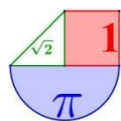
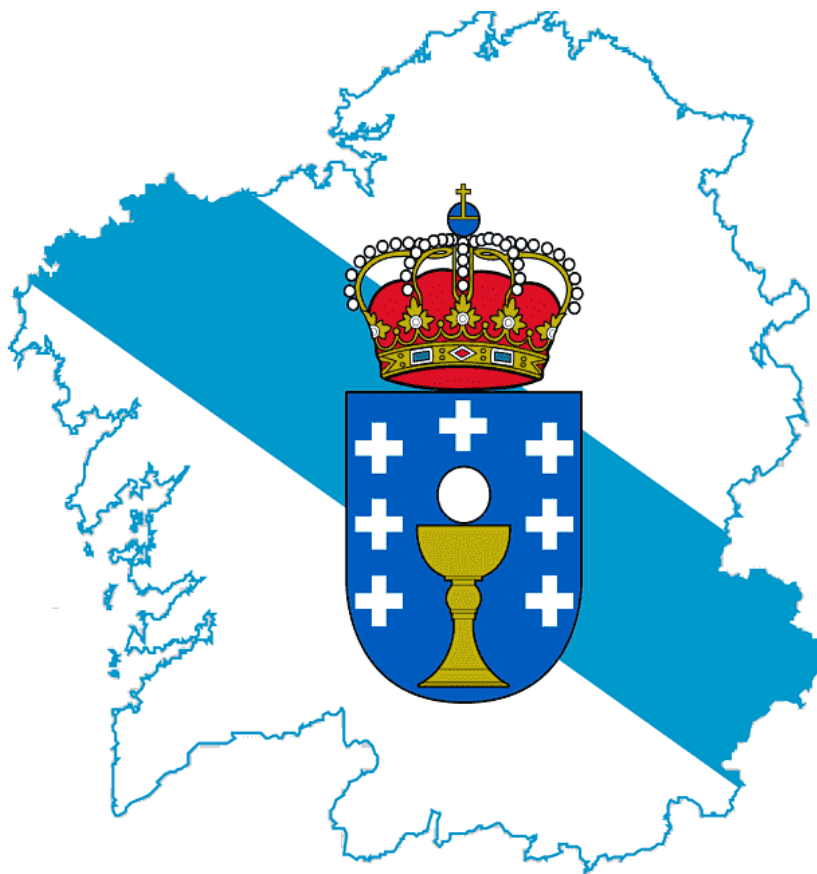


Matemáticas II

PAU Galicia

Años 2017 a 2026



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM
WWW.MATEMATICASPAU.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad de Galicia del año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

Convocatoria extraordinaria 2026	3
Convocatoria ordinaria 2026.....	18
PAU Extraordinaria 2025.....	32
PAU Ordinaria 2025.....	45
ABAU Extraordinaria 2024	56
ABAU Ordinaria 2024	66
ABAU Extraordinaria 2023	78
ABAU Ordinaria 2023	91
ABAU Extraordinaria 2022	105
ABAU Ordinaria 2022	118
ABAU Extraordinaria 2021	132
ABAU Ordinaria 2021	143
ABAU Extraordinaria 2020	157
ABAU Ordinaria 2020	168
ABAU Julio 2019	179
ABAU Junio 2019	193
ABAU Septiembre 2018	209
ABAU Junio 2018	227
ABAU Septiembre 2017	244
ABAU Junio 2017	260

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Deben justificarse todas las respuestas.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

CONTEXTO

Los índices de lectura tanto de libros como de cómics están aumentando en los últimos años, con especial incidencia entre los adolescentes. Según un informe sobre hábitos de lectura, más del 60 % de la población leyó un libro o un cómic en los últimos tres meses.

Para promover el hábito de la lectura, dentro de la política cultural del ayuntamiento, los responsables municipales de una ciudad gallega están organizando una feria de cómics para el próximo mes de septiembre. Según los datos proporcionados por los organizadores de otras ferias similares, el tiempo que una persona va a pasar en dicha feria puede considerarse que sigue una distribución normal de media igual a 50 minutos y desviación típica igual a 19.5 minutos.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $P(Z \leq 0.1) = 0.5398$, $P(Z \leq 0.26) = 0.6026$, $P(Z \leq 0.51) = 0.6950$, $P(Z \leq 1.03) = 0.8485$, $P(Z \leq 1.28) = 0.8997$, $P(Z \leq 2.33) = 0.9901$).

- 1.1. Calcule la probabilidad de que un asistente pase entre 45 y 70 minutos en la feria.
- 1.2. Si una persona entró a la feria a las 17:00, calcule la probabilidad de que salga antes de las 18:00 sabiendo que a las 17:45 aún estaba en la feria.

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos).

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide responder las siguientes cuestiones:

2.1.1. Calcule las matrices $X = AA^T$ e $Y = A^T A$, siendo A^T la matriz traspuesta de A . ¿Son X o Y invertibles? Razone la respuesta y calcule las inversas en caso de que sea posible.

2.1.2. Calcule las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tales que $BM = M$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} 2x + (2m-2)y + (m+6)z = 9 \\ x + (m-2)y + 3z = 2 \\ 2y + (2m+2)z = m-5 \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (4 puntos).**Responda dos de estos tres apartados: 3.1., 3.2, 3.3.**

3.1. Dado el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcule los coeficientes a , b , c y d si se sabe que p tiene un extremo relativo en $(1, -6)$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de p en $x = -1$ es $y = 4x + 2$

3.2. Dibuje la gráfica de una función $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ que tenga las siguientes propiedades:

- f, f' y f'' tienen el mismo signo en el intervalo $(-1, 2)$.
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

Luego, dé explicaciones relacionando el dibujo con la monotonía, la convexidad o concavidad y el concepto de asíntota.

3.3. Dadas las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, dibuje la región encerrada por sus gráficas y calcule su área.

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2 puntos).**Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.**

4.1. Considere la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$.

4.1.1. Calcule la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta r y al punto $Q(2, -1, 1)$.

4.1.2. Compruebe que la recta r es paralela al plano $\pi': x + y - z - 1 = 0$. Calcule la distancia de r a π' .

4.2. Considérense el punto $P(3, 0, -1)$.

4.2.1. Calcule el punto P' simétrico de P con respecto al punto $Q(2, -1, 2)$.

4.2.2. Calcule el punto P'' simétrico de P con respecto al plano $\pi: x + 2y + z - 8 = 0$.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)**CONTEXTO**

Los índices de lectura tanto de libros como de cómics están aumentando en los últimos años, con especial incidencia entre los adolescentes. Según un informe sobre hábitos de lectura, más del 60 % de la población leyó un libro o un cómic en los últimos tres meses.

Para promover el hábito de la lectura, dentro de la política cultural del ayuntamiento, los responsables municipales de una ciudad gallega están organizando una feria de cómics para el próximo mes de septiembre. Según los datos proporcionados por los organizadores de otras ferias similares, el tiempo que una persona va a pasar en dicha feria puede considerarse que sigue una distribución normal de media igual a 50 minutos y desviación típica igual a 19.5 minutos.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $P(Z \leq 0.1) = 0.5398$, $P(Z \leq 0.26) = 0.6026$, $P(Z \leq 0.51) = 0.6950$, $P(Z \leq 1.03) = 0.8485$, $P(Z \leq 1.28) = 0.8997$, $P(Z \leq 2.33) = 0.9901$).

1.1. Calcule la probabilidad de que un asistente pase entre 45 y 70 minutos en la feria.

1.2. Si una persona entró a la feria a las 17:00, calcule la probabilidad de que salga antes de las 18:00 sabiendo que a las 17:45 aún estaba en la feria.

1.1. Consideramos la variable aleatoria $X =$ “el tiempo, en minutos, que una persona va a pasar en la feria”. Nos dicen que $X = N(50, 19.5)$.

Debemos calcular $P(45 \leq X \leq 70)$.

$$\begin{aligned}
 P(45 \leq X \leq 70) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 50}{19.5} \end{array} \right\} = P\left(\frac{45 - 50}{19.5} \leq Z \leq \frac{70 - 50}{19.5}\right) = P(-0.26 \leq Z \leq 1.03) = \\
 &= P(Z \leq 1.03) - P(Z \leq -0.26) = P(Z \leq 1.03) - P(Z \geq 0.26) = \\
 &= P(Z \leq 1.03) - [1 - P(Z \leq 0.26)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la lista} \\ P(Z \leq 1.03) = 0.8485 \\ P(Z \leq 0.26) = 0.6026 \end{array} \right\} = 0.8485 - 1 + 0.6026 = \boxed{0.4511}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que un asistente pase entre 45 y 70 minutos en la feria es de 0.4511.

1.2. Nos piden calcular la probabilidad de que esté menos de 60 minutos si sabemos que ha estado en la feria más de 45 minutos: $P(X \leq 60 / X \geq 45)$.

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 60 / X \geq 45) &= \frac{P((X \leq 60) \cap (X \geq 45))}{P(X \geq 45)} = \frac{P(45 \leq X \leq 60)}{P(X \geq 45)} = \\
 &= \frac{P(X \leq 60) - P(X \leq 45)}{P(X \geq 45)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 50}{19.5} \end{array} \right\} = \frac{P\left(Z \leq \frac{60 - 50}{19.5}\right) - P\left(Z \leq \frac{45 - 50}{19.5}\right)}{P\left(Z \geq \frac{45 - 50}{19.5}\right)} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(Z \leq 0.51) - P(Z \leq -0.26)}{P(Z \geq -0.26)} = \frac{P(Z \leq 0.51) - [1 - P(Z \leq 0.26)]}{P(Z \leq 0.26)} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la lista} \\ P(Z \leq 0.51) = 0.695 \\ P(Z \leq 0.26) = 0.6026 \end{array} \right\} = \frac{0.695 - 1 + 0.6026}{0.6026} \approx \boxed{0.4939} \end{aligned}$$

Si una persona entró a la feria a las 17:00, la probabilidad de que salga antes de las 18:00 sabiendo que a las 17:45 aún estaba en la feria tiene un valor aproximado de 0.4939.

2.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide responder las siguientes cuestiones:

2.1.1. Calcule las matrices $X = AA^T$ e $Y = A^T A$, siendo A^T la matriz traspuesta de A. ¿Son X o Y invertibles? Razone la respuesta y calcule las inversas en caso de que sea posible.

2.1.2. Calcule las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tales que $BM = M$.

2.1.1. Obtenemos las matrices X e Y.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Y = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 & 1+0 \\ 0+0 & 0+4 & 0+0 \\ 1+0 & 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si los determinantes son distintos de cero, en cuyo caso las matrices serán invertibles.

$$|X| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

$$X^{-1} = \frac{\text{Adj}(X^T)}{|X|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}{8} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$|Y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{\text{Fila } 1^a = \text{Fila } 3^a\} = 0$$

La matriz X tiene inversa y es $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$. La matriz Y no es invertible.

2.1.2. Resolvemos la igualdad planteada.

$$BM = M \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c \\ b \\ a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c=a \\ a+c=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices M que cumplen lo pedido son $M = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, para cualquier valor real b .

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} 2x + (2m-2)y + (m+6)z = 9 \\ x + (m-2)y + 3z = 2 \\ 2y + (2m+2)z = m-5 \end{cases}$$

La matriz ampliada asociada al sistema es $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2m-2 & m+6 & 9 \\ 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{pmatrix}$.

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al dado.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2m-2 & m+6 & 9 \\ 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2m-4 \quad 6 \quad 4 \\ -2 \quad -2m+2 \quad -m-6 \quad -9 \\ 0 \quad -2 \quad -m \quad -5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2m-2 & m+6 & 9 \\ 0 & -2 & -m & -5 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 2 \quad 2m+2 \quad m-5 \\ 0 \quad -2 \quad -m \quad -5 \\ 0 \quad 0 \quad m+2 \quad m-10 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{2 \quad 2m-2 \quad m+6 \quad 9}^{A/B} \\ 0 \quad -2 \quad -m \quad -5 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad m+2 \quad m-10}_A \end{array} \right)$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. $m \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = -2$

La matriz ampliada equivalente obtenida queda $\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{2 \quad -6 \quad 4 \quad 9}^{A/B} \\ 0 \quad -2 \quad 2 \quad -5 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -12}_A \end{array} \right)$.

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz ampliada es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $m \neq -2$ el sistema es compatible determinado y si $m = -2$ el sistema es incompatible.

3.1. Dado el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcule los coeficientes a , b , c y d si se sabe que p tiene un extremo relativo en $(1, -6)$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de p en $x = -1$ es $y = 4x + 2$

Si p tiene un extremo relativo en $(1, -6)$ se cumple que la gráfica de la función pasa por ese punto y $p(1) = -6$, también se cumple que la derivada se anula en $x = 1 \rightarrow p'(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ p(1) = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{-6 = a + b + c + d}$$

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ p'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{0 = 3a + 2b + c}$$

También sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de p en $x = -1$ es $y = 4x + 2$, por lo que $p'(-1) = 4$ y además recta y función coinciden en $x = -1 \rightarrow p(-1) = 4(-1) + 2$.

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ p(-1) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d \Rightarrow \boxed{-2 = -a + b - c + d}$$

$$\left. \begin{array}{l} p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ p'(-1) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 = 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c \Rightarrow \boxed{4 = 3a - 2b + c}$$

Reunimos las cuatro ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c + d = -6 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ -a + b - c + d = -2 \\ 3a - 2b + c = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c + d = -6 \\ c = -3a - 2b \\ -a + b - c + d = -2 \\ 3a - 2b + c = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b - 3a - 2b + d = -6 \\ -a + b + 3a + 2b + d = -2 \\ 3a - 2b - 3a - 2b = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -2a - b + d = -6 \\ \Rightarrow 2a + 3b + d = -2 \\ -4b = 4 \rightarrow \boxed{b = -1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2a + 1 + d = -6 \\ 2a - 3 + d = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2a + d = -7 \\ 2a + d = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2a + d = -7 \\ d = 1 - 2a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2a + 1 - 2a = -7 \Rightarrow -4a = -8 \Rightarrow \boxed{a = 2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{d = 1 - 2 \cdot 2 = -3} \\ \boxed{c = -3 \cdot 2 - 2(-1) = -4} \end{array} \right\}$$

Los coeficientes son $a = 2$, $b = -1$, $c = -4$ y $d = -3$.

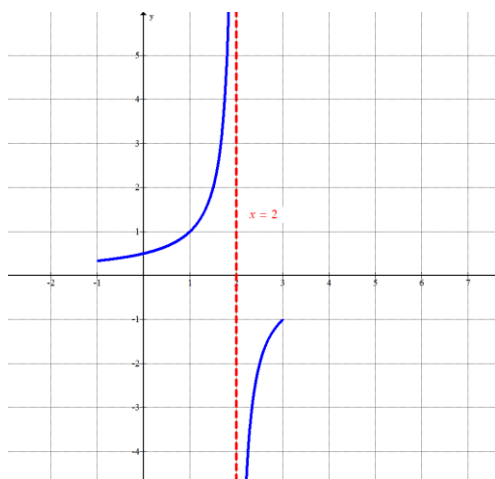
3.2. Dibuje la gráfica de una función $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ que tenga las siguientes propiedades:

- f, f' y f'' tienen el mismo signo en el intervalo $(-1, 2)$.
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

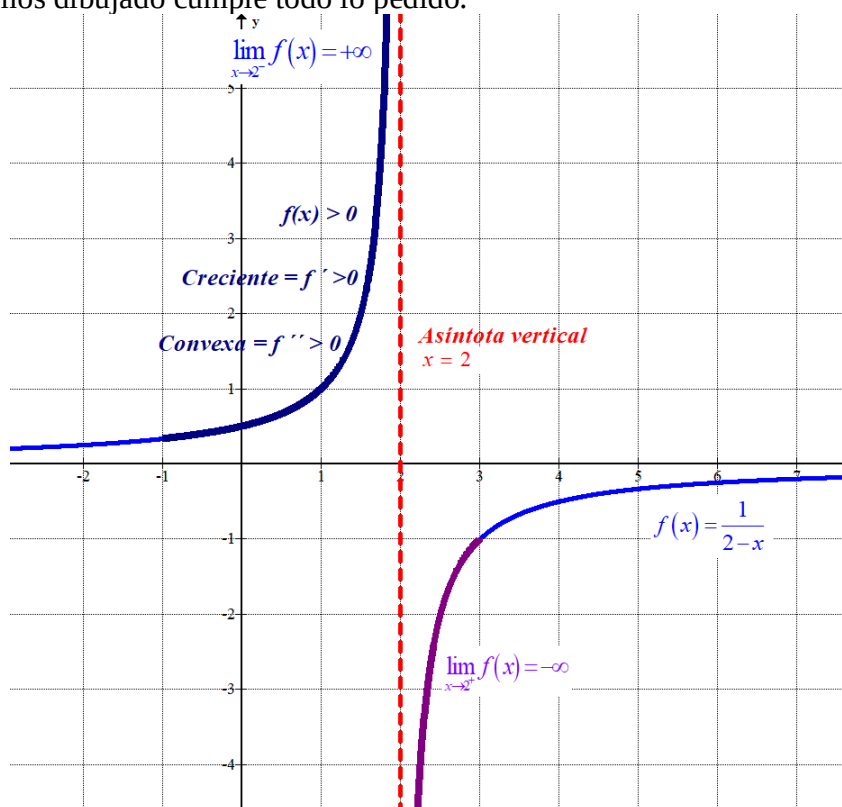
Luego, dé explicaciones relacionando el dibujo con la monotonía, la convexidad o concavidad y el concepto de asíntota.

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$. Si consideramos que la función, su derivada y su derivada segunda son positivas en el intervalo $(-1, 2)$ tendremos que en ese intervalo la gráfica de la función está situada por encima del eje de abscisas, que la función es creciente y que la gráfica es convexa (U). Por eso debe ser $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$.

Como debe ser $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ tenemos que en la asíntota vertical $x = 2$ la gráfica de la función se comporta como se indica en el dibujo.



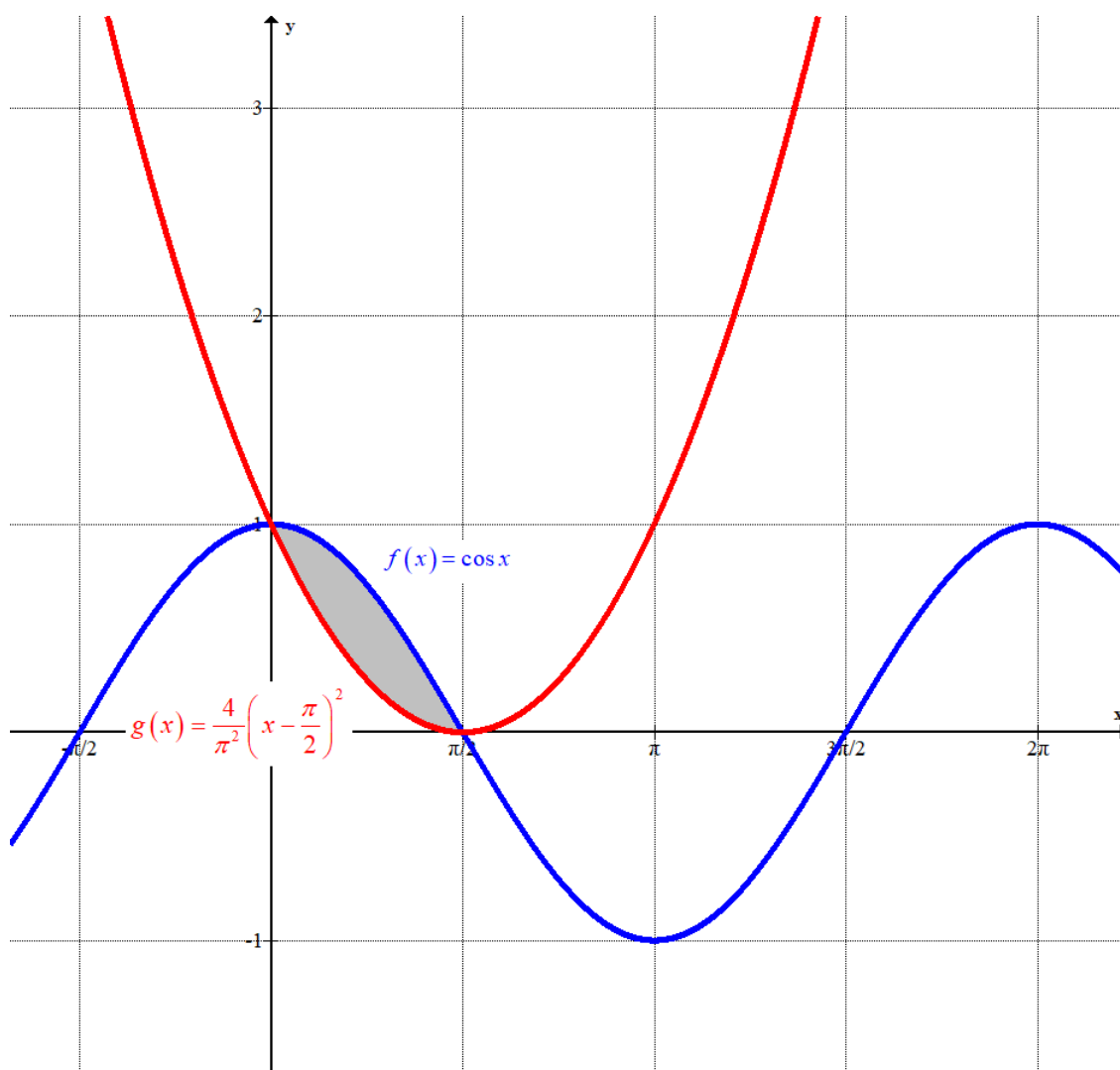
La gráfica que hemos dibujado cumple todo lo pedido.



3.3. Dadas las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, dibuje la región encerrada por sus gráficas y calcule su área.

Determinamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \cos x \\ g(x) = \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \cos x \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 0 \\ \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} \left(0 - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = 1 \\ \cos 0 = 1 \end{cases} \end{cases}$$



Calculamos el área de la región encerrada por las gráficas de las dos funciones como el valor de la integral definida de 0 a $\frac{\pi}{2}$ de la diferencia $f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} f(x) - g(x) dx &= \int_0^{\pi/2} \cos x - \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 dx = \left[\sin x - \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3} \right]_0^{\pi/2} = \\&= \left[\sin x - \frac{4}{3\pi^2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 \right]_0^{\pi/2} = \left[\sin \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3\pi^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^3 \right] - \left[\sin 0 - \frac{4}{3\pi^2} \cdot \left(0 - \frac{\pi}{2}\right)^3 \right] = \\&= 1 - 0 - 0 + \frac{4}{3\pi^2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)^3 = 1 - \frac{4\pi^3}{24\pi^2} = 1 - \frac{\pi}{6} \simeq 0.476\end{aligned}$$

El área tiene un valor de $1 - \frac{\pi}{6} \simeq 0.476$ unidades cuadradas.

4.1. Considere la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$.

4.1.1. Calcule la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta r y al punto $Q(2, -1, 1)$.

4.1.2. Compruebe que la recta r es paralela al plano $\pi': x + y - z - 1 = 0$. Calcule la distancia de r a π' .

4.1.1. El plano π que contiene a la recta r y al punto $Q(2, -1, 1)$ tiene como vectores directores el vector director de la recta $\vec{v}_r = (2, 1, 3)$ y el vector que une el punto Q con un punto cualquiera de la recta.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 3) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{P_r Q} = (2, -1, 1) - (1, 1, 0) = (1, -2, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (2, 1, 3) \\ Q(2, -1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6(x-2) + 2(y+1) + z-1 + 4(z-1) - 3(y+1) - (x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7(x-2) - (y+1) + 5(z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7x + 14 - y - 1 + 5z - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -7x - y + 5z + 8 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: -7x - y + 5z + 8 = 0$.

4.1.2. El plano $\pi': x + y - z - 1 = 0$ tiene como vector normal $\vec{n} = (1, 1, -1)$. El vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (2, 1, 3)$. Comprobamos si estos vectores son perpendiculares viendo si su producto escalar es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 1, -1) \\ \vec{v}_r = (2, 1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = (2, 1, 3) \cdot (1, 1, -1) = 2 + 1 - 3 = 0$$

El vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano. La recta es paralela al plano o bien la recta está contenida en el plano. Comprobamos que el punto $P_r(1, 1, 0)$ de la recta no pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \ni P_r(1, 1, 0) \in \pi'? \\ \pi': x + y - z - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ni 1 + 1 - 0 - 1 = 0? \Rightarrow \color{red}{1 = 0?} \Rightarrow \color{red}{\text{¡¡NO!!}}$$

La recta no está contenida en el plano. La recta r es paralela al plano $\pi': x + y - z - 1 = 0$.

Al ser la recta paralela al plano la distancia de la recta al plano es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

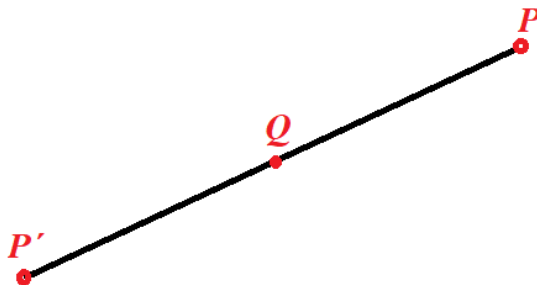
$$\left. \begin{array}{l} P_r(1,1,0) \in r \\ \pi': x + y - z - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi') = d(P_r, \pi') = \frac{|1+1-0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ unidades}$$

4.2. Considérense el punto $P(3,0,-1)$.

4.2.1. Calcule el punto P' simétrico de P con respecto al punto $Q(2,-1,2)$.

4.2.2. Calcule el punto P'' simétrico de P con respecto al plano $\pi: x+2y+z-8=0$.

4.2.1. El punto P' es tal que Q es el punto medio del segmento PP' . También podemos hallar el punto P' sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

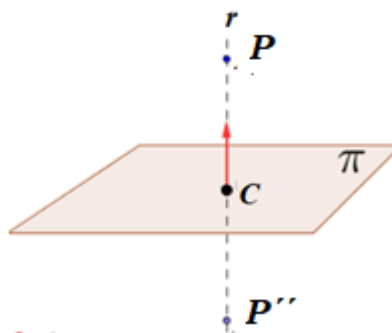


$$\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 2) - (3, 0, -1) = (-1, -1, 3)$$

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = (2, -1, 2) + (-1, -1, 3) = (1, -2, 5)$$

El punto P' tiene coordenadas $P'(1, -2, 5)$.

4.2.2. Hallamos la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P . Luego hallamos el punto C de corte de recta r y el plano. Por último, determinamos el punto P'' simétrico de P respecto del plano π .



Hallamos la ecuación de la recta r . Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano $\pi: x+2y+z-8=0$.

$$\left. \begin{array}{l} P(3,0,-1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (1,2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Hallo el punto C de corte de la recta r y el plano resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x+2y+z-8=0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + \lambda + 4\lambda - 1 + \lambda - 8 = 0 \Rightarrow 6\lambda - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 1 = 4 \\ y = 2 \\ z = -1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4, 2, 0)$$

Las coordenadas del punto simétrico P'' las hallamos sumando al punto C el vector $\overrightarrow{PC}$.

$$\left. \begin{array}{l} C(4, 2, 0) \\ P(3, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PC} = (4, 2, 0) - (3, 0, -1) = (1, 2, 1)$$

$$P'' = C + \overrightarrow{PC} = (4, 2, 0) + (1, 2, 1) = (5, 4, 1)$$

El punto simétrico de P respecto del plano π es $P''(5, 4, 1)$.

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Deben justificarse todas las respuestas.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

CONTEXTO

Renfe opera un servicio Alvia entre Santiago de Compostela y Barcelona-Sants. Los datos históricos muestran que, en condiciones operativas habituales, el tiempo de viaje sigue una distribución normal con una media de 765 minutos y una desviación típica de 18 minutos.

Sin embargo, durante los meses de invierno es frecuente que se produzcan incidencias meteorológicas que obligan a reducir la velocidad en ciertos tramos de la ruta. Esto ocurre aproximadamente el 30 % de los días de la temporada. Cuando se activa el protocolo por incidencia, la distribución del tiempo de viaje sigue siendo normal, pero pasa a tener una media de 810 minutos y una desviación típica de 40 minutos.

La compañía ferroviaria define que existe un “retraso significativo” cuando el tiempo de viaje supera los 780 minutos en un día sin incidencias, o los 840 minutos en un día con incidencia meteorológica declarada.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $P(Z \leq 0.3) = 0.6179$, $P(Z \leq 0.75) = 0.7734$, $P(Z \leq 0.83) = 0.7967$, $P(Z \leq 1.125) = 0.8697$, $P(Z \leq 4.16) = 1$.)

1.1. Por el contexto, se sabe que $P(R|\bar{I}) = P(X > 780)$ y que $P(R|I) = P(Y > 840)$. Explique el significado de los sucesos I y R y de las variables aleatorias X e Y . Luego, determine la probabilidad de que, seleccionando al azar un día de la temporada invernal, este tren Alvia experimente un retraso significativo según la definición de la compañía.

1.2. Calcule la probabilidad de que, en un día con incidencia meteorológica activa, el tren complete su viaje en un tiempo inferior a 765 minutos, que es el tiempo medio en condiciones habituales.

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos).

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Considérese la igualdad matricial $A(X-I)B=C$, donde X es cuadrada e I es la matriz identidad.

2.1.1. Despeje X suponiendo que A y B son cuadradas e invertibles.

2.1.2. ¿Qué dimensiones tienen X y B si A y C son matrices 1×2 ? Obtenga X , simétrica y tal que los elementos de su diagonal sumen 0, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = I$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} (m-4)x + 5z = 9 \\ (m-1)y + 6z = m+8 \\ (m-4)x + (m-1)y + 7z = m+9 \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (4 puntos).

Responda dos de estos tres apartados: 3.1., 3.2, 3.3.

3.1. Para cada uno de los siguientes casos, dibuje, cuando sea posible, la gráfica de una función que cumpla las propiedades indicadas:

- a) Continua pero no derivable en $x = 0$.
- b) Continua en $[a,b]$, con $f(a)f(b) < 0$, y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a,b) .
- c) Continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) , con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en (a,b) , y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a,b) .
- d) Dos veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ y monótona en $\mathbb{R}$.

3.2. Calcule los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$

3.3. Calcule el valor que tiene que tomar el parámetro positivo a para que el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - 2ax$ y el eje x sea igual a 10 unidades de superficie. Haga un dibujo de la región.

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2 puntos).

Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Sea r la recta que pasa por el origen y por P' , siendo P' el punto simétrico de $P(1,0,1)$ con respecto al punto $Q(0,1,0)$. Se pide:

4.1.1. Obtenga P' y las ecuaciones paramétricas de r .

4.1.2. Determine la ecuación implícita del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r

4.2. Considérense los puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ y $R(1,1,1)$.

4.2.1. Demuestre que P , Q y R no están alineados y obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por ellos.

4.2.2. Calcule el valor o valores de a que hacen que la distancia del punto $S(a,0,0)$ a ese plano π sea igual a $\sqrt{2}$ unidades de longitud.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)**CONTEXTO**

Renfe opera un servicio Alvia entre Santiago de Compostela y Barcelona-Sants. Los datos históricos muestran que, en condiciones operativas habituales, el tiempo de viaje sigue una distribución normal con una media de 765 minutos y una desviación típica de 18 minutos.

Sin embargo, durante los meses de invierno es frecuente que se produzcan incidencias meteorológicas que obligan a reducir la velocidad en ciertos tramos de la ruta. Esto ocurre aproximadamente el 30 % de los días de la temporada. Cuando se activa el protocolo por incidencia, la distribución del tiempo de viaje sigue siendo normal, pero pasa a tener una media de 810 minutos y una desviación típica de 40 minutos.

La compañía ferroviaria define que existe un “retraso significativo” cuando el tiempo de viaje supera los 780 minutos en un día sin incidencias, o los 840 minutos en un día con incidencia meteorológica declarada.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $P(Z \leq 0.3) = 0.6179$, $P(Z \leq 0.75) = 0.7734$, $P(Z \leq 0.83) = 0.7967$, $P(Z \leq 1.125) = 0.8697$, $P(Z \leq 4.16) = 1$.)

1.1. Por el contexto, se sabe que $P(R|\bar{I}) = P(X > 780)$ y que $P(R|I) = P(Y > 840)$. Explique el significado de los sucesos I y R y de las variables aleatorias X e Y . Luego, determine la probabilidad de que, seleccionando al azar un día de la temporada invernal, este tren Alvia experimente un retraso significativo según la definición de la compañía.

1.2. Calcule la probabilidad de que, en un día con incidencia meteorológica activa, el tren complete su viaje en un tiempo inferior a 765 minutos, que es el tiempo medio en condiciones habituales.

1.1. Los sucesos considerados son R = “Sufrir retraso significativo” e I = “Sufrir incidencias meteorológicas”.

La variable aleatoria X = “La duración de un viaje expresado en minutos en condiciones operativas habituales” e Y = “La duración del viaje en minutos con incidencias meteorológicas”.

Nos dicen que $X = N(765, 18)$ e $Y = N(810, 40)$.

Calculamos $P(R|\bar{I})$ y $P(R|I)$.

$$P(R|\bar{I}) = P(X > 780) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 765}{18} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{780 - 765}{18}\right) =$$

$$= P(Z > 0.83) = 1 - P(Z \leq 0.83) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la lista} \\ P(Z \leq 0.83) = 0.7967 \end{array} \right\} = 1 - 0.7967 = 0.2033$$

$$P(R|I) = P(Y > 840) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{Y - 810}{40} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{840 - 810}{40}\right) =$$

$$= P(Z > 0.75) = 1 - P(Z \leq 0.75) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la lista} \\ P(Z \leq 0.75) = 0.7734 \end{array} \right\} = 1 - 0.7734 = 0.2266$$

Sabemos también que $P(I) = 0.30$. Nos piden calcular $P(R)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R) = P(I)P(R/I) + P(\bar{I})P(R/\bar{I}) = 0.3 \cdot 0.2266 + 0.7 \cdot 0.2033 = \boxed{0.21029}$$

1.2. Nos piden calcular $P(Y < 765)$.

$$P(Y < 765) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{Y - 810}{40} \end{array} \right\} = P\left(Z < \frac{765 - 810}{40}\right) = P(Z < -1.125) =$$

$$= P(Z > 1.125) = 1 - P(Z \leq 1.125) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la lista} \\ P(Z \leq 1.125) = 0.8697 \end{array} \right\} = 1 - 0.8697 = \boxed{0.1303}$$

2.1. Considérese la igualdad matricial $A(X-I)B=C$, donde X es cuadrada e I es la matriz identidad.

2.1.1. Despeje X suponiendo que A y B son cuadradas e invertibles.

2.1.2. ¿Qué dimensiones tienen X y B si A y C son matrices 1×2 ? Obtenga X , simétrica y tal que los elementos de su diagonal sumen 0, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = I$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.1.1. Para despejar la matriz X multiplicamos por las matrices inversas de A y B .

$$A(X-I)B=C \Rightarrow A^{-1} \cdot A(X-I)B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X-I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} + I}$$

2.1.2. La matriz I es una matriz cuadrada y para que sea posible realizar $X-I$ la matriz X tiene que ser de las mismas dimensiones. La matriz X debe ser una matriz cuadrada $m \times m$.

La matriz $X-I$ tendrá dimensiones $m \times m$. La matriz A es una matriz 1×2 y para poder realizar el producto $A(X-I)$ debe ser $m=2$.

$$\begin{aligned} &A \cdot (X-I) \\ &1 \times \boxed{2 \cdot m} \times m \rightarrow 1 \times m \end{aligned}$$

El producto $A(X-I)$ es una matriz de orden 1×2 . Para poder realizar el producto $A(X-I)B$ la matriz B debe tener 2 filas.

$$\begin{aligned} &A(X-I)B = C \\ &1 \times \boxed{2 \cdot 2} \times n \rightarrow 1 \times n \end{aligned}$$

Como la matriz C es 1×2 entonces debe ser $n=2$. La matriz X debe ser una matriz 2×2 y la matriz B también una matriz 2×2

La matriz X es $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Colocamos la información dada en la igualdad matricial y obtenemos la expresión de X .

$$A(X-I)B=C \Rightarrow A(X-I)I=C \Rightarrow A(X-I)=C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 \ 1) \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1 \ 1) \begin{pmatrix} a-1 & b \\ b & -a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 \ 1) \begin{pmatrix} a-1 & b \\ b & -a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (a-1+b \quad b-a-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} a-1+b &= 0 \\ b-a-1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a &= 1-b \\ b-a-1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b-(1-b)-1=0 \Rightarrow 2b-2=0 \Rightarrow \boxed{b=1} \Rightarrow \boxed{a=1-1=0}$$

La matriz X tiene la expresión $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} (m-4)x + 5z = 9 \\ (m-1)y + 6z = m+8 \\ (m-4)x + (m-1)y + 7z = m+9 \end{cases}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al dado.

La matriz ampliada asociada al sistema es $A/B = \begin{pmatrix} m-4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & m-1 & 6 & m+8 \\ m-4 & m-1 & 7 & m+9 \end{pmatrix}$

$$A/B = \begin{pmatrix} m-4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & m-1 & 6 & m+8 \\ m-4 & m-1 & 7 & m+9 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ m-4 \quad m-1 \quad 7 \quad m+9 \\ -m+4 \quad 0 \quad -5 \quad -9 \\ \hline 0 \quad m-1 \quad 2 \quad m \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m-4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & m-1 & 6 & m+8 \\ 0 & m-1 & 2 & m \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad m-1 \quad 2 \quad m \\ 0 \quad -m+1 \quad -6 \quad -m-8 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -4 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{m-4 \quad 0 \quad 5 \quad 9}^{A/B} \\ 0 \quad m-1 \quad 6 \quad m+8 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad -4 \quad -8}_A \end{pmatrix}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq 4$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = 1$

El sistema queda tan sencillo que lo intentamos resolver.

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1-4 \quad 0 \quad 5 \quad 9}^{A/B} \\ 0 \quad 1-1 \quad 6 \quad 1+8 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad -4 \quad -8}_A \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 5z = 9 \\ 6z = 9 \\ -4z = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 5z = 9 \\ z = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \\ z = \frac{-8}{-4} = 2 \end{cases}$$

El sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $m = 4$

El sistema queda tan sencillo que lo intentamos resolver.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \overbrace{4-4}^{A/B} & 0 & 5 & 9 & \\ 0 & 4-1 & 6 & 4+8 & \\ \underbrace{0 & 0 & -4 & -8}_A & & & & \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 5z = 9 \\ 3y + 6z = 12 \\ -4z = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{9}{5} \\ y + z = 4 \\ z = \frac{-8}{-4} = 2 \end{cases}$$

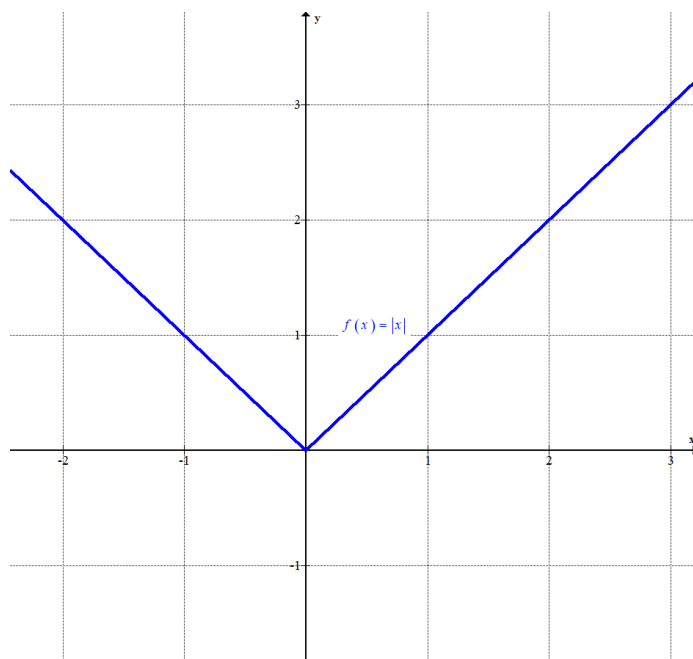
El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $m \neq 1$ y $m \neq 4$ el sistema es compatible determinado. Si $m = 1$ o $m = 4$ el sistema es incompatible.

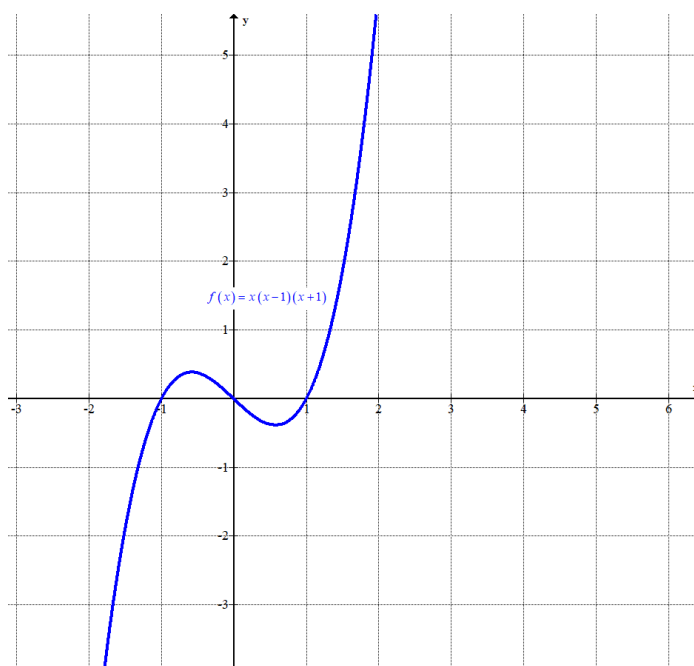
3.1. Para cada uno de los siguientes casos, dibuje, cuando sea posible, la gráfica de una función que cumpla las propiedades indicadas:

- Continua pero no derivable en $x = 0$.
- Continua en $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b) .
- Continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en (a, b) , y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b) .
- Dos veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ y monótona en $\mathbb{R}$.

a) Consideramos la función $f(x) = |x|$.



b) Consideramos $f(x) = x(x-1)(x+1)$ en el intervalo $[-2, 2]$. Esta función es continua y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo de definición. Corta el eje de abscisas en 3 puntos.



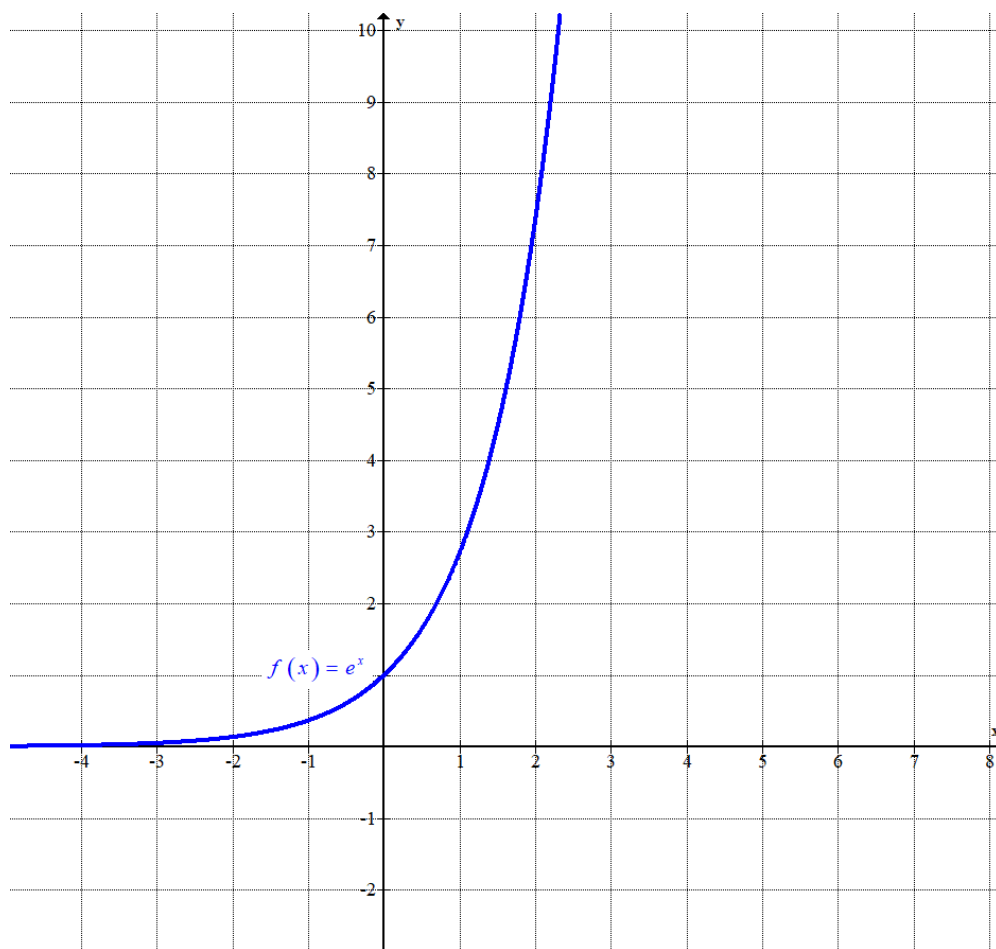
c) Esto no es posible. Si la función es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) , con dos puntos de corte con los ejes según el teorema de Rolle existe un $c \in (a,b)$ donde la derivada se anula. Por tanto, la derivada no puede ser positiva en todo el intervalo. No existe la función pedida.

d) Consideramos $f(x) = e^x$.

Su derivada es $f'(x) = e^x$ que es siempre positiva y por tanto la función es monótona creciente.

Su derivada segunda es $f''(x) = e^x$ que es siempre positiva.

La gráfica de la función es monótona creciente y siempre es convexa (U).



3.2. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$

a) Calculamos el valor del primer límite.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 1}{1} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

b) Calculamos el valor del segundo límite.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \frac{1-1}{\ln 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} x = \boxed{1}$$

c) Calculamos el valor del tercer límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\tan 0}{\sin 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\cos^2(x)}{\cos(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^3(x)} = \frac{1}{\cos^3(0)} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

d) Calculamos el valor del cuarto límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = \sqrt{0} \cdot \ln 0 = 0 \cdot \infty = \text{Indeterminación} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\ln(0^+)}{\frac{1}{\sqrt{0^+}}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} \\ d\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2} x^{-1/2-1} = -\frac{1}{2} x^{-3/2} = \frac{-x^{-3/2}}{2} \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-x^{-3/2}}{2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{-x^{-3/2} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{x^{-3/2+1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2\sqrt{x} = -2\sqrt{0} = \boxed{0}$$

3.3. Calcule el valor que tiene que tomar el parámetro positivo a para que el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - 2ax$ y el eje x sea igual a 10 unidades de superficie. Haga un dibujo de la región.

Determinamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 - 2ax \\ \text{Eje } x \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ax^2 - 2ax = 0 \Rightarrow a(x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow \{a \neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Calculamos el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - 2ax$ y el eje x como el valor absoluto de la integral definida de 0 a 2 de $f(x) = ax^2 - 2ax$.

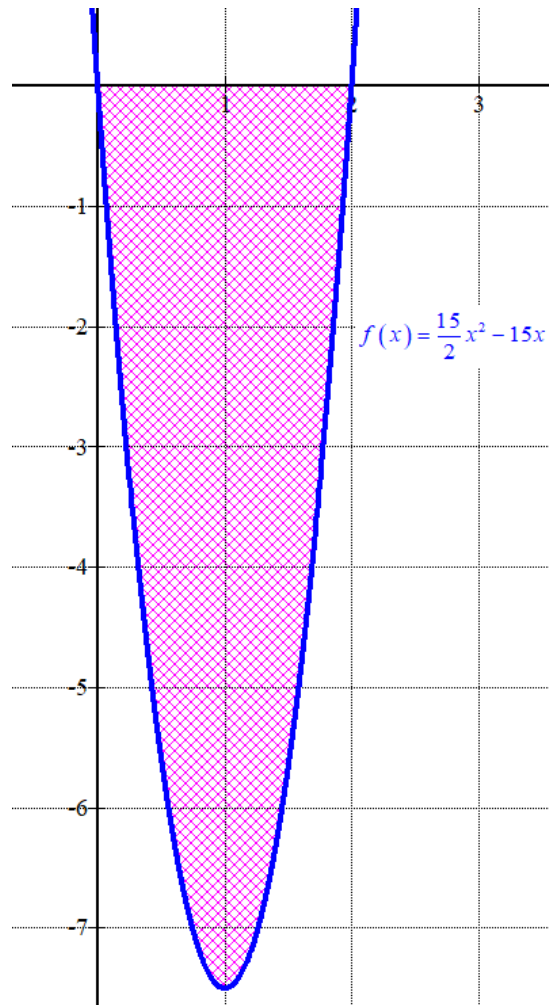
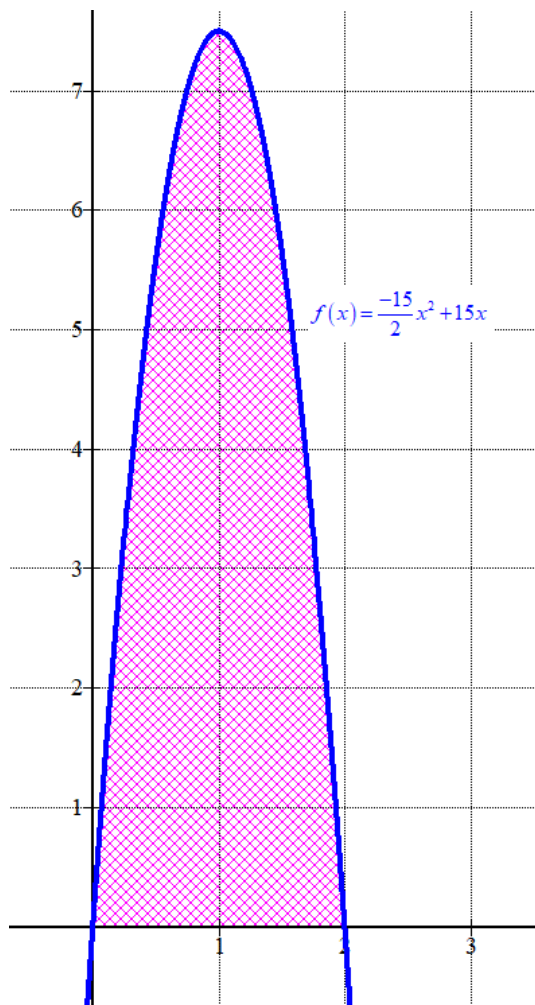
$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 ax^2 - 2ax dx = \left[\frac{ax^3}{3} - ax^2 \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{a \cdot 2^3}{3} - a \cdot 2^2 \right] - \left[\frac{a \cdot 0^3}{3} - a \cdot 0^2 \right] = \frac{8}{3}a - 4a = \left(\frac{8}{3} - 4 \right) a = \boxed{-\frac{4}{3}a} \end{aligned}$$

Averiguamos para que valor de “a” esta integral vale 10 o -10.

$$\text{Área} = 10 \Rightarrow \left| -\frac{4}{3}a \right| = 10 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3}a = 10 \rightarrow -4a = 30 \rightarrow \boxed{a = \frac{30}{-4} = -\frac{15}{2}} \\ o \\ -\frac{4}{3}a = -10 \rightarrow 4a = 30 \rightarrow \boxed{a = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}} \end{cases}$$

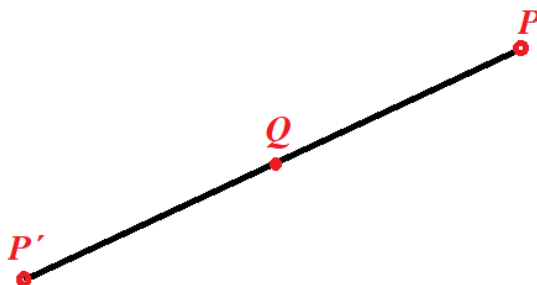
Se cumple lo pedido para $a = -\frac{15}{2}$ y para $a = \frac{15}{2}$.

