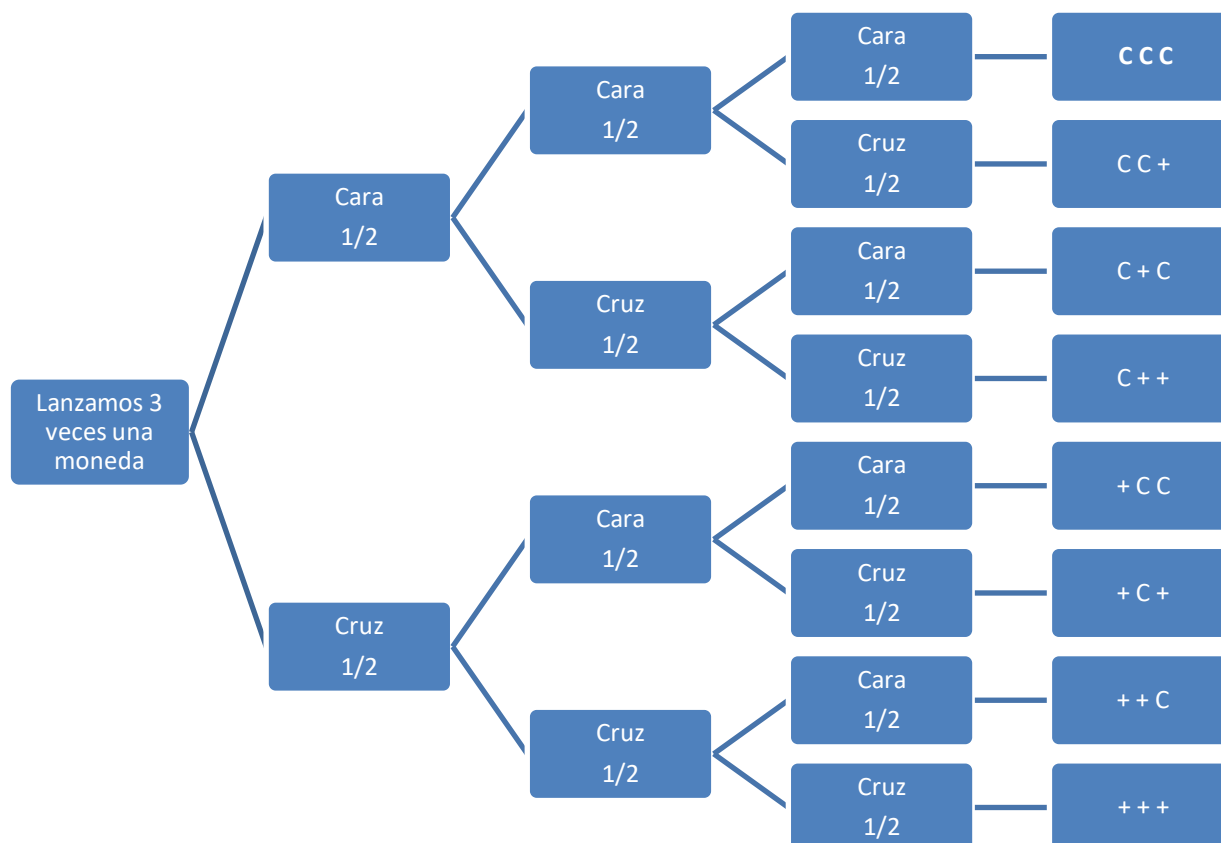
$$\text{Área} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = [x \sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right] - [0 \cdot \sin 0 + \cos 0] = \left[\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.57 \right] u^2$$

No es necesario dibujar la gráfica de la función y la región, pero lo hacemos para comprobar el resultado obtenido.



- E5.- a)** Se tira una moneda tres veces. Calcular la probabilidad de que, sin tener en cuenta el orden, salgan una cara y dos cruces. **(1 punto)**
- b)** Una persona elige al azar, sin verlas, dos cartas de una baraja española (de 40 cartas, de las cuales 10 son de cada uno de los 4 palos: oros, copas, espadas y bastos). Calcular la probabilidad de que ninguna de las dos cartas elegidas sea de copas. **(1 punto)**

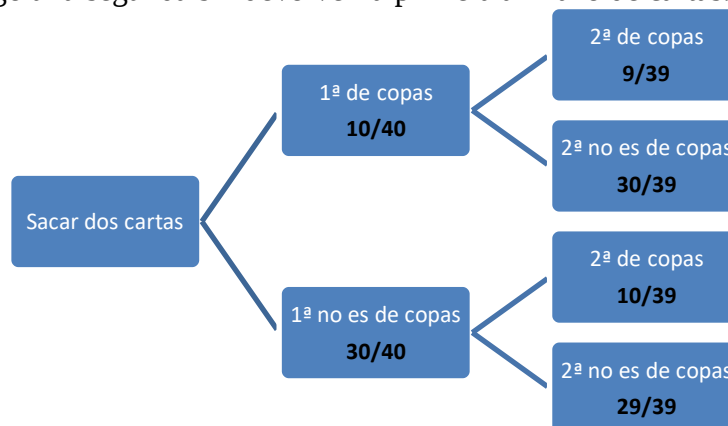
a) Hacemos un diagrama de árbol.



Una cara y dos cruces se obtiene con los resultados C++, +C+ y ++C, por lo que la probabilidad

pedida es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{8}}$

b) Realizamos un diagrama de árbol, teniendo en cuenta que elegir las dos cartas es como elegir una primera carta y luego una segunda sin devolver la primera al mazo de cartas.



$$P(\text{Ninguna de las dos cartas de copas}) = P(1^{\text{a}} \text{ no copas y } 2^{\text{a}} \text{ no copas}) = \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = \boxed{\frac{29}{52}}$$

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, calcúlese a y b para que se verifiquen $|MA|=2$ y $|M+B|=3$, donde se está usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz. **(2 puntos)**

En primer lugar, calculamos las matrices $M \cdot A$ y $M+B$:

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+5 \\ a+2b & 2a+5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ a+2b & 2a+5b \end{pmatrix}$$

$$M+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1+a & 1+b \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $|MA| = 2$ y $|M+B| = 3$:

$$\left. \begin{aligned} |MA| &= \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ a+2b & 2a+5b \end{vmatrix} = 6a+15b-7a-14b = -a+b \\ |MA| &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{-a+b=2}$$

$$\left. \begin{aligned} |M+B| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1+a & 1+b \end{vmatrix} = 2+2b-1-a = 1+2b-a \\ |M+B| &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1+2b-a=3 \Rightarrow \boxed{2b-a=2}$$

Resolvemos el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que se ha obtenido:

$$\left. \begin{aligned} -a+b &= 2 \\ 2b-a &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} b &= 2+a \\ 2b-a &= 2 \end{aligned} \Rightarrow 2(2+a)-a=2 \Rightarrow 4+2a-a=2 \Rightarrow \boxed{a=-2} \Rightarrow \boxed{b=2-2=0}$$

Los valores buscados son $a = -2$ y $b = 0$.

