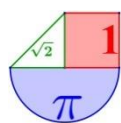


Matemáticas II

PAU en La Rioja Años 2017 a 2026



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM
WWW.MATEMATICASPAU.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad de La Rioja del año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU Extraordinaria 2026.....	3
PAU Ordinaria 2026.....	23
PAU Extraordinaria 2025.....	36
PAU Ordinaria 2025.....	48
EBAU Extraordinaria 2024.....	65
EBAU Ordinaria 2024.....	81
EBAU Extraordinaria 2023.....	96
EBAU Ordinaria 2023.....	110
EBAU Extraordinaria 2022.....	125
EBAU Ordinaria 2022.....	141
EBAU Extraordinaria 2021.....	155
EBAU Ordinaria 2021.....	172
EBAU Extraordinaria 2020.....	187
EBAU Ordinaria 2020.....	203
EBAU Julio 2019.....	218
EBAU Junio 2019.....	230
EBAU Julio 2018.....	241
EBAU Junio 2018.....	252
EBAU Julio 2017.....	263
EBAU Junio 2017.....	273

PAU Extraordinaria 2026



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2025-2026
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El examen consta de cinco preguntas, las tres primeras obligatorias. Las dos últimas preguntas tienen opcionalidad interna.

Cada pregunta se puntúa con 2 puntos.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras que aparecen en el listado publicado en la web de la Universidad de La Rioja. No se permite el préstamo de materiales (ni bolígrafos, ni tñpex, ni materiales auxiliares) entre el alumnado, durante el examen.

PARTE A (Contesta TODAS las preguntas de esta parte. Preguntas 1, 2 y 3.)

Pregunta 1.

En una prueba de diagnóstico médico se hace la medición de cierto índice que sigue una distribución normal. Los índices tipificados de dos individuos fueron 0.6 y -0.8 y sus índices reales son 109 y 88, respectivamente.

Calcula:

- a) la media y desviación típica del índice analizado. [1 punto]
- b) entre que valores simétricos respecto a la media está el índice del 80% de los individuos de dicho estudio. [1 punto]

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Pregunta 2.

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

En Semana Santa, dos pasos salen en procesión por dos calles perpendiculares. El primer paso sale de la iglesia A a 3 km/h y el segundo sale a la misma hora de la iglesia B a 2.8 km/h, ambos en sentido al mismo cruce de las calles. La distancia de la iglesia A hasta el cruce es de 2.2 km y desde la iglesia B hasta el cruce, de 2 km.

- a) Determina en qué momento la distancia entre los dos pasos es mínima. [1.75 puntos]
- b) Determina la distancia mínima. [0.25 puntos]

Pregunta 3

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

- a) Dos productos A y B compiten en el mercado. Sus demandas x_a y x_b están relacionadas con sus precios, p_a y p_b , por las siguientes ecuaciones de demanda:

$$x_a = 17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b, \quad x_b = 20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a.$$

Las ecuaciones de oferta son:

$$p_a = 2 + x_a + \frac{1}{3}x_b, \quad p_b = 2 + \frac{1}{2}x_b + \frac{1}{4}x_a$$

que dan los precios a los cuales las cantidades x_a y x_b estarán disponibles en el mercado.

Calcula los valores de equilibrio de x_a , x_b , p_a y p_b que resuelven el sistema planteado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3 \\ -1 & -1/3 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ p_a \\ p_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[1 punto]

b) Dada la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula $A = I_4 - X(X^t X)^{-1} X^t$ y comprueba que es idempotente, es decir, que $A^2 = A$.

[1 punto]

PARTE B (preguntas 4 y 5.)

Pregunta 4. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1 Halla el área total de la figura limitada por $y = x^3$, $y = 2x$ e $y = x$. [2 puntos]

4.2 a) Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Determinar todas las ecuaciones de las rectas tangentes

horizontales a la gráfica de la función f . [1 punto]

b) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, estudia la continuidad de f , en función de a, b , para todos los puntos de $\mathbb{R}$ de la siguiente función: [1 punto]

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax+b}, & \text{si } x < 1, \\ e, & \text{si } x = 1 \\ e - ax + 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Pregunta 5. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Sean la recta $r: \frac{x}{3} = y = \frac{z-11}{-1}$ y el punto $P \equiv (0, 1, 1)$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r . [1 punto]

b) Halla la distancia de P a la recta r . [1 punto]

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Determina los valores de a para que los planos de ecuaciones:

$$\begin{cases} \pi_1: x + y + z = 1 \\ \pi_2: (a-1)x + y + z = a \\ \pi_3: x + (a-1)y - z = 0 \end{cases}$$

a) se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte. [1 punto]

b) se corten en una recta. En este caso, determina la recta en su forma paramétrica. [1 punto]

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

Soluciones

Pregunta 1.

En una prueba de diagnóstico médico se hace la medición de cierto índice que sigue una distribución normal. Los índices tipificados de dos individuos fueron 0.6 y -0.8 y sus índices reales son 109 y 88, respectivamente.

Calcula:

- a) la media y desviación típica del índice analizado. [1 punto]
 b) entre que valores simétricos respecto a la media está el índice del 80% de los individuos de dicho estudio. [1 punto]
 (Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

a) Sea X la variable aleatoria que nos ofrece la medición de cierto índice. $X = N(\mu, \sigma)$.

$$\left. \begin{array}{l} Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \\ X = 109 \\ Z = 0.6 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.6 = \frac{109 - \mu}{\sigma} \Rightarrow 0.6\sigma = 109 - \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 109 - 0.6\sigma}$$

$$\left. \begin{array}{l} Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \\ X = 88 \\ Z = -0.8 \end{array} \right\} \Rightarrow -0.8 = \frac{88 - \mu}{\sigma} \Rightarrow -0.8\sigma = 88 - \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 88 + 0.8\sigma}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu = 109 - 0.6\sigma \\ \mu = 88 + 0.8\sigma \end{array} \right\} \Rightarrow 88 + 0.8\sigma = 109 - 0.6\sigma \Rightarrow 1.4\sigma = 21 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{21}{1.4} = 15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = 109 - 0.6 \cdot 15 = 100}$$

La media es 100 y la desviación típica es 15.

b) Nos piden hallar “a” tal que $P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0.8$.

$$P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0.8 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 100}{15} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{100 - a - 100}{15} \leq Z \leq \frac{100 + a - 100}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow P\left(\frac{-a}{15} \leq Z \leq \frac{a}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - P\left(Z \leq -\frac{a}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - P\left(Z \geq \frac{a}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right)\right] = 0.8 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - 1 = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) = 1.8 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) = \frac{1.8}{2} = 0.9 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{15} = 1.28 \Rightarrow \boxed{a = 1.28 \cdot 15 = 19.2}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997

El intervalo buscado es $(100 - 19.2, 100 + 19.2) = (80.8, 119.2)$.

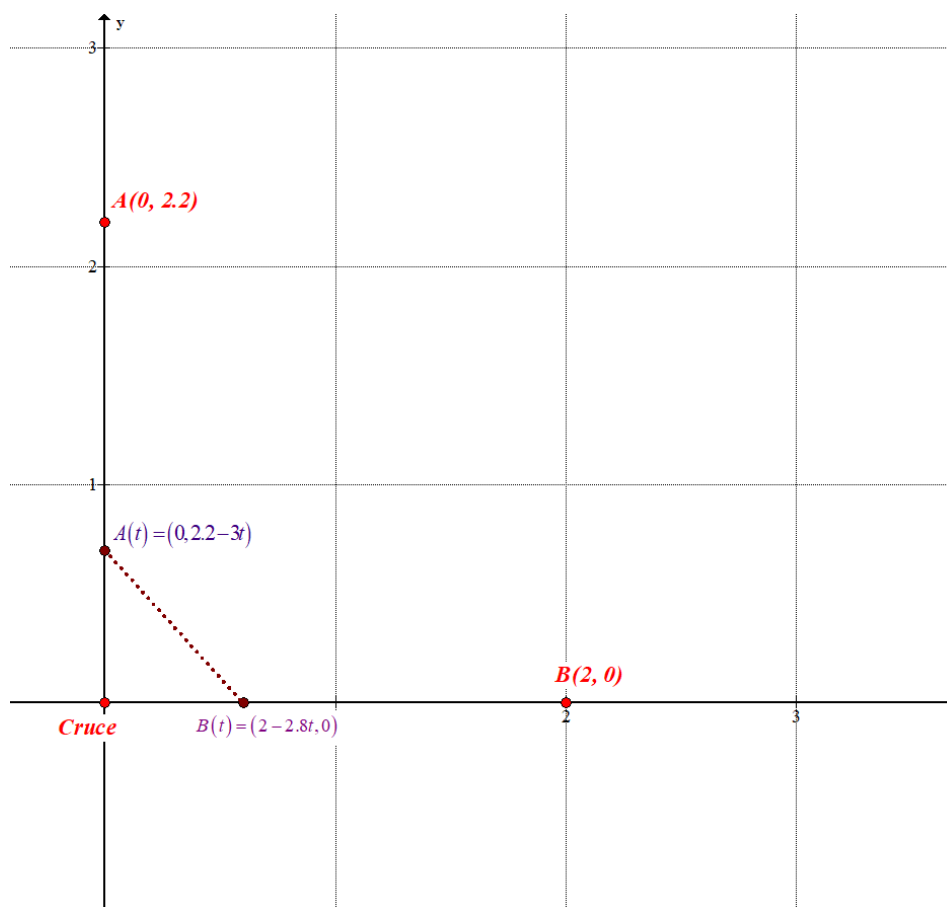
Pregunta 2.**Contesta justificadamente los siguientes apartados:**

En Semana Santa, dos pasos salen en procesión por dos calles perpendiculares. El primer paso sale de la iglesia A a 3 km/h y el segundo sale a la misma hora de la iglesia B a 2.8 km/h, ambos en sentido al mismo cruce de las calles. La distancia de la iglesia A hasta el cruce es de 2.2 km y desde la iglesia B hasta el cruce, de 2 km.

a) Determina en qué momento la distancia entre los dos pasos es mínima. [1.75 puntos]

b) Determina la distancia mínima. [0.25 puntos]

a) Hacemos un dibujo de la situación planteada situándola en unos ejes de coordenadas donde el cruce de las calles está situado en el origen de coordenadas.



Desde la iglesia A la procesión avanza a razón de 3 km/h, por lo que conforme pasen t horas la procesión se encuentra en el punto $A(t) = (0, 2.2 - 3t)$.

Desde la iglesia B la procesión avanza a razón de 2.8 km/h, por lo que conforme pasen t horas la procesión se encuentra en el punto $B(t) = (2 - 2.8t, 0)$.

La distancia entre las dos procesiones es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos $2.2 - 3t$ y $2 - 2.8t$.

$$d(t) = \sqrt{(2.2 - 3t)^2 + (2 - 2.8t)^2} = \sqrt{4.84 + 9t^2 - 13.2t + 4 + 7.84t^2 - 11.2t}$$

$$d(t) = \sqrt{16.84t^2 - 24.4t + 8.84}$$

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función distancia.

$$d(t) = \sqrt{16.84t^2 - 24.4t + 8.84} \Rightarrow d'(t) = \frac{33.68t - 24.4}{2\sqrt{16.84t^2 - 24.4t + 8.84}}$$

$$d'(t) = 0 \Rightarrow \frac{33.68t - 24.4}{2\sqrt{16.84t^2 - 24.4t + 8.84}} = 0 \Rightarrow 33.68t - 24.4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 33.68t = 24.4 \Rightarrow t = \frac{24.4}{33.68} \approx 0.7245$$

La función presenta un punto crítico en $t = 0.7245$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- Antes de $t = 0.7245$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale

$$d'(0.5) = \frac{33.68 \cdot 0.5 - 24.4}{2\sqrt{16.84 \cdot 0.5^2 - 24.4 \cdot 0.5 + 8.84}} = \frac{-7.56}{+} < 0. \text{ La función decrece antes de } t = 0.7245.$$

- Después de $t = 0.7245$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale

$$d'(1) = \frac{33.68 \cdot 1 - 24.4}{2\sqrt{16.84 \cdot 1^2 - 24.4 \cdot 1 + 8.84}} = \frac{9.28}{+} > 0. \text{ La función crece después de } t = 0.7245.$$

La función decrece antes y crece después de $t = 0.7245$. La función tiene un mínimo relativo en dicho valor.

La distancia entre las dos procesiones es mínima al cabo de 0.7245 horas, es decir, al cabo de aproximadamente 43 minutos y 28 segundos.

b) Calculamos el valor de la función distancia para $t = 0.7245 \rightarrow d(0.7245)$.

$$d(0.7245) = \sqrt{16.84 \cdot 0.7245^2 - 24.4 \cdot 0.7245 + 8.84} \approx 0.039$$

La distancia mínima entre las dos procesiones es de 39 metros.

Pregunta 3**Contesta justificadamente los siguientes apartados:**

a) Dos productos A y B compiten en el mercado. Sus demandas x_a y x_b están relacionadas con sus precios, p_a y p_b , por las siguientes ecuaciones de demanda:

$$x_a = 17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b, \quad x_b = 20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a.$$

Las ecuaciones de oferta son:

$$p_a = 2 + x_a + \frac{1}{3}x_b, \quad p_b = 2 + \frac{1}{2}x_b + \frac{1}{4}x_a$$

que dan los precios a los cuales las cantidades x_a y x_b estarán disponibles en el mercado.

Calcula los valores de equilibrio de x_a , x_b , p_a y p_b que resuelven el sistema planteado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3 \\ -1 & -1/3 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ p_a \\ p_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad [1 \text{ punto}]$$

b) Dada la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula $A = I_4 - X(X^t X)^{-1} X^t$ y comprueba que es idempotente, es decir, que $A^2 = A$. [1 punto]

a) Resolvemos el sistema asociado a la igualdad matricial dada.

$$\left. \begin{array}{l} x_a = 17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b \\ x_b = 20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a \\ p_a = 2 + x_a + \frac{1}{3}x_b \\ p_b = 2 + \frac{1}{2}x_b + \frac{1}{4}x_a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p_a = 2 + \left(17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b\right) + \frac{1}{3}\left(20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a\right) \\ p_b = 2 + \frac{1}{2}\left(20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a\right) + \frac{1}{4}\left(17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b\right) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3p_a = 6 + 3\left(17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b\right) + \left(20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a\right) \\ 4p_b = 8 + 2\left(20 - 3p_b + \frac{1}{2}p_a\right) + \left(17 - 2p_a + \frac{1}{2}p_b\right) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3p_a = 6 + 51 - 6p_a + 1.5p_b + 20 - 3p_b + 0.5p_a \\ 4p_b = 8 + 40 - 6p_b + p_a + 17 - 2p_a + 0.5p_b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8.5p_a = 77 - 1.5p_b \\ 9.5p_b = 65 - p_a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8.5p_a = 77 - 1.5p_b \\ p_a = 65 - 9.5p_b \end{array} \right\} \Rightarrow 8.5(65 - 9.5p_b) = 77 - 1.5p_b \Rightarrow \frac{1105}{2} - \frac{323}{4}p_b = 77 - 1.5p_b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2210 - 323p_b = 308 - 6p_b \Rightarrow 1902 = 317p_b \Rightarrow \boxed{p_b = \frac{1902}{317} = 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p_a = 65 - 9.5 \cdot 6 = 8} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x_a = 17 - 2 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 4} \\ \boxed{x_b = 20 - 3 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 6} \end{cases}$$

La solución es $x_a = 4$; $x_b = 6$; $p_a = 8$; $p_b = 6$.

b) Obtenemos la expresión de $(X^t X)^{-1}$.

$$X^t X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1+1 & 1+2+1+3 \\ 1+2+1+3 & 1+4+1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}$$

$$|X^t X| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 15 \end{vmatrix} = 60 - 49 = 11 \neq 0$$

$$(X^t X)^{-1} = \frac{\text{Adj}((X^t X)^t)}{|X^t X|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}}{11} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz A.

$$A = I_4 - X (X^t X)^{-1} X^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 15-7 & -7+4 \\ 15-14 & -7+8 \\ 15-7 & -7+4 \\ 15-21 & -7+12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 1 \\ 8 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8-3 & 8-6 & 8-3 & 8-9 \\ 1+1 & 1+2 & 1+1 & 1+3 \\ 8-3 & 8-6 & 8-3 & 8-9 \\ -6+5 & -6+10 & -6+5 & -6+15 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz queda $A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Comprobamos que la matriz A es idempotente: $A^2 = A$.

$$A^2 = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

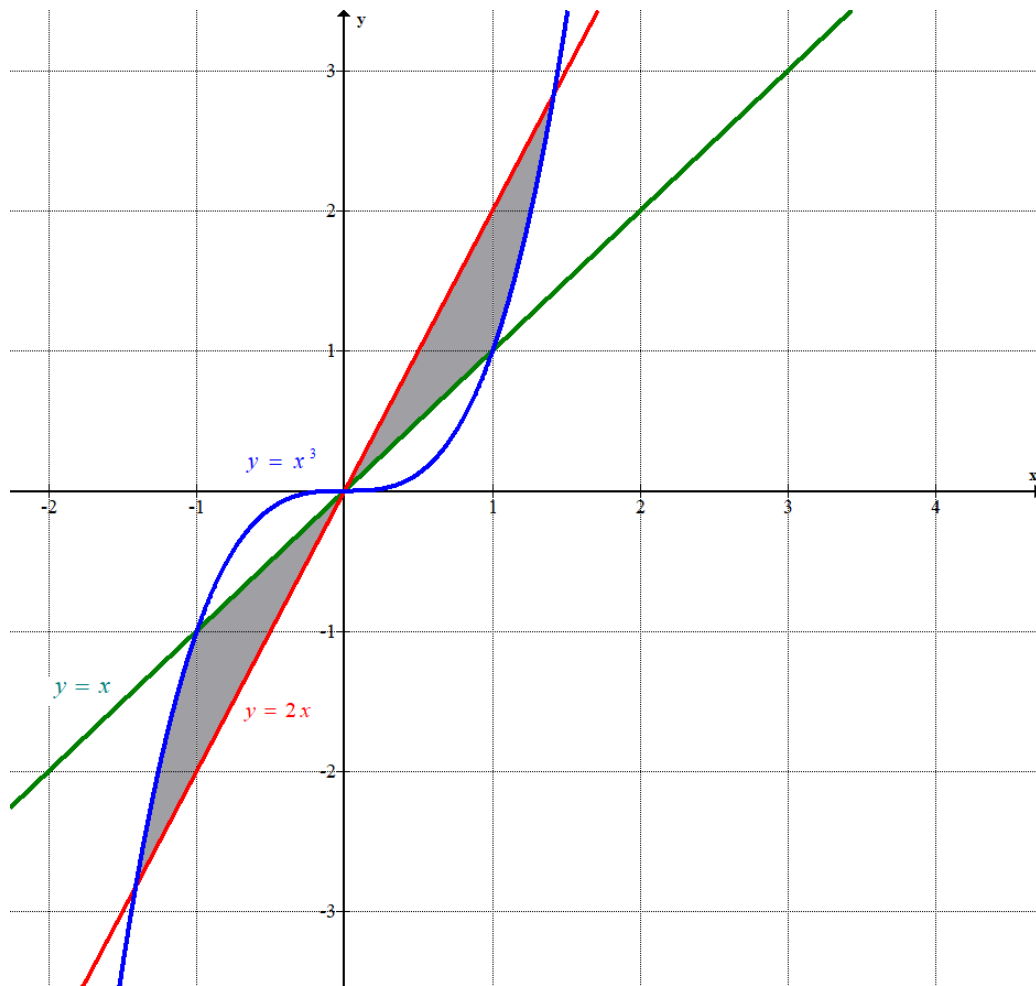
$$= \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 36+4+25+1 & -12-16+10-4 & -30+4-30+1 & 6+8-5+2 \\ -12-16+10-4 & 4+64+4+16 & 10-16-12-4 & -2-32-2-8 \\ -30+4-30+1 & 10-16-12-4 & 25+4+36+1 & -5+8+6+2 \\ 6+8-5+2 & -2-32-2-8 & -5+8+6+2 & 1+16+1+4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 66 & -22 & -55 & 11 \\ -22 & 88 & -22 & -44 \\ -55 & -22 & 66 & 11 \\ 11 & -44 & 11 & 22 \end{pmatrix} = \frac{1}{121} \cdot 11 \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

4.1 Halla el área total de la figura limitada por $y = x^3$, $y = 2x$ e $y = x$. [2 puntos]

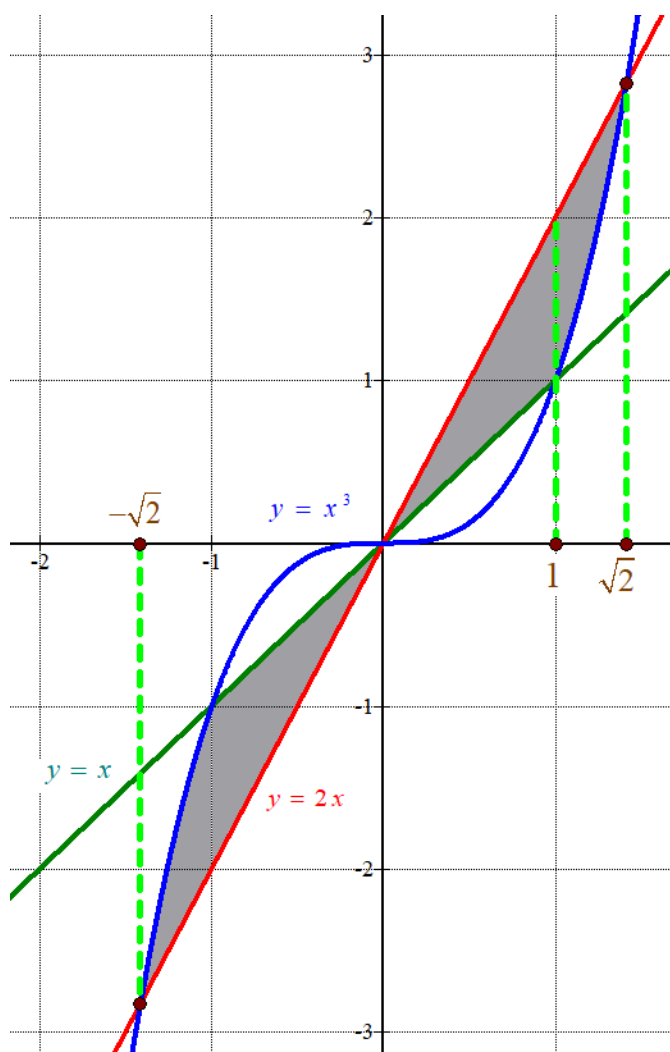
Dibujamos las gráficas de las dos rectas y la curva para establecer la figura de la cual queremos hallar su área.



Hallamos los puntos de corte entre las gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^3 \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x^3 \\ y = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 = 2x \Rightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$



El área de la región delimitada por las tres gráficas es simétrica. Será el doble del área de la región situada en el primer cuadrante. Calculamos esta área como la suma de la integral definida de 0 a 1 de la diferencia entre la recta $y = 2x$ e $y = x$ y la integral definida entre 1 y $\sqrt{2}$ de la diferencia entre la recta $y = 2x$ y la curva $y = x^3$.

$$\int_0^1 2x - x dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x - x^3 dx = \left[x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_1^{\sqrt{2}} = \left[(\sqrt{2})^2 - \frac{(\sqrt{2})^4}{4} \right] - \left[1^2 - \frac{1^4}{4} \right] = 2 - \frac{4}{4} - 1 + \frac{1}{4} = \left[\frac{1}{4} \right]$$

El área total de la figura limitada por $y = x^3$, $y = 2x$ e $y = x$ vale:

$$\text{Área} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ unidades cuadradas}$$

4.2 a) Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Determinar todas las ecuaciones de las rectas tangentes horizontales a la gráfica de la función f . [1 punto]

b) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, estudia la continuidad de f , en función de a, b , para todos los puntos de $\mathbb{R}$ de la siguiente función: [1 punto]

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax+b}, & \text{si } x < 1, \\ e, & \text{si } x = 1 \\ e - ax + 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Para que una recta tangente a la curva en $x = a$ sea horizontal su pendiente debe ser 0, por lo que debe ser $f'(a) = 0$. Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{3}x^2 - 4x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

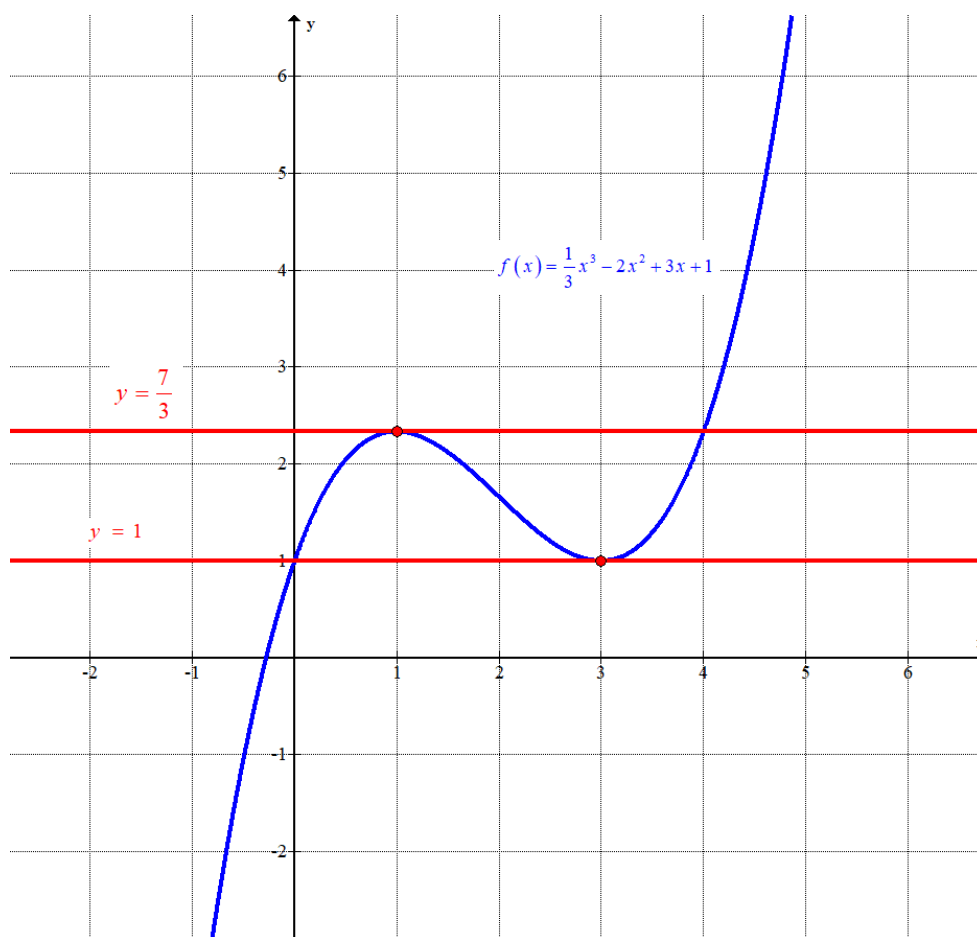
La recta tangente a la curva en $x=1$ es horizontal.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = \frac{7}{3} \\ f'(1) &= 1^2 - 4 + 3 = 0 \\ y - f(1) &= f'(1)(x-1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{7}{3} = 0(x-1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{7}{3}}$$

La recta tangente a la curva en $x=3$ es horizontal.

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 1 \\ f'(3) &= 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0 \\ y - f(3) &= f'(3)(x-3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 1 = 0(x-3) \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

Las dos rectas tangentes horizontales a la gráfica de la función f son: $y = \frac{7}{3}$ e $y = 1$.



b) En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función tiene la expresión $f(x) = e^{ax+b}$, que es una exponencial y por tanto continua.

En el intervalo $(1, +\infty)$ la función tiene la expresión $f(x) = e - ax + 1$, que es una función lineal y por tanto continua.

Averiguamos cuando es continua la función en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= e \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{ax+b} = e^{a+b} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} e - ax + 1 = e - a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow e = e^{a+b} = e - a + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e = e^{a+b} \rightarrow a + b = 1 \\ e - a + 1 = e \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 + b = 1 \Rightarrow b = 0$$

La función es continua para $a = 1$ y $b = 0$.

5.1 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Sean la recta $r: \frac{x}{3} = y = \frac{z-11}{-1}$ y el punto $P \equiv (0,1,1)$

- a) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r. [1 punto]
 b) Halla la distancia de P a la recta r. [1 punto]

a) El plano π perpendicular a la recta r tiene como vector normal el vector director de la recta.

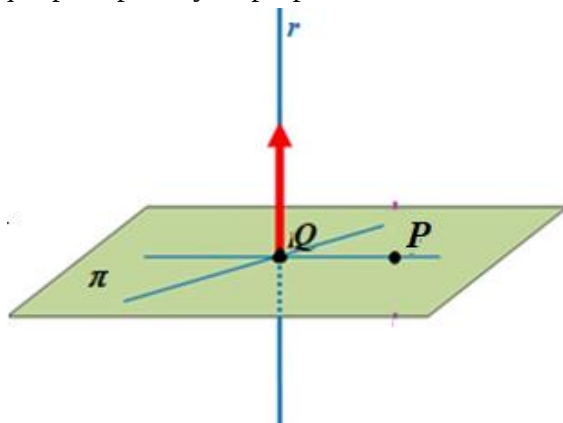
$$r: \frac{x}{3} = y = \frac{z-11}{-1} \Rightarrow \vec{v}_r = (3, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (3, 1, -1) \\ P(0, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 3x + y - z + D = 0 \\ P(0, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot 0 + 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x + y - z = 0}$$

El plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r tiene ecuación $\pi: 3x + y - z = 0$

b) Hemos hallado el plano que pasa por P y es perpendicular a la recta r : $\pi: 3x + y - z = 0$.



Hallamos el punto Q de corte del plano con la recta r .

$$r: \frac{x-0}{3} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-11}{-1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (3, 1, -1) \\ A_r(0, 0, 11) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 11 - \lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 3x + y - z = 0 \\ r: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 11 - \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 3(3\lambda) + \lambda - (11 - \lambda) = 0 \Rightarrow 9\lambda + \lambda - 11 + \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\lambda = 11 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \cdot 1 = 3 \\ y = 1 \\ z = 11 - 1 = 10 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(3, 1, 10)}$$

La distancia del punto P a la recta r es el módulo del vector que une los puntos P y Q.

$$\left. \begin{array}{l} Q(3,1,10) \\ P(0,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (3,1,10) - (0,1,1) = (3,0,9)$$

$$d(P, r) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 9^2} = \sqrt{90} = \boxed{3\sqrt{10} \approx 9.49 \text{ u}}$$

La distancia del punto P a la recta r vale $3\sqrt{10} \approx 9.49$ unidades.

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:Determina los valores de a para que los planos de ecuaciones:

$$\begin{cases} \pi_1: x + y + z = 1 \\ \pi_2: (a-1)x + y + z = a \\ \pi_3: x + (a-1)y - z = 0 \end{cases}$$

a) se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte. [1 punto]

b) se corten en una recta. En este caso, determina la recta en su forma paramétrica. [1 punto]

El sistema de ecuaciones planteado tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{pmatrix}$ y

como matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 + (a-1)^2 - 1 + a - 1 - a + 1 = (a-1)^2 - 1 =$$

$$= a^2 - 2a + 1 - 1 = a^2 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada

queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema

triangular equivalente al proporcionado.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a + \text{Fila 1}^a \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -2 \quad -2 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -2 \quad -2 \quad -1 \\ 0 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{pmatrix}$$

Los rangos de A y A/B son iguales a 2, menores que el número de incógnitas. El sistema tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada

queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema

triangular equivalente al proporcionado.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -2 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\{\text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 2 \quad -2 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema no tiene solución.

- a) Para cualquier valor de a distinto de 0 y 2 el sistema planteado tiene una única solución que es el punto de corte de los tres planos.

Determinamos las coordenadas del punto de corte de los tres planos para $a \neq 0$ y $a \neq 2$ usando el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1+0+a^2-a-0+a-a+1}{a(a-2)} = \frac{a^2-a}{a(a-2)} = \frac{a(a-1)}{a(a-2)} = \frac{a-1}{a-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-a+1+0-a+a-1+0}{a(a-2)} = \frac{-a}{a(a-2)} = \frac{-1}{a-2} = \frac{1}{2-a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0+a+(a-1)^2-1-0-a(a-1)}{a(a-2)} = \frac{a+a^2-2a+1-1-a^2+a}{a(a-2)} =$$

$$= \frac{0}{a(a-2)} = 0$$

La solución es $x = \frac{a-1}{a-2}$, $y = \frac{1}{2-a}$ y $z = 0$. El punto de corte de los tres planos tiene coordenadas $\left(\frac{a-1}{a-2}, \frac{1}{2-a}, 0\right)$.

b) Los planos se cortan en una recta para $a = 0$. Hallamos la ecuación de la recta intersección de los planos partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2y+2z=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z=\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y=\frac{1}{2}-z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} - z + z = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

La recta intersección de los tres planos tiene ecuaciones paramétricas $r : \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

PAU Ordinaria 2026



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2025-2026
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El examen consta de cinco preguntas, las tres primeras obligatorias. Las dos últimas preguntas tienen opcionalidad interna.

Cada pregunta se puntúa con 2 puntos.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras que aparecen en el listado publicado en la web de la Universidad de La Rioja. No se permite el préstamo de materiales (ni bolígrafos, ni tñpex, ni materiales auxiliares) entre el alumnado, durante el examen.

PARTE A (Contesta TODAS las preguntas de esta parte. Preguntas 1, 2 y 3.)

Pregunta 1.

En el grado de matemáticas la probabilidad de aprobar las asignaturas: Métodos Algorítmicos en Matemáticas, Estadística y Bases de datos son 60%, 75% y 80%, respectivamente.

- Elegido al azar un estudiante que cursa las tres asignaturas, calcula la probabilidad de aprobar las tres. [0.5 puntos]
- Elegido al azar un estudiante que cursa las tres asignaturas, calcula la probabilidad de suspender solo una de las tres. [0.75 puntos]
- Elegido al azar un estudiante que habiendo suspendido solo una de las tres, calcula la probabilidad de que haya sido Métodos Algorítmicos en Matemáticas. [0.75 puntos]

Pregunta 2.

Contesta justificadamente los siguientes apartados.

- En un reparto de tierras una de las parcelas esta delimitada por las curvas $y = \sqrt{4-x}$, $y = \sqrt{4-4x}$ e $y = 0$. Ayudándote de la Figura 1, determina el área de esa parcela. [1 punto]
- En dicha parcela el propietario decide hacer una piscina rectangular, de tal manera que uno de sus lados está en el eje $y = 0$, véase la Figura 1. Calcula el área máxima de la piscina. [1 punto]

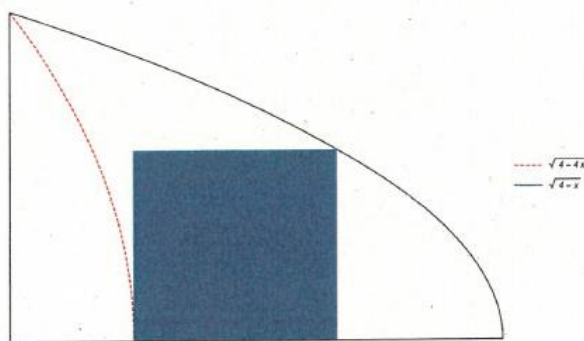


Figura 1: Parcela con piscina

Pregunta 3

Contesta justificadamente los siguientes apartados.

En una tienda de comida para llevar, el producto más vendido se elabora con tres variantes: A, B y C. Cada variante se vende en dos tamaños: pequeño y grande. Cada día se elaboran las cantidades de cada variante que aparecen en la siguiente tabla:

	A	B	C
Pequeño	100	50	100
grande	160	150	100

De la variante A venden en tienda el 50%, de la variante B el 60% y de la variante C el 40%. El resto se reparte a domicilio.

- Escribe la matriz que expresa el número de productos según el tamaño y la variante. [0.5 puntos]
- Escribe la matriz que expresa el número de productos y el porcentaje según la variante y el tipo de venta. [0.5 puntos]
- Calcula la matriz que expresa el número de productos según tamaño y tipo de venta. [1 punto]

PARTE B (preguntas 4 y 5.)

Ejercicio 4. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1 Dada la función $f(x) = xe^{-2x^2}$

- Determina su dominio y las ecuaciones de sus asíntotas. [0.75 puntos]
- Halla los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento y, los puntos de inflexión. [0.75 puntos]
- Con la información obtenida en los apartados anteriores representa la curva. [0.5 puntos]

4.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

- [1 punto] Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x}{\sin x} - 1\right)}{a^2 x^2}, a \neq 0.$$

- Sea la función $f(x) = x^3(x-1)^2 + 1$. Demuestra que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene alguna solución en $(0,1)$. [1 punto]

Ejercicio 5. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

En un chiringuito de playa se instala un toldo para los clientes. El toldo se coloca en los siguientes puntos de apoyo: $(3, 8, 17/2)$, $(4, 6, 37/4)$, $(2, 8, 8)$ y $(s, 16, 8)$ con $s \in \mathbb{R}$

- Determina la ecuación del plano que contiene al toldo. [0.75 puntos]
- Calcula el valor de s para que los cuatro puntos sean coplanarios, es decir, están en el mismo plano. [0.75 puntos]
- Se quiere instalar un altavoz para poner música y este debe estar como mínimo a 2 metros de distancia del toldo, ¿estará correctamente colocado si el altavoz está en el punto $(0, 0, 5)$? [0.5 puntos]

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Sean las rectas $r: \frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z-1}{-2}$ y $s: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

- Estudia la posición relativa de las dos rectas r y s . [1 punto]
- Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $P \equiv (1, 1, -1)$ y es paralelo a las dos rectas r y s . [1 punto]

Soluciones

Pregunta 1.

En el grado de matemáticas la probabilidad de aprobar las asignaturas: Métodos Algorítmicos en Matemáticas, Estadística y Bases de datos son 60%, 75% y 80%, respectivamente.

- Elegido al azar un estudiante que cursa las tres asignaturas, calcula la probabilidad de aprobar las tres. [0.5 puntos]
- Elegido al azar un estudiante que cursa las tres asignaturas, calcula la probabilidad de suspender solo una de las tres. [0.75 puntos]
- Elegido al azar un estudiante que habiendo suspendido solo una de las tres, calcula la probabilidad de que haya sido Métodos Algorítmicos en Matemáticas. [0.75 puntos]

- a) Llamamos A, B y C a los sucesos aprobar Métodos algorítmicos en matemáticas, Estadística y Bases de datos, respectivamente. Nos dicen que $P(A) = 0.60$, $P(B) = 0.75$ y $P(C) = 0.80$.

Suponemos que los sucesos A, B y C son independientes entre si, por lo que la probabilidad de aprobar las tres asignaturas es el producto de las probabilidades de aprobar cada una de ellas.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0.6 \cdot 0.75 \cdot 0.8 = \boxed{0.36}$$

La probabilidad de aprobar las tres asignaturas vale 0.36.

- b) El suceso suspender solo una de las tres asignaturas puede ocurrir de tres formas distintas y su probabilidad será la suma de las probabilidades de estos tres sucesos.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) &= \\ = P(\bar{A})P(B)P(C) + P(A)P(\bar{B})P(C) + P(A)P(B)P(\bar{C}) &= \\ = (1-0.6) \cdot 0.75 \cdot 0.8 + 0.6(1-0.75) \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.75 \cdot (1-0.8) &= \boxed{0.45} \end{aligned}$$

La probabilidad de suspender solo una de las tres asignaturas vale 0.45.

- c) Si llamamos D al suceso “suspender solo una de las tres asignaturas” nos piden calcular $P(\bar{A} / D)$. Sabemos que $P(D) = 0.45$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} / D) &= \frac{P(\bar{A} \cap D)}{P(D)} = \frac{P(\bar{A} \cap B \cap C)}{P(D)} = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C)}{P(D)} = \\ &= \frac{(1-0.6) \cdot 0.75 \cdot 0.8}{0.45} = \boxed{\frac{8}{15} \approx 0.5333} \end{aligned}$$

Pregunta 2.**Contesta justificadamente los siguientes apartados.**

- (a) En un reparto de tierras una de las parcelas está delimitada por las curvas $y = \sqrt{4-x}$, $y = \sqrt{4-4x}$ e $y = 0$. Ayudándote de la Figura 1, determina el área de esa parcela. [1 punto]
- b) En dicha parcela el propietario decide hacer una piscina rectangular, de tal manera que uno de sus lados está en el eje $y = 0$, véase la Figura 1. Calcula el área máxima de la piscina. [1 punto]

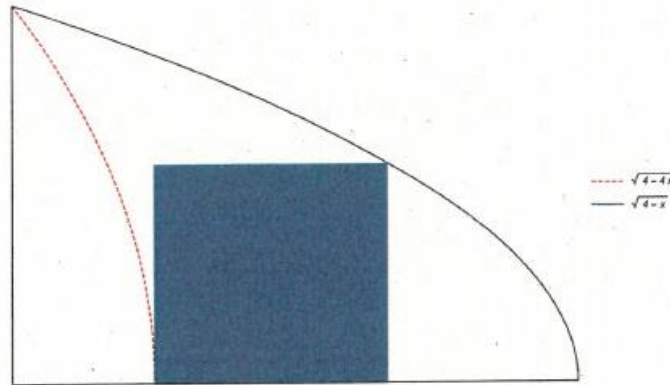


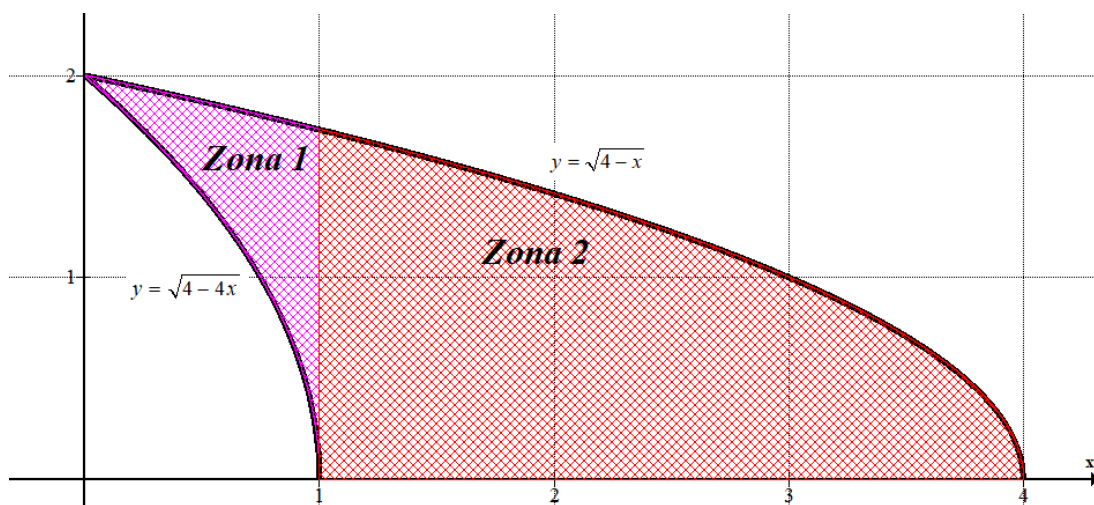
Figura 1: Parcela con piscina

- a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas con el eje $y = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \sqrt{4-x} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{4-x} = 0 \Rightarrow 4-x = 0 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \sqrt{4-4x} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{4-4x} = 0 \Rightarrow 4-4x = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

Añadimos a la Figura 1 la información obtenida y coloreamos la parcela.



El área de la parcela la obtenemos como la suma de las áreas de la zona 1 y zona 2.
El área de la zona 1 es el valor de la integral definida de 0 a 1 de la diferencia de las dos funciones: $\sqrt{4-x} - \sqrt{4-4x}$.

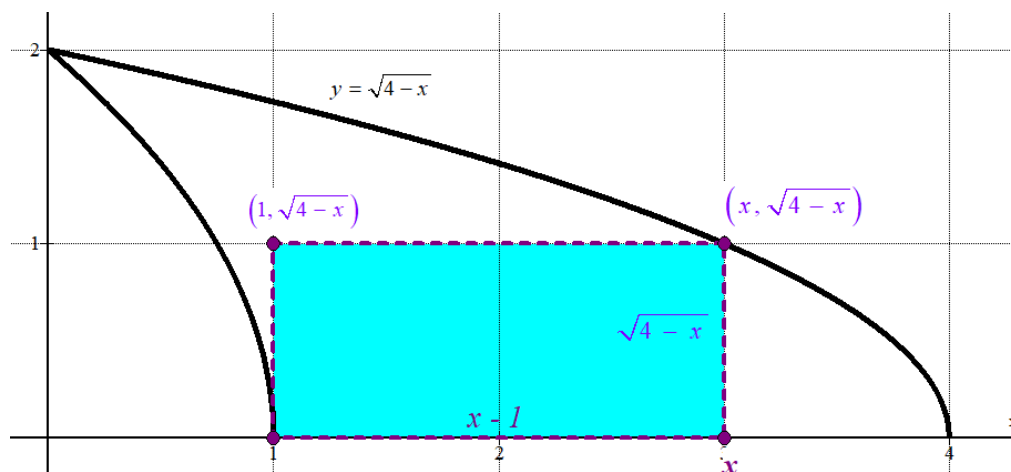
$$\begin{aligned}
 \text{Área 1} &= \int_0^1 \sqrt{4-x} - \sqrt{4-4x} dx = \int_0^1 (4-x)^{1/2} - (4-4x)^{1/2} dx = \\
 &= \left[\frac{(4-x)^{1/2+1}}{1/2+1} \cdot \frac{1}{-1} - \frac{(4-4x)^{1/2+1}}{1/2+1} \cdot \frac{1}{-4} \right]_0^1 = \left[-\frac{(4-x)^{3/2}}{3/2} + \frac{(4-4x)^{3/2}}{\frac{3}{2} \cdot 4} \right]_0^1 = \\
 &= \left[\frac{\sqrt{(4-4x)^3}}{6} - \frac{2\sqrt{(4-x)^3}}{3} \right]_0^1 = \left[\frac{\sqrt{(4-4)^3}}{6} - \frac{2\sqrt{(4-1)^3}}{3} \right] - \left[\frac{\sqrt{(4-0)^3}}{6} - \frac{2\sqrt{(4-0)^3}}{3} \right] = \\
 &= \frac{-2\sqrt{27}}{3} - \frac{\sqrt{64}}{6} + \frac{2\sqrt{64}}{3} = -2\sqrt{3} - \frac{8}{6} + \frac{16}{3} = \boxed{4 - 2\sqrt{3} \approx 0.54 \text{ u}^2}
 \end{aligned}$$

El área de la zona 2 es el valor de la integral definida de 1 a 4 de $y = \sqrt{4-x}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Área 1} &= \int_1^4 \sqrt{4-x} dx = \int_1^4 (4-x)^{1/2} dx = \left[-\frac{(4-x)^{1/2+1}}{1/2+1} \right]_1^4 = \left[-\frac{2\sqrt{(4-x)^3}}{3} \right]_1^4 = \\
 &= \left[-\frac{2\sqrt{(4-4)^3}}{3} \right] - \left[-\frac{2\sqrt{(4-1)^3}}{3} \right] = \frac{2 \cdot \sqrt{27}}{3} = \boxed{2\sqrt{3} \approx 3.46 \text{ u}^2}
 \end{aligned}$$

El área de la parcela es la suma de las dos áreas obtenidas: $4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4$ unidades cuadradas.

- b) Tomamos un punto cualquiera de la gráfica de $y = \sqrt{4-x}$, siendo $1 \leq x \leq 4$ y dibujamos la piscina obteniendo la longitud de sus lados.



El área de la piscina es el producto de la base por la altura: $A(x) = (x-1)\sqrt{4-x}$

Derivamos la función área y averiguamos cuando se anula su derivada (puntos críticos).

$$\begin{aligned}
 A(x) &= (x-1)\sqrt{4-x} \Rightarrow A'(x) = \sqrt{4-x} + (x-1) \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{2(\sqrt{4-x})^2 - x + 1}{2\sqrt{4-x}} = \\
 &= \frac{2(4-x) - x + 1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{8-2x-x+1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{-3x+9}{2\sqrt{4-x}} = \frac{-3(x-3)}{2\sqrt{4-x}} \\
 A'(x) &= 0 \Rightarrow \frac{-3(x-3)}{2\sqrt{4-x}} = 0 \Rightarrow -3(x-3) = 0 \Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow \boxed{x=3}
 \end{aligned}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=3$.

- Antes de $x=3$ consideramos $x=2$ y la derivada vale $A'(2) = \frac{-3(2-3)}{2\sqrt{4-2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} > 0$. La función área crece de 1 a 3.
- Después de $x=3$ consideramos $x=3.5$ y la derivada vale $A'(3.5) = \frac{-3(3.5-3)}{2\sqrt{4-3.5}} = \frac{-1.5}{2\sqrt{0.5}} < 0$. La función área decrece de 3 a 4.

Como el área crece antes de $x=3$ y decrece después podemos afirmar que el área es máxima para $x=3$.

Para $x=3$ el área de la piscina vale $A(3) = (3-1)\sqrt{4-3} = 2$ unidades cuadradas.

El área máxima que puede tener la piscina es de 2 unidades cuadradas.

Pregunta 3**Contesta justificadamente los siguientes apartados.**

En una tienda de comida para llevar, el producto más vendido se elabora con tres variantes: A, B y C. Cada variante se vende en dos tamaños: pequeño y grande. Cada día se elaboran las cantidades de cada variante que aparecen en la siguiente tabla:

	A	B	C
Pequeño	100	50	100
grande	160	150	100

De la variante A venden en tienda el 50%, de la variante B el 60% y de la variante C el 40%. El resto se reparte a domicilio.

- a) Escribe la matriz que expresa el número de productos según el tamaño y la variante. [0.5 puntos]
 b) Escribe la matriz que expresa el número de productos y el porcentaje según la variante y el tipo de venta. [0.5 puntos]
 c) Calcula la matriz que expresa el número de productos según tamaño y tipo de venta. [1 punto]

- a) La matriz que se pide es la que aparece en la tabla.

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Pequeño} \\ \text{Grande} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 100 & 50 & 100 \\ 160 & 150 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{Pequeño} \\ \text{Grande} \end{matrix}$$

- b) Escribimos la matriz que expresa el porcentaje según la variante y el tipo de venta.

$$N = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Tienda} & \text{Domicilio} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.50 & 1-0.5 \\ 0.60 & 1-0.6 \\ 0.40 & 1-0.4 \end{pmatrix} \end{matrix} \Rightarrow N = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Tienda} & \text{Domicilio} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- c) Obtenemos el producto de las dos matrices anteriores.

$$M \cdot N = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Pequeño} \\ \text{Grande} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 100 & 50 & 100 \\ 160 & 150 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Tienda} & \text{Domicilio} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$MN = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Tienda} & \text{Domicilio} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Pequeño} \\ \text{Grande} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 50+30+40 & 50+20+60 \\ 80+90+40 & 80+60+60 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Tienda} & \text{Domicilio} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Pequeño} \\ \text{Grande} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 120 & 130 \\ 210 & 200 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

4.1 Dada la función $f(x) = xe^{-2x^2}$

- a) Determina su dominio y las ecuaciones de sus asíntotas. [0.75 puntos]
 b) Halla los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento y, los puntos de inflexión. [0.75 puntos]
 c) Con la información obtenida en los apartados anteriores representa la curva. [0.5 puntos]

a) La función existe para cualquier valor real, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

Como el dominio son todos los números reales la función no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4xe^{2x^2}} = \frac{1}{4 \cdot \infty \cdot e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Como la función tiene asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

b) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = xe^{-2x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{-2x^2} + x(-4x)e^{-2x^2} = e^{-2x^2} - 4x^2e^{-2x^2} = (1 - 4x^2)e^{-2x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1 - 4x^2)e^{-2x^2} = 0 \Rightarrow \{e^{-2x^2} \neq 0\} \Rightarrow 1 - 4x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$f'(x) = (1 - 4x^2)e^{-2x^2} \Rightarrow f''(x) = -8xe^{-2x^2} + (1 - 4x^2)(-4x)e^{-2x^2} =$$

$$= -8xe^{-2x^2} + (-4x + 16x^3)e^{-2x^2} = (-12x + 16x^3)e^{-2x^2} \Rightarrow f''(x) = 4x(4x^2 - 3)e^{-2x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{-1}{2}\right) = 4\left(\frac{-1}{2}\right)\left(4\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 3\right)e^{-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2} = -2 \cdot (-2)e^{-1/2} > 0 \\ f''\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\right)e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2 \cdot (-2)e^{-1/2} < 0 \end{cases}$$

Para $x = \frac{-1}{2}$ la primera derivada se anula y la segunda tiene un valor positivo. La función

presenta un mínimo relativo en $x = \frac{-1}{2}$.

Para $x = \frac{1}{2}$ la primera derivada se anula y la segunda tiene un valor negativo. La función presenta un máximo relativo en $x = \frac{1}{2}$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -0.5$ y $x = 0.5$.