La función queda $f(x) = -\frac{15}{2}x^2 + 15x$ o $f(x) = \frac{15}{2}x^2 - 15x$. Dibujamos las gráficas de las funciones y el recinto que debe tener un área de 10 unidades cuadradas.



- 4.1.** Sea r la recta que pasa por el origen y por P' , siendo P' el punto simétrico de $P(1,0,1)$ con respecto al punto $Q(0,1,0)$. Se pide:
- 4.1.1.** Obtenga P' y las ecuaciones paramétricas de r .
- 4.1.2.** Determine la ecuación implícita del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r

4.1.1. El punto P' es tal que Q es el punto medio del segmento PP' . También podemos hallar el punto P' sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.



$$\overrightarrow{PQ} = (0,1,0) - (1,0,1) = (-1,1,-1)$$

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = (0,1,0) + (-1,1,-1) = (-1,2,-1)$$

El punto P' tiene coordenadas $P'(-1,2,-1)$.

Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por $O(0,0,0)$ y $P'(-1,2,-1)$.

$$\left. \begin{array}{l} P'(-1,2,-1) \in r \\ O(0,0,0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{OP'} = (-1,2,-1) - (0,0,0) = (-1,2,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\lambda \end{cases}$$

La recta pedida es $r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\lambda \end{cases}$

4.1.2. El plano que pasa por el origen y es perpendicular a r tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (-1,2,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in \pi \\ \pi: -x + 2y - z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -0 + 2 \cdot 0 - 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -x + 2y - z = 0}$$

El plano pedido tiene ecuación implícita $\pi: -x + 2y - z = 0$.

4.2. Considérense los puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ y $R(1,1,1)$.

4.2.1. Demuestre que P , Q y R no están alineados y obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por ellos.

4.2.2. Calcule el valor o valores de a que hacen que la distancia del punto $S(a,0,0)$ a ese plano π sea igual a $\sqrt{2}$ unidades de longitud.

4.2.1. Para comprobar que no están alineados basta con ver que los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} P(1,0,1) \\ Q(0,1,0) \\ R(1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (0,1,0) - (1,0,1) = (-1,1,-1) \\ \overrightarrow{PR} = (1,1,1) - (1,0,1) = (0,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{0} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{0}$$

Los puntos P , Q y R no están alineados y definen un único plano que los contiene.

$$\left. \begin{array}{l} P(1,0,1) \\ Q(0,1,0) \\ R(1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(1,0,1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-1,1,-1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PR} = (0,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 0 - (z-1) - 0 - 0 + x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - z = 0}$$

La ecuación implícita del plano que contiene los puntos P , Q y R es $\pi: x - z = 0$.

4.2.2. Determinamos la expresión de la distancia del punto S al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x - z = 0 \\ S(a,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(S, \pi) = \frac{|a - 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$$

Averiguamos cuando esta distancia vale $\sqrt{2}$ unidades de longitud.

$$\left. \begin{array}{l} d(S, \pi) = \frac{|a|}{\sqrt{2}} \\ d(S, \pi) = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|a|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |a| = (\sqrt{2})^2 = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{a = -2} \\ \boxed{a = 2} \end{array} \right.$$

Se cumple lo pedido para $a = -2$ y $a = 2$.

PAU Extraordinaria 2025

COMISIÓN
INTERUNIVERSITARIA
DE GALICIAPAU
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 2025
MATEMÁTICAS II

CÓDIGO 20

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)**CONTEXTO**

En los últimos años, hay una tendencia que sigue en aumento: emplear calzado deportivo no únicamente para realizar actividad física, sino como calzado de uso diario. Los motivos principales son su versatilidad y comodidad, ya que pueden combinarse con casi cualquier atuendo al mismo tiempo que permiten realizar movimientos naturales.

Antón es un apasionado de este tipo de calzado, del que tiene 60 pares, guardando cada par en su correspondiente caja. El 80% son zapatillas tradicionales y el 20% zapatillas de diseño. Entre las zapatillas de diseño, el 75% están en buen estado, pero solo el 50% de las zapatillas tradicionales están en buen estado. Un día que se levantó con el tiempo justo, para no llegar tarde al trabajo, cogió al azar una caja y se calzó las zapatillas de esa caja.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Cuál es la probabilidad de que Antón vaya calzado con zapatillas tradicionales o zapatillas en buen estado?

1.2. Al salir del trabajo, Antón decide ir al cine con dos amigos. Antón no quiere llevar calzadas zapatillas que no estén en buen estado ni zapatillas tradicionales, ¿cuál sería la probabilidad de que no tenga que pasar por su casa a cambiar las zapatillas?

1.3. Antón tiene 8 pares de zapatillas tradicionales de color blanco. Sabiendo que al escoger al azar una caja de sus zapatillas los sucesos “ser blancas” y “ser de diseño” son sucesos independientes, ¿cuántos pares de zapatillas blancas de diseño tiene Antón?

PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos).**Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.**

2.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.1.1. ¿Qué condición tiene que cumplir k para que A sea invertible? Calcule A^{-1} cuando sea posible.

2.1.2. Para $k = 0$, calcule la matriz X que satisfaga la igualdad $AX - A = B^2 + A^T$ siendo A^T la traspuesta de A .

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:
$$\begin{cases} x + my + z = m \\ x + \quad + (3-m)z = 2m \\ my + \quad + 2z = 3m \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos).**Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.**

3.1. Responda a las dos cuestiones siguientes:

3.1.1. Enuncie el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

3.1.2. Calcule $\int e^x \cos 3x dx$.

3.2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{4x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.2.1. Estudie la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 0$.

3.2.2. Estudie la derivabilidad de la función $f(x)$ en $x = 0$.

3.2.3. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ en $x = -1$.

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2,5 puntos).

Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Considérense los planos $\pi: 2x + 3y + z + 1 = 0$ y $\pi': x + z - 1 = 0$ y los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(-1, -2, 3)$.

4.1.1. Calcule la distancia del punto A al plano paralelo a π que pasa por B .

4.1.2. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π' .

4.2. Dadas las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y $s: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

4.2.1. Calcule la posición relativa de las rectas r y s .

4.2.2. Obtenga la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s .

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)**CONTEXTO**

En los últimos años, hay una tendencia que sigue en aumento: emplear calzado deportivo no únicamente para realizar actividad física, sino como calzado de uso diario. Los motivos principales son su versatilidad y comodidad, ya que pueden combinarse con casi cualquier atuendo al mismo tiempo que permiten realizar movimientos naturales.

Antón es un apasionado de este tipo de calzado, del que tiene 60 pares, guardando cada par en su correspondiente caja. El 80% son zapatillas tradicionales y el 20% zapatillas de diseño. Entre las zapatillas de diseño, el 75% están en buen estado, pero solo el 50% de las zapatillas tradicionales están en buen estado. Un día que se levantó con el tiempo justo, para no llegar tarde al trabajo, cogió al azar una caja y se calzó las zapatillas de esa caja.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Cuál es la probabilidad de que Antón vaya calzado con zapatillas tradicionales o zapatillas en buen estado?

1.2. Al salir del trabajo, Antón decide ir al cine con dos amigos. Antón no quiere llevar calzadas zapatillas que no estén en buen estado ni zapatillas tradicionales, ¿cuál sería la probabilidad de que no tenga que pasar por su casa a cambiar las zapatillas?

1.3. Antón tiene 8 pares de zapatillas tradicionales de color blanco. Sabiendo que al escoger al azar una caja de sus zapatillas los sucesos “ser blancas” y “ser de diseño” son sucesos independientes, ¿cuántos pares de zapatillas blancas de diseño tiene Antón?

Nos dicen que tiene 60 pares de zapatillas y el 80% son tradicionales, es decir, $0.8 \cdot 60 = 48$ pares son zapatillas tradicionales y las restantes $60 - 48 = 12$ son de diseño.

Entre las zapatillas de diseño, el 75% están en buen estado, es decir, $0.75 \cdot 12 = 9$ zapatillas son de diseño en buen estado. En las tradicionales solo el 50% está en buen estado, es decir, $0.5 \cdot 48 = 24$ zapatillas son tradicionales en buen estado.

Ponemos todos estos datos ordenados en una tabla de contingencia.

	Buen estado	Mal estado	
Diseño	9		12
Tradicionales	24		48
TOTALES			60

Completamos la tabla.

	Buen estado	Mal estado	
Diseño	9	3	12
Tradicionales	24	24	48
TOTALES	33	27	60

Disponemos de toda la información sobre las zapatillas de Antón y podemos responder a las preguntas que se nos planteen usando la regla de Laplace.

1.1. De los 60 pares hay 48 que son tradicionales y 9 que son de diseño en buen estado. La probabilidad de que Antón vaya calzado con zapatillas tradicionales o zapatillas en buen estado es de $\frac{48+9}{60} = \frac{57}{60} = 0.95$.

1.2. De los 60 pares de zapatillas que tiene Antón 9 son de diseño y en buen estado. La probabilidad de no llevar zapatillas tradicionales ni en mal estado es de $\frac{9}{60} = \frac{3}{20} = 0.15$, la probabilidad de no tener que cambiarse de zapatillas es de 0.15.

1.3. Llamamos B al suceso “zapatillas blancas”, D a “zapatillas de diseño” y T a “zapatillas tradicionales”. Nos dicen que los sucesos B y D son independientes por lo que:

$$P(B \cap D) = P(B)P(D) = P(B) \frac{12}{60} = \frac{P(B)}{5}.$$

Calculamos el valor de $P(B)$ usando el teorema de la probabilidad total.

$$P(B) = P(B \cap T) + P(B \cap D) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(B \cap D) = \frac{P(B)}{5} \\ P(B \cap T) = \frac{8}{60} = \frac{2}{15} \end{array} \right\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{15} + \frac{P(B)}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15P(B) = 2 + 3P(B) \Rightarrow 12P(B) = 2 \Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{2}{12} = \frac{10}{60}}$$

Como $P(B) = \frac{10}{60}$ este valor de la probabilidad nos indica que Antón tiene 10 pares de zapatillas blancas. Como 8 son tradicionales podemos asegurar que Antón tiene $10 - 8 = 2$ pares de zapatillas blancas de diseño.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Con tabla de contingencia. Llamamos “x” al número de pares de zapatillas blancas de diseño que tiene Antón.

	Blancas	No blancas	
Diseño	x	12 - x	12
Tradicionales	8	40	48
TOTALES	x + 8	52 - x	60

Nos dicen que los sucesos B y D son independientes por lo que $P(B \cap D) = P(B)P(D)$.

Utilizando los datos de la tabla tenemos que $P(B \cap D) = \frac{x}{60}$, $P(B) = \frac{x+8}{60}$ y $P(D) = \frac{12}{60}$.

Reunimos toda la información y obtenemos el valor de x.

$$\left. \begin{array}{l} P(B \cap D) = P(B)P(D) \\ P(B \cap D) = \frac{x}{60} \\ P(B) = \frac{x+8}{60} \\ P(D) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{60} = \frac{x+8}{60} \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{5x}{60} = \frac{x+8}{60} \Rightarrow 5x = x+8 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Antón tiene 2 pares de zapatillas blancas de diseño.

2.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.1.1. ¿Qué condición tiene que cumplir k para que A sea invertible? Calcule A^{-1} cuando sea posible.

2.1.2. Para $k = 0$, calcule la matriz X que satisfaga la igualdad $AX - A = B^2 + A^T$ siendo A^T la traspuesta de A .

2.1.1. Para que la matriz A sea invertible su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos el valor de k para el que se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 4k + 2 + 0 - 0 - 4k - 1 = 1 \neq 0$$

El determinante de A no depende del valor de k y siempre vale 1 que es un valor no nulo, por lo que la matriz A es invertible para cualquier valor de k .

Calculamos la inversa de la matriz A .

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & k \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k-1 & -2k & 2 \\ 1-2k & k & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.2. Para $k = 0$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y sabemos que es invertible, siendo su inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX - A = B^2 + A^T \Rightarrow AX = B^2 + A^T + A \Rightarrow X = A^{-1}(B^2 + A^T + A)$$

Obtenemos la expresión de X .

$$B^2 + A^T + A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+0+2 & -4+0+4 & -1+0+2 \\ 3+0-1 & 4+0-2 & 1+0-1 \\ -6+4+0 & -8+9+0 & -2+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz solución es $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:

$$\begin{cases} x + my + z = m \\ x + (3-m)z = 2m \\ my + 2z = 3m \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & m \\ 1 & 0 & 3-m & 2m \\ 0 & m & 2 & 3m \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + m - 0 - 2m - m(3-m) = m - 2m - 3m + m^2 = m^2 - 4m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4 \end{cases}$$

El determinante se anula para $m = 0$ y $m = 4$. Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq 4$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = 0$

El determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \\ -1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el rango de A/B. Los rangos son iguales pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 3. $m = 4$

El determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 4 & 2 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad 8 \\ -1 \quad -4 \quad -1 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -4 \quad -2 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 4 \quad 2 \quad 12 \\ 0 \quad -4 \quad -2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 16 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 4 \quad 1 \quad 4}^{A/B} \\ 0 \quad -4 \quad -2 \quad 4 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} \quad 16 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible**.

Resumiendo: Si $m \neq 0$ y $m \neq 4$ el sistema es compatible determinado, si $m = 0$ el sistema es compatible indeterminado y si $m = 4$ el sistema es incompatible.

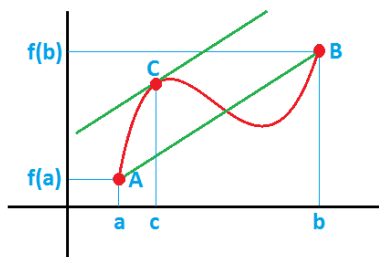
3.1. Responda a las dos cuestiones siguientes:

3.1.1. Enuncie el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

3.1.2. Calcule $\int e^x \cos 3x dx$.

3.1.1. Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b) entonces existe al menos un valor $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



3.1.2. Calculamos la expresión de la integral indefinida pedida usando el método de integración por partes.

$$\int e^x \cos 3x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ \int u dv = uv - \int v du \\ u = \cos 3x \rightarrow du = -3 \operatorname{sen} 3x dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = e^x \cos 3x - \int -3 \operatorname{sen} 3x \cdot e^x dx = \dots$$

$$\int \operatorname{sen} 3x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ \int u dv = uv - \int v du \\ u = \operatorname{sen} 3x \rightarrow du = 3 \cos 3x dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = e^x \operatorname{sen} 3x - \int 3 \cos 3x e^x dx$$

$$\dots = e^x \cos 3x + 3 \left[e^x \operatorname{sen} 3x - \int 3 \cos 3x e^x dx \right] = e^x \cos 3x + 3e^x \operatorname{sen} 3x - 9 \int e^x \cos 3x dx$$

Hemos visto que $\int e^x \cos 3x dx = e^x \cos 3x + 3e^x \operatorname{sen} 3x - 9 \int \cos 3x e^x dx$.

Despejamos la integral en la igualdad y obtenemos su expresión.

$$\int e^x \cos 3x dx = e^x \cos 3x + 3e^x \operatorname{sen} 3x - 9 \int e^x \cos 3x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos 3x dx + 9 \int e^x \cos 3x dx = e^x \cos 3x + 3e^x \operatorname{sen} 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \int e^x \cos 3x dx = e^x \cos 3x + 3e^x \operatorname{sen} 3x \Rightarrow \boxed{\int e^x \cos 3x dx = \frac{e^x (\cos 3x + 3 \operatorname{sen} 3x)}{10}}$$

Hemos obtenido que $\int e^x \cos 3x dx = \frac{e^x (\cos 3x + 3 \operatorname{sen} 3x)}{10}$.

3.2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{4x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.2.1. Estudie la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 0$.

3.2.2. Estudie la derivabilidad de la función $f(x)$ en $x = 0$.

3.2.3. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ en $x = -1$.

3.2.1. En el intervalo $(-\infty, 0)$ la función tiene la expresión $f(x) = xe^{4x}$ que es continua en todo el intervalo pues es producto de funciones continuas.

En el intervalo $(0, +\infty)$ la función tiene la expresión $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ cuyo denominador se anula para $x = -1$ que no pertenece al intervalo de definición y también tenemos que $x > 0 \rightarrow 1+x > 1 > 0$, por lo que la función logaritmo neperiano existe y es continua. La función es continua en $(0, +\infty)$.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{\ln(1+0)}{1+0} = \frac{0}{1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{4x} = 0 \cdot e^{4 \cdot 0} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$$

La función es continua en $x = 0$.

La función es continua en todo su dominio $\mathbb{R}$.

3.2.2. En el intervalo $(-\infty, 0)$ la función tiene la expresión $f(x) = xe^{4x}$ que es derivable en todo el intervalo siendo su derivada $f'(x) = e^{4x} + x \cdot 4e^{4x} = (1+4x)e^{4x}$.

En el intervalo $(0, +\infty)$ la función tiene la expresión $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. La función es derivable,

siendo su derivada $f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}(1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ siendo su derivada $f'(x) = \begin{cases} (1+4x)e^{4x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+4x)e^{4x} = (1+4 \cdot 0)e^{4 \cdot 0} = 1 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1 - \ln(1+0)}{(1+0)^2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) = 1$$

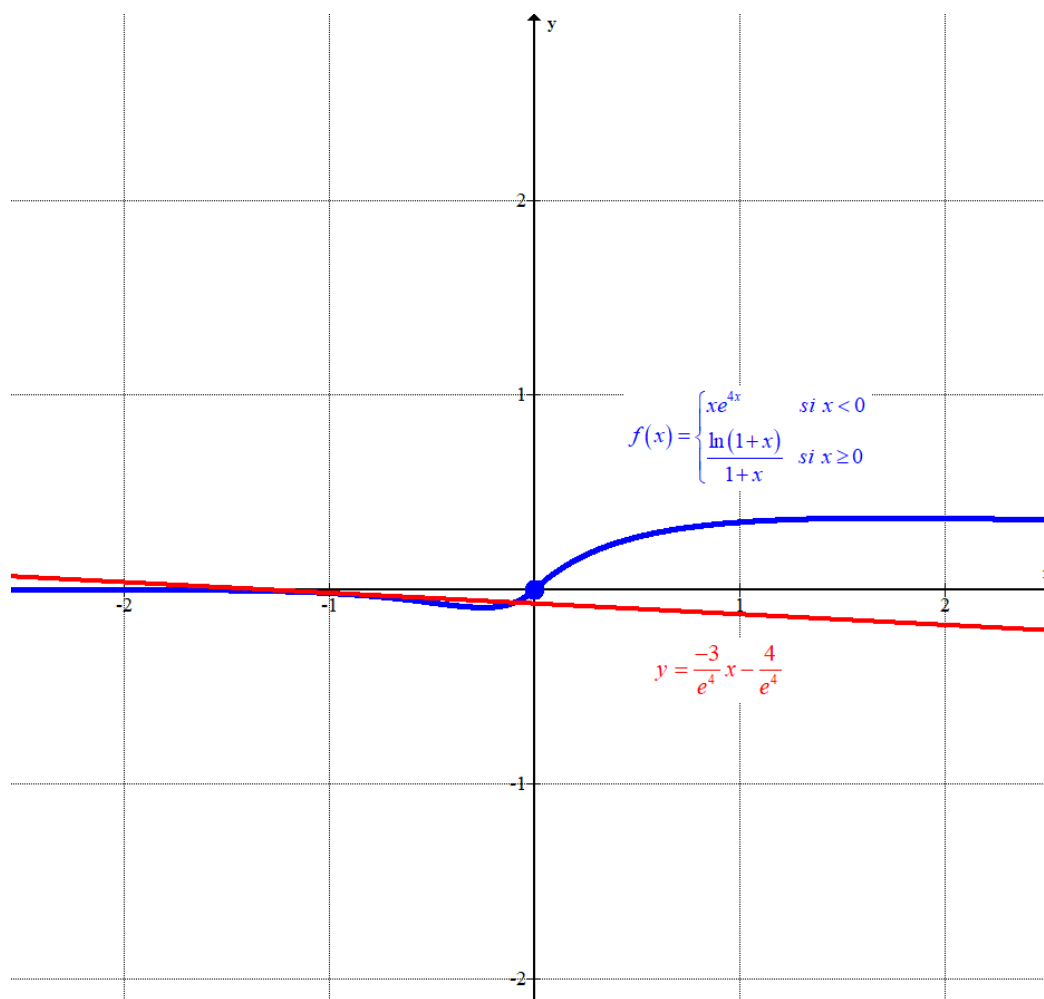
Coinciden las derivadas laterales y la función es derivable en $x = 0$.

La función es derivable en todo su dominio $\mathbb{R}$.

3.2.3. Hallamos la recta tangente a la curva $f(x)$ en $x = -1$. En el entorno de $x = -1$ la función tiene la expresión $f(x) = xe^{4x}$, siendo su derivada $f'(x) = (1+4x)e^{4x}$.

$$\left. \begin{array}{l} f = (-1)e^{4(-1)} = \frac{-1}{e^4} \\ f'(-1) = (1+4(-1))e^{4(-1)} = \frac{-3}{e^4} \\ y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \end{array} \right\} \Rightarrow y + \frac{1}{e^4} = \frac{-3}{e^4}(x+1) \Rightarrow y = \frac{-3x}{e^4} - \frac{3}{e^4} - \frac{1}{e^4} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-3x}{e^4} - \frac{4}{e^4}}$$

La recta tangente a la curva $f(x)$ en $x = -1$ tiene ecuación $y = \frac{-3}{e^4}x - \frac{4}{e^4}$.



4.1. Considérense los planos $\pi: 2x+3y+z+1=0$ y $\pi': x+z-1=0$ y los puntos $A(2,1,0)$ y $B(-1,-2,3)$.

4.1.1. Calcule la distancia del punto A al plano paralelo a π que pasa por B .

4.1.2. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π' .

4.1.1. Un plano paralelo a $\pi: 2x+3y+z+1=0$ tiene ecuación $\pi_1: 2x+3y+z+D=0$. Hallamos el valor de D para que π_1 contenga el punto B .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: 2x+3y+z+D=0 \\ B(-1,-2,3) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(-1)+3(-2)+3+D=0 \Rightarrow -2-6+3+D=0 \Rightarrow \boxed{D=5}$$

El plano paralelo a π que pasa por B tiene ecuación $\pi_1: 2x+3y+z+5=0$.

Calculamos la distancia del punto A al plano π_1 .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: 2x+3y+z+5=0 \\ A(2,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, \pi_1) = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{14}}{7} \approx 3.207u$$

4.1.2. Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de los planos π y π' .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x+3y+z+1=0 \\ \pi': x+z-1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x+3y+z+1=0 \\ z=1-x \end{array} \right\} \Rightarrow 2x+3y+1-x+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+3y+2=0 \Rightarrow x=-2-3y \Rightarrow z=1+2+3y=3+3y \Rightarrow r: \begin{cases} x=-2-3\lambda \\ y=\lambda \\ z=3+3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π' son

$$r: \begin{cases} x=-2-3\lambda \\ y=\lambda \\ z=3+3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.2. Dadas las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y $s: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

4.2.1. Calcule la posición relativa de las rectas r y s .

4.2.2. Obtenga la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s .

4.2.1. Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,2,1) \\ \vec{u}_r = (2, -1, 1) \end{cases}$$

$$s: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(2,1,1) \\ \vec{v}_s = (4, -2, 2) \rightarrow \vec{w}_s = (2, -1, 1) \end{cases}$$

Como los vectores directores de las rectas son iguales: $\vec{u}_r = \vec{w}_s = (2, -1, 1)$ estas rectas o son paralelas o coincidentes. Vemos si la recta s pasa por el punto $P_r(1,2,1)$ de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} s: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2} \\ \text{¿} P_r(1,2,1) \in s? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \frac{1-2}{4} = \frac{2-1}{-2} = \frac{1-1}{2} ? \Rightarrow \text{¿} \frac{-1}{4} = \frac{1}{-2} = \frac{0}{2} ? \text{ ¡¡NO!!}$$

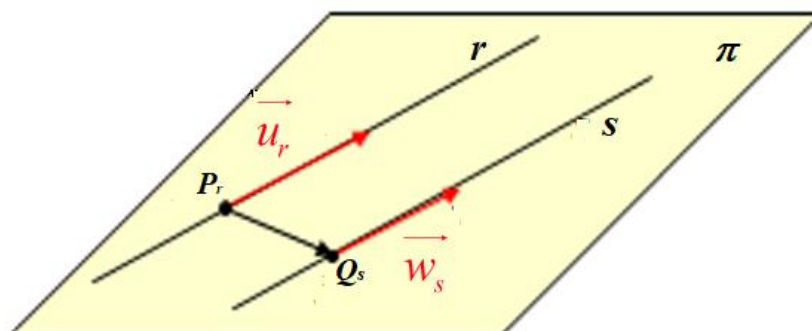
El punto P_r no cumple las igualdades, por lo que la recta s no pasa por el punto P_r . Las rectas no son coincidentes y son paralelas.

4.2.2. El plano que contiene a las rectas r y s tiene como uno de sus vectores directores el vector director de las rectas $\vec{u}_r = (2, -1, 1)$ y otro de sus vectores directores es $\overrightarrow{P_r Q_s}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_r = (2, -1, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (2, 1, 1) - (1, 2, 1) = (1, -1, 0) \\ P_r(1, 2, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + y - 2 - 2z + 2 + z - 1 + 0 + x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x + y - z - 2 = 0}$$

La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s es $\pi: x + y - z - 2 = 0$.



PAU Ordinaria 2025



PAU
Convocatoria ordinaria 2025
MATEMÁTICAS II

CÓDIGO 20

El examen consta de 4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)**CONTEXTO**

Las cafeterías universitarias son espacios en los que, además de poder consumir alimentos y bebidas, en numerosas ocasiones se emplean como puntos de encuentro para otros eventos. Según los datos recogidos por la dirección de la cafetería de una facultad, el 65% de sus clientes son estudiantes, el 25% personal de la universidad y el 10% restante son personas ajenas a la universidad.

Con el objetivo de estudiar si es necesario realizar modificaciones en la cafetería, sus responsables han analizado datos sobre el tiempo de espera hasta que un cliente ha sido atendido y sobre la forma de realizar los pagos. Puede suponerse que el tiempo de espera hasta que un cliente es atendido sigue una distribución aproximadamente normal, con media igual a 5 minutos y de tal modo que el 90% de los clientes son atendidos antes de 8 minutos. Por los datos recogidos, han llegado a la conclusión de que el 30% de los estudiantes efectúan los pagos en efectivo, siendo este porcentaje igual al 70% para el personal de la universidad, mientras que el 80% de los pagos realizados por personas ajenas a la universidad se hacen en efectivo.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente sea atendido antes de 4 minutos?

1.2. Calcular la probabilidad de que un pago en esta cafetería no haya sido realizado en efectivo.

1.3. Si un pago se hizo en efectivo, ¿qué es más probable, que haya sido realizado por estudiantes o por personal de la universidad?

PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Responda a las dos cuestiones siguientes:

2.1.1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, halle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, donde I y 0 son las matrices identidad y cero, respectivamente.

2.1.2. Calcule la matriz cuadrada X tal que $XA = B$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Son iguales XA y AX ?

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:
$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

3.1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - m & \text{si } x > 1 \end{cases}$ se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.1.1. ¿Qué condición deben cumplir k y m para que f sea continua en $x = 1$?

3.1.2. ¿Para qué valores de k y m es f derivable en $x = 1$?

3.2. Dibuje la región encerrada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{2x+1}$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 4$. Luego, calcule su área.

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Determine el valor que debe tomar k para que los planos

$$\pi_1 : kx + y + \frac{1}{4}z + 2 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : 3x + 4y + z + 3 = 0$$

sean paralelos. Calcule también el valor de k que hace que esos mismos planos sean perpendiculares.

4.2. Considérense el punto $P(0,1,0)$ y la recta $r : (x, y, z) = (2, 0, 3) + \lambda(1, 2, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.2.1. Determine la ecuación continua de la recta s que es paralela a r y pasa por el punto P .

4.2.2. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por P y es perpendicular a r .

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)**CONTEXTO**

Las cafeterías universitarias son espacios en los que, además de poder consumir alimentos y bebidas, en numerosas ocasiones se emplean como puntos de encuentro para otros eventos. Según los datos recogidos por la dirección de la cafetería de una facultad, el 65% de sus clientes son estudiantes, el 25% personal de la universidad y el 10% restante son personas ajenas a la universidad.

Con el objetivo de estudiar si es necesario realizar modificaciones en la cafetería, sus responsables han analizado datos sobre el tiempo de espera hasta que un cliente ha sido atendido y sobre la forma de realizar los pagos. Puede suponerse que el tiempo de espera hasta que un cliente es atendido sigue una distribución aproximadamente normal, con media igual a 5 minutos y de tal modo que el 90% de los clientes son atendidos antes de 8 minutos. Por los datos recogidos, han llegado a la conclusión de que el 30% de los estudiantes efectúan los pagos en efectivo, siendo este porcentaje igual al 70% para el personal de la universidad, mientras que el 80% de los pagos realizados por personas ajenas a la universidad se hacen en efectivo.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente sea atendido antes de 4 minutos?

1.2. Calcular la probabilidad de que un pago en esta cafetería no haya sido realizado en efectivo.

1.3. Si un pago se hizo en efectivo, ¿qué es más probable, que haya sido realizado por estudiantes o por personal de la universidad?

1.1. Sea X = el tiempo de espera hasta que un cliente es atendido. $X = N(5, \sigma)$.

Además, nos dicen que $P(X < 8) = 0.9$.

$$P(X < 8) = 0.9 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{8-5}{\sigma}\right) = 0.9 \Rightarrow P\left(Z < \frac{3}{\sigma}\right) = 0.9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{\sigma} = \frac{1.28 + 1.29}{2} = 1.285 \Rightarrow \sigma = \frac{3}{1.285} \approx 2.33$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015

Hemos obtenido que $X = N(5, 2.33)$.

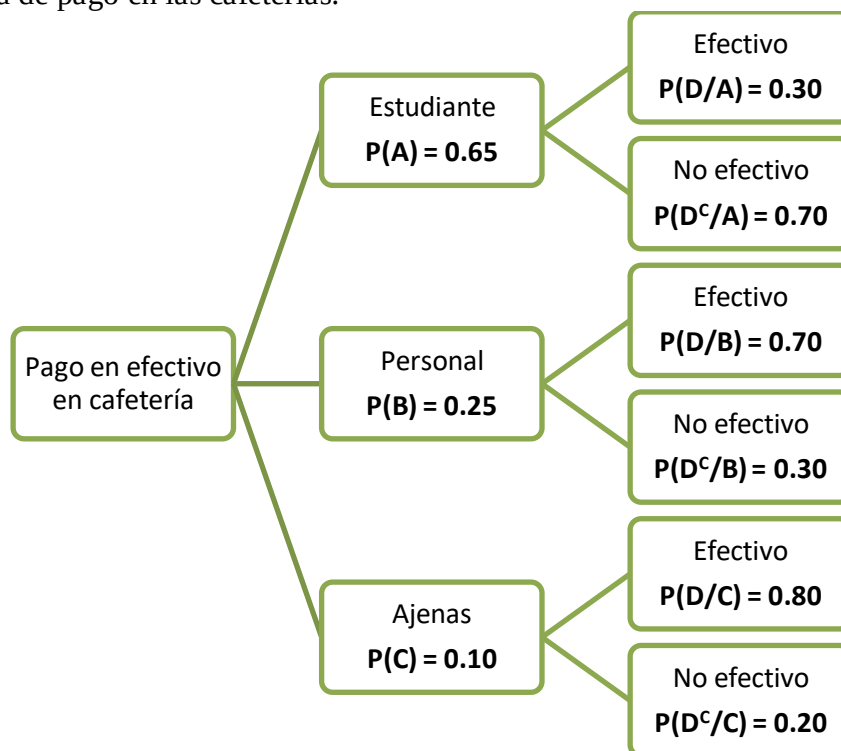
Nos piden calcular $P(X < 4)$.

$$P(X < 4) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{4-5}{2.33}\right) = P(Z < -0.43) = P(Z > 0.43) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.43) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6664 = 0.3336$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700

1.2. Realizamos un diagrama de árbol que nos permite esquematizar la información proporcionado sobre la forma de pago en las cafeterías.



Nos piden calcular $P(D^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(D^c) &= P(A) \cdot P(D^c / A) + P(B) \cdot P(D^c / B) + P(C) \cdot P(D^c / C) = \\
 &= 0.65 \cdot 0.7 + 0.25 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.2 = \boxed{0.55}
 \end{aligned}$$

1.3. Calculamos $P(A/D)$ y $P(B/D)$. Son probabilidades a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{1 - P(D^c)} = \frac{0.65 \cdot 0.3}{1 - 0.55} = \frac{13}{30} \approx 0.4333$$

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{1 - P(D^c)} = \frac{0.25 \cdot 0.7}{1 - 0.55} = \frac{7}{18} \approx 0.3889$$

Como $P(A/D) = 0.4333 > P(B/D) = 0.3889$ sabemos que si alguien pagó en efectivo es más probable que sea alumno que personal de la universidad.

PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos).**2.1.** Responda a las dos cuestiones siguientes:

2.1.1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, halle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, donde I y 0 son las matrices identidad y cero, respectivamente.

2.1.2. Calcule la matriz cuadrada X tal que $XA = B$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Son iguales XA y AX ?

2.1.1. Resolvemos la ecuación matricial.

$$\begin{aligned}
 A^2 + \alpha A + \beta I = 0 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 4+10 & 10-5 \\ 4-2 & 10+1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 14+2\alpha+\beta & 5+5\alpha \\ 2+2\alpha & 11-\alpha+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 14+2\alpha+\beta=0 \\ 5+5\alpha=0 \rightarrow \boxed{\alpha=-1} \\ 2+2\alpha=0 \rightarrow \alpha=-1 \\ 11-\alpha+\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14-2+\beta=0 \\ 11+1+\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\beta=-12} \\ \beta=-12 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Los valores buscados son $\alpha = -1$ y $\beta = -12$.**2.1.2.** Comprobamos que la matriz A tiene inversa y la calculamos.

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \\
 A^{-1} &= \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Despejamos X en la ecuación matricial y obtenemos su expresión

$$XA = B \Rightarrow X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0+1 \\ 1-1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz solución es $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.¿Son iguales XA y AX ? Calculamos ambos productos y los comparamos.

$$\begin{aligned}
 XA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0+1 \\ 0+1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 AX &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \Rightarrow XA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = AX$$

No son iguales los productos.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m + m + m - m^3 - 1 - 1 = -m^3 + 3m - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^3 + 3m - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} -1 \quad 0 \quad 3 \quad -2 \\ \underline{1} \quad \quad -1 \quad -1 \quad 2 \\ -1 \quad -1 \quad 2 \quad \underline{0} \end{array} \Rightarrow -m^3 + 3m - 2 = (m-1)(-m^2 - m + 2)$$

$$\begin{array}{r} -1 \quad -1 \quad 2 \\ \underline{1} \quad \quad -1 \quad -2 \\ -1 \quad -2 \quad \underline{0} \end{array} \Rightarrow -m^3 + 3m - 2 = (m-1)^2(-m-2)$$

El determinante se anula para $m=1$ y $m=-2$. Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m=1$

El sistema queda tan sencillo que lo intentamos resolver.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \Rightarrow x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 3. $m = -2$

Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -2 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad 2 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \quad -4 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -3 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 3 \quad -3 \quad 3 \\ 0 \quad -3 \quad 3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad -2 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad -3 \quad 3 \quad 0 \\ 0 \quad \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A \quad 3 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible**.

Resumiendo: Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$ el sistema es compatible determinado, si $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado y si $m = -2$ el sistema es incompatible.

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

3.1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - m & \text{si } x > 1 \end{cases}$ se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.1.1. ¿Qué condición deben cumplir k y m para que f sea continua en $x = 1$?

3.1.2. ¿Para qué valores de k y m es f derivable en $x = 1$?

3.1.1. Para que f sea continua en $x = 1$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= k \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = k + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} kx^2 + 2x = k + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - m = 1 - m \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow k + 2 = 1 - m \Rightarrow \boxed{m = -k - 1}$$

Para que se cumpla lo pedido debe ser $m = -k - 1$.

3.1.2. Para ser derivable debe ser continua, por lo que debe cumplirse $m = -k - 1$.

La función queda $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + k + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Esta función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. Su derivada es $f'(x) = \begin{cases} 2kx + 2 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Para que sea derivable en $x = 1$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2kx + 2 = 2k + 2 \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2 \\ f'(1^-) &= f'(1^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2k + 2 = 2 \Rightarrow \boxed{k = 0}$$

La función f derivable en $x = 1$ para $k = 0$ y $m = -k - 1 = 0 - 1 = -1$.

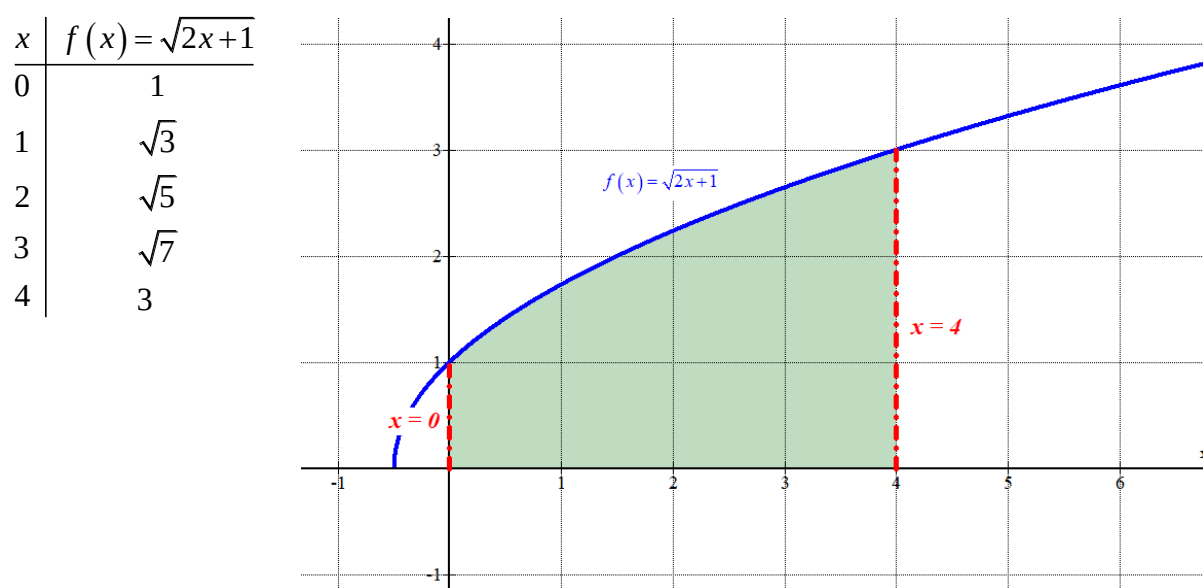
3.2. Dibuje la región encerrada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{2x+1}$, el eje X y las rectas $x=0$, $x=4$. Luego, calcule su área.

Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje X .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{2x+1} \\ \text{Eje } X \rightarrow y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{2x+1} = 0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \notin (0,4)$$

La gráfica no corta el eje X . Como la función es positiva el área de la región encerrada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{2x+1}$, el eje X y las rectas $x=0$, $x=4$ es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 4.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función y la región de la cual queremos hallar su área. Con el dibujo podemos aproximar el valor del área.



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada podemos decir que el área de la región coloreada tiene un valor entre 8 y 9 unidades cuadradas.

Hallamos el valor exacto del área usando el cálculo integral.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 \sqrt{2x+1} dx = \int_0^4 (2x+1)^{1/2} dx = \\ &= \left[\frac{1}{1+1/2} \cdot \frac{1}{2} (2x+1)^{1+1/2} \right]_0^4 = \left[\frac{1}{3} (2x+1)^{3/2} \right]_0^4 = \left[\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} \right]_0^4 = \\ &= \left[\frac{\sqrt{(2 \cdot 4 + 1)^3}}{3} \right] - \left[\frac{\sqrt{(2 \cdot 0 + 1)^3}}{3} \right] = \frac{\sqrt{9^3}}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{26}{3} \approx 8.667 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.**4.1.** Determine el valor que debe tomar k para que los planos

$$\pi_1 : kx + y + \frac{1}{4}z + 2 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : 3x + 4y + z + 3 = 0$$

sean paralelos. Calcule también el valor de k que hace que esos mismos planos sean perpendiculares.

Para que dos planos sean paralelos sus vectores normales deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : kx + y + \frac{1}{4}z + 2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = \left(k, 1, \frac{1}{4}\right) \\ \pi_2 : 3x + 4y + z + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (3, 4, 1) \\ \pi_1 \parallel \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{k}{3} = \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{4}}{1} \Rightarrow \frac{k}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{k = \frac{3}{4}}$$

Para que los planos sean perpendiculares deben serlo sus vectores normales. Y para ello el producto escalar de estos vectores debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : kx + y + \frac{1}{4}z + 2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = \left(k, 1, \frac{1}{4}\right) \\ \pi_2 : 3x + 4y + z + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (3, 4, 1) \\ \pi_1 \perp \pi_2 \rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(k, 1, \frac{1}{4}\right) \cdot (3, 4, 1) = 0 \Rightarrow 3k + 4 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3k + \frac{17}{4} = 0 \Rightarrow 3k = -\frac{17}{4} \Rightarrow \boxed{k = -\frac{17}{12}}$$

Para que los planos sean paralelos debe ser $k = \frac{3}{4}$ y para que sean perpendiculares debe ser

$$k = -\frac{17}{12}.$$

4.2. Considérense el punto $P(0,1,0)$ y la recta $r : (x, y, z) = (2, 0, 3) + \lambda(1, 2, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.2.1. Determine la ecuación continua de la recta s que es paralela a r y pasa por el punto P .

4.2.2. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por P y es perpendicular a r .

4.2.1. Al ser paralela a r debe tener el mismo vector director. Hallamos la ecuación de la recta s con vector director igual que el de la recta r : $\vec{u}_s = \vec{v}_r = (1, 2, 3)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \vec{v}_r = (1, 2, 3) \\ P(0, 1, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s : (x, y, z) = (0, 1, 0) + \alpha(1, 2, 3), \alpha \in \mathbb{R}$$

4.2.2. El plano perpendicular a la recta r tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 2, 3) \\ P(0, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : x + 2y + 3z + D = 0 \\ P(0, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 2 + 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -2 \Rightarrow \boxed{\pi : x + 2y + 3z - 2 = 0}$$

ABAU Extraordinaria 2024



ABAU
Convocatoria extraordinaria 2024
MATEMÁTICAS II

CÓDIGO 20

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

PREGUNTA 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ dé respuesta a los dos apartados siguientes:

- Calcule los valores de x e y que hacen que A conmute con todas las matrices antisimétricas X de orden 2, es decir, que hacen que se cumpla la igualdad $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orden 2.
- Si $x = -1$ e $y = 1$, calcule la matriz M que satisface la igualdad $2M = A^{-1} - AM$.

PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} 2x + y + z = m \\ x - y + 2z = 2m \\ mx + 3z = m \end{cases}$$

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{k - xe^x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en $x = 0$ para cualquier valor de b ?
- ¿Para qué valores de b y k es f derivable en $x = 0$?

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)

Determine el valor del número positivo a que hace que el área de la región encerrada por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = ax^2 + 4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.

PREGUNTA 5. Geometría. (2 puntos)

Considérense el plano $\pi: x + 2y - 2z = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,1,1)$. Se pide:

- Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π .
- Obtener la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es perpendicular a π .

PREGUNTA 6. Geometría. (2 puntos)

Sean r la recta que pasa por los puntos $A(-1,3,-5)$ y $B(1,2,-5)$ y π el plano que pasa por el punto $C(5,0,1)$ y es perpendicular a r . Se piden las ecuaciones paramétricas de r , la ecuación implícita o general de π y el punto de corte de r con π .

PREGUNTA 7. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

En una determinada colonia de cormoranes, cada huevo que se pone tiene un 13% de probabilidades de ser infértil. Si se observa la puesta de 7 huevos, calcule la probabilidad de que entre ellos haya por lo menos 2 infértiles.

PREGUNTA 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

La durabilidad de un determinado aparato electrónico sigue una distribución normal de media 20000 horas y desviación típica 2500 horas.

- Si elegimos al azar uno de estos aparatos, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 17000 horas?
- ¿Cuál es la durabilidad, en horas, excedida por el 98,5% de estos aparatos?

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ dé respuesta a los dos apartados siguientes:

- a) Calcule los valores de x e y que hacen que A conmute con todas las matrices antisimétricas X de orden 2, es decir, que hacen que se cumpla la igualdad $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orden 2.
- b) Si $x = -1$ e $y = 1$, calcule la matriz M que satisface la igualdad $2M = A^{-1} - AM$.

- a) Si X es una matriz antisimétrica cumple que $X^T = -X$.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow X^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$X^T = -X \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -a \rightarrow 2a = 0 \rightarrow a = 0 \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \rightarrow 2d = 0 \rightarrow d = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

Si la matriz A conmuta con la matriz X se cumple $AX = XA$.

$$AX = XA \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -b & b \\ -by & bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx & by \\ -b & -b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -b = bx \\ b = by \\ -by = -b \\ bx = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b = bx \\ b = by \end{cases} \Rightarrow \{b \neq 0\} \Rightarrow \begin{cases} -1 = x \\ 1 = y \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores buscados son $x = -1, y = 1$.

- b) La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Multiplicamos la igualdad por la matriz A y despejamos M .

$$2M = A^{-1} - AM \Rightarrow 2AM = AA^{-1} - AAM \Rightarrow 2AM = I - A^2M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2AM + A^2M = I \Rightarrow (2A + A^2)M = I \Rightarrow M = (2A + A^2)^{-1}$$

Hallamos la expresión de $2A + A^2$.

$$2A + A^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-1 & 1+1 \\ -1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la inversa de $2A + A^2$ que es la matriz M buscada.

$$|2A + A^2| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 16 = 20$$

$$(2A + A^2)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((2A + A^2)^T\right)}{|2A + A^2|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}{20} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 & -1/5 \\ 1/5 & 1/10 \end{pmatrix}$$

La matriz M buscada es $M = \begin{pmatrix} 1/10 & -1/5 \\ 1/5 & 1/10 \end{pmatrix}$.

PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} 2x + y + z = m \\ x - y + 2z = 2m \\ mx + 3z = m \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 & 2m \\ m & 0 & 3 & m \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 2m + 0 + m - 3 - 0 = 3m - 9$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3m - 9 = 0 \Rightarrow 3m = 9 \Rightarrow m = \frac{9}{3} = 3$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. $m \neq 3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = 3$

Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A/B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 3 \quad 0 \quad 3 \quad 3 \\ -3 \quad 3 \quad -6 \quad -18 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -3 \quad -15 \rightarrow \text{Fila } 3^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ -2 \quad 2 \quad -4 \quad -12 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -3 \quad -9 \rightarrow \text{Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 3 & -3 & -15 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 3 \quad -3 \quad -15 \\ 0 \quad -3 \quad 3 \quad 9 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{2 \quad 1 \quad 1 \quad 3}^{A/B} \\ 0 \quad 3 \quad -3 \quad -9 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -6}_A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible**.

Resumiendo: Si $m \neq 3$ el sistema es compatible determinado y si $m = 3$ el sistema es incompatible.

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{k - xe^x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones:

- a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en $x = 0$ para cualquier valor de b ?
 b) ¿Para qué valores de b y k es f derivable en $x = 0$?