E2.- Dada la recta $r \equiv x-1 = \frac{y+1}{2} = z-1$ y el plano $\pi \equiv x-y+z=0$, se pide:

- a) Determinar la posición relativa de r y π . **(0,8 puntos)**
 b) Hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de r que π . **(1,2 puntos)**

a) La recta $r \equiv x-1 = \frac{y+1}{2} = z-1$ pasa por el punto $P(1, -1, 1)$ y su vector director es $\vec{v}_r = (1, 2, 1)$.

El plano $\pi \equiv x-y+z=0$ tiene como vector normal $\vec{n} = (1, -1, 1)$.

Para determinar la posición relativa de r y π , calculamos el producto escalar de $\vec{v}_r$ y $\vec{n}$:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1, 2, 1)(1, -1, 1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

Como el producto escalar es cero, necesariamente debe cumplirse que estos vectores son perpendiculares, lo que significa que r y π pueden ser paralelos o coincidentes.

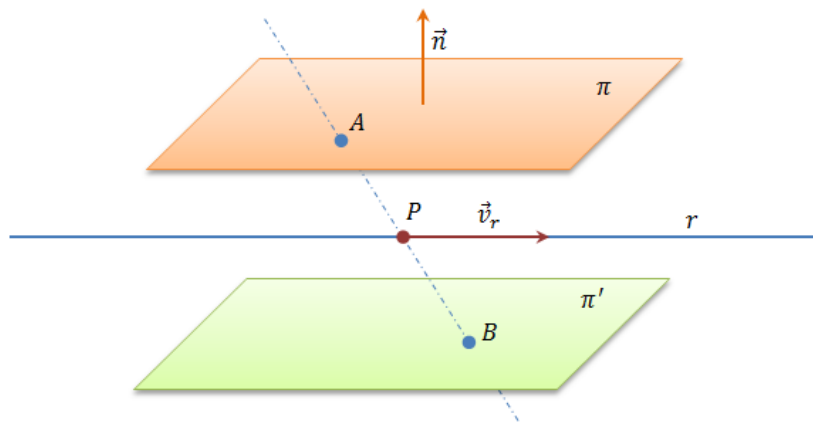
Comprobamos si el punto $P(1, -1, 1)$ de la recta pertenece al plano:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - y + z = 0 \\ \text{¿} P(1, -1, 1) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 1 - (-1) + 1 = 0? \Rightarrow \text{¿} 1 + 1 + 1 = 0? \Rightarrow \text{¡No es cierto!}$$

Por lo tanto, $P \notin \pi$ y podemos asegurar que r y π son paralelos.

- b) Un plano paralelo a π , que llamaremos π' , debe tener el mismo vector normal que π , por lo que su ecuación general será de la forma $\pi' \equiv x - y + z + D = 0$.

Para determinar el término D desconocido, debemos conocer un punto del plano π' . Este punto puede ser el punto simétrico de cualquier punto del plano π respecto del punto P , que pertenece a r :



Obtenemos un punto $A \in \pi \equiv x - y + z = 0$, por ejemplo ($x = 0$ e $y = 0$, entonces $z = 0$): $A(0, 0, 0)$

Hallamos el punto $B \in \pi'$, teniendo en cuenta que $P(1, -1, 1)$ es el punto medio entre $A(0, 0, 0)$ y $B(x, y, z)$:

$$(1, -1, 1) = \frac{(x, y, z) + (0, 0, 0)}{2} \Rightarrow (1, -1, 1) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2 \\ \frac{y}{2} = -1 \Rightarrow y = -2 \\ \frac{z}{2} = 1 \Rightarrow z = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(2, -2, 2)}$$

Por lo que el punto B tiene coordenadas $B(2, -2, 2)$.

El punto B debe pertenecer al plano π' , por lo que sustituimos sus coordenadas en la ecuación del plano π' :

$$\left. \begin{array}{l} \pi' = x - y + z + D = 0 \\ B(2, -2, 2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - (-2) + 2 + D = 0 \Rightarrow 2 + 2 + 2 + D = 0 \Rightarrow \boxed{D = -6}$$

Por tanto, la ecuación del plano π' buscado es $\pi' = x - y + z - 6 = 0$.

E3. Dada la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$, determínese su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica. **(2 puntos)**

Tenemos que nuestra función se puede expresar como $f(x) = x \cdot e^{-x} = \frac{x}{e^x}$

Dominio.

Como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ el dominio es $Dom f = \mathbb{R}$

Asíntotas.

Asíntotas verticales. $x = a$.

Como el dominio de la función es $\mathbb{R}$: No posee asíntotas verticales

Asíntotas horizontales. $y = b$.

Comprobamos si tiene asíntotas horizontales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{-x} = (-\infty) \cdot e^{-(-\infty)} = -\infty \cdot e^{+\infty} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$$

No hay asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

Consideramos la posibilidad de que exista una asíntota oblicua $y = mx + n$ cuando $x \rightarrow -\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \cdot e^{-x}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = e^{-(-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$$

No hay asíntota oblicua.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Para determinarlos, evaluamos el signo de la primera derivada de la función a lo largo de su dominio. Averiguamos donde se anula la derivada:

$$f(x) = x \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1 - x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(1 - x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Estudiemos el signo de la derivada antes y después de $x = 1$.

- En $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = e^{-0}(1 - 0) = 1 > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$.

- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = e^{-2}(1-2) = -e^{-2} < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$.

Extremos relativos.

El único candidato a extremo relativo es $x = 1$, ya que $f'(1) = 0$. Después de estudiar el crecimiento y el decrecimiento de la función, queda claro que para ese valor de x la función presenta un máximo.

Concavidad y convexidad.