- En el intervalo $(-\infty, -0.5)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = (1 - 4(-1)^2)e^{-2(-1)^2} = \frac{-3}{e^2} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -0.5).$$

- En el intervalo $(-0.5, 0.5)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = (1 - 4 \cdot 0^2)e^{-2 \cdot 0^2} = 1 > 0. \text{ La función crece en } (-0.5, 0.5).$$

- En el intervalo $(0.5, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = (1 - 4 \cdot 1^2)e^{-2 \cdot 1^2} = \frac{-3}{e^2} < 0. \text{ La función decrece en } (0.5, +\infty).$$

La función decrece en $(-\infty, -0.5) \cup (0.5, +\infty)$ y crece en $(-0.5, 0.5)$.

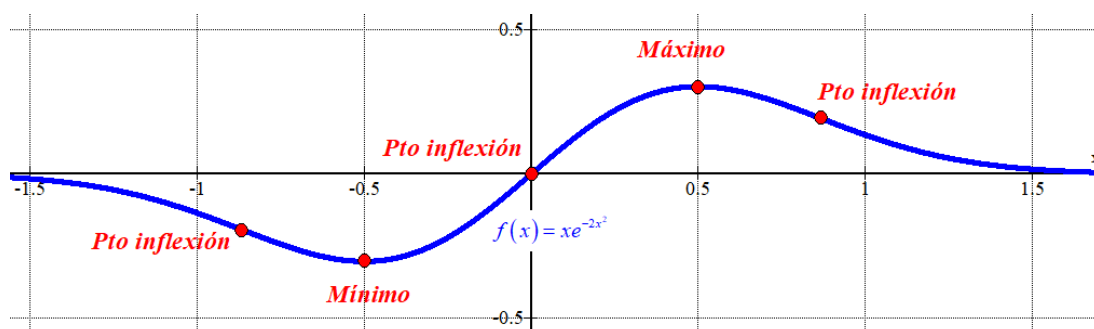
Para obtener los posibles puntos de inflexión averiguamos cuando se anula la segunda derivada.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -4x(4x^2 - 3)e^{-2x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 3 = 0 \rightarrow 4x^2 = 3 \rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\pm\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

La función tiene tres puntos de inflexión: $x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $x = 0$ y $x = \frac{+\sqrt{3}}{2}$.

c) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función-

x	$f(x) = xe^{-2x^2}$
-1	$-e^{-2} \simeq -0.13$
$-\sqrt{3}/2$	-0.19 Punto de inflexión
-1/2	-0.3 Mínimo
0	0 Punto de inflexión
1/2	0.3 Máximo
$\sqrt{3}/2$	0.19 Punto de inflexión
1	$e^{-2} \simeq 0.13$



4.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

a) [1 punto] Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x}{\sin x} - 1\right)}{a^2 x^2}, a \neq 0.$$

b) Sea la función $f(x) = x^3(x-1)^2 + 1$. Demuestra que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene alguna solución en $(0,1)$. [1 punto]

a) Calculamos el límite pedido.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x}{\sin x} - 1\right)}{a^2 x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x - \sin x}{\sin x}\right)}{a^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x - \sin x)}{a^2 x^2 \sin x} = \frac{2}{a^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = \\ &= \frac{2(0 - \sin 0)}{a^2 \cdot 0^2 \sin 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \frac{2}{a^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \\ &= \frac{2}{a^2} \cdot \frac{1 - \cos 0}{2 \cdot 0 \cdot \sin 0 + 0^2 \cos 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \frac{2}{a^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + 2x \cos x + 2x \cos x + x^2(-\sin x)} = \frac{2}{a^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x} = \\ &= \frac{2}{a^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{(2 - x^2) \sin x + 4x \cos x} = \frac{2}{a^2} \cdot \frac{2 \sin 0}{(2 - 0^2) \sin 0 + 4 \cdot 0 \cdot \cos 0} = \\ &= \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \frac{2}{a^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{-2x \sin x + (2 - x^2) \cos x + 4 \cos x + 4x(-\sin x)} = \\ &= \frac{2}{a^2} \cdot \frac{\cos 0}{-2 \cdot 0 \cdot \sin 0 + (2 - 0^2) \cos 0 + 4 \cos 0 + 4 \cdot 0 \cdot (-\sin 0)} = \frac{2}{6a^2} = \boxed{\frac{1}{3a^2}} \end{aligned}$$

b) Aplicamos el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^3(x-1)^2 + 1$ en el intervalo $[0,1]$. La función es continua en el intervalo $[0,1]$. La función tiene una expresión polinómica y es derivable en $(0,1)$.Se cumple que $f(0) = 0^3(0-1)^2 + 1 = 1$ y $f(1) = 1^3(1-1)^2 + 1 = 1$, por lo que $f(0) = f(1)$.Podemos aplicar el teorema de Rolle y afirmar que existe $c \in (0,1)$ tal que $f'(c) = 0$.

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO b)

También podemos hacerlo calculando la inversa y encontrando sus raíces.

Encontramos la expresión de la derivada de la función.

$$f(x) = x^3(x-1)^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2(x-1)^2 + x^3 \cdot 2(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x-1)[3x^2(x-1) + 2x^3] = (x-1)[3x^3 - 3x^2 + 2x^3] = (x-1)[5x^3 - 3x^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^2(x-1)(5x-3)$$

Buscamos los valores que anulan la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2(x-1)(5x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ 5x - 3 = 0 \rightarrow 5x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{5} = 0.6 \in (0,1) \end{cases}$$

La derivada se anula para $x = \frac{3}{5} = 0.6$ que pertenece al intervalo $(0, 1)$.

5.1 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

En un chiringuito de playa se instala un toldo para los clientes. El toldo se coloca en los siguientes puntos de apoyo: $(3, 8, 17/2)$, $(4, 6, 37/4)$, $(2, 8, 8)$ y $(s, 16, 8)$ con $s \in \mathbb{R}$

- Determina la ecuación del plano que contiene al toldo. [0.75 puntos]
- Calcula el valor de s para que los cuatro puntos sean coplanarios, es decir, están en el mismo plano. [0.75 puntos]
- Se quiere instalar un altavoz para poner música y este debe estar como mínimo a 2 metros de distancia del toldo, ¿estará correctamente colocado si el altavoz está en el punto $(0, 0, 5)$? [0.5 puntos]

a) Hallamos la ecuación del plano π que contiene los tres primeros puntos de apoyo.

$$\left. \begin{array}{l} (3, 8, 17/2) \in \pi \\ (4, 6, 37/4) \in \pi \\ (2, 8, 8) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = (3, 8, 17/2) - (2, 8, 8) = (1, 0, 1/2) \\ \vec{v} = (4, 6, 37/4) - (2, 8, 8) = (2, -2, 5/4) \\ (2, 8, 8) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = 2\vec{u} = 2(1, 0, 1/2) = (2, 0, 1) \\ \vec{v} = 4\vec{v} = 4(2, -2, 5/4) = (8, -8, 5) \\ (2, 8, 8) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-8 & z-8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 8 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 8y - 64 - 16z + 128 - 0 - 10y + 80 + 8x - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x - 2y - 16z + 128 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 4x - y - 8z + 64 = 0}$$

El plano que contiene el toldo tiene ecuación $\pi: 4x - y - 8z + 64 = 0$.

b) Para que los cuatro puntos sean coplanarios el cuarto punto debe pertenecer al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 4x - y - 8z + 64 = 0 \\ (s, 16, 8) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 4s - 16 - 64 + 64 = 0 \Rightarrow 4s = 16 \Rightarrow \boxed{s = 4}$$

Para $s = 4$ los cuatro puntos de apoyo son coplanarios.

c) Hallamos la distancia del punto $(0, 0, 5)$ al plano π que contiene el toldo.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 4x - y - 8z + 64 = 0 \\ P(0, 0, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|4 \cdot 0 - 0 - 8 \cdot 5 + 64|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-8)^2}} = \frac{24}{\sqrt{81}} = \frac{24}{9} \approx 2.6666 \text{ metros}$$

Se cumple que el altavoz está a más de 2 metros de distancia del toldo y la instalación del altavoz en el punto $(0, 0, 5)$ es correcta.

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Sean las rectas $r: \frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z-1}{-2}$ y $s: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

- a) Estudia la posición relativa de las dos rectas r y s . [1 punto]
 b) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $P \equiv (1, 1, -1)$ y es paralelo a las dos rectas r y s . [1 punto]

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, -2) \\ P_r(0, 3, 1) \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \\ Q_s(0, 0, 1) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 1, -2) \\ \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{-2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1}$$

Las rectas se cortan o se cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, 3, 1) \\ Q_s(0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, 0, 1) - (0, 3, 1) = (0, -3, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 1, -2) \\ \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, -3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 12 - 0 - 0 + 6 = -6 \neq 0$$

Como el producto mixto es distinto de cero las rectas se cruzan (tienen distinta dirección y no coinciden en ningún punto).

- b) El plano paralelo a las dos rectas r y s tiene como vectores directores los vectores directores de las dos rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (2, 1, -2) \\ \vec{v} = \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \\ P \equiv (1, 1, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 + 4y - 4 + 2z + 2 - 2z - 2 + 2z - 2y + 2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x + 2y + 4z - 1 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: 3x + 2y + 4z - 1 = 0$.

PAU Extraordinaria 2025



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2024-2025
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El examen consta de una primera pregunta de carácter competencial y obligatoria. Además, hay 3 preguntas más con posibilidad de elección entre apartados. Cada pregunta se puntúa con 2.5 puntos. Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni con capacidad de almacenar o transmitir datos. Si el estudiante es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)

Para iluminar una estancia se requiere instalar focos. El tiempo de vida de los focos es una variable normal con media de 2000 horas. Se sabe que, tomando un foco al azar la probabilidad de que luzca más de 1800 horas es 0.8289. Calcula:

- la desviación típica de la distribución, (1 punto).
- cuántas horas de vida debe tener un foco para estar en el percentil 90, (0.5 puntos).
- el porcentaje de focos que no tendrán una duración aceptable, considerando como duración aceptable al menos 1600 horas, (1 punto).

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

APARTADO 2. ANÁLISIS (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 2.1 o 2.2

2.1 (2.5 puntos) Un campo de atletismo de 1 km de perímetro consiste en un rectángulo con un semicírculo en cada uno de los dos lados opuestos. Hallar las dimensiones del campo para que el área de la parte rectangular sea lo mayor posible.

2.2 (2.5 puntos) Sea la curva $y = Ax - x^2$, $A \in \mathbb{R}^+$. Determina el valor de A para que el área encerrada entre la curva y el eje de abscisas sea 36. Representa la curva.

APARTADO 3. NÚMEROS Y ALGEBRA (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 3.1 o 3.2

3.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

- (1.25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Halla las matrices X e Y soluciones del sistema,

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A, \\ X - Y = B. \end{cases}$$

- b) (1.25 puntos) En una fábrica se produce queso y mantequilla. Para fabricar una unidad de queso se precisan 10 unidades de leche y 6 horas de mano de obra. Para la mantequilla, se necesitan 5 unidades de leche y 8 horas de mano de obra por unidad. Sabiendo que tenemos disponibles cada día 100000 unidades de leche y 110000 horas de mano de obra, calcular la producción posible de queso y de mantequilla considerando que utilizamos todo lo disponible.

3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

- a) (1.25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$, halla las matrices X y X^{-1} tal que $XAX^{-1} = B$.

- b) (1.25 puntos) Determina la relación entre a y b , con $a, b \in \mathbb{R}$ conocidos, para que el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ -2x - y + 3z = b \end{cases}$$

sea compatible. ¿Puede ser compatible determinado?

APARTADO 4. GEOMETRÍA (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 4.1 o 4.2

4.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

- a) (1.25 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ mx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = m \end{cases}$$

Determina el valor del parámetro m para que los planos se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte.

- b) (1.25 puntos) Calcula la distancia de la recta $r \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{5}$ al plano $\pi: -x - 3y + z + 4 = 0$.

4.2 Responda a los tres subapartados siguientes.

- a) (0.5 puntos) Dado el punto $P \equiv (0, 2, 1)$, halla la ecuación del plano que contiene a P y es paralelo a $\pi: 2x - 5y + z + 3 = 0$.

- b) (0.5 puntos) Dado el punto $P \equiv (1.0, -3)$ halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r :

$$r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases}$$

- c) (1.5 puntos) Calcula la distancia entre las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = 2 - \mu \\ z = -1 + 4\mu \end{cases}$$

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)

Para iluminar una estancia se requiere instalar focos. El tiempo de vida de los focos es una variable normal con media de 2000 horas. Se sabe que, tomando un foco al azar la probabilidad de que luzca más de 1800 horas es 0.8289. Calcula:

- la desviación típica de la distribución, (1 punto).
- cuántas horas de vida debe tener un foco para estar en el percentil 90, (0.5 puntos).
- el porcentaje de focos que no tendrán una duración aceptable, considerando como duración aceptable al menos 1600 horas, (1 punto).

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

X = El tiempo, en horas, de vida de un foco. $X = N(2000, \sigma)$.

- a) Nos dicen que “la probabilidad de que un foco elegido al azar luzca más de 1800 horas es 0.8289.” $\Rightarrow P(X > 1800) = 0.8289$.

$$P(X > 1800) = 0.8289 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{1800 - 2000}{\sigma}\right) = 0.8289 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{-200}{\sigma}\right) = 0.8289 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{200}{\sigma}\right) = 0.8289 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{200}{\sigma} = 0.95 \Rightarrow \sigma = \frac{200}{0.95} = \frac{4000}{19} \approx 210.53 \text{ horas}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8150	0,8186	0,8219	0,8258	0,8296	0,8289

- b) Nos piden hallar “ t ” tal que $P(X < t) = 0.90$.

$$P(X < t) = 0.90 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{t - 2000}{4000/19}\right) = 0.90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t - 2000}{4000/19} = 1.28 \Rightarrow t - 2000 = \frac{4000 \cdot 1.28}{19} \Rightarrow t = \frac{43120}{19} \approx 2269.47$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997

El percentil 90 está situado en las 2269.47 horas de duración.

b) Calculamos $P(X > 1600)$.

$$P(X > 1600) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{1600 - 2000}{4000/19}\right) = P(Z > -1.9) =$$

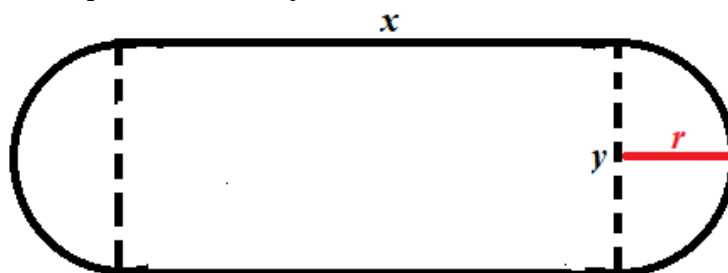
$$= P(Z \leq 1.9) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{array} \right\} = 0.9713$$

z	0	
0	0,5000	0,
0,1	0,5398	0,
0,2	0,5793	0,
0,3	0,6179	0,
0,4	0,6554	0,
0,5	0,6915	0,
0,6	0,7257	0,
0,7	0,7580	0,
0,8	0,7881	0,
0,9	0,8159	0,
1	0,8413	0,
1,1	0,8643	0,
1,2	0,8849	0,
1,3	0,9032	0,
1,4	0,9192	0,
1,5	0,9332	0,
1,6	0,9452	0,
1,7	0,9554	0,
1,8	0,9641	0,
1,9	0,9713	0,

El 97.13% de los focos tienen una duración aceptable.

2.1 (2.5 puntos) Un campo de atletismo de 1 km de perímetro consiste en un rectángulo con un semicírculo en cada uno de los dos lados opuestos. Hallar las dimensiones del campo para que el área de la parte rectangular sea lo mayor posible.

Hacemos un dibujo del campo de atletismo y damos nombre a cada uno de sus componentes.



El radio del semicírculo es la mitad del lado corto del campo: $y = 2r$.

El perímetro vale 1 km $\rightarrow 2x + 2\pi r = 1 \rightarrow 2\pi r = 1 - 2x \Rightarrow r = \frac{1}{2\pi} - \frac{x}{\pi}$.

Obtenemos la expresión del área de la parte rectangular.

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = xy \\ y = 2r \\ r = \frac{1}{2\pi} - \frac{x}{\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = 2xr = 2x \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{x}{\pi} \right) = \frac{x}{\pi} - \frac{2x^2}{\pi}$$

Buscamos los puntos críticos de la función área.

$$A(x) = \frac{x}{\pi} - \frac{2x^2}{\pi} \Rightarrow A'(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{4x}{\pi}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\pi} - \frac{4x}{\pi} = 0 \Rightarrow 1 - 4x = 0 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ km}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

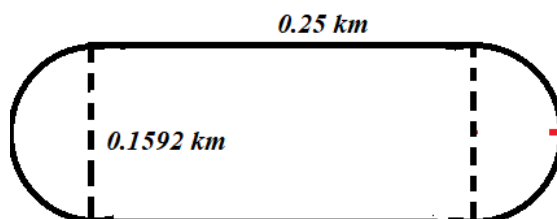
$$A'(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{4x}{\pi} \Rightarrow A''(x) = -\frac{4}{\pi} \Rightarrow A''(0.25) = -\frac{4}{\pi} < 0$$

Al ser negativa la segunda derivada podemos decir que el área tiene un máximo relativo en $x = 0.25$.

Para este valor tenemos que $y = 2 \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{1/4}{\pi} \right) = 2 \left(\frac{2}{4\pi} - \frac{1}{4\pi} \right) = 2 \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{2\pi} \approx 0.1592$.

El campo con área máxima en su parte rectangular tiene el lado recto de longitud 0.25 km y

$\frac{1}{2\pi} \approx 0.1592$ km en el lado situado en la parte del semicírculo.



2.2 (2.5 puntos) Sea la curva $y = Ax - x^2$, $A \in \mathbb{R}^+$. Determina el valor de A para que el área encerrada entre la curva y y el eje de abscisas sea 36. Representa la curva.

Averiguamos los puntos de corte de la curva con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} y = Ax - x^2, A \in \mathbb{R}^+ \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Ax - x^2 = 0 \Rightarrow x(A - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ A - x = 0 \Rightarrow x = A > 0 \end{cases}$$

El área encerrada entre la curva y y el eje de abscisas es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y A de la función.

$$\int_0^A Ax - x^2 dx = \left[\frac{Ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^A = \left[\frac{A \cdot A^2}{2} - \frac{A^3}{3} \right] - \left[\frac{A \cdot 0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{A^3}{2} - \frac{A^3}{3} = \frac{A^3}{6} > 0$$

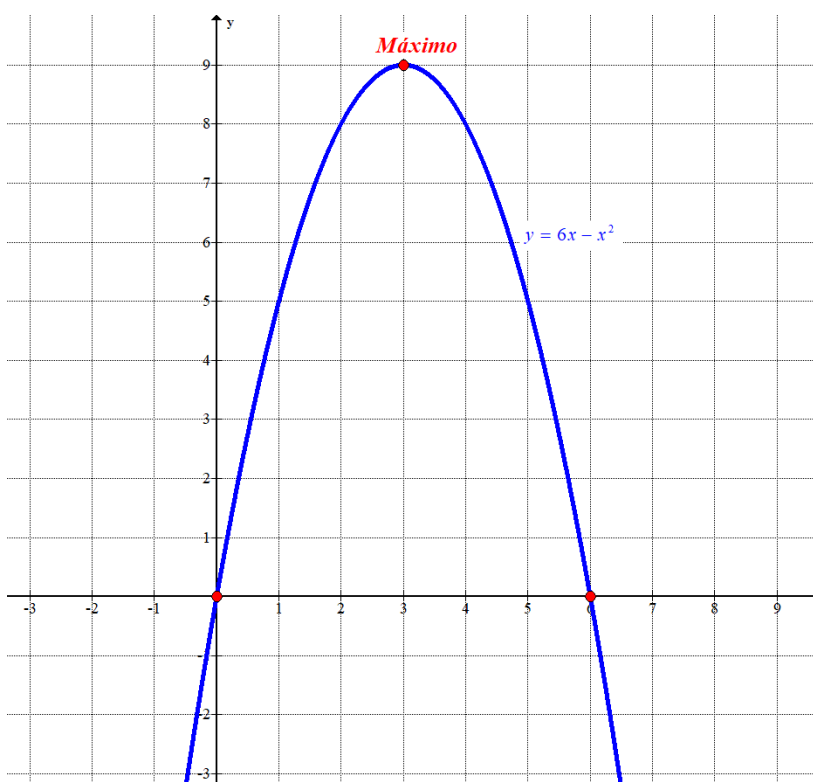
El área tiene un valor de $\frac{A^3}{6}$ unidades cuadradas.

Igualamos el área a 36 y obtenemos el valor de A .

$$\frac{A^3}{6} = 36 \Rightarrow A^3 = 6^3 \Rightarrow A = 6$$

Para $A = 6$ el área encerrada entre la curva y y el eje de abscisas vale 36 unidades cuadradas.

Dibujamos la gráfica de la curva $y = 6x - x^2$. Su gráfica es una parábola con puntos de corte con el eje da abscisas $A(0, 0)$ y $B(6, 0)$. Por lo que el vértice está situado en $x = 3$. El vértice tiene coordenadas $V(3, 9)$ y es el máximo absoluto de la función.



3.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

- a) (1.25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Halla las matrices X e Y soluciones del sistema,

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A, \\ X - Y = B. \end{cases}$$

- b) (1.25 puntos) En una fábrica se produce queso y mantequilla. Para fabricar una unidad de queso se precisan 10 unidades de leche y 6 horas de mano de obra. Para la mantequilla, se necesitan 5 unidades de leche y 8 horas de mano de obra por unidad. Sabiendo que tenemos disponibles cada día 100000 unidades de leche y 110000 horas de mano de obra, calcular la producción posible de queso y de mantequilla considerando que utilizamos todo lo disponible.

- a) Resolvemos el sistema matricial.

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A, \\ X - Y = B. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2X - 3Y = A \\ X = B + Y \end{cases} \Rightarrow 2(B + Y) - 3Y = A \Rightarrow 2B + 2Y - 3Y = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2B - Y = A \Rightarrow Y = 2B - A = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 & 0-5 \\ 6-4 & 12-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3 & 0-5 \\ 3+2 & 6+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$.

- b) Llamamos “x” al número de unidades de queso e “y” al número de unidades de mantequilla que se fabrican diariamente. Ponemos los datos en una tabla.

	Leche	Horas de mano de obra
Unidades de queso (x)	10x	6x
Unidades de mantequilla (y)	5y	8y
TOTALES	10x + 5y	6x + 8y

“Disponemos cada día de 100000 unidades de leche y 110000 unidades de mano de obra. Considerando que utilizamos todo lo disponible” $\rightarrow 10x + 5y = 100000$; $6x + 8y = 110000$. Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones.

$$\begin{cases} 10x + 5y = 100000 \\ 6x + 8y = 110000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 20000 \\ 3x + 4y = 55000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20000 - 2x \\ 3x + 4y = 55000 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 4(20000 - 2x) = 55000 \Rightarrow 3x + 80000 - 8x = 55000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25000 = 5x \Rightarrow \boxed{x = 5000} \Rightarrow \boxed{y = 20000 - 2 \cdot 5000 = 10000}$$

Se producen 5000 unidades de queso y 10000 unidades de mantequilla.

3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$, halla las matrices X y X^{-1} tal que

$$XAX^{-1} = B.$$

b) (1.25 puntos) Determina la relación entre a y b , con $a, b \in \mathbb{R}$ conocidos, para que el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ -2x - y + 3z = b \end{cases}$$

sea compatible. ¿Puede ser compatible determinado?

a) Consideramos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$XAX^{-1} = B \Rightarrow XAX^{-1}X = BX \Rightarrow XA = BX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 8b-9d \\ 6a-7c & 6b-7d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 8a - 9c \\ -b = 8b - 9d \\ 2c = 6a - 7c \\ -d = 6b - 7d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6a = -9c \\ -9b = -9d \\ 9c = 6a \\ 6d = 6b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{6}c = \frac{3}{2}c \\ b = d \\ \frac{9}{6}c = a \\ d = b \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3c/2 & b \\ c & b \end{pmatrix}$$

Como debe existir la inversa de la matriz X su determinante debe ser distinto de cero.

$$|X| = \begin{vmatrix} 3c/2 & b \\ c & b \end{vmatrix} = \frac{3bc}{2} - bc = \frac{bc}{2} \Rightarrow \frac{bc}{2} \neq 0 \Rightarrow b \neq 0, c \neq 0$$

$$|X| \neq 0$$

Determinamos la inversa de X .

$$X^{-1} = \frac{\text{Adj}(X^T)}{|X|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3c/2 & c \\ b & b \end{pmatrix}}{bc/2} = \frac{2}{bc} \begin{pmatrix} b & -b \\ -c & 3c/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/c & -2/c \\ -2/b & 3/b \end{pmatrix}$$

Las matrices buscadas son $X = \begin{pmatrix} 3c/2 & b \\ c & b \end{pmatrix}$ y $X^{-1} = \begin{pmatrix} 2/c & -2/c \\ -2/b & 3/b \end{pmatrix}$, siendo $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

b) Sumamos a la segunda ecuación la primera.

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ -2x - y + 3z = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a + \text{Ecuación 1}^a \\ -2x & -y & +3z & = b \\ 2x & +y & -3z & = a \\ \hline 0 & = b+a \rightarrow \text{Nueva Ecuación 2}^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 0 = a+b \end{cases}$$

El sistema es compatible cuando $a+b=0 \rightarrow b=-a$.

El sistema nunca puede ser compatible determinado pues hay 3 incógnitas y solo 2 ecuaciones. El rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada nunca puede ser igual al número de incógnitas (3), como mucho pueden ser iguales a 2 y obtener un sistema compatible indeterminado.

4.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ mx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = m \end{cases}$$

Determina el valor del parámetro m para que los planos se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte.

b) (1.25 puntos) Calcula la distancia de la recta $r \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{5}$ al plano

$$\pi: -x - 3y + z + 4 = 0.$$

a) Son 4 planos y su punto de corte, si existe, se obtiene de la resolución del sistema formado por sus ecuaciones. Lo intentamos resolver.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ mx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x - z \\ 2x + y - z = 4 \\ mx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2 - x - z - z = 4 \\ mx + 2 - x - z + 3z = 6 \\ x - 2z = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 2z \\ (m-1)x + 2z = 4 \\ x - 2z = m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-1)x + x - 2 = 4 \\ x - x + 2 = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx = 6 \\ 2 = m \end{cases} \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=3} \Rightarrow 3-2=2z \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{y=2-3-\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}}$$

El sistema tiene solución cuando $m=2$ y la solución es el punto $P\left(3, \frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) Estudiamos la posición relativa de la recta y el plano. Comprobamos si el vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{5} \\ \pi: -x - 3y + z + 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{u}_r = (-1, 2, 5) \\ \vec{n} = (-1, -3, 1) \end{array} \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{n} = (-1, 2, 5)(-1, -3, 1) = 1 - 6 + 5 = 0$$

El vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares y por tanto la recta o está contenida en el plano o es paralela al plano. En cualquiera de los dos casos podemos calcular la distancia de la recta al plano como la distancia de cualquiera de sus puntos al plano. Sabemos que $P_r(3, 1, -2)$ es un punto de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(3, 1, -2) \\ \pi: -x - 3y + z + 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|-3 - 3 \cdot 1 - 2 + 4|}{\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{11}}{11} \approx 1.21u$$

La distancia de la recta r al plano π es de $\frac{4\sqrt{11}}{11} \approx 1.21$ unidades.

4.2 Responda a los tres subapartados siguientes.

a) (0.5 puntos) Dado el punto $P \equiv (0, 2, 1)$, halla la ecuación del plano que contiene a P y es paralelo a $\pi: 2x - 5y + z + 3 = 0$.

b) (0.5 puntos) Dado el punto $P \equiv (1.0, -3)$ halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r :

$$r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases}$$

c) (1.5 puntos) Calcula la distancia entre las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = 2 - \mu \\ z = -1 + 4\mu \end{cases}$$

a) Un plano π' paralelo a $\pi: 2x - 5y + z + 3 = 0$ tiene ecuación $\pi': 2x - 5y + z + D = 0$.

Determinamos el valor de D que hace que el plano paralelo contenga el punto $P \equiv (0, 2, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} P \equiv (0, 2, 1) \in \pi' \\ \pi': 2x - 5y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 - 5 \cdot 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow -9 + D = 0 \Rightarrow \boxed{D = 9}$$

El plano que buscamos tiene ecuación $\pi': 2x - 5y + z + 9 = 0$.

b) El plano perpendicular a la recta r tiene como vector normal el vector director de la recta. Hallamos el vector director de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + y - 4 = z \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x - 2y - 5x - y + 4 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x - 3y = 1 \Rightarrow -1 - 3x = 3y \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{3} - x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 5x - \frac{1}{3} - x - 4 = \frac{-13}{3} + 4x} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{-1}{3} - \lambda \\ z = \frac{-13}{3} + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, -1, 4)$$

Hallamos la ecuación del plano que contiene el punto P y con vector normal $\vec{v}_r = (1, -1, 4)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, -1, 4) \\ P \equiv (1.0, -3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: x - y + 4z + D = 0 \\ P \equiv (1.0, -3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 0 + 4(-3) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -11 + D = 0 \Rightarrow D = 11 \Rightarrow \boxed{\pi: x - y + 4z + 11 = 0}$$

El plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r tiene ecuación $\pi : x - y + 4z + D = 0$.

- c) Estudiamos la posición relativa de las rectas. Determinamos primero un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(5, -1, 8) \\ \vec{v}_r = (1, 0, 2) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = 2 - \mu \\ z = -1 + 4\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(2, 2, -1) \\ \vec{u}_s = (3, -1, 4) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 0, 2) \\ \vec{u}_s = (3, -1, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{0}{-1} \neq \frac{2}{4}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(5, -1, 8) \\ Q_s(2, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (2, 2, -1) - (5, -1, 8) = (-3, 3, -9)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 0, 2) \\ \vec{u}_s = (3, -1, 4) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (-3, 3, -9) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 9 + 0 + 18 - 6 - 0 - 12 = 9 \neq 0$$

Al ser el producto mixto distinto de cero las rectas se cruzan.

Calculamos su distancia entre las rectas r y s con la fórmula $d(r, s) = \frac{[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]}{|\vec{v}_r \times \vec{u}_s|}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 0, 2) \\ \vec{u}_s = (3, -1, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 6j - k + 0 - 4j + 2i = 2i + 2j - k = (2, 2, -1)$$

$$d(r, s) = \frac{[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]}{|\vec{v}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{|9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \boxed{3u}$$

La distancia entre las rectas r y s vale 3 unidades.

PAU Ordinaria 2025



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2024-2025
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II**

El examen consta de una primera pregunta de carácter competencial y obligatoria. Además, hay 3 preguntas más con posibilidad de elección entre apartados.

Cada pregunta se puntúa con 2.5 puntos.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni con capacidad de almacenar o transmitir datos. Si el estudiante es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)

La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Los datos históricos indican que solo en el 2% de los años la producción supera los 9000 kg/ha, mientras que en el 56% de los años queda por debajo de los 8315 kg/ha.

a) (1.75 puntos) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.

b) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que la producción supere los 8500 kg/ha en un año elegido al azar.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

APARTADO 2. ANÁLISIS (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 2.1 o 2.2

2.1 (2.5 puntos) La vela de un barco tiene forma de triángulo. Si la hipotenusa mide 8 m, calcula las dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.

2.2 (2.5 puntos) Sea la función $f(x) = -x^2 + \alpha x + 11$, donde α es un parámetro real. Calcula el valor de α para que $f(x)$ tenga un máximo relativo en $x = 1/2$. Para ese valor de α calcula el área encerrada entre las gráficas $f(x)$ y $f'(x)$.

APARTADO 3. NÚMEROS Y ALGEBRA (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 3.1 o 3.2

3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dado el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - mz = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Indica para qué valores de m el sistema tiene solamente la solución trivial. Resuelve el sistema anterior para un valor de m que lo haga compatible indeterminado.

b) (1.25 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelve el sistema

$$\left(A - \frac{1}{3}A^T\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A .

3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Estudia el rango de la matriz $A - \lambda I$ según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula su determinante, ¿Qué solución tiene el sistema $AX = b$ siendo $b = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$?

Nota, b^T denota la matriz traspuesta de b .

APARTADO 4. GEOMETRÍA (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 4.1 o 4.2

4.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Obtén el valor del m para el cual las rectas $r \equiv x = y = z - m$ y

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{2y}{3} = 2z-2$$

se cortan. Calcula el punto de corte de r y s para el valor de m calculado.

b) (1.25 puntos) Se consideran los puntos $P = (0, 2, -1)$ y $Q = (2, -2, 1)$. Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

4.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

- a) (1.25 puntos) Dada la recta r , $r \equiv x - 2 = y + 1 = -z$, calcula la ecuación de la recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por $Q = (2, -2, 1)$.
- b) (1.25 puntos) Dados los planos $mx + 2y - 3z - 1 = 0$ y $2x - 4y + 6z + 5 = 0$ halla los valores de m para que sean:
- paralelos.
 - perpendiculares.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)

La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Los datos históricos indican que solo en el 2% de los años la producción supera los 9000 kg/ha, mientras que en el 56% de los años queda por debajo de los 8315 kg/ha.

- a) (1.75 puntos) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.
 b) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que la producción supere los 8500 kg/ha en un año elegido al azar.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

X = La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca. $X = N(\mu, \sigma)$.

- a) Nos dicen que “solo en el 2% de los años la producción supera los 9000 kg/ha” $\rightarrow$

$P(X > 9000) = 0.02$. También sabemos que “en el 56% de los años queda por debajo de los 8315 kg/ha” $\rightarrow P(X < 8315) = 0.56$.

$$P(X > 9000) = 0.02 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{9000 - \mu}{\sigma}\right) = 0.02 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{9000 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.02 = 0.98 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9000 - \mu}{\sigma} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055 \Rightarrow 9000 - \mu = 2.055\sigma \Rightarrow \boxed{9000 - 2.055\sigma = \mu}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803

$$P(X < 8315) = 0.56 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{8315 - \mu}{\sigma}\right) = 0.56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{8315 - \mu}{\sigma} = 0.15 \Rightarrow \boxed{8315 - \mu = 0.15\sigma}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0

Reunimos estas dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 9000 - 2.055\sigma = \mu \\ 8315 - \mu = 0.15\sigma \end{array} \right\} \Rightarrow 8315 - 9000 + 2.055\sigma = 0.15\sigma \Rightarrow -685 = -1.905\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{685}{1.905} \approx 359.58 \Rightarrow \mu = 9000 - 2.055 \cdot \frac{685}{1.905} \approx 8261.06$$

La media de producción tiene un valor aproximado de 8261 kg por hectárea y la desviación típica es de 359 kg/ha.

b) X = La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca. $X = N(8261, 359)$.

Nos piden calcular $P(X > 8500)$.

$$P(X > 8500) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{8500 - 8261}{359}\right) = P(Z > 0.666) =$$

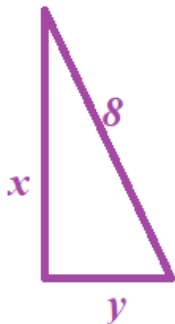
$$= 1 - P(Z \leq 0.666) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.7454 = 0.2546$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	

APARTADO 2. ANÁLISIS (2.5 puntos)**Responda a uno de los dos apartados 2.1 o 2.2**

2.1 (2.5 puntos) La vela de un barco tiene forma de triángulo. Si la hipotenusa mide 8 m, calcula las dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.

Como se habla de hipotenusa suponemos que el triángulo es rectángulo.



Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que $x^2 + y^2 = 8^2 \rightarrow y^2 = 64 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$.

El área del triángulo rectángulo es la mitad del producto de la base por la altura: $A(x, y) = \frac{xy}{2}$.

Sustituimos en la expresión del área “y” por la expresión obtenida $y = \sqrt{64 - x^2}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = \frac{xy}{2} \\ y = \sqrt{64 - x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = \frac{x\sqrt{64 - x^2}}{2}$$

Derivamos la función área obtenida y averiguamos cuando se anula la derivada (puntos críticos)

$$A(x) = \frac{x\sqrt{64 - x^2}}{2} \Rightarrow A'(x) = \frac{\sqrt{64 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{64 - x^2}}}{2} = \frac{\sqrt{64 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{64 - x^2}}}{2}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{64 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{64 - x^2}}}{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{64 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{64 - x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{64 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{64 - x^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{64 - x^2}\right)^2 = x^2 \Rightarrow 64 - x^2 = x^2 \Rightarrow 64 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 32 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{32}}$$

Comprobamos si este punto crítico es máximo o mínimo estudiando el signo de la derivada antes y después $x = \sqrt{32}$.

- En el intervalo $(0, \sqrt{32})$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

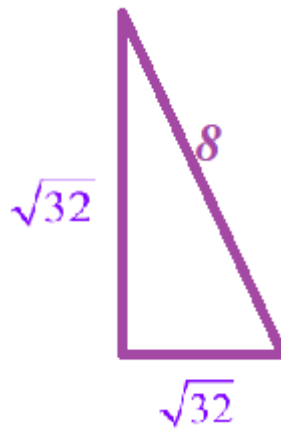
$$A'(1) = \frac{\sqrt{64 - 1^2} - \frac{1^2}{\sqrt{64 - 1^2}}}{2} = \frac{31\sqrt{7}}{21} > 0. \text{ La función crece en } (0, \sqrt{32}).$$

- En el intervalo $(\sqrt{32}, 8)$ tomamos $x = 7$ y la derivada vale

$$A'(7) = \frac{\sqrt{64-7^2} - \frac{7^2}{\sqrt{64-7^2}}}{2} = \frac{-17\sqrt{15}}{15} < 0. \text{ La función decrece en } (\sqrt{32}, 8).$$

Como la función crece antes y decrece después podemos afirmar que en $x = \sqrt{32}$ hay un máximo relativo. Para este valor tenemos $y = \sqrt{64-x^2} = \sqrt{64-(\sqrt{32})^2} = \sqrt{32}$

La superficie de la vela es máxima con $x = \sqrt{32}$ e $y = \sqrt{32}$.



2.2 (2.5 puntos) Sea la función $f(x) = -x^2 + \alpha x + 11$, donde α es un parámetro real. Calcula el valor de α para que $f(x)$ tenga un máximo relativo en $x = 1/2$. Para ese valor de α calcula el área encerrada entre las gráficas $f(x)$ y $f'(x)$.

Si la función tiene un máximo relativo en $x = 1/2$ entonces la derivada se anula para este valor.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -x^2 + \alpha x + 11 \Rightarrow f'(x) = -2x + \alpha \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = -2 \cdot \frac{1}{2} + \alpha \Rightarrow \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

El valor buscado es $\alpha = 1$. La función queda $f(x) = -x^2 + x + 11$.

Calculamos la derivada de la función $f'(x) = -2x + 1$.

Buscamos los puntos de corte entre las gráficas $f(x)$ y $f'(x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -x^2 + x + 11 \\ f'(x) &= -2x + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -x^2 + x + 11 = -2x + 1 \Rightarrow 0 = x^2 - 3x - 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-10)}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{3+7}{2} = \boxed{5 = x} \\ \frac{3-7}{2} = \boxed{-2 = x} \end{cases}$$

El área encerrada entre las gráficas $f(x)$ y $f'(x)$ es el valor absoluto de la integral definida entre -2 y 5 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^5 f(x) - f'(x) dx &= \int_{-2}^5 -x^2 + x + 11 - (-2x + 1) dx = \int_{-2}^5 -x^2 + 3x + 10 dx = \\ &= \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 10x \right]_{-2}^5 = \left[\frac{-5^3}{3} + \frac{3 \cdot 5^2}{2} + 10 \cdot 5 \right] - \left[\frac{-(-2)^3}{3} + \frac{3(-2)^2}{2} + 10(-2) \right] = \\ &= -\frac{125}{3} + \frac{75}{2} + 50 - \frac{8}{3} - 6 + 20 = -\frac{133}{3} + \frac{75}{2} + 64 = \boxed{\frac{343}{6} \approx 57.16} \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $\frac{343}{6} \approx 57.16$ unidades cuadradas.

APARTADO 3. NÚMEROS Y ALGEBRA (2.5 puntos)**Responda a uno de los dos apartados 3.1 o 3.2****3.1** Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dado el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - mz = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Indica para qué valores de m el sistema tiene solamente la solución trivial. Resuelve el sistema anterior para un valor de m que lo haga compatible indeterminado.b) (1.25 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelve el sistema

$$\left(A - \frac{1}{3}A^T\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A .

a) Al ser el sistema homogéneo el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada siempre coinciden, por lo que el sistema siempre es compatible. Este sistema tiene la solución trivial y solo hay dos opciones tiene solo esta solución o tiene infinitas soluciones (incluyendo la trivial). Para que el sistema tenga solo la solución trivial el rango de la matriz de coeficientes debe ser 3, coincidiendo con el número de incógnitas, por lo que el determinante de esta matriz debe ser distinto de cero.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 - m + 3 + 2 + 3 - 3m = -4m + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -4m + 2 = 0 \Rightarrow 4m = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La solución es la trivial para cualquier valor de m distinto de $\frac{1}{2}$.

El sistema es compatible indeterminado para $m = \frac{1}{2}$. Lo resolvemos para este valor.

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - \frac{1}{2}z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 6x + 4y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = z \\ 6x + 4y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x+4y-3x-y=0 \\ x-y-3x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3y=0 \\ -2x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y=0 \Rightarrow y=-x \Rightarrow z=3x-x=2x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=2\lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=2\lambda \end{cases}$.

b) Obtenemos la expresión de la matriz $A - \frac{1}{3}A^T$.

$$A - \frac{1}{3}A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema que debemos resolver es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El sistema queda $\left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 7 \\ 3x - y = 1 \end{array} \right\}$. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 7 \\ 3x - y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 7 \\ 3x - 1 = y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - (3x - 1) - z = 0 \\ 3x + 2(3x - 1) + 3z = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 3x + 1 - z = 0 \\ 3x + 6x - 2 + 3z = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 - x - z = 0 \\ 9x + 3z = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - z \\ 3x + z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(1 - z) + z = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 - 3z + z = 3 \Rightarrow -2z = 0 \Rightarrow \boxed{z=0} \Rightarrow \boxed{x=1-0=1} \Rightarrow \boxed{y=3 \cdot 1 - 1 = 2}$$

La solución es $x=1, y=2, z=0$.

3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Estudia el rango de la matriz $A - \lambda I$ según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula su determinante, ¿Qué solución tiene el sistema $AX = b$ siendo $b = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$? Nota, b^T denota la matriz traspuesta de b .

3.2 Obtenemos la expresión de $A - \lambda I$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Para que su rango sea 3 su determinante debe ser no nulo. Averiguamos cuando se anula.

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda) - 1] = \\ &= (1-\lambda)[3-\lambda-3\lambda+\lambda^2-1] = (1-\lambda)[\lambda^2-4\lambda+2] \end{aligned}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow (1-\lambda)[\lambda^2-4\lambda+2] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 1} \\ \lambda^2-4\lambda+2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \\ = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \boxed{2 \pm \sqrt{2} = \lambda} \end{cases}$$

Nos surgen tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

Situación 1. $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2 \pm \sqrt{2}$

En esta situación el determinante de la matriz es no nulo y el rango de $A - \lambda I$ es 3.

Situación 2. $\lambda = 1$

En esta situación el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar

la primera fila y la segunda columna (nula) $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$.

El rango de $A - \lambda I$ es 2.

Situación 3. $\lambda = 2 + \sqrt{2}$

En esta situación el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A - (2 + \sqrt{2})I = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 - \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de

orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la segunda columna $\rightarrow$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 - \sqrt{2} \end{vmatrix} = 1 - \sqrt{2} + 1 = 2 - \sqrt{2} \neq 0$. El rango de $A - \lambda I$ es 2.

Situación 4. $\lambda = 2 - \sqrt{2}$

En esta situación el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A - (2 - \sqrt{2})I = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 + \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de

orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la segunda columna $\rightarrow$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 + \sqrt{2} \end{vmatrix} = 1 + \sqrt{2} + 1 = 2 + \sqrt{2} \neq 0$. El rango de $A - \lambda I$ es 2.

Resumiendo: Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2 \pm \sqrt{2}$ el rango de $A - \lambda I$ es 3. Si $\lambda = 1$ o $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$ el rango de $A - \lambda I$ es 2.

b) Calculamos el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \\ -2 \quad 2 \quad -4 \quad 0 \\ 0 \quad 3 \quad -1 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 0 + 4 - 0 - 1 - 24 = \boxed{-18}$$

Como el determinante de A vale -18 distinto de cero esta matriz tiene inversa. La podemos utilizar para despejar X en la ecuación $AX = b$.

$$AX = b \Rightarrow X = A^{-1}b = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

APARTADO 4. GEOMETRÍA (2.5 puntos)**Responda a uno de los dos apartados 4.1 o 4.2****4.1** Responda a los dos subapartados siguientes.a) (1.25 puntos) Obtén el valor del m para el cual las rectas $r \equiv x = y = z - m$ y

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{2y}{3} = 2z-2$$

se cortan. Calcula el punto de corte de r y s para el valor de m calculado.b) (1.25 puntos) Se consideran los puntos $P = (0, 2, -1)$ y $Q = (2, -2, 1)$. Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de cada recta.

$$r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-m}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(0, 0, m) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = m + \alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3/2} = \frac{z-1}{1/2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = \left(2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ Q_s(1, 0, 1) \end{cases} \rightarrow \vec{w}_s = 2\vec{v}_s = (4, 3, 1) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases}; \beta \in \mathbb{R}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales (distinta dirección).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ \vec{w}_s = (4, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$$

Las dos rectas se cortan o cruzan. Para que las dos rectas se corten debe ser nulo el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{w}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, 0, m) \\ Q_s(1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, 0, 1) - (0, 0, m) = (1, 0, 1 - m)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ \vec{w}_s = (4, 3, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, 0, 1 - m) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{w}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 - m \end{vmatrix} =$$

$$= 3(1 - m) + 1 + 0 - 3 - 4(1 - m) - 0 = 3 - 3m + 1 - 3 - 4 + 4m = m - 3$$

$$[\vec{u}_r, \vec{w}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = 0 \Rightarrow m - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

Para $m = 3$ las rectas r y s se cortan.

Para $m=3$ las rectas quedan $r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$ $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases}; \beta \in \mathbb{R}.$

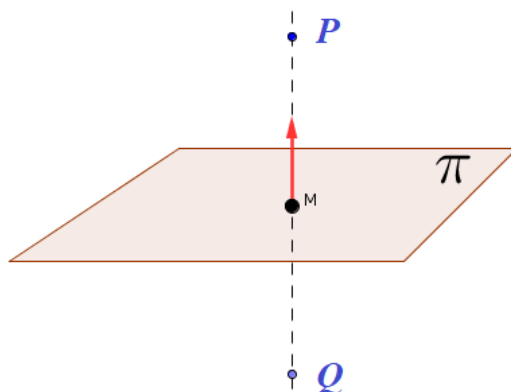
Hallamos su punto A de corte.

$$\begin{aligned} r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 + 4\beta \\ \alpha = 3\beta \\ 3 + \alpha = 1 + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 4\beta = 3\beta \\ 3 + 1 + 4\beta = 1 + \beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ 3\beta = -3 \rightarrow \boxed{\beta = -1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 4(-1) = -3 \\ y = 3(-1) = -3 \\ z = 1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-3, -3, 0)}$$

Las rectas r y s se cortan en $A(-3, -3, 0)$.

- b) Si los dos puntos P y Q son simétricos respecto del plano π el plano debe contener al punto medio del segmento $\overline{PQ}$. Además, el vector $\overrightarrow{PQ}$ es un vector normal del plano.



$$\begin{aligned} P = (0, 2, -1) \\ Q = (2, -2, 1) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} M = \frac{(0, 2, -1) + (2, -2, 1)}{2} = (1, 0, 0) \\ \overrightarrow{PQ} = (2, -2, 1) - (0, 2, -1) = (2, -4, 2) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} M(1, 0, 0) \in \pi \\ \vec{n} = \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(2, -4, 2) = (1, -2, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} M(1, 0, 0) \in \pi \\ \pi: x - 2y + z + D = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

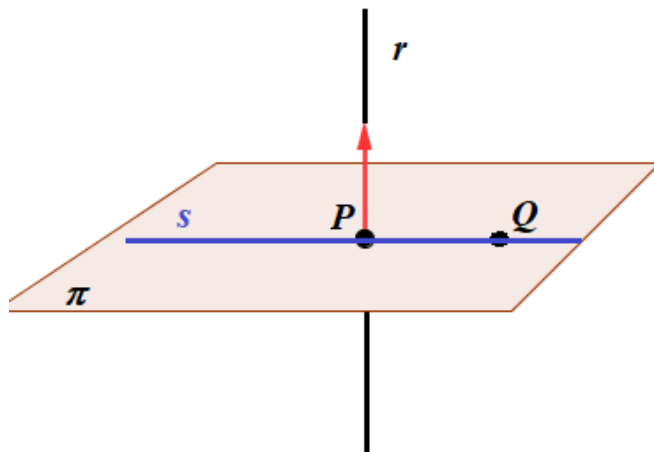
$$\Rightarrow 1 - 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi: x - 2y + z - 1 = 0}$$

El plano $\pi: x - 2y + z - 1 = 0$ cumple que los puntos P y Q son simétricos respecto a él.

4.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

- a) (1.25 puntos) Dada la recta $r \equiv x-2=y+1=-z$, calcula la ecuación de la recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por $Q=(2,-2,1)$.
- b) (1.25 puntos) Dados los planos $mx+2y-3z-1=0$ y $2x-4y+6z+5=0$ halla los valores de m para que sean:
- paralelos.
 - perpendiculares.

- a) Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto Q . Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.



$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q = (2, -2, 1) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q = (2, -2, 1) \in \pi \\ \pi : x + y - z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 2 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y - z + 1 = 0}$$

Hallamos el punto P de corte de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y - z + 1 = 0 \\ r \equiv x - 2 = y + 1 = -z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2 = -z \rightarrow x = 2 - z \\ y + 1 = -z \rightarrow y = -1 - z \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - z - 1 - z - z + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3z = -2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{2}{3}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}} \\ \boxed{y = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

La recta que buscamos es la que pasa por los puntos P y Q .

$$\left. \begin{array}{l} P\left(\frac{4}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{2}{3}\right) \in s \\ Q(2, -2, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (2, -2, 1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = 3\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1) \\ Q(2, -2, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

La recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por $Q = (2, -2, 1)$ tiene ecuación

$$s: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

b) Hallamos los vectores normales de cada plano.

$$\pi: mx + 2y - 3z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (m, 2, -3)$$

$$\pi': 2x - 4y + 6z + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n'} = (2, -4, 6)$$

b.i) Para que los planos sean paralelos sus vectores normales deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (m, 2, -3) \\ \vec{n'} = (2, -4, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

Para $m = -1$ los planos son paralelos o coincidentes. Los planos quedan $-x + 2y - 3z - 1 = 0$ y $2x - 4y + 6z + 5 = 0$. Multiplicamos la ecuación del primer plano por -2 y nos queda $2x - 4y + 6z + 2 = 0$, observamos que las ecuaciones de los dos planos no son las mismas y los planos no son coincidentes y por tanto, son paralelos.

b.ii) Para que los planos sean perpendiculares los vectores normales deben ser perpendiculares, esto implica que su producto escalar debe ser igual a cero.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (m, 2, -3) \\ \vec{n'} = (2, -4, 6) \\ \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (m, 2, -3)(2, -4, 6) = 0 \Rightarrow 2m - 8 - 18 = 0 \Rightarrow 2m - 26 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 13}$$

Para $m = 13$ los planos son perpendiculares.

EBAU Extraordinaria 2024



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2023-2024
Convocatoria: Ordinaria/Extraordinaria
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II**

El alumno contestará a SÓLO 5 ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Escribe, si existen, las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$f(x) = |x| \exp(-x).$$

en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -1$.

2.- (2 puntos) Un nadador se encuentra a 2 km de la playa enfrente del puesto de la Cruz Roja. Desea ir a la caseta de las duchas que está en la misma playa a 3 km de distancia del puesto de la Cruz Roja. Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, determinar a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a las duchas en el menor tiempo posible.

3.- (2 puntos) Dada la función

$$f(x) = (1 - x^2) \tan(x).$$

Demuestra que tiene un máximo relativo en el intervalo $(0, \pi/2)$.

4.- (2 puntos) Halla la matriz X que satisface

$$AXA + B = B(2A + I)$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 2.

5.- (2 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y + az = a \\ ax + y - z = a \\ (a+1)x + z = a + 2 \end{cases}$$

halla la matriz $A^{-1}b$ sin calcular la matriz inversa de A , siendo A la matriz de coeficientes y b la de términos independientes.

6.- (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$, halla a para que

$A^2 - A = 12I + B$ con I la matriz identidad de orden 2. A continuación, halla la matriz X tal que $XA = AX = I$.

7.- (2 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + y + z = a^2, \\ x - y + z = 1, \\ 3x - y - z = 1, \\ 6x - y + z = 3a, \end{cases}$$

Analiza según los valores del parámetro a su posición relativa.

8.- (2 puntos) Dado el punto $P \equiv (2, -1, 3)$, halla las ecuaciones de los siguientes planos que contienen a P .

(i) Paralelo a $\pi: 4x + 3y - 2z + 4 = 0$.

(ii) Perpendicular a la recta $r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-4}$.