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

- Existe $f(0) = 0^2 + b \cdot 0 - 1 = -1$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + bx - 1 = -1$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k - xe^x}{x} = \frac{k - 0}{0} = \dots$, para que exista el límite debe ser $k = 0$, en caso contrario el límite vale ∞ y la función no sería continua.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -e^x = -e^0 = -1$$

- Los tres valores son iguales. Se cumple para $k = 0$.

El valor de k que hace que f sea continua en $x = 0$ para cualquier valor de b es $k = 0$.

b) Para que la función sea derivable en $x = 0$ debe ser continua, por lo que $k = 0$.

La función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{-xe^x}{x} = -e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Para que sea derivable en $x = 0$ deben coincidir las derivadas laterales.

Obtenemos la derivada de la función en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{si } x < 0 \\ -e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calculamos las derivadas laterales en $x = 0$ y hacemos que tengan el mismo valor.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x + b = b \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -e^x = -e^0 = -1 \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

Los valores que hacen que f derivable en $x = 0$ son $k = 0$ y $b = -1$.

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)

Determine el valor del número positivo a que hace que el área de la región encerrada por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = ax^2 + 4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.

Hallamos los puntos de corte de recta y parábola.

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x \\ y = ax^2 + 4x \end{array} \right\} \Rightarrow -2x = ax^2 + 4x \Rightarrow ax^2 + 6x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(ax + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + 6 = 0 \rightarrow ax = -6 \rightarrow \{a > 0\} \rightarrow x = \frac{-6}{a} < 0 \end{cases}$$

Hallamos el área de la región encerrada por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = ax^2 + 4x$ que calculamos como el valor absoluto de la integral definida entre $x = \frac{-6}{a}$ y $x = 0$ de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_{-6/a}^0 ax^2 + 4x - (-2x) dx = \int_{-6/a}^0 ax^2 + 6x dx = \left[\frac{ax^3}{3} + 3x^2 \right]_{-6/a}^0 =$$

$$= \left[\frac{a \cdot 0^3}{3} + 3 \cdot 0^2 \right] - \left[\frac{a \left(\frac{-6}{a} \right)^3}{3} + 3 \left(\frac{-6}{a} \right)^2 \right] = - \left[\frac{-a \frac{6^3}{a^3}}{3} + 3 \frac{36}{a^2} \right] =$$

$$= - \left[\frac{-\frac{216}{a^2}}{3} + \frac{108}{a^2} \right] = \frac{216}{3a^2} - \frac{108}{a^2} = \frac{72}{a^2} - \frac{108}{a^2} = \frac{-36}{a^2}$$

El área del recinto tiene un valor de $\frac{36}{a^2}$ unidades cuadradas.

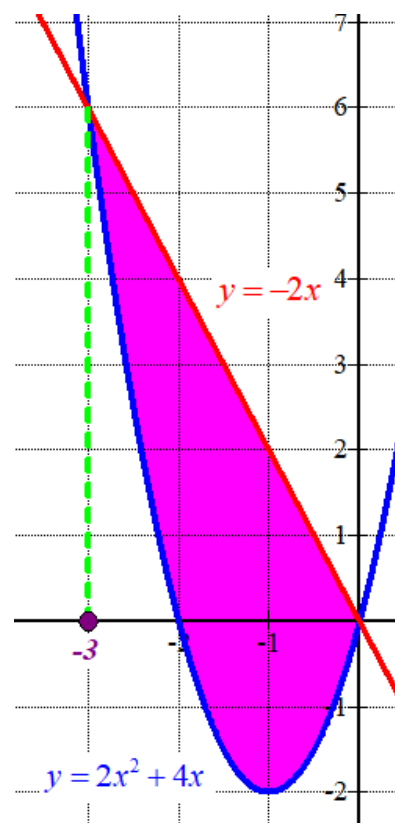
Igualemos el área a 9 y despejamos a .

$$\frac{36}{a^2} = 9 \Rightarrow 36 = 9a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{36}{9} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \{a > 0\} \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

El valor buscado es $a = 2$.

La parábola queda $y = 2x^2 + 4x$ y los puntos de corte de ambas gráficas son $x = 0$ y $x = -3$.



PREGUNTA 5. Geometría. (2 puntos)

Considérense el plano $\pi: x + 2y - 2z = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,1,1)$. Se pide:

- Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π .
- Obtener la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es perpendicular a π .

a) Hallamos la ecuación de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (0,1,1) - (2,1,2) = (-2,0,-1) \\ B(0,1,1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Comprobamos si el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, es decir, si su producto escalar es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + 2y - 2z = 0 \rightarrow \vec{n} = (1, 2, -2) \\ \vec{v}_r = (-2, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (1, 2, -2) \cdot (-2, 0, -1) = -2 + 0 + 2 = 0$$

Al ser el producto escalar nulo la recta es paralela al plano o está contenida en él.

Comprobamos si el punto $B(0,1,1)$ de la recta pertenece al plano o no.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + 2y - 2z = 0 \\ B(0,1,1) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 2 - 2 = 0?$$

Como la igualdad es cierta el punto B pertenece al plano, al igual que el resto de puntos de la recta. La recta r está contenida en el plano π .

- El plano π' perpendicular al plano π tiene como uno de sus vectores directores el vector normal del plano π .

Como el plano π' contiene a la recta r el otro vector director del plano π' es el vector director de la recta r y el punto B pertenece al plano π' .

$$\left. \begin{array}{l} B(0,1,1) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{n} = (1, 2, -2) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (-2, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + 4(y-1) + 0 + 4(z-1) + y - 1 - 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + 4y - 4 + 4z - 4 + y - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': -2x + 5y + 4z - 9 = 0}$$

La ecuación implícita del plano que contiene a r y es perpendicular a π es

$$\pi': -2x + 5y + 4z - 9 = 0.$$

PREGUNTA 6. Geometría. (2 puntos)

Sean r la recta que pasa por los puntos $A(-1,3,-5)$ y $B(1,2,-5)$ y π el plano que pasa por el punto $C(5,0,1)$ y es perpendicular a r . Se piden las ecuaciones paramétricas de r , la ecuación implícita o general de π y el punto de corte de r con π .

Hallamos la ecuación de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (1,2,-5) - (-1,3,-5) = (2,-1,0) \\ B(1,2,-5) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -5 \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos la ecuación del plano π que pasa por el punto $C(5,0,1)$ y es perpendicular a r . Al ser perpendicular a la recta el vector normal del plano es el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (2,-1,0) \\ C(5,0,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y + D = 0 \\ C(5,0,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 10 - 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -10 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x - y - 10 = 0}$$

El plano que pasa por el punto $C(5,0,1)$ y es perpendicular a r tiene ecuación $\pi: 2x - y - 10 = 0$.

Hallamos el punto D de corte de recta y plano resolviendo el sistema formado por sus respectivas ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y - 10 = 0 \\ r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -5 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) - (2 - \lambda) - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 4\lambda - 2 + \lambda - 10 = 0 \Rightarrow 5\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 4 = 5 \\ y = 2 - 2 = 0 \\ z = -5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(5,0,-5)}$$

El punto de corte de r con π tiene coordenadas $D(5,0,-5)$.

PREGUNTA 7. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

En una determinada colonia de cormoranes, cada huevo que se pone tiene un 13% de probabilidades de ser infértil. Si se observa la puesta de 7 huevos, calcule la probabilidad de que entre ellos haya por lo menos 2 infértiles.

Llamamos X a la variable que cuenta el número de huevos infértiles de un grupo de 7 huevos. Esta variable aleatoria es binomial pues cada repetición es independiente de la otra y en cada repetición solo puede pasar que el huevo sea fértil o infértil.

Esta binomial tiene parámetros $n = 7$ y $p = 0.13$.

$X = B(7, 0.13)$

Nos piden calcular $P(X \geq 2)$. Como esta probabilidad es laboriosa de calcular utilizamos el suceso contrario.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = \\ &= 1 - \left[\binom{7}{0} 0.13^0 \cdot 0.87^7 + \binom{7}{1} 0.13^1 \cdot 0.87^6 \right] = 1 - [0.87^7 + 7 \cdot 0.13 \cdot 0.87^6] \approx \boxed{0.2281} \end{aligned}$$

La probabilidad de que entre los 7 huevos haya por lo menos 2 infértiles tiene un valor aproximado de 0.2281.

PREGUNTA 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

La durabilidad de un determinado aparato electrónico sigue una distribución normal de media 20000 horas y desviación típica 2500 horas.

- a) Si elegimos al azar uno de estos aparatos, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 17000 horas?
b) ¿Cuál es la durabilidad, en horas, excedida por el 98,5% de estos aparatos?

X es la durabilidad de un determinado aparato electrónico (en horas). $X = N(20000, 2500)$

- a) Nos piden calcular $P(X < 17000)$.

$$P(X < 17000) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z < \frac{17000 - 20000}{2500}\right) = P(Z < -1.2) =$$

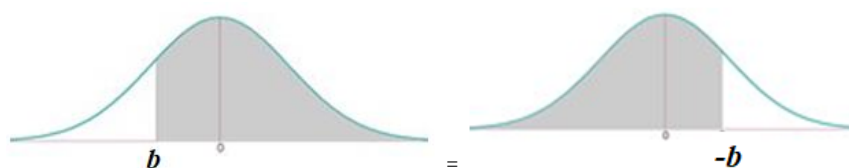
$$= P(Z > 1.2) = 1 - P(Z < 1.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8849 = \boxed{0.1151}$$

La probabilidad de que un aparato dure menos de 17000 horas es de 0.1151.

- b) Nos piden hallar “a” tal que $P(X \geq a) = 0.985$.

$$P(X \geq a) = 0.985 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 20000}{2500}\right) = 0.985 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Probabilidad mayor que 0.5} \rightarrow \\ \frac{a - 20000}{2500} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \dots$$



$$\dots \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a - 20000}{2500}\right) = 0.985 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{a - 20000}{2500} = 2.17 \Rightarrow -a + 20000 = 2.17 \cdot 2500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20000 - 5425 = a \Rightarrow \boxed{a = 14575 \text{ horas}}$$

La durabilidad, en horas, excedida por el 98,5% de estos aparatos es 14 575 horas.

ABAU Ordinaria 2024



ABAU
Convocatoria ordinaria 2024
MATEMÁTICAS II

CÓDIGO 20

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

PREGUNTA 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Sean A y B dos matrices tales que $A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Calcule A^2 .
- Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A^2 X - (A + B)^T = 3I - 2X$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A + B)^T$ la traspuesta de $(A + B)$.

PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3 \\ 2mx + 3my + 2z = 5 \\ (m-4)y + mz = m \end{cases}$$

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)

- Enuncie los teoremas de Rolle y de Bolzano.
- Calcule $\int x^3 e^{x^2} dx$

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)

Calcule los siguientes límites:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$

PREGUNTA 5. Geometría. (2 puntos)

- Considere el plano $\pi: 4x + 2y + bz = 2$ y la recta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4}$ donde b y c son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar b y c para que la recta r esté contenida en π .
- Calcule la distancia del punto $P(1, 3, 1)$ al plano $\pi': 4x + 2y - 4z = 2$.

PREGUNTA 6. Geometría. (2 puntos)

- Considere los puntos $Q(-1, 3, -5)$, $R(3, 1, 0)$ y $S(0, 1, 2)$. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a Q , R y S .
- Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(3, -1, -1)$ y sea perpendicular al plano $\pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0$.

PREGUNTA 7. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Sabiendo que $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$.

a) Suponiendo que A y B son sucesos independientes, calcule $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} / (\bar{A} \cup \bar{B}))$.

b) Suponiendo que A y B son sucesos incompatibles, calcule $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} / (\bar{A} \cup \bar{B}))$.

(Nota: $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son los sucesos contrarios o complementarios de A y B, respectivamente).

PREGUNTA 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.

a) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?

b) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97,5% de estas botellas?

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Sean A y B dos matrices tales que $A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2 .

b) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A^2X - (A+B)^T = 3I - 2X$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $(A+B)$.

a) Resolvemos el sistema matricial planteado para obtener la expresión de las matrices A y B.

$$\left. \begin{array}{l} A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \{\text{Ecuación 1}^a - \text{Ecuación 2}^a\} \Rightarrow 2B - B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculamos A^2 .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 2+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Despejamos X en la ecuación matricial planteada.

$$A^2X - (A+B)^T = 3I - 2X \Rightarrow A^2X + 2X = (A+B)^T + 3I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A^2 + 2I)X = (A+B)^T + 3I \Rightarrow X = (A^2 + 2I)^{-1}[(A+B)^T + 3I]$$

Calculamos la expresión de la matriz X haciendo uso de lo obtenido en el apartado anterior.

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2I = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A^2 + 2I| = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$(A^2 + 2I)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((A^2 + 2I)^T\right)}{|A^2 + 2I|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}{18} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^2 + 2I)^{-1} \left[(A+B)^T + 3I \right] = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 21+3 & 0-15 \\ 0-6 & 0+30 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 24 & -15 \\ -6 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ -1/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ -1/3 & 5/3 \end{pmatrix}$.

PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3 \\ 2mx + 3my + 2z = 5 \\ (m-4)y + mz = m \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m & m+2 & 1 & 3 \\ 2m & 3m & 2 & 5 \\ 0 & m-4 & m & m \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{vmatrix} = 3m^3 + 0 + 2m(m-4) - 0 - 2m^2(m+2) - 2m(m-4) = \\ &= 3m^3 + \cancel{2m^2} - 8m - 2m^3 - 4m^2 - \cancel{2m^2} + 8m = m^3 - 4m^2 \end{aligned}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^3 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m^2(m-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - 4 = 0 \rightarrow m = 4 \end{cases}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq 4$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = 0$

El sistema queda tan sencillo que lo intentamos resolver.

$$\begin{cases} 2y + z = 3 \\ -2z = 5 \\ -4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + z = 3 \\ z = \frac{-5}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 0 + \frac{-5}{2} = 3 \Rightarrow \frac{-5}{2} = 3 \text{ ¡Imposible!}$$

El sistema es **incompatible** (sin solución)

CASO 3. $m = 4$

Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 3 \\ 8 & 12 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 8 \quad 12 \quad 2 \quad 5 \\ -8 \quad -12 \quad -2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 3^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{4 \quad 6 \quad 1 \quad 3}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad 4 \quad 4 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -1}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible**.

Resumiendo: Si $m \neq 0$ y $m \neq 4$ el sistema es compatible determinado y si $m = 0$ o $m = 4$ el sistema es incompatible.

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)

a) Enuncie los teoremas de Rolle y de Bolzano.

b) Calcule $\int x^3 e^{x^2} dx$

a) Está en los libros de texto.

b) Utilizamos integración por partes.

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int x^2 2x e^{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = 2x e^{x^2} dx \Rightarrow v = \int 2x e^{x^2} dx = e^{x^2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left[x^2 e^{x^2} - \int 2x e^{x^2} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \right) = \frac{e^{x^2}}{2} (x^2 - 1) + C$$

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$

a) Calculamos el valor del primer límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x} = \frac{\sin 0 - \ln(1+0)}{0 \cdot \sin 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x}}{\sin x + x \cos x} = \frac{\cos 0 - \frac{1}{1+0}}{\sin 0 + 0 \cdot \cos 0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-\sin 0 + \frac{1}{(1+0)^2}}{\cos 0 + \cos 0 - 0 \cdot \sin 0} = \frac{0+1}{1+1-0} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) Calculamos el valor del segundo límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2} = \frac{e^{\sin 0} - e^0}{0^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot e^{\sin x} - e^x}{2x} = \frac{\cos 0 \cdot e^{\sin 0} - e^0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} - e^x}{2} = \frac{-\sin 0 \cdot e^{\sin 0} + \cos 0 \cdot \cos 0 \cdot e^{\sin 0} - e^0}{2} =$$

$$= \frac{1-1}{2} = \boxed{0}$$

PREGUNTA 5. Geometría. (2 puntos)

- a) Considere el plano $\pi: 4x + 2y + bz = 2$ y la recta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4}$ donde b y c son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar b y c para que la recta r esté contenida en π .
- b) Calcule la distancia del punto $P(1, 3, 1)$ al plano $\pi': 4x + 2y - 4z = 2$.

- a) Para que la recta esté contenida en el plano cualquier punto de la recta debe pertenecer al plano (debe cumplir su ecuación).
Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(2, c, 3) \\ v_r = (3, 2, 4) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = c + 2\lambda \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases}$$

Hallamos otro punto de la recta que también debe pertenecer al plano.

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = c + 2\lambda \\ z = 3 + 4\lambda \\ \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow Q_r(5, c+2, 7)$$

El punto $Q_r(5, c+2, 7)$ pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} Q_r(5, c+2, 7) \in \pi \\ \pi: 4x + 2y + bz = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \cdot 5 + 2(c+2) + b \cdot 7 = 2 \Rightarrow 20 + 2c + 4 + 7b = 2 \Rightarrow \boxed{2c + 7b = -22}$$

El punto $P_r(2, c, 3)$ pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(2, c, 3) \in \pi \\ \pi: 4x + 2y + bz = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \cdot 2 + 2 \cdot c + b \cdot 3 = 2 \Rightarrow 8 + 2c + 3b = 2 \Rightarrow \boxed{2c + 3b = -6}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2c + 3b = -6 \\ 2c + 7b = -22 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2c = -6 - 3b \\ 2c = -22 - 7b \end{array} \right\} \Rightarrow -6 - 3b = -22 - 7b \Rightarrow 4b = -16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{-16}{4} = -4} \Rightarrow 2c = -6 - 3(-4) = 6 \Rightarrow \boxed{c = \frac{6}{2} = 3}$$

Los valores buscados son $b = -4$ y $c = 3$.

- b) Calculamos la distancia pedida usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 3, 1) \\ \pi': 4x + 2y - 4z - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi') = \frac{|4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3} \approx 0.66 \text{ u}}$$

PREGUNTA 6. Geometría. (2 puntos)

- a) Considere los puntos $Q(-1,3,-5)$, $R(3,1,0)$ y $S(0,1,2)$. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a Q , R y S .
- b) Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,-1)$ y sea perpendicular al plano $\pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0$.

- a) El plano π' que contiene a los tres puntos tiene como vectores directores los vectores $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{QS}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{QR} = (3,1,0) - (-1,3,-5) = (4,-2,5) \\ \vec{v} = \overrightarrow{QS} = (0,1,2) - (-1,3,-5) = (1,-2,7) \\ S(0,1,2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14x + 5(y-1) - 8(z-2) + 2(z-2) - 28(y-1) + 10x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14x + 5y - 5 - 8z + 16 + 2z - 4 - 28y + 28 + 10x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x - 23y - 6z + 35 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': 4x + 23y + 6z - 35 = 0}$$

La ecuación del plano π' que contiene a los puntos Q , R y S es $\pi': 4x + 23y + 6z - 35 = 0$.

- b) La recta perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (4, 23, 6)$$

$$r: \begin{cases} \vec{v}_r = \vec{n} = (4, 23, 6) \\ P(3, -1, -1) \in r \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = -1 + 23\lambda \\ z = -1 + 6\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{Ecuaciones paramétricas}$$

$$r: \begin{cases} \vec{v}_r = \vec{n} = (4, 23, 6) \\ P(3, -1, -1) \in r \end{cases} \Rightarrow r: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{23} = \frac{z+1}{6} \quad \text{Ecuación continua}$$

PREGUNTA 7. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Sabiendo que $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$.

a) Suponiendo que A y B son sucesos independientes, calcule $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} / (\bar{A} \cup \bar{B}))$.

b) Suponiendo que A y B son sucesos incompatibles, calcule $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} / (\bar{A} \cup \bar{B}))$.

(Nota: $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son los sucesos contrarios o complementarios de A y B, respectivamente).

a) Si A y B son sucesos independientes entonces $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 1/3 \\ P(B) = 1/2 \\ P(A \cap B) = 1/6 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Utilizamos el teorema de Bayes y las leyes de Morgan.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} / (\bar{A} \cup \bar{B})) &= \frac{P(\bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}))}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \left\{ \bar{A} \subset (\bar{A} \cup \bar{B}) \rightarrow \bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \bar{A} \right\} = \\ &= \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \left\{ \text{Ley de Morgan} \right\} = \frac{1 - P(A)}{P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B})} = \frac{1 - P(A)}{1 - P(A \cap B)} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{12}{15} = \boxed{\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

b) Si A y B son sucesos incompatibles entonces $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cap B) = 0$.

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 1/3 \\ P(B) = 1/2 \\ P(A \cap B) = 0 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 0 = \boxed{\frac{5}{6}}$$

Utilizamos el teorema de Bayes y las leyes de Morgan.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} / (\bar{A} \cup \bar{B})) &= \frac{P(\bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}))}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \left\{ \bar{A} \subset (\bar{A} \cup \bar{B}) \rightarrow \bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \bar{A} \right\} = \\ &= \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \left\{ \text{Ley de Morgan} \right\} = \frac{1 - P(A)}{P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B})} = \frac{1 - P(A)}{1 - P(A \cap B)} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - 0} = \boxed{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

PREGUNTA 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.

a) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?

b) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97,5% de estas botellas?

X es la cantidad de agua que echa una máquina en una botella (en mililitros). $X = N(500, 4)$

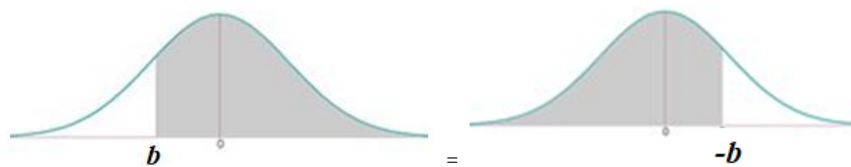
a) Nos piden calcular $P(499 < X < 502)$.

$$\begin{aligned}
 P(499 < X < 502) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(\frac{499 - 500}{4} < Z < \frac{502 - 500}{4}\right) = \\
 &= P(-0.25 < Z < 0.5) = P(Z < 0.5) - P(Z < -0.25) = P(Z < 0.5) - P(Z > 0.25) = \\
 &= P(Z < 0.5) - [1 - P(Z < 0.25)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.6915 - 1 + 0.5987 = \boxed{0.2902}
 \end{aligned}$$

b) Nos piden hallar “a” tal que $P(X \geq a) = 0.975$.

$$P(X \geq a) = 0.975 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 500}{4}\right) = 0.975 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Probabilidad mayor que } 0.5 \rightarrow \\ \frac{a - 500}{4} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \dots$$



$$\dots \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a - 500}{4}\right) = 0.975 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{a - 500}{4} = 1.96 \Rightarrow -a + 500 = 1.96 \cdot 4 \Rightarrow 500 - 1.96 \cdot 4 = a \Rightarrow \boxed{a = 492.16}$$

La cantidad de agua excedida por el 97,5% de estas botellas es 492.16 mililitros.

ABAU Extraordinaria 2023



Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
Convocatoria extraordinaria 2023

Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

a) Calcule A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x , y y z sabiendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} (m+1)x & + & z = 1 \\ (m+1)x & + & y & + & z = m+1 \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z = m \end{cases}$$

3. Análisis

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

4. Análisis:

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int (\sin x)^5 \cos x dx$ y $\int (\ln x) / x dx$.

b) Calcule $\int (\ln x) / x dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x) / x dx = 3/2$.

5. Geometría:

a) Considérense el plano $\pi: ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y la recta

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}.$$

Estudie la posición relativa de π y r en función de a y obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. Por último, razone si r puede estar contenida en π o no.

b) Si $\pi: -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar b para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π .

6. Geometría:

Considérese el plano $\pi : 2x - y + z = 1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de π al punto de corte de las rectas $r_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ y

$$r_2 : \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + \mu, (\lambda, \mu \in \mathbb{R}). \\ z = 0 \end{cases}$$

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π .

7. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule $P(A|B)$ si $B \subset A$. Luego, si $P(C) = 0.5$ y $P(D) = 0.6$, explique si C y D pueden ser incompatibles. Por último, obtenga $P(E \cup F)$ y $P(E \cap \overline{F})$ si E y F son independientes, $P(E) = 0.3$ y $P(F) = 0.2$.

b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

8. Estadística y Probabilidad:

Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:

a) Calcule A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x , y y z sabiendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad.

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{pmatrix}$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ c-d=0 \\ a+b=2 \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ c=d \\ a+b=2 \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+1+b=2 \rightarrow 2b=1 \rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}} \\ d+d=1 \rightarrow 2d=1 \rightarrow \boxed{d=\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}} \\ \boxed{c=\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

b) Se cumple que $\det(A - 3I) = 0$.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z-3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - 3I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & x \\ y & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -xy = 0 \Rightarrow \{y \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$. Se cumple que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (3z)A^{-1}A + I \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} A \Rightarrow (3z)I + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3z & 0 \\ 0 & 3z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3+4y & 4z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3+3z & 0 \\ y & 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3+4y & 4z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3+3z=6 \rightarrow 3z=3 \rightarrow \boxed{z=1} \\ y=-3+4y \rightarrow 3=3y \rightarrow \boxed{y=1} \end{cases}$$

Los valores buscados son $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} (m+1)x & + & z = 1 \\ (m+1)x & + & y & + & z = m+1 \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z = m \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & m & m-1 & m \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula su determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} = (m+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m-1 \end{vmatrix} = (m+1)[m-1+m-1-m] = (m+1)(m-2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (m+1)(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m+1 = 0 \rightarrow m = -1 \\ m-2 = 0 \rightarrow m = 2 \end{cases}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $m \neq -1$ y $m \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = -1$

El determinante de A es nulo. El sistema queda tan sencillo que lo resolvemos.

$$\begin{cases} \boxed{z = 1} \\ y + z = 0 \\ -y - 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 1 = 0 \rightarrow \boxed{y = -1} \\ -y - 2 = -1 \rightarrow y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} x = t \\ y = -1, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 3. $m = 2$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ -3 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ -3 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible**.

Resumiendo: Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado, si $m = -1$ el sistema es compatible indeterminado y si $m = 2$ el sistema es incompatible.

3. Análisis

- a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.
- b) Explique si $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

a) Enunciado del Teorema de Rolle:

Si $f(x)$ es una función que es **continua** en $[a, b]$, **derivable** en (a, b) y cumple que $f(a) = f(b)$, entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Enunciado del Teorema del valor medio.

Si $f(x)$ es una función real $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si se cumple que $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $f(x)$ es derivable en (a, b) , entonces se tiene que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

b) Esta función existe y es continua en el intervalo $[0, 1]$, pues el radicando es positivo.

Es derivable en $(0, 1)$.

La derivada de la función es $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = \sqrt{1-1^2} = 0 \\ f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1 \\ f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ c \in (0,1) / f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{0-1}{1-0} = -1 \Rightarrow -c = -\sqrt{1-c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{1-c^2} \Rightarrow c^2 = 1-c^2 \Rightarrow 2c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \{c \in (0,1)\} \Rightarrow \boxed{c = +\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

El valor buscado es $c = +\frac{\sqrt{2}}{2} \in (0,1)$

4. Análisis:

- a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int (\sin x)^5 \cos x dx$ y $\int (\ln x) / x dx$.
- b) Calcule $\int (\ln x) / x dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x) / x dx = 3/2$.

a) La primera integral

$$\int (\sin x)^5 \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sin x = t \rightarrow \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} = \boxed{\frac{(\sin x)^6}{6} + K}$$

La segunda integral

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \ln x = t \rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \\ dx = x dt \end{array} \right\} = \int \frac{t}{x} x dt = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \boxed{\frac{(\ln x)^2}{2} + K}$$

b) Usamos el método de integración por partes para obtener la expresión de la integral.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Por partes} \\ \ln x = u \rightarrow \frac{1}{x} dx = du \\ dv = \frac{1}{x} dx \rightarrow v = \int \frac{1}{x} dx = \ln x \end{array} \right\} = (\ln x)(\ln x) - \int \ln x \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 - \int \ln x \frac{1}{x} dx \Rightarrow 2 \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = \boxed{\frac{(\ln x)^2}{2} + K}$$

Calculamos la integral definida.

$$\int_e^B (\ln x) / x dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_e^B = \left[\frac{(\ln B)^2}{2} \right] - \left[\frac{(\ln e)^2}{2} \right] = \frac{(\ln B)^2}{2} - \frac{1}{2}$$

Iguamos la expresión obtenida a 3/2 y determinamos el valor de B.

$$\int_e^B (\ln x) / x dx = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(\ln B)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(\ln B)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow (\ln B)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln B = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln B = 2 \rightarrow \boxed{B = e^2} \\ \ln B = -2 \rightarrow \boxed{B = e^{-2}} \end{array} \right.$$

Los valores buscados son $B = e^2$ y $B = e^{-2}$.

5. Geometría:

- a) Considérense el plano $\pi: ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estudie la posición relativa de π y r en función de a y obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. Por último, razone si r puede estar contenida en π o no.
- b) Si $\pi: -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar b para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π .

- a) Obtenemos el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$\pi: ax + y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (a, 1, 1)$$

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 3, 3) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases}$$

Si los vectores son perpendiculares la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. En caso contrario son secantes (coinciden en un punto).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (a, 1, 1) \\ \vec{v}_r = (2, 3, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (a, 1, 1) \cdot (2, 3, 3) = 2a + 3 + 3 = 2a + 6$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow 2a + 6 = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

Analizamos que pasa si $a = -3$.

En este caso los vectores son perpendiculares y plano y recta son paralelos o la recta está contenida en el plano. Comprobamos si el punto $P_r(1, 0, -1)$ de la recta está en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -3x + y + z = 1 \\ \text{¿} P_r(1, 0, -1) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} -3 + 0 - 1 = 1? \text{ ¡¡No se cumple!!}$$

Para $a = -3$ la recta r y el plano π son paralelos.

Para $a \neq -3$ los vectores no son perpendiculares y la recta r y el plano π se cortan.

Buscamos para $a \neq -3$ un valor para el que recta y plano formen 90° . Para que esto ocurra deben tener coordenadas proporcionales el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (a, 1, 1) \\ \vec{v}_r = (2, 3, 3) \\ \vec{n} \parallel \vec{v}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}$$

Para $a = \frac{2}{3}$ recta y plano son secantes y además son perpendiculares.

La recta r solo puede ser paralela al plano ($a = -3$) o secante ($a \neq -3$).

La recta r no puede estar contenida en el plano.

- b) Para que la recta esté contenida en el plano deben cumplirse dos condiciones: 1ª el vector director de la recta y el normal del plano deben ser perpendiculares, 2ª un punto de la recta debe pertenecer al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -3x + y + z = 1 \rightarrow \vec{n} = (-3, 1, 1) \\ r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3} \rightarrow \vec{u}_r = (2, 3, 3) \\ \vec{n} \perp \vec{u}_r \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (-3, 1, 1)(2, 3, 3) = 0 \Rightarrow -6 + 3 + 3 = 0 \text{ ¡¡Se cumple!!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -3x + y + z = 1 \\ r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3} \rightarrow P_r(1, b, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -3 + b - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{b = 5}$$

El valor buscado es $b = 5$.

6. Geometría:

Considérese el plano $\pi : 2x - y + z = 1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de π al punto de corte de las rectas $r_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ y

$r_2 : \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 0 \end{cases}, (\lambda, \mu \in \mathbb{R}), (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π .

a) Averiguamos el punto P de corte de las dos rectas.

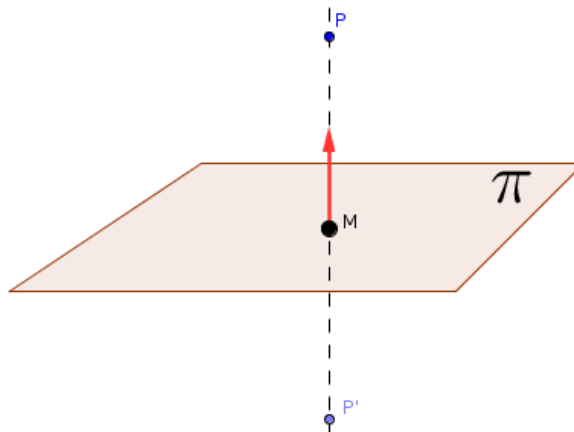
$$\begin{aligned} r_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \\ r_2 : \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 2 + \lambda \\ -1 + \mu = 0 \rightarrow \boxed{\mu = 1} \\ 0 = 1 - \lambda \rightarrow \boxed{\lambda = -1} \end{cases} \Rightarrow 1 = 2 - 1 \text{ ¡Se cumple!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(1,0,0)}$$

Hallamos la distancia del punto P al plano $\pi : 2x - y + z = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x - y + z - 1 = 0 \\ P(1,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|2 - 0 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0.408 \text{ unidades}$$

b) Nos piden hallar las coordenadas del punto P' del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P. Esta recta tendrá como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: 2x - y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (2, -1, 1) \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, -1, 1) \\ P(1, 0, 0) \in r \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

El punto M es la intersección de la recta r con el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y + z = 1 \\ r: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\alpha) - (-\alpha) + \alpha = 1 \Rightarrow 2 + 4\alpha + \alpha + \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{-1}{6} = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{-1}{6} = \frac{1}{6} \\ z = \frac{-1}{6} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right)$$

El punto P' simétrico de P respecto del plano es el resultado de sumar al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right) - (1, 0, 0) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right) + \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

El punto simétrico es $P' \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

7. a) Calcule $P(A|B)$ si $B \subset A$. Luego, si $P(C) = 0.5$ y $P(D) = 0.6$, explique si C y D pueden ser incompatibles. Por último, obtenga $P(E \cup F)$ y $P(E \cap \bar{F})$ si E y F son independientes, $P(E) = 0.3$ y $P(F) = 0.2$.
- b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

- a) Si $B \subset A$ entonces $B \cap A = B$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = \boxed{1}$$

Dos sucesos C y D son incompatibles si su intersección es vacía y por tanto $P(C \cap D) = 0$

Si los suponemos incompatibles tenemos que $P(C \cap D) = 0$.

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \Rightarrow P(C \cup D) = 0.5 + 0.6 - 0 = 1.1 > 1 \text{ ¡¡Imposible!}$$

Los sucesos C y D son compatibles.

Al ser los sucesos E y F independientes se cumple que $P(E \cap F) = P(E)P(F)$.

$$P(E \cap F) = P(E)P(F) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$$

Calculamos $P(E \cup F)$.

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0.3 + 0.2 - 0.06 = \boxed{0.44}$$

Calculamos $P(E \cap \bar{F})$.

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \bar{F}) \Rightarrow 0.3 = 0.06 + P(E \cap \bar{F}) \Rightarrow P(E \cap \bar{F}) = 0.3 - 0.06 = \boxed{0.24}$$

- b) La variable X que cuenta el número de seises que salen al lanzar 7 veces un dado es una variable binomial con parámetros $n = 7$ y $p = P(\text{Sacar un 6 al lanzar un dado}) = 1/6$.
 $X = B(7, 1/6)$

Nos piden calcular $P(X = 2)$. Lo calculamos.

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \boxed{0.234}$$

8. Estadística y Probabilidad:

Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

X es la variable que da la tensión arterial sistólica (medida en mmHg). $X = N(123.6, 17.8)$

Nos piden hallar $P(100 \leq X \leq 120)$.

$$\begin{aligned}
 P(100 \leq X \leq 120) &= P(X \leq 120) - P(X \leq 100) = \{\text{Tipificamos}\} = \\
 &= P\left(Z \leq \frac{120-123.6}{17.8}\right) - P\left(Z \leq \frac{100-123.6}{17.8}\right) = P(Z \leq -0.20) - P(Z \leq -1.33) = \\
 &= P(Z \geq 0.2) - P(Z \geq 1.33) = 1 - P(Z \leq 0.2) - [1 - P(Z \leq 1.33)] = \\
 &= P(Z \leq 1.33) - P(Z \leq 0.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9082 - 0.5793 = \boxed{0.3289}
 \end{aligned}$$

También nos piden hallar “ a ” tal que $P(X \geq a) = 0.67$.

$$\begin{aligned}
 P(X \geq a) &= 0.67 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(\frac{X-123.6}{17.8} \geq \frac{a-123.6}{17.8}\right) = 0.67 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-123.6}{17.8}\right) = 0.67 > 0.5 \Rightarrow \left\{ \frac{a-123.6}{17.8} \text{ Es negativo} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a-123.6}{17.8}\right) = P\left(Z \geq \frac{a-123.6}{17.8}\right) = 0.67 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{a-123.6}{17.8} = 0.44 \Rightarrow a-123.6 = -0.44 \cdot 17.8 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow a = 123.6 - 0.44 \cdot 17.8 \Rightarrow \boxed{a = 115.768 \text{ mmHg}}
 \end{aligned}$$

La tensión debería ser superior a 115.768 mmHg.

ABAU Ordinaria 2023



Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
Convocatoria ordinaria 2023

Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

Despeje la matriz X de la ecuación $XA = A + XB$, si A y B son matrices cuadradas tales que $A - B$ es invertible. Luego, calcule X si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores de m , el sistema

$$\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m \\ my - z = 1 \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5 \end{cases}$$

3. Análisis

a) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener a y b para que se cumplan $f(0) = 0$ y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$$

b) Estudie si la función $f(x) = x + \sin x$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0, 2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de f en ese intervalo.

4. Análisis:

Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1, y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota:** $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

5. Geometría:

a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2, -1, 0)$ y $Q(3, 0, 0)$ y la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0, 4, -2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$ y $\vec{v}(2, 1, -2)$.

b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ con el plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

6. Geometría:

- a) Calcule el punto simétrico de $P(2, -1, 0)$ con respecto al plano $\pi: x + z + 2 = 0$.
- b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ y $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad:

- a) Calcule las cuatro probabilidades $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ y $P(B|A)$ sabiendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ y $P(A) = 2P(B)$. **Nota:** $\bar{B}$ es el suceso contrario o complementario de B .
- b) En un conocido congreso, el 60% de los científicos inscritos participan *online* y el resto asisten en persona. Además, el 65% de los inscritos son europeos y el 80% de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe *online*; luego, la de que participe *online* si se sabe que es europeo.

8. Estadística y Probabilidad:

- a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?
- b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:

Despeje la matriz X de la ecuación $XA = A + XB$, si A y B son matrices cuadradas tales que $A - B$ es invertible. Luego, calcule X si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Despejamos la matriz X .

$$XA = A + XB \Rightarrow XA - XB = A \Rightarrow X(A - B) = A$$

Como la matriz $A - B$ es invertible podemos multiplicar por su inversa para terminar de despejar X .

$$X(A - B) = A \Rightarrow X = A(A - B)^{-1}$$

Ahora calculamos la matriz B :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 - A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A^2 - A - I| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$B = (A^2 - A - I)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((A^2 - A - I)^T\right)}{|A^2 - A - I|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz $A - B$:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A - B| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$(A - B)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A - B)^T}{|A - B|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X .

$$X = A(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1+2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz solución es $X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores de m , el sistema

$$\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m \\ my - z = 1 \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ m & 2 & 2m-4 & 5 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula su determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{vmatrix} = m^2(2m-4) - m(2+m^2) + 0 - 0 - 0 + 2m =$$

$$= 2m^3 - 4m^2 - 2m - m^3 + 2m = m^3 - 4m^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^3 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m^2(m-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - 4 = 0 \rightarrow m = 4 \end{cases}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq 4$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = 0$

El sistema queda tan sencillo que lo resolvemos.

$$\begin{cases} 2y = 1 \\ -z = 1 \\ 2y - 4z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1/2 \\ z = -1 \\ 2y - 4z = 5 \end{cases} \Rightarrow 1 + 4 = 5 \text{ ; Se cumple! } \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 3. $m = 4$

Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \begin{pmatrix} 4 & 18 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 4 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ -4 \quad -18 \quad 0 \quad -5 \\ \hline 0 \quad -16 \quad 4 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 18 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -16 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 4 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -16 \quad 4 \quad 0 \\ 0 \quad 16 \quad -4 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{4 \quad 18 \quad 0 \quad 5}^{A/B} & & \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 4}_A & & & \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible**.

Resumiendo: Si $m \neq 0$ y $m \neq 4$ el sistema es compatible determinado, si $m = 0$ el sistema es compatible indeterminado y si $m = 4$ el sistema es incompatible.

3. Análisis

a) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener a y b para que se cumplan $f(0) = 0$ y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$$

b) Estudie si la función $f(x) = x + \sin x$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0, 2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de f en ese intervalo.

a) Aplicamos la primera condición: $f(0) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(x) = ae^x + b \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = ae^0 + b \Rightarrow \boxed{0 = a + b}$$

Aplicamos la segunda condición: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

Calculamos primero el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + b}{x} = \frac{a + b}{0} = \dots$$

Como sabemos que $a + b = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + b}{x} = \frac{a + b}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x}{1} = ae^0 = a$$

Como debe cumplirse que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$, entonces debe ser $a = 3$.

Sustituimos este valor en la igualdad $a + b = 0$ y tenemos que $b = -3$.

Los valores buscados son $a = 3$ y $b = -3$.

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 1 + \cos x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \in (0, 2\pi)$$

Calculamos la segunda derivada y sustituimos el valor obtenido para comprobar si es mínimo, máximo o punto de inflexión.

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(\pi) = -\sin \pi = 0$$

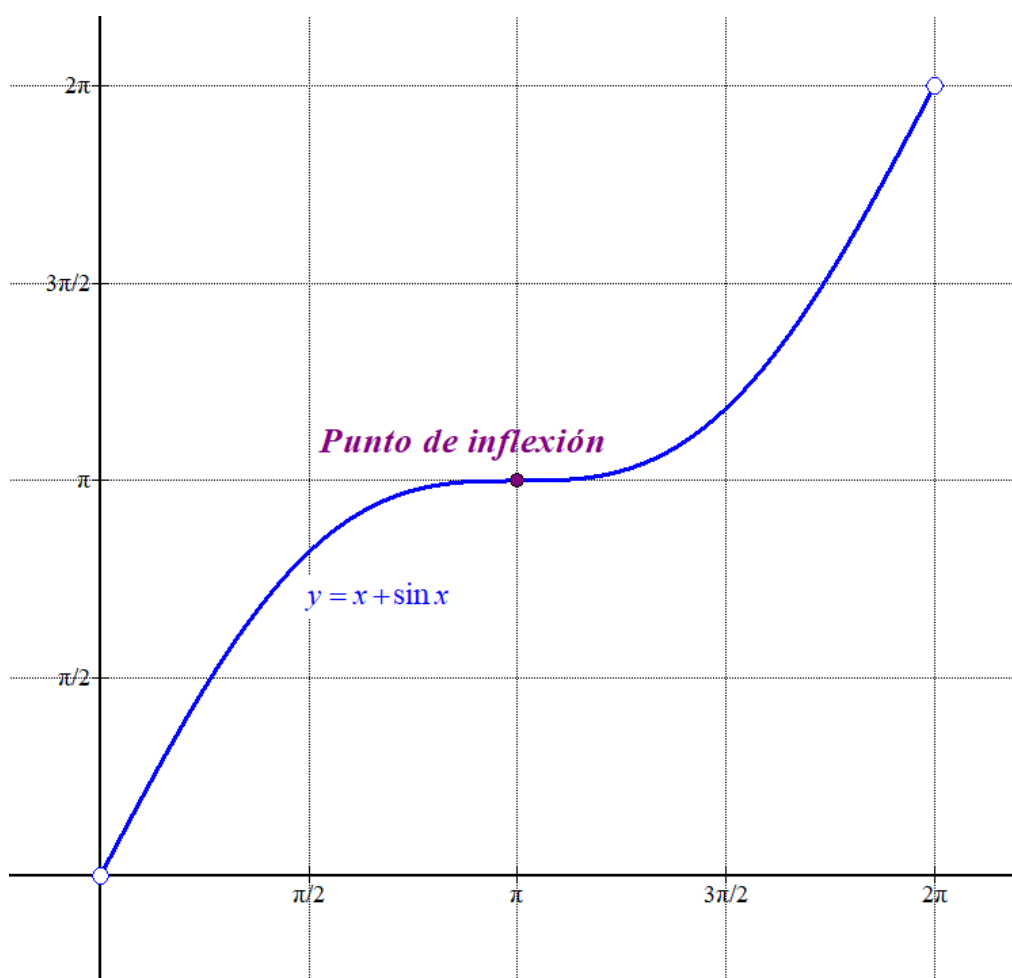
Como es 0 comprobamos el valor de la tercera derivada en $x = \pi$.

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(\pi) = -\cos \pi = -1 \neq 0$$

La función no tiene máximos ni mínimos relativos en el intervalo $(0, 2\pi)$. Los máximos o mínimos podrían estar en los extremos del intervalo de definición de la función, pero este intervalo es $(0, 2\pi)$ que no incluye a los extremos. No tiene máximos ni mínimos. Tiene un punto de inflexión en $x = \pi$.

Para dibujar su gráfica en el intervalo $(0, 2\pi)$ obtenemos una tabla de valores.

x	$y = x + \sin x$
0	0
$\pi/2$	$1 + \frac{\pi}{2}$
π	π
$3\pi/2$	$\frac{3\pi}{2} - 1$
2π	2π



4. Análisis:

Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1, y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota:** $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

La región de la cual queremos hallar el valor de su área debe cumplir: $x \geq 1, y \leq x$ e $y \geq x \ln x$. Buscamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x \ln x \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow x \ln x = x \Rightarrow -x + x \ln x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(-1 + \ln x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ -1 + \ln x = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow \boxed{x = e \approx 2.71} \end{cases}$$

La región del plano de la que piden calcular su área está comprendida entre $x = 1$ y $x = e$.

Tomamos $x = 2$ y comprobamos que función toma el mayor valor.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 2 \ln 2 \approx 1.38 \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) < x \text{ en el intervalo } (1, e)$$

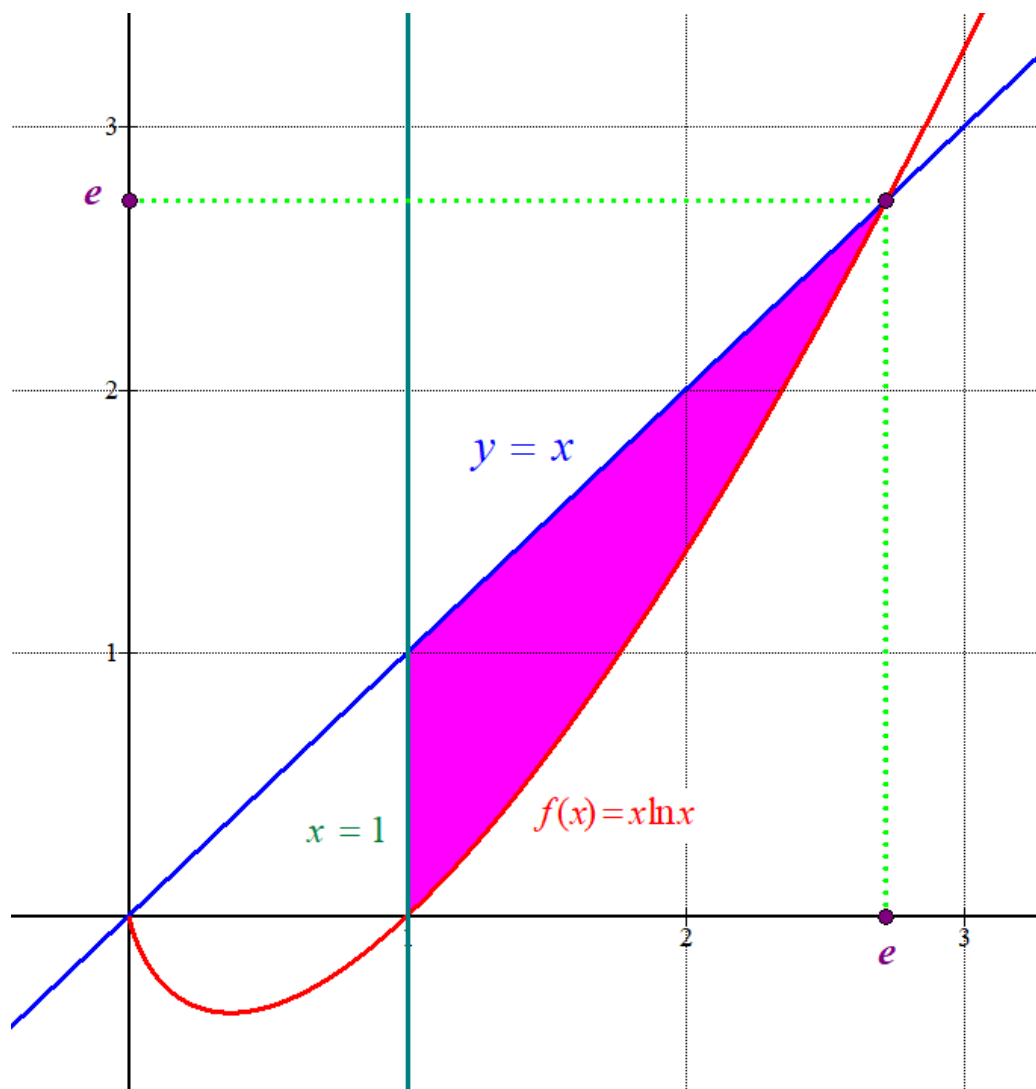
Calculamos el área como la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre 1 y e .

$$\text{Área} = \int_1^e x - x \ln x \, dx = \dots$$

$$\begin{aligned} \int x - x \ln x \, dx &= \int x \, dx - \int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} - \int x \ln x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv = x \, dx \rightarrow v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \right) = \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx \right) = \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx \right) = \\ &= \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx \right) = \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + K \end{aligned}$$

$$\dots = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \left[\frac{e^2}{2} - \frac{e^2 \ln e}{2} + \frac{e^2}{4} \right] - \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^2 \ln 1}{2} + \frac{1^2}{4} \right] = \left[\frac{e^2}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] = \frac{e^2 - 3}{4} \approx 1.097 \, u^2$$

El valor del área es aproximadamente de 1.097 unidades cuadradas.



5. Geometría:

a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2, -1, 0)$ y $Q(3, 0, 0)$ y la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0, 4, -2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$ y $\vec{v}(2, 1, -2)$.

b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ con el plano $\pi: x+z+2=0$.