Evaluamos el signo de la segunda derivada, para ello vemos donde se anula.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^{-x}(1-x) \Rightarrow f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(-1+x-1) \\ f''(x) &= e^{-x}(x-2) \\ f''(x) &= 0 \Rightarrow e^{-x}(x-2) = 0 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=2} \end{aligned}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = 2$.

- En $(-\infty, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = e^{-0}(0-2) = -2 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 2)$.
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada segunda vale $f''(3) = e^{-3}(3-2) = e^{-3} > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $(2, +\infty)$.

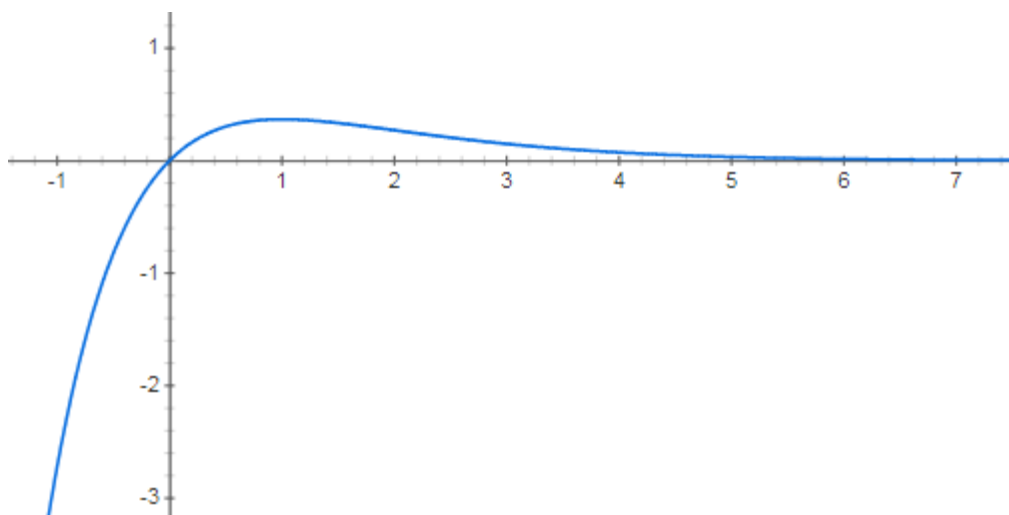
Por lo tanto: $f(x)$ es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 2)$ y convexa ($\cup$) en $(2, +\infty)$

Puntos de inflexión.

Hay un cambio de curvatura cuando $x = 2$, luego este el punto de inflexión es $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

Gráfica.

A partir del estudio de la función:



E4. a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(1+x)}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ **(1 punto)**

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(1+x)} = \frac{e^0 - \cos 0}{\ln(1+0)} = \frac{1-1}{\ln 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{\frac{1}{1+x}} = \frac{e^0 + \operatorname{sen} 0}{\frac{1}{1+0}} = \boxed{1}$$

b) Usamos el cambio de variable $t = \ln x$ para el cálculo de la integral.

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \ln x = t \rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \\ dx = x dt \end{array} \right\} = \int \frac{(t)^2}{\cancel{x}} \cancel{dx} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \boxed{\frac{(\ln x)^3}{3} + K}$$

E5.- La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país. **(2 puntos)**

La variable aleatoria IMC sigue una distribución normal de media $\mu = 26$ y desviación típica $\sigma = 6 \rightarrow \text{IMC} \sim N(26, 6)$

Para calcular la probabilidad $P(\text{IMC} > 35)$, tipificamos la variable:

$$P(\text{IMC} > 35) = P\left(\frac{\text{IMC} - \mu}{\sigma} > \frac{35 - 26}{6}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5)$$

Consultando la tabla de la $N(0, 1)$

	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186
1,0	0,8413	0,8438
1,1	0,8643	0,8665
1,2	0,8849	0,8869
1,3	0,9032	0,9049
1,4	0,9192	0,9207
1,5	0,9332	0,9345
1,6	0,9452	0,9463
1,7	0,9554	0,9564

$$P(\text{IMC} > 35) = 1 - P(Z < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

La proporción de obesos en la población es de 6.68 %.

EBAU Septiembre 2017

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	---	-----------------------	--

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- a) Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$. Estudiar, en función del parámetro a , cuando M posee inversa.

(0,5 puntos)

b) Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, calcular A^2 y A^{-1} .

(1,75 puntos)

E2.- a) Consideremos los puntos $P(-1, -4, 0)$, $Q(0, 1, 3)$, $R(1, 0, 3)$. Hallar el plano π que contiene a los puntos P , Q y R .

(1,25 puntos)

b) Calcular a para que el punto $S(3, a, 2)$, pertenezca al plano $\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0$.

(1 punto)

E3.- a) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, calcular a para que f sea derivable en $x = 0$.

(1 punto)

b) Hallar a , b y c para que la función $f(x) = ax^2 + b\sin x + c$ verifique $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 2$.

(1,25 puntos)

E4.- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{(x^2)}}{x}$

(1 punto)

b) Hallar el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 - 2$.

(1,25 puntos)

E5.- De una bolsa con 2 bolas blancas, 2 negras y 2 amarillas se extraen dos sin devolución (es decir, una vez extraída una bola no se vuelve a poner en la bolsa). Calcular la probabilidad de que las dos sean blancas.

(1 punto)

OPCIÓN B

E1.- a) Discutir según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

(1,25 puntos)

b) Resolverlo para $m = 1$.

(1 punto)

E2.- a) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,3,4)$ y es perpendicular al plano

$$\pi \equiv x + y + 2z + 4 = 0.$$

(1,25 puntos)

b) Calcular a para que las rectas $r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z - 2}{2}$, $s \equiv \frac{x - 1}{a} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 2}{3}$ sean perpendiculares.

(1 punto)

E3.- Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$. Calcular el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos. Esbozar su gráfica.

(2,25 puntos)

E4.- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{x^2}$.

(1,25 puntos)

b) Calcular $\int \ln(x) dx$.

(1 punto)

E5.- Se tiran al aire, simultáneamente, un dado (con forma cúbica) y una moneda. Teniendo en cuenta que los sucesos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que en el dado salga un 5 y de que en la moneda salga cara?

(1 punto)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

E1.- a) Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$. Estudiar, en función del parámetro a , cuando M posee inversa.

(0,5 puntos)

b) Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, calcular A^2 y A^{-1} .