9.- (2 puntos) Una máquina de café está regulada de modo que la cantidad de café que echa está distribuida por una normal de media 125 ml y una desviación típica de 20 ml. Calcula:

(i) el porcentaje de vasos que se llenarán con más de 150 ml.

(ii) entre que capacidades (ml) está el 60% de los cafés que dispensa la máquina.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

10.- (2 puntos) El 2% de la población mundial padece una cierta enfermedad. Se dispone de una prueba para detectarla, pero no es fiable. En el 98% de los casos da positivo en personas enfermas. Y en el 4% de los casos da positivo en personas sanas. Halla

(i) la probabilidad de que una persona esté sana, habiendo salido la prueba positiva.

(ii) habiendo salido la prueba negativa, la probabilidad de que una persona esté enferma.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos) Escribe, si existen, las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$f(x) = |x| \exp(-x).$$

en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -1$.

La función la podemos expresar como una función a trozos.

$$f(x) = |x| \exp(-x) = \begin{cases} -xe^{-x} & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ siendo su derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} - x(-1)e^{-x} = e^{-x}(x-1) & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Comprobamos si la función es derivable en $x = 0$. Para ser derivable deben coincidir sus derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x}(x-1) = e^0(-1) = -1 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x}(1-x) = e^0(1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = -1 \neq 1 = f'(0^+)$$

La función no es derivable en $x = 0$ y por tanto no existe la recta tangente a la curva en $x = 0$.

La función si es derivable en un entorno de $x = -1$, siendo la función $f(x) = -xe^{-x}$ y la derivada

$$f'(x) = e^{-x}(x-1).$$

Hallamos la ecuación de la recta tangente en $x = -1$.

La ecuación de la recta tangente en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

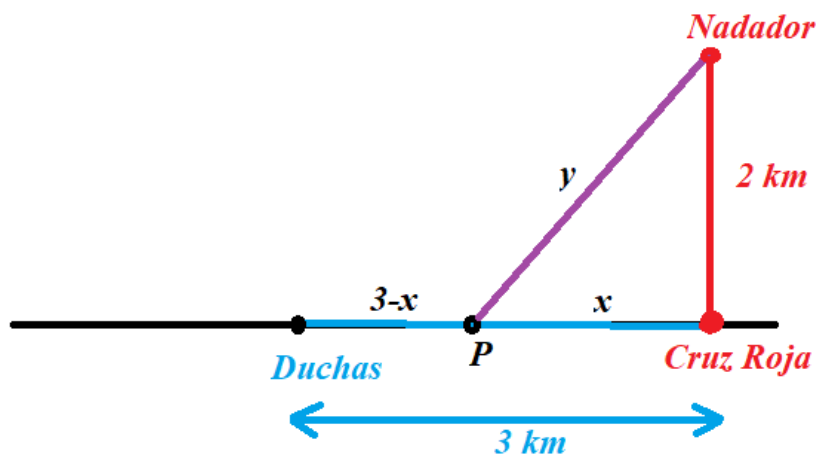
$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= 1 \cdot e^1 = e \\ f'(x) &= e^{-x}(x-1) \rightarrow f'(-1) = e(-1-1) = -2e \\ y - f(-1) &= f'(-1)(x+1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - e = -2e(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = e - 2ex - 2e \Rightarrow \boxed{y = -2ex - e}$$

La recta tangente a la curva en $x = -1$ tiene ecuación $y = -2ex - e$.

2.- (2 puntos) Un nadador se encuentra a 2 km de la playa enfrente del puesto de la Cruz Roja. Desea ir a la caseta de las duchas que está en la misma playa a 3 km de distancia del puesto de la Cruz Roja. Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, determinar a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a las duchas en el menor tiempo posible.

Hacemos un dibujo de la situación planteada.



La distancia que debe recorrer a nado es “y”. Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$y^2 = x^2 + 2^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 4}$$

La distancia que debe recorrer andando es $3 - x$.

$$\text{Como } \text{velocidad} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} \Rightarrow \text{espacio} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo} \Rightarrow \text{tiempo} = \frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}}.$$

Deseamos minimizar el tiempo que tarda en recorrer “y” kilómetros a nado y “ $3 - x$ ” kilómetros andando.

$$t(x, y) = \frac{y}{3} + \frac{3-x}{5} \Rightarrow \left\{ y = \sqrt{x^2 + 4} \right\} \Rightarrow t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{3} + \frac{3-x}{5}; 0 \leq x \leq 3$$

Derivamos la función y averiguamos donde se anula (puntos críticos).

$$t(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 4} + \frac{3-x}{5} \Rightarrow t'(x) = \frac{1}{3} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{1}{5}$$

$$t'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{3\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \frac{x}{3\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x = 3\sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2 = 9(x^2 + 4) \Rightarrow 25x^2 - 9x^2 = 36 \Rightarrow 16x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1.5 \in [0, 3]$$

Comprobamos el signo de la derivada antes y después de $x = 1.5$.

- En el intervalo $(0, 1.5)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $t'(1) = \frac{1}{3\sqrt{1^2 + 4}} - \frac{1}{5} = -0.05 < 0$.

La función decrece en $(0, 1.5)$.

- En el intervalo $(1.5, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $t'(2) = \frac{2}{3\sqrt{2^2 + 4}} - \frac{1}{5} = 0.03 > 0$.

La función crece en $(1.5, 3)$.

Como la función decrece antes de $x = 1.5$ y crece después tenemos un mínimo relativo en dicho valor.

El nadador para minimizar el tiempo que tarda en llegar a las duchas debe nadar hasta el punto situado a mitad de distancia entre duchas y cruz roja (a 1.5 km de la cruz roja).

3.- (2 puntos) Dada la función

$$f(x) = (1 - x^2) \tan(x).$$

Demuestra que tiene un máximo relativo en el intervalo $(0, \pi/2)$.

La función tangente es discontinua en $x = \pi/2$ por lo que cogemos un intervalo más pequeño que el del ejercicio, utilizamos el intervalo $[0,1]$ contenido en el intervalo $[0, \pi/2]$.

La función $f(x) = (1 - x^2) \tan(x)$ es una función continua en el intervalo $[0,1]$ pues es producto de funciones continuas. También es derivable siendo su derivada

$$f'(x) = (-2x) \tan(x) + (1 - x^2)(1 + \tan^2(x)).$$

Como $f(0) = (1 - 0^2) \tan(0) = 0$ y $f(1) = (1 - 1^2) \tan(1) = 0$ se cumple las condiciones exigidas en el teorema de Rolle y podemos aplicarlo.

La función $f(x) = (1 - x^2) \tan(x)$ es continua en $[0,1]$, derivable en $(0,1)$ y $f(0) = f(1) = 0$, por lo que aplicando el teorema de Rolle existe $c \in (0,1)$ tal que $f'(c) = 0$.

Este valor $x = c$ es un punto crítico de la función.

- En el intervalo $[0, c)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = (-2 \cdot 0) \tan(0) + (1 - 0^2)(1 + \tan^2(0)) = 1 > 0. \text{ La función crece en } [0, c).$$

- En el intervalo $(c, 1]$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = (-2 \cdot 1) \tan(1) + (1 - 1^2)(1 + \tan^2(1)) = -2 \tan(1) = -3.1 < 0. \text{ La función decrece en } (c, 1].$$

La función crece antes de $x = c$ y decrece después, por lo que la función presenta un máximo relativo en $x = c$,

Este valor c es mayor que 0 y menor que 1 por lo que pertenece al intervalo $(0, \pi/2)$.

4.- (2 puntos) Halla la matriz X que satisface

$$AXA + B = B(2A + I)$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 2.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AXA + B = B(2A + I) \Rightarrow AXA + B = 2BA + B \Rightarrow AXA = 2BA + B - B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AXA = 2BA \Rightarrow A^{-1}AXAA^{-1} = 2A^{-1}BAA^{-1} \Rightarrow \{AA^{-1} = A^{-1}A = I\} \Rightarrow X = 2A^{-1}B$$

Comprobamos que A es invertible y calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X .

$$X = 2A^{-1}B = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1-1 & 2-1 \\ 0-1 & 0-1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz X buscada tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

5.- (2 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y + az = a \\ ax + y - z = a \\ (a+1)x + z = a+2 \end{cases}$$

halla la matriz $A^{-1}b$ sin calcular la matriz inversa de A , siendo A la matriz de coeficientes y b la de términos independientes.

El sistema planteado tiene la expresión matricial:

$$AX = b$$

$$\text{siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+2 \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema cuando existe la inversa de A es $X = A^{-1}b$.

Lo que se nos piden en el ejercicio es resolver el sistema cuando sea posible e indicar las soluciones.

Hallamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + a + 1 + 0 - a(a+1) + a - 0 = 2 + 2a - a^2 - a = -a^2 + a + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)(2)}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{-2} = \boxed{-1=a} \\ \frac{-1-3}{-2} = \boxed{2=a} \end{cases}$$

La matriz inversa de A solo existe para valores de a distintos de -1 y 2 .

Resolvemos el sistema para estos valores. Como el sistema es compatible determinado utilizamos el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a + a + 2 - a(a+2) + a}{-a^2 + a + 2} = \frac{3a + 2 - a^2 - 2a}{-a^2 + a + 2} = \frac{-a^2 + a + 2}{-a^2 + a + 2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & a & -1 \\ a+1 & a+2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a - a(a+1) + a^2(a+2) - a^2(a+1) - a^2 + a + 2}{-a^2 + a + 2} =$$

$$= \frac{a - a^2 - \cancel{a} + \cancel{a^2} + 2\cancel{a^2} - \cancel{a^2} - \cancel{a^2} + \cancel{a} + 2}{-a^2 + a + 2} = \frac{-a^2 + a + 2}{-a^2 + a + 2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & a \\ a+1 & 0 & a+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a+2 - a(a+1) - a(a+1) + a(a+2)}{-a^2 + a + 2} =$$

$$= \frac{\cancel{a} + 2 - a^2 - \cancel{a} - \cancel{a^2} - a + \cancel{a^2} + 2a}{-a^2 + a + 2} = \frac{-a^2 + a + 2}{-a^2 + a + 2} = 1$$

La solución del sistema es $x = y = z = 1$.

La matriz $A^{-1}b$ es la matriz $A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\begin{cases} x - y + az = a \\ ax + y - z = a \\ (a+1)x + z = a + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + az = a \\ y = a + z - ax \\ (a+1)x + z = a + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - a - z + ax + az = a \\ (a+1)x + z = a + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+1)x + (a-1)z = 2a \\ (a+1)x + z = a + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+1)x = 2a - (a-1)z \\ (a+1)x = a + 2 - z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a - (a-1)z = a + 2 - z \Rightarrow 2a - a - 2 = (a-1-1)z \Rightarrow a - 2 = (a-2)z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{a - 2 \neq 0\} \Rightarrow \boxed{z = \frac{a-2}{a-2} = 1} \Rightarrow (a+1)x = a + 2 - 1 \Rightarrow (a+1)x = a + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{a+1 \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a+1}{a+1} = 1} \Rightarrow y = a + 1 - a \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

6.- (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$, halla a para que

$A^2 - A = 12I + B$ con I la matriz identidad de orden 2. A continuación, halla la matriz X tal que $XA = AX = I$.

Realizamos las operaciones indicadas en la igualdad matricial.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a-a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A = 12I + B \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+8 & -1 \\ 0 & 2a+12 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet a^2 - a = a+8 \rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-8)}}{2} = \\ = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = \boxed{4=a} \\ \frac{2-6}{2} = \boxed{-2=a} \end{cases} \\ \bullet a^2 + a = 2a+12 \rightarrow a^2 - a - 12 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-12)}}{2} = \\ = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{1+7}{2} = \boxed{4=a} \\ \frac{1-7}{2} = \boxed{-3=a} \end{cases} \end{array} \right.$$

Deben cumplirse todas las igualdades y esto solo es posible cuando $a = 4$.

La matriz X tal que $XA = AX = I$ es la matriz inversa de A . Hallamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{vmatrix} = -a^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix}}{-a^2} = \frac{-1}{a^2} \begin{pmatrix} -a & -1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 1/a^2 \\ 0 & -1/a \end{pmatrix}$$

Para cualquier valor $a \neq 0$ la matriz X buscada tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1/a & 1/a^2 \\ 0 & -1/a \end{pmatrix}$

7.- (2 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + y + z = a^2, \\ x - y + z = 1, \\ 3x - y - z = 1, \\ 6x - y + z = 3a, \end{cases}$$

Analiza según los valores del parámetro a su posición relativa.

Estudiamos la compatibilidad del sistema formado por las ecuaciones de los planos.

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema equivalente más sencillo de resolver.

$$\begin{cases} ax + y + z = a^2, \\ x - y + z = 1, \\ 3x - y - z = 1, \\ 6x - y + z = 3a, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 4^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 3^a \\ 6x & -y & +z & = 3a \\ -6x & +2y & +2z & = -2 \\ \hline & y & +3z & = 3a - 2 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 4^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación } 3^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 3x & -y & -z & = 1 \\ -3x & +3y & -3z & = -3 \\ \hline & 2y & -4z & = -2 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + y + z = a^2, \\ x - y + z = 1, \\ 2y - 4z = -2 \rightarrow y - 2z = -1, \\ y + 3z = 3a - 2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación } 4^a - \text{Ecuación } 3^a \\ y & +3z & = 3a - 2 \\ -y & +2z & = 1 \\ \hline & 5z & = 3a - 1 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 4^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + y + z = a^2, \\ x - y + z = 1, \\ y - 2z = -1, \\ 5z = 3a - 1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación } 2^a + \text{Ecuación } 3^a \\ x & -y & +z & = 1 \\ & y & -2z & = -1 \\ \hline x & & -z & = 0 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 2^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 1^a - \text{Ecuación } 3^a \\ ax & +y & +z & = a^2 \\ & -y & +2z & = 1 \\ \hline ax & & +3z & = a^2 + 1 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 1^a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax + 3z = a^2 + 1, \\ x - z = 0, \\ y - 2z = -1, \\ 5z = 3a - 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + 3z = a^2 + 1, \\ \boxed{x = z}, \\ y = -1 + 2z, \\ \boxed{z = \frac{3a-1}{5}}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \frac{3a-1}{5} + 3 \frac{3a-1}{5} = a^2 + 1, \\ \boxed{x = \frac{3a-1}{5}}, \\ y = -1 + 2 \frac{3a-1}{5} = \frac{-5+6a-2}{5} = \frac{6a-7}{5}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \frac{3a-1}{5} + 3 \frac{3a-1}{5} = a^2 + 1 \Rightarrow \frac{3a^2 - a}{5} + \frac{9a - 3}{5} = a^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a^2 - a + 9a - 3 = 5a^2 + 5 \Rightarrow -2a^2 + 8a - 8 = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Para $a = 2$ el sistema formado por los cuatro planos tiene solución lo que significa que los cuatro planos coinciden en un único punto.

Como $a = 2$ la solución del sistema es $x = \frac{3 \cdot 2 - 1}{5} = 1$; $y = \frac{6 \cdot 2 - 7}{5} = 1$; $z = 1$. Los cuatro planos se cortarían en el punto $(1, 1, 1)$.

Para $a = -3$ los planos quedan
$$\begin{cases} -3x + y + z = 9, \\ x - y + z = 1, \\ 3x - y - z = 1, \\ 6x - y + z = -9, \end{cases}$$
 . El plano 1 y el plano 3 son paralelos. Los otros dos

planos los cortan.

Para $a \neq 2$ y $a \neq -3$ los planos son secantes entre sí en rectas paralelas.

8.- (2 puntos) Dado el punto $P \equiv (2, -1, 3)$, halla las ecuaciones de los siguientes planos que contienen a P .

(i) Paralelo a $\pi: 4x + 3y - 2z + 4 = 0$.

(ii) Perpendicular a la recta $r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-4}$.

(i) Si el plano π' es paralelo a $\pi: 4x + 3y - 2z + 4 = 0$ tiene ecuación $\pi': 4x + 3y - 2z + D = 0$.

Como debe contener el punto $P \equiv (2, -1, 3)$ tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \pi': 4x + 3y - 2z + D = 0 \\ P \equiv (2, -1, 3) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 8 - 3 - 6 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow \pi': 4x + 3y - 2z + 1 = 0$$

El plano buscado es $\pi': 4x + 3y - 2z + 1 = 0$.

(ii) Si el plano π'' es perpendicular a la recta $r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-4}$ el vector normal del plano es el vector director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-4} \Rightarrow \vec{v}_r = (3, 2, -4)$$

$$\vec{n} = \vec{v}_r = (3, 2, -4) \Rightarrow \pi'': 3x + 2y - 4z + D = 0$$

Como debe contener el punto $P \equiv (2, -1, 3)$ tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \pi'': 3x + 2y - 4z + D = 0 \\ P \equiv (2, -1, 3) \in \pi'' \end{array} \right\} \Rightarrow 6 - 2 - 12 + D = 0 \Rightarrow D = 8 \Rightarrow \pi'': 3x + 2y - 4z + 8 = 0$$

El plano buscado es $\pi'': 3x + 2y - 4z + 8 = 0$.

9.- (2 puntos) Una máquina de café está regulada de modo que la cantidad de café que echa está distribuida por una normal de media 125 ml y una desviación típica de 20 ml. Calcula:

(i) el porcentaje de vasos que se llenarán con más de 150 ml.

(ii) entre que capacidades (ml) está el 60% de los cafés que dispensa la máquina.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

(i) Sea X = La cantidad de café en ml que echa una cafetera. $X = N(125, 20)$

Nos piden calcular $P(X > 150)$.

$$\begin{aligned}
 P(X > 150) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = \\
 &= P\left(Z > \frac{150 - 125}{20}\right) = P(Z > 1.25) = \\
 &= 1 - P(Z \leq 1.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \\
 &= 1 - 0.8944 = \boxed{0.1056}
 \end{aligned}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8
1,2	0,8843	0,8863	0,8883	0,8903	0,8925	0,8944	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9

El porcentaje de vasos que se llenarán con más de 150 ml es de 10.56 %.

(ii) Nos piden hallar el valor “a” tal que $P(125 - a \leq X \leq 125 + a) = 0.60$.

$$\begin{aligned}
 P(125 - a \leq X \leq 125 + a) &= 0.60 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow P\left(\frac{125 - a - 125}{20} \leq Z \leq \frac{125 + a - 125}{20}\right) &= 0.6 \Rightarrow P\left(\frac{-a}{20} \leq Z \leq \frac{a}{20}\right) = 0.6 \Rightarrow \\
 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{20}\right) - P\left(Z \leq \frac{-a}{20}\right) &= 0.6 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{20}\right) - P\left(Z \geq \frac{a}{20}\right) = 0.6 \Rightarrow \\
 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{20}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{a}{20}\right)\right] &= 0.6 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{a}{20}\right) - 1 = 0.6 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{a}{20}\right) &= 1.6 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{20}\right) = 0.8 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{a}{20} &= \frac{0.84 + 0.85}{2} = 0.845 \Rightarrow \boxed{a = 0.845 \cdot 20 = 16.9}
 \end{aligned}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,6
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,7
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,8
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,9
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	1,0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	1,1
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	1,2
0,8	0,7894	0,7925	0,7955	0,7985	0,7995	0,8023	1,3
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	1,4

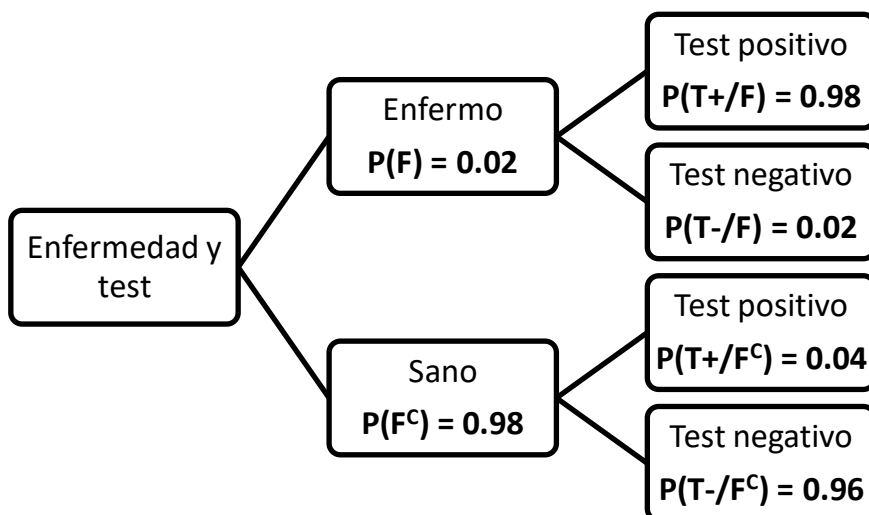
La capacidad en la que están el 60% de los cafés que dispensa la máquina es entre $125 - 16.9 = 108.1$ ml y $125 + 16.9 = 141.9$ ml.

10.- (2 puntos) El 2% de la población mundial padece una cierta enfermedad. Se dispone de una prueba para detectarla, pero no es fiable. En el 98% de los casos da positivo en personas enfermas. Y en el 4% de los casos da positivo en personas sanas. Halla

- (i) la probabilidad de que una persona esté sana, habiendo salido la prueba positiva.
 (ii) habiendo salido la prueba negativa, la probabilidad de que una persona esté enferma.

Llamamos F al suceso “la persona está enferma”, T+ a “el test da positivo” y T− a “el test da negativo”.

Hacemos un diagrama de árbol.



- (i) Nos piden determinar $P(F^c / T+)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(F^c / T+) &= \frac{P(F^c \cap T+)}{P(T+)} = \frac{P(F^c)P(T+/F^c)}{P(F)P(T+/F) + P(F^c)P(T+/F^c)} = \\
 &= \frac{0.98 \cdot 0.04}{0.02 \cdot 0.98 + 0.98 \cdot 0.04} = \boxed{\frac{2}{3} \approx 0.6667}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que una persona esté sana, habiendo salido la prueba positiva es de $\frac{2}{3} \approx 0.6667$.

- (ii) Nos piden determinar $P(F / T-)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(F / T-) &= \frac{P(F \cap T-)}{P(T-)} = \frac{P(F)P(T-/F)}{P(F)P(T-/F) + P(F^c)P(T-/F^c)} = \\
 &= \frac{0.02 \cdot 0.02}{0.02 \cdot 0.02 + 0.98 \cdot 0.96} = \boxed{\frac{1}{2353} \approx 0.0004}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que una persona esté enferma, habiendo salido la prueba negativa es de $\frac{1}{2353} \approx 0.0004$.

EBAU Ordinaria 2024



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2023-2024
Convocatoria: Ordinaria/Extraordinaria
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II**

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1/x$ en el punto $(3, 1/3)$. Comprueba que el segmento de esta recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

2.- (2 puntos) En una finca con forma de semicírculo de radio 20 m se quiere poner un jardín rectangular, de tal manera que uno de lados esté sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte de la curva. Calcula las dimensiones del jardín para que su área sea máxima.

3.- (2 puntos) Halla la función f sabiendo que

$$\int f(x) dx = \ln \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} + k$$

Analiza la continuidad de la función f en las abscisas $x = -2$ y $x = 1$.

4.- (2 puntos) Dada la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla x e y para que su inversa, A^{-1} , coincida con su traspuesta, A^T . En tal caso, halla $A^T A^2 - 2A$.

5.- (2 puntos) Añade una ecuación al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

de modo que sea

- (i) incompatible.
- (ii) compatible determinado.
- (iii) Compatible indeterminado.

6.- (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ halla dos matrices B y C tales que satisfagan las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} B + C^{-1} = A \\ B - C^{-1} = A^T \end{cases}$$

Donde denotamos por A^T , la matriz traspuesta de A .

7.- (2 puntos) Determine los valores de a para que los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} \pi_1 : x + y + z = a - 1 \\ \pi_2 : 2x + y + az = a \\ \pi_3 : x + ay + z = 1 \end{cases}$$

- (i) se corten en un punto.
- (ii) se corten en una recta.
- (iii) no se corten.

8.- (2 puntos) Halla la ecuación continua de la recta s que está contenida en el plano $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = -1 \\ 4x - y + z = 3 \end{cases}$$

9.- (2 puntos) En un examen de matemáticas, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0.6 y -0.8 y sus notas reales 94 y 73, respectivamente. Calcula:

- (i) la media y desviación típica de las puntuaciones del examen que siguen una distribución normal.
 - (ii) entre que puntuaciones alrededor de la media está la nota del 60 % de los estudiantes.
- (Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

10.- (2 puntos) Dados los sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A) = 0.27$, $P(B) = 0.82$ y $P(A \cup B) = 0.4$. Determina si los sucesos A y B son compatibles o incompatibles. Calcula $P((A \cup B)^c)$ y $P(A' \cup B')$, (A' significa suceso complementario).

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1/x$ en el punto $(3, 1/3)$. Comprueba que el segmento de esta recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

La ecuación de la recta tangente en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = \frac{1}{3} \\ f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f'(3) = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9} \\ y - f(3) = f'(3)(x - 3) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}(x - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}x + \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}}$$

La recta tangente a la curva en $x = 3$ tiene ecuación $y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$.

Hallamos los puntos de corte de la recta tangente con los ejes coordenados.

$$\left. \begin{array}{l} \text{eje } OX \rightarrow y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow -x + 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow A(6, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{eje } OY \rightarrow y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3} \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = -\frac{1}{9} \cdot 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow B\left(0, \frac{2}{3}\right)$$

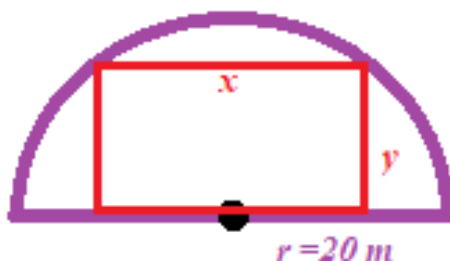
Para que el punto de tangencia $P(3, 1/3)$ divida el segmento AB en dos partes iguales dicho punto debe ser el punto medio del segmento AB .

$$\text{Punto medio } \overline{AB} = \frac{(6, 0) + \left(0, \frac{2}{3}\right)}{2} = \frac{\left(6, \frac{2}{3}\right)}{2} = \left(\frac{6}{2}, \frac{2}{6}\right) = \left(3, \frac{1}{3}\right) = P$$

Queda comprobado que el punto $P(3, 1/3)$ divide el segmento AB en dos partes iguales.

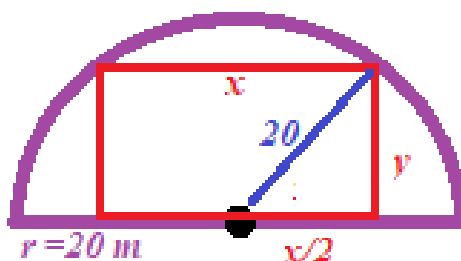
2.- (2 puntos) En una finca con forma de semicírculo de radio 20 m se quiere poner un jardín rectangular, de tal manera que uno de lados esté sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte de la curva. Calcula las dimensiones del jardín para que su área sea máxima.

Hacemos un dibujo de la finca y de la situación planteada.



El área del jardín rectangular es $A(x, y) = xy$.

Como el rectángulo tiene sus esquinas apoyadas en la circunferencia según el teorema de Pitágoras se cumple $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 20^2$.



Despejamos “y” en la ecuación anterior.

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 20^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 400 \Rightarrow y^2 = 400 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow y = \sqrt{400 - \frac{x^2}{4}}$$

Y sustituimos en la expresión del área que deseamos maximizar.

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = xy \\ y = \sqrt{400 - \frac{x^2}{4}} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = x\sqrt{400 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{x^2 \left(400 - \frac{x^2}{4}\right)} = \sqrt{400x^2 - \frac{x^4}{4}}$$

El área queda expresada en función de la longitud del lado “x” como $A(x) = \sqrt{400x^2 - \frac{x^4}{4}}$.

Derivamos esta función y buscamos sus puntos críticos.

$$A'(x) = \frac{800x - \frac{4x^3}{4}}{2\sqrt{400x^2 - \frac{x^4}{4}}} = \frac{800x - x^3}{2x\sqrt{400 - \frac{x^2}{4}}} = \frac{\cancel{x}(800 - x^2)}{2\cancel{x}\sqrt{400 - \frac{x^2}{4}}} = \frac{800 - x^2}{2\sqrt{400 - \frac{x^2}{4}}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{800 - x^2}{2\sqrt{400 - \frac{x^2}{4}}} = 0 \Rightarrow 800 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 800 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}}$$

Compruebo que el punto crítico obtenido $x = 20\sqrt{2} \approx 28.28 \text{ metros}$ es un máximo viendo que antes de él la función crece y después de él la función decrece.

- En el intervalo $(0, 20\sqrt{2})$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

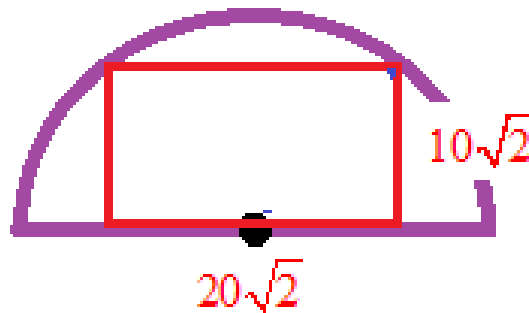
$$A'(10) = \frac{800 - 10^2}{2\sqrt{400 - \frac{10^2}{4}}} = \frac{700}{2\sqrt{375}} > 0, \text{ la función crece.}$$

- En el intervalo $(20\sqrt{2}, 40)$ tomamos $x = 30$ y la derivada vale

$$A'(30) = \frac{800 - 30^2}{2\sqrt{400 - \frac{30^2}{4}}} = \frac{-100}{2\sqrt{175}} < 0, \text{ la función decrece.}$$

Para $x = \sqrt{800}$ el otro lado del jardín es $y = \sqrt{400 - \frac{(\sqrt{800})^2}{4}} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14.14 \text{ metros}$.

El área del jardín rectangular cumpliendo las condiciones pedidas es máxima cuando tiene las dimensiones $20\sqrt{2}$ metros de largo y $10\sqrt{2}$ metros de ancho.



3.- (2 puntos) Halla la función f sabiendo que

$$\int f(x) dx = \ln \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} + k$$

Analiza la continuidad de la función f en las abscisas $x = -2$ y $x = 1$.

Si $F(x) = \int f(x) dx = \ln \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} + k$ el dominio de la función $F(x)$ son todos los valores reales

para los que existe $\ln \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$, es decir, para los valores " x " tales que $\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} > 0$.

$$\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} > 0 \Rightarrow \{(x+2)^2 > 0\} \Rightarrow (x-1)^3 > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

El dominio de $F(x)$ es $(1, +\infty)$.

Como $F(x) = \int f(x) dx$ entonces $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \ln \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} + k = \ln(x-1)^3 - \ln(x+2)^2 + k = 3\ln(x-1) - 2\ln(x+2) + k$$

$$f(x) = F'(x) = (3\ln(x-1) - 2\ln(x+2) + k)' = 3 \frac{1}{x-1} - 2 \frac{1}{x+2} = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2}$$

Analizamos la continuidad de la función $f(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2}$ en su dominio $(1, +\infty)$.

Esta función es la suma de dos funciones racionales que no se anulan en su dominio y por tanto es continua en $(1, +\infty)$.

Esta función no existe ni en $x = -2$ ni en $x = 1$. La función no es continua en ninguno de estos valores.

4.- (2 puntos) Dada la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla x e y para que su inversa, A^{-1} , coincida con su traspuesta, A^T . En tal caso, halla $A^T A^2 - 2A$.

Si la matriz inversa de A es A^T se cumple que $A \cdot A^T = I$. Utilizamos esta igualdad para hallar el valor de x e y.

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & 3y/5 - 3x/5 & 0 \\ 3y/5 - 3x/5 & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{9}{25} + x^2 = 1 \\ \frac{3y}{5} - \frac{3x}{5} = 0 \\ y^2 + \frac{9}{25} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow x = \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5} \\ y - x = 0 \rightarrow y = x \\ y^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow y = \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = \frac{4}{5} \\ 0 \\ x = y = \frac{-4}{5} \end{cases}$$

Los valores buscados son $x = y = \frac{4}{5}$ o bien $x = y = \frac{-4}{5}$.

Como $A^T = A^{-1}$ obtenemos la expresión de $A^T A^2 - 2A$.

$$A^T A^2 - 2A = A^{-1} A^2 - 2A = A^{-1} A A - 2A = I A - 2A = A - 2A = -A$$

$$\text{Para } x = y = \frac{4}{5} \text{ queda } A^T A^2 - 2A = -A = -\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para } x = y = \frac{-4}{5} \text{ queda } A^T A^2 - 2A = -A = -\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.- (2 puntos) Añade una ecuación al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

de modo que sea

- (i) incompatible.
- (ii) compatible determinado.
- (iii) Compatible indeterminado.

(i) Para que sea incompatible debemos añadir una ecuación que no se pueda cumplir, por ejemplo, añadimos una ecuación igual que la segunda pero cambiando el 3 por 0.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

(ii) Para que sea compatible determinado debemos añadir una ecuación que se cumpla, por ejemplo, añadimos $x = 3$.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Comprobamos que es compatible determinado. Resolvemos el sistema anterior.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ \boxed{x = 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 3 - y + 2z = 1 \\ 3 + y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 2z = -5 \\ y - z = 0 \rightarrow y = z \end{cases} \Rightarrow -z + 2z = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -5} \Rightarrow \boxed{y = -5}$$

El sistema es compatible determinado con solución $x = 3, y = z = -5$.

(iii) Para que sea compatible indeterminado debemos añadir una ecuación que sea combinación de

las dos ecuaciones iniciales, por ejemplo, la suma de las dos:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ \hline 3x \quad \quad + z = 4 \end{cases}$$

El sistema $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$ es compatible indeterminado. Lo comprobamos.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 3x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \{Ec\ 3^a = Ec\ 1^a + Ec\ 2^a\} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ y = 3 - x + z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 3 + x - z + 2z = 1 \Rightarrow 3x + z = 4 \Rightarrow \boxed{z = 4 - 3x} \Rightarrow \boxed{y = 3 - x + 4 - 3x = 7 - 4x}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 - 4\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 3\lambda \end{cases}$. El sistema es compatible indeterminado.

6.- (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ halla dos matrices B y C tales que satisfagan las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} B + C^{-1} = A \\ B - C^{-1} = A^T \end{cases}$$

Donde denotamos por A^T , la matriz traspuesta de A.

Resolvemos el sistema matricial $\begin{cases} B + C^{-1} = A \\ B - C^{-1} = A^T \end{cases}$.

$$\begin{cases} B + C^{-1} = A \\ B - C^{-1} = A^T \end{cases}$$

$$\frac{2B}{2} = A + A^T \Rightarrow B = \frac{1}{2}(A + A^T) \Rightarrow \frac{1}{2}(A + A^T) + C^{-1} = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A + A^T + 2C^{-1} = 2A \Rightarrow 2C^{-1} = 2A - A - A^T \Rightarrow 2C^{-1} = A - A^T \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

Por lo visto tenemos $B = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$.

También tenemos que $C^{-1} = \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos la inversa de la matriz C^{-1} y obtendremos la expresión de la matriz C.

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |C^{-1}| = \begin{vmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$$

$$C = (C^{-1})^{-1} = \frac{\text{Adj}(C^{-1})^T}{|C^{-1}|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}}{1/4} = 4 \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices buscadas son $B = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

7.- (2 puntos) Determine los valores de a para que los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} \pi_1 : x + y + z = a - 1 \\ \pi_2 : 2x + y + az = a \\ \pi_3 : x + ay + z = 1 \end{cases}$$

- (i) se corten en un punto.
- (ii) se corten en una recta.
- (iii) no se corten.

Estudiamos la compatibilidad del sistema formado por las ecuaciones de los planos.

El sistema $\begin{cases} \pi_1 : x + y + z = a - 1 \\ \pi_2 : 2x + y + az = a \\ \pi_3 : x + ay + z = 1 \end{cases}$ tiene una matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y una matriz

ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a + 2a - 1 - 2 - a^2 = -a^2 + 3a - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(-2)}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{-2} = 1 = a \\ \frac{-3-1}{-2} = 2 = a \end{cases}$$

Se nos plantean tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado. La única solución del sistema son las coordenadas del punto intersección de los tres planos.

CASO 2. $a = 1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor que 3. Analizamos el sistema para este valor de a .

$$\begin{cases} \pi_1 : x + y + z = 0 \\ \pi_2 : 2x + y + z = 1 \\ \pi_3 : x + y + z = 1 \end{cases}$$

Observamos que los planos π_1 y π_3 son dos planos paralelos y por tanto los planos no se van a cortar en ningún punto.

CASO 3. $a = 2$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor que 3. Analizamos el sistema para este valor de a .

$$\begin{cases} \pi_1 : x + y + z = 1 \\ \pi_2 : 2x + y + 2z = 2 \\ \pi_3 : x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

Observamos que el rango de A y el de A/B son iguales a 2, siendo menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado. Sus infinitas soluciones son los puntos de la recta donde se cortan los tres planos.

Lo comprobamos resolviendo el sistema equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + z = 1 \Rightarrow x = 1 - z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

(i) Para $a \neq 1$ y $a \neq 2$ los tres planos se cortan en un único punto.

(ii) Para $a = 2$ los tres planos se cortan en una recta de ecuación $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}.$

(iii) Para $a = 1$ los tres planos no se cortan.

8.- (2 puntos) Halla la ecuación continua de la recta s que está contenida en el plano $\pi: x + y - 2z + 1 = 0$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = -1 \\ 4x - y + z = 3 \end{cases}$$

Si la recta s está contenida en el plano su vector director $\vec{u}_s$ es perpendicular al vector normal del plano $\vec{n}$.

Si corta perpendicularmente a la recta r también debe ser perpendicular a su vector director $\vec{v}_r$.

Al ser perpendicular al vector normal $\vec{n}$ del plano y el vector director $\vec{v}_r$ de la recta nos sirve como vector director de la recta s el producto vectorial de los vectores $\vec{n}$ y $\vec{v}_r$.

Hallamos las coordenadas de estos dos vectores $\vec{n}$ y $\vec{v}_r$.

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = -1 \\ 4x - y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -1 - x - y \\ 4x - y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow 4x - y - 1 - x - y = 3 \Rightarrow 3x - 2y = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 4 + 2y \Rightarrow x = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}y \Rightarrow z = -1 - \frac{4}{3} - \frac{2}{3}y - y = -\frac{7}{3} - \frac{5}{3}y \Rightarrow$$

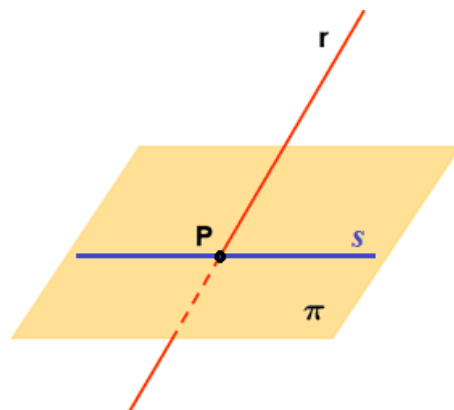
$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{7}{3} - \frac{5}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_r = \left(\frac{2}{3}, 1, -\frac{5}{3} \right) \Rightarrow \{\text{Multiplico por 3}\} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_r = (2, 3, -5)}$$

$$\pi: x + y - 2z + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{n} = (1, 1, -2)}$$

Hallamos el vector director de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 1, -2) \\ \vec{v}_r = (2, 3, -5) \\ \vec{u}_s = \vec{n} \times \vec{v}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -5i - 4j + 3k - 2k + 5j + 6i = i + j + k = (1, 1, 1)$$

Nos falta determinar un punto de la recta s . Como sabemos que la recta r y la recta s se cortan y la recta s está contenida en el plano el punto de la recta s lo podemos obtener hallando el punto de corte de la recta r y el plano.



$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{7}{3} - \frac{5}{3}\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\lambda + \lambda - 2\left(-\frac{7}{3} - \frac{5}{3}\lambda\right) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi : x + y - 2z + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\lambda + \lambda + \frac{14}{3} + \frac{10}{3}\lambda + 1 = 0 \Rightarrow 4 + 2\lambda + 3\lambda + 14 + 10\lambda + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15\lambda = -21 \Rightarrow \lambda = \frac{-21}{15} = \frac{-7}{5} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{-7}{5}\right) = \frac{4}{3} - \frac{14}{15} = \frac{2}{5} \\ y = \frac{-7}{5} \\ z = -\frac{7}{3} - \frac{5}{3}\left(\frac{-7}{5}\right) = \frac{-7}{3} + \frac{7}{3} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow P\left(\frac{2}{5}, \frac{-7}{5}, 0\right)$$

Hallamos la ecuación de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} P\left(\frac{2}{5}, \frac{-7}{5}, 0\right) \in s \\ \vec{u}_s = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \frac{x - \frac{2}{5}}{1} = \frac{y + \frac{7}{5}}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \boxed{s \equiv x - \frac{2}{5} = y + \frac{7}{5} = z}$$

La recta buscada es $s \equiv x - \frac{2}{5} = y + \frac{7}{5} = z$.

9.- (2 puntos) En un examen de matemáticas, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0.6 y -0.8 y sus notas reales 94 y 73, respectivamente. Calcula:

- (i) la media y desviación típica de las puntuaciones del examen que siguen una distribución normal.
 (ii) entre que puntuaciones alrededor de la media está la nota del 60 % de los estudiantes.
 (Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

(i) Sea X = Puntuación de un estudiante. La variable tipificada es $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \Rightarrow \begin{cases} 0.6 = \frac{94 - \mu}{\sigma} \\ -0.8 = \frac{73 - \mu}{\sigma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.6\sigma = 94 - \mu \\ -0.8\sigma = 73 - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 94 - 0.6\sigma \\ \mu = 73 + 0.8\sigma \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 94 - 0.6\sigma = 73 + 0.8\sigma \Rightarrow 94 - 73 = 0.8\sigma + 0.6\sigma \Rightarrow 21 = 1.4\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{21}{1.4} = 15 \Rightarrow \mu = 94 - 0.6 \cdot 15 = 85$$

La variable X es una distribución normal con media 85 y desviación típica 15. $X = N(85, 15)$.

(ii) Nos piden hallar el valor “a” tal que $P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0.60$.

$$P(85 - a \leq X \leq 85 + a) = 0.60 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{85 - a - 85}{15} \leq Z \leq \frac{85 + a - 85}{15}\right) = 0.6 \Rightarrow P\left(\frac{-a}{15} \leq Z \leq \frac{a}{15}\right) = 0.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - P\left(Z \leq \frac{-a}{15}\right) = 0.6 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - P\left(Z \geq \frac{a}{15}\right) = 0.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right)\right] = 0.6 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - 1 = 0.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) = 1.6 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) = 0.8 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{15} = \frac{0.84 + 0.85}{2} = 0.845 \Rightarrow a = 0.845 \cdot 15 = 12.675$$

La nota está entre $85 - 12.675 = 72.325$ y $85 + 12.675 = 97.675$.

10.- (2 puntos) Dados los sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A) = 0.27$, $P(B') = 0.82$ y $P(A \cup B) = 0.4$. Determina si los sucesos A y B son compatibles o incompatibles. Calcula $P((A \cup B)')$ y $P(A' \cup B')$, (A' significa suceso complementario).

Calculamos la probabilidad de la intersección de A y B.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0.27 \\ P(B') = 0.82 \rightarrow P(B) = 1 - P(B') = 1 - 0.82 = 0.18 \\ P(A \cup B) = 0.4 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.4 = 0.27 + 0.18 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.27 + 0.18 - 0.4 = 0.05$$

Para que los sucesos A y B sean compatibles su intersección debe ser no vacía.

Debe ser $P(A \cap B) \neq 0$.

Como hemos calculado $P(A \cap B) = 0.05 \neq 0$.

Los sucesos A y B son compatibles.

Calculamos la probabilidad $P((A \cup B)')$ usando el suceso contrario.

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

Aplicamos las leyes de Morgan para el cálculo de $P(A' \cup B')$.

$$P(A' \cup B') = P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.05 = 0.95$$

Las probabilidades pedidas son $P((A \cup B)') = 0.6$ y $P(A' \cup B') = 0.95$.

EBAU Extraordinaria 2023



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2022-2023
Convocatoria:
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II**

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{1 + 4x^4 - x^2}{x}$$

(i) Halla el dominio y asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) de la función f en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

2.- (2 puntos) Dibuja el recinto limitado por las parábolas $y = x^2 - 8x$ e $y = 10 - x^2$. Calcula su área.

3.- (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

4.- (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real a la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

5.- (2 puntos)

(i) Determina las matrices cuadradas de dimensión 2×2 de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

Que satisfagan la siguiente identidad: $MM^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde M^T representa la matriz

traspuesta de M .

(ii) Resuelve el sistema

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

Sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

6.- (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20} , utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3 = -I$, donde I es la matriz identidad de orden tres.

7.- (2 puntos) La proyección ortogonal del punto $P(1, 0, -1)$, sobre el plano π es el punto $Q(-3, 2, 5)$. Halla la ecuación del plano π y las coordenadas del punto simétrico del P respecto a dicho plano π .

8.- (2 puntos) Determina la posición relativa de los tres planos, según los valores del parámetro m :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

9.- (2 puntos) La estadística de un equipo de baloncesto en un partido, desvela que el 45 % de los puntos conseguidos por el equipo corresponde al jugador número 23, de los cuales el 65 % son triples, 15 % al jugador número 6 de los cuales el 25 % son triples y el resto de la puntuación, siendo el 10% triples, corresponde a otros jugadores del equipo. Halla la probabilidad de que:

(i) una de las jugadas del equipo haya acabado en un triple.

(ii) sabiendo que la canasta ha sido un triple, haya sido conseguida por el jugador número 23.

10.- (2 puntos) La estatura media de un jugador de fútbol del Real Madrid sigue una distribución normal de media 180 cm y desviación típica 10 cm. Si se elige un jugador al azar, calcula:

(i) la probabilidad de que su altura sea superior o igual a 200 cm;

(ii) la probabilidad de que su altura esté entre 170 y 190 cm.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES**1.- (2 puntos)** Sea

$$f(x) = \frac{1+4x^4-x^2}{x}$$

(i) Halla el dominio y asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) de la función f en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

(i) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Asíntota vertical. $x = a$ ¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+4x^4-x^2}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

 $x = 0$ es asíntota vertical.**Asíntota horizontal.** $y = b$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+4x^4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{4x^4}{x} - \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 4x^3 - x = \frac{1}{\infty} + \infty = \boxed{+\infty}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+4x^4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + 4x^3 - x = \frac{1}{\infty} - \infty = \boxed{-\infty}$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+4x^4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+4x^4-x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 4x^2 - 1 = \frac{1}{\infty} + \infty = \infty$$

No tiene asíntota oblicua.

La función tiene una asíntota vertical: $x = 0$ y no tiene ni asíntota horizontal ni oblicua.

(ii) Usamos la función derivada.

$$f(x) = \frac{1+4x^4-x^2}{x} = \frac{1}{x} + 4x^3 - x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 12x^2 - 1$$

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} + 12x^2 - 1 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = -\frac{1}{x^2} + 12x^2 - 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 12x^2 - 1 \Rightarrow 1 = 12x^4 - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x^4 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(12)(-1)}}{24} = \frac{1 \pm 7}{24} = \begin{cases} \frac{1+7}{24} = \frac{1}{3} = x^2 \rightarrow \boxed{x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}} \\ \frac{1-7}{24} = \frac{-1}{4} = x^2 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores. Añadimos el valor excluido del dominio.

- En el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} + 12(-1)^2 - 1 = 10 > 0. \text{ La función crece en } \left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right).$$

- En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right)$ tomamos $x = -0.1$ y la derivada vale

$$f'(-0.1) = -\frac{1}{(-0.1)^2} + 12(-0.1)^2 - 1 = -100.88 < 0. \text{ La función decrece en } \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right).$$

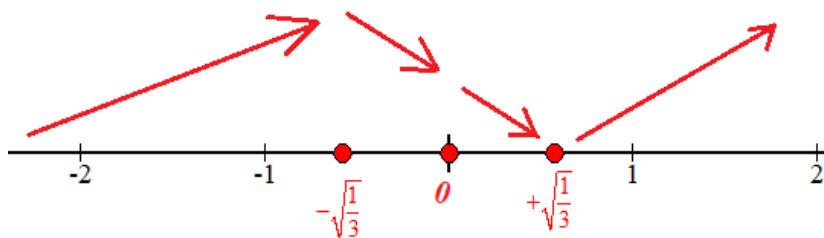
- En el intervalo $\left(0, +\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ tomamos $x = 0.1$ y la derivada vale

$$f'(0.1) = -\frac{1}{(0.1)^2} + 12(0.1)^2 - 1 = -100.88 < 0. \text{ La función decrece en } \left(0, +\sqrt{\frac{1}{3}}\right).$$

- En el intervalo $\left(+\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = -\frac{1}{1^2} + 12(1)^2 - 1 = 10 > 0. \text{ La función crece en } \left(+\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right).$$

La función decrece en $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right) \cup \left(0, +\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ y crece en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(+\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$.



La función presenta un máximo relativo en $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ y un mínimo relativo en $x = +\sqrt{\frac{1}{3}}$.

2.- (2 puntos) Dibuja el recinto limitado por las parábolas $y = x^2 - 8x$ e $y = 10 - x^2$. Calcula su área.

Determinamos los puntos de corte de ambas gráficas.

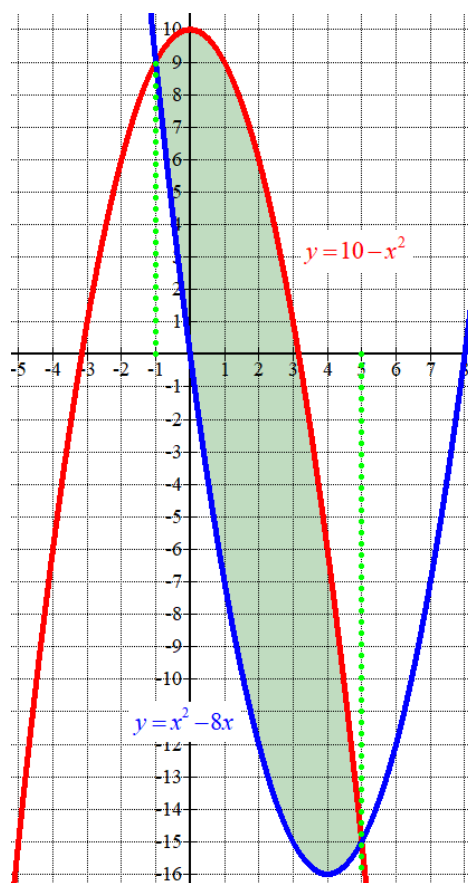
$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 8x \\ y = 10 - x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 8x = 10 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-5)}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{4+6}{2} = 5 = x \\ \frac{4-6}{2} = -1 = x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las dos parábolas.

x	$y = x^2 - 8x$
-1	9
0	0
1	-7
3	-15
4	-16 <i>Vértice</i>
5	-15

x	$y = 10 - x^2$
-1	9
0	10 <i>Vértice</i>
1	9
2	6
4	-6
5	-15



El área del recinto será el valor absoluto de la integral definida entre -1 y 5 de la diferencia de las dos funciones.

$$\text{Área} = \int_{-1}^5 10 - x^2 - (x^2 - 8x) dx = \int_{-1}^5 10 + 8x - 2x^2 dx = \left[10x + 4x^2 - 2\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^5 =$$

$$\left[10 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 - 2\frac{5^3}{3} \right] - \left[10(-1) + 4(-1)^2 - 2\frac{(-1)^3}{3} \right] = 50 + 100 - \frac{250}{3} + 10 - 4 - \frac{2}{3} = \boxed{72u^2}$$

El área tiene un valor de 72 unidades cuadradas.

3.- (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = (1)^{\frac{3}{0}} = 1^\infty = \text{Indeterminación (nº e)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} (\cos 2x - 1)} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} (\cos 2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 2x - 3}{x^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6 \sin 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin 2x}{x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6 \cos 2x}{1} = -6$$

$$\dots = e^{-6} = \boxed{\frac{1}{e^6}}$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \infty^0 = \text{Indeterminación} = L \Rightarrow \ln L = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln (1+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln (1+x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln (1+x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \ln L = 0 \Rightarrow L = 1$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = L = 1}$$

4.- (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real a la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (a+1)^3 + 1 - a - 1 - a - 1 - a - 1 = (a+1)^3 - 3a - 1 =$$

$$= a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - 3a - 1 = a^3 + 3a^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^3 + 3a^2 = 0 \Rightarrow a^2(a+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a+3 = 0 \rightarrow a = -3 \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa cuando $a \neq 0$ y $a \neq -3$.

Para $a = 2$ existe la inversa por lo visto anteriormente. La calculamos.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = 2^3 + 3 \cdot 2^2 = 20 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}{20} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 8 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/10 & -1/10 & 2/5 \\ 2/5 & -1/10 & -1/10 \\ -1/10 & 2/5 & -1/10 \end{pmatrix}$$

5.- (2 puntos)(i) Determina las matrices cuadradas de dimensión 2×2 de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

que satisfagan la siguiente identidad: $MM^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde M^T representa la matriz traspuesta de M .