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2, -1, 0)$ y $Q(3, 0, 0)$.

$$r: \begin{cases} \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (3, 0, 0) - (2, -1, 0) = (1, 1, 0) \\ Q(3, 0, 0) \in r \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Obtenemos la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0, 4, -2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$ y $\vec{v}(2, 1, -2)$.

$$\pi: \begin{cases} \vec{u}(1, 0, -1) \\ \vec{v}(2, 1, -2) \\ R(0, 4, -2) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-4 & z+2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

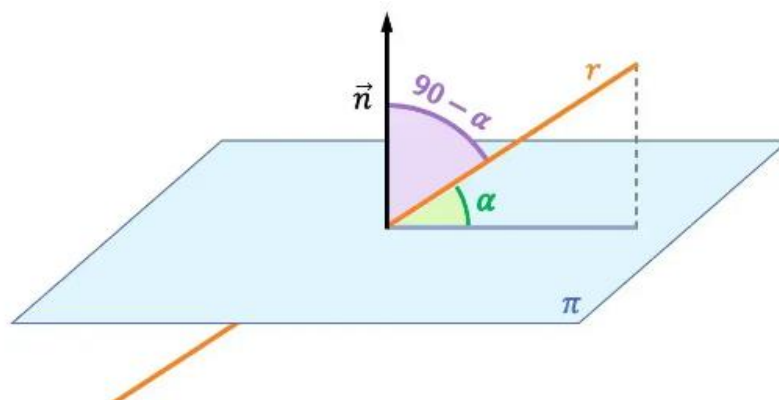
$$\Rightarrow -2(y-4) + (z+2) + 2(y-4) + x = 0 \Rightarrow -2y + 8 + z + 2 + 2y - 8 + x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x + z + 2 = 0}$$

b) Averiguamos el ángulo formado por el vector director de la recta y el normal del plano.

$$\left. \begin{aligned} r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0} \rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 0) \\ \pi: x + z + 2 = 0 \rightarrow \vec{n} = (1, 0, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{n}) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{n}}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(1, 1, 0) \cdot (1, 0, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{n}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{v}_r, \vec{n}) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

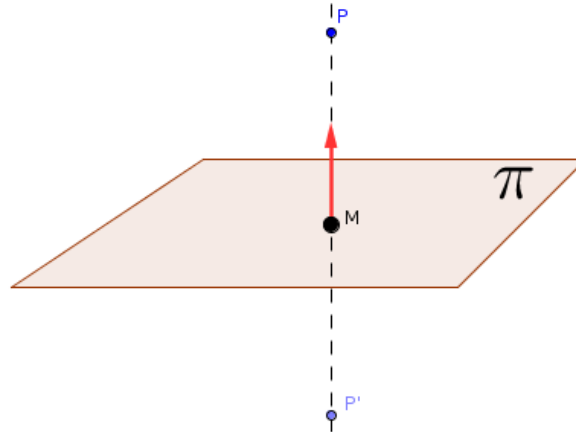
El ángulo formado entre recta y plano es $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.



6. Geometría:

- a) Calcule el punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto al plano $\pi: x+z+2=0$.
- b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ y $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

- a) Nos piden hallar las coordenadas del punto P' del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P. Esta recta tendrá como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: x+z+2=0 \Rightarrow \vec{n} = (1,0,1) \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{v}_r = \vec{n} = (1,0,1) \\ P(2,-1,0) \in r \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$$

El punto M es la intersección de la recta r con el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x+z+2=0 \\ r: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2+t+t+2=0 \Rightarrow 2t = -4 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2-2=0 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow M(0,-1,-2)$$

El punto P' simétrico de P respecto del plano es el resultado de sumar al punto P el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM} = (0,-1,-2) - (2,-1,0) = (-2,0,-2)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = (0,-1,-2) + (-2,0,-2) = (-2,-1,-4)$$

El punto simétrico es $P'(-2,-1,-4)$

- b) Comparamos sus vectores directores.

$$\left. \begin{array}{l} r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0} \rightarrow \vec{v}_r = (1,1,0) \\ s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1} \rightarrow \vec{u}_s = (2,1,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas tienen distinta dirección y se cortan o se cruzan.

Estudiamos el valor nulo o no del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0} \rightarrow \begin{cases} P_r(2, -1, 0) \\ \vec{v}_r = (1, 1, 0) \end{cases}$$

$$s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1} \rightarrow \begin{cases} Q_s(2, -2, -1) \\ \vec{u}_s = (2, 1, -1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (2, -2, -1) - (2, -1, 0) = (0, -1, -1)$$

$$[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 0 - 0 + 2 - 1 = 0$$

Al ser nulo el producto mixto las rectas son secantes.

Hallamos el punto de corte resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente:

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0} \rightarrow \begin{cases} P_r(2, -1, 0) \\ \vec{v}_r = (1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1} \rightarrow \begin{cases} Q_s(2, -2, -1) \\ \vec{u}_s = (2, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 2 + 2\alpha \\ y = -2 + \alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 0 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} 2 + 2\alpha = 2 + \lambda \\ -2 + \alpha = -1 + \lambda \\ 0 = -1 - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + 2\alpha = 2 + \lambda \\ -2 + \alpha = -1 + \lambda \\ \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2 = 2 + \lambda \\ -2 - 1 = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \\ s: \begin{cases} x = 2 + 2\alpha \\ y = -2 + \alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases} & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 + \lambda \\ -3 = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2 = 0 \\ y = -1 - 2 = -3 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(0, -3, 0)}$$

El punto de corte de r y s es $A(0, -3, 0)$.

7. Estadística y Probabilidad:

- a) Calcule las cuatro probabilidades $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ y $P(B|A)$ sabiendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ y $P(A) = 2P(B)$. **Nota:** $\bar{B}$ es el suceso contrario o complementario de B .
- b) En un conocido congreso, el 60% de los científicos inscritos participan *online* y el resto asisten en persona. Además, el 65% de los inscritos son europeos y el 80% de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe *online*; luego, la de que participe *online* si se sabe que es europeo.

$$a) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.8 = 2P(B) + P(B) - 0.2 \Rightarrow 1 = 3P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = 2P(B) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \frac{2}{3} = 0.2 + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{3} - 0.2 = \frac{7}{15}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.2}{\frac{2}{3}} = 0.3$$

- b) Realizamos una tabla de contingencia para ordenar toda la información proporcionada y obtener el resto de datos.

En persona asisten el $100 - 60 = 40$ %. El 80% de los que asisten en persona (40%) son europeos

$\rightarrow \frac{80 \cdot 40}{100} = 32\%$ del total son europeos que participan en persona.

	Online	En persona	
Europeos		32	65
No europeos			
	60		100

Completamos la tabla.

	Online	En persona	
Europeos	33	32	65
No europeos	27	8	35
	60	40	100

Nos piden calcular $P(\text{Europeo que participa online})$ que por la regla de Laplace vale:

$$P(\text{Europeo que participa online}) = \frac{33}{100} = 0.33$$

También nos piden $P(\text{participe online si se sabe que es europeo})$. Sabemos que hay un 65% de participantes europeos y de ese 65% el 33% participa online y el restante 32 % participa en persona.

$$P(\text{participe online si se sabe que es europeo}) = \frac{33}{65} \approx 0.508$$

8. Estadística y Probabilidad:

- a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?
- b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

- a) Es una distribución binomial. Éxito = “El renacuajo llega a adulto”. Se hacen 2500 repeticiones independientes entre sí $\rightarrow n = 2500$. $p = P(\text{Éxito}) = 0.02$.

X es el número de renacuajos que llegan a adultos de 2500. $X = B(2500, 0.02)$

Nos piden calcular $P(X \geq 55)$. Esta probabilidad es muy costosa calcularla usando la binomial.

Utilizamos la aproximación a una normal de media $np = 2500 \cdot 0.02 = 50$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2500 \cdot 0.02 \cdot 0.98} = 7$. Como $np = 50 > 5$ y $nq = 2450 > 5$ la aproximación será buena.

El valor de las probabilidades de X se aproxima por una normal $Y = N(50, 7)$

$$P(X \geq 55) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 54.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{Y - 50}{7} \geq \frac{54.5 - 50}{7}\right) =$$

$$= P(Z \geq 0.64) = 1 - P(Z \leq 0.64) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.7389 = \boxed{0.2611}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7421

- b) X es la variable que da la puntuación. $X = N(100, 20)$.

Nos piden hallar “a” tal que $P(X \geq a) = 0.05$.

$$P(X \geq a) = 0.05 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 100}{20}\right) = 0.05 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 100}{20}\right) = 0.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 100}{20}\right) = 0.95 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a - 100}{20} = 1.645 \Rightarrow \boxed{a = 1.645 \cdot 20 + 100 = 132.9}$$

La puntuación debería ser superior a 132.9 puntos.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7421
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9449	0.9461	0.9473	0.9484	0.9495	0.9505
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599

ABAU Extraordinaria 2022



Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
Convocatoria extraordinaria 2022

Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota:** a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A .

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:
$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0 \\ y + (m-2)z = -2 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3 \end{cases}$$

3. Análisis

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X . Dibuje la gráfica de f , la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$, sea derivable.

4. Análisis:

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ b) $\int (\sin x)\sin(\cos x)dx$ c) $\int x^2 \sin x dx$ d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx$

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1} \text{ y pasa por el punto } P(0, 1, 0).$$

b) Calcule el punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto al plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros k y a . Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π .

7. Estadística y Probabilidad:

- a) En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.
- b) En un cierto país, el 80% de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

8. Estadística y Probabilidad:

- a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.
- b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota:** a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A .

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

a) La matriz A es antisimétrica si $A^T = -A \Rightarrow A^T + A = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a_{11} & 1+a_{21} \\ 1+a_{21} & 2a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a_{11} = 0 \rightarrow a_{11} = 0 \\ 1+a_{21} = 0 \rightarrow a_{21} = -1 \\ 2a_{22} = 0 \rightarrow a_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe la inversa de } A$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si B no tiene inversa su determinante es nulo.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{vmatrix} = -b_{12} = 0 \Rightarrow \boxed{b_{12} = 0} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$$

Calculamos $A^{-1}B + A$. La inversa de A está calculada en el apartado a).

$$A^{-1}B + A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1-b_{22} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicamos la condición de que $\det(A^{-1}B + A) = -1$

$$\det(A^{-1}B + A) = -1 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1-b_{22} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow 1 - b_{22} = -1 \Rightarrow \boxed{2 = b_{22}}$$

Los valores buscados son $b_{12} = 0$ y $b_{22} = 2$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:

$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0 \\ y + (m-2)z = -2 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3 \end{cases}$$

Transformamos el sistema en otro más sencillo de estudiar.

$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0 \\ y + (m-2)z = -2 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3 \\ -(m+1)x - my - z = 0 \\ \hline (m-2)z = -3 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m+1)x + my + z = 0 \\ y + (m-2)z = -2 \\ (m-2)z = -3 \end{cases}$$

Observando los elementos de la diagonal del sistema nos planteamos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $m \neq 2$ y $m \neq -1$

En este caso el sistema se puede resolver despejando y resolviendo en cadena.
El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 2$

En este caso el sistema queda

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ y = -2 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

La tercera ecuación plantea una igualdad imposible.
El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $m = -1$

En este caso el sistema queda

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ y - 3z = -2 \\ -3z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ y - 3z = -2 \\ \boxed{z = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 1 = 0 \\ y - 3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \boxed{y = 1} \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).
Las soluciones son: $x = t$, $y = 1$, $z = 1$, $t \in \mathbb{R}$

3. Análisis

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X. Dibuje la gráfica de f , la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$, sea derivable.

a) Hallamos la tangente a $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.

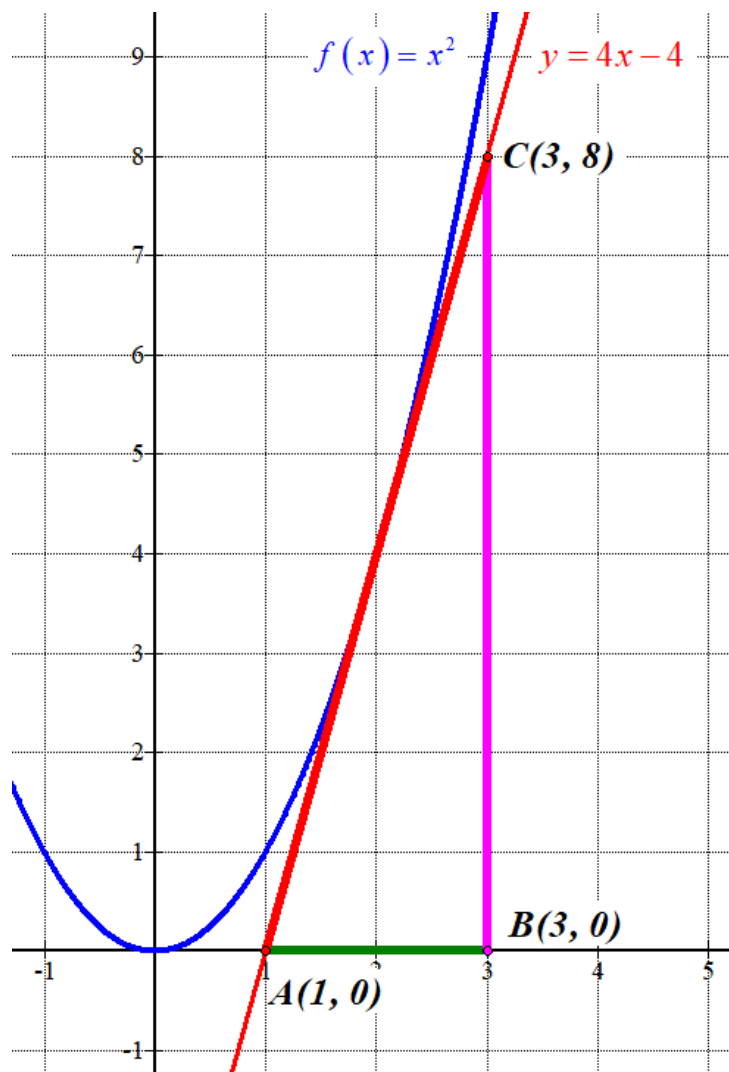
$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 2^2 = 4 \\ f'(2) = 4 \\ y - f(2) = f'(2)(x - 2) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 4x - 8 \Rightarrow \boxed{y = 4x - 4}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la situación planteada.

x	$f(x) = x^2$
0	0
1	1
2	4
3	9

x	$y = 4x - 4$
1	0
2	4
3	8



Las coordenadas de los vértices del triángulo son $A(1, 0)$, $B(3, 0)$ y $C(3, 8)$.

b) Para ser derivable primero debe ser continua.

Continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + bx = a + b \\ f(1) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a + b = 1}$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$ y su derivada es $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Para que sea derivable en $x = 1$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0 \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2ax + b = 2a + b \\ f'(1^-) &= f'(1^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{2a + b = 0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} a + b &= 1 \\ 2a + b &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b &= 1 - a \\ 2a + b &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a + 1 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1} \Rightarrow \boxed{b = 1 - (-1) = 2}$$

Los valores buscados son $a = -1$, $b = 2$.

4. Análisis:

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ b) $\int (\sin x)\sin(\cos x)dx$ c) $\int x^2 \sin x dx$ d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx$

a)

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x^2+1=t \rightarrow 2xdx=dt \\ dx=\frac{dt}{2x} \end{array} \right\} = \int \cancel{2x} \sqrt{t} \frac{dt}{\cancel{2x}} = \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{t^{1/2+1}}{1/2+1} =$$

$$= \frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{t^3} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ t = x^2 + 1 \end{array} \right\} = \boxed{\frac{2}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} + K}$$

b)

$$\int (\sin x)\sin(\cos x)dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{-\sin x} \end{array} \right\} = \int (\cancel{\sin x}) \sin(t) \frac{dt}{-\cancel{\sin x}} =$$

$$= -\int \sin(t) dt = \cos t = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el} \\ \text{cambio de variable} \\ t = \cos x \end{array} \right\} = \boxed{\cos(\cos x) + K}$$

c)

$$\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = \sin x dx \rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right\} = x^2(-\cos x) - \int (-\cos x) 2x dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = \dots$$

$$\int x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right\} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x - (-\cos x)$$

$$\dots = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) = \boxed{-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + K}$$

d)

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$1 = A(x-2) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 1=B \\ x=1 \rightarrow 1=-A \rightarrow A=-1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

$$\dots = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-2} dx = \boxed{-\ln|x-1| + \ln|x-2| + K}$$

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1} \text{ y pasa por el punto } P(0, 1, 0).$$

b) Calcule el punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto al plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

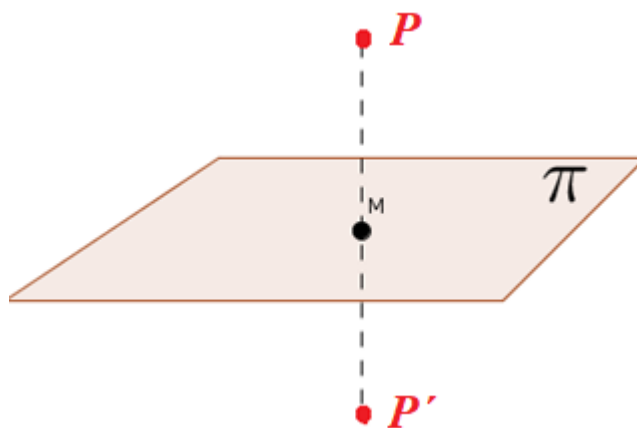
a) El plano que contiene a la recta tiene como uno de sus vectores directores el director de la recta $\vec{v}_r = (3, 2, 1)$. El otro vector director del plano es el vector $\overrightarrow{PQ_r}$ que une el punto P con un punto Q_r de la recta.

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1} \Rightarrow r: \begin{cases} Q_r(-1, -2, -3) \\ \vec{v}_r = (3, 2, 1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} = \overrightarrow{PQ_r} &= (-1, -2, -3) - (0, 1, 0) = (-1, -3, -3) \\ \vec{v} = \vec{v}_r &= (3, 2, 1) \\ P(0, 1, 0) &\in \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ -1 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x - 9y + 9 - 2z + 9z + y - 1 + 6x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0}$$

b) Debemos de hallar el punto P' del dibujo.



Hallamos la recta s perpendicular al plano que pasa por el punto P.

$$\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (3, -8, 7)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_s = \vec{n} &= (3, -8, 7) \\ P(11, -14, 13) &\in s \end{aligned} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 11 + 3\lambda \\ y = -14 - 8\lambda \\ z = 13 + 7\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\pi : 3x - 8y + 7z + 8 = 0$$
$$s \equiv \begin{cases} x = 11 + 3\lambda \\ y = -14 - 8\lambda \\ z = 13 + 7\lambda \end{cases} \Rightarrow 3(11 + 3\lambda) - 8(-14 - 8\lambda) + 7(13 + 7\lambda) + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 33 + 9\lambda + 112 + 64\lambda + 91 + 49\lambda + 8 = 0 \Rightarrow 122\lambda = -244 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 11 - 6 = 5 \\ y = -14 + 16 = 2 \\ z = 13 - 14 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(5, 2, -1)}$$

El punto P' simétrico de P respecto del plano π se obtiene sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM} = (5, 2, -1) - (11, -14, 13) = (-6, 16, -14)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = (5, 2, -1) + (-6, 16, -14) = (-1, 18, -15)$$

El punto P' simétrico de P respecto del plano π tiene coordenadas $P'(-1, 18, -15)$.

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros k y a . Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π .

Obtenemos un punto y un vector de la recta.

$$r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(-1, 1, 0) \\ \vec{v}_r = (1, k, 3) \end{cases}$$

Para que plano y recta sean paralelos o la recta esté contenida en el plano el vector normal del plano y el director de la recta deben ser perpendiculares, es decir, con producto escalar 0.

$$\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \vec{n} = (a, 4, 3a) \\ \vec{v}_r = (1, k, 3) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (a, 4, 3a)(1, k, 3) = a + 4k + 9a = 10a + 4k$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow 10a + 4k = 0 \Rightarrow \boxed{5a + 2k = 0}$$

Se plantean dos situaciones diferentes.

Si $5a + 2k \neq 0$ entonces recta y plano son secantes. Coinciden en un único punto.

Si $5a + 2k = 0$ entonces plano y recta son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Para que la recta esté contenida en el plano el punto P_r de la recta debe pertenecer al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(-1, 1, 0) \in \pi \\ \pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -a + 4 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

Esta última situación se divide en dos situaciones diferentes:

Si $5a + 2k = 0$ y $a = 6$ la recta está contenida en el plano.

Si $5a + 2k = 0$ y $a \neq 6$ recta y plano son paralelos.

Resumiendo: Si $5a + 2k \neq 0$ recta y plano son secantes. Si $5a + 2k = 0$ y $a \neq 6$ recta y plano son paralelos. Si $5a + 2k = 0$ y $a = 6$ la recta está contenida en el plano.

Esta última condición se traduce en $\left. \begin{array}{l} 5a + 2k = 0 \\ a = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 30 + 2k = 0 \Rightarrow k = -15$.

Si $k = -15$ y $a = 6$ la recta está contenida en el plano.

¿En qué situaciones recta y plano son perpendiculares?

El vector normal del plano y el director de la recta deben tener coordenadas proporcionales, pues deben indicar la misma dirección.

$$\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0 \rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{n} = (a, 4, 3a) \\ \vec{v}_r = (1, k, 3) \\ \vec{n} \parallel \vec{v}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{4}{k} = \frac{3a}{3} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{4}{k} \Rightarrow \boxed{a \cdot k = 4}$$

La condición es que $a \cdot k = 4$.

7. Estadística y Probabilidad:

- a) En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.
- b) En un cierto país, el 80% de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

- a) Si el 60% de los clásicos son novelas significa que $0.60 \cdot 0.40 = 0.24$, el 24 por ciento del total son novelas y clásicos.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Novela	No novela	
Clásicos	24		40
No clásicos			
	70		100

Completamos la tabla.

	Novela	No novela	
Clásicos	24	16	40
No clásicos	46	14	60
	70	30	100

Mirando en la tabla tenemos que la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico es del $16/100 = 0.16$.

Mirando en la tabla tenemos que la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela es $\frac{\text{Nº de novelas y clásicos}}{\text{Nº de novelas}} = \frac{24}{70} \approx 0.343$

- b) El suceso contrario a “se resuelva por lo menos 1” es que no se resuelva ninguno.

$$P(\text{Se resuelva al menos 1}) = 1 - P(\text{No se resuelve ninguno}) = 1 - 0.80 \cdot 0.80 \cdot 0.80 = \boxed{0.488}$$

8. Estadística y Probabilidad:

- a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.
 b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

- a) Resolvemos el problema utilizando la distribución binomial.

X = Número de aciertos al responder 60 preguntas. Los parámetros son $n = 60$ y p = probabilidad de acertar una pregunta = $1/4 = 0.25$. $X = B(60, 0.25)$

Aproximamos esta binomial por una normal pues el número de repeticiones es muy alto.

Como $n \cdot p = 60 \cdot 0.25 = 15 > 5$ y también $n \cdot q = 60 \cdot 0.75 = 45 > 5$. La aproximación es buena.

Aproximamos la binomial por una normal de parámetros media = $\mu = np = 15$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{60 \cdot 0.25 \cdot 0.75} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \approx 3.35$$

$$X = B(60, 0.25) \text{ se aproxima con una normal } Y = N\left(15, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$$

Nos piden calcular $P(X \geq 16)$.

$$P(X \geq 16) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 15.5) = 1 - P(Y \leq 15.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{15.5 - 15}{3\sqrt{5}/2}\right) = 1 - P(Z \leq 0.15) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = 1 - 0.5596 = \boxed{0.4404}$$

- b) $X(25, 2)$

$$P(X < 24) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{24 - 25}{2}\right) = P(Z < -0.5) =$$

$$= P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085}$$

Respondemos a la segunda cuestión.

$$P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = P(X < 25 + \alpha) - P(X < 25 - \alpha) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z < \frac{25 + \alpha - 25}{2}\right) - P\left(Z < \frac{25 - \alpha - 25}{2}\right) = P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z < \frac{-\alpha}{2}\right) =$$

$$= P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z \geq \frac{\alpha}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right)\right] = 2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

Como debe ser igual a 0.2128 tenemos que:

$$2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 0.2128 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = 1.2128 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1.2128}{2} = 0.6064$$

Buscamos en la tabla y tenemos que $\frac{\alpha}{2} = 0.27 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0.54}$

ABAU Ordinaria 2022



Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
Convocatoria ordinaria 2022

Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

Despeje X de la ecuación matricial $AB(X - I) = C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:

$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1 \\ (m-3)y + (m^2 - m)z = 1 \\ x + m^2z = 0 \end{cases}$$
3. Análisis

a) Calcule los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

b) Dibuje la gráfica de una función f continua y no negativa en el intervalo $[0, 3]$ tal que: $f(0) = 0$, $f(3) = 0$, $f'' > 0$ en el intervalo $(0, 1)$, $f'' < 0$ en el intervalo $(2, 3)$ y f es constante en el intervalo $(1, 2)$.

4. Análisis:

Obtenga la función f , sabiendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$.

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1, -1, 0)$ y es

perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

b) Calcule los dos puntos de la recta $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, cuya distancia al plano $\pi: x - 1 = 0$ es igual

a 2.

6. Geometría:

a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k,3,m)$, $B(2,0,2)$ y $C(k,2,0)$ estén alineados.

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ y $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad:

a) Si $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles.

¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?

b) En una cierta ciudad, el 21% de las personas leen ciencia ficción, el 63% leen novela negra, y el 17% leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:

- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.
- La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

8. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule el valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.

b) Calcule el valor de α que hace que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0.8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:

Despeje X de la ecuación matricial $AB(X - I) = C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AB(X - I) = C \Rightarrow X - I = (AB)^{-1}C \Rightarrow X = (AB)^{-1}C + I$$

Calculamos la matriz AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que su determinante es no nulo y por tanto existe su inversa.

$$|AB| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 0 - 6 - 0 - 0 = 2 \neq 0$$

Calculamos su inversa.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{\text{Adj}((AB)^T)}{|AB|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -8 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de X .

$$X = (AB)^{-1}C + I \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2-3 & 4-4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1+2 & -2+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:

$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1 \\ (m-3)y + (m^2 - m)z = 1 \\ x + m^2z = 0 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2 - m \\ 1 & 0 & m^2 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2 - m \\ 1 & 0 & m^2 \end{vmatrix} = \{\text{Saco } m-3 \text{ como factor común en columna } 2^a\} =$$

$$= (m-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & m(m-1) \\ 1 & 0 & m^2 \end{vmatrix} = \{\text{Saco } m \text{ como factor común en columna } 3^a\} =$$

$$= (m-3)m \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & m-1 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = (m-3)m(m+m-1-1) = (m-3)m(2m-2) = 2m(m-3)(m-1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m(m-3)(m-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$$

Analizamos cuatro casos por separado.

CASO 1. $m \neq 0, m \neq 3$ y $m \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 0$

El sistema queda tan sencillo que lo resolvemos.

$$\begin{cases} x-3y=1 \\ -3y=1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=1 \\ y=\frac{-1}{3} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow 0-3\left(\frac{-1}{3}\right)=1 \Rightarrow 1=1 \text{ ¡Cierto!}$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{-1}{3}, \quad t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

CASO 3. $m=3$

El sistema queda tan sencillo que intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} x+3z=1 \\ 6z=1 \\ x+9z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3z=1 \\ \boxed{z=\frac{1}{6}} \\ x+9z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3\frac{1}{6}=1 \\ x+9\frac{1}{6}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{2}=1 \\ x+\frac{3}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{¡¡Imposible!!}$$

El sistema es incompatible.

CASO 4. $m=1$

El sistema queda tan sencillo que lo resolvemos.

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ -2y=1 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=1 \\ \boxed{y=-\frac{1}{2}} \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2\frac{-1}{2}+z=1 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1+z=1 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+z=0 \Rightarrow \boxed{x=-z}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x=-t \\ y=-\frac{1}{2}, t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

3. Análisis

- a) Calcule los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .
- b) Dibuje la gráfica de una función f continua y no negativa en el intervalo $[0, 3]$ tal que: $f(0) = 0$, $f(3) = 0$, $f'' > 0$ en el intervalo $(0, 1)$, $f'' < 0$ en el intervalo $(2, 3)$ y f es constante en el intervalo $(1, 2)$.

a) El primer límite

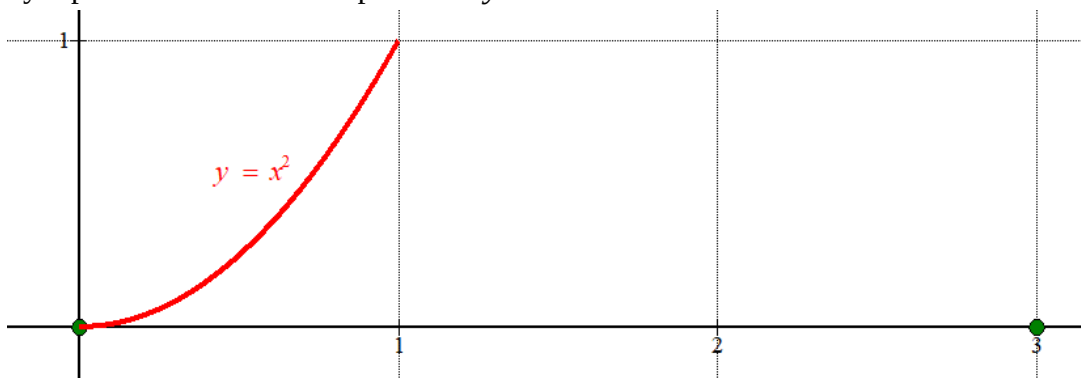
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} &= \frac{0 \cos 0}{\sin 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x)}{\cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x}{\cos x} = \frac{\cos 0 - 0 \sin 0}{\cos 0} = \frac{1 - 0}{1} = \boxed{1} \end{aligned}$$

El segundo límite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= 0 \ln 0^+ = 0(-\infty) = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = \boxed{0} \end{aligned}$$

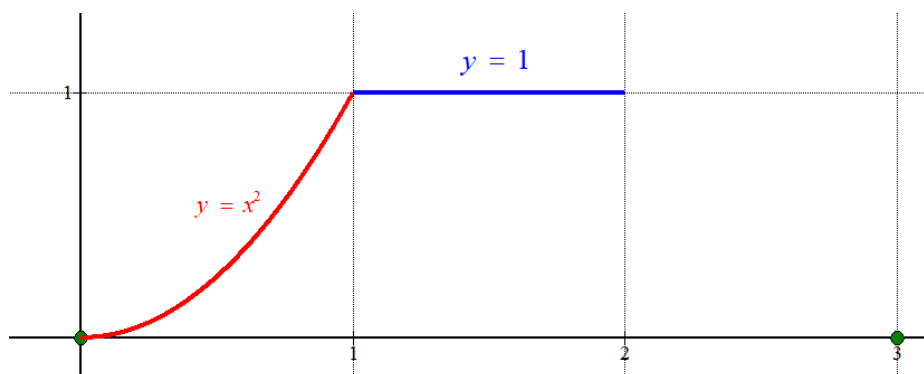
- b) La función está definida en el intervalo $[0, 3]$. Pasa por el punto $(0, 0)$ y $(3, 0)$ siendo siempre continua y no negativa. Es convexa ($\cup$) entre 0 y 1, constante entre 1 y 2, y cóncava ($\cap$) entre 2 y 3.

Entre 0 y 1 podría ser un trozo de parábola $y = x^2$.



Cumple que empieza en $(0, 0)$ y es convexa en el intervalo $(0, 1)$.

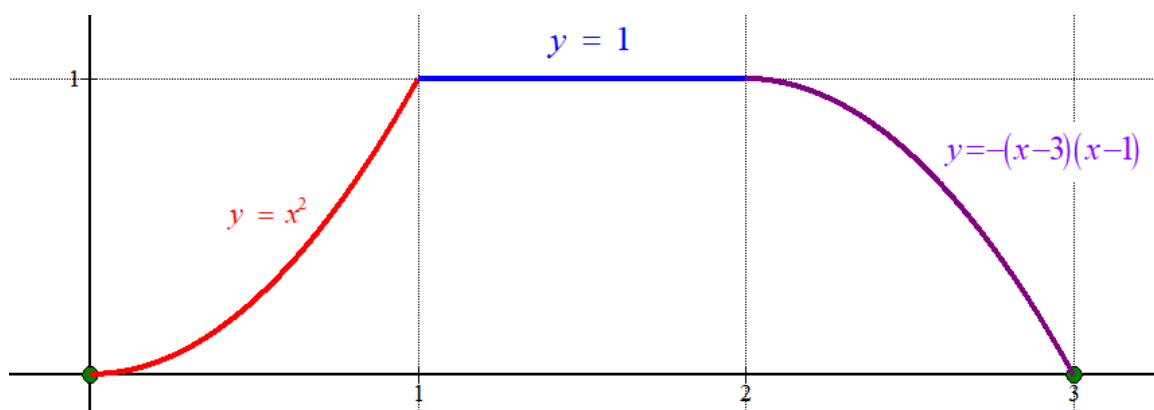
Ahora debemos poner un trozo de función entre 1 y 2 constante. Debe ser $y = 1$.



La función dibujada cumple que empieza en $(0, 0)$, es convexa en el intervalo $(0, 1)$, constante en el intervalo $(1, 2)$, continua y no negativa.

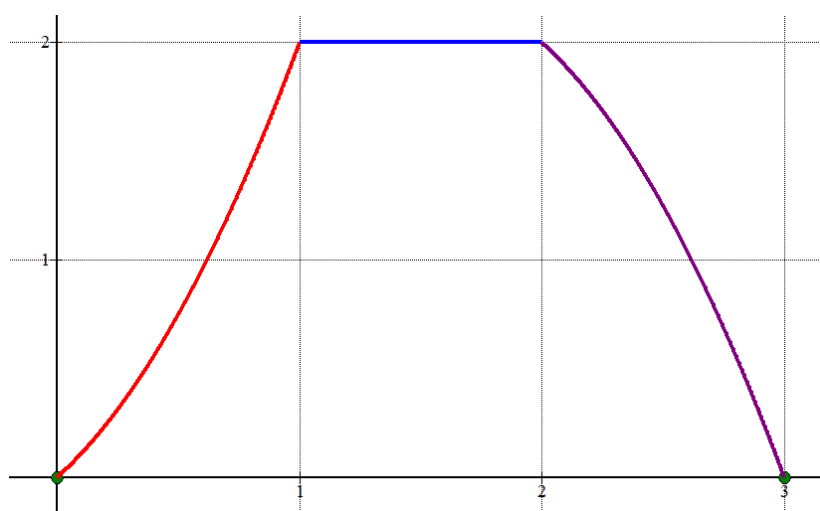
Nos falta el tramo entre 2 y 3 que debe de ser continua y cóncava. Ponemos un trozo de parábola que como debe pasar por los puntos $(2, 1)$ y $(3, 0)$ tomamos la expresión $y = -(x-3)(x-1)$.

Con el signo $-$ inicial es cóncava y con cada factor del producto consigo que pase por los puntos deseados.



Esta función cumple todo lo pedido. No nos piden tener la expresión de la función, por lo que basta con interpretar la información ofrecida y hacer el dibujo de arriba.

Se pueden dibujar muchas funciones que cumplen lo pedido. Aquí pongo otra más.



4. Análisis:

Obtenga la función f , sabiendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$.

Si $f''(x) = 2x - e^{-x}$ entonces su integral es la derivada primera.

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int 2x - e^{-x} dx = x^2 + e^{-x} + A$$

Si volvemos a integrar la función derivada obtenemos la función $f(x)$, que dependerá de dos parámetros que determinamos con el resto de información proporcionada en el ejercicio.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x^2 + e^{-x} + A dx = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + Ax + B$$

La función es $f(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + Ax + B$. Determinamos el valor de A y B.

Como la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$ se debe cumplir que tangente y función coincidan en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = 3 \cdot 0 - 1 = -1 \\ f(0) = \frac{0^3}{3} - e^{-0} + A \cdot 0 + B \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = -1 = \frac{0^3}{3} - e^{-0} + A \cdot 0 + B \Rightarrow -1 = -1 + B \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

También se debe cumplir que la derivada de $f(x)$ en $x = 0$ tenga el mismo valor que la pendiente de la recta ($m = 3$).

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x - 1 \rightarrow m = f'(0) = 3 \\ f'(x) = x^2 + e^{-x} + A \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0) = 3 = 0^2 + e^{-0} + A \Rightarrow 3 = 1 + A \Rightarrow \boxed{A = 2}$$

La función buscada es $f(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + 2x$

5. Geometría:

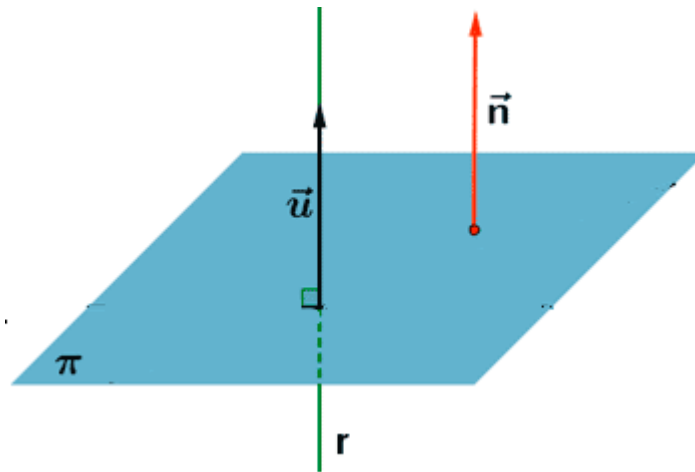
a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1, -1, 0)$ y es

perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

b) Calcule los dos puntos de la recta $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, cuya distancia al plano $\pi: x - 1 = 0$ es igual

a 2.

a) Si el plano es perpendicular a la recta el vector normal del plano es el director de la recta.



$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(1, -1, 0) \\ \vec{v}_r = (1, 0, 0) \end{cases}$$

$$\pi: \begin{cases} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 0, 0) \\ P(1, -1, 0) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi: x + D = 0 \\ P(1, -1, 0) \in \pi \end{cases} \Rightarrow 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi: x - 1 = 0}$$

b) Un punto genérico de la recta r tiene coordenadas $P(\lambda, \lambda, \lambda)$.

Aplicamos la fórmula de la distancia de punto a plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x - 1 = 0 \\ P(\lambda, \lambda, \lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|\lambda - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = |\lambda - 1|$$

Como la distancia debe ser 2 tenemos las dos opciones siguientes:

$$d(P, \pi) = |\lambda - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 1 = 2 \rightarrow \lambda = 3 \rightarrow \boxed{P(3, 3, 3)} \\ o \\ \lambda - 1 = -2 \rightarrow \lambda = -1 \rightarrow \boxed{P(-1, -1, -1)} \end{cases}$$

6. Geometría:

- a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k,3,m)$, $B(2,0,2)$ y $C(k,2,0)$ estén alineados.
- b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ y $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

- a) Para que tres puntos estén alineados debe cumplirse que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ indiquen la misma dirección, es decir, tengan coordenadas proporcionales.

Obtenemos las coordenadas de los dos vectores.

$$\left. \begin{array}{l} A(k, 3, m) \\ B(2, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2, 0, 2) - (k, 3, m) = (2-k, -3, 2-m)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(k, 3, m) \\ C(k, 2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (k, 2, 0) - (k, 3, m) = (0, -1, -m)$$

Sus coordenadas deben ser proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2-k, -3, 2-m) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -1, -m) \\ \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2-k}{0} = \frac{-3}{-1} = \frac{2-m}{-m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2-k}{0} = \frac{-3}{-1} \Rightarrow -2+k=0 \Rightarrow \boxed{k=2} \\ \frac{-3}{-1} = \frac{2-m}{-m} \Rightarrow 3m = -2+m \Rightarrow 2m = -2 \Rightarrow \boxed{m=-1} \end{array} \right.$$

Los valores buscados son $k = 2$ y $m = -1$.

- b) Obtengamos un vector director y un punto de cada una de ellas.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} P_r(1, -1, 2) \\ \overrightarrow{u_r} = (2, 3, 2) \end{array} \right.$$

$$s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow s: \left\{ \begin{array}{l} Q_s(-2, -3, -1) \\ \overrightarrow{v_s} = (3, 2, 3) \end{array} \right.$$

Comprobamos primero si son paralelas o coincidentes viendo si las coordenadas de sus vectores directores son proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 3, 2) \\ \overrightarrow{v_s} = (3, 2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{3} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{2}{3}$$

Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas tienen distinta dirección y se cortan o cruzan. Averiguamos en cual de las dos situaciones estamos comprobando si es nulo o no el producto mixto de los vectores $\vec{u}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{P_rQ_s} = (1, -1, 2) - (-2, -3, -1) = (3, 2, 3) \\ \vec{u}_r = (2, 3, 2) \\ \vec{v}_s = (3, 2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo que los vectores son dependientes y las rectas se cortan.

Averiguamos el punto de corte resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\begin{aligned} r: \begin{cases} P_r(1, -1, 2) \\ \vec{u}_r = (2, 3, 2) \end{cases} &\Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \\ s: \begin{cases} Q_s(-2, -3, -1) \\ \vec{v}_s = (3, 2, 3) \end{cases} &\Rightarrow s: \begin{cases} x = -2 + 3\alpha \\ y = -3 + 2\alpha \\ z = -1 + 3\alpha \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda = -2 + 3\alpha \\ -1 + 3\lambda = -3 + 2\alpha \\ 2 + 2\lambda = -1 + 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 2\lambda = 3\alpha \\ 2 + 3\lambda = 2\alpha \\ 3 + 2\lambda = 3\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 + 2\lambda = 3\alpha \\ 2 + 3\lambda = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 + 6\lambda = 9\alpha \\ -4 - 6\lambda = -4\alpha \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 5 & = & 5\alpha \Rightarrow \\ & \Rightarrow & \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 3 = 1 \\ y = -3 + 2 = -1 \\ z = -1 + 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(1, -1, 2)} \end{array}$$

Las rectas r y s se cortan en el punto $C(1, -1, 2)$.

7. Estadística y Probabilidad:

a) Si $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles.

¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?

b) En una cierta ciudad, el 21% de las personas leen ciencia ficción, el 63% leen novela negra, y el 17% leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:

- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.
- La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

a) Si los sucesos son incompatibles significa que su intersección es vacía, es decir, $P(A \cap B) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = \frac{1}{3} \\ P(B) = \frac{1}{4} \\ P(A \cap B) = 0 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} = P(A) + \frac{1}{4} - 0 \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}}$$

Si fuesen independientes entonces se cumpliría que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P(A) \frac{1}{4}$

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = \frac{1}{3} \\ P(B) = \frac{1}{4} \\ P(A \cap B) = \frac{1}{4} P(A) \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} = P(A) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} P(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = P(A) - \frac{1}{4} P(A) \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{3}{4} P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{36} \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{1}{9}}$$

b) Hacemos una tabla de contingencia.

	Leen novela negra	No leen novela negra	
Leen ciencia ficción	17		21
No leen ciencia ficción			
	63		100

Completamos la tabla.

	Leen novela negra	No leen novela negra	
Leen ciencia ficción	17	4	21
No leen ciencia ficción	46	33	79
	63	37	100

$$P(\text{Lea novela negra/Lee ciencia ficción}) = \boxed{\frac{17}{21} \approx 0.81}$$

$$P(\text{No lee novela negra ni ciencia ficción}) = \boxed{\frac{33}{100} = 0.33}$$

8. Estadística y Probabilidad:

- a) Calcule el valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.
- b) Calcule el valor de α que hace que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0.8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

a) $X = N(1, 3)$.

$$\begin{aligned} P(-2 \leq X \leq 7) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{-2-1}{3} \leq \frac{X-1}{3} \leq \frac{7-1}{3}\right) = \\ &= P(-1 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 2) - P(Z > 1) = \\ &= P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 1)] = \{\text{Miramos en la tabla } N(0,1)\} = 0.9772 - [1 - 0.8413] = \boxed{0.8185} \end{aligned}$$

b) $X = N(\mu, 4)$

$$\begin{aligned} P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) &= 0.8064 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow \\ \Rightarrow P\left(\frac{\mu - \alpha - \mu}{4} \leq \frac{X - \mu}{4} \leq \frac{\mu + \alpha - \mu}{4}\right) &= 0.8064 \Rightarrow \\ \Rightarrow P\left(\frac{-\alpha}{4} \leq Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) &= 0.8064 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - P\left(Z \leq \frac{-\alpha}{4}\right) = 0.8064 \Rightarrow \\ \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - P\left(Z > \frac{\alpha}{4}\right) &= 0.8064 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right)\right] = 0.8064 \Rightarrow \\ \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - 1 + P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) &= 0.8064 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 1.8064 \Rightarrow \\ \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) &= \frac{1.8064}{2} = 0.9032 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Buscamos esta probabilidad} \\ \text{en la tabla } N(0, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\alpha}{4} = 1.3 \Rightarrow \boxed{\alpha = 5.2} \end{aligned}$$

ABAU Extraordinaria 2021



Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
2021

Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera.

1. Números y Álgebra:

Despeje X en la ecuación matricial $B(X - I) = A$, donde I es la matriz identidad y A y B son matrices cuadradas, con B invertible. Luego, calcule X si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:

$$\begin{cases} mx + y + z = 2m \\ mx + (m+1)y + z = 1 \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1 \end{cases}$$
3. Análisis

a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Obtenga los valores de a , b y c que hacen que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ cumpla $f(0) = 1$ y tenga extremos relativos en $x = \pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

4. Análisis:

a) Enuncie el teorema de Rolle.

b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x) = x + 6$ y $g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita del plano π con ecuaciones paramétricas

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

b) Calcule el valor de m para que los siguientes puntos sean coplanarios: $A(0, m, 0)$, $B(0, 2, 2)$, $C(1, 4, 3)$ y $D(2, 0, 2)$. Obtenga la ecuación implícita del plano π que los contiene.

6. Geometría:

Calcule el punto simétrico de $P(1, 1, 2)$ con respecto al plano $\pi : 2x - y + z + 3 = 0$.

7. Estadística y Probabilidad:

En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:

- a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.
- b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

8. Estadística y Probabilidad:

El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:

Despeje X en la ecuación matricial $B(X - I) = A$, donde I es la matriz identidad y A y B son matrices cuadradas, con B invertible. Luego, calcule X si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$B(X - I) = A \Rightarrow B^{-1}B(X - I) = B^{-1}A \Rightarrow X - I = B^{-1}A \Rightarrow X = B^{-1}A + I$$

Hallamos la inversa de B .

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}}{1/6} = 6 \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = 6 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión $X = B^{-1}A + I$.

$$X = B^{-1}A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:

$$\begin{cases} mx + y + z = 2m \\ mx + (m+1)y + z = 1 \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 2m \\ m & m+1 & 1 & 1 \\ m & m+1 & 2 & m+1 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{vmatrix} = m(m+1)2 + m + \cancel{m(m+1)} - \cancel{m(m+1)} - 2m - m(m+1)$$

$$|A| = 2m(m+1) - m(m+1) + m - 2m = m(m+1) - m = m^2 + m - m = m^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 = 0 \Rightarrow \boxed{m=0}$$

Nos planteamos dos casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq 0$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas.

El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Para analizar con facilidad esta situación transformamos la matriz ampliada A/B en una matriz triangular equivalente usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A/B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow (A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A & & & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

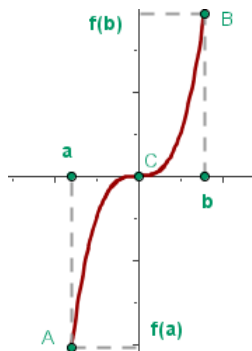
Observando la matriz triangular vemos que el rango de A es 2 y el de A/B es 3. Como tienen distinto rango el sistema es **incompatible**, sin solución.

3. Análisis

a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Obtenga los valores de a , b y c que hacen que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ cumpla $f(0) = 1$ y tenga extremos relativos en $x = \pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

a) **Teorema de Bolzano.** Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que toma valores de signo contrario en los extremos, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.



b) Debe cumplirse que $f(0) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Debe cumplirse que $f'(1) = 0$ y $f'(-1) = 0$.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3 \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 - 3 \Rightarrow \boxed{0 = 3a + 2b - 3}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3 \\ f'(-1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) - 3 \Rightarrow \boxed{0 = 3a - 2b - 3}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\begin{array}{l} (+) \left\{ \begin{array}{l} 3a + 2b - 3 = 0 \\ 3a - 2b - 3 = 0 \end{array} \right. \\ \hline 6a - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow 3 + 2b - 3 = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0} \end{array}$$

Los valores buscados son $a = 1$, $b = 0$ y $c = 1$.

Averiguamos si $x = \pm 1$ son máximos o mínimos sustituyendo estos valores en la derivada segunda.

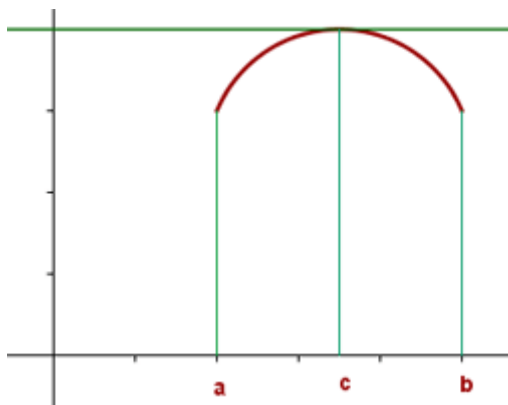
$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3 \\ a = 1 \\ b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x$$

$x = +1 \Rightarrow f''(1) = 6 > 0$. En $x = 1$ hay un mínimo relativo.

$x = -1 \Rightarrow f''(-1) = -6 < 0$. En $x = -1$ hay un máximo relativo.