(1,75 puntos)

a) Para que tenga inversa tiene que tener determinante no nulo.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a - 6$$

Iguálamos a cero.

$$|M| = 0 \Rightarrow a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6$$

Para cualquier valor de a distinto de 6 existe la inversa de la matriz M .

b)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+14 \\ 3+21 & 6+49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 16 \\ 24 & 55 \end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa comprobamos primero que el determinante de A es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 6 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- E2.- a)** Consideremos los puntos $P(-1, -4, 0)$, $Q(0, 1, 3)$, $R(1, 0, 3)$. Hallar el plano π que contiene a los puntos P, Q y R. **(1,25 puntos)**
- b)** Calcular a para que el punto $S(3, a, 2)$, pertenezca al plano $\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0$. **(1 punto)**

a) Los vectores directores del plano pueden ser:

$$\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 3) - (-1, -4, 0) = (1, 5, 3) \text{ y } \overrightarrow{PR} = (1, 0, 3) - (-1, -4, 0) = (2, 4, 3) .$$

Hallamos la ecuación del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pasa por } Q(0, 1, 3) \\ \overrightarrow{PQ} = (1, 5, 3) \\ \overrightarrow{PR} = (2, 4, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x + 6y - 6 + 4z - 12 - 10z + 30 - 3y + 3 - 12x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 3y - 6z + 15 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0}$$

b) Las coordenadas del punto S deben cumplir la ecuación del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0 \\ S(3, a, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + a - 4 + 5 = 0 \Rightarrow a + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

E3.- a) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, calcular a para que f sea derivable en $x = 0$.

(1 punto)

b) Hallar a , b y c para que la función $f(x) = ax^2 + b\sin x + c$ verifique $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 2$.

(1,25 puntos)

a) Hallamos la derivada de la función en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = 0$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + a) = a \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1$$

b) Calculamos la derivada primera y segunda de la función y aplicamos las condiciones que debe cumplir la función y sus derivadas.

$$f(x) = ax^2 + b\sin x + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b\cos x \Rightarrow f''(x) = 2a - b\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c=0} \\ f'(0) = 1 \Rightarrow 0 + b = 1 \Rightarrow \boxed{b=1} \\ f''(0) = 2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow \boxed{a=1} \end{cases}$$

Debe ser $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$

E4.- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{(x^2)}}{x}$

(1 punto)

b) Hallar el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 - 2$.

(1,25 puntos)

a) Calculamos el valor del límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{(x^2)}}{x} = \frac{e^0 - e^0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \{ \text{Aplicamos L'Hôpital} \} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2xe^{(x^2)}}{1} = \frac{e^0 - 2 \cdot 0 \cdot e^0}{1} = \frac{1-0}{1} = \boxed{1}$$

b) Averiguemos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 = x^2 - 2 \Rightarrow -2x^2 = -2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Las dos funciones coinciden en $x = -1$ y $x = 1$. El área de la región entre ellas valdrá el valor absoluto de la integral definida entre -1 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_{-1}^1 x^2 - 2 - (-x^2) dx = \int_{-1}^1 2x^2 - 2 dx = \left[2 \frac{x^3}{3} - 2x \right]_{-1}^1 =$$

$$= \left[2 \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1 \right] - \left[2 \frac{(-1)^3}{3} - 2(-1) \right] = \frac{2}{3} - 2 + \frac{2}{3} - 2 = \frac{4}{3} - 4 = \frac{-8}{3}$$

El área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2$ tiene un valor de $\frac{8}{3} u^2$.

E5.- De una bolsa con 2 bolas blancas, 2 negras y 2 amarillas se extraen dos sin devolución (es decir, una vez extraída una bola no se vuelve a poner en la bolsa). Calcular la probabilidad de que las dos sean blancas. **(1 punto)**

Llamamos B_1 , B_2 , N_1 , N_2 , A_1 y A_2 a los sucesos sacar blanca, negra o amarilla en 1ª o 2ª extracción.

Nos piden calcular $P(B_1 \cap B_2)$.

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2 / B_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \approx 0.0667$$

La probabilidad de sacar dos bolas blancas en dos extracciones sin reemplazamiento es de $\frac{1}{15} \approx 0.0667$.

OPCIÓN B**E1.- a)** Discutir según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \quad (1,25 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $m = 1$. **(1 punto)**

- a) Como tiene más incógnitas que ecuaciones este sistema nunca va a ser compatible determinado, solo puede ser compatible indeterminado o incompatible.
Pasamos la incógnita x al segundo miembro de la igualdad.

$$\begin{aligned} \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y + z = 1 - mx \\ y + 2z = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ y \quad + 2z \quad = 1 - x \\ -y \quad - z \quad = -1 + mx \\ \hline z \quad = mx - x \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y + z = 1 - mx \\ z = mx - x \end{cases} \Rightarrow y + mx - x = 1 - mx \Rightarrow \boxed{y = 1 - 2mx + x} \end{aligned}$$

Este sistema equivalente tiene siempre solución, no depende del valor de m . Es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

Las soluciones son $x = t$, $y = 1 - 2mt + t$, $z = mt - t$

- b) Para $m = 1$ el sistema tiene la solución $x = t$, $y = 1 - 2t + t = 1 - t$, $z = t - t = 0$.

Las soluciones son $x = t$, $y = 1 - t$, $z = 0$

E2.- a) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,3,4)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z + 4 = 0$. **(1,25 puntos)**

b) Calcular a para que las rectas $r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z - 2}{2}$, $s \equiv \frac{x - 1}{a} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 2}{3}$ sean perpendiculares. **(1 punto)**

a) Si la recta es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z + 4 = 0$ el vector director de la recta es el normal del plano $\vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 2)$ y la recta tiene ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 1, 2) \\ \text{Pasa por } P(2, 3, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

b) Para que sean perpendiculares el producto escalar de sus respectivos vectores directores debe ser cero.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 1, 2) \\ \vec{v}_s = (a, 2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (1, 1, 2)(a, 2, 3) = 0 \Rightarrow a + 2 + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -8}$$

E3.- Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$. Calcular el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos. Esbozar su gráfica. **(2,25 puntos)**

El dominio de la función es $\mathbb{R}$, ya que el denominador no se anula.

$$x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = \sqrt{-2} \text{ Esto es imposible.}$$

Asíntota vertical. $x = a$

No hay ningún valor excluido del dominio, luego no hay asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La asíntota horizontal es $y = 1$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al existir asíntota horizontal no hay asíntota oblicua.

Para estudiar crecimiento o decrecimiento calculamos la derivada.