(ii) Resuelve el sistema

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(i) \quad MM^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4+x^2=5 \rightarrow x^2=1 \Rightarrow \boxed{x=\pm 1} \\ xy=1 \rightarrow x=\frac{1}{y} \\ y^2=1 \rightarrow \boxed{y=\pm 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ o } M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(ii) Hallamos la solución del sistema.

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases} \Rightarrow Y + BY = C \Rightarrow (B+I)Y = C \Rightarrow Y = (B+I)^{-1}C \Rightarrow \dots$$

$$B+I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (B+I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((B+I)^T)}{|B+I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\dots \Rightarrow Y = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 30 & 6 \\ -15+21 & -3+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = Y \Rightarrow X = A^{-1}Y \Rightarrow \dots$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\dots \Rightarrow X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5-1 & 1-1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.- (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20} , utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3 = -I$, donde I es la matriz identidad de orden tres.

Para que tenga inversa la matriz debe tener determinante no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 15 + 12 - 16 - 12 - 0 = -1 \neq 0$$

La matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

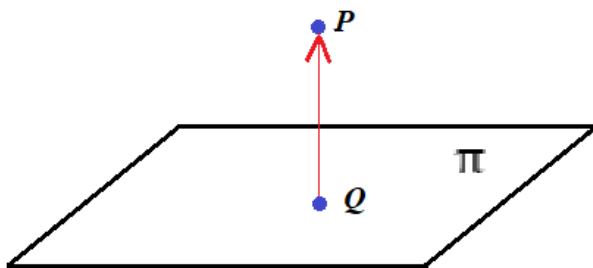
Si se cumple que $A^3 = -I$ entonces:

$$A^{20} = A^{3 \cdot 6 + 2} = (A^3)^6 \cdot A^2 = (-I)^6 \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{20} = \begin{pmatrix} 3-4 & -12+12 & -15+16 \\ -4+5 & 3+16-15 & 4+20-20 \\ 3-4 & -3-12+12 & -4-15+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

7.- (2 puntos) La proyección ortogonal del punto $P(1, 0, -1)$, sobre el plano π es el punto $Q(-3, 2, 5)$. Halla la ecuación del plano π y las coordenadas del punto simétrico del P respecto a dicho plano π .

El plano π contiene al punto $Q(-3, 2, 5)$. Además, el vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{PQ}$.



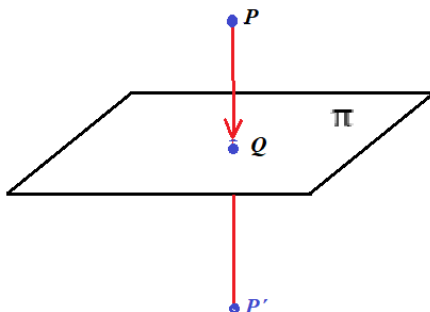
Obtenemos la ecuación del plano.

$$\overrightarrow{PQ} = (-3, 2, 5) - (1, 0, -1) = (-4, 2, 6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (-4, 2, 6) \\ Q(-3, 2, 5) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: -4x + 2y + 6z + D = 0 \\ Q(-3, 2, 5) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -4(-3) + 2(2) + 6(5) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 + 4 + 30 + D = 0 \Rightarrow D = -46 \Rightarrow \pi: -4x + 2y + 6z - 46 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -2x + y + 3z - 23 = 0}$$

Para hallar el punto P' simétrico de P respecto del plano π basta con sumar al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.



$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = (-3, 2, 5) + (-4, 2, 6) = (-7, 4, 11)$$

El punto simétrico de P respecto del plano π es el punto $P' = (-7, 4, 11)$

8.- (2 puntos) Determina la posición relativa de los tres planos, según los valores del parámetro m :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Consideramos la matriz de coeficientes A asociada al sistema $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$. Y la matriz

ampliada $A/B = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{pmatrix}$.

Calculamos el determinante de A y comprobamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 1 + 1 - m - m - m = m^3 - 3m + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^3 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & 1 & 1 & -2 & \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow m = 1 \text{ es raíz} \Rightarrow m^3 - 3m + 2 = (m-1)(m^2 + m - 2)$$

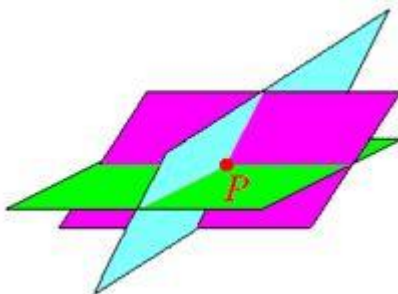
$$m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = m \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = m \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $m \neq 1$; $m \neq -2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3 al igual que el de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Los tres planos se cortan en un único punto.



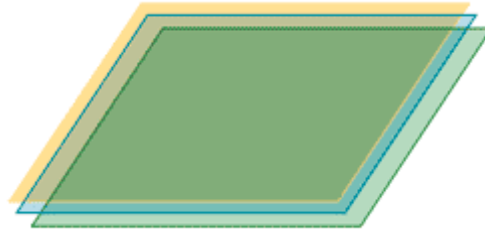
CASO 2. $m = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda tan sencillo que lo analizamos directamente.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Los tres planos son coincidentes (son el mismo plano)



CASO 3. $m = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Utilizamos el método de Gauss para estudiar la compatibilidad del sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a \\ 1 \quad 1 \quad -2 \quad 4 \\ -1 \quad 2 \quad -1 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -3 \quad 6 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\}$$

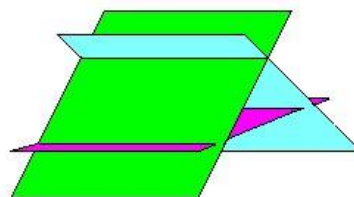
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a + 2 \cdot \text{Fila 2}^a \\ -2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 2 \quad -4 \quad 2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 3 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a + \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad 3 \quad -3 \quad 6 \\ 0 \quad -3 \quad 3 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución). Los planos no coinciden en ningún punto.

Las ecuaciones de los planos son $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$ y los vectores normales de los planos no

tienen coordenadas proporcionales y por tanto no son paralelos entre sí. Se cortan dos a dos en rectas que son paralelas entre sí.

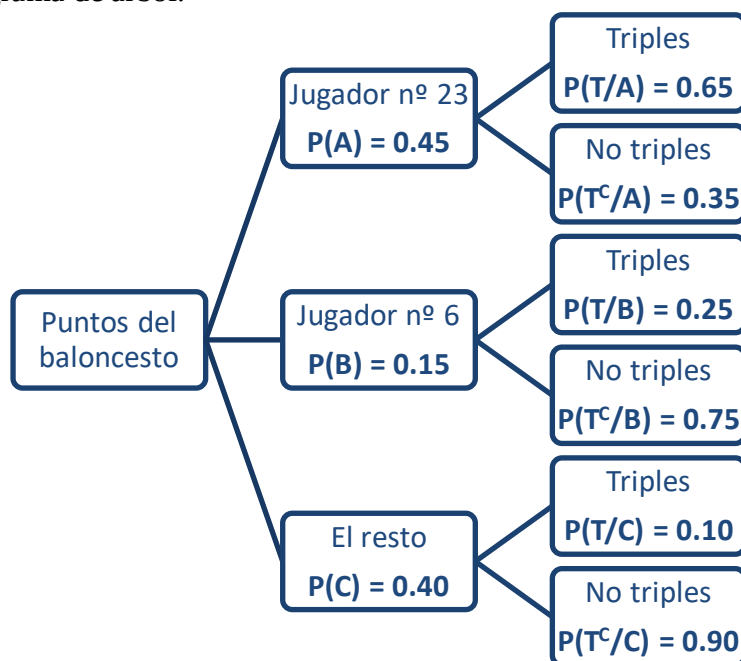


9.- (2 puntos) La estadística de un equipo de baloncesto en un partido, desvela que el 45 % de los puntos conseguidos por el equipo corresponde al jugador número 23, de los cuales el 65 % son triples, 15 % al jugador número 6 de los cuales el 25 % son triples y el resto de la puntuación, siendo el 10% triples, corresponde a otros jugadores del equipo. Halla la probabilidad de que:

(i) una de las jugadas del equipo haya acabado en un triple.

(ii) sabiendo que la canasta ha sido un triple, haya sido conseguida por el jugador número 23.

Hacemos un diagrama de árbol.



(i) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T) = \\
 &= P(A)P(T/A) + P(B)P(T/B) + P(C)P(T/C) = \\
 &= 0.45 \cdot 0.65 + 0.15 \cdot 0.25 + 0.40 \cdot 0.10 = \boxed{0.37}
 \end{aligned}$$

(ii) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{P(A)P(T/A)}{P(T)} = \frac{0.45 \cdot 0.65}{0.37} = \boxed{\frac{117}{148} \approx 0.791}$$

10.- (2 puntos) La estatura media de un jugador de fútbol del Real Madrid sigue una distribución normal de media 180 cm y desviación típica 10 cm. Si se elige un jugador al azar, calcula:

- (i) la probabilidad de que su altura sea superior o igual a 200 cm;
- (ii) la probabilidad de que su altura esté entre 170 y 190 cm.

X = Estatura media de un jugador de fútbol del Real Madrid en centímetros. $X = N(180, 10)$

- (i) Nos piden $P(X \geq 200)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 200) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{200-180}{10}\right) = P(Z \geq 2) = \\ &= 1 - P(Z \leq 2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228} \end{aligned}$$

- (ii) Nos piden $P(170 \leq X \leq 190)$.

$$\begin{aligned} P(170 \leq X \leq 190) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{170-180}{10} \leq Z \leq \frac{190-180}{10}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = \\ &= 2P(Z \leq 1) - 1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 2 \cdot 0.8413 - 1 = \boxed{0.6826} \end{aligned}$$

EBAU Ordinaria 2023



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2022-2023
Convocatoria:
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II**

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-1)}$$

- (i) Halla el dominio, asíntotas verticales y horizontales de la función f , en caso de que existan.
- (ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

2.- (2 puntos) Halla el área del recinto encerrado por las gráficas de las parábolas $y = x^2 - 2x + 1$ e $y = -2x^2 + 2x$.

3.- (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x^3)^{\frac{1}{x}}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2} - \frac{x^2 + 1}{x - 2} \right)$

4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado.

$$\begin{cases} x + (a+1)y + z = a \\ x + y + (a+1)z = a \\ (a+1)x + y + z = a \end{cases}$$

5.- (2 puntos) Dada una matriz de tamaño 4×4 cuyo determinante es igual a 2. Calcula el valor del determinante de la matriz resultante al realizar las siguientes operaciones:

- (i) Se traspone la matriz.
- (ii) Se cambian entre sí la primera y la cuarta columna.
- (iii) Se multiplica la tercera columna por -4 .
- (iv) Se multiplica toda la matriz por 4.

6.- (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real a la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a-1 & a^2-1 & 1 \\ a^2-1 & a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

7.- (2 puntos) Determina la posición relativa de la recta

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{1}$$

y el plano de ecuación $3x + 2y - 11z + 3 = 0$.

8.- (2 puntos) Halla el punto simétrico del punto $A(0, 2, 3)$ respecto al plano π de ecuación $x + y - z = 4$.

9.- (2 puntos) En una empresa automovilística se ha recibido un lote de piezas de coches de tipos A, B y C. El 80 % corresponde al coche de tipo A, el 10 % al B y el resto al C. Se ha observado que hay piezas que están defectuosas en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de B y el 5 % de C. Se elige una pieza al azar. Calcula:

- (i) la probabilidad de coger una pieza defectuosa.
- (ii) si sabemos que la pieza es defectuosa, la probabilidad de que sea del tipo A.

10.- (2 puntos) La edad media de un jugador de la NBA sigue una distribución normal de media 26 años y desviación típica 5 años. Si se elige un jugador al azar, halla:

- (i) La probabilidad de que su edad sea superior o igual a 31 años.
- (ii) La probabilidad de que su edad esté entre 21 y 31 años.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES**1.- (2 puntos)** Sea

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-1)}$$

(i) Halla el dominio, asíntotas verticales y horizontales de la función f , en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

(i) El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$(x-2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x-1=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.**Asíntota vertical.** $x = a$ ¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{0} = \infty$$

 $x=1$ es asíntota vertical.¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{2}{0} = \infty$$

 $x=2$ es asíntota vertical**Asíntota horizontal.** $y = b$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{1 - \frac{3}{\infty} + \frac{2}{\infty}} = \frac{0}{1} = 0$$

 $y=0$ es asíntota horizontal.La función tiene dos asíntotas verticales: $x=1$, $x=2$ y una asíntota horizontal $y=0$.

(ii) Usamos la función derivada.

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 3x + 2) - x(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 2 - 2x^2 + 3x}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{-x^2 + 2}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 2}{(x^2 - 3x + 2)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores. Añadimos los valores excluidos del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2})$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{-(-2)^2 + 2}{((-2)^2 - 3(-2) + 2)^2} = \frac{-2}{144} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -\sqrt{2}).$$

- En el intervalo $(-\sqrt{2}, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-0^2 + 2}{(0^2 - 0 + 2)^2} = \frac{2}{4} > 0$.

La función crece en $(-\sqrt{2}, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\sqrt{2})$ tomamos $x = 1.1$ y la derivada vale

$$f'(1.1) = \frac{-1.1^2 + 2}{(1.1^2 - 3 \cdot 1.1 + 2)^2} = \frac{0.79}{+} > 0. \text{ La función crece en } (1, +\sqrt{2}).$$

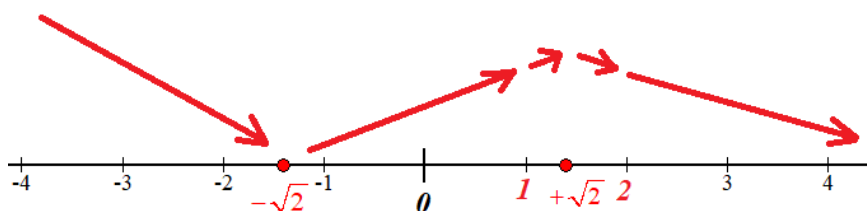
- En el intervalo $(+\sqrt{2}, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

$$f'(1.5) = \frac{-1.5^2 + 2}{(1.5^2 - 3 \cdot 1.5 + 2)^2} = \frac{-0.25}{+} < 0. \text{ La función decrece en } (+\sqrt{2}, 2).$$

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-3^2 + 2}{(3^2 - 3 \cdot 3 + 2)^2} = \frac{-7}{4} < 0$.

La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (+\sqrt{2}, 2) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(-\sqrt{2}, 1) \cup (1, +\sqrt{2})$.



La función presenta un mínimo relativo en $x = -\sqrt{2}$ y un máximo relativo en $x = +\sqrt{2}$.

2.- (2 puntos) Halla el área del recinto encerrado por las gráficas de las parábolas $y = x^2 - 2x + 1$ e $y = -2x^2 + 2x$.

Determinamos los puntos de corte de ambas gráficas.

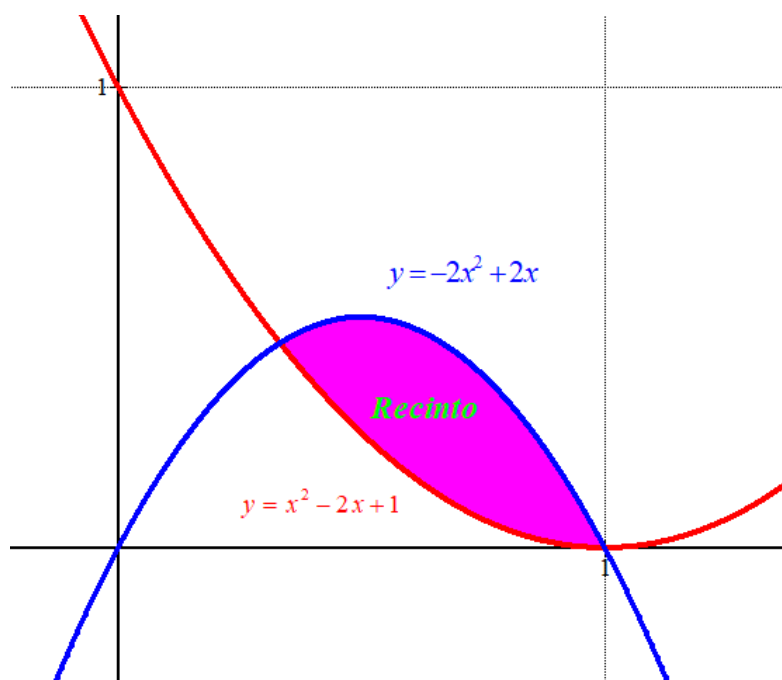
$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x^2 + 2x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -2x^2 + 2x \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \frac{4+2}{6} = 1 = x \\ \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} = x \end{cases}$$

El área del recinto será el valor absoluto de la integral definida entre $1/3$ y 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \int_{1/3}^1 -2x^2 + 2x - (x^2 - 2x + 1) dx &= \int_{1/3}^1 -3x^2 + 4x - 1 dx = \\ &= \left[-x^3 + 2x^2 - x \right]_{1/3}^1 = \left[-1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 \right] - \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \right] = \\ &= -1 + 2 - 1 + \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1-6+9}{27} = \boxed{\frac{4}{27} \approx 0.1489} \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $\frac{4}{27} \approx 0.1489$ unidades cuadradas.



3.- (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x^3)^{\frac{1}{x}}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2} - \frac{x^2 + 1}{x - 2} \right)$

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x^3)^{\frac{1}{x}} = (e^0 + 0^3)^{\frac{1}{0}} = 1^\infty = \text{Indeterminación (nº e)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (e^x + x^3 - 1)} = \dots$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (e^x + x^3 - 1) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x^3 - 1}{x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 3x^2}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x + 3x^2 = e^0 + 3 \cdot 0^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\dots = e^1 = \boxed{e}$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2} - \frac{x^2 + 1}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x^2 - 1)(x - 2) - (x^2 + 1)(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2 - (x^3 + 2x^2 + x + 2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^3} - 2x^2 - x + \cancel{2} - \cancel{x^3} - 2x^2 - x - \cancel{2}}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{4x^2}{x^2} - 2\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 - 2\frac{1}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{-4 - 2\frac{1}{\infty}}{1 - \frac{4}{\infty}} = \frac{-4}{1} = \boxed{-4}$$

4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado.

$$\begin{cases} x + (a+1)y + z = a \\ x + y + (a+1)z = a \\ (a+1)x + y + z = a \end{cases}$$

Consideramos la matriz de coeficientes A asociada al sistema $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Y la matriz

ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a+1 & a \\ a+1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

Calculamos el determinante de A y comprobamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (a+1)^3 + 1 - (a+1) - (a+1) - (a+1) =$$

$$= 1 + (a+1)^3 + 1 - 3a - 3 = -1 - 3a + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = a^3 + 3a^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^3 + 3a^2 = 0 \Rightarrow a^2(a+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 3 = 0 \rightarrow a = -3 \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$; $a \neq -3$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3 al igual que el de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a+1 & a \\ a+1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \hline 0 \quad -a \quad a \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ a+1 \quad 1 \quad 1 \quad a \\ -1 \quad -a-1 \quad -1 \quad -a \\ \hline a \quad -a \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 & a \\ 0 & -a & a & 0 \\ a & -a & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + (a+1)y + z = a \\ -ay + az = 0 \\ ax - ay = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \{a \neq 0\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + (a+1)y + z = a \\ -y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + (a+1)y + z = a \\ z = y \\ x = y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + (a+1)y + y = a \Rightarrow (a+3)y = a \Rightarrow \{a \neq -3\} \Rightarrow \boxed{y = \frac{a}{a+3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = y = z = \frac{a}{a+3}}$$

La solución cuando el sistema es compatible determinado ($a \neq 0$; $a \neq -3$) es $x = y = z = \frac{a}{a+3}$.

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Determinamos la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

A partir de la matriz equivalente obtenida seguimos resolviendo el sistema,

$$x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

Las soluciones del sistema compatible indeterminado ($a = 0$) es $\begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

CASO 3. $a = -3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Determinamos la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad -2 \quad -3 \\ -1 \quad 2 \quad -1 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad 1 \quad 1 \quad -3 \\ 2 \quad -4 \quad 2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 3 \quad -9 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -3 \quad 3 \quad -9 \\ 0 \quad 3 \quad -3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -9 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Tienen rangos distintos.
El sistema es incompatible.

5.- (2 puntos) Dada una matriz de tamaño 4×4 cuyo determinante es igual a 2. Calcula el valor del determinante de la matriz resultante al realizar las siguientes operaciones:

- (i) Se traspone la matriz.
- (ii) Se cambian entre sí la primera y la cuarta columna.
- (iii) Se multiplica la tercera columna por -4 .
- (iv) Se multiplica toda la matriz por 4.

Si llamamos A a la matriz del ejercicio tenemos que $|A| = 2$.

- (i) Por las propiedades de los determinantes tenemos que $|A| = |A^T|$.

El determinante de la matriz traspuesta es 2.

- (ii) Por las propiedades de los determinantes sabemos que el determinante cambia de signo. El determinante valdría -2 .

- (iii) Por las propiedades de los determinantes tenemos que el determinante de la nueva matriz es el determinante de A multiplicado por -4 , es decir, vale -8 .

- (iv) Por las propiedades de los determinantes tenemos que el determinante de la nueva matriz es el determinante de A multiplicado por $(4)^4$, por ser la matriz A de orden 4.

El determinante vale $(4)^4 \cdot 2 = 512$

6.- (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real a la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a-1 & a^2-1 & 1 \\ a^2-1 & a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Para que tenga inversa la matriz debe tener determinante no nulo.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a-1 & a^2-1 & 1 \\ a^2-1 & a-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a^2-1)(a+1) + (a^2-1) - (a-1)(a+1) - (a-1) = \\ &= (a-1)(a+1)(a+1) + (a-1)(a+1) - (a-1)(a+1) - (a-1) = \\ &= (a-1)[(a+1)(a+1) + (a+1) - (a+1) - 1] = \\ &= (a-1)[a^2 + 2a + 1 + a + 1 - a - 1 - 1] = \\ &= (a-1)[a^2 + 2a] = (a-1)a(a+2) \\ |A| = 0 &\Rightarrow (a-1)a(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 0 \\ a = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

La matriz A tiene inversa cuando " a " es distinto de 0, 1 y -2 .

Para $a = 2$ la matriz tiene inversa. La calculamos.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 9 + 3 - 3 - 1 = 8 \neq 0 \\ A^{-1} &= \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{8} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3/8 & 1/8 \\ 0 & 3/8 & -1/8 \\ -1 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

7.- (2 puntos) Determina la posición relativa de la recta

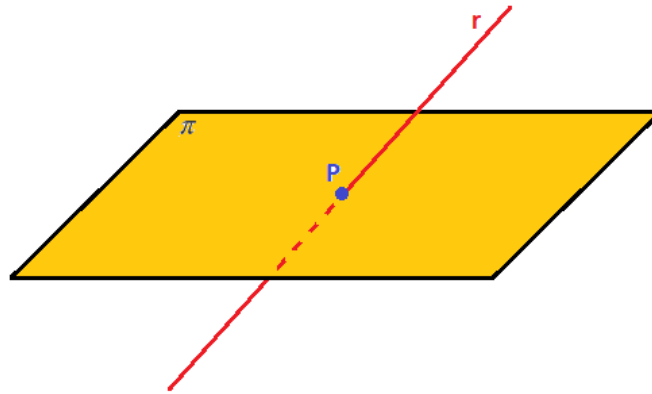
$$\frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{1}$$

y el plano de ecuación $3x + 2y - 11z + 3 = 0$.

Obtenemos el vector director de la recta y el vector normal del plano. Comprobamos si son ortogonales o no (paralelos - coincidentes o secantes).

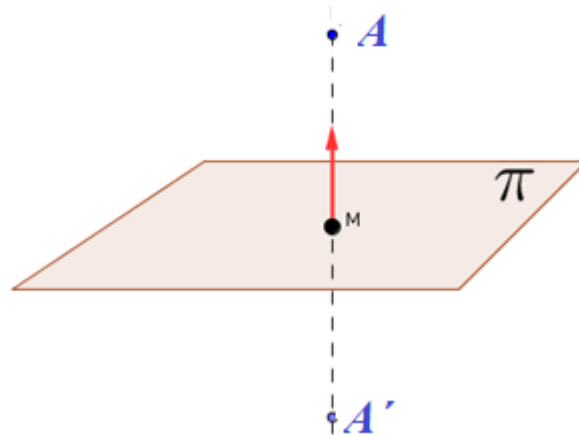
$$\left. \begin{array}{l} \frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{1} \Rightarrow \vec{v} = (0,1,1) \\ 3x + 2y - 11z + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (3,2,-11) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = (0,1,1)(3,2,-11) = 2 - 11 = -9 \neq 0$$

Al ser el producto escalar distinto de 0 los vectores no son perpendiculares $\rightarrow$ plano y recta son secantes (coinciden en un punto).



8.- (2 puntos) Halla el punto simétrico del punto $A(0, 2, 3)$ respecto al plano π de ecuación $x + y - z = 4$

Nos piden hallar las coordenadas del punto A' del dibujo.



Hallamos la recta r perpendicular al plano que pasa por el punto A . Esta recta tendrá como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x + y - z = 4 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, -1) \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, -1) \\ A(0, 2, 3) \in r \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

El punto M es la intersección de la recta r con el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y - z = 4 \\ r : \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow t + 2 + t - 3 + t = 4 \Rightarrow 3t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3} \\ z = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

El punto A' simétrico de A respecto del plano es el resultado de sumar al punto M el vector $\overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right) - (0, 2, 3) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$

$$A' = M + \overrightarrow{AM} = \left(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-5}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{16}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

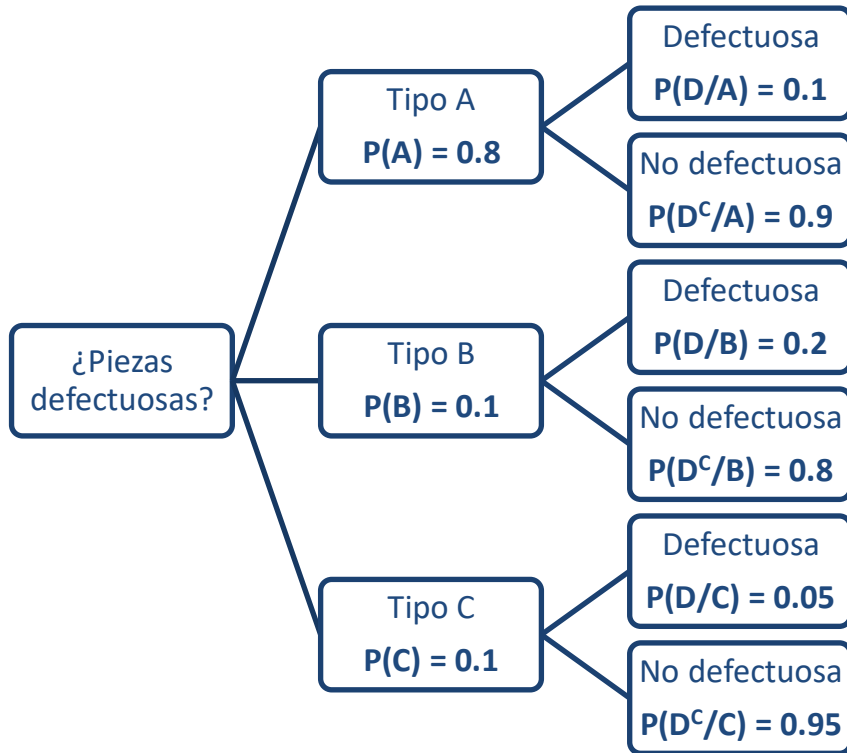
El punto simétrico es $A'\left(\frac{10}{3}, \frac{16}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

9.- (2 puntos) En una empresa automovilística se ha recibido un lote de piezas de coches de tipos A, B y C. El 80 % corresponde al coche de tipo A, el 10 % al B y el resto al C. Se ha observado que hay piezas que están defectuosas en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de B y el 5 % de C. Se elige una pieza al azar. Calcula:

(i) la probabilidad de coger una pieza defectuosa.

(ii) si sabemos que la pieza es defectuosa, la probabilidad de que sea del tipo A.

Hacemos un diagrama de árbol.



(i) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) = \\
 &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \\
 &= 0.8 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.05 = \boxed{0.105}
 \end{aligned}$$

(ii) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.8 \cdot 0.1}{0.105} = \boxed{\frac{16}{21} \approx 0.7619}$$

10.- (2 puntos) La edad media de un jugador de la NBA sigue una distribución normal de media 26 años y desviación típica 5 años. Si se elige un jugador al azar, halla:

- (i) La probabilidad de que su edad sea superior o igual a 31 años.
- (ii) La probabilidad de que su edad esté entre 21 y 31 años.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

X = Edad de un jugador de la NBA. $X = N(26, 5)$

(i) Nos piden calcular $P(X \geq 31)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 31) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{31-26}{5}\right) = P(Z \geq 1) = \\ &= 1 - P(Z \leq 1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587} \end{aligned}$$

(ii) Nos piden calcular $P(21 \leq X \leq 31)$.

$$\begin{aligned} P(21 \leq X \leq 31) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{21-26}{5} \leq Z \leq \frac{31-26}{5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = \\ &= 2P(Z \leq 1) - 1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 2 \cdot 0.8413 - 1 = \boxed{0.6826} \end{aligned}$$

EBAU Extraordinaria 2022



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2021-2022
Convocatoria: Extraordinaria
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II**

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$$

- (i) Halla el dominio, asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función f , en caso de que existan.
- (ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión si los hubiera.

2.- (2 puntos) Halla el valor de a y b para que la curva $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tenga en el punto $(x_0, -1)$ un punto de inflexión y la pendiente de la recta tangente valga 1.

3.- (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + az = 8 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

5.- (2 puntos) Calcula sin desarrollar el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Justifica en cada paso la propiedad de determinante que has utilizado.

6.- (2 puntos) Resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.- (2 puntos) Determina según los valores del parámetro real a la posición relativa de la recta

$$\begin{cases} ax + 3y - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

y el plano de ecuación $6x + 5y - 3z = 2$

8.- (2 puntos) Estudia según los valores del parámetro real a la posición relativa de las rectas siguientes:

$$\begin{cases} ax + 3y - 2z = 12, \\ 2x + 5y - z = 6 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x = 5 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 6 + 4\lambda \end{cases}$$

9.- (2 puntos) Estudia la posible dependencia de los sucesos A y B, en los siguientes casos:

- (i) A y B son incompatibles y ambos sucesos de probabilidad no nula.
- (ii) B está incluido en A, y B es un suceso de probabilidad no nula.

10.- (2 puntos) La presión arterial sistólica de una muestra de adolescentes sigue una distribución normal de media 120 años y desviación típica 12. Si se elige un adolescente al azar, halla:

- (i) la probabilidad de que su presión arterial sea superior a 132;
- (ii) la probabilidad de que su presión arterial esté entre 96 y 144.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$$

(i) Halla el dominio, asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función f , en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión si los hubiera.

i) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$(1+x)^2 = 0 \Rightarrow 1+x = 0 \Rightarrow x = -1$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = -1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \frac{(-1)^3}{(1-1)^2} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical

Asíntotas horizontales. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} = \infty$$

Al no tener el límite un valor finito no hay asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{(1+x)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 + 2x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} = -2$$

$y = x - 2$ es la asíntota oblicua de $f(x)$

ii) Calculamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(1+x)^2 - 2(1+x)(x^3)}{(1+x)^4} = \frac{(1+x)[3x^2(1+x) - 2x^3]}{(1+x)^4}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(1+x) - 2x^3}{(1+x)^3} = \frac{3x^2 + 3x^3 - 2x^3}{(1+x)^3} = \frac{3x^2 + x^3}{(1+x)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 + x^3}{(1+x)^3} = 0 \Rightarrow 3x^2 + x^3 = 0 \Rightarrow x^2(3+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Calculamos la segunda derivada y sustituimos estos dos valores para averiguar qué tipo de punto crítico es cada uno de ellos.

$$f'(x) = \frac{3x^2 + x^3}{(1+x)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{(6x+3x^2)(1+x)^3 - 3(1+x)^2(3x^2+x^3)}{(1+x)^6}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x)^2[(6x+3x^2)(1+x) - 3(3x^2+x^3)]}{(1+x)^6} = \frac{(6x+3x^2)(1+x) - 3(3x^2+x^3)}{(1+x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{6x + \cancel{3x^2} + \cancel{6x^2} + \cancel{3x^3} - \cancel{9x^2} - \cancel{3x^3}}{(1+x)^4} = \frac{6x}{(1+x)^4}$$

Tenemos que $f''(0) = \frac{0}{(1+0)^4} = 0$. Comprobamos que $f'''(0) \neq 0$.

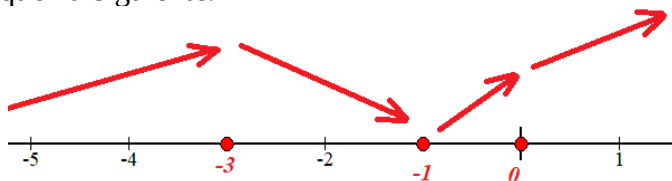
$$f'''(x) = \frac{6(1+x)^4 - 6x \cdot 4(1+x)^3}{(1+x)^8} \Rightarrow f'''(0) = \frac{6(1+0)^4 - 6 \cdot 0 \cdot 4(1+0)^3}{(1+0)^8} = 6 \neq 0$$

La función en $x=0$ presenta un punto de inflexión.

Estudiamos el cambio de signo de la derivada primera antes, entre y después de $x = -3$, $x = -1$ y $x = 0$ para establecer los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

- En $(-\infty, -3)$ tomamos $x = -4$ y la derivada vale $f'(-4) = \frac{(-4)^2(3-4)}{(1-4)^3} = \frac{16}{27} > 0$. La función crece en $(-\infty, -3)$.
- En $(-3, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{(-2)^2(3-2)}{(1-2)^3} = -4 < 0$. La función decrece en $(-3, -1)$.
- En $(-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale $f'(-0.5) = \frac{(-0.5)^2(3-0.5)}{(1-0.5)^3} = 5 > 0$. La función crece en $(-1, 0)$.
- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1^2(3+1)}{(1+1)^3} = \frac{1}{2} > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ y decrece en $(-3, -1)$.

La función tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

La función tiene un máximo relativo en $x = -3$.

2.- (2 puntos) Halla el valor de a y b para que la curva $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tenga en el punto $(x_0, -1)$ un punto de inflexión y la pendiente de la recta tangente valga 1.

Calculamos las derivadas primera y segunda de la función.

$$y = x^3 + ax^2 + bx + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow y'' = 6x + 2a$$

Averiguamos las coordenadas del punto de inflexión sabiendo que debe anular la derivada segunda.

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 2a = 0 \Rightarrow 6x = -2a \Rightarrow \boxed{x = \frac{-2a}{6} = \frac{-a}{3}}$$

En dicho punto la función vale -1 , pues las coordenadas del punto de inflexión son $(x_0, -1)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^3 + ax^2 + bx + 1 \\ y\left(\frac{-a}{3}\right) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 = \left(\frac{-a}{3}\right)^3 + a\left(\frac{-a}{3}\right)^2 + b\left(\frac{-a}{3}\right) + 1 \Rightarrow -1 = \frac{-a^3}{27} + a\frac{a^2}{9} - \frac{ab}{3} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -27 = -a^3 + 3a^3 - 9ab + 27 \Rightarrow \boxed{2a^3 - 9ab + 54 = 0}$$

En dicho punto la derivada vale 1, pues la pendiente de la recta tangente es 1.

$$\left. \begin{array}{l} y' = 3x^2 + 2ax + b \\ y'\left(\frac{-a}{3}\right) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = 3\left(\frac{-a}{3}\right)^2 + 2a\left(\frac{-a}{3}\right) + b \Rightarrow 1 = 3\frac{a^2}{9} - \frac{2a^2}{3} + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b \Rightarrow 3 = a^2 - 2a^2 + 3b \Rightarrow \boxed{a^2 - 3b + 3 = 0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema e intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} 2a^3 - 9ab + 54 = 0 \\ a^2 - 3b + 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a^3 - 3a(3b) + 54 = 0 \\ a^2 + 3 = 3b \end{array} \right\} \Rightarrow 2a^3 - 3a(a^2 + 3) + 54 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^3 - 3a^3 - 9a + 54 = 0 \Rightarrow -a^3 - 9a + 54 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & -9 & 54 \\ 3 & & -3 & -9 & -54 \\ \hline & -1 & -3 & -18 & \underline{0} \end{array} \Rightarrow -a^3 - 9a + 54 = (a-3)(-a^2 - 3a - 18)$$

$$(a-3)(-a^2-3a-18)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=3} \\ -a^2-3a-18=0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-3)(-18)}}{-2} = \frac{3 \pm \sqrt{-207}}{-2} \quad \text{no} \end{cases}$$

Por lo que el valor del parámetro a debe ser $a = 3$.

Sustituimos en una ecuación y hallamos el valor de b .

$$\begin{cases} a^2 + 3 = 3b \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow 9 + 3 = 3b \Rightarrow \boxed{b = \frac{12}{3} = 4}$$

Los valores buscados son $a = 3$ y $b = 4$.

3.- (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{tg} 0 - 0}{0 - \operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x (1 - \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{(1 - \cos x)} (1 + \cos x)}{\cos^2 x \cancel{(1 - \cos x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \cos 0}{\cos^2 0} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = 1^\infty = \text{Indeterminación (n}^\circ \text{e)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4x^3 - 6x^2}{4x^3 - 1} - 1 \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\cancel{4x^3} - 6x^2 - \cancel{4x^3} + 1}{4x^3 - 1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6x^2 + 1}{4x^3 - 1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{4x^3 - 1}{-6x^2 + 1}} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{4x^3 - 1}{-6x^2 + 1}} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{4x^3 - 1}{-6x^2 + 1}} \right)^{\frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{-6x^2 + 1}{4x^3 - 1}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{-6x^2 + 1}{4x^3 - 1}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^4 + x^2 - 6x^2 + 1}{4x^4 - x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^4 - 5x^2 + 1}{4x^4 - x}} = e^{-\frac{6}{4}} = \boxed{e^{-\frac{3}{2}}}$$

4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + az = 8 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

Utilizamos el método de Gauss para convertir este sistema en otro equivalente más sencillo.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + az = 8 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x & -y & +z & = -2 \\ -x & -y & -z & = -2 \\ \hline & -2y & & = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x & +2y & +az & = 8 \\ -x & -y & -z & = -2 \\ \hline & y & +(a-1)z & = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación 3}^a - 2 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 2x & -y & -z & = 1 \\ -2x & -2y & -2z & = -4 \\ \hline & -3y & -3z & = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -3y - 3z = -3 \\ y + (a-1)z = 6 \\ -2y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z = 1 \\ y + (a-1)z = 6 \\ \boxed{y = \frac{-4}{-2} = 2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 + z = 2 \\ 2 + z = 1 \\ 2 + (a-1)z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ \boxed{z = -1} \\ (a-1)z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ (a-1)(-1) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1} \\ -a + 1 = 4 \rightarrow \boxed{a = -3} \end{cases}$$

El sistema tiene solución única cuando $a = -3$. La solución es $x = 1, y = 2, z = -1$.

Si $a \neq -3$ entonces no tiene solución pues la ecuación final nos llevaría a una igualdad imposible.

5.- (2 puntos) Calcula sin desarrollar el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Justifica en cada paso la propiedad de determinante que has utilizado.

$$\begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Saco 2 como factor común} \\ \text{de 1ª columna} \end{array} \right\} = 2 \begin{vmatrix} 1 & b & c+a \\ 1 & a & b+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 2^{\text{a}} \text{ fila} - 1^{\text{a}} \text{ fila} \\ 1 \quad a \quad b+c \\ -1 \quad -b \quad -c-a \\ \hline 0 \quad a-b \quad b-a \rightarrow \text{Nueva fila } 2^{\text{a}} \\ \text{Determinante no cambia} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 3^{\text{a}} \text{ fila} - 1^{\text{a}} \text{ fila} \\ 1 \quad c \quad a+b \\ -1 \quad -b \quad -c-a \\ \hline 0 \quad c-b \quad b-c \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{\text{a}} \\ \text{Determinante no cambia} \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & b & c+a \\ 0 & a-b & b-a \\ 0 & c-b & b-c \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Columna } 2^{\text{a}} + \text{Columna } 3^{\text{a}} \rightarrow \text{Nueva columna } 2^{\text{a}} \\ \text{El determinante no cambia} \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & c+a \\ 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & b-c \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Determinante de matriz triangular} \\ \text{igual al producto de los elementos} \\ \text{de la diagonal principal} \end{array} \right\} = 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (b-c) = \boxed{0}$$

6.- (2 puntos) Resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 0 + 0 + 0 - 5 = 1 \neq 0$$

Existe la inversa de A y la calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es $X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.- (2 puntos) Determina según los valores del parámetro real a la posición relativa de la recta

$$\begin{cases} ax + 3y - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

y el plano de ecuación $6x + 5y - 3z = 2$

Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos que definen la recta y el plano dado en el ejercicio.

$$\begin{cases} 6x + 5y - 3z = 2 \\ ax + 3y - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

Estudiamos su compatibilidad.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 \\ a & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 5 & -3 \\ a & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 18 - 20 + 3a + 18 - 5a - 12 = -2a + 4$$

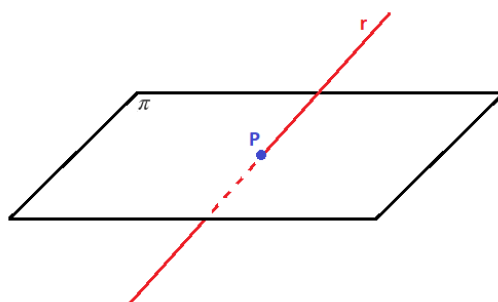
$$|A| = 0 \Rightarrow -2a + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Hay dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

SITUACIÓN 1. $a \neq 2$

En esta situación el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una solución única.

Geométricamente significa que la recta y el plano son secantes (el punto que tiene por coordenadas la solución del sistema)



SITUACIÓN 2. $a = 2$

En esta situación el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

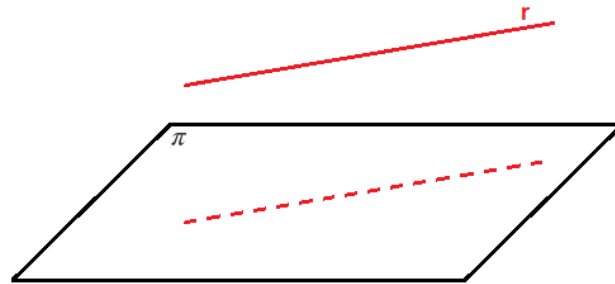
Aplicamos el método de Gauss para transformarla en una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 6 \quad 5 \quad -3 \quad 2 \\ -6 \quad -9 \quad 6 \quad -12 \\ \hline 0 \quad -4 \quad 3 \quad -10 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 6 \quad 5 \quad -3 \quad 2 \\ -6 \quad 3 \quad -3 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 8 \quad -6 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -10 \\ 0 & 8 & -6 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 8 \quad -6 \quad -4 \\ 0 \quad -8 \quad 6 \quad -20 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -24 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{6 \quad 5 \quad -3 \quad 2}^{A/B} \\ 0 \quad -4 \quad 3 \quad -10 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -24}_A \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2 y la matriz ampliada A/B tiene rango 3. El sistema es incompatible (no tiene solución). Geométricamente significa que plano y recta son paralelos (no tienen ningún punto en común).



Resumiendo: Si $a = 2$ recta y plano son paralelos y si $a \neq 2$ recta y plano son secantes (coinciden en un punto)

8.- (2 puntos) Estudia según los valores del parámetro real a la posición relativa de las rectas siguientes:

$$\begin{cases} ax + 3y - 2z = 12, \\ 2x + 5y - z = 6 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x = 5 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 6 + 4\lambda \end{cases}$$

Hallamos punto y vector director de cada recta.

$$\begin{cases} ax + 3y - 2z = 12, \\ 2x + 5y - z = 6 \end{cases}$$

$$\text{Si } \boxed{x=0} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2z = 12, \\ 5y - z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2z = 12, \\ -10y + 2z = -12 \end{cases}$$

$$\overline{-7y = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow 5 \cdot 0 - z = 6 \Rightarrow \boxed{z=-6} \Rightarrow \boxed{A(0,0,-6)}$$

$$\text{Si } x=1 \Rightarrow \begin{cases} a + 3y - 2z = 12, \\ 2 + 5y - z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2z = 12 - a \\ 5y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2z = 12 - a \\ -10y + 2z = -8 \end{cases}$$

$$\overline{-7y = 4 - a}$$

$$\Rightarrow y = \frac{4-a}{-7} \Rightarrow 5 \frac{4-a}{-7} - z = 4 \Rightarrow \frac{20-5a}{-7} - z = 4 \Rightarrow 20 - 5a + 7z = -28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7z = 5a - 48 \Rightarrow z = \frac{5a-48}{7} \Rightarrow \boxed{B\left(1, \frac{a-4}{7}, \frac{5a-48}{7}\right)}$$

El vector director de la primera recta es

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \left(1, \frac{a-4}{7}, \frac{5a-48}{7}\right) - (0,0,-6) = \left(1, \frac{a-4}{7}, \frac{5a-48}{7} + 6\right) = \left(1, \frac{a-4}{7}, \frac{5a-48+42}{7}\right)$$

$$\vec{u} = \left(1, \frac{a-4}{7}, \frac{5a-6}{7}\right) \Rightarrow \vec{v} = 7\vec{u} = (7, a-4, 5a-6)$$

En la primera recta:

$$\begin{cases} ax + 3y - 2z = 12, \\ 2x + 5y - z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0,0,-6) \\ \vec{v} = (7, a-4, 5a-6) \end{cases}$$

En la segunda recta:

$$\begin{cases} x = 5 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 6 + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(5, 1, 6) \\ \vec{w} = (3, -1, 4) \end{cases}$$

Para que las rectas sean paralelas o coincidentes deben tener coordenadas proporcionales los vectores directores:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (7, a-4, 5a-6) \\ \vec{w} = (3, -1, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{7}{3} = \frac{a-4}{-1} = \frac{5a-6}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{3} = \frac{a-4}{-1} \Rightarrow -7 = 3a-12 \Rightarrow 3a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} = \frac{5a-6}{4} \Rightarrow 28 = 15a-18 \Rightarrow 15a = 46 \Rightarrow a = \frac{46}{15} \end{cases} \Rightarrow \text{¡No es posible!}$$

Las rectas no pueden ser ni paralelas ni coincidentes.

Veamos si se cortan o cruzan en función del parámetro a .

$$\left. \begin{array}{l} A(0, 0, -6) \\ C(5, 1, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (5, 1, 6) - (0, 0, -6) = (5, 1, 12)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (7, a-4, 5a-6) \\ \vec{w} = (3, -1, 4) \\ \overrightarrow{AC} = (5, 1, 12) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} 7 & a-4 & 5a-6 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= -84 + 20a - 80 + 15a - 18 + 25a - 30 - 36a + 144 - 28 = 24a - 96$$

$$[\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AC}] = 0 \Rightarrow 24a - 96 = 0 \Rightarrow a = \frac{96}{24} = 4$$

Si $a = 4$ entonces $[\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AC}] = 0$ y las rectas se cortan.

Si $a \neq 4$ entonces $[\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AC}] \neq 0$ y las rectas se cruzan.

9.- (2 puntos) Estudia la posible dependencia de los sucesos A y B, en los siguientes casos:

- (i) A y B son incompatibles y ambos sucesos de probabilidad no nula.
- (ii) B está incluido en A, y B es un suceso de probabilidad no nula.

Para que dos sucesos A y B sean independientes debe cumplirse: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

- i)** Si A y B son incompatibles significa que $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

Como A y B son dos sucesos de probabilidad no nula tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} P(A) \neq 0 \\ P(B) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A)P(B) \neq 0$$

Comparando lo obtenido:

$$P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

- ii)** Si B está incluido en A tenemos que:

$$A \cap B = B \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)$$

Como B es un suceso de probabilidad no nula entonces $0 < P(B) < 1$.

Multiplicamos la inecuación por $P(A) > 0$

$$0 < P(A)P(B) < P(A) = P(A \cap B) \Rightarrow P(A)P(B) \neq P(A \cap B)$$

Los sucesos no son independientes.

10.- (2 puntos) La presión arterial sistólica de una muestra de adolescentes sigue una distribución normal de media 120 años y desviación típica 12. Si se elige un adolescente al azar, halla:

- (i) la probabilidad de que su presión arterial sea superior a 132;
(ii) la probabilidad de que su presión arterial esté entre 96 y 144.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

X = La presión arterial sistólica de un adolescente. $X = N(120, 12)$

- i) Nos piden calcular $P(X > 132)$.

$$P(X > 132) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{132-120}{12}\right) =$$

$$= P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla}\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

z	0	0
0	0,5000	0,5
0,1	0,5398	0,5
0,2	0,5793	0,5
0,3	0,6179	0,6
0,4	0,6554	0,6
0,5	0,6915	0,6
0,6	0,7257	0,7
0,7	0,7580	0,7
0,8	0,7881	0,7
0,9	0,8159	0,8
1	0,8413	0,8
1,1	0,8643	0,8

- ii) Nos piden calcular $P(96 < X < 144)$.

$$P(96 < X < 144) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{96-120}{12} < Z < \frac{144-120}{12}\right) =$$

$$= P(-2 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -2) = P(Z < 2) - P(Z \geq 2) =$$

$$= P(Z < 2) - [1 - P(Z \leq 2)] = \{\text{Miramos en la tabla}\} =$$

$$= 0.9772 - [1 - 0.9772] = \boxed{0.9544}$$

z	0	0,0
0	0,5000	0,50
0,1	0,5398	0,54
0,2	0,5793	0,58
0,3	0,6179	0,62
0,4	0,6554	0,65
0,5	0,6915	0,69
0,6	0,7257	0,72
0,7	0,7580	0,76
0,8	0,7881	0,79
0,9	0,8159	0,81
1	0,8413	0,84
1,1	0,8643	0,86
1,2	0,8849	0,88
1,3	0,9032	0,90
1,4	0,9192	0,92
1,5	0,9332	0,93
1,6	0,9452	0,94
1,7	0,9554	0,95
1,8	0,9641	0,96
1,9	0,9713	0,97
2	0,9772	0,97

EBAU Ordinaria 2022



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2021-2022
Convocatoria:
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II**

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Dada la curva $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 4$

- (i) Halla los puntos de la curva en los que la recta tangente a ésta pase por el punto $(0, 0)$.
- (ii) Da las ecuaciones de las rectas tangentes.

2.- (2 puntos) Halla el área de la región que delimita la gráfica de la función $g(x) = x \operatorname{sen} x$ y el eje de abscisas en el intervalo que va de $x = 0$ al menor valor $b > 0$ tal que $g(b) = 0$.

3.- (2 puntos) Determina, si existe, el valor de a de tal manera que:

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} - (3x - 1) \right) = 2$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + a}{3x - 1} \right)^x = e$

4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado.

$$\begin{cases} x + y + az = a \\ ax + ay + z = 1 \\ x + ay + z = a \end{cases}$$

5.- (2 puntos) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- (i) Determina para que valores de a la matriz AB tiene inversa.
- (ii) Resuelve para $a = 0$ la ecuación matricial $ABX = 3I$, siendo I la matriz identidad.

6.- (2 puntos) Determina los valores de los parámetros a , b y c para los que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$$

7.- (2 puntos) Halla la ecuación de una recta paralela al plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y que contenga al punto $P(1, 0, 1)$. ¿Es única dicha recta? Razona la respuesta.

8.- (2 puntos) Determina los valores de los parámetros a , y b para que el plano π contenga a la recta r , donde:

$$\pi \equiv ax + y + z = b, \quad r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1, \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

9.- (2 puntos) En un distrito universitario, los estudiantes se distribuyen entre las tres carreras que pueden cursarse del siguiente modo: el 20 % estudian Matemáticas, el 35 % Medicina y el 45 % Arquitectura. El porcentaje de alumnos que finalizan sus estudios en cada caso es del 5%, 12% y del 18%. Se elige un alumno al azar. Halla la probabilidad de que:

- (i) finalice sus estudios.
- (ii) estudie Medicina si no finaliza sus estudios.

10.- (2 puntos) Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 4 y desviación típica 2. Calcula el valor de a para que:

$$P(4 - a \leq X \leq 4 + a) = 0,5934$$

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos) Dada la curva $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 4$

(i) Halla los puntos de la curva en los que la recta tangente a ésta pase por el punto (0, 0).

(ii) Da las ecuaciones de las rectas tangentes.