4. Análisis:

a) Enuncie el teorema de Rolle.

b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x) = x + 6$ y $g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ a) **Teorema de Rolle:** Sea $f(x)$ una función **continua** en $[a, b]$ y **derivable** en (a, b) y que, además, cumple que $f(a) = f(b)$. Entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

b) Averiguamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow x + 6 = -2x \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2 \text{ Válido } (x < 0)$$

$$\text{Si } x \geq 0 \Rightarrow x^2 = x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 24}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 & \text{Válido } (x \geq 0) \\ \frac{1-5}{2} = -2 & \text{No válido } (x \geq 0) \end{cases}$$

Por el cambio de definición de la función la región la podemos dividir en dos partes, una entre $x = -2$ y $x = 0$ y la otra entre $x = 0$ y $x = 3$.

En el intervalo $(-2, 0)$ la función $g(x)$ es $g(x) = -2x$ y el área de la región es:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 f(x) - g(x) dx &= \int_{-2}^0 x + 6 - (-2x) dx = \int_{-2}^0 3x + 6 dx = \left[3 \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^0 = \\ &= \left[3 \frac{0^2}{2} + 0 \right] - \left[3 \frac{(-2)^2}{2} + 6(-2) \right] = 6 \end{aligned}$$

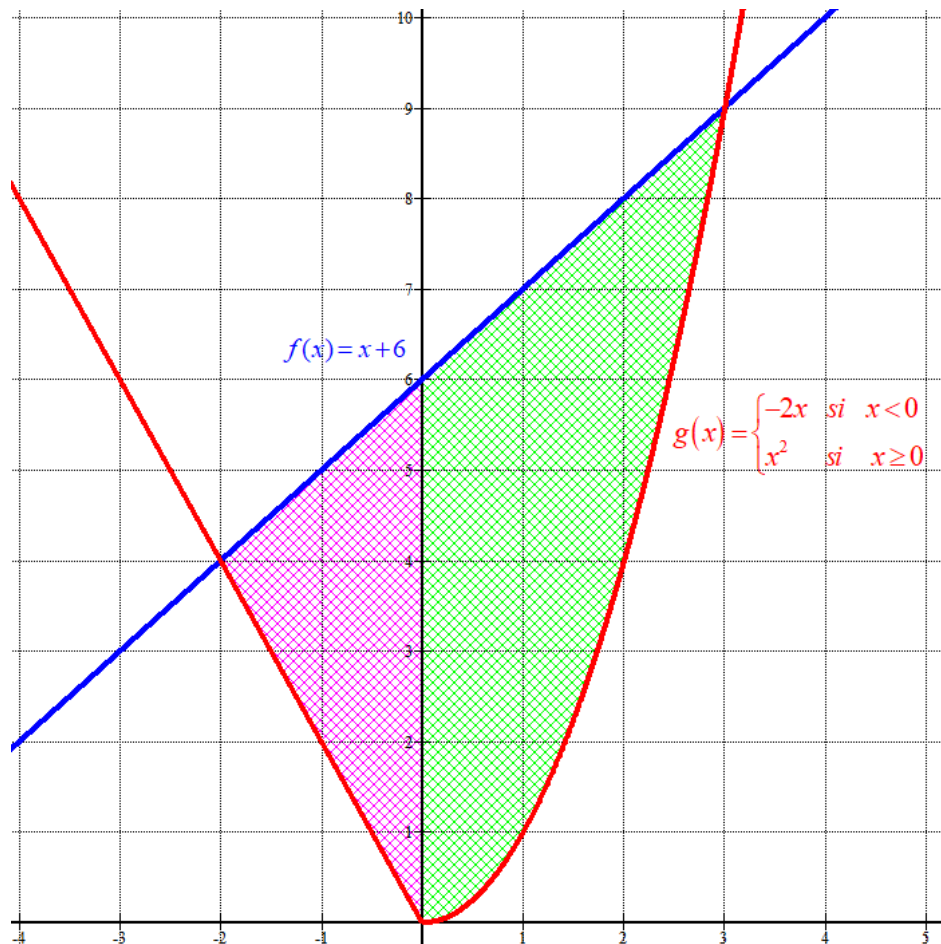
En el intervalo $(0, 3)$ la función $g(x)$ es $g(x) = x^2$ y el área de la región es:

$$\int_0^3 f(x) - g(x) dx = \int_0^3 x + 6 - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 =$$

$$= \left[\frac{3^2}{2} + 18 - \frac{3^3}{3} \right] - \left[\frac{0^2}{2} + 0 - \frac{0^3}{3} \right] = 4.5 + 18 - 9 = 13.5$$

El área total es $6 + 13.5 = 19.5 \text{ u}^2$.

No lo piden, pero dibujamos la función para comprobar el resultado.



5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita del plano π con ecuaciones paramétricas

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

b) Calcule el valor de m para que los siguientes puntos sean coplanarios: $A(0, m, 0)$, $B(0, 2, 2)$, $C(1, 4, 3)$ y $D(2, 0, 2)$. Obtenga la ecuación implícita del plano π que los contiene.

a) Obtenemos dos vectores directores del plano y un punto contenido en él.

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \pi : \begin{cases} \vec{u} = (-1, 0, 1) \\ \vec{v} = (0, 1, 2) \\ P(1, 2, 1) \in \pi \end{cases}$$

Obtenemos la ecuación implícita.

$$\pi : \begin{cases} \vec{u} = (-1, 0, 1) \\ \vec{v} = (0, 1, 2) \\ P(1, 2, 1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -z+1+2y-4-x+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi : x - 2y + z + 2 = 0}$$

b) Hallamos el plano π que contiene a los puntos B, C y D. Luego calculamos m para que A pertenezca al plano π .

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} = \overrightarrow{BC} &= (1, 4, 3) - (0, 2, 2) = (1, 2, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{BD} &= (2, 0, 2) - (0, 2, 2) = (2, -2, 0) \\ B(0, 2, 2) &\in \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y - 4 - 2z + 4 - 4z + 8 + 2x = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 6z + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y - 3z + 4 = 0}$$

Hacemos que A pertenezca al plano $\pi : x + y - 3z + 4 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \pi : x + y - 3z + 4 &= 0 \\ A(0, m, 0) &\in \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 + m - 0 + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -4}$$

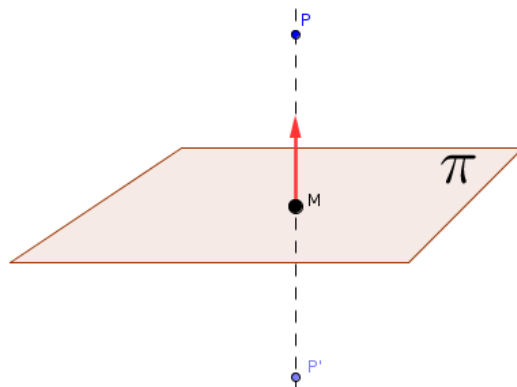
El valor buscado es $m = -4$.

La ecuación del plano que contiene a los puntos A, B, C y D es $\pi : x + y - 3z + 4 = 0$.

6. Geometría:

Calcule el punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto al plano $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$.

Debemos hallar el punto P' del dibujo.



Obtenemos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P .
El vector director de la recta r será el vector normal del plano.

$$\pi: 2x - y + z + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, -1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, -1, 1) \\ P(1, 1, 2) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Determinamos las coordenadas del punto M intersección de la recta r y el plano π .

$$\begin{aligned} & \pi: 2x - y + z + 3 = 0 \\ & r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \Rightarrow 2(1 + 2t) - (1 - t) + 2 + t + 3 = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2 + 4t - 1 + t + 2 + t + 3 = 0 \Rightarrow 6t + 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{-6}{6} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = 2 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow M(-1, 2, 1) \end{aligned}$$

Determinamos las coordenadas del punto $P'(a, b, c)$ simétrico de P respecto del plano π haciendo que los vectores $\overrightarrow{PM}$ y $\overrightarrow{MP'}$ sean iguales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PM} = (-1, 2, 1) - (1, 1, 2) = (-2, 1, -1) \\ \overrightarrow{MP'} = (a, b, c) - (-1, 2, 1) = (a + 1, b - 2, c - 1) \end{array} \right\} \Rightarrow (-2, 1, -1) = (a + 1, b - 2, c - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 = a + 1 \Rightarrow a = -3 \\ 1 = b - 2 \Rightarrow b = 3 \\ -1 = c - 1 \Rightarrow c = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P'(-3, 3, 0)}.$$

El punto P' simétrico de P con respecto al plano π tiene coordenadas $P'(-3, 3, 0)$.

7. Estadística y Probabilidad:

En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:

- a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.
b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

Realizamos una tabla de contingencia para organizar los datos.

	Tienen mascota	No tienen mascota	
Practican yoga	3		8
No practican yoga			
	20		100

Completamos la tabla.

	Tienen mascota	No tienen mascota	
Practican yoga	3	5	8
No practican yoga	17	75	92
	20	80	100

- a) Mirando en la tabla se observa que de una población de 100 personas hay 17 que no practican yoga y tienen mascota. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{No practique yoga y a la vez tenga mascota}) = \frac{17}{100} = 0.17$$

- b) Mirando en la tabla se observa que de los 8 que practican yoga hay 3 que tienen mascota. Aplicamos la regla de Laplace.

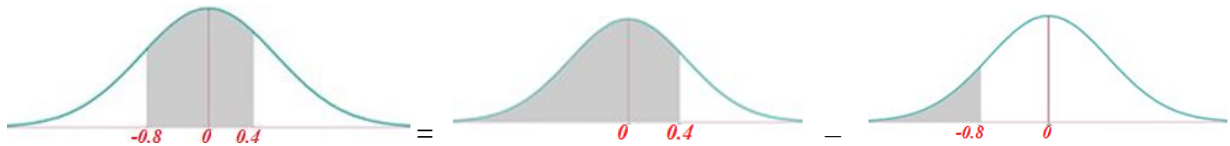
$$P(\text{Tenga mascota sabiendo que practica yoga}) = \frac{3}{8} = 0.375$$

8. Estadística y Probabilidad:

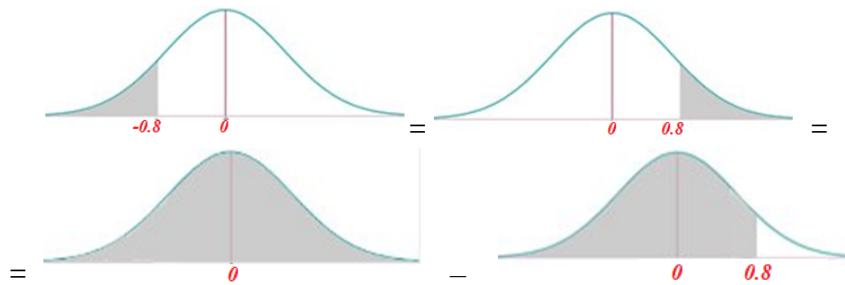
El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

X = Grosor de una plancha de acero en mm. $X = N(8, 0.5)$

$$P(7.6 \leq X \leq 8.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \\ Z = N(0,1) \end{array} \right\} = P\left(\frac{7.6-8}{0.5} \leq Z \leq \frac{8.2-8}{0.5}\right) = P(-0.8 \leq Z \leq 0.4) = \dots$$



$$\dots = P(Z \leq 0.4) - P(Z \leq -0.8) = \dots$$



$$\dots = P(Z \leq 0.4) - P(Z > 0.8) = P(Z \leq 0.4) - [1 - P(Z \leq 0.8)] =$$

$$= \{ \text{Miramos en la tabla } N(0,1) \} = 0.6554 - [1 - 0.7881] = \boxed{0.4435}$$

	0	
0.0	0.3989	0.50
0.1	0.3989	0.54
0.2	0.3989	0.58
0.3	0.3989	0.62
0.4	0.6554	0.65
0.5	0.6915	0.69
0.6	0.7257	0.72
0.7	0.7580	0.76
0.8	0.7881	0.79
0.9	0.8159	0.81
1.0	0.8413	0.84

ABAU Ordinaria 2021



Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
2021

Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2, \\ (-1)^j (i-1) & \text{si } i \neq 2. \end{cases}$ Explique si A y

$A + I$ son o no invertibles y calcule las inversas cuando existan. (Nota: a_{ij} es el elemento de A que está en la fila i y en la columna j , e I es la matriz identidad)

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:
$$\begin{cases} x + 2y = m \\ my + 3z = 1 \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1 \end{cases}$$

3. Análisis

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 2y = 4$, determine los vértices del que tiene mayor área.

4. Análisis:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 - x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ calcule el área de la región encerrada por la gráfica de f y las rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

5. Geometría:

- Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.
- Calcule el punto simétrico de $P(10, -5, 5)$ con respecto al plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

6. Geometría:

- Halle el valor de a si el plano $\pi: ax + y + z = 0$ es paralelo a la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$.

- Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ y $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$ en función del parámetro m .

7. Estadística y Probabilidad:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule $P(A)$ sabiendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ y $P(A \cup B) = 0.8$.

b) Diga si los sucesos A y B son o no independientes, si se sabe que

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.3 \quad \text{y} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82$$

8. Estadística y Probabilidad:

El portador de una cierta enfermedad tiene un 10% de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestas, calcule:

a) La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.

b) La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2, \\ (-1)^j (i-1) & \text{si } i \neq 2. \end{cases}$ Explique si A y

$A + I$ son o no invertibles y calcule las inversas cuando existan. (Nota: a_{ij} es el elemento de A que está en la fila i y en la columna j , e I es la matriz identidad)

El valor de i corresponde a la fila.

En la fila segunda ($i = 2$) los elementos son todos 1.

En la fila primera ($i = 1$) los elementos son todos $(-1)^j (1-1) = 0$.

En la fila tercera ($i = 3$) los elementos son $(-1)^j (3-1) = 2(-1)^j$, el elemento $a_{31} = 2(-1)^1 = -2$, el elemento $a_{32} = 2(-1)^2 = 2$ y el elemento $a_{33} = 2(-1)^3 = -2$,

La matriz A es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Para que sea invertible su determinante debe ser distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ La matriz } A \text{ no es invertible.}$$

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para que $A + I$ sea invertible su determinante debe ser distinto de 0.

$$|A + I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

La matriz $A + I$ es invertible. Calculamos su inversa.

$$(A + I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A + I)^T)}{|A + I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{-4} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -3/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:
$$\begin{cases} x + 2y = m \\ my + 3z = 1 \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 1 & m+2 & m+1 & m+1 \end{array} \right)$

Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 + m + 6 - 3m - 6 = m^2 - 2m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 2m = 0 \Rightarrow m(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

Estudiamos tres casos distintos.

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y por tanto su rango es 3. Al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (solución única)

CASO 2. $m = 0$

La matriz A queda $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$. Usamos el método de Gauss para triangular la matriz

y decidir el rango de A y el rango de A/B .

$$\begin{aligned} A/B &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $m = 2$

La matriz A queda $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{array} \right)$. Usamos el método de Gauss para triangular la matriz

y decidir el rango de A y el rango de A/B.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 4 \quad 3 \quad 3 \\ -1 \quad -2 \quad 0 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \\ 0 \quad -2 \quad -3 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

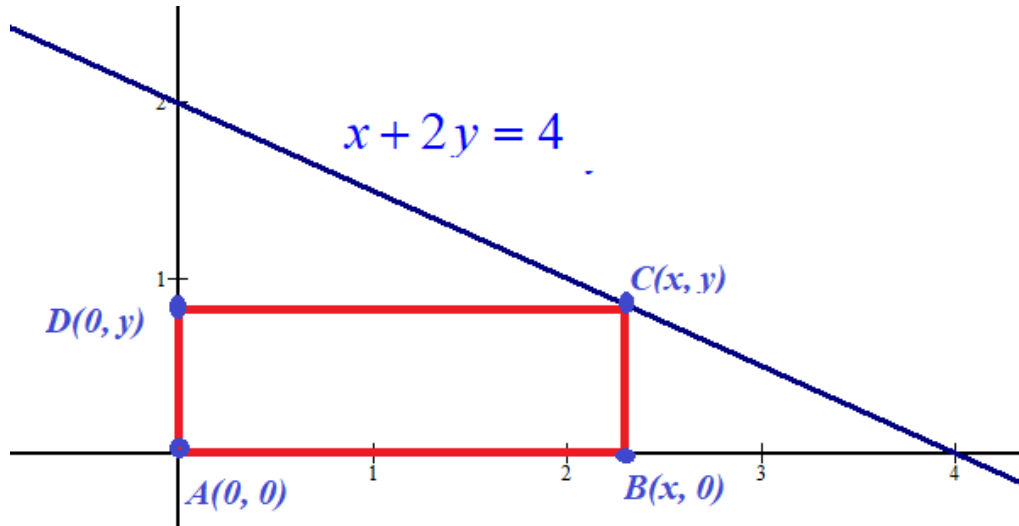
La matriz A tiene rango 2 y la matriz A/B también tiene rango 2, pero el número de incógnitas es 3. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $m \neq 0$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado (solución única), para $m = 0$ el sistema es incompatible (sin solución) y para $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

3. Análisis

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 2y = 4$, determine los vértices del que tiene mayor área.

La situación planteada es la del dibujo:



Como el vértice C pertenece a la recta $x + 2y = 4 \Rightarrow x = 4 - 2y$ entonces sus coordenadas son $C(4 - 2y, y)$.

El área del rectángulo rojo es:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \text{base} \cdot \text{altura} = x \cdot y = (4 - 2y)y = 4y - 2y^2 \\ A(y) &= 4y - 2y^2 \end{aligned}$$

Derivamos e igualamos a cero para encontrar el posible máximo.

$$\begin{aligned} A(y) &= 4y - 2y^2 \Rightarrow A'(y) = 4 - 4y \\ A'(y) &= 0 \Rightarrow 4 - 4y = 0 \Rightarrow -4y = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{-4} = 1 \end{aligned}$$

Hallamos la segunda derivada y vemos si es máximo o mínimo.

$$\begin{aligned} A'(y) &= 4 - 4y \Rightarrow A''(y) = -4 \\ A''(1) &= -4 < 0 \end{aligned}$$

La función área presenta un máximo en $y = 1$.

El área es máxima cuando $y = 1$. Sustituyendo tenemos que $x = 4 - 2 = 2$.

El vértice C que hace máxima el área del rectángulo es $C(2, 1)$.

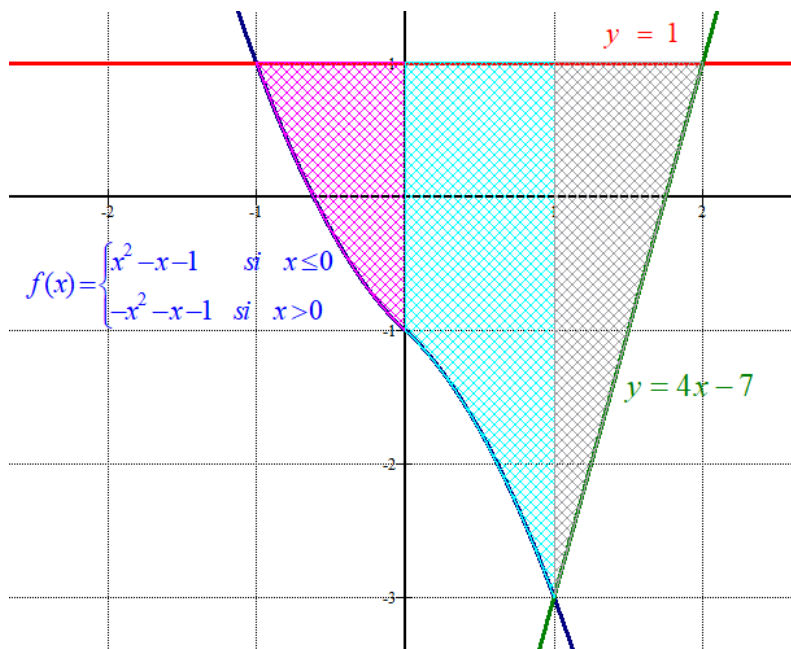
El resto de vértices son $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ y $D(0, 1)$

4. Análisis:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 - x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ calcule el área de la región encerrada por la gráfica de f y las rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

Dibujamos la región de la que nos piden calcular su área.

$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 - x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$		$y = 4x - 7$	$y = 1$
$x \mid y = x^2 - x - 1$	$x \mid y = -x^2 - x - 1$	$x \mid y = 4x - 7$	$x \mid y = 1$
-2 $\mid$ 5	0 $\mid$ -1 No se incluye	1 $\mid$ -3	-1 $\mid$ 1
-1 $\mid$ 1	1 $\mid$ -3	2 $\mid$ 1	2 $\mid$ 1
0 $\mid$ -1	2 $\mid$ -7		



La función $f(x)$ y la recta $y = 1$ se cortan en $x = -1$.

La función $f(x)$ cambia de definición en $x = 0$.

La función $f(x)$ y la recta $y = 4x - 7$ se cortan en $x = 1$.

La recta $y = 4x - 7$ y la recta horizontal $y = 1$ se cortan en $x = 2$.

La región la dividimos en 3 partes (rosa, azul claro y gris en el dibujo) cuya área calculamos por separado y luego sumamos sus valores.

$$\begin{aligned} \text{Área rosa} &= \int_{-1}^0 1 - (x^2 - x - 1) dx = \int_{-1}^0 1 - x^2 + x + 1 dx = \int_{-1}^0 -x^2 + x + 2 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 = \\ &= \left[-\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) \right] = 0 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \boxed{\frac{7}{6} u^2} \end{aligned}$$

$$\text{Área azul} = \int_0^1 1 - (-x^2 - x - 1) dx = \int_0^1 1 + x^2 + x + 1 dx = \int_0^1 x^2 + x + 2 dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \left[\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 2 \right] - \left[\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 \right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \boxed{\frac{17}{6} u^2}$$

$$\text{Área gris} = \int_1^2 1 - (4x - 7) dx = \int_1^2 1 - 4x + 7 dx = \int_1^2 -4x + 8 dx = \left[-2x^2 + 8x \right]_1^2 =$$

$$= \left[-2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 \right] - \left[-2 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 \right] = -8 + 16 + 2 - 8 = \boxed{2 u^2}$$

El área total es $\frac{7}{6} + \frac{17}{6} + 2 = \boxed{6 u^2}$

5. Geometría:

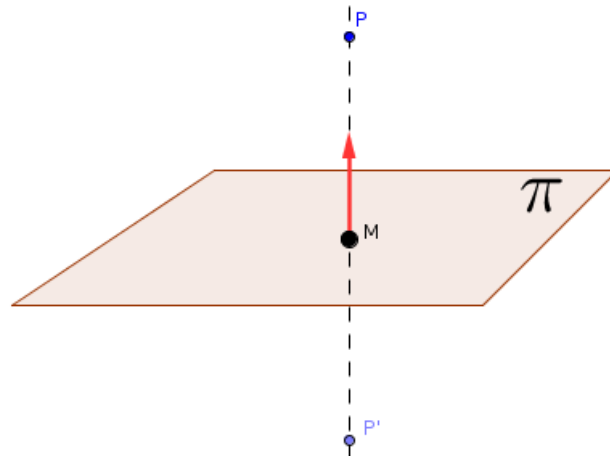
- a) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.
- b) Calcule el punto simétrico de $P(10, -5, 5)$ con respecto al plano $\pi : 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

- a) El plano pedido tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y contiene el punto A.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0, 0, 3) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 3) \\ A(1, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$6x - 6 + 2z + 3y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0}$$

- b) Nos piden hallar el punto P' del dibujo.



Obtenemos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P .
El vector director de la recta r será el vector normal del plano.

$$\pi : 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (6, 3, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (6, 3, 2) \\ P(10, -5, 5) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 10 + 6t \\ y = -5 + 3t, t \in \mathbb{R} \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

Determinamos las coordenadas del punto M intersección de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 10 + 6t \\ y = -5 + 3t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 6(10 + 6t) + 3(-5 + 3t) + 2(5 + 2t) - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 60 + 36t - 15 + 9t + 10 + 4t - 6 = 0 \Rightarrow 49t + 49 = 0 \Rightarrow t = \frac{-49}{49} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 10 - 6 = 4 \\ y = -5 - 3 = -8 \Rightarrow \\ z = 5 - 2 = 3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow M(4, -8, 3)$$

Determinamos las coordenadas del punto $P'(a, b, c)$ simétrico de P respecto del plano π haciendo que los vectores $\overrightarrow{PM}$ y $\overrightarrow{MP'}$ sean iguales.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{PM} &= (4, -8, 3) - (10, -5, 5) = (-6, -3, -2) \\ \overrightarrow{MP'} &= (a, b, c) - (4, -8, 3) = (a - 4, b + 8, c - 3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (a - 4, b + 8, c - 3) = (-6, -3, -2) \Rightarrow$$

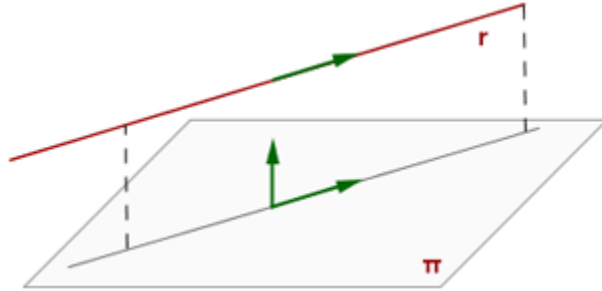
$$\Rightarrow \begin{cases} a - 4 = -6 \Rightarrow a = -6 + 4 = -2 \\ b + 8 = -3 \Rightarrow b = -3 - 8 = -11 \Rightarrow \boxed{P'(-2, -11, 1)} \\ c - 3 = -2 \Rightarrow c = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

El punto P' simétrico de P tiene coordenadas $P'(-2, -11, 1)$

6. Geometría:

- a) Halle el valor de a si el plano $\pi : ax + y + z = 0$ es paralelo a la recta $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} . \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$
- b) Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1 : 2x + y + mz + m = 0$ y $\pi_2 : (m-1)x + y + 3z = 0$ en función del parámetro m .

- a) La situación planteada es la del dibujo.



El vector normal al plano y el vector director de la recta deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe ser 0.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : ax + y + z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (a, 1, 1) \\ r : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (1, 1, 1) \cdot (a, 1, 1) = 0 \Rightarrow a + 1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

El valor buscado es $a = -2$.

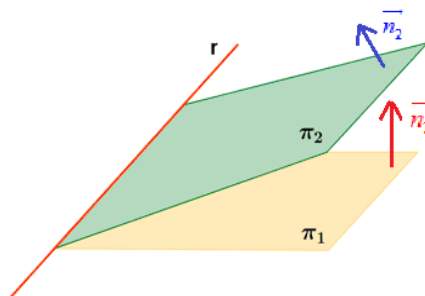
- b) Los dos planos pueden ser coincidentes, paralelos o secantes (en una recta).

Comparamos sus vectores normales.

Si las coordenadas de ambos vectores normales son proporcionales los planos son paralelos o coincidentes, en caso contrario son secantes.

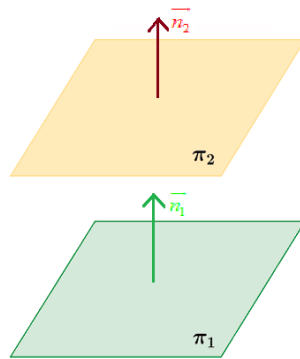
$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x + y + mz + m = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (2, 1, m) \\ \pi_2 : (m-1)x + y + 3z = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (m-1, 1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{m-1} = \frac{1}{1} = \frac{m}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{m-1} = \frac{1}{1} \Rightarrow 2 = m-1 \Rightarrow m = 3 \\ y \\ \frac{1}{1} = \frac{m}{3} \Rightarrow 3 = m \end{cases}$$

Para $m \neq 3$ las coordenadas de los vectores normales no son proporcionales y los planos son secantes.



Para $m = 3$ las coordenadas de los vectores normales son proporcionales y pueden ser paralelos o coincidentes. Comparamos sus ecuaciones para $m = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} m=3 \Rightarrow \pi_1 : 2x + y + 3z + 3 = 0 \\ m=3 \Rightarrow \pi_2 : 2x + y + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{3}{3} \neq \frac{3}{0} \Rightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ son paralelos}$$



Resumiendo: Para $m = 3$ los planos son paralelos y para $m \neq 3$ los planos son secantes.

7. Estadística y Probabilidad:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule $P(A)$ sabiendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ y $P(A \cup B) = 0.8$.

b) Diga si los sucesos A y B son o no independientes, si se sabe que

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.3 \quad \text{y} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82$$

a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos A y B .

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.8 = P(A) + 2P(A) - 0.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.9 = 3P(A) \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{0.9}{3} = 0.3}$$

b) Para que sean independientes deben cumplir la igualdad $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \\ P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - P(A \cap B) = 0.82 \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0.82 = 0.18$$

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.18 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.18$$

Los sucesos A y B son independientes.

8. Estadística y Probabilidad:

El portador de una cierta enfermedad tiene un 10% de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestas, calcule:

- La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.
- La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

Resolvemos el problema usando la distribución binomial.

X = Número de contagiados de un grupo de 8.

p = P(contagiar a una persona no expuesta) = 0.10

Número de repeticiones = $n = 8$

$X = B(8, 0.1)$

En nuestra distribución binomial se cumple que:

$$P(X = r) = \binom{8}{r} 0.1^r \cdot 0.9^{n-r} \text{ siendo } r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \text{ u } 8$$

- Nos piden hallar el valor de $P(X \leq 2)$.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= \binom{8}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^8 + \binom{8}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^7 + \binom{8}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^6 =$$

$$= 0.9^8 + 8 \cdot 0.1 \cdot 0.9^7 + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^6 = \boxed{0.9619}$$

- Nos piden hallar $P(X \geq 2)$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$

$$= 1 - \left(\binom{8}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^8 + \binom{8}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^7 \right) =$$

$$= 1 - (0.9^8 + 8 \cdot 0.1 \cdot 0.9^7) = \boxed{0.1869}$$

ABAU Extraordinaria 2020



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 2020**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

Para la ecuación matricial $A^2X + AB = B$, se pide:

a) Despejar X suponiendo que A (y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4×4 y B tuviera 3 columnas.

b) Resolverla en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m \\ (m+3)x + my = 3m + 6 \end{cases}$$

3. Análisis

Determine los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{a - \cos x}{x} & \text{si } x < 0 \\ bx & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable.

4. Análisis:

a) Calcule el área encerrada por el eje X y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2 - 1} dx$.

5. Geometría:

Sean r la recta de vector director $\vec{d}_r(1, 0, 3)$ que pasa por $(1, 0, 0)$ y $\pi: -2x + y + z = 0$. Se pide la posición relativa de r y π . En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

6. Geometría:

- a) Calcule k sabiendo que los vectores $\vec{u}(2, 0, 0)$, $\vec{v}(0, k, 1)$ y $\vec{w}(2, 2, 2)$ son coplanarios.
- b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por $P(1, 0, 0)$ y contiene a $r: x - 1 = \frac{y}{-4} = \frac{z + 1}{3}$

7. Estadística y Probabilidad:

El 57% de los estudiantes matriculados en la Universidad de Cambridge son naturales del Reino Unido y, de entre todos esos, el 83% aprueban con honores. Además, el porcentaje global de aprobados con honores es del 80%. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya nacido en el Reino Unido sabiendo que aprobó con honores.

8. Estadística y Probabilidad:

- a) En una determinada población de árboles, el 20% tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.
- b) Si X sigue una distribución normal de media 15 y $P(X \leq 18) = 0.6915$, ¿cuál es la desviación típica?

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:

Para la ecuación matricial $A^2X + AB = B$, se pide:

a) Despejar X suponiendo que A (y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4×4 y B tuviera 3 columnas.

b) Resolverla en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

a) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A^2X + AB = B \Rightarrow A^2X = B - AB \Rightarrow (A^2)^{-1} A^2X = (A^2)^{-1} (B - AB) \Rightarrow \boxed{X = (A^2)^{-1} (B - AB)}$$

Como la matriz A es de dimensión 4×4 , tiene la misma dimensión la matriz A^2 .

La inversa de A^2 tendrá dimensión 4×4 .

La matriz B tiene dimensión $m \times 3$.

$$\begin{array}{c} AB \longrightarrow \\ 4 \times \boxed{4 = m} \times 3 \rightarrow 4 \times 3 \end{array}$$

La matriz B debe tener dimensión 4×3 . Y la matriz AB saldrá de dimensión 4×3 .

Como la matriz B y la matriz AB tienen la misma dimensión (4×3) se puede realizar la resta $B - AB$ obteniéndose como resultado una matriz 4×3 .

Comprobamos la dimensión del producto $(A^2)^{-1} (B - AB)$.

$$\begin{array}{c} (A^2)^{-1} (B - AB) \longrightarrow X \\ 4 \times \boxed{4 = 4} \times 3 \longrightarrow 4 \times 3 \end{array}$$

La matriz B debe ser de dimensión 4×3 y la matriz X será de dimensión 4×3 .

b) Comprobamos que A^2 es invertible y calculamos su inversa.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix} \\ |A^2| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Al ser su determinante no nulo existe la inversa. La calculamos.

$$(A^2)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((A^2)^T\right)}{|A^2|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B - AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1-9 \end{pmatrix}$$

$$B - AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Con lo obtenido lo sustituimos en la expresión obtenida en el apartado a).

$$X = (A^2)^{-1} (B - AB) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-6 & 0 & -20+21 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3-2 & 0 & -6+7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m \\ (m+3)x + my = 3m+6 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{pmatrix}$

Con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{vmatrix} = m(m+3) + m^2(m+3) = m(m+3)(1+m)$$

Iguálamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow m(m+3)(1+m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m+3 = 0 \rightarrow m = -3 \\ 1+m = 0 \rightarrow m = -1 \end{cases}$$

Estudiamos las cuatro situaciones diferentes que se nos pueden plantear según los valores de m .

CASO 1. $m \neq 0$; $m \neq -3$ y $m \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.

El sistema es **compatible determinado**. Con una única solución.

CASO 2. $m = 0$

El sistema nos queda:

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ 3x = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es **incompatible** pues nos salen dos valores diferentes de " x ".

CASO 3. $m = -3$

El sistema nos queda:

$$\begin{cases} -9y = -9 \\ -3y = -9+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ -3y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

El sistema es **compatible indeterminado**. Tiene infinitas soluciones. Las soluciones tienen la expresión: $x = t$; $y = 1$

CASO 4. $m = -1$

El sistema nos queda:

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 2x - y = -3 + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \hspace{0.5cm} 0 = -6 \quad \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es **incompatible**. No tiene solución.

Resumiendo: El sistema es compatible determinado para $m \neq 0$; $m \neq -3$ y $m \neq -1$. Es incompatible para $m = 0$ o $m = -1$. El sistema es compatible indeterminado para $m = -3$.

3. Análisis

Determine los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{a - \cos x}{x} & \text{si } x < 0 \\ bx & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable.

Para que $f(x) = \begin{cases} \frac{a - \cos x}{x} & \text{si } x < 0 \\ bx & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea continua debe serlo en $x = 0$ y se deben cumplir:

- Existe $f(0) = b \cdot 0 = 0$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Calculo los límites laterales:
 - $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a - \cos x}{x} = \frac{a - \cos 0}{0} = \frac{a - 1}{0} = \{\text{Debe ser } a = 1\} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\text{sen} x}{1} = -\text{sen} 0 = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} bx = 0$
- $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Se cumplen las tres condiciones y la función es continua cuando $a = 1$.

Para $a = 1$ la función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x < 0 \\ bx & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad de la función en $x = 0$.

La derivada de la función en $\mathbb{R} - \{0\}$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \text{sen} x - 1 + \cos x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Las derivadas laterales en $x = 0$ son:

- $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \text{sen} x - 1 + \cos x}{x^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen} x + x \cos x - \text{sen} x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$$
- $f'(0^+) = b$

Como deben ser iguales para que sea derivable debe cumplirse que $b = \frac{1}{2}$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = 1/2$.

4. Análisis:

a) Calcule el área encerrada por el eje X y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x+1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}dx$.

a) Localizamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje X ($y = 0$)

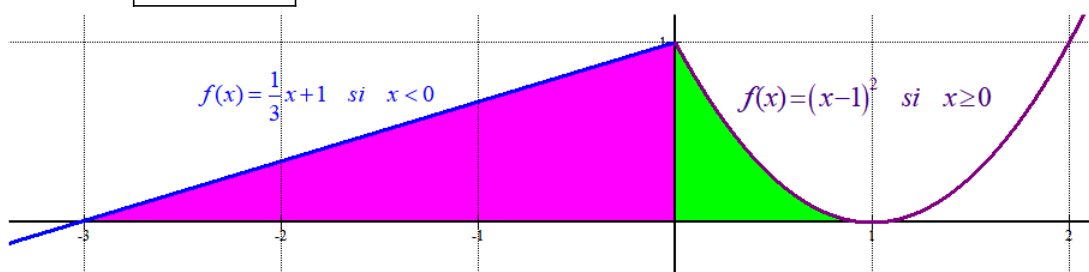
$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x+1=0 \rightarrow x+3=0 \rightarrow x=-3 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2=0 \rightarrow x=1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

El área pedida la dividimos en dos recintos que calculamos con dos integrales definidas, una entre -3 y 0 de $f(x) = \frac{1}{3}x+1$ y otra entre 0 y 1 de $f(x) = (x-1)^2$.

$$\int_{-3}^0 \frac{1}{3}x+1 dx = \left[\frac{1}{3} \frac{x^2}{2} + x \right]_{-3}^0 = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{0^2}{2} + 0 \right] - \left[\frac{1}{3} \frac{(-3)^2}{2} - 3 \right] = -\frac{9}{6} + 3 = \frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 (x-1)^2 dx = \int_0^1 x^2 - 2x + 1 dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = \left[\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 0^2 + 0 \right] = \frac{1}{3}$$

$$\text{Área} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} = 1,83 u^2$$



b) Calculamos la integral usando un cambio de variable.

$$\int x\sqrt{x^2-1}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x^2-1=t \rightarrow 2xdx=dt \\ dx=\frac{dt}{2x} \end{array} \right\} = \int \cancel{x} \sqrt{t} \frac{dt}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} = \left\{ \text{Deshacemos el cambio } t = x^2 - 1 \right\} = \frac{1}{3} (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - 1)^3} + K}$$

5. Geometría:

Sean r la recta de vector director $\vec{d}_r(1,0,3)$ que pasa por $(1,0,0)$ y $\pi: -2x + y + z = 0$. Se pide la posición relativa de r y π . En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

Realizamos el producto escalar del vector director de la recta $\vec{d}_r(1,0,3)$ y el normal del plano $\vec{n}(-2,1,1)$.

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n} = (1,0,3)(-2,1,1) = -2 + 3 = 1 \neq 0$$

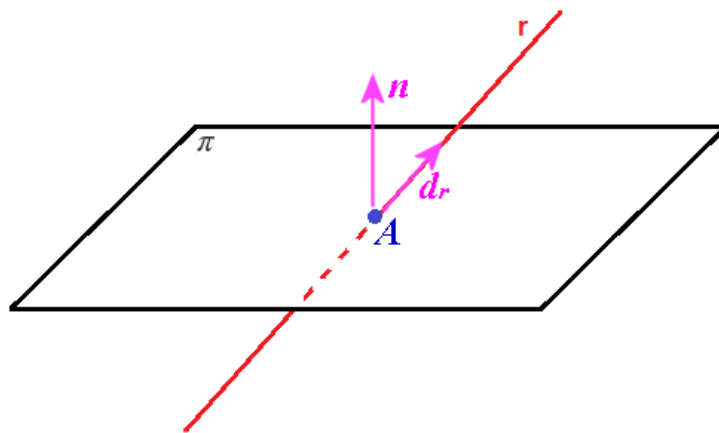
Los vectores no son perpendiculares y por tanto recta y plano no son paralelos, ni la recta está contenida en el plano.

Por lo que recta y plano se cortan en un punto. Determinamos ese punto resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{d}_r(1,0,3) \\ P(1,0,0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \alpha \\ y = 0 \\ z = 3\alpha \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2(1 + \alpha) + 0 + 3\alpha = 0 \\ -2 - 2\alpha + 3\alpha = 0 \\ \alpha = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\pi: -2x + y + z = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2 = 3 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\text{El punto de corte es } A(3,0,6)}$$



6. Geometría:

a) Calcule k sabiendo que los vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ y $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por $P(1,0,0)$ y contiene a $r: x-1 = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{3}$

a) Si son coplanarios el determinante de la matriz formada por sus coordenadas debe ser cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4k - 4 = 0 \Rightarrow k - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{k=1}$$

b) Si el plano contiene a la recta el vector director de la recta es un vector director del plano.

El otro vector director que necesitamos lo obtenemos del vector que une el punto P con un punto cualquiera de la recta, por ejemplo $Q(1,0,-1)$.

$$r: x-1 = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow \begin{cases} Q(1,0,-1) \in r \\ \vec{v}_r = (1, -4, 3) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1,0,0) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (1, -4, 3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (1,0,-1) - (1,0,0) = (0,0,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4x - 4 + y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 4x + y - 4 = 0}$$

7. Estadística y Probabilidad:

El 57% de los estudiantes matriculados en la Universidad de Cambridge son naturales del Reino Unido y, de entre todos esos, el 83% aprueban con honores. Además, el porcentaje global de aprobados con honores es del 80%. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya nacido en el Reino Unido sabiendo que aprobó con honores.

Realizamos una tabla de contingencia reflejando que porcentaje corresponde a cada característica.

	Aprueban con honores	No honores	
Nacido en RU	83% de 57 = 47,31		57
No nacido en RU			
	80		100

Completamos los datos que nos faltan.

	Aprueban con honores	No honores	
Nacido en RU	47,31	9,69	57
No nacido en RU	32,69	10,31	43
	80	20	100

Mirando en los datos de la primera columna tenemos que el 80 % aprueban con honores y de ellos el 32,69 % no son de Reino Unido.

Aplicamos el teorema de Bayes para responder a lo que pide el ejercicio.

$$P(\text{No haya nacido en RU} / \text{Ha aprobado con honores}) =$$

$$= \frac{P(\text{No haya nacido en RU} \cap \text{Ha aprobado con honores})}{P(\text{Ha aprobado con honores})} = \frac{32,69}{80} = \boxed{0,408625}$$

8. Estadística y Probabilidad:

- a) En una determinada población de árboles, el 20% tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.
- b) Si X sigue una distribución normal de media 15 y $P(X \leq 18) = 0.6915$, ¿cuál es la desviación típica?

- a) Cada elección es independiente de la anterior. Hay 40 elecciones siendo 0,20 la probabilidad de que un árbol elegido tenga más de 30 años.

X = Número de árboles de más de 30 años entre los 40 elegidos.

X es una variable aleatoria binomial, con parámetros $n = 40$ y $p = 0.2$. Así $q = 1 - p = 0.8$.

$X = B(40, 0.2)$

$$P(X = 4) = \binom{40}{4} 0.2^4 \cdot 0.8^{36} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2} 0.2^4 \cdot 0.8^{36} = 10 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 0.2^4 \cdot 0.8^{36} = \boxed{0.0475}$$

- b) $X = N(15, \sigma)$.

$$P(X \leq 18) = 0.6915 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ \text{la variable } X \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{18-15}{\sigma}\right) = 0.6915 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.6915$$

Buscamos este valor de probabilidad (0.6915) en la tabla de la $N(0, 1)$ y obtenemos que:

$$\frac{3}{\sigma} = 0.5 \Rightarrow 3 = 0.5\sigma \Rightarrow \sigma = \frac{3}{0.5} = 6$$

ABAU Ordinaria 2020



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
CONVOCATORIA ORDINARIA 2020**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

Sean A y B las dos matrices que cumplen $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

- Calcular $A^2 - B^2$. (Advertencia: en este caso, $A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$)
- Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA + (A+B)^T = 2I + XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $A+B$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + z = 0 \\ x + my = 0 \end{cases}$$

3. Análisis

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}}$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función f .

4. Análisis:

a) Calcule los valores de b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + bx + c & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable en $x = 0$.

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x - 1) dx$.

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $A(3, 0, -1)$, $B(4, 1, 1)$ y $C(7, 1, 5)$.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ y que pasa por el punto $P(-1, -2, 2)$

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ y

$s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad:

Se seleccionan 250 pacientes para estudiar la eficacia de un nuevo medicamento. A 150 de ellos se les administra el medicamento, mientras que el resto son tratados con un placebo. Sabiendo que se curaron el 80% de los que tomaron el medicamento, ¿cuál es la probabilidad de que, seleccionado un paciente al azar, tomara el placebo o no se curara?

8. Estadística y Probabilidad:

En una cadena de montaje, el tiempo empleado para realizar un determinado trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 4 minutos. Calcule la probabilidad de que se haga ese trabajo en un tiempo comprendido entre 16 y 26 minutos.

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:

Sean A y B las dos matrices que cumplen $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) Calcular $A^2 - B^2$. (Advertencia: en este caso, $A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$)
 b) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA + (A+B)^T = 2I + XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $A+B$

a) Resolvamos el sistema matricial y obtengamos la expresión de las matrices A y B .

$$\left. \begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A-B=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \{\text{Sumando las 2 ecuaciones}\} \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo en $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz $A^2 - B^2$.

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$XA + (A+B)^T = 2I + XB \Rightarrow XA - XB = 2I - (A+B)^T \Rightarrow X(A-B) = 2I - (A+B)^T$$

Como $A-B=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y su determinante es $|A-B| = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$ existe la inversa y la calculamos para determinar X .

$$(A-B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A-B)^T)}{|A-B|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}}{16} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}}{16}$$

Seguimos despejando en la ecuación:

$$X(A-B) = 2I - (A+B)^T \Rightarrow X = [2I - (A+B)^T](A-B)^{-1}$$

Hacemos los cálculos.

$$X = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right] \frac{\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}}{16} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + z = 0 \\ x + my = 0 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}$

Con determinante $|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 1 - m^2$

Iguálamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow 1 - m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \sqrt{1} = \pm 1$$

Establecemos tres casos distintos.

CASO 1. $m \neq \pm 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $m = 1$

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 1ª (igual que la 3ª)

y la columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. El rango de A es 2.

Veamos el rango de $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Consideramos el menor de orden 3 que resulta de

quitar la columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

El rango de A/B es 3.

Rango de $A = 2 \neq 3 =$ Rango de A/B .

El sistema es incompatible.

CASO 3. $m = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 1ª}$$

$$(\text{proporcional a la 3ª}) \text{ y la columna 1ª} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ con determinante } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

$$\text{Veamos el rango de } A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Consideramos el menor de orden 3 que resulta de}$$

$$\text{quitar la columna 1ª} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ con determinante } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 $\neq$ 3 = Rango de A/B.

El sistema es incompatible.

Resumiendo: Si $m \neq \pm 1$ el sistema es compatible determinado, si $m = 1$ o $m = -1$ el sistema es incompatible.

3. Análisis

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}}$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función f .

a) Calculamos el límite pedido.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}} &= \frac{1 - 1}{1 + 0 - 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x \sin x}{2 - 2e^{2x}} = \frac{0}{2 - 2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \sin x - 2 \cos x \cdot \cos x}{-4e^{2x}} = \frac{-2}{-4} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

b) Determinemos primero el dominio de la función.

La función existe si $x > 0$ para que pueda existir $\ln x$. Dominio = $(0, +\infty)$

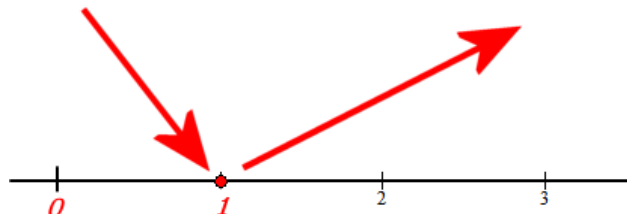
Calculamos la derivada de $f(x) = x(\ln x - 1)$ y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función.

$$\begin{aligned} f(x) &= x(\ln x - 1) \Rightarrow f'(x) = (\ln x - 1) + x \frac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \ln x \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Veamos cómo es la función antes y después de $x = 1$.

- En $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \ln 0.5 = -0.69 < 0$. La función decrece en $(0, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \ln 2 = 0.69 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función decrece en $(0, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$.



La función presenta un mínimo en $x = 1$. $f(1) = (\ln 1 - 1) = -1$. Las coordenadas del mínimo relativo son $P(1, -1)$.

No tiene máximos relativos

4. Análisis:

- a) Calcule los valores de b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + bx + c & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable en $x = 0$.
- b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x - 1) dx$.

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ debe cumplirse:

- Existe $f(0) = e^0 = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x} = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + bx + c) = c$
- Los tres valores son iguales $\rightarrow \boxed{c=1}$

La derivada de la función es: $f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ 2x + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ deben coincidir sus derivadas laterales.

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 2e^0 = 2 \\ f'(0^+) = 0 + b = b \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow \boxed{b=2}$$

b) Calculamos primero la primitiva.

$$\begin{aligned} \int x(\ln x - 1) dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = (\ln x - 1) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} (\ln x - 1) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} (\ln x - 1) - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x - x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2 \ln x - x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{2x^2 \ln x - 2x^2 - x^2}{4} = \\ &= \frac{2x^2 \ln x - 3x^2}{4} + C \end{aligned}$$

Calculamos la integral definida pedida en el ejercicio.

$$\begin{aligned} \int_1^2 x(\ln x - 1) dx &= \left[\frac{2x^2 \ln x - 3x^2}{4} \right]_1^2 = \left[\frac{2 \cdot 2^2 \ln 2 - 3 \cdot 2^2}{4} \right] - \left[\frac{2 \cdot 1^2 \ln 1 - 3 \cdot 1^2}{4} \right] = \\ &= \frac{8 \ln 2 - 12}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8 \ln 2 - 9}{4} = \boxed{-0.8637} \end{aligned}$$

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos

$A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ y $C(7,1,5)$.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano

$\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ y que pasa por el punto $P(-1, -2, 2)$

a) Si contiene a los tres puntos entonces tiene como vectores directores los vectores

$\overrightarrow{AB} = (4,1,1) - (3,0,-1) = (1,1,2)$ y $\overrightarrow{AC} = (7,1,5) - (3,0,-1) = (4,1,6)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(3,0,-1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (4,1,6) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x - 18 + 8y + z + 1 - 4z - 4 - 6y - 2x + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 4x + 2y - 3z - 15 = 0}$$

b) Si la recta es perpendicular al plano el vector normal del plano es el vector director de la recta.