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 + 2) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{2x^3 + 4x - 2x^3 - 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 2)^2}$$

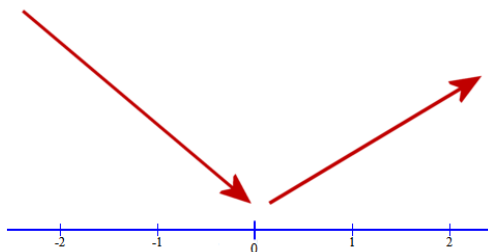
Igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Veamos si crece o decrece la función antes de 0 y después de 0.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos el valor $x = -1$ la derivada vale $f'(-1) = \frac{2(-1)}{((-1)^2 + 2)^2} = \frac{-2}{9} < 0$. La función decrece.
- En $(0, +\infty)$ tomamos el valor $x = 1$ la derivada vale $f'(1) = \frac{2(1)}{((1)^2 + 2)^2} = \frac{2}{9} > 0$. La función crece.

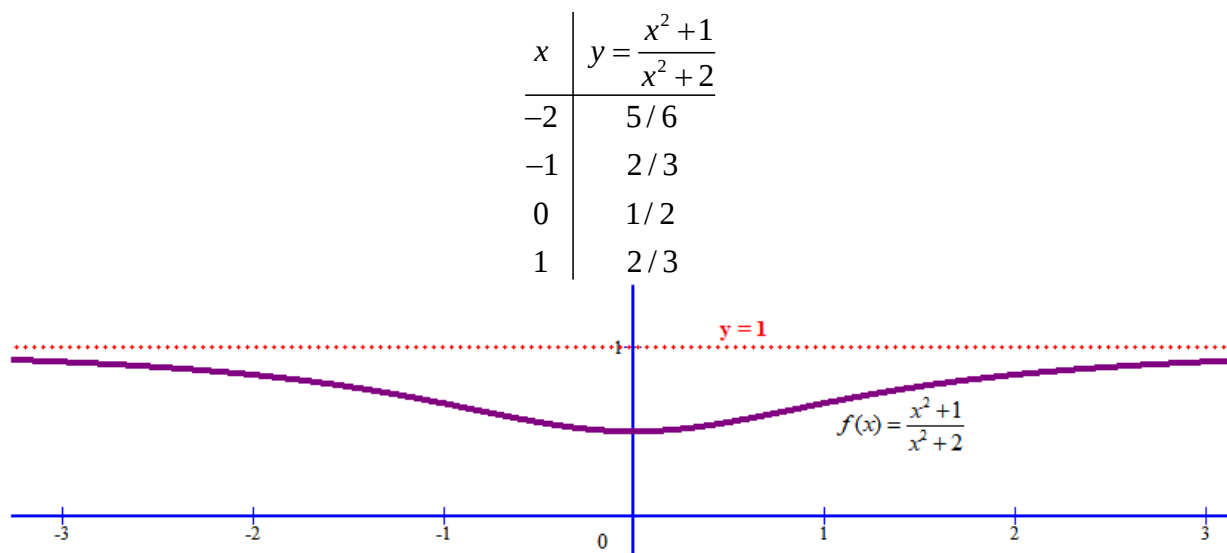
La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$.

Es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

Obtenemos una serie de puntos y dibujamos su gráfica



E4.- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \operatorname{sen} x}{x^2}$.

(1,25 puntos)

b) Calcular $\int \ln(x) dx$.

(1 punto)

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{0e^0 - \operatorname{sen} 0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \{ \text{Aplico L'Hôpital} \} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x - \cos x}{2x} = \frac{e^0 + 0e^0 - \cos 0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \{ \text{Aplico L'Hôpital} \} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^x + xe^x + \operatorname{sen} x}{2} = \frac{e^0 + e^0 + 0e^0 + \operatorname{sen} 0}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

b) Usamos el método de integración por partes.

$$\int \ln(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = \boxed{x \ln x - x + C}$$

E5.- Se tiran al aire, simultáneamente, un dado (con forma cúbica) y una moneda. Teniendo en cuenta que los sucesos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que en el dado salga un 5 y de que en la moneda salga cara? **(1 punto)**

Al ser independientes los experimentos lanzar una moneda y un dado la probabilidad de “sacar 5 y cara” es el producto de la probabilidad de los sucesos “sacar 5” y “sacar cara”.

$$P(\text{Salga un 5 en dado y cara en la moneda}) = P(\text{Salga un 5 en dado}) \cdot P(\text{Salga cara en la moneda}) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

EBAU Junio 2017

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	---	-----------------------	--

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Estudiar si A y B tienen inversa y calcularla cuando sea posible.

(1 punto)

b) Determinar X tal que $AX = 2B + I$ siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1,25 puntos)

E2.- Determinar la recta r que es paralela al plano $\pi \equiv x - y - z = 0$ y que corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-4}$ en el punto $P(2, -1, -2)$.

(2,25 puntos)

E3.- a) Enunciar el teorema de Bolzano e interpretarlo geométricamente.

(1 puntos)

b) Encontrar un intervalo en el que $P(x) = x^6 + x^4 - 1$ tenga al menos una raíz.

(1,25 puntos)

E4.- a) Calcular la recta tangente a la curva $f(x) = 4e^{x-1}$ en el punto $(1, f(1))$.

(1 punto)

b) Calcular el área de la región delimitada en el primer cuadrante por la gráfica de la función $g(x) = x^3$ y la recta $y = 4x$.

(1,25 puntos)

E5.- Se lanzan dos dados (con forma cúbica) al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 8?

(1 punto)

OPCIÓN B

E1.- a) Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ :

$$\begin{cases} x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases} \quad (1,25 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. (1 punto)

E2.- Dado el plano $\pi \equiv 3x + y + z - 2 = 0$ y los puntos $P(0,1,1)$, $Q(2,-1,-3)$ que pertenecen al plano π , determinar la recta del plano π que pasa por el punto medio entre P y Q y es perpendicular a la recta que une estos puntos. (2,25 puntos)

E3.- a) Dado el polinomio $P(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C$, hallar C para que el valor de $P(x)$ en su mínimo relativo sea 1. (1,25 puntos)

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$. (1 punto)

E4.- Sea $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ a + \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Encontrar a para que la función sea continua. (1,25 puntos)

b) Hallar el área de la región delimitada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x=1$, $y=1$. (1 punto)

E5.- La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 3 caras en tres lanzamientos? (1 punto)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

E1.- Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Estudiar si A y B tienen inversa y calcularla cuando sea posible.