(i) La ecuación de la recta tangente en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 4 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{4}x + 4 = \frac{1}{2}x + 4$$

$$\left. \begin{array}{l} y - f(a) = f'(a)(x - a) \\ f(a) = \frac{1}{4}a^2 + 4a + 4 \\ f'(a) = \frac{1}{2}a + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow y - \left(\frac{1}{4}a^2 + 4a + 4 \right) = \left(\frac{1}{2}a + 4 \right)(x - a)$$

Hacemos que la recta tangente pase por el punto (0, 0) y sustituimos $x = 0, y = 0$.

$$0 - \left(\frac{1}{4}a^2 + 4a + 4 \right) = \left(\frac{1}{2}a + 4 \right)(0 - a) \Rightarrow -\frac{1}{4}a^2 - 4a - 4 = \left(\frac{1}{2}a + 4 \right)(-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}a^2 - 4a - 4 = -\frac{1}{2}a^2 - 4a \Rightarrow \left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{2} \right)a^2 - 4 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 = 4 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \sqrt{16} = \pm 4}$$

La situación pedida se cumple en dos puntos de la curva:

$$a = -4 \Rightarrow f(-4) = \frac{1}{4}(-4)^2 + 4(-4) + 4 = 4 - 16 + 4 = -8 \Rightarrow \boxed{A(-4, -8)}$$

$$a = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{1}{4}4^2 + 4(4) + 4 = 4 + 16 + 4 = 24 \Rightarrow \boxed{B(4, 24)}$$

(ii) Sustituimos los valores en la ecuación de las rectas tangentes.

$$a = -4 \Rightarrow y - f(-4) = \left(\frac{1}{2}(-4) + 4 \right)(x - (-4)) \Rightarrow y - (-8) = 2(x + 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 8 = 2x + 8 \Rightarrow \boxed{y = 2x} \text{ Recta tangente a la curva en } x = -4$$

$$a = 4 \Rightarrow y - f(4) = \left(\frac{1}{2}(4) + 4 \right)(x - 4) \Rightarrow y - 24 = 6(x - 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 24 = 6x - 24 \Rightarrow \boxed{y = 6x} \text{ Recta tangente a la curva en } x = 4$$

2.- (2 puntos) Halla el área de la región que delimita la gráfica de la función $g(x) = x \operatorname{sen} x$ y el eje de abscisas en el intervalo que va de $x = 0$ al menor valor $b > 0$ tal que $g(b) = 0$.

Hallamos los puntos de corte de la gráfica y el eje de abscisas ($y = 0$).

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = x \operatorname{sen} x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0; \boxed{x = \pi}; x = 2\pi; \dots \end{cases}$$

La región de la cual queremos hallar el área está entre $x = 0$ y $x = \pi$. Hallamos dicho área con el cálculo integral.

$$\text{Área} = \left| \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x dx \right|$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int x \operatorname{sen} x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ x = u \rightarrow dx = du \\ \operatorname{sen} x dx = dv \rightarrow v = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x \end{array} \right\} = x(-\cos x) - \int -\cos x dx =$$

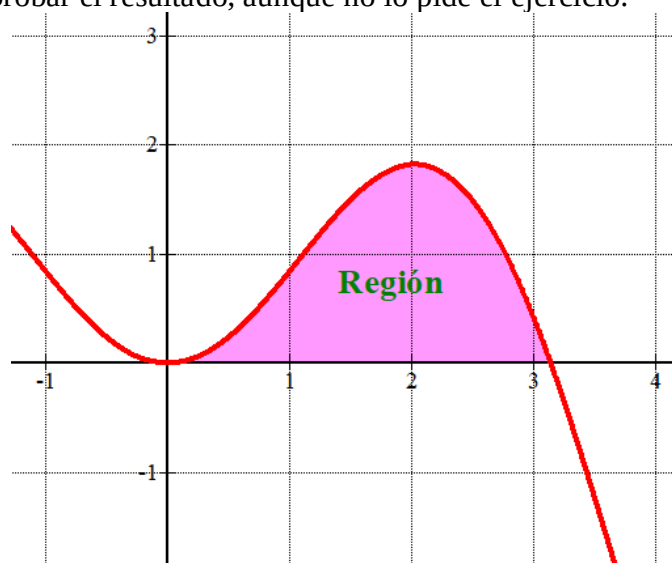
$$= -x \cos x + \int \cos x dx = \boxed{-x \cos x + \operatorname{sen} x}$$

Lo aplicamos al cálculo del área.

$$\text{Área} = \left| \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x dx \right| = \left| [-x \cos x + \operatorname{sen} x]_0^{\pi} \right| = \left| [-\pi \cos \pi + \operatorname{sen} \pi] - [-0 \cos 0 + \operatorname{sen} 0] \right|$$

$$\boxed{\text{Área} = |-\pi(-1) + 0 - 0| = \pi u^2}$$

Dibujamos para comprobar el resultado, aunque no lo pide el ejercicio.



3.- (2 puntos) Determina, si existe, el valor de a de tal manera que:

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} - (3x - 1) \right) = 2$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + a}{3x - 1} \right)^x = e$$

(i) Calculamos el valor del límite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} - (3x - 1) \right) &= \infty - \infty = \text{Indeterminación} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} - (3x - 1) \right) \left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} + (3x - 1) \right)}{\sqrt{9x^2 + ax + 1} + (3x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} \right)^2 - (3x - 1)^2}{\sqrt{9x^2 + ax + 1} + (3x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + ax + 1 - (9x^2 + 1 - 6x)}{\sqrt{9x^2 + ax + 1} + (3x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{9x^2} + ax + \cancel{1} - \cancel{9x^2} - \cancel{1} + 6x}{\sqrt{9x^2 + ax + 1} + (3x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a + 6)x}{\sqrt{9x^2 + ax + 1} + 3x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a + 6)x}{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2} + \frac{ax}{x^2} + \frac{1}{x^2}} + \frac{3x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a + 6)x}{\sqrt{9 + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3 - \frac{1}{x}} = \frac{a + 6}{\sqrt{9} + 3} = \frac{a + 6}{6} \end{aligned}$$

Lo igualamos a 2.

$$\frac{a + 6}{6} = 2 \Rightarrow a + 6 = 12 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

(ii) Calculamos el valor del límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + a}{3x - 1} \right)^x &= 1^\infty = \text{Indeterminación} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{3x + a}{3x - 1} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{3x + a - 3x + 1}{3x - 1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{a + 1}{3x - 1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a + 1)x}{3x - 1}} = e^{\frac{a + 1}{3}} \end{aligned}$$

Lo igualamos a e .

$$e^{\frac{a + 1}{3}} = e = e^1 \Rightarrow \frac{a + 1}{3} = 1 \Rightarrow a + 1 = 3 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado.

$$\begin{cases} x + y + az = a \\ ax + ay + z = 1 \\ x + ay + z = a \end{cases}$$

Consideramos la matriz de coeficientes A asociada al sistema $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$. Y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de A y comprobamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a + 1 + a^3 - (a^2 + a + a) = a^3 - a^2 - a + 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^3 - a^2 - a + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow x = 1 \text{ es raíz}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \text{ son raíces}$$

CASO 1. $a \neq 1$; $a \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3 al igual que el de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - a \cdot \text{Fila } 1^a \\ a & a & 1 & 1 \\ -a & -a & -a^2 & -a^2 \\ \hline 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 & a & 1 & a \\ -1 & -1 & -a & -a \\ \hline 0 & a-1 & 1-a & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Intercambiamos la fila } 2^{\text{a}} \text{ y la fila } 3^{\text{a}}\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Pasamos a resolver el sistema, a partir de la matriz equivalente obtenida.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + az = a \\ (a-1)y + (1-a)z = 1-a \\ (1-a^2)z = 1-a^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Como } 1-a^2 \neq 0 \\ \text{puedo despejar "z" en la } 3^{\text{a}} \text{ ecuación} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + az = a \\ (a-1)y + (1-a)z = 0 \\ \boxed{z = \frac{1-a^2}{1-a^2} = 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + a = a \\ (a-1)y + (1-a) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ (a-1)y = a-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Como } a-1 \neq 0 \\ \text{puedo despejar "y" en la } 2^{\text{a}} \text{ ecuación} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ \boxed{y = \frac{a-1}{a-1} = 1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

La solución cuando el sistema es compatible determinado ($a \neq 1$; $a \neq -1$) es $x = -1$; $y = 1$; $z = 1$.

CASO 2. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Determinamos la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^{\text{a}} - \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^{\text{a}} - \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

A partir de la matriz equivalente obtenida seguimos resolviendo el sistema,

$$x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

Las soluciones del sistema compatible indeterminado ($a=1$) es $\begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

CASO 3. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Determinamos la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A/B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \\ -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 2 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambiamos la fila } 3^a \\ \text{con la fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

A partir de la matriz equivalente obtenida seguimos resolviendo el sistema,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - z = -1 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + y - z = -1 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = -1 \\ \boxed{y = z} \end{cases} \Rightarrow x + z - z = -1 \Rightarrow \boxed{x = -1} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

Las soluciones del sistema compatible indeterminado ($a = -1$) es $\begin{cases} x = -1 \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

5.- (2 puntos) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- (i) Determina para que valores de a la matriz AB tiene inversa.
 (ii) Resuelve para $a = 0$ la ecuación matricial $ABX = 3I$, siendo I la matriz identidad.

(i) Calculamos la matriz AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+a+6 & a+a+4 \\ 0-1+3 & 0-1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+6 & 2a+4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz AB tenga inversa debe tener determinante no nulo.

$$|AB| = \begin{vmatrix} a+6 & 2a+4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a+6-4a-8 = -3a-2$$

$$|AB| = 0 \Rightarrow -3a-2 = 0 \Rightarrow 3a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

La matriz AB tiene inversa para los valores $a \neq -\frac{2}{3}$

- (ii) Para $a = 0$ existe la inversa de la matriz A ($a \neq -\frac{2}{3}$) por lo que podemos usar su inversa para resolver la ecuación matricial $ABX = 3I$.

$$ABX = 3I \Rightarrow X = (AB)^{-1} 3I = 3(AB)^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz AB .

para $a = 0$ la matriz queda $AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$(AB)^{-1} = \frac{\text{Adj}(AB)^T}{|AB|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Sustituimos este valor en la ecuación matricial.

$$X = 3 \begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

6.- (2 puntos) Determina los valores de los parámetros a , b y c para los que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$$

Si $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es solución del sistema debe cumplirse:

$$\begin{cases} 2a + 2b + 3 = 3c \\ 3 - 4b - 6c = a \\ 5a - 4 + 3c = -4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ -a - 4b - 6c = -3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ a + 4b + 6c = 3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases}$$

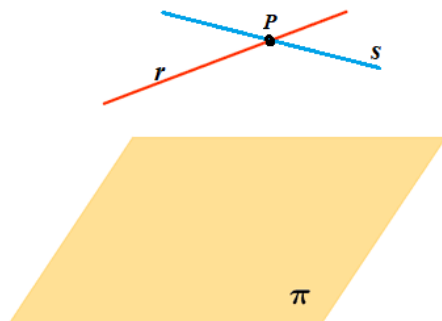
Por lo que debemos resolver el sistema que se nos plantea. Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ a + 4b + 6c = 3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambiamos} \\ \text{Ecuación 2ª con Ecuación 1ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a + 4b + 6c = 3 \\ 2a + 2b - 3c = -3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 2a + 2b - 3c = -3 \\ -2a - 8b - 12c = -6 \\ \hline 0 - 6b - 15c = -9 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 5 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 5a + 4b + 3c = 4 \\ -5a - 20b - 30c = -15 \\ \hline 0 - 16b - 27c = -11 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ -6b - 15c = -9 \\ -16b - 27c = -11 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ 2b + 5c = 3 \\ -16b - 27c = -11 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + 8 \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ -16b - 27c = -11 \\ 16b + 40c = 24 \\ \hline 0 \quad 13c = 13 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ 2b + 5c = 3 \\ 13c = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ 2b + 5c = 3 \\ \boxed{c=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3 = -3 \\ 2b + 5 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ 2b = 3 - 5 = -2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ \boxed{b = \frac{-2}{2} = -1} \end{cases} \Rightarrow 2a + 2(-1) = 0 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow \boxed{a=1} \end{aligned}$$

Los valores buscados son $a=1$; $b=-1$; $c=1$.

7.- (2 puntos) Halla la ecuación de una recta paralela al plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y que contenga al punto $P(1,0,1)$. ¿Es única dicha recta? Razona la respuesta.

Una recta que pase por el punto P y sea paralela a un plano no es única. Lo que sí es único es el plano paralelo a π que pasa por P.

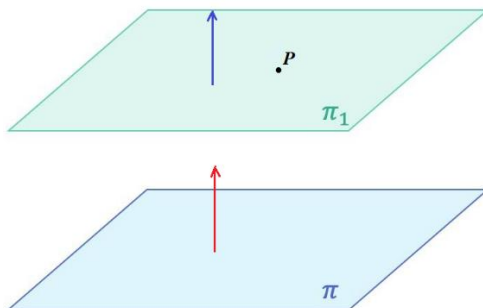


Hallamos la ecuación del plano π_1 paralelo al plano π que pasa por el punto P.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z = 0 \\ \pi // \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1 \equiv x + y + z + D = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + y + z + D = 0 \\ P(1,0,1) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 0 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -2$$

El plano π_1 tiene ecuación $\pi_1 \equiv x + y + z - 2 = 0$



Obtenemos un punto Q cualquiera de $\pi_1 \equiv x + y + z - 2 = 0$ y junto con el punto P definen una recta paralela al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + y + z - 2 = 0 \\ x = 2 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 0 + z - 2 = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow Q(2,0,0)$$

Obtenemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

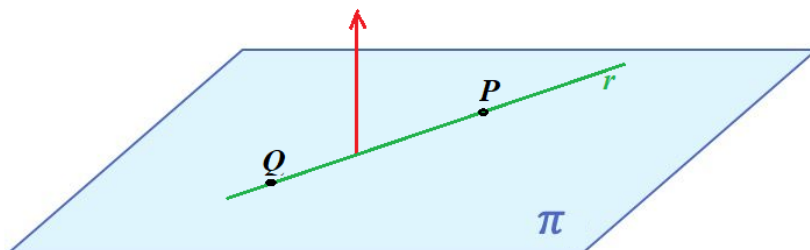
$$\left. \begin{array}{l} Q(2,0,0) \in r \\ P(1,0,1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (2,0,0) - (1,0,1) = (1,0,-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1,0,-1) \\ P(1,0,1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 1 \cdot \lambda \\ y = 0 + 0 \cdot \lambda \\ z = 1 - 1 \cdot \lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

8.- (2 puntos) Determina los valores de los parámetros a , y b para que el plano π contenga a la recta r , donde:

$$\pi \equiv ax + y + z = b, \quad r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1, \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Para que el plano contenga la recta debe cumplirse que el vector normal del plano y el director de la recta sean perpendiculares y por tanto su producto escalar nulo. Y también que un punto cualquiera de la recta debe cumplir la ecuación del plano.



Para obtener el punto P de la recta r damos el valor a $y = 0$ obteniendo el resto de coordenadas del punto.

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1, \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1, \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1, \\ x = z \end{cases} \Rightarrow z + z = 1 \Rightarrow z = 0.5 \Rightarrow x = 0.5$$

$y = 0$

El punto P tiene coordenadas $P(0.5, 0, 0.5)$

Para obtener otro punto Q de la recta r damos otro valor a $y = 1$ obteniendo el resto de coordenadas del punto.

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1, \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 + z = 1, \\ -x - 2 + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0, \\ -x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ -x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z + z = 2 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow x = -1$$

El punto Q tiene coordenadas $Q(-1, 1, 1)$.

Los puntos P y Q deben pertenecer al plano y deben cumplir su ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv ax + y + z = b \\ P(0.5, 0, 0.5) \in \pi \\ Q(-1, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 0.5a + 0 + 0.5 = b \\ -a + 1 + 1 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.5a + 0.5 = b \\ -a + 2 = b \end{cases} \Rightarrow 0.5a + 0.5 = -a + 2 \Rightarrow$$

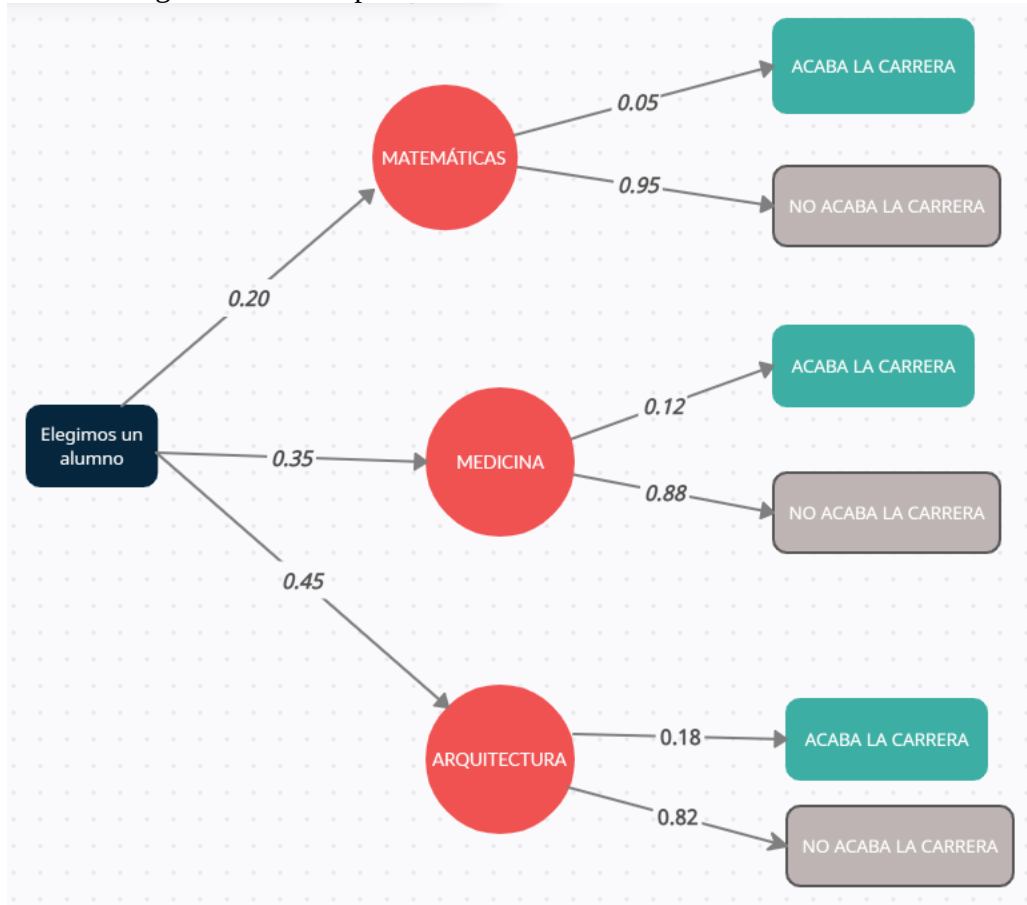
$$\Rightarrow 1.5a = 1.5 \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \boxed{b = -1 + 2 = 1}$$

Los valores buscados son $a = b = 1$

9.- (2 puntos) En un distrito universitario, los estudiantes se distribuyen entre las tres carreras que pueden cursarse del siguiente modo: el 20 % estudian Matemáticas, el 35 % Medicina y el 45 % Arquitectura. El porcentaje de alumnos que finalizan sus estudios en cada caso es del 5%, 12% y del 18%. Se elige un alumno al azar. Halla la probabilidad de que:

- (i) finalice sus estudios.
 (ii) estudie Medicina si no finaliza sus estudios.

Realizamos un diagrama de árbol para describir la situación.



Llamemos MA = "Estudiar matemáticas", ME = "Estudiar medicina", AR = "Estudiar arquitectura" y F = "Acaba la carrera".

(i) Observando el diagrama tenemos que:

$$\begin{aligned}
 P(F) &= P(MA)P(F / MA) + P(ME)P(F / ME) + P(AR)P(F / AR) = \\
 &= 0.20 \cdot 0.05 + 0.35 \cdot 0.12 + 0.45 \cdot 0.18 = 0.133 = \boxed{13.3\%}
 \end{aligned}$$

(ii) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(ME / \bar{F}) = \frac{P(ME \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{P(ME)P(\bar{F} / ME)}{1 - P(F)} = \frac{0.35 \cdot 0.88}{1 - 0.133} = \frac{308}{867} \approx 0.355 = 35.5\%$$

10.- (2 puntos) Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 4 y desviación típica 2. Calcula el valor de a para que:

$$P(4-a \leq X \leq 4+a) = 0,5934$$

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

$$X \equiv N(4, 2)$$

Tipificamos la variable X e intentamos convertir la información proporcionada en un dato que podamos buscar en la tabla de la normal $N(0, 1)$.

$$P(4-a \leq X \leq 4+a) = 0,5934 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ X \equiv N(4, 2) \\ \frac{X-4}{2} = Z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{4-a-4}{2} \leq \frac{X-4}{2} \leq \frac{4+a-4}{2}\right) = 0,5934 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(-\frac{a}{2} \leq Z \leq \frac{a}{2}\right) = 0,5934 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) - P\left(Z \leq -\frac{a}{2}\right) = 0,5934 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) - \left(P\left(Z \geq \frac{a}{2}\right)\right) = 0,5934 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) - \left(1 - P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right)\right) = 0,5934 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + 2P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) = 0,5934 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) = 1,5934 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) = \frac{1,5934}{2} = 0,7967 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla } N(0,1)\} \Rightarrow \frac{a}{2} = 0,83 \Rightarrow \boxed{a = 1,66}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7938	0,7967	0,7
0,9	0,8150	0,8186	0,8212	0,8238	0,8

EBAU Extraordinaria 2021



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021
Convocatoria: Extraordinaria
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II**

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{2 - e^{-x}}$$

Determinar el dominio, extremos relativos y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

2.- (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \cos x$$

Hallar el área de la superficie encerrada por la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = -\frac{\pi}{4}$, la gráfica de f y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

3.- (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\tan x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x} \right)^x$

4.- (2 puntos) Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y + z = 2 \\ 2x + ay + a^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

según el valor del parámetro real a .

5.- (2 puntos) Hallar las matrices $A - B$, A y B , sabiendo que las matrices A y B , satisfacen las siguientes identidades:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.- (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20} , utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3 = -I$, donde I es la matriz identidad.

7.- (2 puntos) Hallar la ecuación de la recta, tal que:

a) pasa por el punto $P(1,1,1)$,

b) es paralela al plano $\pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0$,

c) es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = 1 - 2\lambda, \end{cases}$

8.- (2 puntos) Calcular el valor del parámetro real a para que las rectas r y s se corten y calcular este punto.

$$r \equiv \begin{cases} 4x + z = a, \\ x + y = 2, \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2z = 2a \end{cases}$$

9.- (2 puntos) El tiempo que una persona tarda en llegar a su lugar de trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos. Se ha comprobado que el 84,1 % de los días llega antes de 22 minutos. Si durante el año acude a su lugar de trabajo 290 días, ¿cuántos días puede estimar que tardará menos de 18 minutos en llegar?

10.- (2 puntos) Sofía va al teatro, cine o de concierto con probabilidades 0,5, 0,2 y 0,3. El 60 % de las veces que va al cine se encuentra con amigos y se va de cena con los amigos. Lo mismo le ocurre el 10 % de las veces que va al teatro y el 90 % de las que va de concierto.

a) ¿Qué probabilidad hay de que se vaya de cena con los amigos?

b) Si vuelve a casa después del espectáculo, ¿qué probabilidad hay de que haya ido al cine?

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{2 - e^{-x}}$$

Determinar el dominio, extremos relativos y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

El dominio serán todos los reales excepto los que anulen el denominador.

$$2 - e^{-x} = 0 \Rightarrow 2 = e^{-x} \Rightarrow \ln 2 = \ln e^{-x} \Rightarrow \ln 2 = -x \Rightarrow x = -\ln 2$$

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{-\ln 2\}$$

Derivamos la función e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{x^2}{2 - e^{-x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(2 - e^{-x}) - (e^{-x})x^2}{(2 - e^{-x})^2} = \frac{x[4 - 2e^{-x} - xe^{-x}]}{(2 - e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x[4 - 2e^{-x} - xe^{-x}]}{(2 - e^{-x})^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4 - 2e^{-x} - xe^{-x} = 0 \rightarrow (2 + x)e^{-x} = 4 \Rightarrow \frac{2 + x}{e^x} = 4 \end{cases} \text{ ¿?}$$

¿Como resolvemos la ecuación planteada?

No es sencillo. Vamos a ver que la función $y = 4 - 2e^{-x} - xe^{-x}$ es siempre positiva, por lo que no tiene solución la ecuación $4 - 2e^{-x} - xe^{-x} = 0$.

$$y = 4 - 2e^{-x} - xe^{-x} \Rightarrow y' = 2e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x} + xe^{-x} = (1 + x)e^{-x}$$

$$y' = 0 \Rightarrow (1 + x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -1. \text{ Vemos si es máximo o mínimo con } y''.$$

$$y'' = e^{-x} - (1 + x)e^{-x} = e^{-x} - e^{-x} - xe^{-x} = -xe^{-x} \Rightarrow y''(-1) = e > 0. x = -1 \text{ es un mínimo.}$$

$$\text{Como } y(-1) = 4 - 2e^1 + e^1 = 4 - e = 1.28 > 0$$

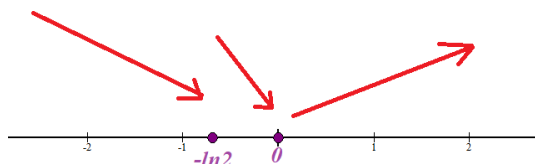
$$y = 4 - 2e^{-x} - xe^{-x} > 4 - e > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Conclusión: La ecuación $4 - 2e^{-x} - xe^{-x} = 0$ no tiene solución.

El único punto crítico es $x = 0$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor, añadiendo el valor excluido del dominio $x = -\ln 2$.

- En $(-\infty, -\ln 2)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{-[4 - 2e + e]}{(2 - e)^2} = \frac{-(4 - e)}{+} < 0$. La función decrece en $(-\infty, -\ln 2)$.
- En $(-\ln 2, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale $f'(-0.5) = \frac{-0.5[4 - 2e^{0.5} + 0.5 \cdot e^{0.5}]}{(2 - e^{0.5})^2} = \frac{-0.5[4 - 1.52e^{0.5}]}{+} < 0$. La función decrece en $(-\ln 2, 0)$.
- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{[4 - 2e^{-1} - e^{-1}]}{(2 - e^{-1})^2} = \frac{[4 - 3e^{-1}]}{+} > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función sigue el esquema:



La función decrece en $(-\infty, -\ln 2) \cup (-\ln 2, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

Presenta un mínimo relativo en $x = 0$.

Como $f(0) = \frac{0^2}{2 - e^0} = 0$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(0, 0)$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = -\ln 2$?

$$\lim_{x \rightarrow -\ln 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\ln 2} \frac{x^2}{2 - e^{-x}} = \frac{(-\ln 2)^2}{0} = \infty$$

$x = -\ln 2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2 - e^{-x}} = \frac{+\infty}{2 - e^{-\infty}} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2 - e^{-x}} = \frac{+\infty}{2 - e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^{-x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-e^{-x}} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

La función tiene asíntota horizontal en $-\infty$ con ecuación $y = 0$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Vemos si tiene en $+\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{2 - e^{-x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(2 - e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - e^{-x}} = \infty$$

No tiene asíntota oblicua en $+\infty$

En $-\infty$ no tiene, pues existe asíntota horizontal en $-\infty$.

2.- (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \cos x$$

Hallar el área de la superficie encerrada por la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = -\frac{\pi}{4}$, la gráfica de f y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Hallamos la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \cos x$ en $x = -\frac{\pi}{4}$.

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\left. \begin{aligned} y - f\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

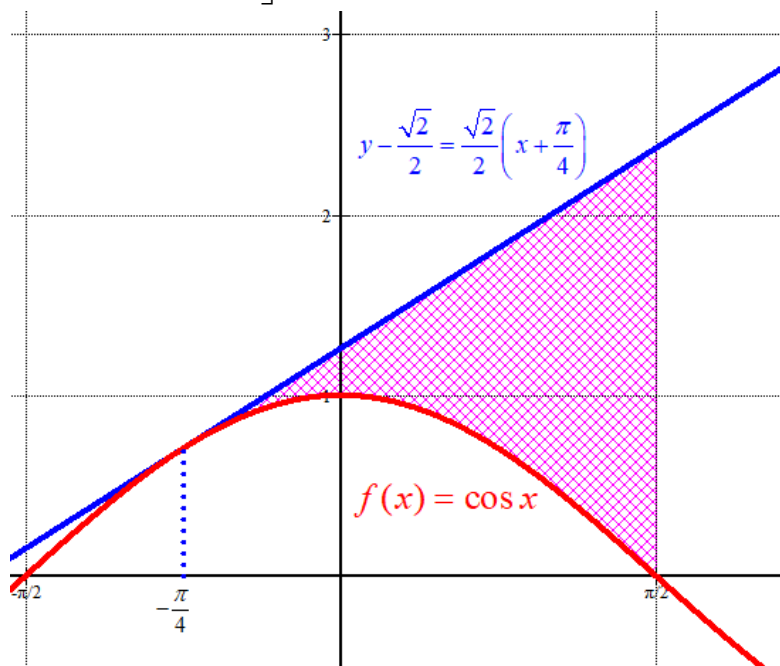
En el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ la función $f(x) = \cos x$ y la recta tangente no vuelven a cortarse, por lo

que el área es el valor absoluto de la integral entre $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{2}$ de la diferencia de las dos funciones.

Dibujamos las gráficas de la función y su tangente, así como la región de la cual vamos calcular su área.

$$\text{Área} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \right) dx = \left[\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}x + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \operatorname{sen} x \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] -$$



3.- (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x} \right)^x$

a) Para calcular este límite tomamos logaritmos neperianos.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x} = a \Rightarrow \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x} \right) = \ln a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x} = \ln a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \cdot \ln \left(\frac{1}{x^2} \right) = \ln a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \cdot (\ln 1 - \ln x^2) = \ln a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \cdot (\ln 1 - 2 \ln x) = \ln a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \operatorname{tg} x \cdot \ln x = \ln a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \ln x = \ln a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \frac{\operatorname{sen} x \cdot \ln x}{\cos x} = \ln a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \frac{\ln x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \frac{-\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1} = 0 \Rightarrow \ln a = 0 \Rightarrow a = e^0 = 1$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x} = 1}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x} \right)^x = 1^\infty = \text{Indeterminación} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x} \right)^x = a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{4x-1}{4x} \right)^x = \ln a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{4x-1}{4x} \right) = \ln a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{4x-1}{4x} \right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4 \cdot 4x - 4(4x-1)}{(4x)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{16x - 16x + 4}{16x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{4x^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln a = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = e^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x} \right)^x = e^{-\frac{1}{4}}}$$

4.- (2 puntos) Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y + z = 2 \\ 2x + ay + a^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

según el valor del parámetro real a .

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$

Calculamos el determinante de A y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 2a^2 + 2 - 2a - 2 - a^3 = -a^3 + 3a^2 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^3 + 3a^2 - 2a = 0 \Rightarrow -a(a^2 - 3a + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ o \\ a^2 - 3a + 2 \Rightarrow a = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} a = 2 \\ a = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Distinguimos 4 casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0, a \neq 1$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una solución única)

Utilizamos el método de Cramer para obtener las soluciones.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{2a} + \cancel{2a^2} + 1 - \cancel{2a} - 1 - \cancel{2a^2}}{-a^3 + 3a^2 - 2a} = \frac{0}{-a(a-1)(a-2)} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a^2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a + 4a^2 + 4 - 2 - 4 - 2a^3}{-a^3 + 3a^2 - 2a} = \frac{-2a^3 + 4a^2 + a - 2}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{-2a^3 + 4a^2 + a - 2}{(a-2)(-2a^2 + 1)}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & -2 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & & -4 & 0 & 2 \\ \hline & -2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & -2a^3 & +4a^2 & +a & -2 \\ & = & (a-2)(-2a^2+1) \end{array}$$

$$= \frac{(a-2)(-2a^2+1)}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{-2a^2+1}{-a(a-1)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2a^2+2+4-4a-4-a}{-a^3+3a^2-2a} = \frac{2a^2-5a+2}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{\cancel{(a-2)}(2a-1)}{-a(a-1)\cancel{(a-2)}} = \frac{2a-1}{a(1-a)}$$

CASO 2. $a=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$

La transformamos en una matriz triangular equivalente y así estudiar mejor el rango de A y de A/B.

$$\begin{aligned} A/B &= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc|c} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ \hline \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc|c} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ \hline \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Se observa que el rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos y el sistema es incompatible (no tiene solución).

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$

La transformamos en una matriz triangular equivalente y así estudiar mejor el rango de A y de A/B.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc|c} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -4 \\ \hline \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc|c} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -4 \\ \hline \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow (A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Se observa que el rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos y el sistema es incompatible (no tiene solución).

CASO 4. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$

La transformamos en una matriz triangular equivalente y así estudiar mejor el rango de A y de A/B.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \\ -2 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 3 \quad -1 \\ \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\ -2 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow (A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Se observa que el rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales a 2, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resolvemos a partir del sistema equivalente obtenido.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow (A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ y + 3z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ \boxed{y = -1 - 3z} \end{cases} \Rightarrow 2x - 1 - 3z + z = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 3 + 2z \Rightarrow \boxed{x = \frac{3 + 2z}{2}}$$

$$\boxed{\text{Soluciones: } \begin{cases} x = \frac{3 + 2t}{2} \\ y = -1 - 3t, \text{ con } t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}}$$

5.- (2 puntos) Hallar las matrices $A - B$, A y B , sabiendo que las matrices A y B , satisfacen las siguientes identidades:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - AB + BA - B^2 = AA - AB + BA - BB = A(A - B) + B(A - B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si tiene inversa la matriz $A + B$ para seguir despejando y obtener $A - B$.

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$(A + B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A + B)^T)}{|A + B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Seguimos despejando.

$$(A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A - B = (A + B)^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} A - B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Sumamos} \\ \text{las ecuaciones} \end{array} \right\} \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$2A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sustituyendo en } A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - A$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6.- (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20} , utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3 = -I$, donde I es la matriz identidad.

Comprobamos si A tiene inversa y la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 15 + 12 - 16 - 12 = -1 \neq 0 \text{ Existe } A^{-1}.$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que $A^3 = -I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 & -12+12 & -15+16 \\ -4+5 & 3+16-15 & 4+20-20 \\ 3-4 & -3-12+12 & -4-15+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3+3 & -4+4 \\ 4-4 & 3-16+12 & 4-20+16 \\ -3+3 & -3+12-9 & -4+15-12 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

Lo aplicamos al cálculo de A^{20}

$$A^{20} = A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A^2 = (-I) \cdot (-I) \cdot (-I) \cdot (-I) \cdot (-I) \cdot (-I) \cdot A^2 = A^2$$

$$A^{20} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

7.- (2 puntos) Hallar la ecuación de la recta, tal que:

a) pasa por el punto $P(1,1,1)$,

b) es paralela al plano $\pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0$,

c) es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = 1 - 2\lambda, \end{cases}$

Necesitamos un vector director de la recta. Es paralela al plano π y por tanto es perpendicular al vector normal del plano $\vec{n} = (1, 1, -2)$ y también es perpendicular a la recta r y por tanto perpendicular a su vector director $\vec{v}_r = (1, -1, -2)$. Por lo que podemos tomar como vector director de la recta el producto vectorial de $\vec{n} = (1, 1, -2)$ y $\vec{v}_r = (1, -1, -2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 1, -2) \\ \vec{v}_r = (1, -1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_s = \vec{n} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-4, 0, -2)$$

La ecuación de la recta que nos piden es la ecuación de la recta s que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y tiene como vector director $\vec{u}_s = (-4, 0, -2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (-4, 0, -2) \\ P(1,1,1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 1 \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

8.- (2 puntos) Calcular el valor del parámetro real a para que las rectas r y s se corten y calcular este punto.

$$r \equiv \begin{cases} 4x + z = a, \\ x + y = 2, \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2z = 2a \end{cases}$$

Obtenemos las ecuaciones en paramétricas de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} 4x + z = a, \\ x + y = 2, \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} z = a - 4x \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = a - 4\alpha \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2z = 2a \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -y - z \\ x = 2a - 2z \end{cases} \Rightarrow -y - z = 2a - 2z \Rightarrow y = -2a + z \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2a - 2z \\ y = -2a + z \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 2a - 2\beta \\ y = -2a + \beta \\ z = \beta \end{cases}$$

Igualamos las ecuaciones de las dos rectas.

$$\begin{aligned} r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = a - 4\alpha \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2a - 2\beta \\ 2 - \alpha = -2a + \beta \\ a - 4\alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2a - 2(a - 4\alpha) \\ 2 - \alpha = -2a + a - 4\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2a - 2a + 8\alpha \\ 2 + 3\alpha = -a \end{cases} \Rightarrow \\ s \equiv \begin{cases} x = 2a - 2\beta \\ y = -2a + \beta \\ z = \beta \end{cases} & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 8\alpha \\ -2 - 3\alpha = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 7\alpha \\ -2 - 3\alpha = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \alpha \\ -2 - 3\alpha = a \end{cases} \Rightarrow -2 - 0 = a \Rightarrow \boxed{a = -2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - 0 = 2 \\ z = -2 - 0 = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(0, 2, -2)}$$

Para $a = -2$ las rectas se cortan en el punto $P(0, 2, -2)$

9.- (2 puntos) El tiempo que una persona tarda en llegar a su lugar de trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos. Se ha comprobado que el 84,1 % de los días llega antes de 22 minutos. Si durante el año acude a su lugar de trabajo 290 días, ¿cuántos días puede estimar que tardará menos de 18 minutos en llegar?

X = Tiempo que una persona tarda en llegar a su lugar de trabajo en minutos. $X = N(20, \sigma)$

$$P(X < 22) = 0.841 \Rightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{22 - 20}{\sigma}\right) = 0.841 \Rightarrow P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 0.841$$

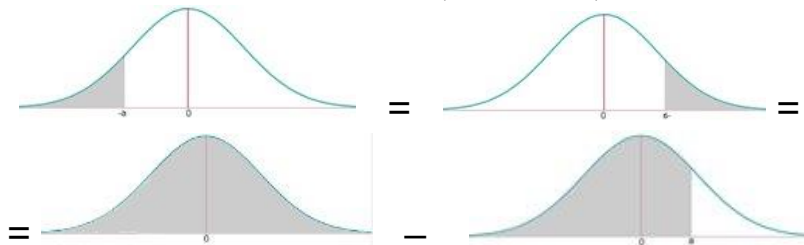
Buscamos en la tabla de la $N(0,1)$ y tenemos que:

$$\frac{2}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 2$$

z	0	0,0
0	0,5000	0,50
0,1	0,5398	0,54
0,2	0,5793	0,58
0,3	0,6179	0,62
0,4	0,6554	0,65
0,5	0,6915	0,69
0,6	0,7257	0,72
0,7	0,7580	0,76
0,8	0,7881	0,79
0,9	0,8159	0,81
1	0,8413	0,84
1,1	0,8643	0,86
1,2	0,8849	0,88

Calculamos $P(X < 18)$ siendo $X = N(20, 2)$

$$P(X < 18) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{18 - 20}{2}\right) = P(Z < -1) = \dots$$



$$\dots = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

Por lo que en 290 días serán $290 \cdot 0.1587 = 46.023$.

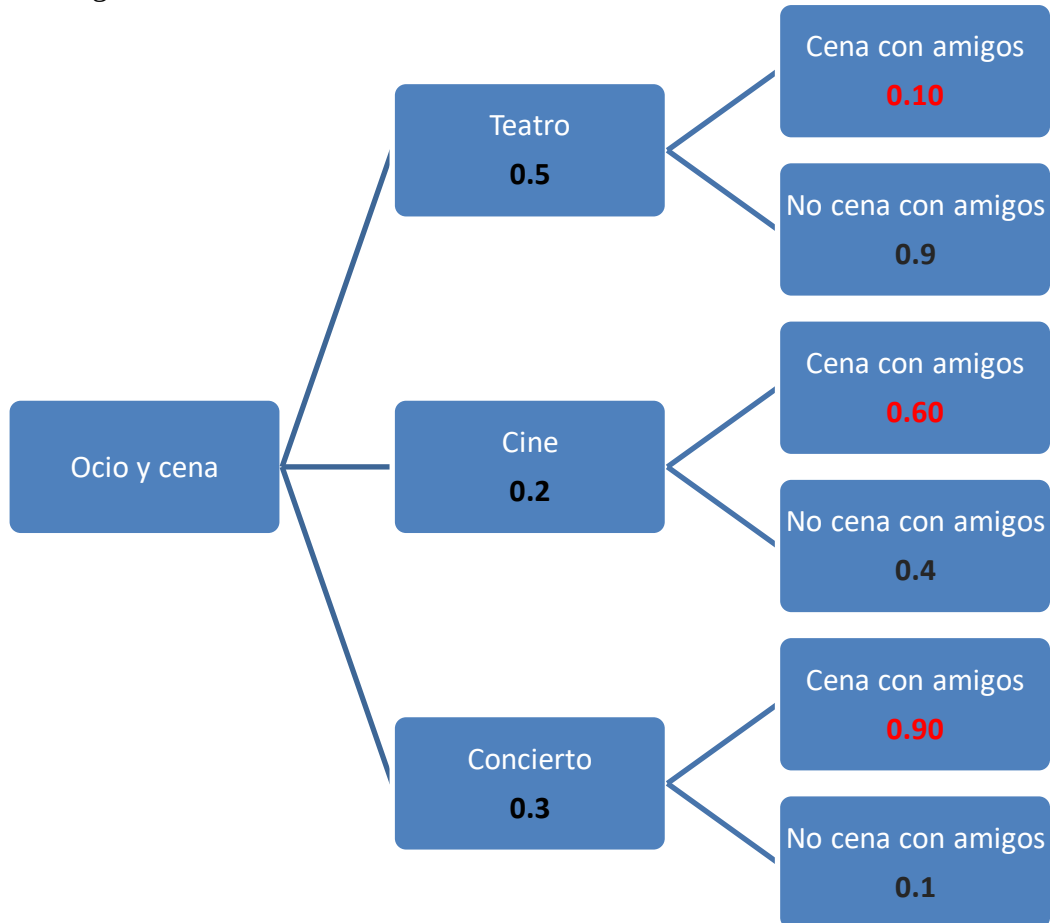
Aproximadamente 46 días de los 290 llegará antes de 18 minutos.

10.- (2 puntos) Sofía va al teatro, cine o de concierto con probabilidades 0,5, 0,2 y 0,3. El 60 % de las veces que va al cine se encuentra con amigos y se va de cena con los amigos. Lo mismo le ocurre el 10 % de las veces que va al teatro y el 90 % de las que va de concierto.

a) ¿Qué probabilidad hay de que se vaya de cena con los amigos?

b) Si vuelve a casa después del espectáculo, ¿qué probabilidad hay de que haya ido al cine?

Hacemos un diagrama de árbol.



Llamamos T = Ir al teatro, Ci = Ir al cine, Co = Ir al concierto.

Llamamos A = Cenar con amigos. $\bar{A}$ = Volver a casa sin cenar con los amigos.

Tenemos que $P(T) = 0.5$, $P(Ci) = 0.2$, $P(Co) = 0.3$. $P(A/T) = 0.1$, $P(A/Ci) = 0.6$, $P(A/Co) = 0.9$

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(T)P(A/T) + P(Ci)P(A/Ci) + P(Co)P(A/Co) = \\
 &= 0.5 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.9 = \boxed{0.44}
 \end{aligned}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(Ci/\bar{A}) = \frac{P(Ci \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(Ci)P(\bar{A}/Ci)}{1 - P(A)} = \frac{0.2 \cdot 0.4}{1 - 0.44} = \frac{1}{7} \approx 0.143$$

EBAU Ordinaria 2021



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Evaluación de Bachillerato para el
Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021
Convocatoria: Ordinaria
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II**

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = xe^{1/x^3}$$

Determinar el dominio y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

2.- (2 puntos) Sea f una función continua cuya derivada viene dada de la siguiente manera:

$$f'(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Hallar la expresión de la función f y las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en el punto $x = 0$.

3.- (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la función $f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2}$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.

4.- (2 puntos) Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ 2x + ay = -1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

según el valor del parámetro real a . Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a = 0$.

5.- (2 puntos) Hallar A y B , matrices soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3A - 5B = C, \\ -A + 3B = D \end{cases}$$

donde C y D son las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz inversa de $C^T D$, donde C^T es la matriz traspuesta de C .

6.- (2 puntos) Sabiendo que $|A| = 1$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular el determinante de la matriz B con

$$B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{pmatrix}$$

Calcular $|4B^{-1}A^T|^2$.

7.- (2 puntos) Hallar la ecuación de una recta, tal que:

- a) pasa por el punto $P(0,1,1)$,
- b) está contenida en el plano $\pi \equiv x + y + 3z - 4 = 0$,
- c) es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = z + 3, \\ y = -z + 4 \end{cases}$

8.- (2 puntos) Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(2,-1,1)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$$

9.- (2 puntos) La duración de un cierto modelo de máquina de aire acondicionado sigue una distribución normal, con media 20 años y desviación típica 5 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de la máquina por un periodo de 25 años.

- a) ¿Qué porcentaje de máquinas se espera que no cumplan la garantía?
- b) ¿Qué proporción de máquinas tienen una duración comprendida entre los 15 y 21 años?

10.- (2 puntos) Una bolsa contiene 4 bolas negras y 2 blancas. Otra bolsa contiene 2 bolas negras y 6 blancas. Se elige una de las bolsas al azar y se extrae una bola.

- a) Calcular la probabilidad de que la bola sea blanca.
- b) Sabiendo que la bola es blanca, calcular la probabilidad de que sea de la primera bolsa.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = xe^{1/x^3}$$

Determinar el dominio y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

El único problema que se plantea con la definición de la función $f(x) = xe^{1/x^3}$ es el cociente del exponente. Vemos cuando se anula.

$$\frac{1}{x^3} \rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical. $x = 0$

El único valor excluido del dominio es $x = 0$. Comprobamos los límites laterales.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{1/x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 \cdot e^{+\infty} = 0 \cdot \infty = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x^3}}{\frac{1}{x}} = \frac{e^{+\infty}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{3}{x^4} e^{1/x^3}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 e^{1/x^3}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3e^{1/x^3}}{x^2} = \\ &= \frac{3e^{+\infty}}{0^+} = 3e^{+\infty} \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{1/x^3} = 0 \cdot e^{1/0^-} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = \boxed{0}$$

La asíntota solo lo es por la derecha.

Asíntota horizontal. $y = b$

Calculamos los límites de la función en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{1/x^3} = (+\infty)e^{1/(+\infty)} = (+\infty)e^0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{1/x^3} = (-\infty)e^{-1/\infty} = (-\infty)e^0 = -\infty$$

No hay asíntotas horizontales.

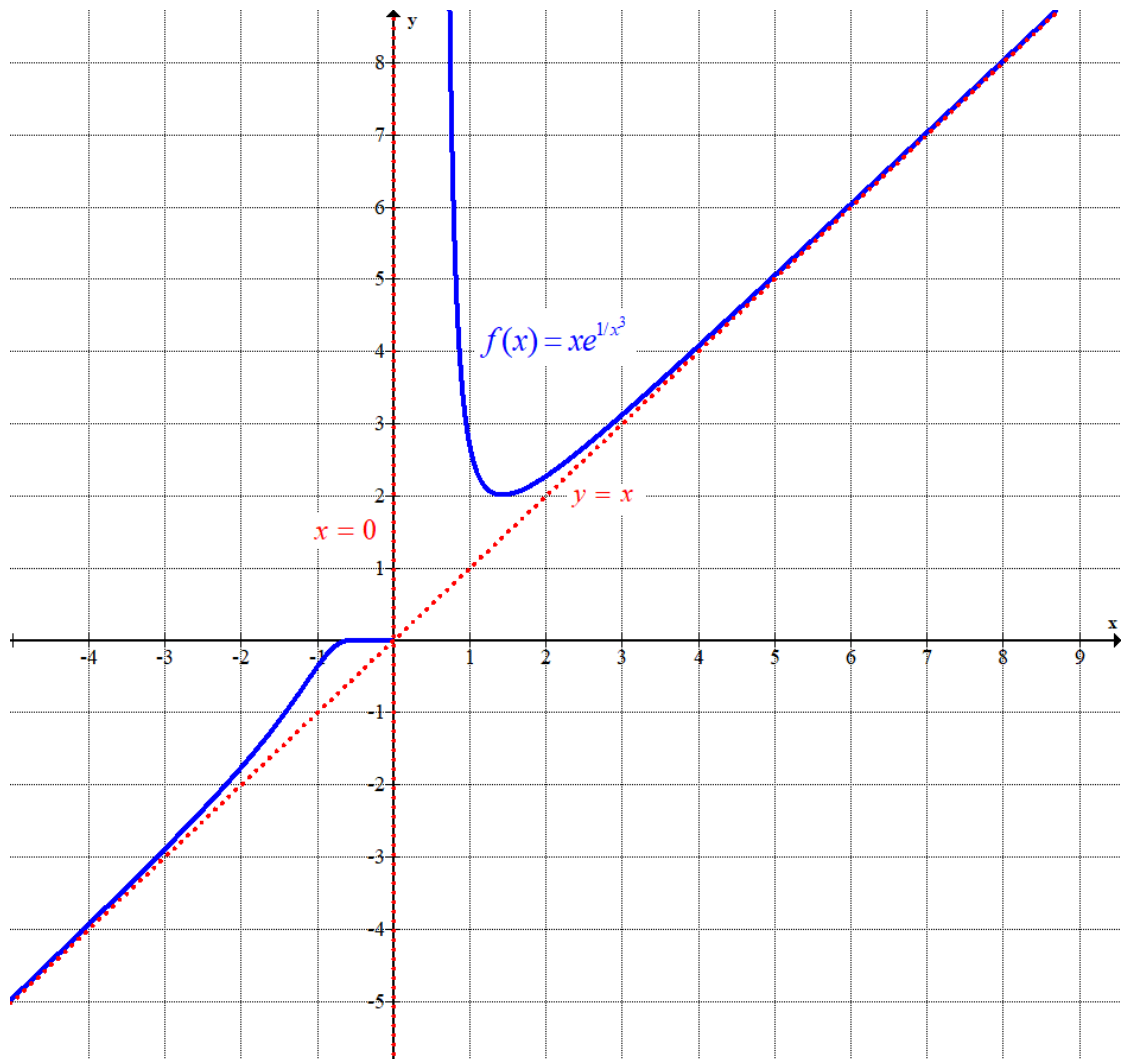
Asíntotas oblicuas. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{1/x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x^3} = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{1/x^3} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x^3} - 1) = \infty(e^0 - 1) = \infty \cdot 0 = \text{Indeterminación} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x^3} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{3}{x^4} e^{1/x^3}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 e^{1/x^3}}{x^4} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3e^{1/x^3}}{x^2} = \frac{3e^0}{\infty} = \frac{3}{\infty} = \boxed{0}$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x$.



2.- (2 puntos) Sea f una función continua cuya derivada viene dada de la siguiente manera:

$$f'(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Hallar la expresión de la función f y las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en el punto $x = 0$.

Hallamos la expresión de la función en las dos ramas de definición.

$$\text{Si } f'(x) = x+1 \Rightarrow f(x) = \int x+1 dx = \frac{x^2}{2} + x + K \quad \text{Para } x < 0$$

$$\text{Si } f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = \int e^x dx = e^x + K' \quad \text{Para } x > 0$$

La función queda:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + K, & x < 0, \\ e^x + K', & x \geq 0 \end{cases}$$

Como la función $f(x)$ es continua debe serlo en $x = 0$ y coincidir el valor de los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{2} + x + K = K \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x + K' = 1 + K' \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow K = 1 + K' \Rightarrow K' = K - 1$$

La función queda:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + K, & x < 0, \\ e^x - 1 + K, & x \geq 0 \end{cases}, \text{ siendo } K \text{ una constante real cualquiera.}$$

En $x = 0$ comprobamos que la derivada por la derecha y la izquierda coinciden.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x+1 = 1 \\ f'(0) &= e^0 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Son iguales}$$

La recta tangente la podemos calcular con la función a la derecha o a la izquierda de $x = 0$, pues la función es continua y la derivada existe en dicho valor.

$$\left. \begin{aligned} y - f(0) &= f'(0)(x-0) \\ f(0) &= K \\ f'(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - K = 1(x-0) \Rightarrow \boxed{y = x + K}$$

3.- (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la función $f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2}$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=5$.

Comprobamos si la función corta el eje OX .

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

El punto de corte está situado fuera del intervalo del recinto $(0, 5)$.

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 5 de la función

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2}.$$

Calculamos primero la integral indefinida.

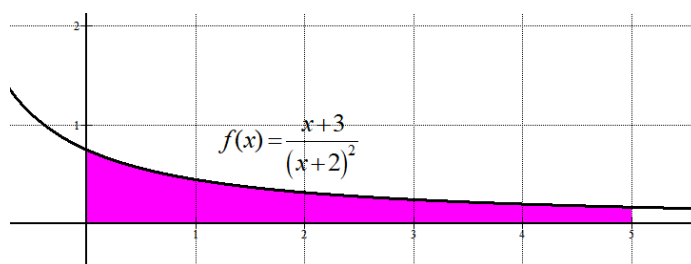
$$\int \frac{x+3}{(x+2)^2} dx = \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{(x+2)^2} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} \Rightarrow \frac{x+3}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)}{(x+2)^2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{Ax+2A+B}{(x+2)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x+3 = Ax+2A+B \Rightarrow \begin{cases} 1=A \\ 3=2A+B \Rightarrow 3=2+B \Rightarrow B=1 \end{cases} \\ \frac{x+3}{(x+2)^2} &= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots &= \int \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} dx = \int \frac{1}{x+2} dx + \int \frac{1}{(x+2)^2} dx = \ln|x+2| + \int (x+2)^{-2} dx = \\ &= \ln|x+2| + \frac{(x+2)^{-1}}{-1} = \boxed{\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + K} \end{aligned}$$

Lo aplicamos a la integral definida.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_0^5 f(x) dx \right| = \left| \int_0^5 \frac{x+3}{(x+2)^2} dx \right| = \left| \left[\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} \right]_0^5 \right| = \\ &= \left| \left[\ln|5+2| - \frac{1}{5+2} \right] - \left[\ln|0+2| - \frac{1}{0+2} \right] \right| = \left| \ln 7 - \frac{1}{7} - \ln 2 + \frac{1}{2} \right| = \boxed{\ln \frac{7}{2} + \frac{5}{14} \approx 1.61 u^2} \end{aligned}$$



4.- (2 puntos) Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ 2x + ay = -1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

según el valor del parámetro real a . Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a = 0$.