El vector normal de $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ es $\vec{n} = (4, 2, -3)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(-1, -2, 2) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (4, 2, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -1 + 4\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{array}}$$

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ y $s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Los vectores directores de las rectas son $\vec{v}_r = (2, -1, -2)$ y $\vec{v}_s = (1, 4, 3)$.

Las coordenadas de los vectores no son proporcionales, por lo que las rectas no son coincidentes ni paralelas.

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{4} \neq \frac{-2}{3}$$

Veamos si se cruzan o se cortan.

Para ello necesitamos un tercer vector, el que une un punto de la recta r con otro punto de la recta s . $P_r(3, 0, -1)$ y $P_s(0, -3, -2)$

El vector $\overrightarrow{P_r P_s} = (0, -3, -2) - (3, 0, -1) = (-3, -3, -1)$

Calculamos el producto mixto de los vectores $\vec{v}_r = (2, -1, -2)$, $\vec{v}_s = (1, 4, 3)$ y $\overrightarrow{P_r P_s} = (-3, -3, -1)$.

$$[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 9 + 6 - 24 - 1 + 18 = 0$$

Al ser cero este producto mixto significa que **las rectas se cortan en un punto**.

Averiguemos dicho punto de corte.

Para ello pasamos las ecuaciones de las rectas a paramétricas.

$$\begin{aligned} r: \begin{cases} x = 3 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = -1 - 2\alpha \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} 3 + 2\alpha = \lambda \\ -\alpha = -3 + 4\lambda \\ -1 - 2\alpha = -2 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 2\alpha = \lambda \\ \alpha = 3 - 4\lambda \\ -1 - 2\alpha = -2 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \\ s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + 4\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 + 2(3 - 4\lambda) = \lambda \\ -1 - 2(3 - 4\lambda) = -2 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 6 - 8\lambda = \lambda \\ -1 - 6 + 8\lambda = -2 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 = 9\lambda \\ -5 = -5\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta s , tenemos:

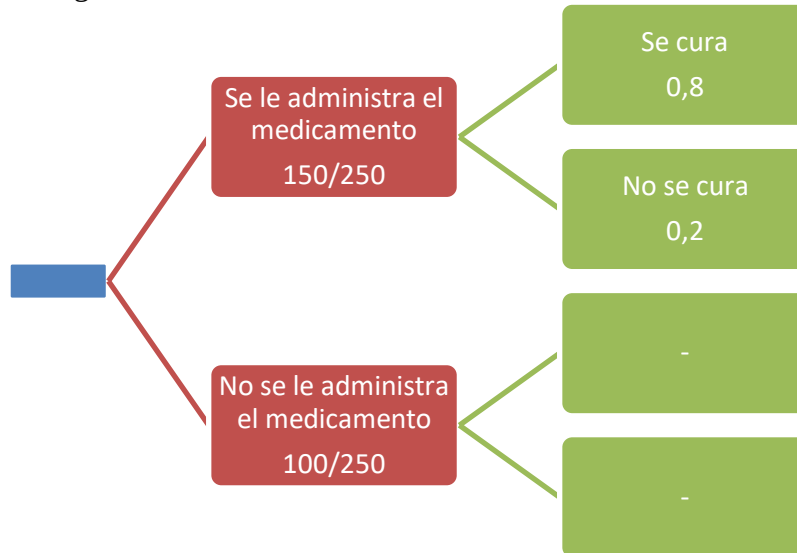
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + 4 = 1 \\ z = -2 + 3 = 1 \end{cases}$$

El punto de corte de las rectas es $P(1, 1, 1)$.

7. Estadística y Probabilidad:

Se seleccionan 250 pacientes para estudiar la eficacia de un nuevo medicamento. A 150 de ellos se les administra el medicamento, mientras que el resto son tratados con un placebo. Sabiendo que se curaron el 80% de los que tomaron el medicamento, ¿cuál es la probabilidad de que, seleccionado un paciente al azar, tomara el placebo o no se curara?

Construimos el diagrama de árbol



Suponemos que si se tomó el placebo no se cura de la enfermedad.

$$P(\text{Tomara el placebo o no se curara}) =$$

$$= P(\text{Tomara el placebo}) + P(\text{Tomara el medicamento y no se curara}) =$$

$$= \frac{100}{250} + \frac{150}{250} \cdot 0,2 = \frac{100}{250} + \frac{30}{250} = \frac{130}{250} = \frac{13}{25} = \frac{52}{100} = \boxed{0,52}$$

8. Estadística y Probabilidad:

En una cadena de montaje, el tiempo empleado para realizar un determinado trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 4 minutos. Calcule la probabilidad de que se haga ese trabajo en un tiempo comprendido entre 16 y 26 minutos.

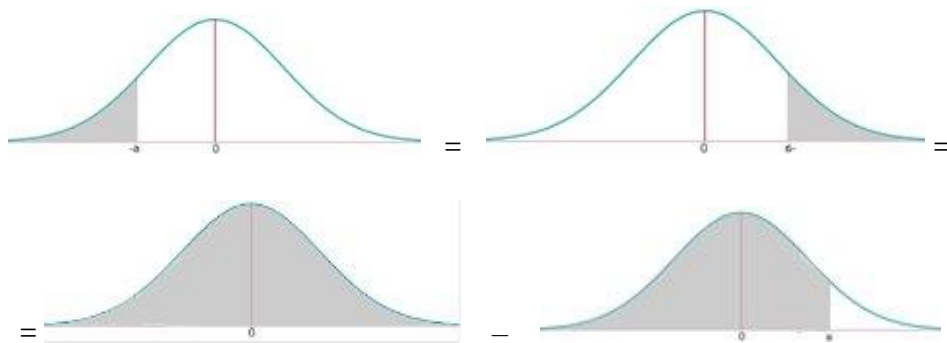
X = Tiempo empleado para realizar un trabajo expresado en minutos. $X = N(20, 4)$

Nos piden calcular $P(16 < X < 26)$.

$$P(16 < X < 26) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{16-20}{4} < Z < \frac{26-20}{4}\right) =$$

$$= P(-1 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < -1) =$$

$$= 0.9332 - P(Z > 1) = 0.9332 - (1 - P(Z < 1)) = 0.9332 - (1 - 0.8413) = \boxed{0.7745}$$



ABAU Julio 2019



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
XULLO 2019**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

(El/La estudiante debe responder solamente las preguntas de una de las opciones. La puntuación máxima por preguntas es la siguiente: 1.ª pregunta: 2 puntos; 2.ª pregunta: 3 puntos; 3.ª pregunta: 3 puntos; 4.ª pregunta: 2 puntos).

OPCIÓN A

1. Da resposta a los apartados siguientes:

- Despeja X en la ecuación $XA + B = C$, sabiendo que A es una matriz invertible.
- Calcula X tal que $XA + B = C$ si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Da resposta a los apartados siguientes:

- Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 \ln x$
- Consideremos un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen $O(0,0)$ y el punto $P(1,3)$, uno de sus lados está sobre el eje X y otro sobre la tangente en $P(1,3)$ a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y = 4 - x^2$.

3. Se pide:

- Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1 : x + my + z + 2 = 0$, $\pi_2 : mx + y + z + m = 0$ en función de m .
- Calcular el valor que deben tomar k y m para que los puntos $A(0,k,1)$, $B(-1,2,1)$ y $C(8,1,m)$ estén alineados.
- Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(-1,2,1)$ y $Q(8,1,1)$ y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto $R(1,1,1)$.

4. Da resposta a los apartados siguientes

- La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosál durante una cierta semana es de $2/3$. Si se riega al rosál sobrevive con probabilidad $0,7$; si no, lo hace con probabilidad $0,2$. Al finalizar la semana, el rosál ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilidad de que el chico no lo haya regado?
- Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm. Y desviación típica $0,01$ cm. Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre $7,98$ y $8,021$ cm.

OPCIÓN B

1. Da resposta a los apartados siguientes:

a) Discute, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema

$$\begin{cases} x - y + 3z = m \\ my - 2z = -2 \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m \end{cases}$$

b) Resuélvelo si es posible en los casos $m=0$ y $m=2$

2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.

b) Enuncia el teorema de Bolzano y Rolle.

3. Se pide:

a) Para el plano $\pi : 3x + 2y - z = 0$ y la recta $r : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular el punto de corte de r con π y obtener la ecuación implícita del plano π' que es perpendicular a π y contiene a r .

b) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1 : 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ y $\pi_2 : x = 0$ y calcular el ángulo $\alpha \in [0, 90]$ que forman.

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tal que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,5$. Calcula $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.

b) La probabilidad de que un determinado jugador de fútbol marque gol desde el punto de penalti es $p=0,7$. Si lanza cinco penaltis calcula las siguientes probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos dos goles; y de que marque 5 goles. Si lanza 2100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1450 goles. Se está asumiendo que los lanzamientos son sucesos independientes.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Despeja X en la ecuación $XA + B = C$, sabiendo que A es una matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $XA + B = C \Rightarrow XA = C - B \Rightarrow X = (C - B)A^{-1}$

b) $XA + B = C \Rightarrow X = (C - B)A^{-1}$, debemos calcular la inversa de A y C-B.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}{8-3} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{5} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Volvemos a la ecuación.

$$X = (C - B)A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4-3 & 1+2 \\ 4+3 & -1-2 \\ 4+3 & -1-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Da resposta a los apartados siguientes:

- a) Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 \ln x$
- b) Consideremos un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen O (0,0) y el punto P (1,3), uno de sus lados está sobre el eje X y otro sobre la tangente en P (1,3) a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y = 4 - x^2$.

a) Calculemos la derivada de $f(x) = x^2 \ln x$.

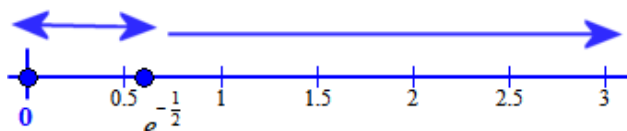
El dominio de la función es $(0, +\infty)$, ya que el logaritmo no existe para $x < 0$.

$$f(x) = x^2 \ln x \Rightarrow f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$$

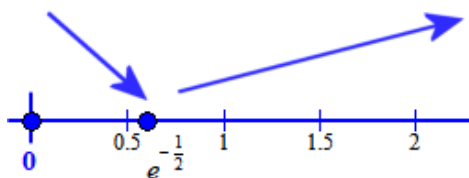
Igualemos a cero la derivada

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x \ln x + x = 0 \Rightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2 \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = 0,606 \end{cases}$$

Hay dos puntos críticos $x = 0$ y $x = 0,606$. Estudiemos la variación del signo de la derivada. Como la función solo existe para los $x > 0$ solamente estudiamos que pasa de 0 a 0,606 y de 0,606 a $+\infty$.



- En $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ tomamos el valor 0,5 y la derivada vale $f'(0,5) = 2(0,5) \ln(0,5) + (0,5) = -0,1 < 0$ la función decrece.
- En $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ tomamos el valor 1 y la derivada vale $f'(1) = 2(1) \ln(1) + 1 = 1 > 0$ la función crece.



La función presenta un mínimo local en $x = e^{-\frac{1}{2}}$.

La función decrece en $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ y crece en $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$

b) La tangente a la curva $y = 4 - x^2$ en P(1,3) tiene ecuación:

$$\begin{aligned} y - 3 &= f'(1)(x - 1) \\ f(x) &= 4 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x \Rightarrow f'(1) = -2 \end{aligned} \Rightarrow y - 3 = -2(x - 1) \Rightarrow y - 3 = -2x + 2 \Rightarrow y = -2x + 5$$

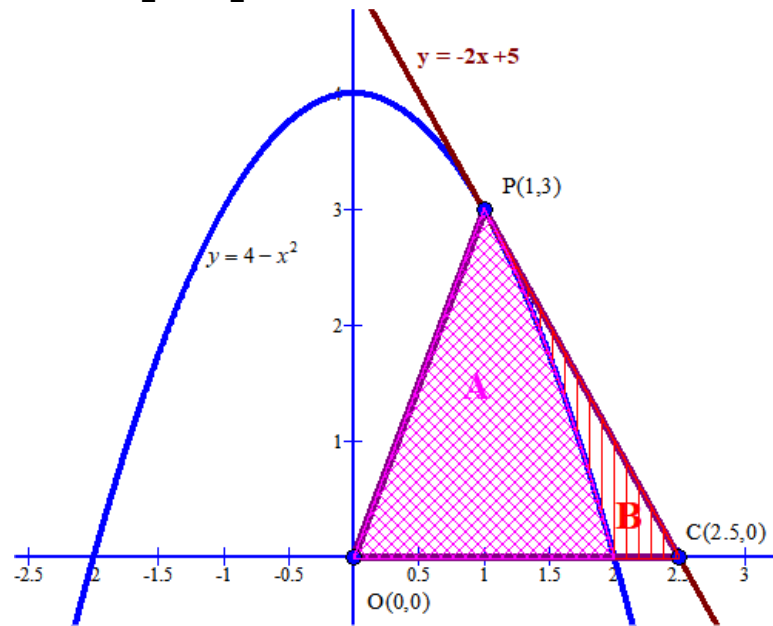
El tercer vértice debe ser el punto de corte de la tangente con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + 5 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5$$

El tercer vértice es C(2,5, 0).

Dibujando la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$ y de la recta tangente y marcando los tres vértices del triángulo, nos quedan las dos zonas A y B como en el dibujo. Recordar que la suma de ambas áreas es el área del triángulo OPC de base 2,5 y altura 3, es decir,

$$\text{Área del triángulo OPC} = \frac{2,5 \cdot 3}{2} = \frac{7,5}{2} = 3,75 \text{ u}^2$$



El recinto B está limitado por la recta $y = -2x + 5$, la parábola $y = 4 - x^2$ y el eje OX. El área se calcula con la integral definida de la diferencia de las funciones entre $x=1$ y $x=2$ más la integral definida entre 2 y 2,5 de la recta tangente.

$$\text{Área de recinto B} = \int_1^2 -2x + 5 - (4 - x^2) dx + \int_2^{2,5} -2x + 5 dx = \dots$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 -2x + 5 - 4 + x^2 dx &= \int_1^2 x^2 - 2x + 1 dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2 \right] - \left[\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1 \right] = \frac{7}{3} - 2 = 0,333 \text{ u}^2 \\ \int_2^{2,5} -2x + 5 dx &= \left[-x^2 + 5x \right]_2^{2,5} = \left[-(2,5)^2 + 5(2,5) \right] - \left[-2^2 + 5 \cdot 2 \right] = 0,25 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

$$\dots = 0,333 + 0,25 = 0,583 \text{ u}^2$$

$$\text{Área del recinto A} = \text{Área del triángulo OPC} - \text{Área del recinto B} = 3,750 - 0,583 = 3,1667 \text{ u}^2$$

3. Se pide:

- Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1 : x + my + z + 2 = 0$, $\pi_2 : mx + y + z + m = 0$ en función de m .
- Calcular el valor que deben tomar k y m para que los puntos $A(0,k,1)$, $B(-1,2,1)$ y $C(8,1,m)$ estén alineados.
- Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(-1,2,1)$ y $Q(8,1,1)$ y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto $R(1,1,1)$.

- a) Los vectores normales de los planos son $\vec{n}_1 = (1, m, 1)$ y $\vec{n}_2 = (m, 1, 1)$.

Para que sean paralelos los planos sus vectores deben ser proporcionales:

$$\vec{n}_1 / \vec{n}_2 \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{m}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow m = 1 \\ \frac{1}{m} = \frac{1}{1} \Rightarrow m = 1 \end{cases}$$

Si $m = 1$ los planos son paralelos o coincidentes.

Para que sean coincidentes debe cumplirse además que el punto $P(0,0,-2)$ del plano $\pi_1 : x + y + z + 2 = 0$ esté en el plano $\pi_2 : x + y + z + 1 = 0 \Rightarrow -2 + 1 = 0$. Esto es imposible.

Para $m = 1$ los planos son paralelos.

Si $m \neq 1$ los planos son secantes.

- b) $A(0,k,1)$, $B(-1,2,1)$ y $C(8,1,m)$ estén alineados cuando los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ son proporcionales.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= (0, k, 1) - (-1, 2, 1) = (1, k-2, 0) \\ \overrightarrow{BC} &= (-1, 2, 1) - (8, 1, m) = (-9, 1, 1-m) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-9} = \frac{k-2}{1} = \frac{0}{1-m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{-9} = \frac{k-2}{1} \Rightarrow 1 = -9k + 18 \Rightarrow 9k = 17 \Rightarrow \boxed{k = \frac{17}{9}} \\ \frac{1}{-9} = \frac{0}{1-m} \Rightarrow 1-m = 0 \Rightarrow \boxed{m=1} \end{cases}$$

- c) Si la recta pasa por los puntos $P(-1,2,1)$ y $Q(8,1,1)$ su vector director es $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_r &= \overrightarrow{PQ} = (8, 1, 1) - (-1, 2, 1) = (9, -1, 0) \\ Q(8, 1, 1) &\in r \end{aligned} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 8 + 9t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

El plano perpendicular a r tiene como vector normal el director de la recta r $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (9, -1, 0)$ y pasa por $R(1,1,1)$.

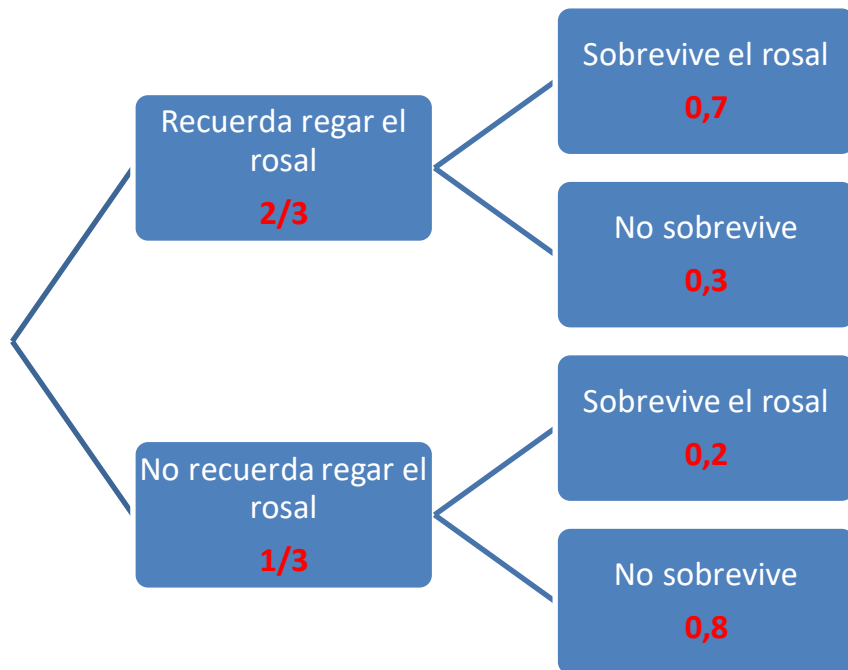
$$\left. \begin{aligned} \vec{n} &= \overrightarrow{PQ} = (9, -1, 0) \\ \text{Pasa por el punto } R(1, 1, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \pi \equiv 9x - y + D = 0 \\ \text{Pasa por el punto } R(1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow 9 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = -8$$

La ecuación del plano es $\boxed{\pi \equiv 9x - y - 8 = 0}$

4. Da resposta a los apartados siguientes

- a) La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosal durante una cierta semana es de $\frac{2}{3}$. Si se riega al rosal sobrevive con probabilidad 0,7; si no, lo hace con probabilidad 0,2. Al finalizar la semana, el rosal ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilidad de que el chico no lo haya regado?
- b) Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm. Y desviación típica 0,01 cm. Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7,98 y 8,021 cm.

a) Construyamos un diagrama de árbol para facilitar la comprensión de la situación planteada.



$$P(\text{No lo haya regado} / \text{Ha sobrevivido}) = \frac{P(\text{No lo riega y sobrevive})}{P(\text{Sobrevive})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,2}{\frac{2}{3} \cdot 0,7 + \frac{1}{3} \cdot 0,2} = \frac{0,2}{1,6} = 0,125$$

b) X = Grosor de una pieza. $X = N(8, 0,01)$. Nos piden calcular $P(7,98 < X < 8,021)$.

$$P(7,98 < X < 8,021) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{7,98-8}{0,01} < \frac{X-8}{0,01} < \frac{8,021-8}{0,01}\right) =$$

$$= P(-2 < Z < 2,1) = P(Z < 2,1) - P(Z < -2) =$$

$$= P(Z < 2,1) - (1 - P(Z < 2)) = 0,9821 - 1 + 0,9772 = \boxed{0,9593}$$

OPCIÓN B

1. Da resposta a los apartados siguientes:

a) Discute, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema

$$\begin{cases} x - y + 3z = m \\ my - 2z = -2 \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m \end{cases}$$

b) Resuélvelo si es posible en los casos $m=0$ y $m=2$

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{vmatrix} = m^2 + 3m + 2 - 3m + 2m - 2 = m^2 + 2m$$

Si igualamos a cero

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2 \end{cases}$$

Hay tres casos diferentes.

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq -2$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

CASO 2. $m = 0$

El sistema queda $\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -2z = -2 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$. Queda tan sencillo que lo resolvemos.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -2z = -2 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ z = 1 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^a \text{ y } 3^a \text{ ecuación son iguales} \\ \text{puedo quitar una de ellas} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 3 \\ y = y \\ z = 1 \end{cases}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones. Es COMPATIBLE INDETERMINADO.

CASO 3. $m = -2$

El sistema queda
$$\begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ -2y - 2z = -2 \\ x - 3y + z = -2 \end{cases}$$
 . Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ -2y - 2z = -2 \\ x - 3y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ x \quad -3y \quad +z = -2 \\ -x \quad +y \quad -3z = 2 \\ \hline -2y \quad -2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ -2y - 2z = -2 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 2ª} \\ -2y \quad -2z = 0 \\ 2y \quad +2z = 2 \\ \hline 0 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ -2y - 2z = -2 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

Este sistema es INCOMPATIBLE. No tiene solución.

Resumiendo: Para $m \neq 0$ y $m \neq -2$ el sistema es compatible determinado, para $m = 0$ el sistema es compatible indeterminado y para $m = -2$ el sistema es incompatible.

b) Para $m = 0$ está resuelto y su solución es $x = t - 3$; $y = t$; $z = 1$.

Para $m = 2$ el sistema tiene solución única, la hallamos utilizando la regla de Cramer.

El sistema queda
$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2y - 2z = -2 \\ x + y + 5z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ y - z = -1 \\ x + y + 5z = 2 \end{cases}$$
 y su matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Su determinante es $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 1 - 3 + 1 = 4$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10 + 2 - 3 - 6 - 5 + 2}{4} = \frac{0}{4} = 0 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-5 - 2 + 3 + 2}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2 + 1 - 2 + 1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

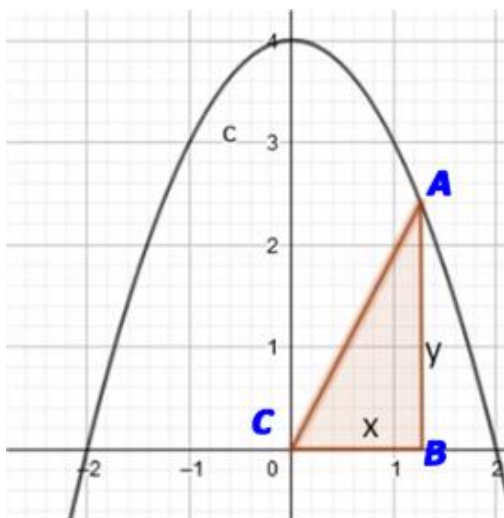
Para $m = 2$ la solución es $x = 0$; $y = -1/2$, $z = 1/2$.

2. Da resposta a los apartados siguientes:

- a) De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.
- b) Enuncia el teorema de Bolzano y Rolle.

a) Dibujemos la parábola y situamos el vértice en el origen y los catetos como se indica. La situación planteada queda

x	$y = 4 - x^2$
-2	0
-1	3
0	4
2	0



El vértice A situado en la parábola tiene coordenadas $(x, 4 - x^2)$. El vértice B tiene coordenadas $(x, 0)$ y el C(0,0).

El área del triángulo depende del valor x y su expresión es:

$$f(x) = \frac{x(4 - x^2)}{2} = \frac{4x - x^3}{2}$$

Hallemos su máximo haciendo uso de la derivada.

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4 - 3x^2}{2}$$

Igualemos a cero

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4 - 3x^2}{2} = 0 \Rightarrow 4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4}{3}} = 1,15$$

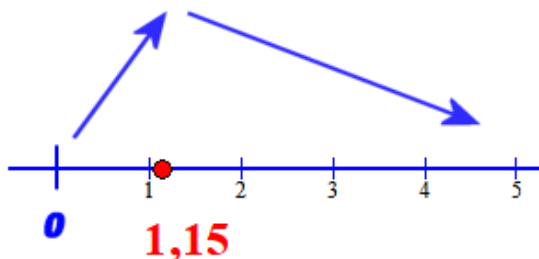
Solo nos sirve el valor positivo de la raíz. Veamos el signo de la derivada antes y después de 1,15.

- En $\left(0, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ tomamos el valor $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{4 - 3 \cdot 1^2}{2} = \frac{1}{2} > 0$. La función

crece en $\left(0, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$.

- En $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty\right)$ tomamos el valor $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{4 - 3 \cdot 2^2}{2} = \frac{-8}{2} = -4 < 0$.

La función decrece en $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty\right)$



El área alcanza un valor máximo en $x = \sqrt{\frac{4}{3}} = 1,15$.

Los catetos son $x = \sqrt{\frac{4}{3}} = 1,15$; $y = 4 - x^2 = 4 - \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ y la hipotenusa

$$\sqrt{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9} + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{76}{9}} = \frac{\sqrt{76}}{3}.$$

Hemos obtenido que los catetos son $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$; $y = \frac{8}{3}$ y la hipotenusa es $\frac{\sqrt{76}}{3}$.

b) En los libros de texto.

3. Se pide:

- a) Para el plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ y la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular el punto de corte de r con π y obtener la ecuación implícita del plano π' que es perpendicular a π y contiene a r .
- b) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ y $\pi_2: x = 0$ y calcular el ángulo $\alpha \in [0, 90]$ que forman.

a) Resolvamos el sistema planteado por plano y recta, pasando a la ecuación paramétrica la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 3x + 2y - z = 0 \\ r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 3(2+t) + 2(-1-2t) - 3t = 0 \Rightarrow 6 + 3t - 2 - 4t - 3t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4t = -4 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 1 = 3 \\ y = -1 - 2t = -1 - 2 = -3 \\ z = 3t = 3 \end{cases}$$

El punto de corte de recta y plano es $P(3, -3, 3)$

El plano π' al ser perpendicular a π , tiene al vector normal de π como vector director del nuevo plano π' . Al contener a la recta el vector director de la recta también lo es del plano π' y además contiene al punto $Q(2, -1, 0)$ de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (3, 2, -1) \\ \vec{v} = (1, -2, 3) \\ \text{Pasa por } Q(2, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x - 12 - y - 1 - 6z - 2z - 9y - 9 - 2x + 4 = 0$$

$$4x - 10y - 8z - 18 = 0 \Rightarrow \boxed{2x - 5y - 4z - 9 = 0}$$

b) Los vectores normales de los planos son $\vec{n}_1 = (2, -5, -4)$ y $\vec{n}_2 = (1, 0, 0)$.

¿Son proporcionales los vectores?

¿ $\frac{2}{1} = \frac{-5}{0} = \frac{-4}{0}$? No es cierto, luego los planos no son paralelos ni coincidentes y por lo tanto son secantes y definen una recta.

Para determinar el ángulo que forman hallamos el ángulo que forman sus vectores normales usando el producto escalar de dichos vectores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2, -5, -4)(1, 0, 0) = 2 \\ |\vec{n}_1| = \sqrt{4 + 25 + 16} = \sqrt{45} \\ |\vec{n}_2| = \sqrt{1} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \Rightarrow 2 = \sqrt{45} \cdot \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$$

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{2}{\sqrt{45}} \Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{45}}\right) = \boxed{72,65^\circ}$$

4. Da resposta a los apartados siguientes:

- a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tal que $P(A)=0,2$, $P(B)=0,4$ y $P(A \cup B)=0,5$, Calcula $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.
- b) La probabilidad de que un determinado jugador de futbol marque gol desde el punto de penalti es $p=0,7$. Si lanza cinco penaltis calcula las siguientes probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos dos goles; y de que marque 5 goles. Si lanza 2100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1450 goles. Se está asumiendo que los lanzamientos son sucesos independientes.

$$a) P(\bar{A})=1-P(A)=1-0,2=0,8 \quad P(\bar{B})=1-P(B)=1-0,4=0,6$$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,5 = 0,2 + 0,4 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0,2 + 0,4 - 0,5 = 0,1$$

Utilizamos las leyes de Morgan.

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,1 = 0,9$$

A y B son independientes si se cumple $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0,1 \\ P(A)P(B) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0,1 \neq 0,08 = P(A)P(B)$$

Como no son iguales, los sucesos A y B no son independientes.

- b) Llamamos X = número de goles en 5 intentos. Es una binomial de parámetros $p = 0,7$ y $n = 5$.

$$P(\text{No marque ningun gol}) = P(X = 0) = \binom{5}{0} 0,7^0 \cdot 0,3^5 = 0,3^5 = \boxed{0,00243}$$

La probabilidad de que no marque ningún gol es de 0.00243.

$$P(\text{Marque por lo menos dos goles}) = P(X \geq 2) =$$

$$= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$$

$$= \binom{5}{2} 0,7^2 \cdot 0,3^3 + \binom{5}{3} 0,7^3 \cdot 0,3^2 + \binom{5}{4} 0,7^4 \cdot 0,3^1 + \binom{5}{5} 0,7^5 \cdot 0,3^0 =$$

$$= \frac{5 \cdot 4}{2} 0,7^2 \cdot 0,3^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} 0,7^3 \cdot 0,3^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} 0,7^4 \cdot 0,3 + 0,7^5 =$$

$$= 10 \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^3 + 10 \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^2 + 5 \cdot 0,7^4 \cdot 0,3 + 0,7^5 = \boxed{0,96922}$$

La probabilidad de que marque por lo menos dos goles es de 0.96922.

$$P(\text{Marque cinco goles}) = P(X = 5) = \binom{5}{5} 0,7^5 \cdot 0,3^0 = 0,7^5 = \boxed{0,16807}$$

La probabilidad de que marque cinco goles es de 0.16807.

ABAU Junio 2019



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
XUÑO 2019**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

(El/La estudiante debe responder solamente las preguntas de una de las opciones. La puntuación máxima por preguntas es la siguiente: 1.ª pregunta: 2 puntos; 2.ª pregunta: 3 puntos; 3.ª pregunta: 3 puntos; 4.ª pregunta: 2 puntos).

OPCIÓN A

1. Da resposta a los siguientes apartados:

- Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que $A + I$ es invertible despeja X en la ecuación $A - X = AX$
- Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ calcula X tal que $A - X = AX$.

2. Da resposta a los siguientes apartados:

- Mediante integración por partes demuestra que $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$. Luego, demuestra la misma igualdad mediante derivación.
- Si $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in (0, e] \\ ax + b & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$, di que relación debe existir entre a y b para que f sea continua y que valores deben tener para que f sea derivable.
- Calcular el área encerrada entre el eje X , la recta $x = 4$ y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in (0, e] \\ \frac{x}{e} & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$

3. Se pide:

- Calcular el ángulo del intervalo $[0^\circ, 90^\circ]$ que forman los vectores $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1, -3, 0)$ y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$
- Calcula la distancia del punto $Q(1, 1, 1)$ al plano $\pi: -x + y + z + 4 = 0$ y el punto simétrico de Q respecto de π .

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

- El 40% de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35% tienen rosas y el 21% tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.
- Si en un auditorio hay 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 hayan nacido en el mes de enero?

OPCIÓN B

1. Da resposta a los siguientes apartados:

- a) Discute, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ my + (3 - m)z = -6 \\ 2x - y + mz = 6 \end{cases}$$
- b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 4$.

2. Considérese la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, se pide:

- a) Calcular los límites $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- b) Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.
- c) Calcular $\int f(x) dx$.

3. Da respuesta a los apartados siguientes:

- a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1: mx - y + 2 = 0$ y $\pi_2: 2x + 3y = 0$ en función del parámetro m .
- b) Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$ y $C(0,1,0)$.
- c) Calcula el punto simétrico del punto $P(1,2,3)$ con respecto al plano $\pi: -x + z = 0$

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

- a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcula $P(A)$ si $P(B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ y $P(A \cup B)$ es el triple de $P(A)$.
- b) En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25°C y desviación típica 4°C . Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día esté comprendida entre 21°C y 27.2°C . ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Da respuesta a los siguientes apartados:

a) Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que $A + I$ es invertible despeja X en la ecuación

$$A - X = AX$$

b) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ calcula X tal que $A - X = AX$.

$$a) A - X = AX \Rightarrow A = AX + X \Rightarrow A = (A + I)X$$

Como $A + I$ es invertible, existe $(A + I)^{-1}$ y se cumple:

$$A = (A + I)X \Rightarrow (A + I)^{-1}A = (A + I)^{-1}(A + I)X \Rightarrow (A + I)^{-1}A = I \cdot X = X \Rightarrow$$

$$X = (A + I)^{-1}A$$

b) Si $A - X = AX$ entonces $X = (A + I)^{-1}A$. Para hallar X utilizando esta igualdad necesitamos obtener $(A + I)^{-1}$.

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A + I| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{La matriz } A + I \text{ es invertible.}$$

$$(A + I)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A + I)^T}{|A + I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}{5} = \frac{\begin{pmatrix} +4 & -(-1) \\ -1 & +1 \end{pmatrix}}{5} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X .

$$X = (A + I)^{-1}A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 + 1 & -4 + 3 \\ 0 + 1 & 1 + 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Da respuesta a los siguientes apartados:

a) Mediante integración por partes demuestra que $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$. Luego, demuestra la misma igualdad mediante derivación.

b) Si $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in (0, e] \\ ax + b & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$, di que relación debe existir entre a y b para que f sea continua y que valores deben tener para que f sea derivable.

c) Calcular el área encerrada entre el eje X, la recta $x = 4$ y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in (0, e] \\ \frac{x}{e} & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$

a) Integramos por partes.

$$\int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1) + C$$

Lo comprobamos derivando.

$$F(x) = x(\ln x - 1) + C \rightarrow F'(x) = 1 \cdot (\ln x - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \ln x$$

b) Si la función $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in (0, e] \\ ax + b & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$ es continua debe serlo en $x = e$ y para ello debe cumplirse que:

- $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} (ax + b) = ae + b$
- $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} (\ln x) = \ln e = 1$
- Existe $f(e) = \ln e = 1$
- Los tres valores son iguales $\rightarrow ae + b = 1$

Para que la función sea **continua** los parámetros a y b deben cumplir $\boxed{ae + b = 1}$

La función $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in (0, e] \\ ax + b & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$ es derivable en los valores distintos de $x = e$ y su

derivada es $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in (0, e) \\ a & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$.

También debe ser derivable en $x = e$ y debe cumplirse que las derivadas laterales sean iguales.

$$f'(e^+) = f'(e^-) \Rightarrow \frac{1}{e} = a \Rightarrow a = \frac{1}{e} \text{ y como debe ser continua, se obtiene que:}$$

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot e + b = 1 \\ a = \frac{1}{e} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{e} \cdot e + b = 1 \Rightarrow 1 + b = 1 \Rightarrow b = 0$$

Para que la función sea **derivable** los parámetros a y b deben ser $b = 0$ y $a = \frac{1}{e}$.

c) Averigüemos los puntos de corte con el eje X de la función $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in (0, e] \\ \frac{x}{e} & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$

- $\ln x = 0 \rightarrow x = 1$ que pertenece al intervalo $(0, e]$
- $\frac{x}{e} = 0 \Rightarrow x = 0$ que no pertenece al intervalo (e, ∞)

Por lo que el área pedida es la integral definida entre 1 y 4 de la función $f(x)$, como en ese intervalo está incluido el valor $x = e$, separamos la integral definida en dos:

$$\text{Área} = \left| \int_1^e f(x) dx \right| + \left| \int_e^4 f(x) dx \right| = \left| \int_1^e \ln x dx \right| + \left| \int_e^4 \frac{x}{e} dx \right| = \left| \left[x(\ln x - 1) \right]_1^e \right| + \left| \left[\frac{x^2}{2e} \right]_e^4 \right| =$$

$$= \left| (e(\ln e - 1)) - (1(\ln 1 - 1)) \right| + \left| \left(\frac{4^2}{2e} \right) - \left(\frac{e^2}{2e} \right) \right| =$$

$$= 1 + \left| \frac{16 - e^2}{2e} \right| = 1 + \left| \frac{16}{2e} - \frac{e^2}{2e} \right| = \boxed{1 + \frac{8}{e} - \frac{e}{2} = 2,58 \text{ u}^2}$$

3. Se pide:

a) Calcular el ángulo del intervalo $[0^\circ, 90^\circ]$ que forman los vectores $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y

$$\vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

b) Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1, -3, 0)$ y es perpendicular a la

$$\text{recta } \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

c) Calcula la distancia del punto $Q(1, 1, 1)$ al plano $\pi: -x + y + z + 4 = 0$ y el punto simétrico de Q respecto de π .

a) Calculamos el producto escalar de los vectores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + 0 = \frac{1-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1+2-2\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3-2\sqrt{2}}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{1+3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{4}} = 1$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\frac{1}{2}}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{1}{2} = \begin{cases} 60^\circ \\ 300^\circ \\ 60^\circ + 360^\circ \\ 300^\circ + 360^\circ \\ \dots \end{cases}$$

El ángulo pedido es 60°

b) El plano pedido es perpendicular a la recta, por lo que tiene como vector normal el director de dicha recta. Averiguemos dicho vector director haciendo el producto vectorial de los normales de los planos que la definen:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i + k - (-j + 2i) = -i + j + k = (-1, 1, 1)$$

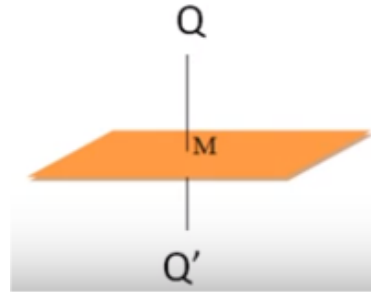
El plano pedido tiene vector normal $\vec{n} = (-1, 1, 1)$ y su ecuación es $\pi: -x + y + z + D = 0$, como además pasa por el punto $P(1, -3, 0)$, debe cumplirse: $-1 - 3 + 0 + D = 0 \rightarrow D = 4$

El plano es $\boxed{\pi: -x + y + z + 4 = 0}$

c) Utilicemos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$d(Q, \pi) = \left| \frac{-1+1+1+4}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} \right| = \frac{5}{\sqrt{3}} u$$

Llamamos Q' al simétrico de $Q(1,1,1)$ respecto del plano $\pi: -x+y+z+4=0$.



Y llamamos M al punto de corte del plano π con la recta que contiene a Q y Q' .

Esta recta tiene como vector director el normal del plano $\vec{v}_r = (-1, 1, 1)$ y pasa por $Q(1, 1, 1)$, por lo

que su ecuación es $r: \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$

El punto M está en la recta, luego $M(1 - \alpha, 1 + \alpha, 1 + \alpha)$

El punto M está en el plano $\pi: -x + y + z + 4 = 0$, luego se cumple:

$$-(1 - \alpha) + (1 + \alpha) + (1 + \alpha) + 4 = 0 \Rightarrow 3\alpha = -5 \Rightarrow \alpha = -\frac{5}{3}$$

El punto M tiene coordenadas $M\left(\frac{8}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

Como M es el punto medio del segmento QQ' entonces:

$$M = \frac{Q + Q'}{2} \Rightarrow 2M = Q + Q' \Rightarrow 2M - Q = Q'$$

$$Q' = 2\left(\frac{8}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right) - (1, 1, 1) = \left(\frac{16}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-4}{3}\right) - (1, 1, 1) = \left(\frac{13}{3}, \frac{-7}{3}, \frac{-7}{3}\right)$$

$$\boxed{Q' = \left(\frac{13}{3}, \frac{-7}{3}, \frac{-7}{3}\right)}$$

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

- a) El 40% de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35% tienen rosas y el 21% tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.
- b) Si en un auditorio hay 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 hayan nacido en el mes de enero?

a) Construyamos una tabla de contingencia que nos aclare la situación:

	Tiene rosas	No tiene rosas	
Tiene camelias	21 %		40 %
No tiene camelias			
	35 %		100 %

Completando la tabla:

	Tiene rosas	No tiene rosas	
Tiene camelias	21 %	19 %	40 %
No tiene camelias	14 %	46 %	60 %
	35 %	65 %	100 %

Calculamos las probabilidades pedidas usando la información de la tabla y aplicando la regla de Laplace.

$$P(\text{Tenga camelias o rosas}) = 21 + 19 + 14 = 54 \% = 0,54$$

$$P(\text{No tenga ni camelias ni rosas}) = 46 \% = 0,46$$

$$P(\text{Tenga camelias, sabiendo que tiene rosas}) = \frac{21}{35} = 0,6$$

$$P(\text{Tenga rosas, sabiendo que tiene camelias}) = \frac{21}{40} = 0,525$$

$$P(\text{Solamente tenga rosas o solamente tenga camelias}) = P(\text{Tiene rosas y no camelias}) + P(\text{Tiene camelias y no rosas}) = 14 + 19 = 33 \% = 0,33$$

b) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de personas nacidas en enero.

Esta variable es binomial con probabilidad $p = \frac{31}{365}$ y $q = \frac{334}{365}$, suponiendo igual de probable nacer en cualquier día del año.

Y como se hacen sobre 50 personas $\rightarrow n = 50$

$$X = B(50, 31/365)$$

Calculemos la probabilidad del suceso contrario, la probabilidad de que nadie o 1 persona haya nacido en el mes de enero.

$$\begin{aligned}P(X=0) + P(X=1) &= \binom{50}{0} \left(\frac{334}{365}\right)^{50} \cdot \left(\frac{31}{365}\right)^0 + \binom{50}{1} \left(\frac{334}{365}\right)^{49} \cdot \left(\frac{31}{365}\right)^1 = \\&= \left(\frac{334}{365}\right)^{50} + 50 \cdot \left(\frac{334}{365}\right)^{49} \cdot \left(\frac{31}{365}\right) = 0,0118 + 0,0548 = 0,0666\end{aligned}$$

La probabilidad pedida es:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0,0666 = \boxed{0,9334}$$

OPCIÓN B

1. Da respuesta a los siguientes apartados:

a) Discute, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ my + (3 - m)z = -6 \\ 2x - y + mz = 6 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 4$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix}$ y su determinante vale

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - 2(3-m) + 0 - (6m + 0 - 2(3-m)) = 2m^2 - 6m$$

Si igualamos a cero:

$$2m^2 - 6m = 0 \Rightarrow 2m(m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$$

Distinguiremos tres casos diferentes:

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq 3$

El rango de la matriz A es 3 al igual que el de la ampliada e igual al número de incógnitas.

En este caso el sistema tiene solución única (**Sistema Compatible Determinado**)

CASO 2. $m = 0$

El sistema quedaría $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 3z = -6 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 3z = -6 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ z = -2 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 3(-2) = 0 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow 2x - y = 6 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 6}$$

El sistema tiene infinitas soluciones: $\begin{cases} x = x \\ y = 2x - 6 \\ z = -2 \end{cases}$ Es un **sistema compatible indeterminado**.

CASO 3. $m = 3$

El sistema quedaría: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 3y = -6 \\ 2x - y + 3z = 6 \end{cases}$

Este sistema no tiene solución, ya que la primera y la tercera ecuación no se pueden cumplir al mismo tiempo. **Sistema Incompatible.**

b) La solución para $m = 0$ es $\begin{cases} x = x \\ y = 2x - 6 \\ z = -2 \end{cases}$ resuelto en el apartado anterior.

La solución para $m = 4$ entra dentro del caso 1 y por tanto la solución es única.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 4y - z = -6 \\ 2x - y + 4z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -2x + y - 4z = -6 \\ \hline -z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 4y - z = -6 \\ -z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 18 = 0 \\ 4y - 6 = -6 \\ z = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 18 = 0 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 18 = 0 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -18 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -9 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{cases}}$$

2. Considérese la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, se pide:

- Calcular los límites $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.
- Calcular $\int f(x) dx$.

a) Calculamos el límite en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (aplicamos L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (aplicamos L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Calculamos el límite en $-\infty$.

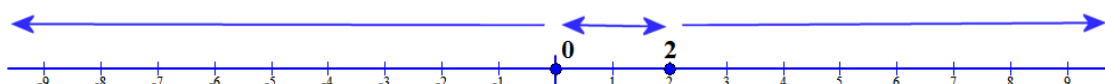
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = \infty \cdot e^{+\infty} = \infty \cdot \infty = +\infty$$

b) Para determinar crecimiento, decrecimiento y extremos necesitamos calcular su derivada e igualarla a 0.

$$f(x) = x^2 e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 (-e^{-x}) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x e^{-x} (2 - x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x e^{-x} (2 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{-x} = 0; \text{ No tiene solución} \\ 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

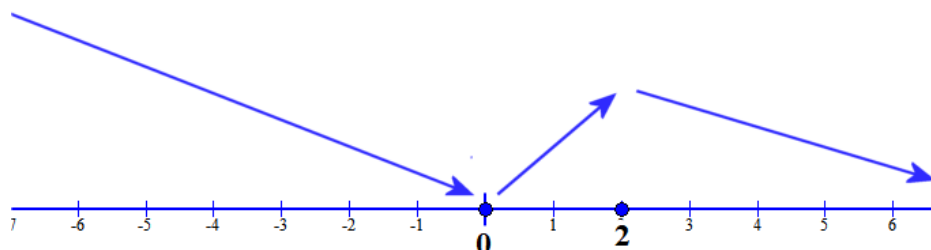
Al existir dos valores críticos $x = 0$ y $x = 2$ la recta real se divide en tres partes:



Estudiamos el signo de la derivada en cada semirrecta e intervalo:

- En $(-\infty, 0)$ elegimos $x = -2$ y $f'(-2) = -2 \cdot e^2 (2 + 2) < 0$. La función decrece.
- En $(0, 2)$ elegimos $x = 1$ y $f'(1) = 1 \cdot e^{-1} (2 - 1) > 0$. La función crece.
- En $(2, +\infty)$ elegimos $x = 3$ y $f'(3) = 3 \cdot e^{-3} (2 - 3) < 0$. La función decrece.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento serían:



La función crece en el intervalo $(0, 2)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 2$.

Para averiguar el punto de inflexión, que se intuye que está en el intervalo $(0, 2)$ utilizamos la segunda derivada:

$$f'(x) = xe^{-x}(2-x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} \Rightarrow f''(x) = 2e^{-x} + 2x(-e^{-x}) - (2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}))$$

$$f''(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x} = 2e^{-x} - 4xe^{-x} + x^2e^{-x} = e^{-x}(2 - 4x + x^2)$$

Igualamos a cero la segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(2 - 4x + x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x} = 0; \text{ No tiene solución} \\ 2 - 4x + x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \\ \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \begin{cases} \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} = 3,41 \\ \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} = 0,58 \end{cases} \end{cases}$$

Tenemos a $x = 0,58$ y $x = 3,41$ como candidatos a puntos de inflexión de la función.

Comprobemos el signo de la derivada segunda antes de 0,58, entre 0,58 y 3,41 y después de 3,41.

- En $(-\infty, 0,58)$ elegimos $x = -2$ y $f''(-2) = e^2(2 + 8 + 4) > 0$. La función es convexa.
- En $(0,58, 3,41)$ elegimos $x = 1$ y $f''(1) = e^{-1}(2 - 4 + 1) < 0$. La función es cóncava.
- En $(3,41, +\infty)$ elegimos $x = 4$ y $f''(4) = e^{-4}(2 - 16 + 16) > 0$. La función es convexa.

La función tiene en $x = 0,58$ y en $x = 3,41$ dos puntos de inflexión.

c) Usamos el método de integración por partes.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int x^2 e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ x^2 = u \rightarrow 2x dx = du \\ e^{-x} dx = dv \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = x^2(-e^{-x}) - \int -e^{-x} 2x dx = \\ &= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ x = u \rightarrow dx = du \\ e^{-x} dx = dv \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = -x^2 e^{-x} + 2 \left(x(-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx \right) = \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = \boxed{-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C} \end{aligned}$$

3. Da resposta a los apartados siguientes:

- a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : mx - y + 2 = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y = 0$ en función del parámetro m .
 b) Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$ y $C(0,1,0)$.
 c) Calcula el punto simétrico del punto $P(1,2,3)$ con respecto al plano $\pi : -x + z = 0$

- a) Su posición relativa depende, en gran parte de sus vectores normales. Veamos si son proporcionales (planos paralelos o coincidentes)

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : mx - y + 2 = 0 \\ \pi_2 : 2x + 3y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (m, -1, 0) \\ \vec{n}_2 = (2, 3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_1 / \vec{n}_2 \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{-1}{3} = \frac{0}{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} = \frac{-1}{3} \Rightarrow m = \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} = \frac{0}{0} \Rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

Hay dos casos diferentes:

CASO 1. $m \neq \frac{-2}{3}$.