(1 punto)

b) Determinar X tal que $AX = 2B + I$ siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1,25 puntos)

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$ La matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$ La matriz B no tiene inversa.

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX = 2B + I \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(2B + I) \Rightarrow X = A^{-1}(2B + I)$$

Obtenemos la expresión de la matriz X.

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \left[2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -9+8 & 6-12 \\ -3+2 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

E2.- Determinar la recta r que es paralela al plano $\pi \equiv x - y - z = 0$ y que corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-4}$ en el punto $P(2, -1, -2)$. **(2,25 puntos)**

El vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (a, b, c)$ que debe ser perpendicular al normal del plano $\vec{n} = (1, -1, -1)$ y al vector director de s es $\vec{v}_s = (1, 2, -4)$. Por lo que nos sirve como vector director de r el producto vectorial de $\vec{n}$ y $\vec{v}_s$.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} + \vec{k} + 4\vec{j} + 2\vec{i} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} = (6, 3, 3)$$

Tomemos como vector director el anterior, pero dividido por 3. $\vec{u}_r = (2, 1, 1)$

La recta r tiene ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 1, 1) \\ P(2, -1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

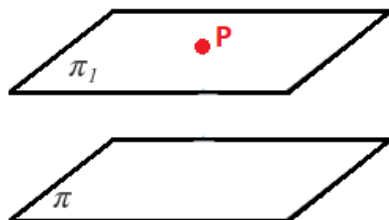
OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Se puede hallar la recta como intersección de dos planos.

Un plano π_1 paralelo a π que pase por el punto P :

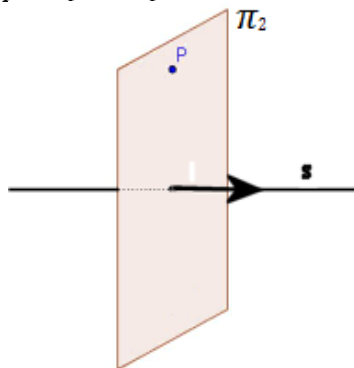
Plano paralelo a $\pi \equiv x - y - z = 0 \rightarrow \pi_1 \equiv x - y - z + D = 0$

Si pasa por $(2, -1, -2) \rightarrow 2 - (-1) - (-2) + D = 0 \rightarrow D = -5$



Por tanto $\pi_1 \equiv x - y - z - 5 = 0$

Un plano π_2 perpendicular a s que pase por el punto P :



Si π_2 es perpendicular a $s \rightarrow \vec{n}_2 = \vec{v}_s = (1, 2, -4)$. La ecuación del plano π_2 es de la forma

$\pi_2 \equiv x + 2y - 4z + D = 0$.

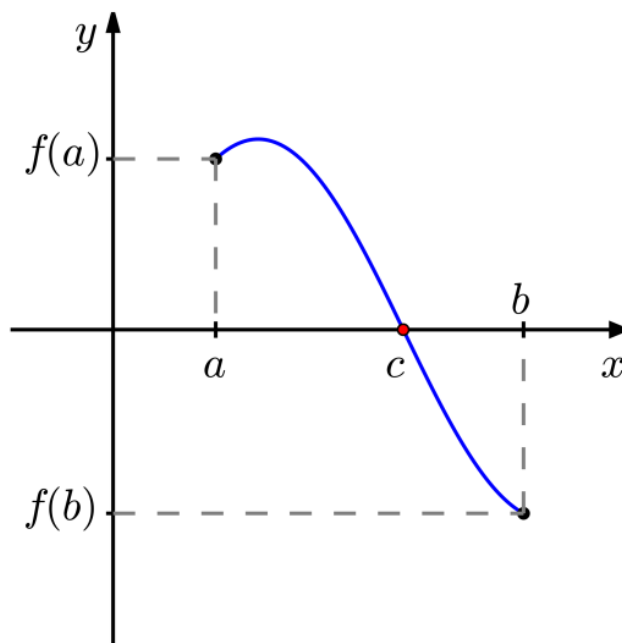
Si pasa por $(2, -1, -2) \rightarrow 2 + 2 \cdot (-1) - 4 \cdot (-2) + D = 0 \rightarrow D = -8$

Por tanto $\pi_2 \equiv x + 2y - 4z - 8 = 0$ y la recta buscada es $r \equiv \begin{cases} x - y - z - 5 = 0 \\ x + 2y - 4z - 8 = 0 \end{cases}$.

E3.- a) Enunciar el teorema de Bolzano e interpretarlo geoméricamente.**(1 punto)****b)** Encontrar un intervalo en el que $P(x) = x^6 + x^4 - 1$ tenga al menos una raíz.**(1,25 puntos)****a) Teorema de Bolzano:**

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$, entonces existe un número $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$.

$f(x)$ es continua en $[a,b]$ signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$ $\rightarrow \exists c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$

**b)** Vamos a probar con distintos valores de x hasta encontrar dos valores con signo distinto de $P(x)$.

$$P(-1) = -1 + 1 - 1 = -1$$

$$P(0) = -1$$

$$P(1) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Nos sirve el intervalo $(0,1)$, pues $P(0) = -1 < 0$ y $P(1) = 1 > 0$. Y la función es continua en dicho intervalo, por el teorema de Bolzano existe un valor c entre 0 y 1 para el que $P(x) = x^6 + x^4 - 1$ se anula.

- E4.- a)** Calcular la recta tangente a la curva $f(x) = 4e^{x-1}$ en el punto $(1, f(1))$. **(1 punto)**
- b)** Calcular el área de la región delimitada en el primer cuadrante por la gráfica de la función $g(x) = x^3$ y la recta $y = 4x$. **(1,25 puntos)**

- a) Geométricamente, la derivada de una función en un punto determinado representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. Así pues, comenzaremos por derivar $f(x)$:

$$f(x) = 4e^{x-1} \Rightarrow f'(x) = 4e^{x-1}$$

La recta tangente viene dada por la expresión $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Tenemos que $f(1) = 4$ y $f'(1) = 4$

Para $x_0 = 1 \Rightarrow y - (1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

Por tanto, la recta buscada es: $y - 4 = 4 \cdot (x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 4x}$

- b) En primer lugar, calculamos los puntos de corte entre ambas gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = x^3 \\ y = 4x \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 = 4x \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$