El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & a & 0 & -1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + 0 + 2a - a^3 - 2 - 0 = -a^3 + 3a - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^3 + 3a - 2 = 0; \text{ Utilizamos Ruffini.}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & \underline{0} \end{array} \rightarrow a = 1 \text{ es raíz}$$

$$-a^2 - a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-1)2}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{1-3}{-2} = 1 \\ \frac{1+3}{-2} = -2 \end{cases}$$

Para $a = -2$ y para $a = 1$ se anula el determinante de A .

Estudiamos los 3 casos distintos que se pueden plantear en función del valor de a .

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y por tanto el rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución (COMPATIBLE DETERMINADO).

Obtenemos la solución con la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a - a - a^2 + 1}{-a^3 + 3a - 2} = \frac{1 - a^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{(1-a)(1+a)}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{a+1}{(a-1)(a+2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1+2a+a^2-2}{-a^3+3a-2} = \frac{a^2+2a-3}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a+3)(a-1)}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{a+3}{-(a-1)(a+2)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a-a+2-a^2-2+1}{-a^3+3a-2} = \frac{-a^2+1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{a+1}{(a-1)(a+2)}$$

CASO 2. $a=1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y=-1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \text{ que tiene dos ecuaciones iguales, la primera y la tercera, por lo que es equivalente}$$

a otro sistema con 2 ecuaciones y 3 incógnitas que resolvemos.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y=-2x-1 \end{cases} \Rightarrow x-2x-1+z=1 \Rightarrow -x+z=2 \Rightarrow \boxed{z=2+x}$$

El sistema tiene infinitas soluciones (COMPATIBLE INDETERMINADO):

$$x=t; y=-1-2t; z=2+t$$

CASO 3. $a=-2$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x-2y=-1 \\ -2x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a - 2 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 2x & -2y & & = -1 \\ -2x & -2y & +4z & = -2 \\ \hline & -4y & +4z & = -3 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación 3}^a + 2 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ -2x & +y & +z & = 1 \\ 2x & +2y & -4z & = 2 \\ \hline & 3y & -3z & = 3 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=1 \\ -4y+4z=-3 \\ 3y-3z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=1 \\ -4y+4z=-3 \\ y-z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot \text{Ecuación 3}^a + \text{Ecuación 2}^a \\ 4y & -4z & = 4 \\ -4y & +4z & = -3 \\ \hline & 0 & = 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=1 \\ -4y+4z=-3 \\ 0=1 \end{cases} \quad \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema no tiene solución (SISTEMA INCOMPATIBLE).

Para $a = 0$ la matriz A tiene determinante no nulo y podemos hallar su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 2 - 0 = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

5.- (2 puntos) Hallar A y B, matrices soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3A - 5B = C, \\ -A + 3B = D \end{cases}$$

donde C y D son las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz inversa de $C^T D$, donde C^T es la matriz traspuesta de C.

Despejamos en el sistema las matrices A y B.

$$\begin{cases} 3A - 5B = C, \\ -A + 3B = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A - 5B = C, \\ -D + 3B = A \end{cases} \Rightarrow 3(-D + 3B) - 5B = C \Rightarrow -3D + 9B - 5B = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4B = C + 3D \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{4}(C + 3D)} \Rightarrow A = -D + 3\frac{1}{4}(C + 3D) \Rightarrow A = -D + \frac{3}{4}C + \frac{9}{4}D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{3}{4}C + \frac{5}{4}D = \frac{1}{4}(3C + 5D)}$$

Sustituimos en las expresiones obtenidas las matrices C y D.

$$A = \frac{1}{4}(3C + 5D) = \frac{1}{4} \left[3 \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 36 & 12 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{4}(C + 3D) = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 16 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinamos $C^T D$.

$$C^T D = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 21 + 1 & 8 + 0 - 2 \\ -8 + 12 - 2 & -16 + 0 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 6 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot \boxed{3} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

Calculamos su determinante $|C^T D| = \begin{vmatrix} 26 & 6 \\ 2 & -12 \end{vmatrix} = -324 \neq 0$. Tiene inversa.

$$(C^T D)^{-1} = \frac{\text{Adj}((C^T D)^T)}{|C^T D|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 26 & 2 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}}{-324} = -\frac{1}{324} \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -2 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & \frac{1}{54} \\ \frac{1}{162} & -\frac{13}{162} \end{pmatrix}$$

6.- (2 puntos) Sabiendo que $|A|=1$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular el determinante de la matriz B con

$$B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{pmatrix}$$

Calcular $|4B^{-1}A^T|^2$.

$$|B| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{La fila 2ª es suma de 2 ternas de números} \rightarrow \\ \text{separamos el determinante en suma de 2 determinantes} \end{array} \right\}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{vmatrix} =$$

$$= \{ \text{Fila 1ª igual a fila 2ª} \rightarrow \text{determinante es nulo} \} =$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{vmatrix} = \{ \text{sacamos factor comun el 2 en la fila 3ª} \} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ x+a & y+b & z+c \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{La fila 3ª es suma de 2 ternas de números} \rightarrow \\ \text{separamos en suma de 2 determinantes} \end{array} \right\}$$

$$= 2 \left[\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} \right] = \{ \text{Fila 1ª igual a fila 3ª} \rightarrow \text{determinante es nulo} \} =$$

$$= 2 \left[0 + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} \right] = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambio fila 2ª y 3ª} \rightarrow \\ \text{el signo del determinante} \\ \text{cambia de signo} \end{array} \right\} = 2(-1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(1) = \boxed{-2}$$

$$|4B^{-1}A^T| = \{ \text{Las matrices son cuadradas de orden 3} \} = 4^3 |B^{-1}A^T| =$$

$$= \{ \text{El determinante del producto es el producto de los determinantes} \} =$$

$$= 4^3 |B^{-1}| \cdot |A^T| = \left\{ \begin{array}{l} \text{El determinante de la inversa } |B^{-1}| \text{ es la inversa del determinante } \frac{1}{|B|} \\ \text{El determinante de la traspuesta de A es igual que el de la matriz A} \end{array} \right\} =$$

$$= 64 \frac{1}{|B|} |A| = 64 \cdot \frac{1}{-2} (1) = -32$$

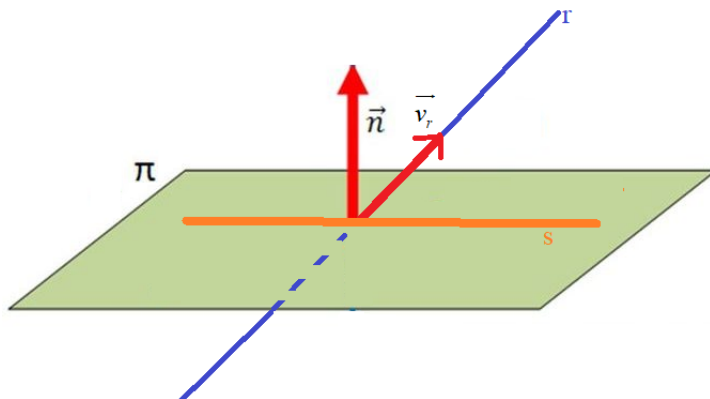
$$\text{Por lo que } |4B^{-1}A^T|^2 = (-32)^2 = 1024$$

7.- (2 puntos) Hallar la ecuación de una recta, tal que:

a) pasa por el punto $P(0,1,1)$,

b) está contenida en el plano $\pi \equiv x + y + 3z - 4 = 0$,

c) es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = z + 3, \\ y = -z + 4 \end{cases}$



Una recta se define con un punto por el que pasa y por su vector director. El punto es $P(0,1,1)$ y el vector director de la recta s del ejercicio es el producto vectorial del vector normal del plano que la contiene y el director de la recta r .

$$r \equiv \begin{cases} x = z + 3, \\ y = -z + 4 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 - t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, -1, 1)$$

$$\pi \equiv x + y + 3z - 4 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 3)$$

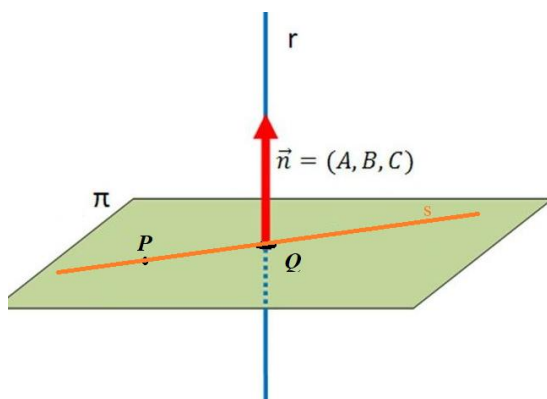
$$\Rightarrow \vec{v}_s = \vec{n} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_s = i + 3j - k - k - j + 3i = 4i + 2j - 2k \Rightarrow \vec{v}_s = (4, 2, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (4, 2, -2) \\ P(0,1,1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-2}}$$

8.- (2 puntos) Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(2, -1, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$$



Determinamos la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta r y que contiene el punto P . Este plano tiene como vector normal el director de la recta r .

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow \vec{v}_r = (2, 2, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (2, 2, 1) \\ P(2, -1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + 2y + z + D = 0 \\ P(2, -1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 4 - 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -3 \Rightarrow \pi \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0$$

Hallamos el punto Q de corte de recta r y el plano π .

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z \Rightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(2 + 2t) + 2(1 + 2t) + t - 3 = 0 \\ \pi \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 4 + 4t + 2 + 4t + t - 3 = 0 \Rightarrow 9t = -3 \Rightarrow t = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{array} \right. \Rightarrow Q\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

La recta s es la definida por los puntos P y Q .

$$\left. \begin{array}{l} Q\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\ P(2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) - (2, -1, 1) = \left(\frac{4}{3} - 2, \frac{1}{3} + 1, -\frac{1}{3} - 1\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

Tomamos como vector director de s el vector $\vec{v}_s = \frac{3}{2} \overrightarrow{PQ} = \frac{3}{2} \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) = (-1, 2, -2)$

Hallamos la ecuación de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (-1, 2, -2) \\ P(2, -1, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}}$$

9.- (2 puntos) La duración de un cierto modelo de máquina de aire acondicionado sigue una distribución normal, con media 20 años y desviación típica 5 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de la máquina por un periodo de 25 años.

- a) ¿Qué porcentaje de máquinas se espera que no cumplan la garantía?
 b) ¿Qué proporción de máquinas tienen una duración comprendida entre los 15 y 21 años?

X = Duración de un cierto modelo de máquina de aire acondicionado expresado en años.

$X = N(20, 5)$

- a) El enunciado se puede interpretar de dos formas distintas. Resolvemos las dos formas de interpretarlo.

a.1) Lo que nos piden es la probabilidad de que tengamos que usar la garantía y por lo tanto que una máquina no dure 25 años expresado en porcentaje.

$$P(X < 25) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{25 - 20}{5}\right) =$$

$$= P(Z < 1) = \{\text{Miramos en la tabla de la } N(0, 1)\} = \boxed{0.8413}$$

El porcentaje de máquinas que se espera usen la garantía es del 84.13 %

z	0	0
0	0,5000	0,5
0,1	0,5398	0,5
0,2	0,5793	0,5
0,3	0,6179	0,6
0,4	0,6554	0,6
0,5	0,6915	0,6
0,6	0,7257	0,7
0,7	0,7580	0,7
0,8	0,7881	0,7
0,9	0,8159	0,8
1	0,8413	0,8
1,1	0,8643	0,8

a.2) Lo que nos piden es la probabilidad de que no tengamos que usar la garantía y por lo tanto que una máquina dure 25 años o más expresado en porcentaje.

$$P(X \geq 25) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{25 - 20}{5}\right) =$$

$$= P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = \{\text{Miramos en la tabla de la } N(0, 1)\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

El porcentaje de máquinas que se espera no usen la garantía es del 15.87 %

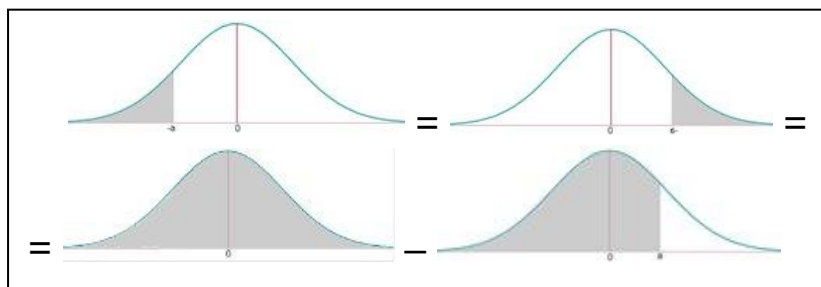
- b) Calculamos $P(15 < X < 21)$.

$$P(15 < X < 21) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{15 - 20}{5} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{21 - 20}{5}\right) = P(-1 < Z < 0.2) =$$

$$= P(Z < 0.2) - P(Z < -1) = P(Z < 0.2) - P(Z \geq 1) = P(Z < 0.2) - [1 - P(Z \leq 1)] =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla de la } N(0, 1)\} = 0.5793 - [1 - 0.8413] = \boxed{0.4206 = \frac{4206}{10000} = \frac{2103}{5000}}$$

z	0	0,01	0,0
0	0,5000	0,5040	0,50
0,1	0,5398	0,5438	0,54
0,2	0,5793	0,5832	0,58
0,3	0,6179	0,6217	0,62
0,4	0,6554	0,6591	0,66
0,5	0,6915	0,6950	0,69
0,6	0,7257	0,7291	0,73
0,7	0,7580	0,7611	0,76

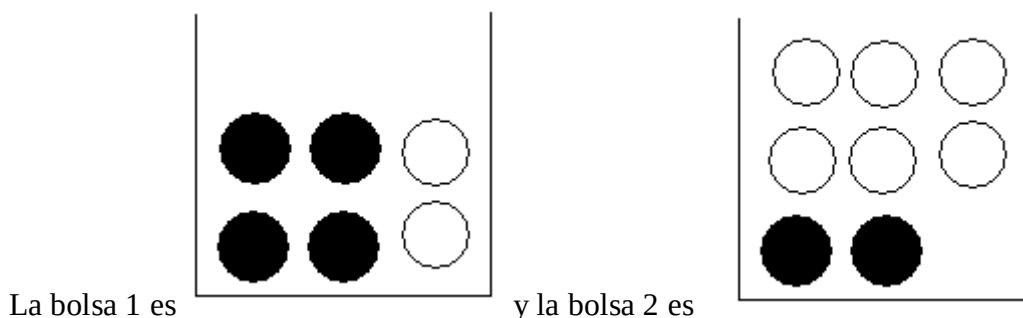


La proporción de máquinas que tendrán una duración comprendida entre los 15 y 21 años es de 2103 de cada 5000.

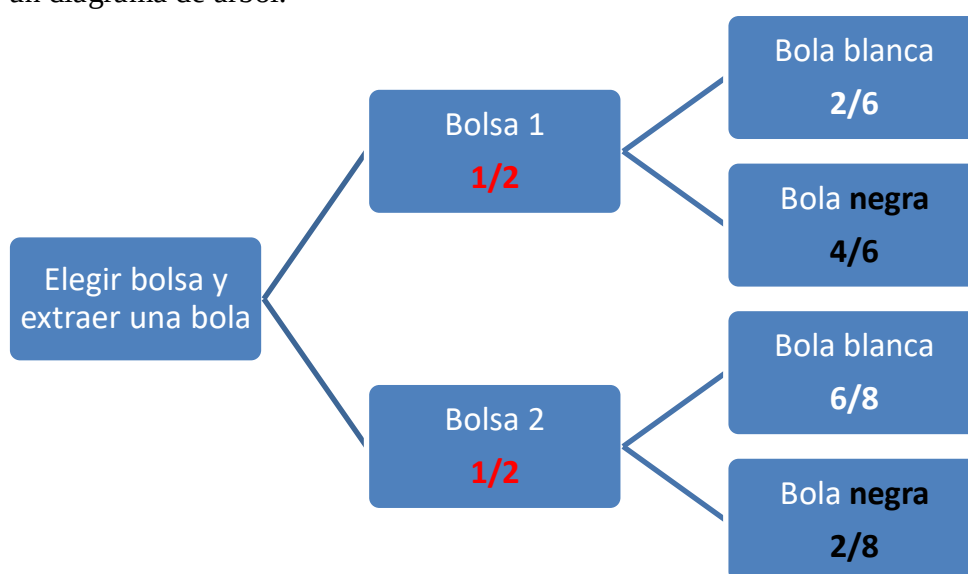
10.- (2 puntos) Una bolsa contiene 4 bolas negras y 2 blancas. Otra bolsa contiene 2 bolas negras y 6 blancas. Se elige una de las bolsas al azar y se extrae una bola.

a) Calcular la probabilidad de que la bola sea blanca.

b) Sabiendo que la bola es blanca, calcular la probabilidad de que sea de la primera bolsa.



Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total y utilizamos la información que aparece en el diagrama de árbol.

$$P(\text{Bola blanca}) = P(\text{Bolsa 1} \cap \text{Bola blanca}) + P(\text{Bolsa 2} \cap \text{Bola blanca}) =$$

$$= P(\text{Bolsa 1})P(\text{Bola blanca} / \text{Bolsa 1}) + P(\text{Bolsa 2})P(\text{Bola blanca} / \text{Bolsa 2}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} = \boxed{\frac{13}{24} = 0.542}$$

b) Esta es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Bolsa 1} / \text{Bola blanca}) = \frac{P(\text{Bolsa 1} \cap \text{Bola blanca})}{P(\text{Bola blanca})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{13}{24}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{24}} = \frac{24}{6 \cdot 13} = \boxed{\frac{4}{13} = 0.308}$$

EBAU Extraordinaria 2020



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad
Curso Académico: 2019-2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Calcular los valores de los parámetros reales a y b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2 - 9) + \frac{bx}{3} - b, & x < 3, \\ \ln(b(x-2)), & x \geq 3, \end{cases} \text{ sea derivable.}$$

2.- (2 puntos) Determinar el dominio y las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2}$$

Calcular la recta tangente en su punto de inflexión.

3.- (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por las funciones f y g , siendo éstas:

$$f(x) = \frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} - 2, \quad g(x) = (x-2)^2 - 1.$$

y las rectas $x = 3$, $x = 5$.

4.- (2 puntos) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a , el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (a-1)x + y + 3az = 1, \\ ax + ay - z = a, \\ (a-1)x + y + (a-1)z = -2a + 1. \end{cases}$$

5.- (2 puntos) Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix}$$

6.- (2 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Hallar A^{-1} y A^{10} .

7.- (2 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + 3y - 4z + 9 = 0 \\ -x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + 3y + z + 1 = 0$.

8.- (2 puntos) Dados las rectas r y s :

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 4x - 2y + 2z = 10 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$$

y el plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$. Hallar la posición relativa entre

a) las rectas r y s .

b) el plano π y la recta s .

9.- (2 puntos) La estancia vacacional de una familia en un hotel sigue una distribución Normal, de media 15 días y desviación típica 4 días.

a) Calcular la probabilidad de que la estancia de una familia sea inferior a 10 días.

b) Calcular la probabilidad de que la estancia esté comprendida entre 11 y 19 días.

10.- (2 puntos) En una clase de 35 alumnos, asisten 30 de ellos. Se sabe que aprueban todas las asignaturas el 80% de los alumnos que asisten a clase y el 10% de los que no asisten. Se elige un alumno al azar.

a) Calcular el porcentaje de alumnos que aprueba la asignatura.

b) Sabiendo que el alumno ha suspendido, calcular la probabilidad de que un alumno haya asistido a clase.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos) Calcular los valores de los parámetros reales a y b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2 - 9) + \frac{bx}{3} - b, & x < 3, \\ \ln(b(x-2)), & x \geq 3, \end{cases} \text{ sea derivable.}$$

Esta función es continua en $(-\infty, 3)$ pues es un polinomio, también en $(3, +\infty)$ pues es un logaritmo neperiano de una expresión que siempre es positiva (siendo $b > 0$).

¿Es continua en $x = 3$?

- Existe $f(3) = \ln(b(3-2)) = \ln b$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} a(x^2 - 9) + \frac{bx}{3} - b = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(b(x-2)) = \ln b \end{cases} \rightarrow \ln b = 0 \rightarrow \boxed{b=1}$
- Ambos valores son iguales

Se cumple todo si $b = 1$. La función es continua si $b = 1$.

Esta función es derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$ y su derivada es:

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2 - 9) + \frac{x}{3} - 1, & x < 3, \\ \ln(x-2), & x \geq 3, \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} a(2x) + \frac{1}{3}, & x < 3, \\ \frac{1}{x-2}, & x > 3, \end{cases}$$

¿Es derivable en $x = 3$?

Deben coincidir las derivadas laterales:

$$\left. \begin{aligned} f'(3^-) &= a(6) + \frac{1}{3} = 6a + \frac{1}{3} \\ f'(3^+) &= \frac{1}{3-2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6a + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow 6a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}}$$

Para ser derivable los valores de los parámetros son $a = \frac{1}{9}$ y $b = 1$.

2.- (2 puntos) Determinar el dominio y las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2}$$

Calcular la recta tangente en su punto de inflexión.

El dominio son todos los reales menos los valores que anulen el denominador, es decir, $\mathbb{R} - \{-2\}$.

- **Asíntota vertical.** $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{(x+2)^2} = \frac{1}{0} = +\infty$$

La asíntota vertical es $x = -2$

- **Asíntota horizontal.** $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$

- **Asíntota oblicua.** $y = mx + n$

No existe, pues existe asíntota horizontal.

Averigüemos el punto de inflexión, calculando la derivada segunda e igualando a cero.

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x+2)^2 - 2(x+2)(x+3)}{(x+2)^4} = \frac{\cancel{(x+2)}^1 [x+2 - 2(x+3)]}{(x+2)^{4 \rightarrow 3}}$$

$$f'(x) = \frac{x+2-2x-6}{(x+2)^3} = \frac{-4-x}{(x+2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-1(x+2)^3 - 3(x+2)^2(-4-x)}{(x+2)^6} = \frac{\cancel{(x+2)}^2 [-(x+2) - 3(-4-x)]}{(x+2)^{6 \rightarrow 4}}$$

$$f''(x) = \frac{-x-2+12+3x}{(x+2)^4} = \frac{2x+10}{(x+2)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x+10}{(x+2)^4} = 0 \Rightarrow 2x+10 = 0 \Rightarrow x = -5$$

Calculamos la derivada tercera y vemos si para $x = -5$ tiene un valor no nulo.

$$f''(x) = \frac{2x+10}{(x+2)^4} \Rightarrow f'''(x) = \frac{2(x+2)^4 - 4(x+2)^3(2x+10)}{(x+2)^8}$$

$$f'''(-5) = \frac{2(-5+2)^4 - 4(-5+2)^3(-10+10)}{(-5+2)^8} = \frac{162}{(-3)^8} \neq 0$$

En $x = -5$ hay un punto de inflexión.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Aplicamos esta fórmula para $f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2}$ en el punto de abscisa $x = -5$.

$$\left. \begin{array}{l} f(-5) = \frac{-5+3}{(-5+2)^2} = \frac{-2}{9} \\ f'(-5) = \frac{-4+5}{(-5+2)^3} = \frac{1}{-27} \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{-2}{9} = \frac{1}{-27}(x - (-5)) \Rightarrow y + \frac{2}{9} = -\frac{x}{27} - \frac{5}{27} \Rightarrow 27y + 6 = -x - 5$$

La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = -5$ tiene ecuación $\boxed{x + 27y + 11 = 0}$

3.- (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por las funciones f y g , siendo éstas:

$$f(x) = \frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} - 2, \quad g(x) = (x-2)^2 - 1.$$

y las rectas $x = 3$, $x = 5$.

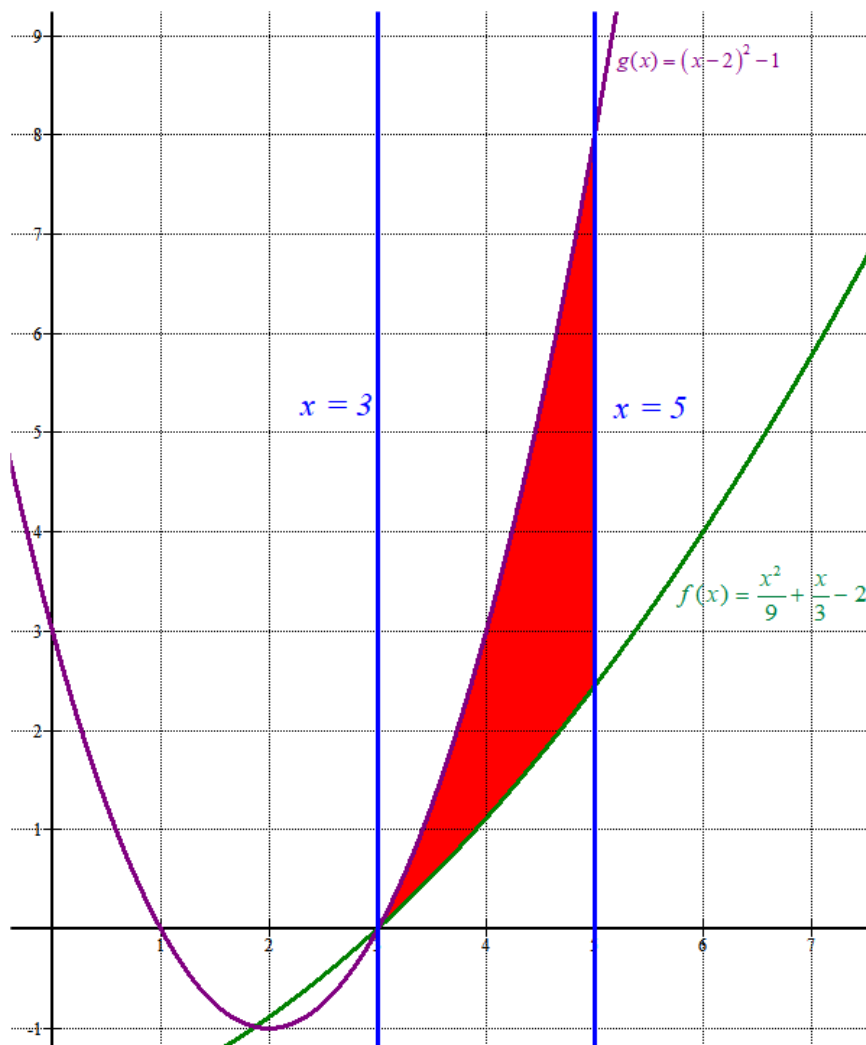
Dibujamos las funciones y las rectas para situar con más claridad el recinto del cual queremos hallar el área.

$$f(x) = \frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} - 2,$$

x	$y = \frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} - 2$
2	-0,88
3	0
4	1,11
5	2,44
6	4

$$g(x) = (x-2)^2 - 1$$

x	$(x-2)^2 - 1$
2	-1
3	0
4	3
5	8
6	15



El área es la integral definida de $g - f$ entre 3 y 5.

$$g(x) - f(x) = (x-2)^2 - 1 - \left(\frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} - 2 \right) = x^2 - 4x + 4 - 1 - \frac{x^2}{9} - \frac{x}{3} + 2 = \frac{8}{9}x^2 - \frac{13}{3}x + 5$$

$$\text{Área} = \int_3^5 g(x) - f(x) dx = \int_3^5 \left(\frac{8}{9}x^2 - \frac{13}{3}x + 5 \right) dx = \left[\frac{8}{9} \frac{x^3}{3} - \frac{13}{3} \frac{x^2}{2} + 5x \right]_3^5 = \left[\frac{8}{27}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + 5x \right]_3^5 =$$

$$= \left[\frac{8}{27}5^3 - \frac{13}{6}5^2 + 25 \right] - \left[\frac{8}{27}3^3 - \frac{13}{6}3^2 + 15 \right] = \frac{1000}{27} - \frac{13}{6}5^2 + 25 - 8 + \frac{39}{2} - 15 = \boxed{4.37 \text{ u}^2}$$

El resultado analítico concuerda (más o menos) con el área que se puede apreciar en el dibujo contando cuadraditos.

4.- (2 puntos) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a , el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (a-1)x + y + 3az = 1, \\ ax + ay - z = a, \\ (a-1)x + y + (a-1)z = -2a + 1. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada es $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & 3a \\ a & a & -1 \\ a-1 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a-1 & 1 & 3a \\ a & a & -1 \\ a-1 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = a(a-1)^2 - a + 1 + 3a^2 - 3a^3 + 3a^2 - a^2 + a + a - 1 = \\ &= a(a^2 - 2a + 1) - 3a^3 + 5a^2 + a = a^3 - 2a^2 + a - 3a^3 + 5a^2 + a = -2a^3 + 3a^2 + 2a \end{aligned}$$

Si lo igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow -2a^3 + 3a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(-2a^2 + 3a + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -2a^2 + 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 16}}{-4} = \begin{cases} \frac{-3+5}{-4} = -\frac{2}{4} = -0.5 = a \\ \frac{-3-5}{-4} = 2 = a \end{cases} \end{cases}$$

Distinguimos 4 casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$; $a \neq -0.5$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

Lo resolvemos utilizando el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3a \\ a & a & -1 \\ -2a+1 & 1 & a-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 3a \\ a & a & -1 \\ a-1 & 1 & a-1 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{a^2} - \cancel{a} + 2a - \cancel{1} + 3a^2 + 6a^3 - \cancel{3a^2} - \cancel{a^2} + \cancel{a} + \cancel{1}}{-2a^3 + 3a^2 + 2a}$$

$$x = \frac{6a^3 + 2a}{-2a^3 + 3a^2 + 2a} = \frac{6a^2 + 2}{-2a^2 + 3a + 2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 3a \\ a & a & -1 \\ a-1 & -2a+1 & a-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 3a \\ a & a & -1 \\ a-1 & 1 & a-1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{a^3 - 2a^2 + a - a + 1 - 6a^3 + 3a^2 - 3a^3 + 3a^2 - a^2 + a - 2a^2 + a + 2a - 1}{-2a^3 + 3a^2 + 2a} =$$

$$= \frac{-8a^3 + a^2 + 4a}{-2a^3 + 3a^2 + 2a} = \frac{-8a^2 + a + 4}{-2a^2 + 3a + 2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ a-1 & 1 & -2a+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 3a \\ a & a & -1 \\ a-1 & 1 & a-1 \end{vmatrix}} = \frac{-2a^3 + a^2 + 2a^2 - a + a^2 - a + a - a^2 + a + 2a^2 - a - a^2 + a}{-2a^3 + 3a^2 + 2a}$$

$$z = \frac{-2a^3 + 4a^2}{-2a^3 + 3a^2 + 2a} = \frac{-2a^2(a-2)}{-2a(a-2)(a+0.5)} = \frac{a}{a+0.5}$$

La solución es $\boxed{x = \frac{6a^2 + 2}{-2a^2 + 3a + 2}; y = \frac{-8a^2 + a + 4}{-2a^2 + 3a + 2}; z = \frac{a}{a + 0.5}}$

CASO 2. $a = 0$

El sistema queda:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ -z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ \boxed{z = 0} \\ -x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 1 + x}$$

El sistema es compatible indeterminado.Sus soluciones son $\boxed{x = t; y = 1 + t; z = 0}$ **CASO 3. $a = -0.5$**

El sistema queda:

$$\begin{cases} -1.5x + y - 1.5z = 1 \\ -0.5x - 0.5y - z = -0.5 \\ -1.5x + y - 1.5z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1.5x + y - 1.5z = 1 \\ -0.5x - 0.5y - z = -0.5 \\ -1.5x + y - 1.5z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 3z = -2 \\ x + y + 2z = 1 \\ 3x - 2y + 3z = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ 3x - 2y + 3z = -4 \\ -3x + 2y - 3z = 2 \\ \hline 0 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + 3z = -2 \\ x + y + 2z = 1 \\ 0 = -2 \end{array} \right.$$

La tercera ecuación es imposible. **El sistema es incompatible.**

CASO 4. $a = 2$

El sistema queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 6z = 1 \\ 2x + 2y - z = 2 \\ x + y + z = -3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x + y + z = -3 \\ -x - y - 6z = -1 \\ \hline -5z = -4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - 2 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 2x + 2y - z = 2 \\ -2x - 2y - 12z = -2 \\ \hline -13z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + 6z = 1 \\ -13z = 0 \\ -5z = -4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + 6z = 1 \\ z = 0 \\ z = \frac{4}{5} \end{array} \right.$$

Obtenemos dos soluciones distintas para z en la ecuación segunda y tercera.

El sistema es incompatible. No tiene solución.

5.- (2 puntos) Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 4}^a - x \cdot \text{Fila 3}^a \\ \hline 0 \quad y^3 - xy^2 \quad z^3 - xz^2 \quad t^3 - xt^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - x \cdot \text{Fila 2}^a \\ \hline -x^2 \quad -xy \quad -xz \quad -xt \\ \hline 0 \quad y^2 - xy \quad z^2 - xz \quad t^2 - xt \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - x \cdot \text{Fila 1}^a \\ \hline -x \quad -x \quad -x \quad -x \\ \hline 0 \quad y - x \quad z - x \quad t - x \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x & t-x \\ 0 & y^2-xy & z^2-xz & t^2-xt \\ 0 & y^3-xy^2 & z^3-xz^2 & t^3-xt^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y-x & z-x & t-x \\ y^2-xy & z^2-xz & t^2-xt \\ y^3-xy^2 & z^3-xz^2 & t^3-xt^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x & t-x \\ y(y-x) & z(z-x) & t(t-x) \\ y^2(y-x) & z^2(z-x) & t^2(t-x) \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos factor común} \\ \text{de cada columna} \end{array} \right\} = (y-x)(z-x)(t-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \\ y^2 & z^2 & t^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - y \cdot \text{Ecuación 2}^a \\ \hline -y^2 \quad -yz \quad -yt \\ \hline 0 \quad z^2 - yz \quad t^2 - yt \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - y \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ \hline -y \quad -y \quad -y \\ \hline 0 \quad z - y \quad t - y \end{array} \right\} =$$

$$= (y-x)(z-x)(t-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z-y & t-y \\ 0 & z^2-yz & t^2-yt \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x) \begin{vmatrix} z-y & t-y \\ z^2-yz & t^2-yt \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)(t-x) \begin{vmatrix} z-y & t-y \\ z(z-y) & t(t-y) \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos factor común} \\ \text{de cada columna} \end{array} \right\} =$$

$$= (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z & t \end{vmatrix} = \boxed{(y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)}$$

6.- (2 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Hallar A^{-1} y A^{10} .

Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Al ser distinto de cero, existe su inversa.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular A^{10} empezamos calculando A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m+m & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2m & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2m+m & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se observa que $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ km & 0 & 1 \end{pmatrix}$, por lo que $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10m & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.- (2 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+3y-4z+9=0 \\ -x-2y+z+1=0 \end{cases}$$

y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+3y+z+1=0$.

La ecuación del plano que nos piden tendrá un punto de la recta r , y como vectores directores el director de la recta r y el normal del plano $\pi \equiv x+3y+z+1=0$.

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, 3, 1)$.

Para encontrar el vector director y un punto de la recta r pasamos su ecuación a ecuaciones paramétricas.

Despejamos z en las ecuaciones.

$$r \equiv \begin{cases} x+3y-4z+9=0 \\ -x-2y+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y=4z-9 \\ -x-2y=-z-1 \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \Rightarrow y=3z-10$$

$$\Rightarrow x+3(3z-10)=4z-9 \Rightarrow x+9z-30=4z-9 \Rightarrow x=-5z+21$$

Las ecuaciones en paramétricas de la recta son $r \equiv \begin{cases} x=21-5z \\ y=-10+3z \\ z=0+z \end{cases}$

El vector director de r es $\vec{v}_r = (-5, 3, 1)$ y un punto es $P_r(21, -10, 0)$.

Obtenemos la ecuación del plano pedido.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(21, -10, 0) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{n} = (1, 3, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (-5, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-21 & y+10 & z \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\cancel{3x-63} - 5y - 50 + 3z + 15z - y - 10 - \cancel{3x+63} = 0$$

$$-6y + 18z - 60 = 0$$

$$\boxed{\pi' \equiv y - 3z + 10 = 0}$$

8.- (2 puntos) Dados las rectas r y s :

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 4x - 2y + 2z = 10 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$$

y el plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$. Hallar la posición relativa entre

- las rectas r y s .
- el plano π y la recta s .

a) Pasamos la recta “ r ” a paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 4x - 2y + 2z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = z + 1 \\ 4x - 2y = -2z + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x - 4y = -4z - 4 \\ 4x - 2y = -2z + 10 \end{cases}$$

$$\underline{-6y = -6z + 6} \Rightarrow y = z - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + z - 1 = z + 1 \Rightarrow x = 2$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (0, 1, 1) \\ P_r(2, -1, 0) \end{cases}$$

De la recta $s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$ obtenemos un punto y su vector director: $\vec{v}_s = (1, 2, 3)$ y $P_s(-3, -2, 1)$.

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (0, 1, 1) \\ \vec{v}_s = (1, 2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0}{1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$$

Por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

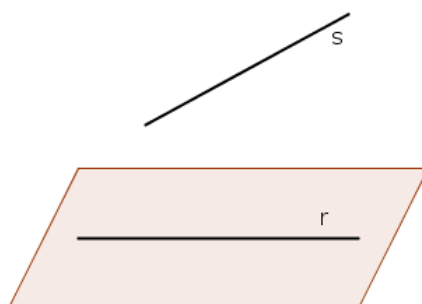
Y las rectas se cortan o cruzan.

Calculamos el producto mixto de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_r P_s}$.

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (-3, -2, 1) - (2, -1, 0) = (-5, -1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (0, 1, 1) \\ \vec{v}_s = (1, 2, 3) \\ \overrightarrow{P_r P_s} = (-5, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 15 - 1 + 10 - 1 = -7 \neq 0$$

Al ser distinto de cero las rectas se cruzan.



b) El plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$ tiene como vector normal $\vec{n} = (1, 1, -1)$ y la recta

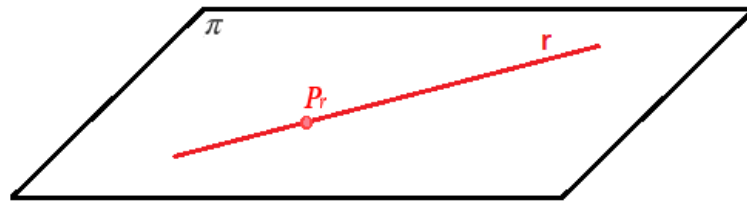
$$s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3} \text{ tiene como vector director } \vec{v}_s = (1, 2, 3).$$

El producto escalar de ambos es $\vec{n} \cdot \vec{v}_s = (1, 1, -1)(1, 2, 3) = 1 + 2 - 3 = 0$. Por lo que recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Comprobemos si el punto $P_s(-3, -2, 1)$ de la recta “s” está en el plano, es decir, si cumple su ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P_s(-3, -2, 1) \in \pi? \\ \pi \equiv x + y - z + 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} -3 - 2 - 1 + 6 = 0?$$

Como es cierto la recta “s” está contenida en el plano.

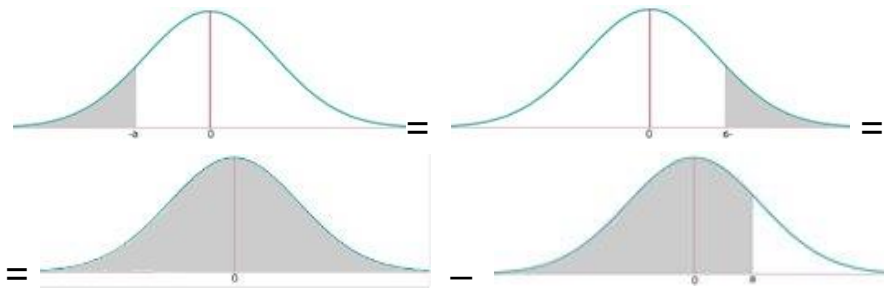


9.- (2 puntos) La estancia vacacional de una familia en un hotel sigue una distribución Normal, de media 15 días y desviación típica 4 días.

- a) Calcular la probabilidad de que la estancia de una familia sea inferior a 10 días.
b) Calcular la probabilidad de que la estancia esté comprendida entre 11 y 19 días.

X = Número de días de estancia vacacional de una familia. $X = N(15, 4)$

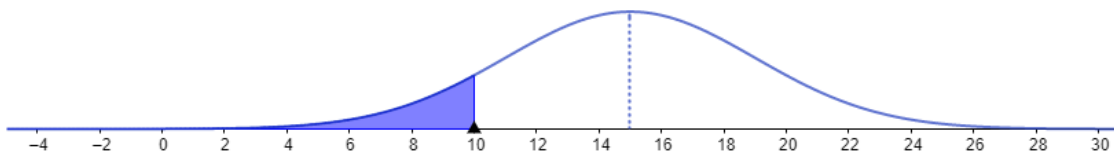
a) $P(X < 10) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{10-15}{4}\right) = P(Z < -1.25) = \dots$



$\dots = P(Z > 1.25) = 1 - P(Z \leq 1.25) = \{\text{Buscamos en la tabla } N(0, 1)\} =$

$= 1 - 0.8944 = \boxed{0.1056}$

$\mu = 15 \quad \sigma = 4$



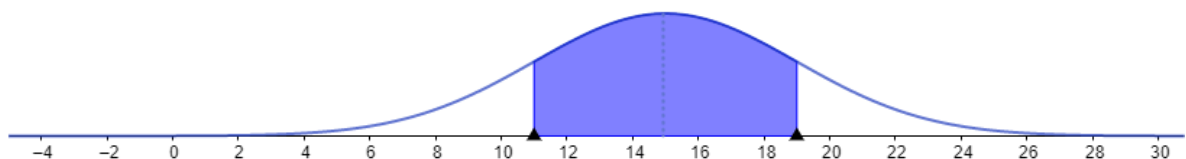
b) Nos piden calcular $P(11 \leq X \leq 19)$.

$P(11 \leq X \leq 19) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{11-15}{4} \leq Z \leq \frac{19-15}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) =$

$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 1)) =$

$= P(Z \leq 1) - 1 + P(Z \leq 1) = 0.8413 - 1 + 0.8413 = \boxed{0.6826}$

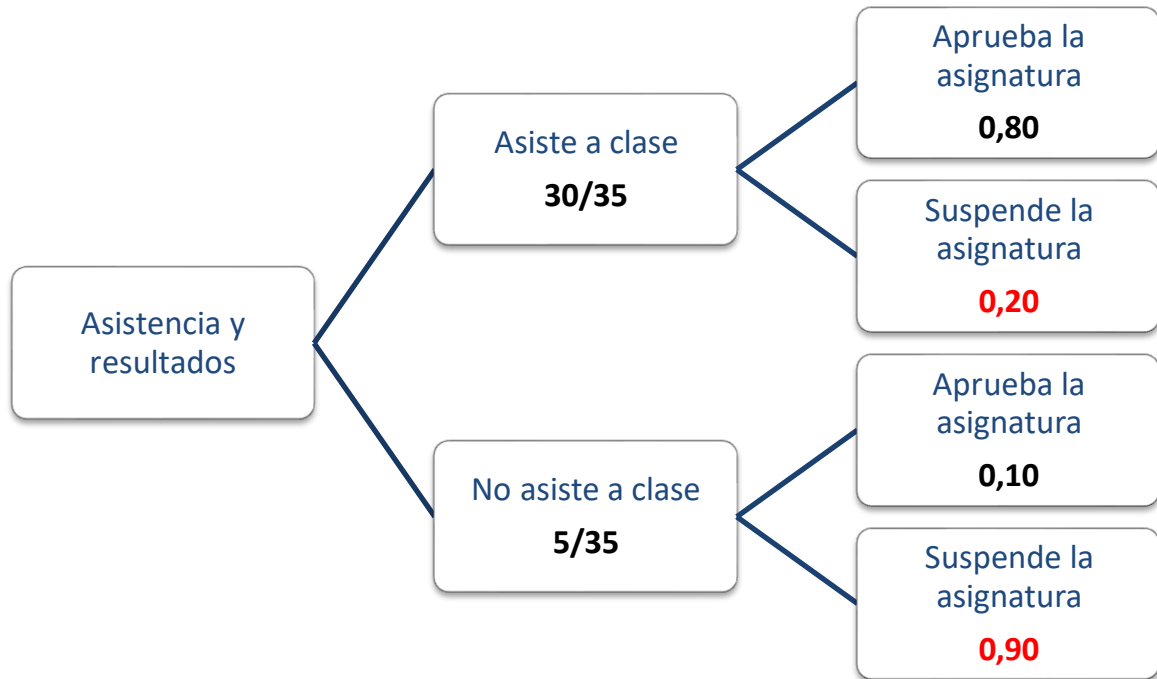
$\mu = 15 \quad \sigma = 4$



10.- (2 puntos) En una clase de 35 alumnos, asisten 30 de ellos. Se sabe que aprueban todas las asignaturas el 80% de los alumnos que asisten a clase y el 10% de los que no asisten. Se elige un alumno al azar.

- a) Calcular el porcentaje de alumnos que aprueba la asignatura.
 b) Sabiendo que el alumno ha suspendido, calcular la probabilidad de que un alumno haya asistido a clase.

Realizamos el diagrama de árbol.



- a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(\text{Apruebe la asignatura}) =$$

$$= P(\text{Asiste a clase}) P(\text{Apruebe la asignatura} / \text{Asiste a clase}) + \\ + P(\text{No asiste a clase}) P(\text{Apruebe la asignatura} / \text{No asiste a clase}) =$$

$$= \frac{30}{35} \cdot 0,8 + \frac{5}{35} \cdot 0,1 = \frac{24,5}{35} = \frac{49}{70} = \frac{7}{10} = 0,7 = \boxed{70\%}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Haya asistido a clase} / \text{Ha suspendido}) =$$

$$= \frac{P(\text{Haya asistido a clase} \cap \text{Ha suspendido})}{P(\text{Ha suspendido})} = \frac{\frac{30}{35} \cdot 0,2}{1 - 0,7} = \frac{\frac{6}{35}}{0,3} = \frac{\frac{4}{7}}{1} = 0,57$$

EBAU Ordinaria 2020



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad
Curso Académico: 2019-2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos)

a) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen} x \cos x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

b) Determinar el valor de la constante real a para que se satisfaga la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\operatorname{tg} \left(\left(\frac{\pi}{8} + 1 \right) \sqrt{x} - 2 \right)}{x^2 - 16 + ax} = \frac{1}{32}$$

2.- (2 puntos) Determinar los valores de los parámetros reales a y b para que las funciones $f(x) = ax^2 + b$ y $g(x) = x^2 + x + a$, sean tangentes en el punto de abscisa $x = -1$. Para los valores obtenidos de a y b , calcular la recta tangente a las curvas en $x = -1$.

3.- (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por las rectas $x = -2$, $x = 2$, el eje OX y la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

4.- (2 puntos) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

a) Hallar α y β de tal forma que $A^2 = \alpha A + \beta I$, siendo I la matriz identidad.

b) Calcular A^5 utilizando la anterior igualdad.

5.- (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ay + (a+1)z = a, \\ ax + z = a, \\ x + az = -a. \end{cases}$$

a) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a .

b) Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a = 2$.

6.- (2 puntos) Sean A y B las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Hallar X e Y , matrices soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3X - 5Y = A, \\ -X + 2Y = B. \end{cases}$$

b) Calcular si existen las matrices inversas de X e Y .

7.- (2 puntos) Determinar en función del parámetro real a , la posición relativa de los siguientes planos:

$$\begin{cases} (a-1)x + y - z = a, \\ (a+1)x + (2a+1)y + z = -a, \\ ax + ay + z = -a. \end{cases}$$

8.- (2 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

a) Hallar un vector $\vec{w}$ de módulo uno, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Calcular el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

9.- (2 puntos) En una clase de primero de primaria el 50% de los niños practica natación, el 20% practica baloncesto y el 5% ambos deportes.

a) Calcular la probabilidad de que un niño elegido al azar no practique ni natación ni baloncesto.

b) Calcular la probabilidad de que un niño practique natación si juega al baloncesto.

10.- (2 puntos) Se sabe que dos poblaciones distintas X e Y se distribuyen según una Normal de media 25. Además $P(X \geq 27) = P(Y \geq 30) = 0,1587$. Calcular sus respectivas varianzas.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES**1.- (2 puntos)**

a) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen} x \cos x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

b) Determinar el valor de la constante real a para que se satisfaga la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\operatorname{tg} \left(\left(\frac{\pi}{8} + 1 \right) \sqrt{x} - 2 \right)}{x^2 - 16 + ax} = \frac{1}{32}$$

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen} x \cos x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \left(\frac{1 - \operatorname{sen} 0 \cos 0}{1 + \operatorname{sen} 0 \cos 0} \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} 0}} = 1^\infty = \text{Indeterminación} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{sen} x} \left(\frac{1 - \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen} x \cos x} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{sen} x} \left(\frac{1 - \operatorname{sen} x \cos x - 1 - \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen} x \cos x} \right)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cancel{\operatorname{sen} x} \cos x}{\cancel{\operatorname{sen} x} (1 + \operatorname{sen} x \cos x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x}{1 + \operatorname{sen} x \cos x}} = e^{\frac{-2}{1}} = \boxed{e^{-2}}$$

b) Calculamos el límite.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\operatorname{tg} \left(\left(\frac{\pi}{8} + 1 \right) \sqrt{x} - 2 \right)}{x^2 - 16 + ax} = \frac{\operatorname{tg} \left(\left(\frac{\pi}{8} + 1 \right) \sqrt{4} - 2 \right)}{4a} = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + 2 - 2 \right)}{4a} = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right)}{4a} = \frac{1}{4a}$$

Lo igualamos a $1/32$.

$$\frac{1}{4a} = \frac{1}{32} \Rightarrow 4a = 32 \Rightarrow \boxed{a = 8}$$

2.- (2 puntos) Determinar los valores de los parámetros reales a y b para que las funciones $f(x) = ax^2 + b$ y $g(x) = x^2 + x + a$, sean tangentes en el punto de abscisa $x = -1$. Para los valores obtenidos de a y b , calcular la recta tangente a las curvas en $x = -1$.

Si son tangentes deben de tener el mismo valor de la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + b \Rightarrow f'(x) = 2ax \Rightarrow f'(-1) = -2a \\ g(x) = x^2 + x + a \Rightarrow g'(x) = 2x + 1 \Rightarrow g'(-1) = -2 + 1 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

Y además deben de coincidir en dicho punto.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + b \Rightarrow f(-1) = a + b = \frac{1}{2} + b \\ g(x) = x^2 + x + a \Rightarrow g(-1) = 1 - 1 + a = a = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} + b = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

Para $a = \frac{1}{2}$ y $b = 0$ las funciones son $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ y $g(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$.

Calculamos la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ en $x = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = \frac{1}{2} \\ f'(x) = x \Rightarrow f'(-1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -1(x + 1) \Rightarrow y = -x - 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = -x - \frac{1}{2}}$$

3.- (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por las rectas $x = -2$, $x = 2$, el eje OX y la función

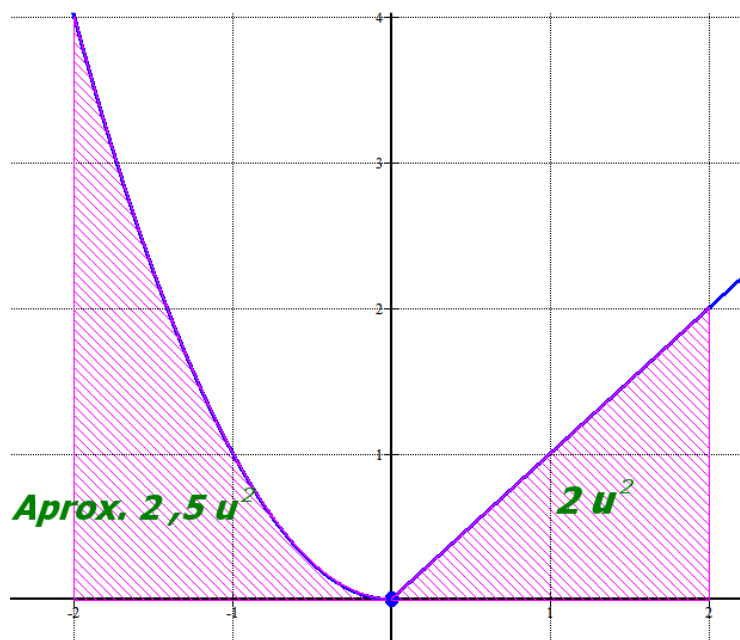
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Dividimos el recinto en dos partes, uno antes de $x = 0$ y otro después de $x = 0$.