En este caso los vectores no son proporcionales y por tanto los planos no son ni coincidentes ni paralelos, es decir, se cortan.

CASO 2. $m = \frac{-2}{3}$.

En este caso los vectores normales son proporcionales y por tanto los planos o son coincidentes o paralelos.

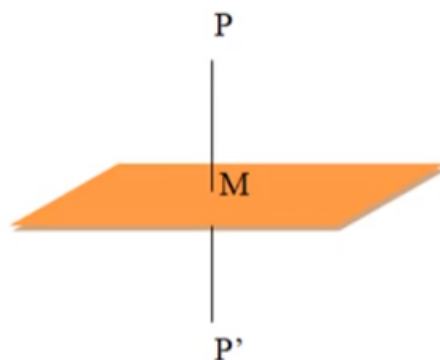
Los planos quedarían con ecuaciones: $\pi_1 : \frac{-2}{3}x - y + 2 = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y = 0$. Cambiando el signo y quitando denominadores en la ecuación del primer plano:
 $\pi_1 : 2x + 3y - 6 = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y = 0$. Estos planos son paralelos, pues tienen vectores normales proporcionales y la constante es distinta ($-6 \neq 0$).

- b) La ecuación implícita del plano que pasa por 3 puntos se obtiene a partir de uno de esos puntos y dos vectores que unan dichos puntos.

$$\left. \begin{array}{l} A(0,0,0) \\ B(1,0,1) \\ C(0,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{AB} = (1,0,1) - (0,0,0) = (1,0,1) \\ \vec{AC} = (0,1,0) - (0,0,0) = (0,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 0 + z - (0 + 0 + x) = 0 \Rightarrow z - x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - z = 0}$$

- c) Llamamos P' al punto simétrico de P . La situación planteada es la del dibujo.



Hallamos las coordenadas del punto M.

M(a, b, c) pertenece al plano $\pi: -x + z = 0 \Rightarrow -a + c = 0 \Rightarrow a = c$

El punto tiene coordenadas M(a, b, a) y los vectores $\vec{n} = (-1, 0, 1)$ y $\overrightarrow{PM}$ son proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = (a, b, a) - (1, 2, 3) = (a-1, b-2, a-3) \\ \vec{n} = (-1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a-1}{-1} = \frac{b-2}{0} = \frac{a-3}{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a-1}{-1} = \frac{b-2}{0} \\ \frac{a-1}{-1} = \frac{a-3}{1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (a-1)0 = (b-2)(-1) \\ a-1 = (a-3)(-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = -b+2 \\ a-1 = -a+3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b=2 \\ 2a=4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b=2 \\ a=2 \end{array} \right\}$$

El punto M tiene coordenadas M(2, 2, 2).

Como M es el punto medio del segmento PP' tenemos que:

$$\frac{P + P'}{2} = M \Rightarrow P + P' = 2M \Rightarrow P' = 2M - P = 2(2, 2, 2) - (1, 2, 3) = (3, 2, 1)$$

El punto P' simétrico de P respecto del plano $\pi: -x + z = 0$ es P'(3, 2, 1)

4. Da resposta a los apartados siguientes:

- a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcula $P(A)$ si $P(B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ y $P(A \cup B)$ es el triple de $P(A)$.
- b) En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25°C y desviación típica 4°C . Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día esté comprendida entre 21°C y 27.2°C . ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

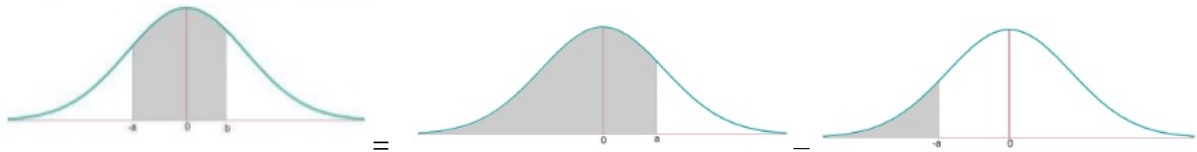
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 3P(A) = P(A) + 0.8 - 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3P(A) - P(A) = 0.8 - 0.2 \Rightarrow 2P(A) = 0.6 \Rightarrow P(A) = \frac{0.6}{2} = 0.3$$

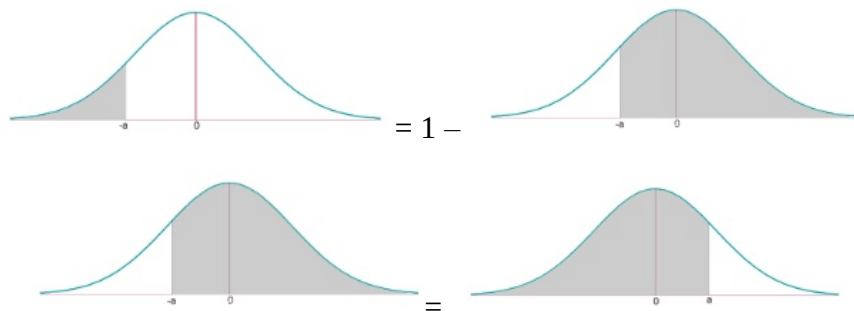
b) $X = \text{"la temperatura máxima de un día del mes de julio"}$. $X = N(25, 4)$

Nos piden calcular $P(21 < X < 27.2)$.

$$P(21 < X < 27.2) = P(X < 27.2) - P(X < 21) = \dots$$



$$\dots = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{27.2 - 25}{4}\right) - P\left(Z < \frac{21 - 25}{4}\right) = P(Z < 0.55) - P(Z < -1) = \dots$$



$$\dots = P(Z < 0.55) - (1 - P(Z < 1)) =$$

Buscamos en la tabla de la $N(0, 1)$ y queda: $P(21 < X < 27.2) = 0.7088 - (1 - 0.8413) = 0.5501$

0.5501 es la probabilidad de que un día el rango de temperaturas sea el indicado.
¿Cuántos días de un mes de 31 días va a pasar esto?

$$0.5501 \cdot 31 = 17.0531$$

Aproximadamente 17 días.

ABAU Septiembre 2018



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
SETEMBRO 2018**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

*(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción:
exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)*

OPCIÓN A

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- a) ¿Qué relación existe entre su inversa A^{-1} y su traspuesta A^T .
b) Estudia, según los valores de λ , el rango de $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Calcula las matrices X que verifican $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Enuncia el teorema de Rolle. Calcula a , b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & \text{si } x < 1 \\ bx + c & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 2]$ y calcula el punto que cumple el teorema.

- b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 2x$ y la recta $y = x$.
(para el dibujo de la parábola, indica puntos de corte con los ejes de coordenadas, el vértice y concavidad o convexidad)

3. Dada la recta $r: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

- a) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por el punto $A(1,1,1)$ y es perpendicular a r .
b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $P(-1,0,6)$ y $Q(3,-2,4)$ y es paralelo a la recta r .
c) Calcula la distancia de la recta r al plano $x + y + z - 5 = 0$.

4. En un bombo tenemos 10 bolas iguales numeradas del 0 al 9 y cada vez que hacemos una extracción devolvemos la pelota al bombo
a) Si hacemos 5 extracciones, calcula la probabilidad de que salga el 7 menos de dos veces.
b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que salga el 7 menos de nueve veces.

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 1$.

2. a) Calcula, si existe, el valor de m para que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + mx^2 - 1}{\operatorname{sen}(x^2)} = 3$.

b) Calcula los valores de a , b , c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto de inflexión en el punto $(0, 5)$ y la tangente a su gráfica en el punto $(1, 1)$ sea paralela al eje X .

c) Calcula $\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx$ (Nota: $\ln$ = logaritmo neperiano)

3. Sea r la recta que pasa por los puntos $P(9, 4, 1)$ y $Q(1, 1, 1)$. Dada la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1}$

- a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s . Calcula, si se cortan, el punto de corte.
 b) Calcula, si existe, la ecuación implícita o general del plano que contiene a las rectas r y s .
 c) Calcula la distancia del punto $O(0, 0, 0)$ a la recta s .

4. En una fábrica hay tres máquinas A , B y C que producen la misma cantidad de piezas. La máquina A produce un 2% de piezas defectuosas, B un 4% y C un 5%.

- a) Calcule la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa.
 b) Si se elige una pieza al azar y resulta que no está defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que fuera producida por la máquina A ?

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿Qué relación existe entre su inversa A^{-1} y su traspuesta A^T .

b) Estudia, según los valores de λ , el rango de $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Calcula las matrices X que verifican $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculamos la matriz traspuesta.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 1 - 0 - 0 - 0 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se observa que $A^T = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Obtenemos la expresión de $A - \lambda I$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz $A - \lambda I$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 0 - 1 - 0 - 0 - 0 = -1 - \lambda^3$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow -1 - \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda^3 = -1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \sqrt[3]{-1} = -1}$$

Estudiamos dos situaciones distintas.

- Si $\lambda \neq -1$ el determinante de $A - \lambda I$ es no nulo y el rango de $A - \lambda I$ es 3.
- Si $\lambda = -1$ el determinante de $A - \lambda I$ es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

¿El rango de $A - \lambda I$ es 2?

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna primera y su

determinante vale $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Al ser no nulo el rango de $A - \lambda I$ es 2 para $\lambda = -1$.

Resumiendo: Si $\lambda \neq -1$ el rango de $A - \lambda I$ es 3 y si $\lambda = -1$ el rango de $A - \lambda I$ es 2.

Resolvemos la ecuación matricial $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x - z \\ -x + y \\ -y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = z} \\ -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = z} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las matrices solución de $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ son $X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}$.

2. a) Enuncia el teorema de Rolle. Calcula a, b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & \text{si } x < 1 \\ bx + c & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 2]$ y calcula el punto que cumple el teorema.
- b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 2x$ y la recta $y = x$. (para el dibujo de la parábola, indica puntos de corte con los ejes de coordenadas, el vértice y concavidad o convexidad)

- a) Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y con $f(a) = f(b)$ entonces existe $d \in (a, b)$ tal que $f'(d) = 0$.

Obligamos a que la función sea continua en $[0, 2]$, para ello basta que sea continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= b + c \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} bx + c = b + c \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 + ax = 2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow b + c = 2 + a \Rightarrow \boxed{b = 2 + a - c}$$

Obligamos a que la función sea derivable en $(0, 2)$, para ello basta que sea derivable en $x = 1$.

Deben coincidir las derivadas laterales.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & \text{si } x < 1 \\ bx + c & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 4x + a & \text{si } x < 1 \\ b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} b = b \\ f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4x + a = 4 + a \\ f'(1^+) &= f'(1^-) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 4 + a}$$

La última condición es que $f(0) = f(2)$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= f(2) \\ f(0) &= 2 \cdot 0^2 + a \cdot 0 = 0 \\ f(2) &= 2b + c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{2b + c = 0}$$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y obtenemos el valor de los parámetros.

$$\left. \begin{aligned} b &= 2 + a - c \\ b &= 4 + a \\ 2b + c &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 + a - c &= 4 + a \\ 2(4 + a) + c &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -c &= 2 \rightarrow \boxed{c = -2} \\ 8 + 2a + c &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 + 2a - 2 = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-6}{2} = -3} \Rightarrow \boxed{b = 4 - 3 = 1}$$

Los valores buscados son $a = -3$, $b = 1$ y $c = -2$.

Podemos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x & \text{si } x < 1 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en el intervalo

$[0, 2]$, por lo que existe $d \in (0, 2)$ tal que $f'(d) = 0$.

Buscamos ese valor “d” averiguando cuando se anula la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3 = 0 \rightarrow 4x = 3 \rightarrow \boxed{x = \frac{3}{4}} \in (-\infty, 1) \\ 1 = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

El valor que cumple lo que afirma el teorema de Rolle es $d = \frac{3}{4} = 0.75 \in (-\infty, 1)$.

b) Hallamos los puntos de corte de parábola y recta.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x = x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3} \end{cases}$$

Puntos de corte con los ejes de coordenadas de la parábola.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0, 0) \\ x = 2 \rightarrow B(2, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son $A(0, 0)$ y $B(2, 0)$.

Hallamos el vértice de la parábola.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{2} = 1} \Rightarrow y = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 \Rightarrow C(1, -1)$$

El vértice de la parábola es $C(1, -1)$.

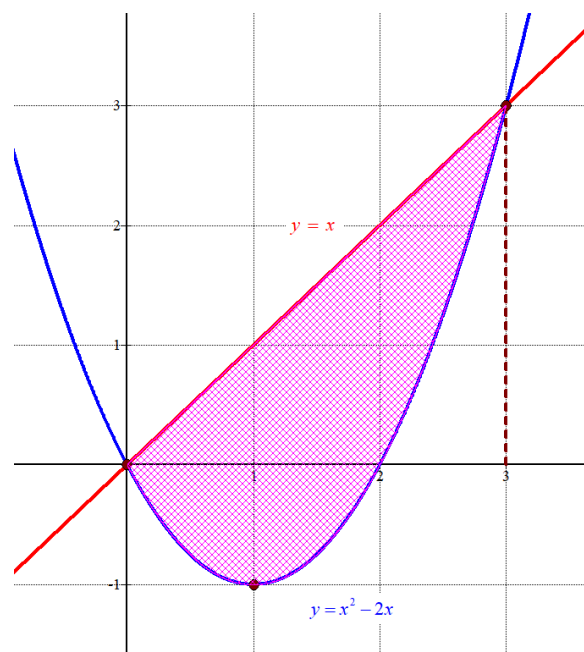
Estudiamos la concavidad o convexidad de la parábola: $y' = 2x - 2 \Rightarrow y'' = 2$.

Como la derivada segunda siempre es positiva la función es convexa (U)

Hacemos una tabla de valores y dibujamos ambas gráficas y la región encerrada entre ellas.

x	$y = x^2 - 2x$
-1	3
0	0
1	-1
2	0
3	3

x	$y = x$
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada el área tendrá un valor entre 4 y 5 unidades cuadradas. Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^3 x - (x^2 - 2x) dx = \int_0^3 x - x^2 + 2x dx = \int_0^3 -x^2 + 3x dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2} \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2} \right] = -9 + \frac{27}{2} = \boxed{4.5 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 2x$ y la recta $y = x$ vale 4.5 unidades cuadradas.

3. Dada la recta $r: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

- Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por el punto $A(1,1,1)$ y es perpendicular a r .
- Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $P(-1,0,6)$ y $Q(3,-2,4)$ y es paralelo a la recta r .
- Calcula la distancia de la recta r al plano $x + y + z - 5 = 0$.

a) Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta y un vector director de la misma.

$$r: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y - z + 2 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow -y - z + 2 - y + z - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow \boxed{x = 2 - z} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_r = (-1, 0, 1)}$$

El plano π perpendicular a la recta r tiene como vector normal el vector director de la recta $\vec{v}_r = (-1, 0, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (-1, 0, 1) \\ A(1,1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: -x + z + D = 0 \\ A(1,1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -x + z = 0}$$

La ecuación implícita o general del plano que pasa por el punto $A(1,1,1)$ y es perpendicular a r es $\pi: -x + z = 0$.

- b) El plano π' paralelo a r tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta $\vec{v}_r = (-1, 0, 1)$. El otro vector director del plano es el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (-1, 0, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (3, -2, 4) - (-1, 0, 6) = (4, -2, -2) \\ P(-1, 0, 6) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+1 & y & z-6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y + 2(z - 6) - 2y + 2(x + 1) = 0 \Rightarrow 4y + 2z - 12 - 2y + 2x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 2y + 2z - 10 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x + y + z - 5 = 0}$$

La ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $P(-1,0,6)$ y $Q(3,-2,4)$ y es paralelo a la recta r es $\pi': x + y + z - 5 = 0$.

- c) Comprobamos que la recta r es paralela al plano $x + y + z - 5 = 0$ viendo que el producto escalar del vector normal del plano y el director de la recta es nulo (vectores perpendiculares $\rightarrow$ plano y recta paralelos).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 0, 1) \\ x + y + z - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (1, 1, 1)(-1, 0, 1) = -1 + 1 = 0$$

Recta y plano son paralelos por lo que la distancia de la recta r al plano es la distancia de uno cualquiera de sus puntos al plano.

$$\left. \begin{array}{l} r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow P_r(2, 0, 0) \in r \\ \pi' : x + y + z - 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi') = d(P_r, \pi') = \frac{|2 + 0 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3} \text{ unidades}}$$

La distancia de r al plano $x + y + z - 5 = 0$ es de $\sqrt{3}$ unidades.

4. En un bombo tenemos 10 bolas iguales numeradas del 0 al 9 y cada vez que hacemos una extracción devolvemos la pelota al bombo.

- a) Si hacemos 5 extracciones, calcula la probabilidad de que salga el 7 menos de dos veces.
b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que salga el 7 menos de nueve veces.

Los resultados de las extracciones sucesivas son independientes entre sí, pues tras cada extracción se devuelve la bola al bombo.

La probabilidad de sacar 7 al extraer una bola es $1/10 = 0.1$.

- a) Llamamos X = Número de veces que sacamos 7 en 5 extracciones. $X = B(5, 0.1)$.

Nos piden calcular $P(X < 2)$.

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{5}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^5 + \binom{5}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^4 = \\ &= 0.9^5 + 5 \cdot 0.1 \cdot 0.9^4 = \boxed{0.91854} \end{aligned}$$

La probabilidad de que en 5 extracciones salga el 7 menos de dos veces es 0.91854.

- b) Llamamos X = Número de veces que sacamos 7 en 100 extracciones. $X = B(100, 0.1)$.

Nos piden calcular $P(X < 9)$. Como el número de repeticiones es muy alto usamos la aproximación a la normal Y de media $np = 100 \cdot 0.1 = 10$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 3.$$

$Y = N(10, 3)$. Esta aproximación es buena pues $np = 10 > 5$ y $nq = 100 \cdot 0.9 = 90 > 5$.

Calculamos la probabilidad pedida.

$$\begin{aligned} P(X < 9) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 8.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{8.5 - 10}{3}\right) = \\ &= P(Z \leq -0.5) = P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085} \end{aligned}$$

La probabilidad de que en 100 extracciones salga el 7 menos de nueve veces es de 0.3085.

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x \quad \quad - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$
- b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 1$.

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada en función del valor de m . Triangulamos la matriz ampliada usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A/B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ -1 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad m \\ -1 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 0 \quad m-1 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & m-1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad -m+1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1-m \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 2 \quad -1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad m-1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} \quad 1-m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B depende del valor de m . Estudiamos dos casos diferentes.

CASO 1. $m \neq 1$

En este caso el rango de A/B es 3, distinto del rango de A (2). El sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 2. $m = 1$

En este caso la matriz queda
$$\begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 2 \quad -1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} \quad 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz A y el de la matriz A/B es 2. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $m \neq 1$ el sistema es **incompatible** y para $m = 1$ el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Si $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

Buscamos las soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{1 \quad 2 \quad -1}^{A/B} & 1 \\ \underbrace{0 \quad -2 \quad 0}_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ -2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ y = \frac{0}{-2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x - z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 + z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema son $x = 1 + \lambda$; $y = 0$; $z = \lambda$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. a) Calcula, si existe, el valor de m para que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + mx^2 - 1}{\operatorname{sen}(x^2)} = 3$.
- b) Calcula los valores de a , b , c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto de inflexión en el punto $(0, 5)$ y la tangente a su gráfica en el punto $(1, 1)$ sea paralela al eje X .
- c) Calcula $\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx$ (Nota: $\ln$ = logaritmo neperiano)

a) Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + mx^2 - 1}{\operatorname{sen}(x^2)} = \frac{\cos 2 \cdot 0 + m \cdot 0^2 - 1}{\operatorname{sen}(0^2)} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(-\operatorname{sen} 2x) + 2mx}{2x \cdot \cos(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} 2x + mx}{x \cdot \cos(x^2)} = \frac{-\operatorname{sen} 2 \cdot 0 + m \cdot 0}{0 \cdot \cos(0^2)} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos 2x + m}{\cos(x^2) + x \cdot 2x(-\operatorname{sen}(x^2))} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos 2x + m}{\cos(x^2) - 2x^2 \operatorname{sen}(x^2)} = \frac{-2 \cos 2 \cdot 0 + m}{\cos(0^2) - 2 \cdot 0^2 \operatorname{sen}(0^2)} = \frac{m - 2}{1} = m - 2$$

Igualamos este resultado a 3 y determinamos el valor de m .

$$m - 2 = 3 \Rightarrow \boxed{m = 5}$$

Para que el límite valga 3 debe ser $m = 5$.

- b) La función tiene un punto de inflexión en $(0, 5)$, por lo que la derivada segunda es nula para $x = 0$ y la función pasa por $(0, 5)$, es decir, $f(0) = 5$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f(0) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 5 \Rightarrow \boxed{d = 5}$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 6ax + 2b \\ f''(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6a \cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

La función queda $f(x) = ax^3 + cx + 5$.

La tangente a la gráfica de la función en el punto $(1, 1)$ es paralela al eje X , por lo que la pendiente de la recta tangente es 0 $\rightarrow f'(1) = 0$. La función pasa por el punto $(1, 1)$, lo que significa que $f(1) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + cx + 5 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot 1^3 + c \cdot 1 + 5 = 1 \Rightarrow a + c + 5 = 1 \Rightarrow \boxed{c = -a - 4}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + c \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + c = 0 \Rightarrow 3a + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = -3a}$$

Reunimos estas dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} c = -a - 4 \\ c = -3a \end{array} \right\} \Rightarrow -3a = -a - 4 \Rightarrow -2a = -4 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-4}{-2} = 2} \Rightarrow \boxed{c = -3(2) = -6}$$

Los valores buscados son $a = 2$, $b = 0$, $c = -6$ y $d = 5$.

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \sqrt{x} \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \sqrt{x} dx \rightarrow v = \int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2x^{3/2}}{3} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2x^{3/2}}{3} \ln x - \int \frac{2x^{3/2}}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{3}{2}-1} dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{2x^{3/2}}{3} = \boxed{\frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{4\sqrt{x^3}}{9} + K}$$

Calculamos la integral definida.

$$\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{4\sqrt{x^3}}{9} \right]_1^e = \left[\frac{2\sqrt{e^3}}{3} \ln e - \frac{4\sqrt{e^3}}{9} \right] - \left[\frac{2\sqrt{1^3}}{3} \ln 1 - \frac{4\sqrt{1^3}}{9} \right] =$$

$$= \frac{6\sqrt{e^3}}{9} - \frac{4\sqrt{e^3}}{9} + \frac{4}{9} = \boxed{\frac{2\sqrt{e^3}}{9} + \frac{4}{9}}$$

Hemos comprobado que $\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2\sqrt{e^3}}{9} + \frac{4}{9}$.

3. Sea r la recta que pasa por los puntos $P(9,4,1)$ y $Q(1,1,1)$. Dada la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1}$
- Estudia la posición relativa de las rectas r y s . Calcula, si se cortan, el punto de corte.
 - Calcula, si existe, la ecuación implícita o general del plano que contiene a las rectas r y s .
 - Calcula la distancia del punto $O(0,0,0)$ a la recta s .

a) Hallamos la ecuación de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} P(9,4,1) \in r \\ Q(1,1,1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q(1,1,1) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (1,1,1) - (9,4,1) = (-8,-3,0) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - 8\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1} \Rightarrow \vec{u}_s = (2,1,-1) \\ \vec{v}_r = (-8,-3,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{-8} \neq \frac{1}{-3} \neq \frac{-1}{0}$$

Las rectas se cortan o cruzan.

Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{PR}]$, siendo R un punto de la recta s .

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (2,1,-1) \\ R(1,0,5) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PR} = (1,0,5) - (9,4,1) = (-8,-4,4)$$

$$r: \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-8,-3,0) \\ P(9,4,1) \end{array} \right\}$$

$$[\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{PR}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -8 & -3 & 0 \\ -8 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -24 + 0 - 32 + 24 + 32 - 0 = 0$$

Como el producto mixto es nulo las rectas se cortan (coinciden en un punto y pertenecen al mismo plano). Calculamos el punto C de corte de ambas rectas resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1 - 8\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases} \\ s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1-8\lambda-1}{2} = \frac{1-3\lambda}{1} = \frac{1-5}{-1} \Rightarrow -4\lambda = 1-3\lambda = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4\lambda = 4 \rightarrow \lambda = \frac{4}{-4} = -1 \\ 1-3\lambda = 4 \rightarrow -3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{-3} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 8(-1) = 9 \\ y = 1 - 3(-1) = 4 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(9,4,1)}$$

El punto C de corte de las rectas r y s tiene coordenadas $C(9,4,1)$.

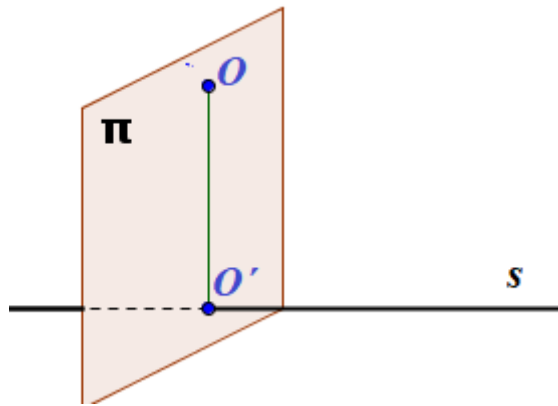
- b) El plano que contiene a las rectas r y s tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene el punto $Q(1,1,1)$ de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} Q(1,1,1) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{u}_s = (2,1,-1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (-8,-3,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8(y-1) - 6(z-1) + 8(z-1) - 3(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8y - 8 - 6z + 6 + 8z - 8 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -3x + 8y + 2z - 7 = 0}$$

El plano π que contiene ambas rectas tiene ecuación $\pi: -3x + 8y + 2z - 7 = 0$.

- c) Para hallar la distancia del punto O a la recta s hallamos el plano perpendicular a la recta que pasa por O. En un segundo paso hallamos el punto O' de corte de recta y plano. Y por último la distancia de O a r es la distancia entre los puntos O y O' (el módulo del vector $\overrightarrow{OO'}$).



Primer paso:

$$\left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{u}_s = (2,1,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in \pi \\ 2x + y - z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + y - z = 0}$$

Segundo paso:

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1} \Rightarrow s: \begin{cases} \vec{u}_s = (2,1,-1) \\ R(1,0,5) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 5 - \alpha \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y - z = 0 \\ s: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 5 - \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\alpha) + \alpha - (5 - \alpha) = 0 \Rightarrow 2 + 4\alpha + \alpha - 5 + \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{1}{2} = 2 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{O'\left(2, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)}$$

Tercer paso:

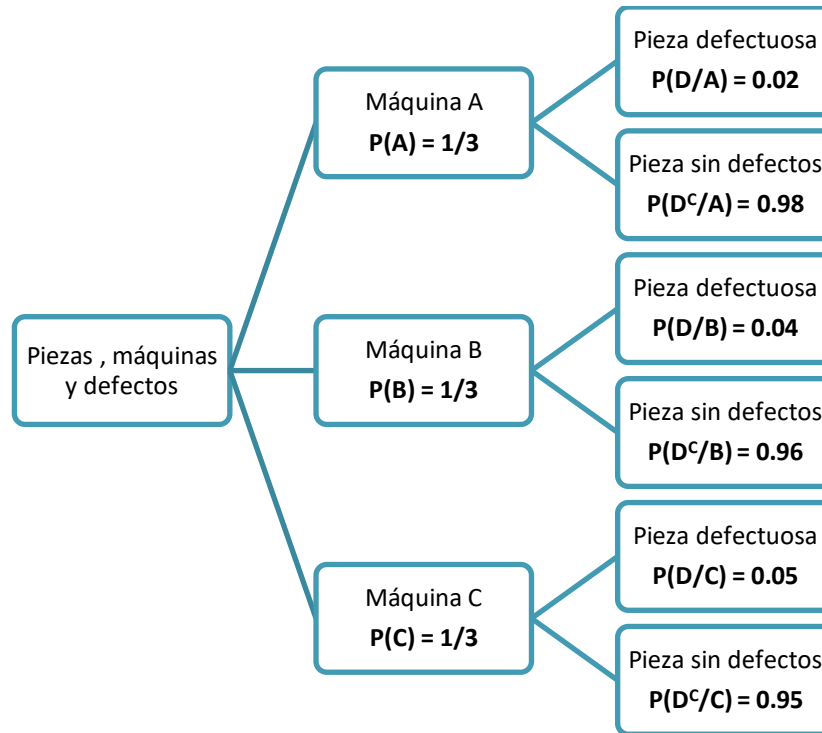
$$\left. \begin{array}{l} O'\left(2, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) \\ O(0,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) - (0,0,0) = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

$$d(O, s) = d(O, O') = |\overrightarrow{OO'}| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{7\sqrt{2}}{2} \simeq 4.94 \text{ unidades}}$$

La distancia del punto $O(0, 0, 0)$ a la recta s vale $\frac{7\sqrt{2}}{2} \simeq 4.94$ unidades.

4. En una fábrica hay tres máquinas A, B y C que producen la misma cantidad de piezas. La máquina A produce un 2% de piezas defectuosas, B un 4% y C un 5%.
- a) Calcule la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa.
- b) Si se elige una pieza al azar y resulta que no está defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que fuera producido por la máquina A

Si las máquinas producen la misma cantidad de piezas la probabilidad de que una pieza sea fabricada por A, B o C es de $1/3$. Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0.02 + \frac{1}{3} \cdot 0.04 + \frac{1}{3} \cdot 0.05 = \boxed{\frac{11}{300} \approx 0.03667}$$

La probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa es $\frac{11}{300} \approx 0.03667$.

- b) Nos piden calcular $P(A/D^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D^c) = \frac{P(A \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(A)P(D^c/A)}{1 - P(D)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.98}{1 - \frac{11}{300}} = \boxed{\frac{98}{289} \approx 0.3391}$$

La probabilidad de que una pieza no defectuosa fuera producida por la máquina A tiene un valor de $\frac{98}{289} \approx 0.3391$.

ABAU Junio 2018



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
XUÑO 2018**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

*(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción:
exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)*

OPCIÓN A

1. a) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule los valores de m para que la matriz inversa de M sea $\frac{1}{4}M$.
- b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcule la matriz X que verifica: $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$, siendo B^t y C^t las transpuestas B y C respectivamente..
2. a) Calcula: los intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos de $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$
- b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = x - 4$. (Para el dibujo de la parábola, indica: puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad y convexidad)
3. a) Determina el valor de λ para que los puntos $A(3, 0, -1)$, $B(2, 2, -1)$, $C(1, -2, -5)$ y $D(\lambda, 6, -1)$ sean coplanarios y calcula la ecuación implícita o general del plano que los contiene.
- b) Determina la posición relativa de plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $P(-4, 4, 2)$ y $Q(4, 8, -4)$. Si se cortan, calcula el punto de corte.
- c) Calcula el punto simétrico del punto $P(-4, 4, 2)$ respecto del plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$.
4. En las rebajas de unos grandes almacenes están mezcladas para la venta 200 bufandas de la marca A, 150 de la marca B y 50 de la marca C. La probabilidad de que una bufanda de la marca A sea defectuosa es 0,01; 0,02 es el de la marca B y 0,04 si es de la marca C. Una persona elige una bufanda al azar
 - a) Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida sea de la marca A o defectuosa.
 - b) Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida no sea defectuosa ni de la marca C.
 - c) Si la bufanda elegida no es defectuosa, cual es la probabilidad de que sea de la marca B.

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 3x - 6y + mz = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = m \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 3$.

2. a) Calcula a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + ax + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea continua y derivable en

$x = 0$.

b) Calcula los vértices del rectángulo de área máxima que se puede construir, si uno de los vértices es $O(0,0)$, otro está sobre el eje X , otro sobre el eje Y y el otro sobre la recta $2x + 3y = 8$.

c) Calcula $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$

3. a) Dado el plano $\pi : 2x - y - 2z - 3 = 0$, calcula el valor de a para que la recta r que pasa por los puntos $P(a, a, a)$ y $Q(1, 3, 0)$ sea paralela al plano π .

b) Para $a = 1$, calcula la distancia de r a π .

c) Para $a = 1$, calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a π y contiene a r .

4. a) Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con 4 respuestas de las cuales solo una es correcta. Si se contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de contestar bien por lo menos dos preguntas?

b) La duración de un cierto tipo de pilas eléctricas es una variable que sigue una distribución normal de media 50 horas y desviación típica 5 horas. Calcula la probabilidad de que una pila eléctrica de este tipo, elegida al azar, dure menos de 42 horas.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. a) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule los valores de m para que la matriz inversa de M sea $\frac{1}{4}M$.
- b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcule la matriz X que verifica: $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$, siendo B^t y C^t las transpuestas B y C respectivamente..

a) Si la matriz inversa de M es $\frac{1}{4}M$ debe cumplirse que $\frac{1}{4}M \cdot M = I$.

$$\frac{1}{4}M \cdot M = I \Rightarrow \frac{1}{4} \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 + m + 4 & m^2 + 4m + m + 4 \\ m + 1 & m + 4 + 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 + m + 4 & m^2 + 5m + 4 \\ m + 1 & m + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 + m + 4 = 4 \rightarrow m^2 + m = 0 \rightarrow m(m+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases} \\ m^2 + 5m + 4 = 0 \rightarrow m = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-5+3}{2} = -1 = m \\ \frac{-5-3}{2} = -4 \end{cases} \\ m + 1 = 0 \rightarrow m = -1 \\ m + 5 = 4 \rightarrow m = -1 \end{cases}$$

El único valor de m para el que la inversa de la matriz M es $\frac{1}{4}M$ es $m = -1$.

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$B^t \cdot A \cdot X + C^t = X \Rightarrow B^t \cdot A \cdot X - X = -C^t \Rightarrow (B^t \cdot A - I) \cdot X = -C^t \Rightarrow X = -(B^t A - I)^{-1} C^t$$

Comprobamos que la matriz $B^t A - I$ tiene inversa y la calculamos.

$$B^t A - I = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|B^t A - I| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 3 - 0 - 0 = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$(B^t A - I)^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^t A - I)^t}{|B^t A - I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(B^t A - I)^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X.

$$X = -(B^t A - I)^{-1} C^t = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$ es $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}$.

2. a) Calcula: los intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos de

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = x - 4$. (Para el dibujo de la parábola, indica: puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad y convexidad)

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-x+2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x+2}{x^3} = 0 \Rightarrow -x+2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=0$ (excluido del dominio) y $x=2$ (punto crítico).

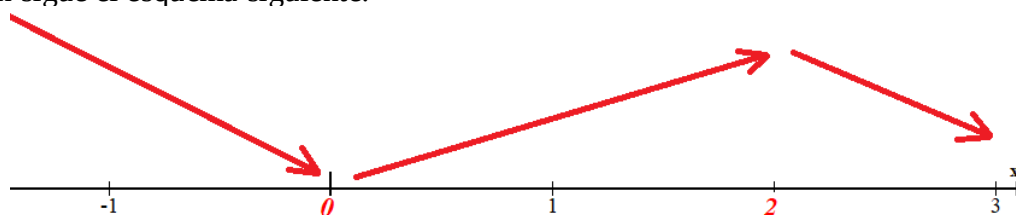
- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{-(-1)+2}{(-1)^3} = -3 < 0$.

La función decrece en $(-\infty, 0)$.

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-1+2}{1^3} = 1 > 0$. La función crece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-3+2}{3^3} = \frac{-1}{27} < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(0, 2)$.

La función tiene un máximo relativo en $x=2$. La función no tiene mínimo relativo.

b) Puntos de corte con los ejes.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 4x \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow A(0,0) \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \rightarrow B(4,0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 4x \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow A(0,0)$$

Vértice

$$\left. \begin{array}{l} y' = 2x - 4 \\ y' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 \Rightarrow V(2, -4)$$

Concavidad y convexidad.

$$y' = 2x - 4 \Rightarrow y'' = 2 > 0$$

Al ser la segunda derivada positiva la parábola es convexa (U).

Hallamos los puntos de corte de la parábola y la recta.

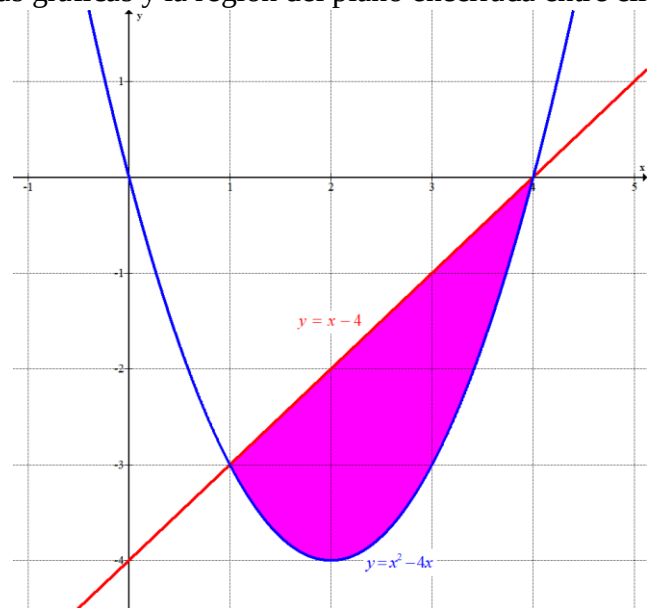
$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 4x \\ y = x - 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4x = x - 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 16}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 = x \\ \frac{5-3}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores, dibujamos las gráficas y la región del plano encerrada entre ellas.

x	$y = x^2 - 4x$
1	-3
2	-4
3	-3
4	0

x	$y = x - 4$
1	-3
4	0



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada de área podemos decir que el área de la región del plano encerrada entre las dos gráficas tiene un valor entre 4 y 5 unidades cuadradas.

Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral.

$$\text{Área} = \int_1^4 x - 4 - (x^2 - 4x) dx = \int_1^4 x - 4 - x^2 + 4x dx = \int_1^4 -x^2 + 5x - 4 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 4x \right]_1^4 =$$

$$= \left[-\frac{4^3}{3} + 5\frac{4^2}{2} - 4 \cdot 4 \right] - \left[-\frac{1^3}{3} + 5\frac{1^2}{2} - 4 \cdot 1 \right] = -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = \boxed{4.5u^2}$$

3. a) Determina el valor de λ para que los puntos $A(3,0,-1)$, $B(2,2,-1)$, $C(1,-2,-5)$ y $D(\lambda,6,-1)$ sean coplanarios y calcula la ecuación implícita o general del plano que los contiene.
- b) Determina la posición relativa de plano $\pi: 4x+2y-3z-15=0$ y la recta r que pasa por los puntos $P(-4,4,2)$ y $Q(4,8,-4)$. Si se cortan, calcula el punto de corte.
- c) Calcula el punto simétrico del punto $P(-4,4,2)$ respecto del plano $\pi: 4x+2y-3z-15=0$.

a) Hallamos la ecuación del plano que contiene los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,2,-1) - (3,0,-1) = (-1,2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (1,-2,-5) - (3,0,-1) = (-2,-2,-4) \\ A(3,0,-1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8(x-3) + 0 + 2(z+1) + 4(z+1) - 4y - 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8x + 24 + 2z + 2 + 4z + 4 - 4y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8x - 4y + 6z + 30 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0}$$

Para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios el punto D debe pertenecer al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0 \\ D(\lambda, 6, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 4\lambda + 12 + 3 - 15 = 0 \Rightarrow 4\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$$

Para $\lambda = 0$ los cuatro puntos son coplanarios.

El plano que contiene a los cuatro puntos es $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$.

b) Hallamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

$$\overrightarrow{PQ} = (4,8,-4) - (-4,4,2) = (8,4,-6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ} = (4,2,-3) \\ P(-4,4,2) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$$

Planteamos el sistema formado por la ecuación del plano y la ecuación de la recta. Si la solución es única entonces plano y recta se cortan, si tiene soluciones infinitas entonces la recta está contenida en el plano y si no tiene solución la recta es paralela al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0 \\ r: \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 4(-4 + 4\lambda) + 2(4 + 2\lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16 + 16\lambda + 8 + 4\lambda - 6 + 9\lambda - 15 = 0 \Rightarrow 29\lambda = 29 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 + 4 = 0 \\ y = 4 + 2 = 6 \\ z = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

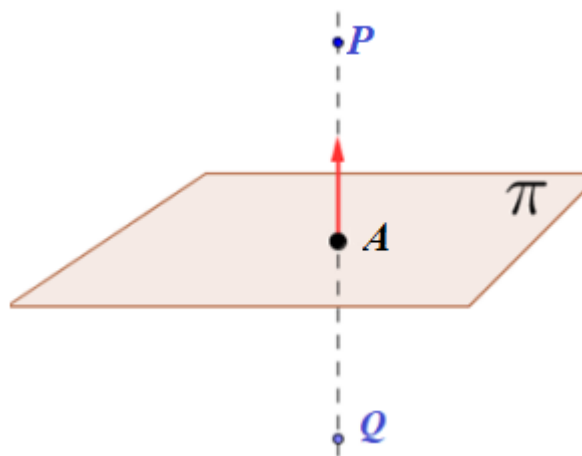
La solución del sistema es única y la recta corta al plano en el punto $A(0, 6, -1)$.

- c) El punto de corte de la recta que pasa por P y Q y el plano es el punto A que resulta ser el punto medio del segmento PQ, por lo que el punto simétrico de P respecto del plano es el punto Q. Comprobamos que la recta que pasa por P y Q corta perpendicularmente al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 4x + 2y - 3z - 15 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (4, 2, -3) \\ \vec{PQ} = (8, 4, -6) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \Rightarrow \vec{n} \parallel \vec{PQ} \Rightarrow r \perp \pi$$

Comprobamos que el punto A es el punto medio del segmento PQ.

$$\frac{(-4, 4, 2) + (4, 8, -4)}{2} = (0, 6, -1)$$



Hemos comprobado que el punto simétrico de $P(-4, 4, 2)$ respecto del plano $\pi : 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ es el punto $Q(4, 8, -4)$.

4. En las rebajas de unos grandes almacenes están mezcladas para la venta 200 bufandas de la marca A, 150 de la marca B y 50 de la marca C. La probabilidad de que una bufanda de la marca A sea defectuosa es 0,01; 0,02 es el de la marca B y 0,04 si es de la marca C. Una persona elige una bufanda al azar
- Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida sea de la marca A o defectuosa.
 - Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida no sea defectuosa ni de la marca C.
 - Si la bufanda elegida no es defectuosa, cual es la probabilidad de que sea de la marca B.

Sabemos que hay un total de $200 + 150 + 50 = 400$ bufandas.

En el montón de bufandas habrá un 1 % de bufandas de la marca A defectuosas: $0.01 \cdot 200 = 2$ bufandas A defectuosas.

En el montón de bufandas habrá un 2 % de bufandas de la marca B defectuosas: $0.02 \cdot 150 = 3$ bufandas B defectuosas.

En el montón de bufandas habrá un 4 % de bufandas de la marca C defectuosas: $0.04 \cdot 50 = 2$ bufandas C defectuosas.

En el montón de 400 bufandas hay un total de $2 + 3 + 2 = 7$ bufandas defectuosas.

- De un total de 400 bufandas hay 200 bufandas de la marca A, 3 bufandas de la marca B defectuosas y 2 bufandas de la marca C defectuosas. Aplicamos la regla de Laplace y tenemos que la probabilidad pedida es $\frac{200 + 3 + 2}{400} = \frac{205}{400} = \frac{41}{80} = 0.5125$.
- Si la bufanda elegida no debe ser defectuosa ni de la marca C entonces debe ser no defectuosa de la marca A o no defectuosa de la marca B.
De un total de 400 bufandas hay $200 - 2 = 198$ bufandas no defectuosas de la marca A y $150 - 3 = 147$ bufandas no defectuosas de la marca B. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad pedida es $\frac{198 + 147}{400} = \frac{345}{400} = 0.8625$.
- Hay un total de 393 bufandas no defectuosas y de ellas 147 son de la marca B. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad pedida es $\frac{147}{393} \approx 0.374$.

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 3x - 6y + mz = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = m \end{cases}$$
- b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 3$.

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada en función del valor de m . Triangulamos la matriz ampliada usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A/B &= \begin{pmatrix} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad m \\ -1 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -1 \quad m \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad -6 \quad m \quad 0 \\ -3 \quad 6 \quad -3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad m-3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & m \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 3^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & m \\ 0 & 0 & m-3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Estudiamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & m-3 \end{vmatrix} = 3(m-3) = 0 \Rightarrow \boxed{m=3}$$

Estudiamos dos casos diferentes.

CASO 1. $m \neq 3$

En este caso el rango de las matrices A y A/B es 3 igual que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible determinado** (solución única).

CASO 2. $m = 3$

En este caso la matriz equivalente a la matriz ampliada A/B queda
$$\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & -2 & 1 & 0}^{A/B} \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ \underbrace{0 & 0 & 0 & 0}_A \end{array} \right).$$

El rango de la matriz A y el de la matriz A/B es 2. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $m \neq 3$ el sistema es **compatible determinado** y para $m = 3$ el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Si $m = 3$ el sistema es compatible indeterminado.

Buscamos las soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & -2 & 1 & 0}^{A/B} \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ \underbrace{0 & 0 & 0 & 0}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ 3y - z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3 = z \end{array} \right\} \Rightarrow x - 2y + 3y - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 3 - y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema son $x = 3 - \lambda$; $y = \lambda$; $z = -3 + 3\lambda$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. a) Calcula a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + ax + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea continua y derivable en

$x = 0$.

b) Calcula los vértices del rectángulo de área máxima que se puede construir, si uno de los vértices es $O(0,0)$, otro está sobre el eje X , otro sobre el eje Y y el otro sobre la recta $2x + 3y = 8$.

c) Calcula $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ debe cumplirse que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2} \cdot (0^2 + 2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x} + ax + b = e^0 + a \cdot 0 + b = b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2) = 1 \\ f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow b + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

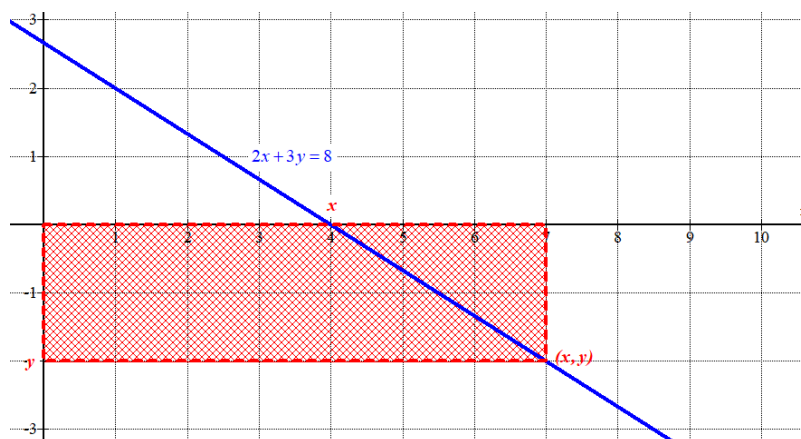
La derivada de la función en $\mathbb{R} - \{0\}$ es $f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} + a & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (2x) = x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

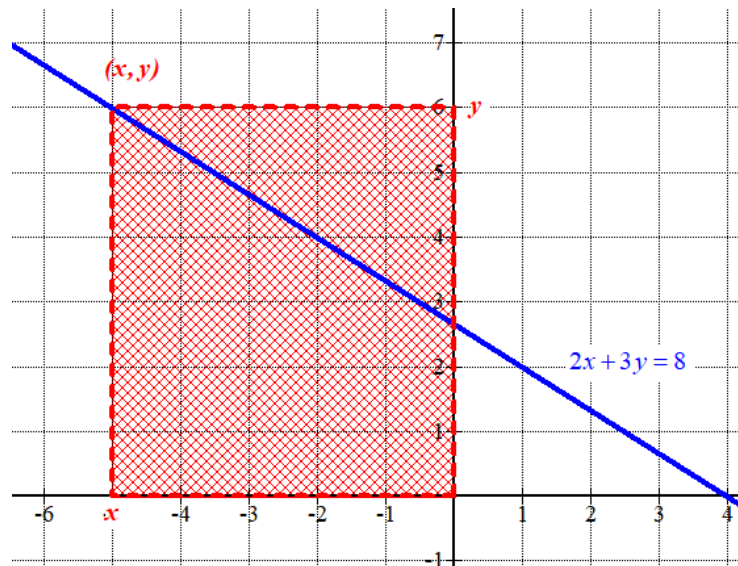
Para que la función sea derivable en $x = 0$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2e^{2x} + a = 2e^0 + a = a + 2 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

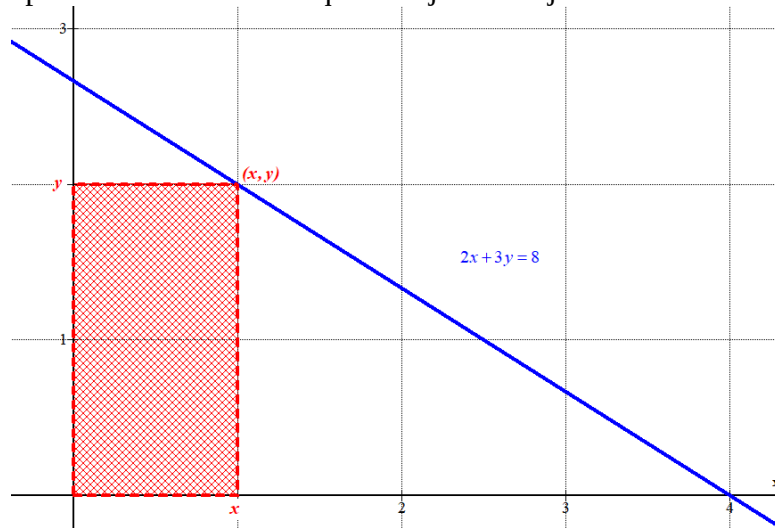
Los valores a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$ son $a = -2$ y $b = 0$.

b) Consideramos que el rectángulo se sitúa en el primer cuadrante. Pues en el segundo y cuarto cuadrante el área del rectángulo puede ser tan grande como se quiera, no existiría un rectángulo de área máxima.