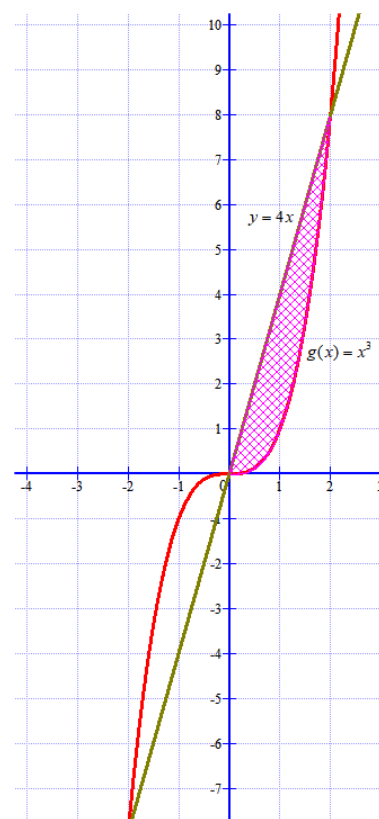
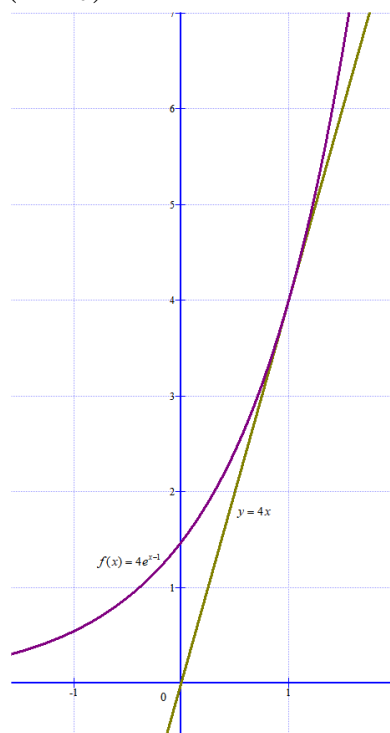
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Realizamos un esbozo de la gráfica, para visualizar la región comprendida entre la curva y la recta:

Como se pide el área comprendida entre la recta $y = 4x$ y la gráfica de $g(x) = x^3$ únicamente en el primer cuadrante:

$$\text{Área} = \int_0^2 4x - x^3 dx = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 =$$

$$= \left[2(2)^2 - \frac{(2)^4}{4} \right] - \left[2(0)^2 - \frac{(0)^4}{4} \right] = 8 - 4 = \boxed{4 \text{ u}^2}$$



E5.- Se lanzan dos dados (con forma cúbica) al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 8? **(1 punto)**

Las posibles combinaciones en las tiradas de los dos dados se recogen en la siguiente tabla:

+						
	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Existen un total de 36 resultados posibles, de los cuales sólo son favorables 5 (aquellos que suman ocho):

(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)

Por lo tanto, según la regla de Laplace, la probabilidad buscada es:

$$P(\text{Sumar } 8) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{5}{36}$$

OPCIÓN B**E1.- a)** Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ :

$$\begin{cases} x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$$

(1,25 puntos)**b)** Resolverlo para $\lambda = 1$.**(1 punto)**

a) Recurriríamos al teorema de Rouché–Frobenius para discutir el número de soluciones de este sistema.

Para ello, comenzamos por definir la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada con los términos independientes:

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

A continuación, evaluamos el rango de A, en función de los valores de λ para los que $|M|=0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + \lambda + 2\lambda - \lambda - 4\lambda - 2 = -2\lambda + 2$$

Si $|A| = 0 \rightarrow 2 - 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1$

Así pues, si $\lambda \neq 1$, el rango de M es 3. Si $\lambda = 1$, el rango de M es 2, pues siempre existe al menos un determinante de orden 2 no nulo en ella.

- Si $\lambda \neq 1$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A/B) = 3$, que coincide con el número n de incógnitas:

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

- Si $\lambda = 1$,

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Quito la 1ª fila y la 1ª columna y el menor que resulta tiene determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0.$$

El rango de A es 2

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ que tiene la 1ª y 2ª fila iguales, por lo que

rango de A/B no es 3 y por tanto, es 2.

$\text{ran}(A) = \text{ran}(A/B) = 2$, menor que el número de incógnitas (3).

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

b) Si $\lambda = 1$ el sistema queda $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$. Por lo visto en el apartado anterior sabemos que es

compatible indeterminado. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ x + 2y = 2 - 4z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ x + 2y = 2 - 4z \\ -x - y = -1 + z \\ \hline y = 1 - 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ \boxed{y = 1 - 3z} \end{cases} \Rightarrow$$

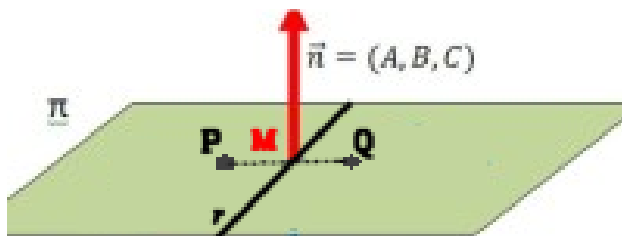
$$\Rightarrow x + 1 - 3z = 1 - z \Rightarrow \boxed{x = 2z}$$

Las soluciones son $x = 2t$; $y = 1 - 3t$; $z = t$.

E2.- Dado el plano $\pi \equiv 3x + y + z - 2 = 0$ y los puntos $P(0,1,1)$, $Q(2,-1,-3)$ que pertenecen al plano π , determinar la recta del plano π que pasa por el punto medio entre P y Q y es perpendicular a la recta que une estos puntos. **(2,25 puntos)**

El punto medio M del segmento PQ es

$$M = \frac{(0,1,1) + (2,-1,-3)}{2} = \frac{(2,0,-2)}{2} = (1,0,-1)$$



El vector director de la recta r es perpendicular al normal del plano y a $\overrightarrow{PQ}$. Nos sirve como vector director el producto vectorial de ambos vectores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (3,1,1) \\ \overrightarrow{PQ} = (2,-1,-3) - (0,1,1) = (2,-2,-4) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -4i + 2j - 6k - 2k + 12j + 2i = -2i + 14j - 8k \Rightarrow \vec{v}_r = (-2, 14, -8) \Rightarrow \vec{u}_r = (1, -7, 4)$$

La ecuación de la recta es:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, -7, 4) \\ \text{Pasa por } M(1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -7t \\ z = -1 + 4t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

E3.- a) Dado el polinomio $P(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C$, hallar C para que el valor de P(x) en su mínimo relativo sea 1.