Como estas dos funciones solo cortan el eje en $x = 0$, el área es:

$$\text{Área} = \int_{-2}^0 x^2 dx + \int_0^2 x dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \left[\frac{0^3}{3} \right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} \right] + \left[\frac{2^2}{2} \right] - \left[\frac{0^2}{2} \right]$$

$$\text{Área} = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3} = 4,66 u^2$$



4.- (2 puntos) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- a) Hallar α y β de tal forma que $A^2 = \alpha A + \beta I$, siendo I la matriz identidad.
 b) Calcular A^5 utilizando la anterior igualdad.

a) Resolvemos la ecuación matricial.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \alpha A + \beta I \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha + \beta & 0 \\ \alpha m & 0 & 2\alpha + \beta \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 = 2\alpha + \beta \\ \alpha m = 4m \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4 = 2\alpha + \beta \\ \alpha = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 = 8 + \beta \Rightarrow \boxed{\beta = -4}$$

Se cumple $A^2 = 4A - 4I = 4(A - I)$

b)

$$\begin{aligned} A^5 &= A^2 \cdot A^2 \cdot A = 16(A - I)(A - I)A = 16(A^2 - A - A + I)A = 16(A^2 - 2A + I)A = \\ &= 16(4A - 4I - 2A + I)A = 16(2A - 3I)A = 16(2A^2 - 3A) = 16(2(4A - 4I) - 3A) = \\ &= 16(8A - 8I - 3A) = 16(5A - 8I) \end{aligned}$$

$$A^5 = 16 \left(5 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 16 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5m & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 80m & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

5.- (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ay + (a+1)z = a, \\ ax + z = a, \\ x + az = -a. \end{cases}$$

a) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a .

b) Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a = 2$.

a) La matriz de coeficientes asociada es $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a - a^3. \text{ Si lo igualamos a cero.}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a - a^3 = 0 \Rightarrow a(1 - a^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Distinguimos 4 casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$; $a \neq -1$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

Lo resolvemos utilizando el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}} = \frac{-a^2 - a^3}{a - a^3} = \frac{-a^2(1+a)}{a(1-a^2)} = \frac{-a^2(1+a)}{a(1-a)(1+a)} = \frac{-a}{1-a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & a & 1 \\ 1 & -a & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}} = \frac{a - a^3 - a^2 - a^2 - a - a^3}{a - a^3} = \frac{-2a^3 - 2a^2}{a - a^3} = \frac{-2a^2(1+a)}{a(1-a)(1+a)} = \frac{-2a}{1-a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}} = \frac{a^2 + a^3}{a - a^3} = \frac{a^2(1+a)}{a(1-a^2)} = \frac{a^2(1+a)}{a(1-a)(1+a)} = \frac{a}{1-a}$$

La solución es $\boxed{x = \frac{-a}{1-a}; y = \frac{-2a}{1-a}; z = \frac{a}{1-a}}$

CASO 2. $a = 0$

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Su determinante es nulo, por lo que el rango no es 3. El rango es 2 pues al considerar el menor de orden 2 que resulta de quitarle la columna 2ª (todo ceros) y la fila 1ª (igual que la 2ª)

tenemos $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ como solo le hemos añadido una columna de

ceros su rango es el mismo que el de A.

Rango de A = 2 = Rango de A/B < 3 = Número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos:

Para resolverlo sustituimos en el sistema inicial y queda $\begin{cases} z = 0, \\ z = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

Sus soluciones son $\boxed{x = 0; y = t; z = 0}$

CASO 3. $a = -1$

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Su determinante es nulo, por lo que el rango no es 3. El rango es 2 pues al considerar el menor de orden 2 que resulta de quitarle la columna 3ª (proporcional a la 1ª) y la fila 3ª (proporcional

a la 2ª) tenemos $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Como la columna 1ª y 3ª son

proporcionales tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitarle la columna 1ª →

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$. El rango de A/B no es 3, por lo

que es 2 como el rango de A.

Rango de A = Rango de A/B = 2 < 3 = Número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos:

$$\begin{cases} -y = -1, \\ -x + z = -1, \\ x - z = 1. \end{cases} \Rightarrow \{ \text{Ecuación } 2^a = \text{Ecuación } 3^a \} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + z \\ y = 1 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $\boxed{x = 1 + t; y = 1; z = t}$

CASO 4. $a = 1$

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Su determinante es nulo, por lo que el rango no es 3. El rango es 2 pues al considerar el menor de orden 2 que resulta de quitarle la columna 3ª y la fila 3ª (igual a la 2ª) tenemos $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 3 que

resulta de quitarle la 1ª columna el menor resultante tiene determinante

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$. Por lo que el rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 $\neq$ 3 = Rango de A/B. **El sistema es incompatible.** No tiene solución.

b) Para $a = 2$ la matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene determinante

$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 8 = -6 \neq 0$. La matriz tiene inversa.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{-6} = \frac{-1}{6} \left(\begin{array}{ccc} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & -2/6 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

6.- (2 puntos) Sean A y B las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Hallar X e Y , matrices soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3X - 5Y = A, \\ -X + 2Y = B. \end{cases}$$

b) Calcular si existen las matrices inversas de X e Y .

a) Despejamos en el sistema las matrices incógnitas.

$$\begin{cases} 3X - 5Y = A, \\ -X + 2Y = B. \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 1}^a + 3 \cdot \text{Ecuación 2}^a \\ 3X - 5Y = A \\ -3X + 6Y = 3B \\ \hline Y = A + 3B \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3X - 5Y = A, \\ Y = A + 3B. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3X - 5(A + 3B) = A \Rightarrow 3X - 5A - 15B = A \Rightarrow 3X = 6A + 15B \Rightarrow X = 2A + 5B$$

Sustituimos el valor de las matrices y determinamos el valor de X e Y .

$$X = 2A + 5B = 2 \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 + 25 & 10 - 10 \\ 20 - 20 & -10 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = A + 3B = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 + 15 & 5 - 6 \\ 10 - 12 & -5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |X| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \text{ No existe la inversa de } X.$$

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |Y| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0; \text{ No existe la inversa de } Y$$

7.- (2 puntos) Determinar en función del parámetro real a , la posición relativa de los siguientes planos:

$$\begin{cases} (a-1)x + y - z = a, \\ (a+1)x + (2a+1)y + z = -a, \\ ax + ay + z = -a. \end{cases}$$

Es lo mismo que discutir un sistema.

Tomamos la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ a+1 & 2a+1 & 1 \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante e igualamos a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ a+1 & 2a+1 & 1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(2a+1) + a - (a+1)a + a(2a+1) - a - 1 - a(a-1) =$$

$$= 2a^2 + a - 2a - 1 + a - a^2 - a + 2a^2 + \cancel{a} - \cancel{a} - 1 - a^2 + a = 2a^2 - 2$$

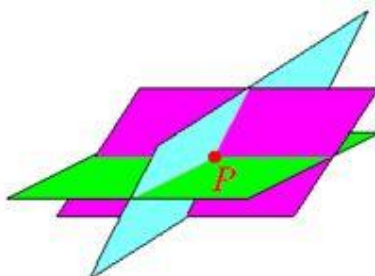
$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

Estudiamos tres casos distintos.

CASO 1. $a \neq \pm 1$

En este caso el determinante es no nulo y el rango de la matriz A es 3. Al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas.

El sistema tiene una única solución (un punto). Los tres planos se cortan en un punto P.



CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. El rango de A es 2.

$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Le hemos añadido una columna que es proporcional a la 3ª. El rango de

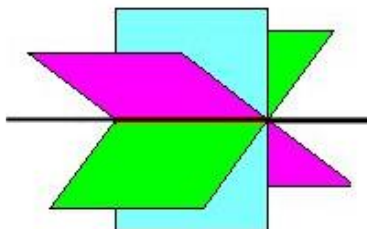
A/B es 2 como el de A.

Rango de A = Rango de A/B = 2 < 3 = Número de incógnitas.

El sistema tiene infinitas soluciones (una recta de puntos). Los tres planos coinciden en una recta.

$$\begin{cases} y - z = 1, \\ 2x + 3y + z = -1, \\ x + y + z = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + z \\ 2x + 3y = -1 + z \\ x + y = -1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + z \\ 2x + 3 + 3z = -1 + z \\ x + 1 + z = -1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + z \\ 2x = -4 - 2z \\ x = -2 - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + z \\ x = -2 - 2z \end{cases}$$

Coinciden en la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$



CASO 3. $a = -1$

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3.

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. El rango de A es 2.

$A/B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Como la columna añadida es igual que la 3ª el rango de A/B es igual

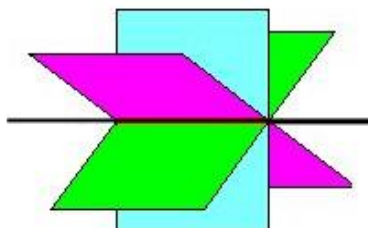
que el de A.

Rango de A = 2 = Rango de A/B < 3 = número de incógnitas.

El sistema tiene infinitas soluciones (una recta). Los tres planos se cortan en una recta.

$$\begin{cases} -2x + y - z = -1 \\ -y + z = 1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y - z = -1 \\ y = -1 + z \\ -x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 1 + z - z = -1 \\ y = -1 + z \\ -x + 1 - z + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ y = -1 + z \\ -x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 + z \\ x = 0 \end{cases}$$

Coinciden en la recta de ecuación $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$



8.- (2 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

- a) Hallar un vector $\vec{w}$ de módulo uno, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
 b) Calcular el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) Un vector perpendicular a otros dos es el que se obtiene con su producto vectorial.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i + k - j - 3i = -i - j + k = (-1, -1, 1)$$

Este vector tiene módulo $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

El vector $\vec{w}$ que buscamos es el del producto vectorial dividido por su módulo, este vector tiene módulo 1 y es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{w} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{(-1, -1, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

b) El área del paralelogramo que definen dos vectores es el módulo del producto vectorial de ambos.

$$\text{Área} = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} u^2$$

9.- (2 puntos) En una clase de primero de primaria el 50% de los niños practica natación, el 20% practica baloncesto y el 5% ambos deportes.

- a) Calcular la probabilidad de que un niño elegido al azar no practique ni natación ni baloncesto.
b) Calcular la probabilidad de que un niño practique natación si juega al baloncesto.

Realizamos una tabla de contingencia para obtener los números de cada opción.

	Baloncesto	No baloncesto	TOTALES
Natación	5		50
No natación			
TOTALES	20		100

Completamos la tabla.

	Baloncesto	No baloncesto	TOTALES
Natación	5	45	50
No natación	15	35	50
TOTALES	20	80	100

Con los datos de la tabla y utilizando la regla de Laplace respondemos a lo planteado en el ejercicio.

- a) De 100 niños hay 35 que no practican ni natación ni baloncesto.

$$P(\text{no practique natación ni baloncesto}) = 35\% = \boxed{0,35} \text{ Mirando en la tabla.}$$

- b) Como hay 20 que juegan al baloncesto y de estos 5 además practican natación, la probabilidad pedida es:

$$P(\text{Practique natación / Juega baloncesto}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = \boxed{0,25}$$

10.- (2 puntos) Se sabe que dos poblaciones distintas X e Y se distribuyen según una Normal de media 25. Además $P(X \geq 27) = P(Y \geq 30) = 0,1587$. Calcular sus respectivas varianzas.

Supongamos que $X=N(25,\sigma)$ y que $Y=N(25,\sigma')$.

$$P(X \geq 27) = 0,1587 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{27-25}{\sigma}\right) = 0,1587 \Rightarrow$$

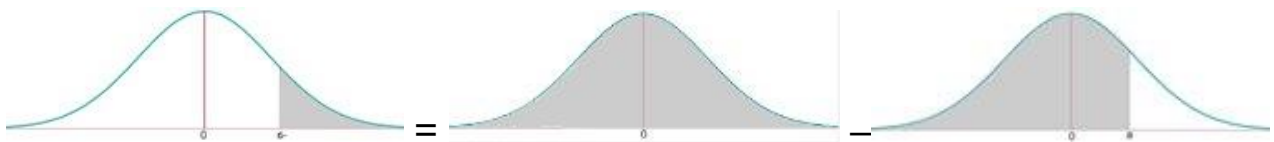
$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 0,1587 \Rightarrow P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 0,8413 \Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 2 \Rightarrow \boxed{\text{Varianza}(X) = 2^2 = 4}$$

$$P(Y \geq 30) = 0,1587 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{30-25}{\sigma'}\right) = 0,1587 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{5}{\sigma'}\right) = 0,1587 \Rightarrow P\left(Z < \frac{5}{\sigma'}\right) = 0,8413 \Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\sigma'} = 1 \Rightarrow \sigma' = 5 \Rightarrow \boxed{\text{Varianza}(Y) = 5^2 = 25}$$



EBAU Julio 2019



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)**

Curso 2018/2019

Convocatoria: Julio

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, de modo que los vectores son unitarios y forman entre sí ángulos de 45° . Dados los vectores $u = e_1 + e_2$ y $v = e_1 - e_2 + e_3$.

- (I) Calcula el módulo de los vectores u y v .
- (II) Calcula el coseno del ángulo formado por los vectores u y v .

2.- (2 puntos) El peso medio según la OMS de un niño de 5 años sigue una distribución normal de media 18,5 kg y desviación típica 2,25 kg. Si se elige un niño al azar, Halla el porcentaje de niños

- (I) cuyo peso es superior a 23 kg.
- (II) cuyo peso está entre 15 y 23 kg.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

3.- (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

- (I) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f .
- (II) Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. En caso afirmativo, calcula el valor $c \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a que se refiere el teorema de Rolle.
- (III) Halla el área encerrada por f y el eje de abscisas en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$

4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}.$$

- (I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A .
- (II) Halla la inversa de la matriz A , cuando exista.

(III) Para $a=1$ y las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resuelve el sistema

$$\begin{cases} BXA = Y \\ \frac{1}{3}Y + C = D \end{cases}$$

PROPUESTA B:

1.- (2 puntos) En un colegio se han ofertado para los niños de infantil tres actividades extraescolares Inglés (ING), Multideporte (MUL) y Robótica (ROB), con dos rangos de edad de 3 a 4 años (MP) y de 5 a 6 años (MG). Se sabe que se han apuntado a alguna actividad un total de 300 niños. De ellos, hay 100 que tienen entre 3 y 4 años, de los cuales 82 hacen Inglés y 10 han elegido Multideporte. Se sabe que al grupo de Robótica se han apuntado 83 niños, y hay 105 niños de entre 5 y 6 años que se han apuntado a Inglés.

(I) Toma un niño al azar, halla las siguientes probabilidades:

$$P(MG), P(MUL), P(MP \cap ROB), P(ROB / MP) \text{ y } P(MG / ING).$$

(II) Comprueba que el suceso MUL es independiente de la edad del niño.

2.- (2 puntos) Dos vértices consecutivos de un rectángulo son $P = (2,2,1)$ y $Q = (0,0,-1)$ y los otros dos pertenecen a una recta r que pasa por el punto $A = (5,4,3)$.

(I) Determina la ecuación de la recta r .

(II) Determina la ecuación del plano que contiene al rectángulo.

3.- (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

(I) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f .

(II) Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. En caso

afirmativo, calcula el valor $c \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a que se refiere el teorema de Rolle.

(III) Halla el área encerrada por f y el eje de abscisas en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$

4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A .

(II) Halla la inversa de la matriz A , cuando exista.

(III) Para $a=1$ y las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resuelve el sistema

$$\begin{cases} BXA = Y \\ \frac{1}{3}Y + C = D \end{cases}$$

SOLUCIONES

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, de modo que los vectores son unitarios y forman entre sí ángulos de 45° . Dados los vectores $u = e_1 + e_2$ y $v = e_1 - e_2 + e_3$.

(I) Calcula el módulo de los vectores u y v .

(II) Calcula el coseno del ángulo formado por los vectores u y v .

Sabemos que $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1 \Rightarrow e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = 1$.

Sabemos que $e_1 \cdot e_2 = |e_1| \cdot |e_2| \cdot \cos(e_1, e_2) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de la misma manera $e_2 \cdot e_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(I) Hallamos el módulo de u .

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{(e_1 + e_2)(e_1 + e_2)} = \sqrt{e_1 \cdot e_1 + e_1 \cdot e_2 + e_2 \cdot e_1 + e_2 \cdot e_2} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = \boxed{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Hallamos el módulo de v .

$$\begin{aligned} |v| &= \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{(e_1 - e_2 + e_3)(e_1 - e_2 + e_3)} = \\ &= \sqrt{e_1 \cdot e_1 - e_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot e_3 - e_2 \cdot e_1 + e_2 \cdot e_2 - e_2 \cdot e_3 + e_3 \cdot e_1 - e_3 \cdot e_2 + e_3 \cdot e_3} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 1} = \boxed{\sqrt{3 - \sqrt{2}}} \end{aligned}$$

(II) Aplicamos la fórmula del producto escalar.

$$u \cdot v = (e_1 + e_2)(e_1 - e_2 + e_3) = e_1 \cdot e_1 - e_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot e_3 + e_2 \cdot e_1 - e_2 \cdot e_2 + e_2 \cdot e_3 =$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= |u| \cdot |v| \cdot \cos(u, v) = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{3 - \sqrt{2}} \cdot \cos(u, v) = \sqrt{(2 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} \cdot \cos(u, v) = \\ &= \sqrt{6 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2} \cdot \cos(u, v) = \sqrt{4 + \sqrt{2}} \cdot \cos(u, v) \end{aligned}$$

Iguamos ambos resultados.

$$\sqrt{2} = \sqrt{4 + \sqrt{2}} \cdot \cos(u, v) \Rightarrow \boxed{\cos(u, v) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 + \sqrt{2}}}}$$

2.- (2 puntos) El peso medio según la OMS de un niño de 5 años sigue una distribución normal de media 18,5 kg y desviación típica 2,25 kg. Si se elige un niño al azar, Halla el porcentaje de niños
 (I) cuyo peso es superior a 23 kg.
 (II) cuyo peso está entre 15 y 23 kg.
 (Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

X = Peso de un niño de 5 años. $X = N(18,5, 2,25)$

(I) Calculamos $P(X > 23)$.

$$P(X > 23) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 18,5}{2,25} > \frac{23 - 18,5}{2,25}\right) =$$

$$= P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = \boxed{0,0228}$$

El porcentaje es de 2,28%

(II) Calculamos $P(15 < X < 23)$.

$$P(15 < X < 23) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{15 - 18,5}{2,25} < \frac{X - 18,5}{2,25} < \frac{23 - 18,5}{2,25}\right) =$$

$$= P(-1,55 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -1,55) = P(Z < 2) - P(Z > 1,55) =$$

$$= P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1,55)) = 0,9772 - 1 + 0,9394 = \boxed{0,9166}$$

El porcentaje es del 91,66 %

3.- (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

(I) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f .

(II) Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. En caso

afirmativo, calcula el valor $c \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a que se refiere el teorema de Rolle.

(III) Halla el área encerrada por f y el eje de abscisas en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$

(I) La función $f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}$ tiene como dominio $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, ya que el denominador se anula para $x = 1$ y $x = -1$.

La función se puede expresar como
$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x^2 - 1} & \text{si } x \leq 0 \text{ y } x \neq -1 \\ \frac{x}{x^2 - 1} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \end{cases}$$

Esa función es continua en cualquier valor de x distinto de -1 , 0 y 1 . Veamos en $x = 0$.

- Existe $f(0) = \frac{0}{0-1} = 0$

- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x^2 - 1} = 0$

- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$

- Los tres valores son iguales.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Veamos la derivabilidad de la función en $x = 0$

Como la derivada de la función es
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 + 1 + 2x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} & \text{si } x < 0 \text{ y } x \neq -1 \\ \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{x^2 - 1} = \frac{-x^2 - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \end{cases}$$

Entonces $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$ y $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{0-1}{0-1} = 1$. Como son valores distintos no existe la derivada en $x = 0$.

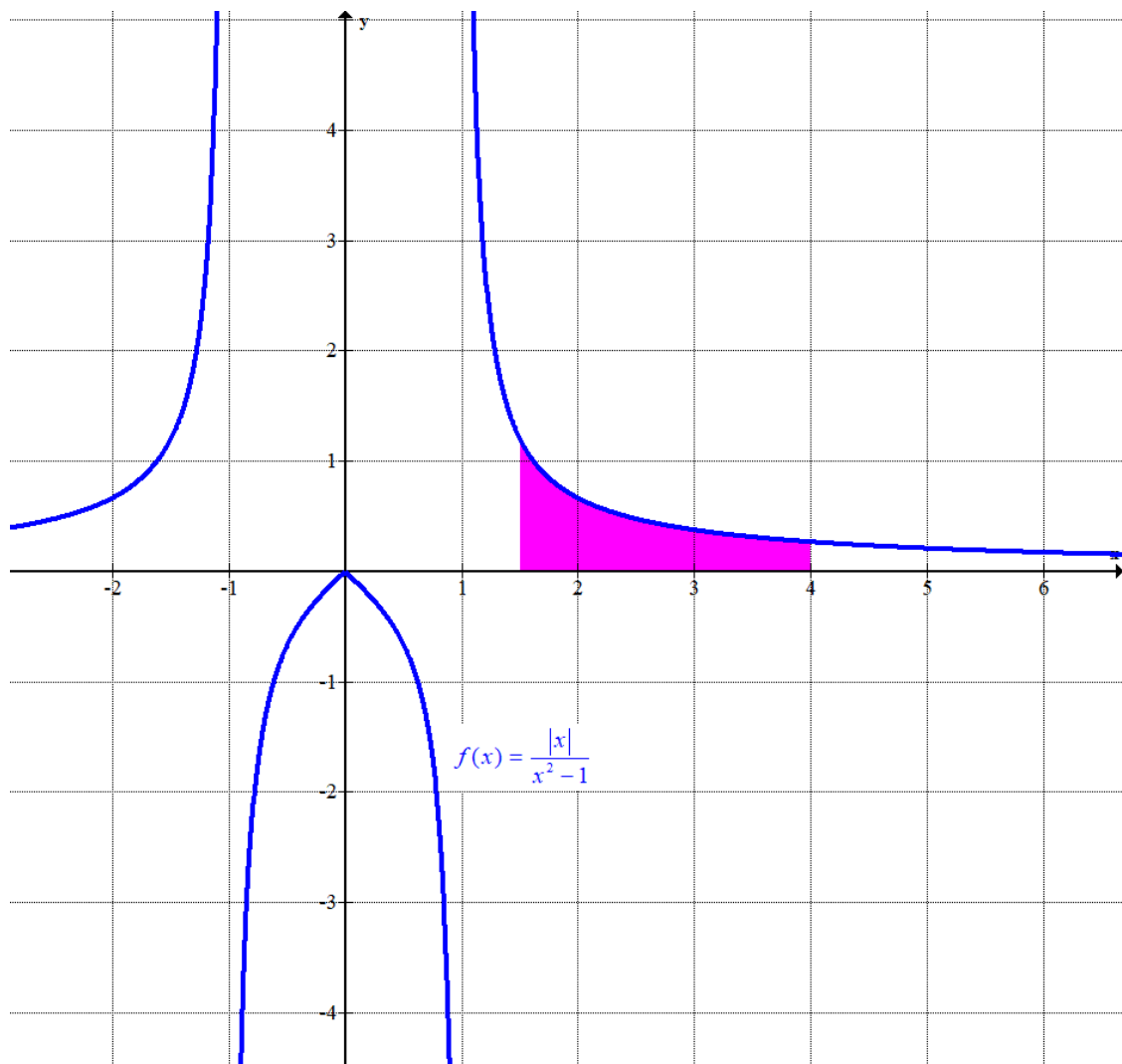
Es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

(II) En el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ la función es continua, pero en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ la función no es derivable, ya que existe un punto del intervalo donde no es derivable: $x = 0$. No es aplicable el teorema de Rolle.

(III) En el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$ la función es $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$. Veamos donde corta la función el eje de abscisas. $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x = 0$. Como $x = 0$ no pertenece al intervalo $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$ el área de la región pedida es:

$$\text{Área} = \int_{1,5}^4 \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int_{1,5}^4 \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2-1) \right]_{1,5}^4 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left[\ln(4^2-1) \right] - \left[\ln(1,5^2-1) \right] \right) = \frac{1}{2} (\ln 15 - \ln 1,25) = \frac{1}{2} \ln \frac{15}{1,25} = \boxed{\frac{1}{2} \ln 12 \approx 1.24 \text{ u}^2}$$



4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A .

(II) Halla la inversa de la matriz A , cuando exista.

(III) Para $a=1$ y las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resuelve el sistema

$$\begin{cases} BXA = Y \\ \frac{1}{3}Y + C = D \end{cases}$$

(I) Para que tenga inversa no se debe anular su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{vmatrix} = a(2a-1) \text{ si igualamos a cero}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a(2a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a-1 = 0 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para todo valor de a distinto de 0 y 0,5.

(II) Para $a \neq 0$ y $a \neq 0.5$ existe la inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 2a-1 \end{pmatrix}}{a(2a-1)} = \frac{\begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} a & -a \\ 0 & 2a-1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -a \\ 0 & 2a-1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a-1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a-1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & -a \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{a(2a-1)}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} a(2a-1) & 0 & 0 \\ 0 & 2a-1 & 0 \\ 0 & a & a \end{pmatrix}}{a(2a-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a-1} & \frac{1}{2a-1} \end{pmatrix}$$

(III) Para $a=1$ existe la inversa de A y vale $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2-1} & \frac{1}{2-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} BXA = Y \\ \frac{1}{3}Y + C = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BX = YA^{-1} \\ Y + 3C = 3D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = B^{-1}YA^{-1} \\ Y = 3D - 3C \end{cases}$$

$$Y = 3D - 3C = 3 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^t)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Terminamos de resolver el sistema.

$$X = B^{-1}YA^{-1} = X = B^{-1}YA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 12-3 & -6+6 & -6-9 \\ -30+9 & 15-18 & 15+27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 \\ -21 & -3 & 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -15 & -15 \\ -21 & 39 & 42 \end{pmatrix}$$

La solución es $X = \begin{pmatrix} 9 & -15 & -15 \\ -21 & 39 & 42 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$

PROPUESTA B:

1.- (2 puntos) En un colegio se han ofertado para los niños de infantil tres actividades extraescolares Inglés (ING), Multideporte (MUL) y Robótica (ROB), con dos rangos de edad de 3 a 4 años (MP) y de 5 a 6 años (MG). Se sabe que se han apuntado a alguna actividad un total de 300 niños. De ellos, hay 100 que tienen entre 3 y 4 años, de los cuales 82 hacen Inglés y 10 han elegido Multideporte. Se sabe que al grupo de Robótica se han apuntado 83 niños, y hay 105 niños de entre 5 y 6 años que se han apuntado a Inglés.

(I) Toma un niño al azar, halla las siguientes probabilidades:

$$P(MG), P(MUL), P(MP \cap ROB), P(ROB / MP) \text{ y } P(MG / ING).$$

(II) Comprueba que el suceso MUL es independiente de la edad del niño.

Realizamos una tabla de contingencia para aclararnos con los datos proporcionados y obtener los datos consecuencia de estos.

	Inglés	Multideporte	Robótica	
De 3 y 4 años	82	10		100
De 5 a 6 años	105			
			83	300

Completamos la tabla.

	Inglés (ING)	Multideporte (MUL)	Robótica (ROB)	
De 3 y 4 años (MP)	82	10	8	100
De 5 a 6 años (MG)	105	20	75	200
	187	30	83	300

(I) Hallamos las probabilidades pedidas usando la regla de Laplace y los datos de la tabla.

$$P(MG) = \frac{200}{300} = \frac{2}{3} = 0,66 \quad P(MUL) = \frac{30}{300} = \frac{1}{10} = 0,1 \quad P(MP \cap ROB) = \frac{8}{300} = 0,026$$

$$P(ROB / MP) = \frac{8}{100} = 0,08 \quad P(MG / ING) = \frac{105}{187} = 0,561$$

(II) Para que dos sucesos A y B sean independientes se debe cumplir $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{aligned} P(MUL \cap MP) &= \frac{10}{300} = \frac{1}{30} \\ P(MUL) \cdot P(MP) &= \frac{30}{300} \cdot \frac{100}{300} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{30} \end{aligned} \right\} \Rightarrow MUL \text{ y } MP \text{ son independientes}$$

$$\left. \begin{aligned} P(MUL \cap MG) &= \frac{20}{300} = \frac{1}{15} \\ P(MUL) \cdot P(MG) &= \frac{30}{300} \cdot \frac{200}{300} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{15} \end{aligned} \right\} \Rightarrow MUL \text{ y } MG \text{ son independientes}$$

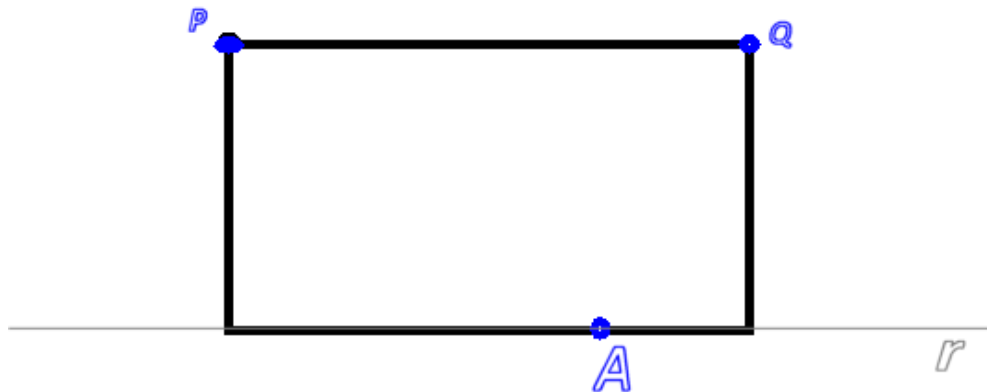
El suceso MUL es independiente de la edad.

2.- (2 puntos) Dos vértices consecutivos de un rectángulo son $P = (2,2,1)$ y $Q = (0,0,-1)$ y los otros dos pertenecen a una recta r que pasa por el punto $A = (5,4,3)$.

(I) Determina la ecuación de la recta r .

(II) Determina la ecuación del plano que contiene al rectángulo.

La situación es la del dibujo



(I) La recta pedida tiene como vector director $\overrightarrow{PQ} = (0,0,-1) - (2,2,1) = (-2,-2,-2)$ y pasa por $A = (5,4,3)$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pasa por } A(5,4,3) \\ \vec{v} = (-2,-2,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 4 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Podríamos haber utilizado el vector director $(1,1,1)$, pero es igualmente válido.

(II) Para determinar la ecuación del plano necesitamos otro vector director que puede ser $\overrightarrow{PA}$.

$$\overrightarrow{PA} = (5,4,3) - (2,2,1) = (3,2,2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pasa por } Q(0,0,-1) \\ \overrightarrow{PQ} = (-2,-2,-2) \\ \overrightarrow{PA} = (3,2,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x - 6y - 4z - 4 + 6z + 6 + 4y + 4x = 0 \Rightarrow \pi: -2y + 2z + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: y - z - 1 = 0}$$

3.- (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

(I) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f .

(II) Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. En caso

afirmativo, calcula el valor $c \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a que se refiere el teorema de Rolle.

(III) Halla el área encerrada por f y el eje de abscisas en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$

Hecho en la propuesta A

4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A .

(II) Halla la inversa de la matriz A , cuando exista.

(III) Para $a=1$ y las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resuelve el sistema

$$\begin{cases} BXA = Y \\ \frac{1}{3}Y + C = D \end{cases}$$

Hecho en la propuesta A

EBAU Junio 2019



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)**

Curso 2018/2019

Convocatoria: Junio

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Dados la recta r y el plano π de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 2 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}, \quad \pi \equiv ax + y + z - b = 0$$

(I) Determina a y b para que el plano π contenga a la recta r .

(II) Determina a y b para que r sea paralela al plano π .

2.- (2 puntos) La distribución del número de rapas capturados por los barcos pesqueros que salen a faenar en una cierta zona se ajusta a una normal de media 220. Se sabe que, tomando un barco al azar la probabilidad de que capture más de 250 es 0,1587.

(I) Calcula la desviación típica de la distribución.

(II) Calcula el número de rapas que un barco debe capturar para estar en el percentil 96.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

3.- (3 puntos) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases}$$

con a y b números reales.

(I) Halla a y b para que f sea continua y derivable en $x = 0$.

(II) Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x = 0$.

(III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$

4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A .

Sea el sistema de ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a .
 (II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

PROPUESTA B:

- 1.- (2 puntos) Sean el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$

- (I) Determina la ecuación de la recta s que contiene al punto $P=(1,2,-1)$, es perpendicular a la recta r y paralela al plano π .
 (II) Halla la distancia de la recta s al plano π .

- 2.- (2 puntos) Se tienen tres urnas: A, B y C. La urna A contiene dos bolas blancas y tres negras, la B tres bolas blancas y dos negras, la C cuatro bolas blancas y una negra. Se lanza un dado y se toman dos bolas de una urna: de la urna A si sale 1,2 ó 3, de la urna B si sale un 4 ó 5 y de la urna C si sale un 6.

- (I) Calcula la probabilidad de obtener dos bolas blancas.
 (II) Suponiendo que las dos bolas extraídas son blancas, calcula la probabilidad de que se hayan extraído de la primera urna.

- 3.- (3 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases}$$

con a y b números reales.

- (I) Halla a y b para que f sea continua y derivable en $x = 0$.
 (II) Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x = 0$.
 (III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$

- 4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.
 Sea el sistema de ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a .
 (II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

SOLUCIONES

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Dados la recta r y el plano π de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 2 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}, \quad \pi \equiv ax + y + z - b = 0$$

(I) Determina a y b para que el plano π contenga a la recta r .

(II) Determina a y b para que r sea paralela al plano π .

(I) El vector normal del plano π es $\vec{n} = (a, 1, 1)$. Hallamos el vector director de la recta y un punto de la misma.

Resolvemos el sistema de la ecuación de la recta r .

$$r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Sumo la 1ª y 2ª ecuación} \\ \text{y el resultado sustituye la} \\ \text{2ª ecuación} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 2z - 1}$$

$$\Rightarrow x + 2z - 1 + z = 1 \Rightarrow \boxed{x = -3z + 2}$$

La recta r tiene las siguientes ecuaciones paramétricas: $r: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases}$

El vector director de la recta r es $\vec{v} = (-3, 2, 1)$ y pasa por el punto $P(2, -1, 0)$.

Para que la recta esté contenida en el plano deben cumplirse que el punto P esté en el plano y el vector $\vec{v} = (-3, 2, 1)$ y $\vec{n} = (a, 1, 1)$ sean perpendiculares, es decir, su producto escalar es cero.

$$\left. \begin{array}{l} P(2, -1, 0) \in \pi \equiv ax + y + z - b = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = (a, 1, 1)(-3, 2, 1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a - 1 + 0 - b = 0 \\ -3a + 2 + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a - b = 1 \\ -3a = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

Para que la recta esté contenida en el plano deben ser $a = b = 1$.

(II) El vector normal del plano π es $\vec{n} = (a, 1, 1)$. El vector director de la recta r es $\vec{v} = (-3, 2, 1)$ y pasa por el punto $P(2, -1, 0)$.

Para que sean paralelas deben ser vector normal y director perpendiculares y el punto P no debe pertenecer al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P(2, -1, 0) \notin \pi \equiv ax + y + z - b = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = (a, 1, 1)(-3, 2, 1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a - 1 + 0 - b \neq 0 \\ -3a + 2 + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a - b \neq 1 \\ -3a = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - b \neq 1 \Rightarrow \boxed{b \neq 1}$$

Para que recta y plano sean paralelos debe ser $a = 1$ y b distinto de 1.

2.- (2 puntos) La distribución del número de rapas capturados por los barcos pesqueros que salen a faenar en una cierta zona se ajusta a una normal de media 220. Se sabe que, tomando un barco al azar la probabilidad de que capture más de 250 es 0,1587.

(I) Calcula la desviación típica de la distribución.

(II) Calcula el número de rapas que un barco debe capturar para estar en el percentil 96.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

X = Número de rapas capturados. $X = N(220, \sigma)$.

(I) Sabemos que $P(X > 250) = 0,1587$.

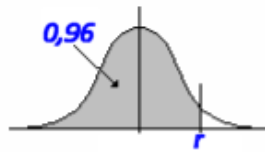
$$P(X > 250) = 0,1587 \Rightarrow 1 - P(X < 250) = 0,1587 \Rightarrow P(X < 250) = 0,8413 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(\frac{X - 220}{\sigma} < \frac{250 - 220}{\sigma}\right) = 0,8413 \Rightarrow P\left(Z < \frac{30}{\sigma}\right) = 0,8413 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscando en} \\ \text{la tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{30}{\sigma} = 1 \Rightarrow \boxed{\sigma = 30}$$

La desviación típica vale 30.

(II) Nos piden encontrar la marca que deja al 96 % de los pescadores por debajo.



Nos piden hallar “r” tal que $P(X < r) = 0,96$.

$$P(X < r) = 0,96 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(\frac{X - 220}{30} < \frac{r - 220}{30}\right) = 0,96 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{r - 220}{30}\right) = 0,96 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en} \\ \text{la tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{r - 220}{30} = \frac{1,75 + 1,76}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2r - 440 = 105,3 \Rightarrow \boxed{r = \frac{545,3}{2} = 272,65 \text{ rapas}}$$

Con 273 rapas estará en el percentil 96.

3.- (3 puntos) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases}$$

con a y b números reales.

(I) Halla a y b para que f sea continua y derivable en $x = 0$.

(II) Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x = 0$.

(III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$

(I) La función es continua en $x = 0$ si cumple:

- Existe $f(0) = \cos 0 = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + ax + b) = b$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos x) = 1$
- Los tres valores deben ser iguales. Entonces $\boxed{b = 1}$

La función debe ser derivable en $x = 0$, luego la derivada por izquierda y derecha de 0 deben coincidir.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\sin x, & x < 0 \\ -2x + a, & x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= -\sin 0 = 0 \\ f'(0^+) &= -0 + a = a \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

(II) La función es $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ -x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$

Para que tenga un extremo relativo en $x = 0$ debe haber un cambio en el crecimiento de la función en valores próximos a 0 por la izquierda y en valores próximos a 0 por la derecha.

Si tomamos $x = -0,01$ la derivada vale $f'(-0,01) = -\sin(-0,01) < 0$. La función decrece antes de 0.

Si tomamos $x = 0,01$ la derivada vale $f'(0,01) = -(0,01)^2 + 1 = 0,9999 > 0$. La función crece después de 0.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$.

(III) El área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$ se divide en dos partes

$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ y $[0, 1]$ ya que la función cambia de definición en este intervalo.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx \right| + \left| \int_0^1 -x^2 + 1 dx \right| = \left| [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \right| + \left| \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 \right| = \\ &= \left| \sin 0 - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right| + \left| \left[-\frac{1^3}{3} + 1 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 0 \right] \right| = 1 + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{5}{3} u^2} \end{aligned}$$

4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A .
Sea el sistema de ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a .
(II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

(I) Calculamos el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + a - a^3 - 1 - 1 = -a^3 + 3a - 2$$

Igualamos a cero el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^3 + 3a - 2 = 0. \text{ Resolvemos por Ruffini.}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \quad \text{Una de las raíces es } a = 1$$

Resolvemos la ecuación de 2º grado restante

$$-a^2 - a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} x = \frac{1+3}{-2} = -2 \\ x = \frac{1-3}{-2} = 1 \end{cases}$$

Existe la inversa de A para cualquier valor de a distinto de 1 y -2 .

(I) El determinante de A y cuando se anula ya se ha estudiado, por lo que hay tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq -2$

En este caso el sistema es compatible determinado (una única solución) ya que el rango de A es 3, el de la matriz ampliada y el número de incógnitas también.

CASO 2. $a = 1$

La matriz A y A/B quedan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 1 ya que todas las filas son iguales. El rango de A/B también es 1 ya que todas las filas y columnas son iguales. El número de incógnitas es 3.

El sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $a = -2$

La matriz A y A/B quedan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 ya que el menor que queda al eliminar la 3ª columna y 3ª fila tiene determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$$

El rango de A/B es 3 ya que el menor que queda al eliminar la 1ª columna tiene determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 - 1 - 4 - 1 = -9 \neq 0$$

El rango de A y el de A/B es distinto, por lo que el sistema es incompatible. No tiene solución.

(II) Es compatible para el caso 1 y el caso 2 estudiados.

Para el caso 2 ($a = 1$) el sistema queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Las tres ecuaciones son iguales} \\ \text{El sistema se reduce a una sola ecuación} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y + z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Para el caso 1 ($a \neq 1$ y $a \neq -2$) utilizamos la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a + 1 + a - a^2 - 1 - 1}{-a^3 + 3a - 2} = \frac{-a^2 + 2a - 1}{-a^3 + 3a - 2} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1 + a + a - a^2 - 1 - 1}{-a^3 + 3a - 2} = \frac{-a^2 + 2a - 1}{-a^3 + 3a - 2} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a + a + 1 - a^2 - 1 - 1}{-a^3 + 3a - 2} = \frac{-a^2 + 2a - 1}{-a^3 + 3a - 2} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

PROPUESTA B:

- 1.- (2 puntos)** Sean el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$
- (I) Determina la ecuación de la recta s que contiene al punto $P=(1,2,-1)$, es perpendicular a la recta r y paralela al plano π .
- (II) Halla la distancia de la recta s al plano π .

- (I) La recta que buscamos “s” pasa por el punto $P=(1,2,-1)$ y es perpendicular a recta y paralela al plano. Su vector director debe ser perpendicular al director de la recta r $\vec{v}_r = (-1, 1, -3)$ y al normal del plano $\vec{n} = (2, 1, -1)$. Nos sirve como vector director de s el producto vectorial de ambos.

$$\vec{v}_s = \vec{n} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3i + j + 2k + k + 6j + i = -2i + 7j + 3k = (-2, 7, 3)$$

La recta que buscamos “s” pasa por el punto $P=(1,2,-1)$ y tiene vector director $\vec{v}_s = (-2, 7, 3)$.

$$s : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 7t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

- (II) La distancia de la recta s al plano es la distancia de cualquier punto de la recta al plano, por ser paralela al plano.

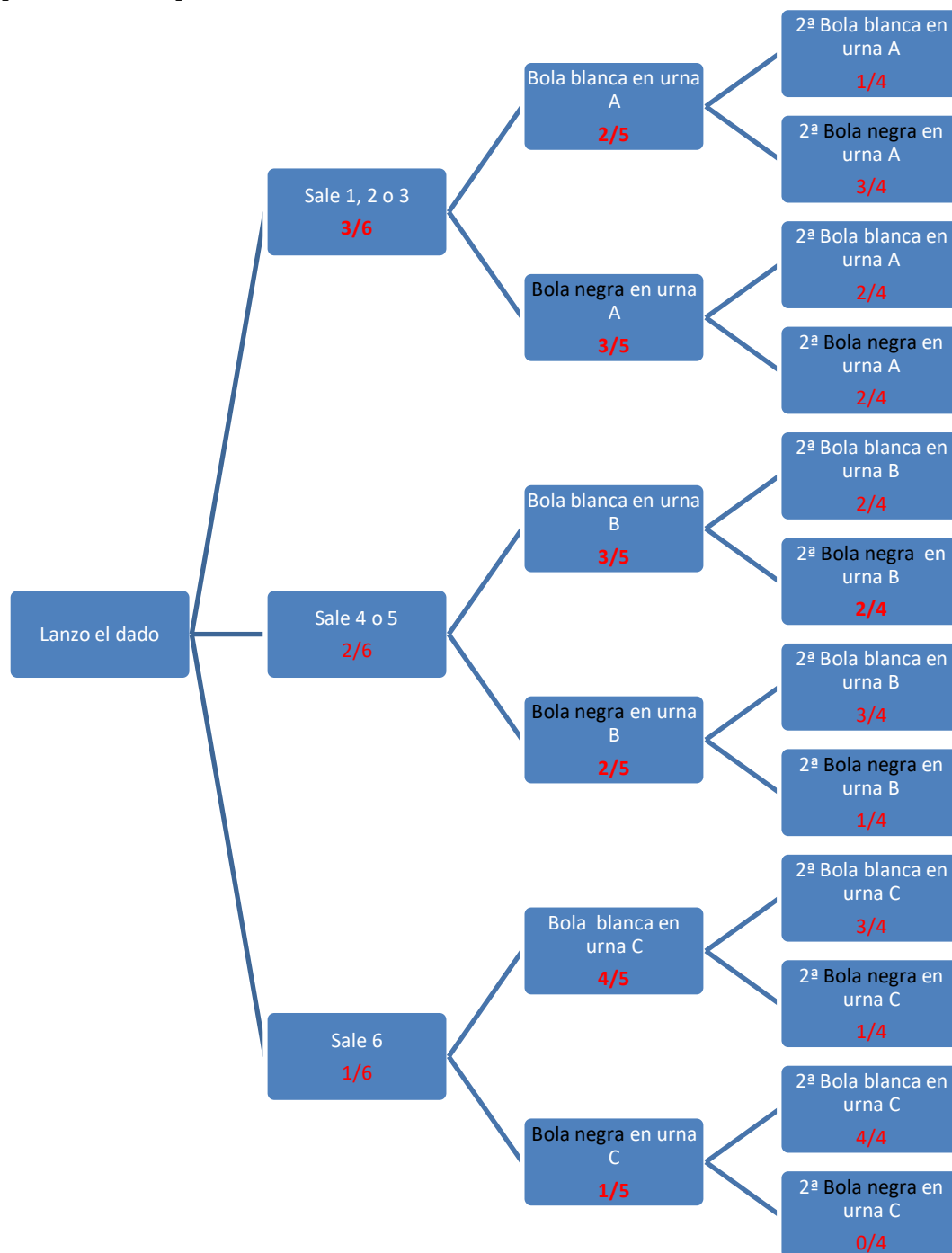
$$\text{Distancia}(s, \pi) = \text{Distancia}(P, \pi) = \frac{|2(1) + 2 - (-1) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{6}} u}$$

2.- (2 puntos) Se tienen tres urnas: A, B y C. La urna A contiene dos bolas blancas y tres negras, la B tres bolas blancas y dos negras, la C cuatro bolas blancas y una negra. Se lanza un dado y se toman dos bolas de una urna: de la urna A si sale 1,2 ó 3, de la urna B si sale un 4 ó 5 y de la urna C si sale un 6.

(I) Calcula la probabilidad de obtener dos bolas blancas.

(II) Suponiendo que las dos bolas extraídas son blancas, calcula la probabilidad de que se hayan extraído de la primera urna.

Realizamos un diagrama de árbol que nos ayude en el cálculo de probabilidades de este experimento compuesto.



(I) Siguiendo el esquema del diagrama de árbol y usando el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Sacar dos bolas blancas}) =$$

$$= P(\text{Elegir urna A})P(\text{Sacar dos bolas blancas en urna A}) + \\ + P(\text{Elegir urna B})P(\text{Sacar dos bolas blancas en urna B}) + \\ + P(\text{Elegir urna C})P(\text{Sacar dos bolas blancas en urna C}) =$$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{30}{120} = \boxed{\frac{1}{4} = 0,25}$$

(II) Usamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sean de urna A/ salen 2 blancas}) = \frac{P(\text{Salen 2 blancas de la urna A})}{P(\text{Sacar 2 blancas})} =$$

$$= \frac{\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{20} = \boxed{\frac{1}{5} = 0,2}$$

3.- (3 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases}$$

con a y b números reales.

(I) Halla a y b para que f sea continua y derivable en $x = 0$.

(II) Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x = 0$.

(III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$

Hecho en propuesta A.

4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A .

Sea el sistema de ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a .

(II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible

Hecho en propuesta A.

EBAU Julio 2018



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Evaluación de Bachillerato para el acceso a la
Universidad
Curso 2017/2018
Convocatoria: Julio
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS**

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Sean I la matriz identidad de orden 2 y las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(I) Calcule, si existe, la inversa de A .

(II) Halle las matrices X e Y que son soluciones del sistema

$$AX + BY = 3I,$$

$$AX - BY = I,$$

2.- (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = 2 - \cos x - 3x$$

(I) Determine, si existen, las asíntotas oblicuas de f .

(II) Calcule

$$\int f(x) \cos x dx.$$

(III) Demuestre que la función $f(x)$ solo corta una vez el eje horizontal.

Nota. Puede ser útil el teorema de Rolle.

3.- (2 puntos) El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es de 140, por la tarde, 200, y por la noche, 40. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2%, por la tarde de 4% y por la noche, de un 6%.

(I) Calcule la probabilidad de que no se retrase un vuelo con destino a ese aeropuerto.

(II) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo de la tarde?

4.- (3 puntos) Considere las rectas $r: \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ x - y - 5z = -7 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

(I) Determine la posición relativa de las rectas r y s .

(II) Halle, utilizando parámetros, todos los vectores perpendiculares a r .

PROPUESTA B:**1.- (3 puntos)**

(I) Determine el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(II) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$, calcule $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix}$.

2.- (2 puntos)

(I) Halle, si existe, el valor de a para el cual

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} - (3x - 1) \right) = 2$$

(II) Determina, si existe,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 12x + 1} \right)',$$

Donde $\left(\sqrt{9x^2 + 12x + 1} \right)'$ representa la derivada de $\sqrt{9x^2 + 12x + 1}$

3.- (2 puntos) El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es de 140, por la tarde, 200, y por la noche, 40. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2%, por la tarde de 4% y por la noche, de un 6%.

(I) Calcule la probabilidad de que no se retrase un vuelo con destino a ese aeropuerto.

(II) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo de la tarde?

4.- (3 puntos) Considere las rectas $r: \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ x - y - 5z = -7 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

(I) Determine la posición relativa de las rectas r y s .

(II) Halle, utilizando parámetros, todos los vectores perpendiculares a r .

SOLUCIONES

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Sean I la matriz identidad de orden 2 y las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(I) Calcule, si existe, la inversa de A.

(II) Halle las matrices X e Y que son soluciones del sistema

$$AX + BY = 3I,$$

$$AX - BY = I,$$

(I) La inversa de A existe si su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ por lo que existe su inversa.}$$

La calculamos utilizando la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} +1 & -6 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(II) Resolvamos el sistema de matrices

$$\left. \begin{array}{l} AX + BY = 3I, \\ AX - BY = I, \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ \hline AX \quad -BY \quad = I \\ -AX \quad -BY \quad = -3I \\ \hline -2BY \quad = -2I \end{array} \right\} \Rightarrow -2BY = -2I \Rightarrow BY = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{-1}BY = B^{-1} \cdot I \Rightarrow \boxed{Y = B^{-1}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª + Ecuación 1ª} \\ \hline AX \quad -BY \quad = I \\ AX \quad +BY \quad = 3I \\ \hline 2AX \quad \quad \quad = 4I \end{array} \right\} \Rightarrow 2AX = 4I \Rightarrow AX = 2I \Rightarrow \boxed{X = 2A^{-1}}$$

La inversa de A ya se calculó en el apartado 1, para poder continuar necesitamos calcular la inversa de B.

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^t)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema matricial es: $\left. \begin{array}{l} X = 2A^{-1} \\ Y = B^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$

2.- (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = 2 - \cos x - 3x$$

(I) Determine, si existen, las asíntotas oblicuas de f .

(II) Calcule

$$\int f(x) \cos x dx.$$

(III) Demuestre que la función $f(x)$ solo corta una vez el eje horizontal.

Nota. Puede ser útil el teorema de Rolle.

(I) Una asíntota oblicua es una recta de ecuación $y = mx + n$ donde $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ y

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx).$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \cos x - 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x} = 0 - 0 - 3 = -3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \cos x - 3x + 3x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \cos x) = \text{No existe}$$

Este límite no existe ya que la función coseno no converge a nada en el infinito pues es una función periódica y oscilan sus valores. Al no existir este último límite la asíntota no existe.

(II) Calculamos la integral pedida.

$$\int f(x) \cos x dx = \int (2 - \cos x - 3x) \cos x dx = \int 2 \cos x - \cos^2 x - 3x \cos x dx =$$

$$= \int 2 \cos x dx - \int \cos^2 x dx - \int 3x \cos x dx = \dots$$

Calculo por separado cada una de estas tres integrales.

$$\text{Primera integral: } \int 2 \cos x dx = \boxed{2 \operatorname{sen} x}$$

Segunda integral:

$$\int \cos^2 x dx = \int \cos x \cdot \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \cos x \rightarrow du = -\operatorname{sen} x dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x \end{array} \right\} =$$

$$= \cos x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x) dx = \cos x \operatorname{sen} x + \int \operatorname{sen}^2 x dx = \cos x \operatorname{sen} x + \int 1 - \cos^2 x dx =$$

$$= \cos x \operatorname{sen} x + \int dx - \int \cos^2 x dx = \cos x \operatorname{sen} x + x - \int \cos^2 x dx$$

Hemos obtenido que $\int \cos^2 x dx = \cos x \operatorname{sen} x + x - \int \cos^2 x dx$ despejando:

$$\int \cos^2 x dx = \cos x \operatorname{sen} x + x - \int \cos^2 x dx \Rightarrow 2 \int \cos^2 x dx = \cos x \operatorname{sen} x + x$$

$$\int \cos^2 x dx = \boxed{\frac{\cos x \sin x + x}{2}}$$

Tercera integral:

$$\int 3x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = 3x \rightarrow du = 3 \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right\} =$$

$$= 3x \sin x - \int 3 \sin x dx = \boxed{3x \sin x + 3 \cos x}$$

La integral inicial sería:

$$\int f(x) \cos x dx = \int 2 \cos x dx - \int \cos^2 x dx - \int 3x \cos x dx =$$

$$= \boxed{2 \sin x - \frac{\cos x \sin x + x}{2} - 3x \sin x - 3 \cos x + C}$$

(III) Razonemos por reducción al absurdo.