La situación en el primer cuadrante es la que refleja el dibujo.



El área del rectángulo es $A(x, y) = xy$. Como uno de los vértices está sobre la recta se cumple $2x + 3y = 8 \Rightarrow y = \frac{8-2x}{3}$. Lo aplicamos en la expresión de la función área.

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = xy \\ y = \frac{8-2x}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = x \frac{8-2x}{3} = \frac{8x-2x^2}{3}$$

La expresión de la función área es $A(x) = \frac{8x-2x^2}{3}$; siendo $0 \leq x \leq 4$.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} A(x) = \frac{8x-2x^2}{3} \Rightarrow A'(x) = \frac{8-4x}{3} \\ A'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{8-4x}{3} = 0 \Rightarrow 8-4x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Sustituimos $x = 2$ en la segunda derivada.

$$A'(x) = \frac{8-4x}{3} \Rightarrow A''(x) = \frac{-4}{3} \Rightarrow A''(2) = \frac{-4}{3} < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función tiene un máximo relativo en $x = 2$.

Para este valor de x tenemos que $y = \frac{8-2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$.

El rectángulo de área máxima cumpliendo lo pedido en el ejercicio tiene sus vértices en $O(0, 0)$

, $A(2, 0)$, $B\left(2, \frac{4}{3}\right)$ y $C\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+1}dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x+1=t \Rightarrow dx=dt \\ x=t-1 \end{array} \right\} = \int (t-1)\sqrt{t}dt = \int t\sqrt{t}dt - \int \sqrt{t}dt = \\ &= \int t \cdot t^{1/2}dt - \int t^{1/2}dt = \int t^{3/2}dt - \int t^{1/2}dt = \frac{t^{1+3/2}}{1+3/2} - \frac{t^{1+1/2}}{1+1/2} = \frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x+1=t \end{array} \right\} = \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + K \end{aligned}$$

Usamos lo obtenido para determinar el valor de la integral definida.

$$\begin{aligned} \int_0^3 x\sqrt{x+1}dx &= \left[\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} \right]_0^3 = \\ &= \left[\frac{2}{5}\sqrt{(3+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(3+1)^3} \right] - \left[\frac{2}{5}\sqrt{(0+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(0+1)^3} \right] = \\ &= \frac{2}{5}\sqrt{4^5} - \frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{116}{15}} \end{aligned}$$

3. a) Dado el plano $\pi: 2x - y - 2z - 3 = 0$, calcula el valor de a para que la recta r que pasa por los puntos $P(a, a, a)$ y $Q(1, 3, 0)$ sea paralela al plano π .
- b) Para $a = 1$, calcula la distancia de r a π .
- c) Para $a = 1$, calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a π y contiene a r .

a) Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por los puntos P y Q .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (1, 3, 0) - (a, a, a) = (1-a, 3-a, -a) \\ Q(1, 3, 0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + (1-a)\lambda \\ y = 3 + (3-a)\lambda \\ z = -a\lambda \end{cases}$$

Para que la recta sea paralela al plano el vector normal del plano y el vector director de la recta deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y - 2z - 3 = 0 \rightarrow \vec{n} = (2, -1, -2) \\ \vec{v}_r = (1-a, 3-a, -a) \\ \vec{n} \perp \vec{v}_r \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (2, -1, -2)(1-a, 3-a, -a) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 2a - 3 + a + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Sabemos que para $a=1$ la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. Comprobamos que el punto $Q(1, 3, 0)$ perteneciente a la recta no está en el plano, con lo que recta y plano serían paralelos.

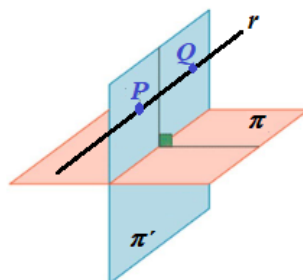
$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y - 2z - 3 = 0 \\ \text{¿} Q(1, 3, 0) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 1 - 3 - 2 \cdot 0 - 3 = 0? \Rightarrow \text{¡} 2 - 3 - 3 \neq 0! \text{!}$$

Para $a=1$ la recta y el plano son paralelos.

b) Calculamos la distancia de la recta al plano como la distancia del punto Q perteneciente a la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y - 2z - 3 = 0 \\ Q(1, 3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 3 - 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{3} \text{ unidades}$$

c) El plano π' perpendicular a π y que contiene a r contiene al punto Q de la recta y tiene como vectores directores el vector director de la recta y el normal del plano.



$$\pi: 2x - y - 2z - 3 = 0 \rightarrow \vec{n} = (2, -1, -2)$$

$$\vec{v}_r = (1-1, 3-1, -1) = (0, 2, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (2, -1, -2) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (0, 2, -1) \\ Q(1, 3, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1+4z+2y-6+4x-4=0 \Rightarrow \boxed{\pi': 5x+2y+4z-11=0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi': 5x+2y+4z-11=0$.

4. a) Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con 4 respuestas de las cuales solo una es correcta. Si se contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de contestar bien por lo menos dos preguntas?
- b) La duración de un cierto tipo de pilas eléctricas es una variable que sigue una distribución normal de media 50 horas y desviación típica 5 horas. Calcula la probabilidad de que una pila eléctrica de este tipo, elegida al azar, dure menos de 42 horas.

- a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de respuestas correctas a un test de 10 preguntas. Esta variable es una binomial, pues las respuestas son al azar, siendo la probabilidad de acertar una pregunta de $p = 1/4$ y $n = 10$. $X = B(10, 0.25)$.
Nos piden calcular $P(X \geq 2)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = \\ &= 1 - \left[\binom{10}{0} 0.25^0 \cdot 0.75^{10} + \binom{10}{1} 0.25^1 \cdot 0.75^9 \right] = 1 - [0.75^{10} + 10 \cdot 0.25 \cdot 0.75^9] \approx \boxed{0.756} \end{aligned}$$

La probabilidad de que una persona que responde al azar a un test de 10 preguntas conteste bien por lo menos dos preguntas tiene un valor aproximado de 0.756.

- b) X = La duración de un cierto tipo de pilas eléctricas (en horas). $X = N(50, 5)$

Nos piden calcular $P(X < 42)$. 42 es menor que la media (50) menos la desviación típica (5), por lo que la probabilidad debe tener un valor pequeño.

$$\begin{aligned} P(X < 42) &= \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z < \frac{42 - 50}{5}\right) = P(Z < -1.6) = \\ &= P(Z > 1.6) = 1 - P(Z \leq 1.6) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9452 = \boxed{0.0548} \end{aligned}$$

ABAU Septiembre 2017



**Proba de Avaliación do
Bacharelato
para o Acceso á Universidade
SETEMBRO 2017**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

*(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción:
exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)*

OPCIÓN A

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

a) Determina, según los valores de k , el rango de las matrices AB y BA .

b) Para $k = 0$, determina las matrices X que verifican $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Calcula: i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3e^{2x}}{x + e^{2x}}$; ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3e^{2x}}{x + e^{2x}}$

b) La derivada de una función $f(x)$, que tiene por dominio $(0, \infty)$, y $f'(x) = 1 + \ln x$. Determina la función $f(x)$ teniendo en cuenta que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$.

c) Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

3. Sea r la recta que pasa por los puntos $(0, 1, 3)$ y $(1, 1, 1)$ y $s: \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Estudia su posición relativa.

b) Es s paralela al plano YZ ? ¿Está contenida en dicho plano?

c) Calcula la distancia de la recta r al plano $\pi: 2x + z = 0$.

4. Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0.7$; $P(B) = 0.6$ y $P(A \cup B) = 0.9$

a) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifica la respuesta.

b) Calcula $P(A - B)$ y $P(A/\bar{B})$. (Nota: $\bar{B}$ suceso contrario o complementario de B).

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x - y + z = m \\ x + my - 2z = m \end{cases}$$
- b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 0$.

2. Dada la función $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

- a) Estudia, en $x = 0$, la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.
- b) Determina los puntos de la gráfica de $f(x)$ donde la recta tangente es paralela a la recta $x - 4y = 0$ y determina las ecuaciones de dichas rectas tangentes.
- c) Calcula $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

3. Dados los planos $\alpha : 2x - 2y + 4z - 7 = 0$; $\beta : \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases}$ y la recta $r : \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

- a) Estudia la posición relativa de los planos α y β . Calcula la distancia entre ellos.
- b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a α y contiene a la recta r .
- c) Sean P y Q los puntos de intersección de la recta r con los planos XY e YZ respectivamente. Calcula la distancia entre P y Q .

4. Las ventas totales diarias en un restaurante pequeño son una variable que sigue una distribución normal de media 1220 € al día y desviación típica 120 € al día.
- a) Calcula la probabilidad de que en un día elegido al azar las ventas superen los 1400€.
- b) Si el restaurante debe vender al menos 980 € al día para cubrir gastos, ¿cuál es la probabilidad de que en un día elegido al azar el restaurante no cubra gastos?

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

a) Determina, según los valores de k , el rango de las matrices AB y BA .

b) Para $k = 0$, determina las matrices X que verifican $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Obtenemos la expresión de las matrices AB y BA .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+0 & -3+0 \\ k+3 & k+1 & -3k-1 \\ 1+3 & 1+1 & -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ k+3 & k+1 & -3k-1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k-3 & 0+1-3 \\ 3+k-1 & 0+1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & -2 \\ k+2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz AB y averiguamos cuando se anula.

$$|AB| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ k+3 & k+1 & -3k-1 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -4k - 4 - 12k - 4 - 6k - 18 + 12k + 12 + 4k + 12 + 6k + 2 = 0$$

Como su determinante es nulo la matriz AB tiene rango 2 o 1. Consideramos el menor de orden

2 que surge de quitar la segunda fila y la tercera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0$.

Al ser no nulo el rango de la matriz AB es 2.

Calculamos el determinante de la matriz BA y averiguamos cuando se anula.

$$|BA| = \begin{vmatrix} k-2 & -2 \\ k+2 & 0 \end{vmatrix} = 2(k+2) = 0 \Rightarrow \boxed{k = -2}$$

Si k es distinto de -2 el rango de BA es 2, pero si $k = -2$ el determinante es nulo y su rango es 1.

b) Para $k = 0$ la matriz AB queda $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

El sistema de ecuaciones queda $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$

Observamos que si sumamos la primera y la segunda ecuación obtenemos la tercera, por lo que el sistema se reduce a dos ecuaciones: $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3z - x \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x + 3z - x - z = 0 \Rightarrow 2x + 2z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow \boxed{x = -z} \Rightarrow \boxed{y = 3z - (-z) = 4z} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 4\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$$

Las matrices que cumplen lo pedido son $X = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 4\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, siendo α cualquier valor real.

2. a) Calcula: i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}}$; ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}}$

b) La derivada de una función $f(x)$, que tiene por dominio $(0, \infty)$, y $f'(x) = 1 + \ln x$. Determina la función $f(x)$ teniendo en cuenta que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$.

c) Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

a) i)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{3}{e^{-2x}}}{x + \frac{1}{e^{-2x}}} = \frac{-\infty + \frac{3}{+\infty}}{-\infty + \frac{1}{+\infty}} = \frac{-\infty + 0}{-\infty + 0} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+6e^{2x}}{1+2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{6}{e^{-2x}}}{1+\frac{2}{e^{-2x}}} = \frac{1+\frac{6}{+\infty}}{1+\frac{2}{+\infty}} = \frac{1+0}{1+0} = \boxed{1}$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} = \frac{+\infty + \infty}{+\infty + \infty} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+6e^{2x}}{1+2e^{2x}} = \frac{1+\infty}{1+\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12e^{2x}}{4e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = \boxed{3}$$

b) La función $f(x)$ es la primitiva de $f'(x) = 1 + \ln x$ que pasa por $(1, 4)$.

Calculamos la integral de la derivada.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 1 + \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ 1 + \ln x = u \rightarrow \frac{1}{x} dx = du \\ dx = dv \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x(1 + \ln x) - \int x \frac{1}{x} dx =$$

$$= x + x \ln x - \int dx = x + x \ln x - x = x \ln x + C$$

La función es $f(x) = x \ln x + C$. Como debe pasar por el punto $(1, 4)$ debe cumplirse que $f(1) = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x \ln x + C \\ f(1) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \cdot \ln 1 + C = 4 \Rightarrow C = 4$$

La función tiene la expresión $f(x) = x \ln x + 4$.

c) Buscamos los puntos críticos de la función $f(x) = x \ln x + 4$.

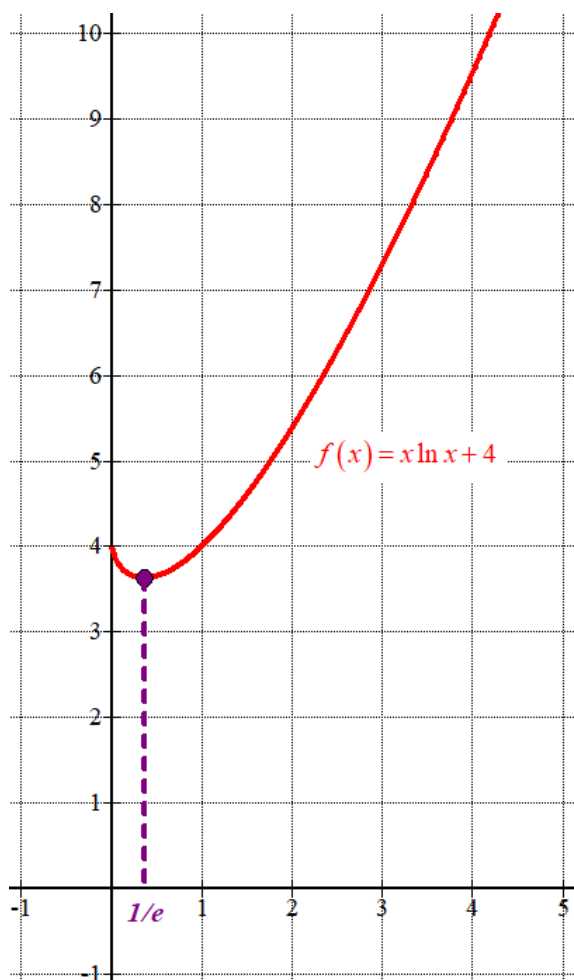
$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = 1 + \ln x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow \boxed{x = e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f'(x) = 1 + \ln x \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e > 0$$

Al ser positiva la segunda derivada la función presenta un mínimo relativo en $x = \frac{1}{e}$.

Como $f\left(e^{-1}\right) = e^{-1} \ln e^{-1} + 4 = e^{-1}(-1) + 4 = 4 - \frac{1}{e}$ las coordenadas del mínimo relativo de la función son $\left(\frac{1}{e}, 4 - \frac{1}{e}\right)$.



3. Sea r la recta que pasa por los puntos $(0, 1, 3)$ y $(1, 1, 1)$ y $s: \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Estudia su posición relativa.

b) Es s paralela al plano YZ ? ¿Está contenida en dicho plano?

c) Calcula la distancia de la recta r al plano $\pi: 2x + z = 0$.

a) Hallamos un vector director y la ecuación de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 1, 1) - (0, 1, 3) = (1, 0, -2) \\ P_r(1, 1, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

Hallamos un vector director de la recta s .

$$s: \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y = 2z \end{cases} \Rightarrow x + 2z - 2z - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (0, 2, 1) \\ Q_s(1, 0, 0) \in s \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores de ambas rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (0, 2, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 0, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0}{1} \neq \frac{2}{0} \neq \frac{1}{-2}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Hallamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_s, \vec{v}_r, \vec{P_rQ_s}]$.

$$\vec{P_rQ_s} = (1, 0, 0) - (1, 1, 1) = (0, -1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (0, 2, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 0, -2) \\ \vec{P_rQ_s} = (0, -1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_s, \vec{v}_r, \vec{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 1 - 0 + 2 - 0 = 1 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

b) El plano YZ tiene ecuación $x = 0$. Tiene como vector normal $\vec{n} = (1, 0, 0)$.

Para que la recta s sea paralela al plano YZ el vector director de la recta y el normal del plano deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 0, 0) \\ \vec{u}_s = (0, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u}_s = (1, 0, 0)(0, 2, 1) = 0 + 0 + 0 = 0$$

La primera condición se cumple, pero falta comprobar si el punto $Q_s(1, 0, 0)$ de la recta pertenece al plano o no.

$$¿Q_s(1, 0, 0) \in YZ? \Rightarrow \{Plano YZ : x = 0\} \Rightarrow \textcolor{red}{1 = 0?}$$

No es cierta la igualdad y el punto Q_s no pertenece al plano YZ , por lo que la recta s es paralela al plano.

La recta s no está contenida en el plano.

- c) Comprobamos que la recta r es paralela al plano y que tiene sentido hallar la distancia.
Comprobamos que el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x + z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 0, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 0, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (2, 0, 1)(1, 0, -2) = 2 - 2 = 0$$

La recta r es paralela al plano y la distancia de la recta al plano es el valor de la distancia de cualquier punto de la recta, por ejemplo, $P_r(1, 1, 1)$ al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, 1, 1) \in r \\ \pi : 2x + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2+1|}{\sqrt{2^2+0^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

La distancia de la recta r al plano $\pi : 2x + z = 0$ tiene un valor de $\frac{3}{\sqrt{5}}$ unidades.

4. Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0.7$; $P(B) = 0.6$ y $P(A \cup B) = 0.9$

a) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifica la respuesta.

b) Calcula $P(A - B)$ y $P(A/\bar{B})$. (Nota: $\bar{B}$ suceso contrario o complementario de B).

a) Calculamos la probabilidad de la intersección de A y B.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0.7 \\ P(B) = 0.6 \\ P(A \cup B) = 0.9 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.9 = 0.7 + 0.6 - P(A \cap B) \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.4}$$

Para que A y B sean sucesos independientes debe cumplirse: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.4 \\ P(A)P(B) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.4 \neq 0.42 = P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

b) Calculamos $P(A - B) = P(A \cap \bar{B})$.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow 0.7 = 0.4 + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0.3$$

Hemos comprobado que $P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = 0.3$.

Calculamos $P(A/\bar{B})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{1 - P(B)} = \frac{0.3}{1 - 0.6} = 0.75$$

Hemos comprobado que $P(A/\bar{B}) = 0.75$.

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x - y + z = m \\ x + my - 2z = m \end{cases}$$
- b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 0$.

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & m \\ 1 & m & -2 & m \end{pmatrix}.$$

Comprobamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -2 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 0 - 0 - 4 - 3m = -3m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 0}$$

Analizamos dos situaciones diferentes.

CASO 1. $m \neq 0$.

En este caso el determinante de la matriz A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz A/B y el número de incógnitas. Es sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

Triangulamos la matriz ampliada usando el método de Gauss para estudiar el rango de A y A/B con más facilidad.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a \\ 1 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila 3}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ 3 \quad -3 \quad 3 \quad 0 \\ -3 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad -3 \quad 0 \\ 0 \quad -1 \quad 3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{3 \quad -2 \quad 0 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad 3 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

Los rangos de la matriz A y de la matriz A/B son iguales a 2. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $m \neq 0$ el sistema es **compatible determinado** y para $m = 0$ el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Si $m = 0$ el sistema es compatible indeterminado.

Buscamos las soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{3 \quad -2 \quad 0 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad 3 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \\ 3z = y \end{array} \right\} \Rightarrow 3x - 2(3z) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 6z \Rightarrow x = 2z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $x = 2\lambda$; $y = 3\lambda$; $z = \lambda$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Dada la función $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

- Estudia, en $x=0$, la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.
- Determina los puntos de la gráfica de $f(x)$ donde la recta tangente es paralela a la recta $x-4y=0$ y determina las ecuaciones de dichas rectas tangentes.
- Calcula $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

a) Obtenemos la expresión de la función como una función a trozos.

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad de la función en $x=0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{0}{1+0} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+x} = \frac{0}{1+0} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1-x} = \frac{0}{1-0} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$$

La función es continua en $x=0$.

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1 \cdot (1-x) - (-1) \cdot x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 \cdot (1+x) - 1 \cdot x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1+x)^2} = 1 \\ f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(1-x)^2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^+) = f'(0^-) = 1$$

La función es derivable en $x=0$.

b) Averiguamos la pendiente de la recta $x-4y=0$.

$$x-4y=0 \Rightarrow 4y=x \Rightarrow y=\frac{1}{4}x \Rightarrow \text{pendiente} = \frac{1}{4}$$

Como la pendiente de la recta tangente en $x = a$ es el valor de $f'(a)$, debemos buscar un valor “a” para el que se cumpla $f'(a) = \frac{1}{4}$.

$$f'(a) = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{(1-a)^2} = \frac{1}{4} \rightarrow (1-a)^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} 1-a = 2 \rightarrow \boxed{a = -1} \\ 1-a = -2 \rightarrow a = 3 \notin (-\infty, 0) \end{cases} \\ \frac{1}{(1+a)^2} = \frac{1}{4} \rightarrow (1+a)^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} 1+a = 2 \rightarrow \boxed{a = 1} \\ 1+a = -2 \rightarrow a = -3 \notin (0, +\infty) \end{cases} \end{cases}$$

Determinamos la recta tangente en $x = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2} \\ f'(-1) = \frac{1}{4} \\ y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \end{array} \right\} \Rightarrow y + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x+1) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}$$

Determinamos la recta tangente en $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ f'(1) = \frac{1}{4} \\ y - f(1) = f'(1)(x-1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}}$$

c) La función entre -1 y 0 tiene la expresión $f(x) = \frac{x}{1-x}$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{x}{1-x} dx = \int \frac{x-1+1}{1-x} dx = \int \frac{x-1}{1-x} dx + \int \frac{1}{1-x} dx = \\ &= -\int \frac{1-x}{1-x} dx - \int \frac{-1}{1-x} dx = -\int dx - \int \frac{-1}{1-x} dx = -x - \ln(1-x) + C \end{aligned}$$

Calculamos la integral definida.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 \frac{x}{1-x} dx = \left[-x - \ln(1-x) \right]_{-1}^0 = \\ &= \left[-0 - \ln(1-0) \right] - \left[-(-1) - \ln(1-(-1)) \right] = \boxed{-1 + \ln 2} \end{aligned}$$

3. Dados los planos $\alpha : 2x - 2y + 4z - 7 = 0$; $\beta : \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases}$ y la recta $r : \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

- a) Estudia la posición relativa de los planos α y β . Calcula la distancia entre ellos.
 b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a α y contiene a la recta r .
 c) Sean P y Q los puntos de intersección de la recta r con los planos XY e YZ respectivamente.
 Calcula la distancia entre P y Q .

- a) Obtenemos el vector normal de cada uno de los planos.

$$\alpha : 2x - 2y + 4z - 7 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, -2, 4)$$

$$\beta : \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = (-1, 1, 1) \\ \vec{v} = (3, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -i + 3j - k - 3k - j - i = -2i + 2j - 4k = (-2, 2, -4)$$

Los vectores normales tienen coordenadas proporcionales y los planos son paralelos o coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (2, -2, 4) \\ \vec{n}' = (-2, 2, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{-2} = \frac{-2}{2} = \frac{4}{-4}$$

Hallamos un punto del plano β y comprobamos si pertenece al plano α .

$$\beta : \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow P(1, 5, 4) \in \beta$$

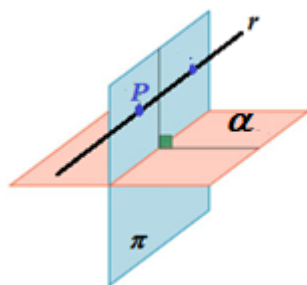
$$\left. \begin{array}{l} \alpha : 2x - 2y + 4z - 7 = 0 \\ \text{¿} P(1, 5, 4) \in \alpha? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 1 - 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 - 7 = 0? \Rightarrow \text{¿} 2 - 10 + 16 - 7 = 1 \neq 0?$$

La igualdad no es cierta y los planos α y β son paralelos.

La distancia entre los planos paralelos es la distancia de un punto del plano β , por ejemplo $P(1, 5, 4)$ al plano α .

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 5, 4) \in \beta \\ \alpha : 2x - 2y + 4z - 7 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(\alpha, \beta) = d(P, \alpha) = \frac{|2 - 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \text{ unidades}$$

- b) El plano π perpendicular a α y que contiene a r contiene un punto P de la recta y tiene como vectores directores el vector director de la recta y el normal del plano.



Hallamos un punto y un vector director de la recta r .

$$r: \begin{cases} x+2z-3=0 \\ y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-2z \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=5 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(3,5,0) \in r \\ \vec{v}_r = (-2,0,1) \end{cases}$$

Determinamos la ecuación del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (2, -2, 4) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (-2, 0, 1) \\ P(3, 5, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x+6-8y+40-4z-2y+10=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x-10y-4z+56=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+5y+2z-28=0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: x+5y+2z-28=0$.

c) Hallamos los puntos P y Q intersección de la recta r con los planos XY e YZ .

$$r: \begin{cases} x+2z-3=0 \\ y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow P(3,5,0)$$

Plano $XY \rightarrow z=0$

$$r: \begin{cases} x+2z-3=0 \\ y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z-3=0 \\ y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\frac{3}{2} \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow Q\left(0,5,\frac{3}{2}\right)$$

Plano $YZ \rightarrow x=0$

Los puntos tienen coordenadas $P(3,5,0)$ y $Q\left(0,5,\frac{3}{2}\right)$.

La distancia entre ellos es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \left(0,5,\frac{3}{2}\right) - (3,5,0) = \left(-3,0,\frac{3}{2}\right)$$

$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ unidades}}$$

4. Las ventas totales diarias en un restaurante pequeño son una variable que sigue una distribución normal de media 1220 € al día y desviación típica 120 € al día.
- a) Calcula la probabilidad de que en un día elegido al azar las ventas superen los 1400€.
- b) Si el restaurante debe vender al menos 980 € al día para cubrir gastos, ¿cuál es la probabilidad de que en un día elegido al azar el restaurante no cubra gastos?

X = ventas totales diarias en un restaurante pequeño. $X = N(1220, 120)$

- a) Nos piden calcular $P(X > 1400)$.

$$\begin{aligned}
 P(X > 1400) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{1400 - 1220}{120}\right) = P(Z > 1.5) = \\
 &= 1 - P(Z \leq 1.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9332 = \boxed{0.0668}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que en un día elegido al azar las ventas superen los 1400€ tiene un valor de 0.0668.

- b) Debemos hallar $P(X < 980)$.

$$\begin{aligned}
 P(X < 980) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{980 - 1220}{120}\right) = P(Z < -2) = \\
 &= P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que en un día elegido al azar el restaurante no cubra gastos es de 0.0228.

ABAU Junio 2017



**Proba de Avaliación do
Bacharelato
para o Acceso á Universidade
XUÑO 2017**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

*(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción:
exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)*

OPCIÓN A

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

a) Determina, según los valores de k , el rango de la matriz $AA^t - \lambda I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A e I la matriz unidad de orden 2.

b) Determina la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación matricial $AA^t X = 6X$.

2. a) Calcula: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos 2x}$

b) Se desea construir una caja de base cuadrada, con tapa y con capacidad de 80 dm^3 . Para la tapa y la superficie lateral se quiere utilizar un material que cuesta 2 €/dm^2 y para la base otro que cuesta 3 €/dm^2 . Calcula las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

c) Calcula $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$.

3. Dados los planos $\pi_1 : x + y - z + 2 = 0$; $\pi_2 : \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de π_1 y π_2 . Si se cortan, calcula el ángulo que forman.

b) Sea r la recta que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y es perpendicular a π_1 . Calcula la intersección de r y π_1 .

c) Calcula el punto simétrico del punto $P(1,1,1)$ con respecto al plano π_1

4. a) En un experimento aleatorio, sean A y B dos eventos con $P(\bar{A}) = 0.4$; $P(B) = 0.7$. Si A y B son independientes, calcula $P(A \cup B)$ y $P(A - B)$. (Nota: $\bar{A}$ suceso contrario o complementario de A).

b) En un grupo de 100 personas hay 40 hombres y 60 mujeres. Se eligen 4 personas al azar del grupo, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar más mujeres que hombres?

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 1$.

2. a) Calcula los valores a, b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ sea derivable en $x = 3$

y determina el punto en el que la tangente de $f(x)$ es paralela a la recta $x + 3y = 0$.

b) Si $P(x)$ es un polinomio de tercer grado, con punto de inflexión en el punto $(0, 5)$ y un extremo relativo en el punto $(1, 1)$, calcula $\int_0^1 P(x) dx$.

3. Sea r la recta que pasa por los puntos $P(1,0,5)$ y $Q(5,2,3)$

a) Calcula la distancia desde el punto $A(5, -1, 6)$ a la recta r .

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a r y pasa por el punto $A(5, -1, 6)$.

c) Calcula el área del triángulo de los vértices de los puntos $P(1,0,5)$, $A(5, -1, 6)$ y el punto de intersección de la recta r con el plano $\pi; 2x + y - z - 3 = 0$.

4. En un estudio realizado en un centro de salud se observó que el 30% de los pacientes son fumadores y de estos, el 60% son hombres. Entre los pacientes que no son fumadores, el 70% son mujeres. Elegido un paciente al azar,

a) Calcular la probabilidad de que el paciente sea mujer.

b) Si el paciente elegido es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que sea fumador?

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

a) Determina, según los valores de k , el rango de la matriz $AA^t - \lambda I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A e I la matriz unidad de orden 2.

b) Determina la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación matricial $AA^t X = 6X$.

a) Determinamos la expresión de la matriz $AA^t - \lambda I$.

$$AA^t - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|AA^t - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 9 = 9 + \lambda^2 - 6\lambda - 9 = \lambda^2 - 6\lambda$$

$$|AA^t - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 6 \end{cases}$$

Analizamos las tres situaciones distintas que se nos plantean.

CASO 1. $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 6$.

En este caso el determinante de $AA^t - \lambda I$ es no nulo y su rango es 2.

CASO 2. $\lambda = 0$.

En este caso el determinante de $AA^t - \lambda I$ es nulo y su rango no es 2. Su rango es 1.

CASO 3. $\lambda = 6$

En este caso el determinante de $AA^t - \lambda I$ es nulo y su rango no es 2. Su rango es 1.

Conclusión: Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 6$ el rango de $AA^t - \lambda I$ es 2 y si $\lambda = 0$ o $\lambda = 6$ el rango es 1.

b) Obtenemos el sistema de ecuaciones correspondiente a la ecuación matricial y lo resolvemos.

$$\begin{aligned} AA^t X = 6X &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 3x+3y \\ 3x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3y=6x \\ 3x+3y=6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2x \\ x+y=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ x=y \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Las matrices solución de la ecuación matricial tienen la expresión $X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$, siendo x cualquier número real.

2. a) Calcula: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos 2x}$

b) Se desea construir una caja de base cuadrada, con tapa y con capacidad de 80 dm³. Para la tapa y la superficie lateral se quiere utilizar un material que cuesta 2 €/dm² y para la base otro que cuesta 3 €/dm². Calcula las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

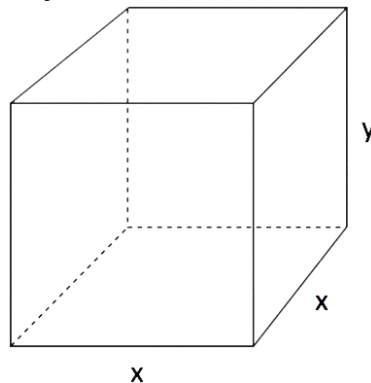
c) Calcula $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos 2x} = \frac{\sin^2 0 - 3 \cdot 0^2}{e^{0^2} - \cos(0)} = \frac{0-0}{1-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación(L'Hôpital)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - 6x}{2xe^{x^2} + 2 \sin 2x} = \frac{2 \sin 0 \cdot \cos 0 - 6 \cdot 0}{2 \cdot 0 e^{0^2} + 2 \sin(0)} = \frac{0-0}{0+0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación(L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \cos x + 2 \sin x (-\sin x) - 6}{2e^{x^2} + 2x(2x)e^{x^2} + 4 \cos 2x} = \frac{2 \cos 0 \cdot \cos 0 + 2 \sin 0 (-\sin 0) - 6}{2e^{0^2} + 0(0)e^{0^2} + 4 \cos(0)} = \frac{2-6}{2+4} = \boxed{\frac{-2}{3}}$$

b) La caja tiene las dimensiones del dibujo inferior.



El volumen es el producto del área de la base por la altura: $V(x, y) = x^2 y$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Volumen} = 80 \\ V(x, y) = x^2 y \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 y = 80 \Rightarrow y = \frac{80}{x^2}.$$

Calculamos la superficie de la tapa superior más los laterales.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Superficie} = x^2 + 4xy \\ y = \frac{80}{x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow S(x) = x^2 + 4x \frac{80}{x^2} = x^2 + \frac{320}{x}$$

El coste de esta superficie es $C_1(x) = 2 \cdot S(x) = 2 \left(x^2 + \frac{320}{x} \right) = 2x^2 + \frac{640}{x}$

El coste de la base es $C_2(x) = 3x^2$.

El coste total de la caja es $C(x) = C_1(x) + C_2(x) = 2x^2 + \frac{640}{x} + 3x^2 = 5x^2 + \frac{640}{x}$.

Derivamos esta función y buscamos su mínimo.

$$C(x) = 5x^2 + \frac{640}{x} = 5x^2 + 640x^{-1} \Rightarrow C'(x) = 10x - 640x^{-2} = 10x - \frac{640}{x^2}$$

Iguamos a cero.

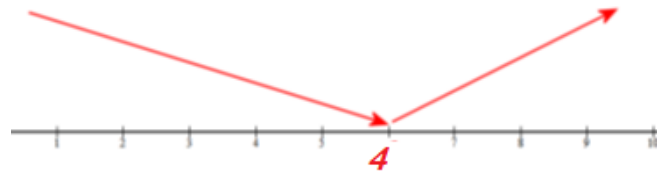
$$C'(x) = 0 \Rightarrow 10x - \frac{640}{x^2} = 0 \Rightarrow 10x = \frac{640}{x^2} \Rightarrow 10x^3 = 640 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{640}{10} = 64 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{64} = 4}$$

Comprobemos si $x = 4$ es un mínimo relativo.

- En $(0, 4)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $C'(1) = 10 - \frac{640}{1^2} = -630 < 0$. La función decrece en $(0, 4)$.
- En $(4, +\infty)$ tomo $x = 5$ y la derivada vale $C'(5) = 10 - \frac{640}{5^2} = 24.4 > 0$. La función crece en $(4, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La superficie tiene un mínimo en $x = 4 \rightarrow y = \frac{80}{4^2} = 5$.

La caja de base cuadrada de volumen 80 dm^3 con menor coste tiene 4 dm en el lado del cuadrado de la base y 5 dm de altura.

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int x \ln(x+1) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x+1) \rightarrow du = \frac{1}{x+1} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+1} dx = \boxed{\begin{array}{cc} x^2 & |x+1| \\ -x^2 - x & x-1 \\ \hline -x & \\ x+1 & \\ \hline 1 & \end{array}} = \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int x-1 + \frac{1}{x+1} dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \left[\int x-1 dx + \int \frac{1}{x+1} dx \right] = \\
 &= \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right] = \boxed{\frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(x+1) + C}
 \end{aligned}$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x \ln(1+x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(x+1) \right]_0^1 = \\
 &= \left[\frac{1^2}{2} \ln(1+1) - \frac{1^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+1) \right] - \left[\frac{0^2}{2} \ln(0+1) - \frac{0^2}{4} + 0 - \ln(0+1) \right] = \\
 &= \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

3. Dados los planos $\pi_1 : x + y - z + 2 = 0$; $\pi_2 : \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

- a) Estudia la posición relativa de π_1 y π_2 . Si se cortan, calcula el ángulo que forman.
 b) Sea r la recta que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y es perpendicular a π_1 . Calcula la intersección de r y π_1 .
 c) Calcula el punto simétrico del punto $P(1,1,1)$ con respecto al plano π_1

a) Hallamos un vector normal de cada plano.

$$\pi_1 : x + y - z + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = (1, 1, -1) \\ P_1(0, 0, 2) \end{cases}$$

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_2 = (1, 1, -1) \\ \vec{v}_2 = (1, 3, -1) \\ Q_2(2, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2 = \vec{u}_2 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -i - j + 3k - k + j + 3i = 2i = (2, 0, 2)$$

Los vectores normales no tienen coordenadas proporcionales. Los planos no son ni paralelos ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1, 1, -1) \\ \vec{n}_2 = (2, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{-1}{2}$$

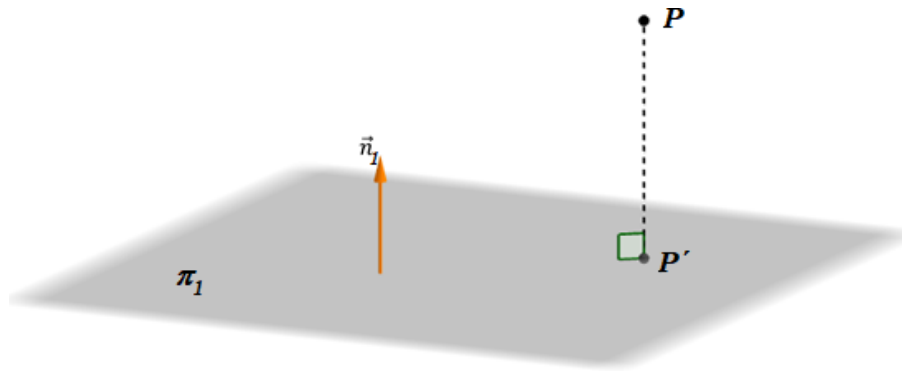
Los planos se cortan. Determinamos el ángulo que forman. Lo hallamos usando el producto escalar, aunque podemos afirmar que forman 90° pues $\vec{u}_2 = (1, 1, -1)$ es un vector director de π_2 y el vector normal del plano π_1 .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1, 1, -1) \\ \vec{n}_2 = (2, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\pi_1, \pi_2) = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{(1, 1, -1) \cdot (2, 0, 2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2}} =$$

$$= \frac{2-2}{\sqrt{3}\sqrt{8}} = 0 \Rightarrow (\pi_1, \pi_2) = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

Los planos π_1 y π_2 forman un ángulo de 90° .

b) Nos piden hallar el punto P' del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = \vec{n}_1 = (1, 1, -1) \\ P(1, 1, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$$

El punto P' es el punto de corte de r y π_1 .

$$\left. \begin{array}{l} r : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \\ \pi_1 : x + y - z + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \alpha + 1 + \alpha - 1 + \alpha + 2 = 0 \Rightarrow 3\alpha = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-3}{3} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow P'(0, 0, 2)$$

La intersección de r y π_1 es el punto $P'(0, 0, 2)$.

- c) El punto Q simétrico del punto $P(1, 1, 1)$ con respecto al plano π_1 se obtiene sumando al punto P' el vector $\overrightarrow{PP'}$.

$$\overrightarrow{PP'} = (0, 0, 2) - (1, 1, 1) = (-1, -1, 1)$$

$$Q = P' + \overrightarrow{PP'} = (0, 0, 2) + (-1, -1, 1) = (-1, -1, 3)$$

El punto Q simétrico del punto $P(1, 1, 1)$ con respecto al plano π_1 tiene coordenadas $Q(-1, -1, 3)$.

4. a) En un experimento aleatorio, sean A y B dos eventos con $P(\bar{A}) = 0.4$; $P(B) = 0.7$. Si A y B son independientes, calcula $P(A \cup B)$ y $P(A - B)$. (Nota: $\bar{A}$ suceso contrario o complementario de A).
- b) En un grupo de 100 personas hay 40 hombres y 60 mujeres. Se eligen 4 personas al azar del grupo, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar más mujeres que hombres?

a) Si $P(\bar{A}) = 0.4$ entonces $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.4 = 0.6$.

Si A y B son independientes se cumple que $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42$.

Calculamos $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.7 - 0.42 = \boxed{0.88}$$

Calculamos $P(A - B)$.

$$P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.42 = \boxed{0.18}$$

b) Llamamos X a la variable que cuenta el número de mujeres en un grupo de 4 personas. Esta variable es una binomial donde $n = 4$ y $p = 60/100 = 0.6$. $X = B(4, 0.6)$.

Para que haya más mujeres que hombres deben ser 3 o 4 mujeres en el grupo de 4.

Nos piden calcular $P(X \geq 3)$.

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} 0.6^3 \cdot 0.4^1 + \binom{4}{4} 0.6^4 \cdot 0.4^0 =$$

$$= 4 \cdot 0.6^3 \cdot 0.4 + 0.6^4 = \boxed{0.4752}$$

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x \quad \quad - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$
- b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 1$.

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz A tiene las columnas primera y tercera proporcionales, por lo que su determinante es nulo y su rango es menor de 3.

Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna terceras $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0. \text{ El rango de } A \text{ siempre es } 2, \text{ independientemente del valor de } m.$$

Estudiamos el rango de $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Como tiene la columna primera y tercera

proporcionales consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna tercera y averiguamos cuando se anula.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2m + 1 - 0 - 2 - m = m - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

Analizamos dos situaciones diferentes.

CASO 1. $m \neq 1$.

En este caso el determinante del menor es no nulo y el rango de A/B es 3. A y A/B tiene rangos distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución)

CASO 2. $m = 1$

En este caso el determinante del menor de orden 3 de A/B es nulo y su rango es menor de 3.

El rango de A y de A/B son iguales a 2, y menores que el número de incógnitas (3).

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $m \neq 1$ el sistema es **incompatible** y para $m = 1$ el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Si $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x & -z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ x & =z+1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z+1+2y-z=1 \\ z+1+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y=0 \\ \boxed{y=0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=0 \\ z=\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

Las soluciones del sistema son $x=1+\alpha$; $y=0$; $z=\alpha$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. a) Calcula los valores a, b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ sea derivable en $x=3$ y determina el punto en el que la tangente de $f(x)$ es paralela a la recta $x+3y=0$.
- b) Si $P(x)$ es un polinomio de tercer grado, con punto de inflexión en el punto $(0, 5)$ y un extremo relativo en el punto $(1, 1)$, calcula $\int_0^1 P(x) dx$.

a) Para que la función sea derivable en $x=3$ debe ser continua.

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= \ln(3-2) = \ln 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} ax^2 + b = 9a + b \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x-2) = 0 \\ f(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 9a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -9a}$$

La derivada de la función en $\mathbb{R} - \{3\}$ es $f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x < 3 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

Para que la función sea derivable en $x=3$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(3^-) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2ax = 6a \\ f'(3^+) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-2} = 1 \\ f'(3^-) &= f'(3^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{6}}$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación obtenida.

$$b = -9 \frac{1}{6} = \frac{-3}{2}$$

Los valores buscados son $a = \frac{1}{6}; b = \frac{-3}{2}$.

- b) Tenemos que $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con punto de inflexión en el punto $(0, 5)$, lo que significa que $P(0) = 5$ y que $P''(0) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ P(0) &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \Rightarrow \boxed{d = 5}$$

$$\left. \begin{aligned} P'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow P''(x) = 6ax + 2b \\ P''(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 6a \cdot 0 + 2b \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

Nuestro polinomio queda $P(x) = ax^3 + cx + 5$. Tiene un extremo relativo en el punto $(1, 1)$ lo que significa que $P(1) = 1$ y que $P'(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = ax^3 + cx + 5 \\ P(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a \cdot 1^3 + c \cdot 1 + 5 \Rightarrow \boxed{a + c = -4}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = ax^3 + cx + 5 \rightarrow P'(x) = 3ax^2 + c \\ P'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 1^2 + c \Rightarrow \boxed{3a + c = 0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a + c = -4 \\ 3a + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + c = -4 \\ c = -3a \end{array} \right\} \Rightarrow a - 3a = -4 \Rightarrow -2a = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{-4}{-2} = 2} \Rightarrow \boxed{c = -3(2) = -6}$$

El polinomio queda $P(x) = 2x^3 - 6x + 5$.

Calculamos $\int_0^1 P(x) dx$.

$$\int_0^1 P(x) dx = \int_0^1 2x^3 - 6x + 5 dx = \left[2 \frac{x^4}{4} - 6 \frac{x^2}{2} + 5x \right]_0^1 = \left[\frac{x^4}{2} - 3x^2 + 5x \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1^4}{2} - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 \right] - \left[\frac{0^4}{2} - 3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 \right] = \frac{1}{2} - 3 + 5 = \boxed{\frac{5}{2}}$$

3. Sea r la recta que pasa por los puntos $P(1,0,5)$ y $Q(5,2,3)$

- Calcula la distancia desde el punto $A(5, -1, 6)$ a la recta r .
- Calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a r y pasa por el punto $A(5, -1, 6)$.
- Calcula el área del triángulo de los vértices de los puntos $P(1,0,5)$, $A(5, -1, 6)$ y el punto de intersección de la recta r con el plano $\pi; 2x + y - z - 3 = 0$.

a) La recta r tiene como vector director $\vec{v}_r = \overrightarrow{PQ}$.

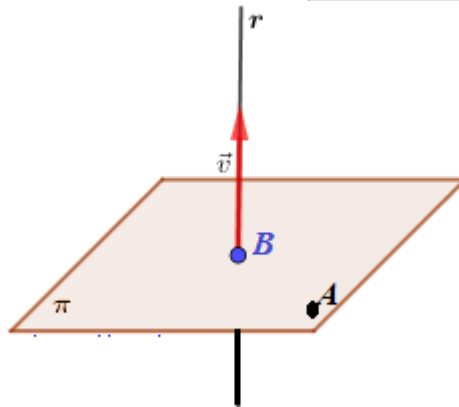
Hallamos la ecuación de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (5, 2, 3) - (1, 0, 5) = (4, 2, -2) \\ P(1, 0, 5) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

Hallamos la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto A. Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (4, 2, -2) \\ A(5, -1, 6) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 4x + 2y - 2z + D = 0 \\ A(5, -1, 6) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 20 - 2 - 12 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -6 \Rightarrow \pi: 4x + 2y - 2z - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + y - z - 3 = 0}$$



Hallamos el punto B de corte entre recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y - z - 3 = 0 \\ r: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 4\lambda) + 2\lambda - (5 - 2\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 8\lambda + 2\lambda - 5 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow 12\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3 \\ y = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ z = 5 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow B(3, 1, 4)$$

La distancia del punto A a la recta r es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (3, 1, 4) - (5, -1, 6) = (-2, 2, -2)$$

$$d(A, r) = d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = \boxed{2\sqrt{3}}$$

La distancia desde el punto $A(5, -1, 6)$ a la recta r tiene un valor de $2\sqrt{3}$ unidades.

b) Lo hemos hallado en el apartado anterior. El plano tiene ecuación $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$.

c) El punto de intersección de la recta r con el plano $\pi; 2x + y - z - 3 = 0$ es el punto B calculado en el apartado a) y que tiene coordenadas $B(3, 1, 4)$.

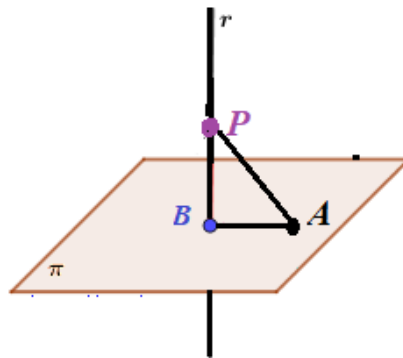
El triángulo PAB tiene un área que calculamos como la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PA} = (5, -1, 6) - (1, 0.5) = (4, -1, 1) \\ \overrightarrow{PB} = (3, 1, 4) - (1, 0.5) = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= i + 2j + 4k + 2k + 4j - i = 6j + 6k = (0, 6, 6)$$

$$\text{Área PAB} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 6^2 + 6^2}}{2} = \frac{\sqrt{72}}{2} = \boxed{3\sqrt{2} \text{ u}^2}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO c)



Como el triángulo PAB es rectángulo en el vértice B podemos hallar el área como la mitad de la base ($|\overrightarrow{AB}|$) por la altura ($|\overrightarrow{PB}|$).

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3, 1, 4) - (5, -1, 6) = (-2, 2, -2) \\ \overrightarrow{PB} = (3, 1, 4) - (1, 0.5) = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Base} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} \\ \text{Altura} = |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Área PAB} = \frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{6}}{2} = \boxed{3\sqrt{2} \text{ u}^2}$$

- 4.** En un estudio realizado en un centro de salud se observó que el 30% de los pacientes son fumadores y de estos, el 60% son hombres. Entre los pacientes que no son fumadores, el 70% son mujeres. Elegido un paciente al azar,
- a) Calcular la probabilidad de que el paciente sea mujer.
- b) Si el paciente elegido es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que sea fumador?

Supongamos que hay 100 pacientes. Como el 30% de los pacientes son fumadores tenemos que 30 serían fumadores. De estos el 60 % son hombres, es decir, $0.6 \cdot 30 = 18$ de los fumadores son hombres. Por lo que $30 - 18 = 12$ de los fumadores son mujeres. Entre los pacientes que no son fumadores ($100 - 30 = 70$ pacientes), el 70% son mujeres, es decir, $0.7 \cdot 70 = 49$ son mujeres no fumadoras. Por lo que $70 - 49 = 21$ son hombres no fumadores. Reunimos todos estos datos en una tabla.

	Hombres	Mujeres	
Fumadores	18	12	30
No fumadores	21	49	70
TOTALES			100

Completamos la tabla.

	Hombres	Mujeres	
Fumadores	18	12	30
No fumadores	21	49	70
TOTALES	39	61	100

- a) De los 100 pacientes 61 son mujeres, por lo que aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que el paciente elegido al azar sea mujer es de $\frac{61}{100} = 0.61$.
- b) De los 39 hombres hay 18 que son fumadores, por lo que aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que al elegir un hombre este sea fumador es de $\frac{18}{39} \approx 0.4615$.