(1,25 puntos)

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

(1 punto)

a) Hallamos el mínimo relativo de la función $P(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C$.

Calculamos su derivada.

$$P'(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{6x}{2} + 2 = x^2 - 3x + 2$$

Igualamos a cero la derivada y averiguamos cuando se anula.

$$P'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Calculamos su derivada segunda.

$$P'(x) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow P''(x) = 2x - 3$$

Veamos cual es el mínimo.

$x = 2 \rightarrow P''(2) = 4 - 3 = 1 > 0$. En $x = 2$ hay un mínimo relativo.

$x = 1 \rightarrow P''(1) = 2 - 3 = -1 < 0$. En $x = 1$ hay un máximo relativo.

En $x = 2$ la función debe valer 1 $\rightarrow P(2) = 1$.

$$\left. \begin{aligned} P(2) &= \frac{2^3}{3} - \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2 + C = \frac{8}{3} - 6 + 4 + C = \frac{2}{3} + C \\ P(2) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2}{3} + C = 1 \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{3}}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación} = \{ \text{Aplico L'Hôpital} \} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = \boxed{0}$$

E4.- Sea $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ a + \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Encontrar a para que la función sea continua.

(1,25 puntos)

b) Hallar el área de la región delimitada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x=1$, $y=1$. **(1 punto)**

a) El único posible punto de discontinuidad lo podemos encontrar en $x = 1$, por lo que para garantizar la continuidad de la función en este punto, debe cumplirse que los límites laterales coincidan en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} a + \ln x = a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \boxed{a=0}$$

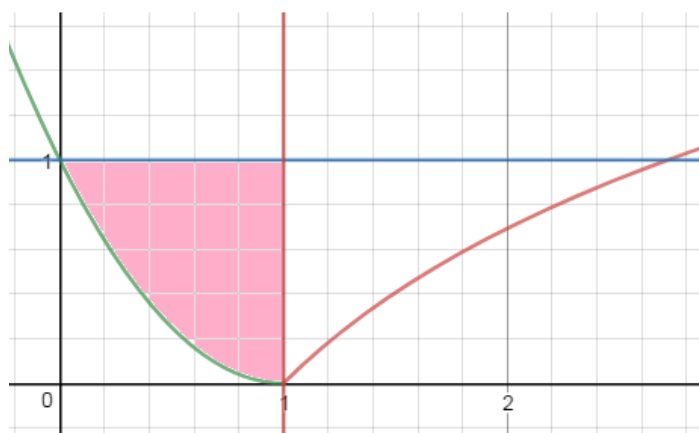
b) Encontramos los puntos de corte de $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y la recta $y=1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } x \leq 1 \rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \Rightarrow x=2. \text{ No es válido, pues es mayor que } 1 \\ x-1=-1 \Rightarrow x=0 \end{cases} \\ \text{Para } x > 1 \rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e. \end{array} \right.$$

Los puntos de corte son en $x = 0$ y en $x = e$.

NO TENGO MUY CLARO CUAL ES LA REGIÓN.

Si es el área



se calcula como una integral definida entre 0 y 1 de la diferencia de las funciones

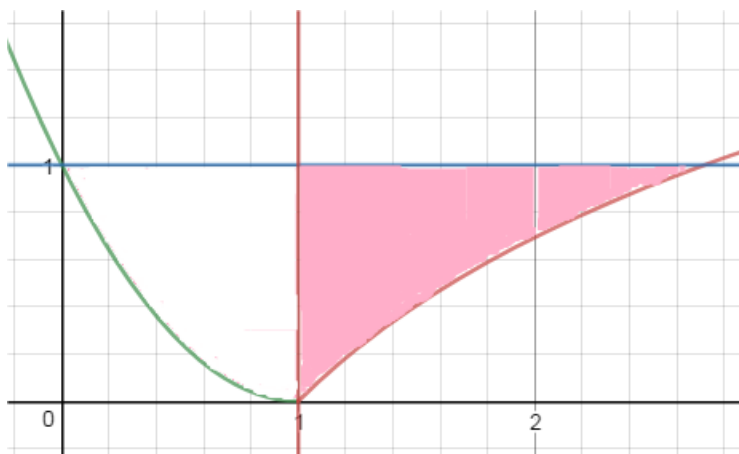
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{Solo se tiene en cuenta esta rama.} \quad \text{e } y=1.$$

$$\int_0^1 (x-1)^2 - 1 dx = \int_0^1 x^2 - 2x + 1 - 1 dx = \int_0^1 x^2 - 2x dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^1 = \left[\frac{1^3}{3} - 1^2 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 0^2 \right] = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

El área tiene un valor de $\frac{2}{3} \approx 0.6667$ unidades cuadradas.

Si es el área



se calcula como una integral definida entre 1 y e de la diferencia de las funciones

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{e } y = 1.$$

Solo se tiene en cuenta esta rama

Calculemos primero la integral indefinida.

$$\int 1 - \ln x dx = x - \int \ln x dx$$

$$\int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x$$

$$\int 1 - \ln x dx = x - x \ln x + x = 2x - x \ln x$$

Retomamos la integral definida.

$$\int_1^e 1 - \ln x dx = [2x - x \ln x]_1^e = [2e - e \ln e] - [2 - \ln 1] = 2e - e - 2 = e - 2$$

El área sería $e - 2 \approx 0.7183$ unidades cuadradas.

E5.- La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 3 caras en tres lanzamientos? **(1 punto)**

Cada uno de los lanzamientos es independiente de los otros.

$P(\text{Sacar tres caras en tres lanzamientos}) = P(\text{Sacar cara en lanzamiento 1 y sacar cara en lanzamiento 2 y sacar cara en lanzamiento 3}) = P(\text{Sacar cara en lanzamiento 1}) \cdot P(\text{sacar cara en lanzamiento 2}) \cdot P(\text{Sacar cara en lanzamiento 3}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{8}}$

OTRA FORMA DE HACERLO

Al lanzar 3 monedas puede salir los siguientes resultados, todos ellos igual de probables.
CCC, CC+, C+C, C++, ++, ++C, +CC, +C+.

Son 8 resultados posibles y solo 1 de ellos es favorable.
Aplicamos la ley de Laplace.

$$P(CCC) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \boxed{\frac{1}{8}}$$