Si existiesen dos puntos donde la función se anulase, llamémoslos a y b donde $f(a) = f(b) = 0$, por el teorema de Rolle debería existir un valor c en el que la derivada se anule, pero la derivada de la función $f(x) = 2 - \cos x - 3x$ es $f'(x) = \sin x - 3$. Esta expresión no se puede anular, ya que el seno toma valores entre -1 y 1 , nunca alcanza el valor 3 necesario para anular la derivada.

La hipótesis de partida es falsa pues llegamos a un resultado absurdo.

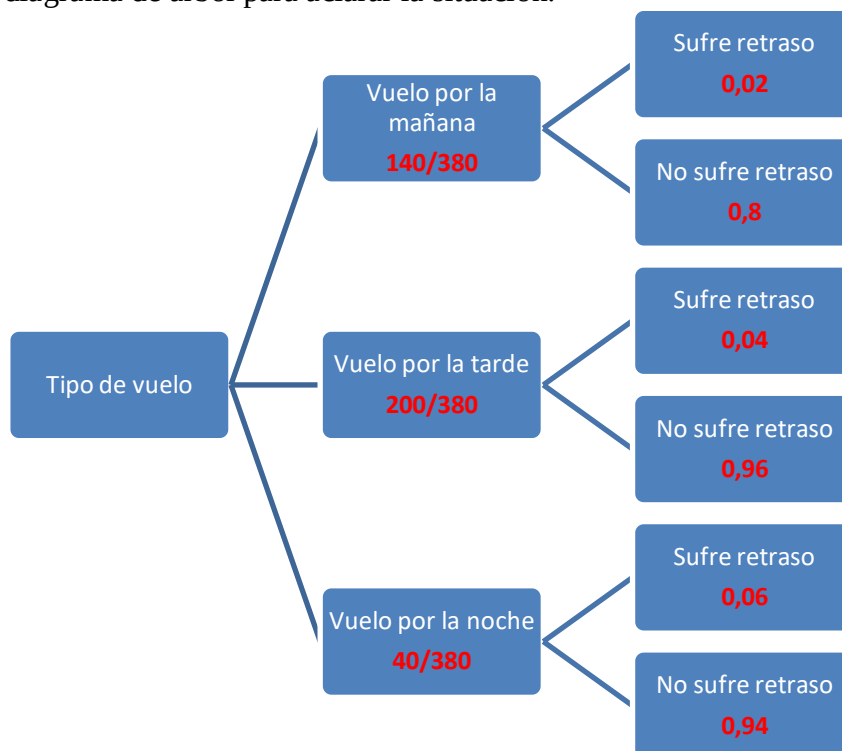
La función no puede anularse en dos puntos.

3.- (2 puntos) El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es de 140, por la tarde, 200, y por la noche, 40. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2%, por la tarde de 4% y por la noche, de un 6%.

(I) Calcule la probabilidad de que no se retrase un vuelo con destino a ese aeropuerto.

(II) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo de la tarde?

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar la situación.



(I) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{No se retrase un vuelo}) &= \\
 &= P(\text{Vuelo es por la mañana}) \cdot P(\text{No se retrasa/El vuelo es por la mañana}) + \\
 &+ P(\text{Vuelo es por la tarde}) \cdot P(\text{No se retrasa/El vuelo es por la tarde}) + \\
 &+ P(\text{Vuelo es por la noche}) \cdot P(\text{No se retrasa/El vuelo es por la noche}) = \\
 &= \frac{140}{380} \cdot 0,98 + \frac{200}{380} \cdot 0,96 + \frac{40}{380} \cdot 0,94 = \boxed{0,965}
 \end{aligned}$$

(II) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Un vuelo sea de la tarde / es con retraso}) &= \frac{P(\text{Un vuelo sea de la tarde y llegue con retraso})}{P(\text{Un vuelo llega con retraso})} = \\
 &= \frac{\frac{200}{380} \cdot 0,04}{\frac{140}{380} \cdot 0,02 + \frac{200}{380} \cdot 0,04 + \frac{40}{380} \cdot 0,06} = \frac{8}{2,8 + 8 + 2,4} = \frac{8}{13,2} = \boxed{0,6}
 \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Con tabla de contingencia.

Con los datos del problema se puede construir la siguiente tabla de contingencia.

Vuelos	Número	Con retraso	Sin retraso
Mañana	140	(2 %) $\rightarrow 2,8$	137,2
Tarde	200	(4 %) $\rightarrow 8$	192
Noche	40	(6 %) $\rightarrow 2,4$	37,6
TOTAL	380	13,2	366,8

Atendiendo a los datos de la tabla:

$$(I) \quad P(\text{No se retrase un vuelo}) = \frac{366,8}{380} = \boxed{0,965}$$

$$(II) \quad P(\text{Un vuelo sea de la tarde / es con retraso}) = \frac{8}{13,2} = \boxed{0,6}$$

4.- (3 puntos) Considere las rectas $r: \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ x - y - 5z = -7 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

(I) Determine la posición relativa de las rectas r y s .

(II) Halle, utilizando parámetros, todos los vectores perpendiculares a r .

(I) Obtengamos la ecuación en paramétricas de la recta r .

$$r: \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ x - y - 5z = -7 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ x \quad -y \quad -5z \quad = -7 \\ -x \quad +y \quad -2z \quad = -7 \\ \hline \quad \quad -7z \quad = -14 \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ -7z = -14 \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ z = \frac{-14}{-7} = 2 \end{cases} \Rightarrow x - y + 4 = 7 \Rightarrow x - y = 3 \Rightarrow \boxed{x = 3 + y} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 + y \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$$

El vector director de r es $\vec{v}_r = (1, 1, 0)$ y el vector director de s es $\vec{v}_s = (2, 1, 0)$

Estos vectores no tienen coordenadas proporcionales, los vectores no son paralelos y, por tanto, las rectas no son paralelas.

¿Son secantes o se cruzan?

Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas, si existe un punto de corte se cortan y en caso contrario, se cruzan.

$$\begin{cases} s: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases} \\ r: \begin{cases} x = 3 + t' \\ y = t' \\ z = 2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + t' = 3 + 2t \\ t' = 1 + t \\ 2 = 1 \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución ya que una de las ecuaciones es imposible ($1 = 2$), por lo que las dos rectas no tienen ningún punto en común.

Como no son paralelas y no tienen puntos en común, las rectas **se cruzan**.

(II) La recta r tiene vector director $\vec{v}_r = (1, 1, 0)$ un vector $\vec{u} = (a, b, c)$ perpendicular a la recta debe ser ortogonal a este vector y por tanto su producto escalar debe ser 0.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{u} = (1, 1, 0) \cdot (a, b, c) = a + b = 0 \Rightarrow b = -a. \text{ Siendo } c \text{ cualquier valor.}$$

Los vectores perpendiculares a la recta r son $\vec{u} = (a, -a, c)$. Evidentemente hay infinitos vectores que cumplen esta condición.

PROPUESTA B:**1.- (3 puntos)**

(I) Determine el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(II) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$, calcule $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix}$.

(I) La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango 3 o menor.

$$\text{Calculamos su determinante: } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 6 - 8 - (0 - 6 + 4) = 0$$

Al ser el determinante nulo su rango no es 3.

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la 3ª fila y la 3ª columna y calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3 = 3 \neq 0$.

Al ser el determinante no nulo el rango de la matriz es 2

(II) Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{En el primer determinante} \\ \text{hay dos filas iguales} \rightarrow \\ \text{el determinante vale 0} \end{array} \right\} =$$

$$= 0 - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Si intercambiamos fila 1ª y fila 2ª} \\ \text{el determinante cambia de signo} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \text{Sacamos factor común 2 en la 2ª fila} \right\} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \text{Sacamos factor común 2 en la 3ª fila} \right\} = 4 \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 = \boxed{8}$$

2.- (2 puntos)(I) Halle, si existe, el valor de a para el cual

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} - (3x - 1) \right) = 2$$

(II) Determina, si existe, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 12x + 1} \right)'$,Donde $\left(\sqrt{9x^2 + 12x + 1} \right)'$ representa la derivada de $\sqrt{9x^2 + 12x + 1}$

(I) Calculamos el valor del límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} - (3x - 1) \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} - (3x - 1) \right) \left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} + (3x - 1) \right)}{\sqrt{9x^2 + ax + 1} + (3x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{9x^2 + ax + 1} \right)^2 - (3x - 1)^2}{\sqrt{9x^2 + ax + 1} + (3x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + ax + 1 - (9x^2 - 6x + 1)}{\sqrt{9x^2 + ax + 1} + (3x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{9x^2} + ax + 1 - \cancel{9x^2} + 6x - 1}{\sqrt{9x^2 + ax + 1} + (3x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a + 6)x}{\sqrt{9x^2 + ax + 1} + (3x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a + 6)x}{\sqrt{9x^2} + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a + 6)x}{3x + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a + 6)x}{6x} = \frac{a + 6}{6} \end{aligned}$$

Igualamos este resultado a 2.

$$\frac{a + 6}{6} = 2 \Rightarrow a + 6 = 12 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

(II) Calculemos la expresión de la derivada de la que debemos calcular su límite.

$$\left(\sqrt{9x^2 + 12x + 1} \right)' = \frac{18x + 12}{2\sqrt{9x^2 + 12x + 1}} = \frac{9x + 6}{\sqrt{9x^2 + 12x + 1}}$$

Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 12x + 1} \right)' = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x + 6}{\sqrt{9x^2 + 12x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x}{\sqrt{9x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x}{3x} = \boxed{3}$$

3.- (2 puntos) El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es de 140, por la tarde, 200, y por la noche, 40. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2%, por la tarde de 4% y por la noche, de un 6%.

(I) Calcule la probabilidad de que no se retrase un vuelo con destino a ese aeropuerto.

(II) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo de la tarde?

Hecho en la propuesta A

4.- (3 puntos) Considere las rectas $r: \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ x - y - 5z = -7 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

(I) Determine la posición relativa de las rectas r y s .

(II) Halle, utilizando parámetros, todos los vectores perpendiculares a r .

Hecho en la propuesta A

EBAU Junio 2018



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Evaluación de Bachillerato para el acceso a la
Universidad**

Curso 2017/2018

Convocatoria: Junio

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Sean los vectores $\vec{u} = (-1, 4, 8)$ y $\vec{v} = (1, 2, -2)$.

(I) Demuestre que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es mayor que 90° .

(II) Calcule un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que tenga módulo 1.

2.- (3 puntos) En una empresa frutícola, la producción por árbol sigue una distribución normal de media 54,3 kg y desviación típica de 6,5 kg.

1. ¿Cuál es el porcentaje de árboles que producen más de 57 kg?

2. ¿Qué porcentaje de árboles producen entre 50 y 57 kg?

3. Si se escoge al azar un árbol que está dentro del 70% de los árboles que menos producen, ¿a lo sumo cuántos kilogramos debería producir?

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

3.- (2 puntos) Sea

$$f(x) = xe^{-ax}$$

(I) Calcule, según los valores de a , las asíntotas de $f(x)$.

(II) Halle el valor de a para que f tenga en $x = 1$ un extremo relativo. ¿Es un máximo o un mínimo?

4.- (3 puntos) Sea el sistema de ecuaciones

$$cx + y - 2z = 6,$$

$$cx - 2y + z = 0,$$

$$-2x + y + cz = -6.$$

(I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c .

(II) Halle la solución o soluciones, si existen, cuando el parámetro c es 1.

PROPUESTA B:

1.- (2 puntos) Una mujer, que sospecha estar embarazada, acude a la consulta del médico. Al examinarla cuidadosamente, el médico cree que está embarazada con una probabilidad de 0,6. Para confirmar el diagnóstico, el médico encarga un test que da negativo en el 4% de los casos que la mujer está realmente embarazada. Mientras que el test da positivo en el 5% de los casos en los que la mujer no está embarazada. Calcule la probabilidad de que:

- (I) El test dé positivo.
- (II) La mujer esté embarazada sabiendo que el test da positivo.

2.- (3 puntos) Sean el punto $P = (1, 2, -2)$ y la recta $r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

- (I) Determine la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta r.
- (II) Determine el punto de r más próximo a P.
- (III) Halle la recta r' simétrica de r respecto al punto P.

3.- (2 puntos) Sea

$$f(x) = xe^{-ax}$$

- (I) Calcule, según los valores de a, las asíntotas de f(x).
- (II) Halle el valor de a para que f tenga en $x = 1$ un extremo relativo. ¿Es un máximo o un mínimo?

4.- (3 puntos) Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} cx + y - 2z &= 6, \\ cx - 2y + z &= 0, \\ -2x + y + cz &= -6. \end{aligned}$$

- (I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c.
- (II) Halle la solución o soluciones, si existen, cuando el parámetro c es 1.

SOLUCIONES

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Sean los vectores $\vec{u} = (-1, 4, 8)$ y $\vec{v} = (1, 2, -2)$.

(I) Demuestre que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es mayor que 90° .

(II) Calcule un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que tenga módulo 1.

(I) El ángulo entre los vectores se obtiene a partir del producto escalar de ellos.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (-1, 4, 8)(1, 2, -2) = -1 + 8 - 16 = -9 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{1+16+64} \sqrt{1+4+4} \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 27 \cos(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9 = 27 \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-9}{27} \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-1}{3}$$

Al ser el coseno del ángulo negativo el ángulo es de más de 90° .

(II) Un vector perpendicular a ambos vectores es el producto vectorial de ambos, luego dividimos el vector por su módulo y conseguiremos que tenga módulo 1.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 16i + 2j + 4k + 2k - 8j + 8i = 24i - 6j + 6k = (24, -6, 6)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{24^2 + 36 + 36} = \sqrt{648} = 6\sqrt{18} = 18\sqrt{2}$$

$$\text{El vector unitario pedido es } \vec{w} = \left(\frac{24}{18\sqrt{2}}, \frac{-6}{18\sqrt{2}}, \frac{6}{18\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{-\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6} \right)$$

2.- (3 puntos) En una empresa frutícola, la producción por árbol sigue una distribución normal de media 54,3 kg y desviación típica de 6,5 kg.

1. ¿Cuál es el porcentaje de árboles que producen más de 57 kg?
2. ¿Qué porcentaje de árboles producen entre 50 y 57 kg?
3. Si se escoge al azar un árbol que está dentro del 70% de los árboles que menos producen, ¿a lo sumo cuántos kilogramos debería producir?
(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Sea X = Producción de un árbol. $X = N(54,3; 6,5)$

1. Calculamos $P(X > 57)$.

$$P(X > 57) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X - 54,3}{6,5} > \frac{57 - 54,3}{6,5}\right) = P(Z > 0,4153) =$$

$$= 1 - P(Z < 0,4153) = 1 - \frac{0,6591 + 0,6628}{2} = 1 - 0,66095 = 0,33905$$

El porcentaje es del 33,9% de los árboles

2. Calculamos $P(50 < X < 57)$.

$$P(50 < X < 57) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{50 - 54,3}{6,5} < \frac{X - 54,3}{6,5} < \frac{57 - 54,3}{6,5}\right) =$$

$$= P(-0,6615 < Z < 0,4153) = P(Z < 0,4153) - P(Z < -0,6615) =$$

$$= 0,66095 - P(Z > 0,6615) = 0,66095 - (1 - P(Z < 0,6615)) =$$

$$= 0,66095 - (1 - 0,7454) = 0,40635$$

El porcentaje tiene un valor aproximado del 40%.

3. Si llamamos p a la producción de dicho árbol, debe cumplirse que:

$$P(X < p) = 0,7 \Rightarrow P\left(\frac{X - 54,3}{6,5} < \frac{p - 54,3}{6,5}\right) = 0,7 \Rightarrow P\left(Z < \frac{p - 54,3}{6,5}\right) = 0,7$$

Ese valor p debe estar por encima de la media ($>50\%$), buscamos en la tabla 0,7 y

$$\frac{p - 54,3}{6,5} = \frac{0,52 + 0,53}{2} \Rightarrow p - 54,3 = 3,4125 \Rightarrow p = 57,7125$$

Debe producir a lo sumo 57,7 Kilos de fruta.

3.- (2 puntos) Sea

$$f(x) = xe^{-ax}$$

(I) Calcule, según los valores de a , las asíntotas de $f(x)$.

(II) Halle el valor de a para que f tenga en $x = 1$ un extremo relativo. ¿Es un máximo o un mínimo?

(I) **Asíntota vertical.** $x = m$

Como $f(x) = xe^{-ax} = \frac{x}{e^{ax}}$ su dominio es todo $\mathbb{R}$, ya que el denominador nunca se anula.

No existen asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = n$

Distinguimos tres casos:

Si $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-ax} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{ax}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a \cdot e^{ax}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-ax} = \infty$$

Si $a \neq 0$ la asíntota horizontal es $y = 0$, solo en la rama de $x > 0$.

Si $a = 0$ no hay asíntota horizontal. Ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^0 = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$

Si $a < 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-ax} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-ax} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{ax}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{a \cdot e^{ax}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Tiene asíntota horizontal en $y = 0$. Solo en la rama de $x < 0$

Asíntota oblicua no hay.

Si $a = 0$ la función es $f(x) = xe^{-ax} = x$ que es una recta y no tiene asíntotas.

Si $a > 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-ax} = \infty$, veamos si hay oblicua $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{-ax}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-ax} = e^{+\infty} = \infty \text{ No hay asíntota oblicua}$$

Si $a < 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-ax} = \infty$, veamos si hay oblicua $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-ax}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ax} = e^{+\infty} = \infty \text{ No hay asíntota oblicua}$$

(II) Para que f tenga en $x = 1$ un extremo relativo debe anularse la derivada en $x = 1$.

$$f(x) = xe^{-ax} \Rightarrow f'(x) = e^{-ax} - axe^{-ax} = e^{-ax}(1 - ax) \Rightarrow f'(1) = e^{-a}(1 - a)$$

Para que se anule la expresión debe ser $a = 1$.

Para saber si es máximo o mínimo, vemos el signo de la derivada segunda en $x = 1$.

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} \Rightarrow f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(-2 + x)$$

$$f''(1) = e^{-1}(-2 + 1) = -\frac{1}{e} < 0$$

Como la segunda derivada es negativa en $x = 1$, en dicho valor hay un máximo relativo de la función.

4.- (3 puntos) Sea el sistema de ecuaciones

$$cx + y - 2z = 6,$$

$$cx - 2y + z = 0,$$

$$-2x + y + cz = -6.$$

(I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c .

(II) Halle la solución o soluciones, si existen, cuando el parámetro c es 1.

(I) El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} c & 1 & -2 \\ c & -2 & 1 \\ -2 & 1 & c \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} c & 1 & -2 \\ c & -2 & 1 \\ -2 & 1 & c \end{vmatrix} = -2c^2 - 2 - 2c + 8 - c^2 - c = -3c^2 - 3c + 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3c^2 - 3c + 6 = 0 \Rightarrow c^2 + c - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $c \neq 1$ y $c \neq -2$

En este caso el rango de la matriz A es 3 al igual que el de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $c = 1$

El sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 6, \\ x - 2y + z = 0, \\ -2x + y + z = -6. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x \quad -2y \quad +z \quad = 0 \\ -x \quad -y \quad +2z \quad = -6 \\ \hline -3y \quad +3z \quad = -6 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a + 2 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ -2x \quad +y \quad +z \quad = -6 \\ 2x \quad +2y \quad -4z \quad = 12 \\ \hline 3y \quad -3z \quad = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 6 \\ -3y + 3z = -6 \\ +3y - 3z = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a + \text{Ecuación 2}^a \\ 3y \quad -3z \quad = 6 \\ -3y \quad +3z \quad = -6 \\ \hline 0 \quad = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 6 \\ -3y + 3z = -6 \\ 0 = 0 \end{array} \right\}$$

El sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $c = -2$

El sistema queda

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x + y - 2z = 6, \\ -2x - 2y + z = 0, \\ -2x + y - 2z = -6. \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } A/B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

El rango de A no es 3 pues $|A| = 0$.

¿El rango de A es 2?

Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la 3ª fila y 3ª columna es no nulo.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

¿El rango de A/B es 3?

Tomamos el menor resultante de quitar la 1ª columna. Veamos si es nulo o no.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 0 + 24 - 6 + 24 + 0 = 36 \neq 0. \text{ El rango de A/B es 3.}$$

El sistema es incompatible. No tiene solución

(II) Para $c=1$ el sistema queda $\left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 6, \\ x - 2y + z = 0, \\ -2x + y + z = -6. \end{array} \right\}$ que ya hemos reducido en el apartado anterior

al sistema equivalente $\left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 6 \\ -3y + 3z = -6 \\ 0 = 0 \end{array} \right\}$. Resolvemos este último sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 6 \\ -3y + 3z = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 6 \\ y - z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 6 \\ \boxed{y = z + 2} \end{array} \right\} \Rightarrow x + z + 2 - 2z = 6 \Rightarrow \boxed{x = z + 4}$$

El sistema tiene las soluciones: $x = 4 + t$; $y = 2 + t$; $z = t$, para cualquier valor $t \in \mathbb{R}$.

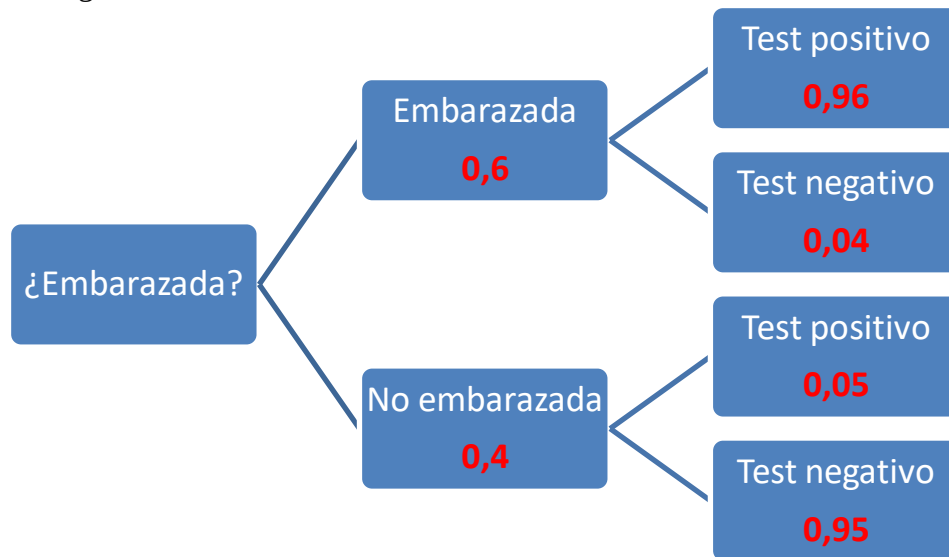
PROPUESTA B:

1.- (2 puntos) Una mujer, que sospecha estar embarazada, acude a la consulta del médico. Al examinarla cuidadosamente, el médico cree que está embarazada con una probabilidad de 0,6. Para confirmar el diagnóstico, el médico encarga un test que da negativo en el 4% de los casos que la mujer está realmente embarazada. Mientras que el test da positivo en el 5% de los casos en los que la mujer no está embarazada. Calcule la probabilidad de que:

(I) El test dé positivo.

(II) La mujer esté embarazada sabiendo que el test da positivo.

Realizamos un diagrama de árbol



(I) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Test positivo}) &= P(\text{Esté embarazada}) \cdot P(\text{Test positivo} / \text{Está embarazada}) + \\
 &+ P(\text{No esté embarazada}) \cdot P(\text{Test positivo} / \text{No está embarazada}) = \\
 &= 0,6 \cdot 0,96 + 0,4 \cdot 0,05 = 0,596
 \end{aligned}$$

(II) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Esté embarazada} / \text{Test positivo}) = \frac{P(\text{Esté embarazada y test positivo})}{P(\text{Test positivo})} = \frac{0,6 \cdot 0,96}{0,596} = 0,966$$

2.- (3 puntos) Sean el punto $P = (1, 2, -2)$ y la recta $r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

- (I) Determine la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta r.
 (II) Determine el punto de r más próximo a P.
 (III) Halle la recta r' simétrica de r respecto al punto P.

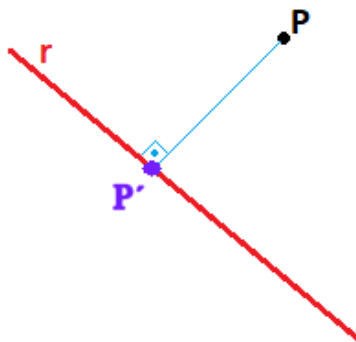
(I) Si el plano es perpendicular a la recta tiene como vector normal el director de la recta $\vec{v}_r = (-1, 1, 2)$. Por tanto, el plano tiene ecuación $\pi \equiv -x + y + 2z + D = 0$.

Como además pasa por el punto $P = (1, 2, -2)$ se debe cumplir:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -x + y + 2z + D = 0 \\ \text{Pasa por } P = (1, 2, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + 2 - 4 + D = 0 \Rightarrow D = 3$$

El plano tiene ecuación $\pi \equiv -x + y + 2z + 3 = 0$.

(II) Nos piden hallar el punto P' del dibujo.

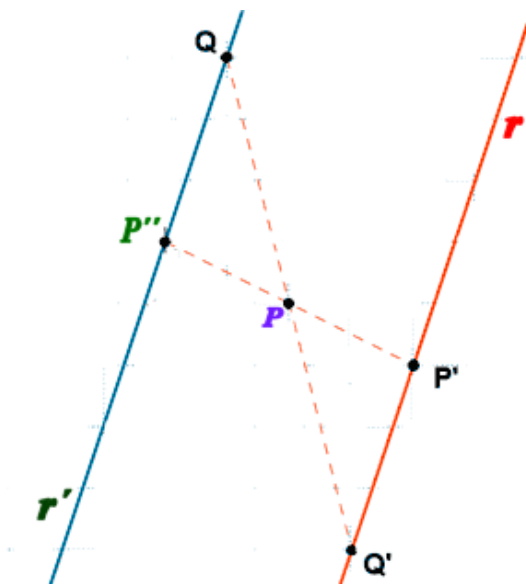


Determino el plano perpendicular a r que pasa por P (hallado en el apartado anterior) y luego P' es el punto de corte de plano y recta.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -x + y + 2z + 3 = 0 \\ r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + \lambda + 1 + \lambda + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow 6\lambda = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \\ y = 1 + \lambda = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ z = 2\lambda = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow P' \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

(III) Nos piden hallar la recta r' del dibujo:



Para ello solo falta hallar el punto P'' de la recta r' . Su vector director es el mismo de r .

$P = (1, 2, -2)$ es el punto medio del segmento de extremos $P' \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$ y $P''(a, b, c)$.

Entonces:

$$P = \frac{P' + P''}{2} \Rightarrow (1, 2, -2) = \frac{\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right) + (a, b, c)}{2} \Rightarrow (2, 4, -4) = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right) + (a, b, c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a, b, c) = (2, 4, -4) - \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right) = \left(2 - \frac{7}{3}, 4 - \frac{2}{3}, -4 + \frac{2}{3} \right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{10}{3} \right)$$

La recta tiene ecuación r' :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} - \lambda \\ y = \frac{10}{3} + \lambda \\ z = -\frac{10}{3} + 2\lambda \end{cases}$$

Si tomamos $\lambda = \frac{2}{3}$ obtenemos un punto R de la recta de coordenadas

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1 \\ y = \frac{10}{3} + \frac{2}{3} = 4 \\ z = -\frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = -2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_{r'} = \vec{v}_r = (-1, 1, 2) \\ R(-1, 4, -2) \in r' \end{array} \right\} \Rightarrow r': \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

3.- (2 puntos) Sea

$$f(x) = xe^{-ax}$$

- (I) Calcule, según los valores de a , las asíntotas de $f(x)$.
(II) Halle el valor de a para que f tenga en $x = 1$ un extremo relativo. ¿Es un máximo o un mínimo?

Hecho en la propuesta A

4.- (3 puntos) Sea el sistema de ecuaciones

$$cx + y - 2z = 6,$$

$$cx - 2y + z = 0,$$

$$-2x + y + cz = -6.$$

- (I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c .
(II) Halle la solución o soluciones, si existen, cuando el parámetro c es 1.

Hecho en la propuesta A

EBAU Julio 2017



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Evaluación de Bachillerato para el acceso a la
Universidad
Curso 2016/2017
Convocatoria: Julio
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS**

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Sean m un número real y los vectores

$$\vec{u} = (1, 0, 1), \quad \vec{v} = (2, -1, m).$$

(I) Halle todos los vectores de módulo 3 que son perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

(II) Determine, si existe, un valor de m tal que el correspondiente vector $\vec{v}$ forma un ángulo de 45° con el vector $\vec{u}$.

2.- (3 puntos)

(I) Halle, según el valor del parámetro a , el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & a+4 \end{pmatrix}$$

(II) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 4 tales que $\det(AB) = 1$. ¿Qué se puede decir del rango de A ?

3.- (2 puntos) En una universidad el 30% de los alumnos va a la cafetería A , el 60 % va a la cafetería B y el 20 % va a ambas cafeterías.

(I) Si se elige al azar un estudiante que va a la cafetería A , halle la probabilidad de que también vaya a la cafetería B .

(II) Si se elige al azar un estudiante de esa universidad, calcule la probabilidad de que el estudiante no vaya a la cafetería A ni a la cafetería B .

4.- (3 puntos) Sea $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x}$. Sabiendo que $e^x > x$ para todo número real x , para la función f estudie:

(I) El dominio y las asíntotas.

(II) La monotonía y los extremos relativos.

(III) Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

PROPUESTA B:

1.- (2 puntos) Sea m un número real y consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (I) Halle los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.
(II) Determine el rango de A cuando $m = 2$.

2.- (3 puntos)

- (I) Pruebe que cualquiera sea el valor de a , los planos $\pi_1: ax + ay - z = 0$, $\pi_2: x - y + az = 0$ se cortan en una recta r .
(II) Estudie, en función de a , la posición relativa de la recta r y el plano que contiene a los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 0, 2)$ y $C(0, 1, 2a)$.

3.- (2 puntos) En una universidad el 30% de los alumnos va a la cafetería A , el 60 % va a la cafetería B y el 20 % va a ambas cafeterías.

- (I) Si se elige al azar un estudiante que va a la cafetería A , halle la probabilidad de que también vaya a la cafetería B .
(II) Si se elige al azar un estudiante de esa universidad, calcule la probabilidad de que el estudiante no vaya a la cafetería A ni a la cafetería B .

4.- (3 puntos) Sea $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x}$. Sabiendo que $e^x > x$ para todo número real x , para la función f estudie:

- (I) El dominio y las asíntotas.
(II) La monotonía y los extremos relativos.
(III) Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

SOLUCIONES

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Sean m un número real y los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (2, -1, m)$.

(I) Halle todos los vectores de módulo 3 que son perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

(II) Determine, si existe, un valor de m tal que el correspondiente vector $\vec{v}$ forma un ángulo de 45° con el vector $\vec{u}$.

(I) Un vector perpendicular a ambos vectores es su producto vectorial.

$$\vec{p} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 0, 1) \times (2, -1, m) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = 2j - k - mj + i = i + (2 - m)j - k$$

$$\vec{p} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 2 - m, -1)$$

Calculamos el módulo de este vector y el vector unitario en su misma dirección será este vector dividido por su módulo.

$$|\vec{p}| = \sqrt{1^2 + (2 - m)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + m^2 - 4m + 1} = \sqrt{m^2 - 4m + 6}$$

Los vectores unitarios perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son:

$$\vec{w} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{m^2 - 4m + 6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{m^2 - 4m + 6}}, \frac{2 - m}{\sqrt{m^2 - 4m + 6}}, \frac{-1}{\sqrt{m^2 - 4m + 6}} \right)$$

Los vectores de módulo 3 perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que nos piden son:

$$3\vec{w} = \left(\frac{3}{\sqrt{m^2 - 4m + 6}}, \frac{6 - 3m}{\sqrt{m^2 - 4m + 6}}, \frac{-3}{\sqrt{m^2 - 4m + 6}} \right)$$

Y también

$$-3\vec{w} = \left(\frac{-3}{\sqrt{m^2 - 4m + 6}}, \frac{-6 + 3m}{\sqrt{m^2 - 4m + 6}}, \frac{3}{\sqrt{m^2 - 4m + 6}} \right)$$

(II) Utilizamos el producto escalar de ambos vectores.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(1, 0, 1) \cdot (2, -1, m)}{\sqrt{1+0+1} \sqrt{4+1+m^2}} = \frac{2+m}{\sqrt{2} \sqrt{m^2+5}}$$

Como queremos que formen 45° y el coseno de este ángulo es $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+m}{\sqrt{2} \sqrt{m^2+5}} \Rightarrow \sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{m^2+5} = 2(2+m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{m^2+5} = 2(2+m) \Rightarrow \sqrt{m^2+5} = 2+m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{m^2+5})^2 = (2+m)^2 \Rightarrow m^2+5 = 4+m^2+4m \Rightarrow 1 = 4m \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{4}}$$

Para $m = \frac{1}{4}$ los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman 45° .

2.- (3 puntos)

(I) Halle, según el valor del parámetro a , el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & a+4 \end{pmatrix}$$

(II) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 4 tales que $\det(AB) = 1$. ¿Qué se puede decir del rango de A ?

(I) La matriz tiene dimensión 4×3 por lo que su rango como máximo es 3.

Tomamos el menor de orden 3 formado por las 3 primeras filas y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 9 - 1 - 6 = 0.$$

Cogemos ahora el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna (las tres primeras son linealmente dependientes) y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & a+4 \end{vmatrix} = 9a + 36 - 4 + 0 - 0 - a - 4 - 18 = 8a + 10$$

$$8a + 10 = 0 \Rightarrow a = \frac{-10}{8} = \frac{-5}{4}$$

Se plantean dos situaciones diferentes.

Situación 1ª. $a \neq \frac{-5}{4}$

En esta situación el menor de orden 3 anterior tiene determinante no nulo y el rango de la matriz es 3.

Situación 2ª. $a = \frac{-5}{4}$

En esta situación el menor de orden 3 anterior tiene determinante nulo y el rango de la matriz no es 3.

Veamos si el rango es 2.

Tomamos el menor que resulta de quitar la columna 3ª y las filas 3ª y 4ª, calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0$$

El rango es 2.

(II) Si $|AB| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$

Como la matriz es de dimensión 4×4 su rango es 4 pues su determinante es no nulo.

3.- (2 puntos) En una universidad el 30% de los alumnos va a la cafetería A, el 60 % va a la cafetería B y el 20 % va a ambas cafeterías.

(I) Si se elige al azar un estudiante que va a la cafetería A, halle la probabilidad de que también vaya a la cafetería B.

(II) Si se elige al azar un estudiante de esa universidad, calcule la probabilidad de que el estudiante no vaya a la cafetería A ni a la cafetería B.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Van a la cafetería B	No van a la cafetería B	TOTAL
Van a la cafetería A	20		30
No van a la cafetería A			
TOTAL	60		100

Termino de completar la tabla, teniendo en cuenta que cada línea debe sumar lo indicado en el total correspondiente.

	Van a la cafetería B	No van a la cafetería B	TOTAL
Van a la cafetería A	20	10	30
No van a la cafetería A	40	30	70
TOTAL	60	40	100

Respondemos a las preguntas planteadas haciendo uso de la tabla y la regla de Laplace.

(I) De 100 alumnos 30 van a la cafetería A. De estos 30 hay 20 que también van a la cafetería B.

$$P(\text{Vaya a la cafetería B} / \text{Va a la cafetería A}) = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0,66$$

(II) De 100 alumnos hay 30 que no van a ninguna cafetería.

$$P(\text{No vaya a la cafetería A ni a la B}) = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 0,3$$

4.- (3 puntos) Sea $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x}$. Sabiendo que $e^x > x$ para todo número real x , para la función f estudie:

(I) El dominio y las asíntotas.

(II) La monotonía y los extremos relativos.

(III) Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

(I) El dominio son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x} \Rightarrow e^x - x = 0 \Rightarrow e^x = x$. Esto es imposible por lo aportado en el enunciado del problema ($e^x > x$). Por lo que Dominio = $\mathbb{R}$.

Asíntota vertical. $x = a$

No tiene, pues el dominio son todos los reales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \end{aligned}$$

La asíntota horizontal en $+\infty$ es $y = 1$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x} = \frac{e^{-\infty} - \infty}{e^{-\infty} + \infty} = \frac{0 - \infty}{0 + \infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{e^{-\infty} + 1}{e^{-\infty} - 1} = \frac{1}{-1} = -1 \end{aligned}$$

La asíntota horizontal en $-\infty$ es $y = -1$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene, pues existen asíntotas horizontales en $+\infty$ y en $-\infty$.

(II) Utilizamos la derivada de la función.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x + x}{e^x - x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(e^x + 1)(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x + x)}{(e^x - x)^2} = \\ &= \frac{e^x e^x - x e^x + e^x - x - (e^x e^x + x e^x - e^x - x)}{(e^x - x)^2} = \frac{\cancel{e^x e^x} - x e^x + e^x - x - \cancel{e^x e^x} - x e^x + e^x + x}{(e^x - x)^2} \\ f'(x) &= \frac{-2x e^x + 2e^x}{(e^x - x)^2} = \frac{2e^x(-x + 1)}{(e^x - x)^2} \end{aligned}$$

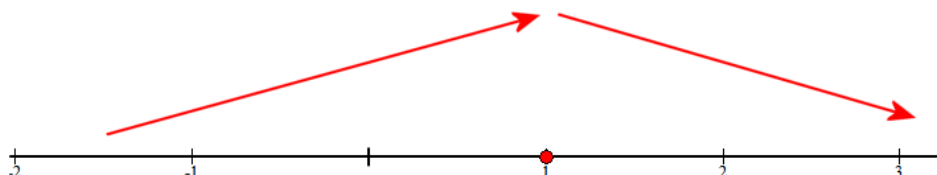
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2e^x(-x+1)}{(e^x-x)^2} = 0 \Rightarrow 2e^x(-x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ -x+1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

El único punto crítico de la función es $x = 1$.

Estudiamos el signo de la derivada y la monotonía de la función antes y después de este valor.

- En $(-\infty, 1)$ tomo $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{2e^0(-0+1)}{(e^0-0)^2} = \frac{2}{1} > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$
- En $(1, +\infty)$ tomo $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2e^2(-2+1)}{(e^2-2)^2} = \frac{-}{+} < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

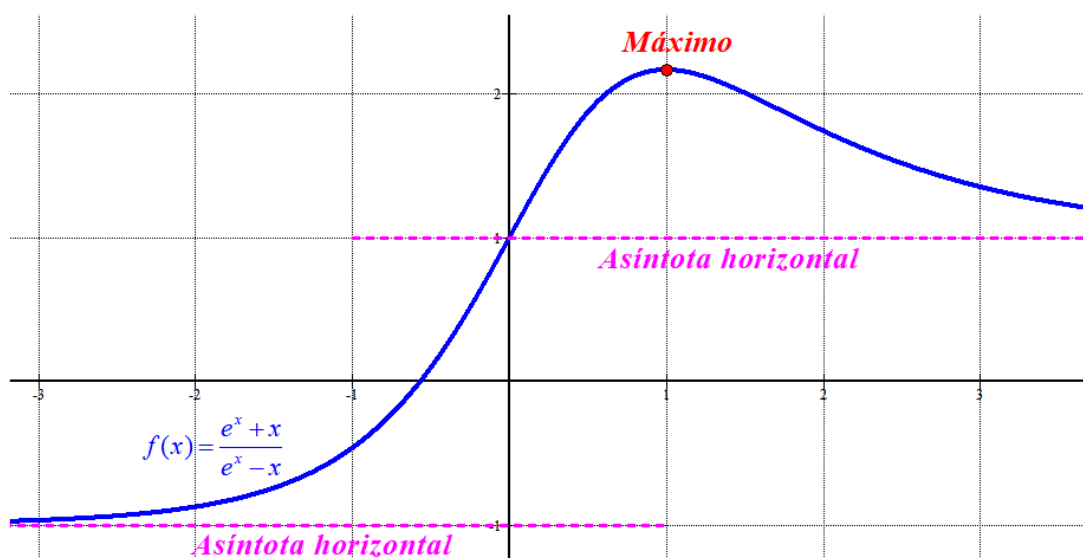
La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en $x = 1$. Como $f(1) = \frac{e^1+1}{e^1-1} = \frac{e+1}{e-1} = 2,16$ el máximo relativo tiene coordenadas $(1, 2.16)$.

La función crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$.

(III) Dibujamos la gráfica de la función utilizando toda la información obtenida en el ejercicio.



PROPUESTA B:

1.- (2 puntos) Sea m un número real y consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(I) Halle los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

(II) Determine el rango de A cuando $m = 2$.

(I) Depende del valor nulo o no del determinante de la matriz.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - m^2 - 0 - 0 + 4 = -m^2 + 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \sqrt{4} = \pm 2$$

La matriz A tiene inversa cuando $m \neq 2$ y $m \neq -2$

(II) Si $m = 2$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

¿El rango de A es 3? Comprobamos si su determinante se anula o no.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

El rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

Tomo el menor de orden 2 que resulta de quitar la 1ª fila (proporcional a la 2ª) y la 1ª columna

(proporcional a la 3ª) $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$.

El rango de A es 2.

2.- (3 puntos)

- (I) Pruebe que cualquiera sea el valor de a , los planos $\pi_1 : ax + ay - z = 0$, $\pi_2 : x - y + az = 0$ se cortan en una recta r .
- (II) Estudie, en función de a , la posición relativa de la recta r y el plano que contiene a los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 0, 2)$ y $C(0, 1, 2a)$.

- (I) Hay que comprobar que estos planos no son paralelos y por tanto se cortan en una recta. Basta probar que sus vectores normales no son paralelos, es decir, que sus coordenadas no son proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : ax + ay - z = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (a, a, -1) \\ \pi_2 : x - y + az = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (1, -1, a) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{a}{-1} = \frac{-1}{a}?$$

Para que sea cierto debe cumplirse que:

$$\frac{a}{1} = \frac{-1}{a} \Rightarrow a \cdot a = 1 \cdot 1 \Rightarrow a^2 = -1 \Rightarrow a = \sqrt{-1} \quad \text{¡¡Imposible!!}$$

Los vectores normales a los planos no tienen coordenadas proporcionales en ningún caso y los planos no son paralelos, independientemente del valor de a .

- (II) Averiguamos la ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 1, 1) \in \pi_3 \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 0, 2) - (1, 1, 1) = (0, -1, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0, 1, 2a) - (1, 1, 1) = (-1, 0, 2a-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_3 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2a-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2a-1)(x-1) - (y-1) - (z-1) = 0 \Rightarrow (2a-1)x - y - z - 2a + 1 + 1 + 1 = 0$$

$$\pi_3 \equiv (2a-1)x - y - z - 2a + 3 = 0$$

Averiguamos también el vector director de la recta r definida por los dos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : ax + ay - z = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (a, a, -1) \\ \pi_2 : x - y + az = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (1, -1, a) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_r = a^2 i - j - ak - ak - a^2 j - i = (a^2 - 1)i + (-a^2 - 1)j - 2ak = (a^2 - 1, -a^2 - 1, -2a)$$

Plano y recta tienen 3 situaciones posibles: recta contenida en plano, recta paralela a plano y recta que corta a plano. Estas posiciones dependen de la relación entre vector normal al plano y el director de la recta.

Vamos a estudiar cuando el vector normal al plano π_3 obtenido previamente es ortogonal al vector director de la recta r , es decir, cuando su producto escalar es cero.

$$\pi_3 \equiv (2a-1)x - y - z - 2a + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_3 = (2a-1, -1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_3 = (2a-1, -1, -1) \\ \vec{v}_r = (a^2-1, -a^2-1, -2a) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_3 \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (2a-1, -1, -1) \cdot (a^2-1, -a^2-1, -2a) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2a-1)(a^2-1) + (-1)(-a^2-1) + (-1)(-2a) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^3 - 2a - a^2 + 1 + a^2 + 1 + 2a = 0 \Rightarrow 2a^3 + 2 = 0 \Rightarrow a^3 + 1 = 0 \Rightarrow a^3 = -1 \Rightarrow a = \sqrt[3]{-1} = -1$$

Para $a \neq -1$ vector normal y director no son ortogonales y plano y recta se cortan.

Para $a = -1$ vector normal y director son ortogonales y plano y recta son paralelos o coincidentes. Para distinguir cuál de estas situaciones es la que ocurre en este caso comprobamos si un punto cualquiera de la recta pertenece al plano.

Determino un punto de la recta $r: \begin{cases} \pi_1: -x - y - z = 0 \\ \pi_2: x - y - z = 0 \end{cases}$ Tomo $x = y = 0$, tengo que:

$$r: \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0 - 0 - z = 0 \\ 0 - 0 - z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0. \text{ El punto } P(0,0,0) \text{ pertenece a la recta } r.$$

¿ $P(0,0,0)$ pertenece al plano $\pi_3 \equiv -3x - y - z + 5 = 0$? ¿ $0 - 0 - 0 + 5 = 0$?

No pertenece y por tanto la recta no está contenida en el plano y es paralela al mismo.

3.- (2 puntos) En una universidad el 30% de los alumnos va a la cafetería A, el 60 % va a la cafetería B y el 20 % va a ambas cafeterías.

(I) Si se elige al azar un estudiante que va a la cafetería A, halle la probabilidad de que también vaya a la cafetería B.

(II) Si se elige al azar un estudiante de esa universidad, calcule la probabilidad de que el estudiante no vaya a la cafetería A ni a la cafetería B.

Resuelto en la propuesta A.

4.- (3 puntos) Sea $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x}$. Sabiendo que $e^x > x$ para todo número real x , para la función f estudie:

(I) El dominio y las asíntotas.

(II) La monotonía y los extremos relativos.

(III) Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

Resuelto en la propuesta A.

EBAU Junio 2017



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Evaluación de Bachillerato para el acceso a la
Universidad
Curso 2016/2017
Convocatoria: Junio
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS**

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Sean los puntos $A(1,-1,0)$, $B(2,2,1)$, $C(1,-2,-1)$, $D(0,-1,2)$.

(I) Halle una ecuación de la recta que pasa por A y por B .

(II) ¿Son coplanarios los puntos $A(1,-1,0)$, $B(2,2,1)$, $C(1,-2,-1)$, $D(0,-1,2)$?

2.- (3 puntos) Sea el sistema de ecuaciones:

$$cx + 3y - z = -3,$$

$$x + cy + z = c,$$

$$cx + y + z = 1.$$

(I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c .

(II) Halle la solución o soluciones cuando el sistema sea compatible.

3.- (2 puntos) El 50 % de los habitantes de una localidad tienen más de 65 años y el 10 % tienen menos de 18 años. El 60 % de los mayores de 65 años, así como el 80 % de los menores de 18 y el 40 % del resto de los habitantes, utilizan el complejo de piscinas local.

(I) Elegido al azar un habitante de la localidad, calcule la probabilidad de que utilice el complejo de piscinas local.

(II) Elegido al azar un habitante de la localidad que no utiliza el complejo de piscinas local, halle la probabilidad de que tenga más de 65 años.

4.- (3 puntos) Sea la función $f(x) = (8 - x^2)^{1/3}$. Para ella estudie:

(I) El dominio, la continuidad y las asíntotas.

(II) La derivabilidad, los extremos relativos y la monotonía.

(III) La curvatura y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

PROPUESTA B:

1.- (2 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(I) Halle, si existe, A^{-1} .

(II) Determine, si existe, la solución X de la ecuación matricial

$$A = AXA^{-1} + B$$

.

2.- (3 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = (2, -3, 5)$, $\vec{v} = (1, 2, -2)$, $\vec{w} = (2k, -1, k)$.

(I) Calcule el valor de k para que los vectores sean linealmente dependientes.

(II) Compruebe que para $k = 2$ los vectores forman una base del espacio euclídeo tridimensional.

(III) Halle las coordenadas del vector $\vec{a} = (15, -11, 18)$ respecto de la base del apartado anterior.

3.- (2 puntos) El 50 % de los habitantes de una localidad tienen más de 65 años y el 10 % tienen menos de 18 años. El 60 % de los mayores de 65 años, así como el 80 % de los menores de 18 y el 40 % del resto de los habitantes, utilizan el complejo de piscinas local.

(I) Elegido al azar un habitante de la localidad, calcule la probabilidad de que utilice el complejo de piscinas local.

(II) Elegido al azar un habitante de la localidad que no utiliza el complejo de piscinas local, halle la probabilidad de que tenga más de 65 años.

4.- (3 puntos) Sea la función $f(x) = (8 - x^2)^{1/3}$. Para ella estudie:

(I) El dominio, la continuidad y las asíntotas.

(II) La derivabilidad, los extremos relativos y la monotonía.

(III) La curvatura y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

SOLUCIONES

PROPUESTA A:

1.- (2 puntos) Sean los puntos $A(1,-1,0)$, $B(2,2,1)$, $C(1,-2,-1)$, $D(0,-1,2)$.

(I) Halle una ecuación de la recta que pasa por A y por B.

(II) ¿Son coplanarios los puntos $A(1,-1,0)$, $B(2,2,1)$, $C(1,-2,-1)$, $D(0,-1,2)$?

(I) Determinamos su vector director y con punto y vector director establecemos su ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,-1,0) \in r \\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2,2,1) - (1,-1,0) = (1,3,1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$$

(II) Comprobamos si los puntos A, B y C están alineados, comprobando si el punto C pertenece a la recta anterior que pasa por los puntos A y B.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} C(1,-2,-1) \in r? \\ r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \frac{1-1}{1} = \frac{-2+1}{3} = \frac{-1}{1} ? \Rightarrow \text{¿} \frac{0}{1} = \frac{-1}{3} = \frac{-1}{1} ? \text{ No se cumple}$$

Los tres puntos A, B y C no están alineados y por lo tanto definen un plano.

Hallo el plano que contiene a los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,-1,0) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AC} = (1,-2,-1) - (1,-1,0) = (0,-1,-1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2,2,1) - (1,-1,0) = (1,3,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+1-y-1+0+z-0+3x-3=0 \Rightarrow \pi: 2x-y+z-3=0$$

Compruebo si el punto D pertenece a este plano.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} D(0,-1,2) \in \pi? \\ \pi: 2x-y+z-3=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 0-(-1)+2-3=0? \Rightarrow \text{¡¡Si es cierto!!}$$

Los tres puntos A, B, C y D son coplanarios.

2.- (3 puntos) Sea el sistema de ecuaciones:

$$cx + 3y - z = -3,$$

$$x + cy + z = c,$$

$$cx + y + z = 1.$$

(I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c .

(II) Halle la solución o soluciones cuando el sistema sea compatible.

(I) Tomamos la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} c & 3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{con determinante } |A| = \begin{vmatrix} c & 3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = c^2 + 3c - 1 + c^2 - 3 - c = 2c^2 + 2c - 4$$

Lo igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow 2c^2 + 2c - 4 = 0 \Rightarrow c^2 + c - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = c \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = c \end{cases}$$

Establecemos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $c \neq 1$ y $c \neq -2$

En este caso el determinante de A no vale cero y el rango de A es 3. También el rango de la matriz ampliada A/B es 3, así como el número de incógnitas.

El sistema es **compatible determinado (solución única)**

CASO 2. $c = -2$

El sistema y la matriz ampliada quedan

$$-2x + 3y - z = -3,$$

$$x - 2y + z = -2,$$

$$-2x + y + z = 1.$$

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Aplicamos el método de Gauss para triangular la matriz ampliada.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 1}^a \\ -2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 2 \quad -3 \quad 1 \quad 3 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 2 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva fila 3}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 2 \cdot \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a & & & \\ 2 & -4 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & -1 & -3 \\ \hline 0 & -1 & 1 & -7 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a & & & \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 14 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 18 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Rango de A es 2} \\ \text{Rango de A/B es 3} \end{array} \right\}$$

Rango de A = 2 $\neq$ 3 = Rango de A/B, por lo que el sistema es **incompatible (sin solución)**

CASO 3. $c=1$

El sistema y la matriz ampliada quedan

$$x + 3y - z = -3,$$

$$x + y + z = 1,$$

$$x + y + z = 1.$$

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Aplicamos el método de Gauss para triangular la matriz ampliada.

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \\ \hline 0 & -2 & 2 & 4 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Rango de A es 2} \\ \text{Rango de A/B es 2} \end{array} \right\}$$

Rango de A = 2 = Rango de A/B < 3 = Número de incógnitas, por lo que el sistema es **compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones)**

Resumiendo: Si $c \neq 1$ y $c \neq -2$ el sistema es compatible determinado, si $c = -2$ el sistema es incompatible y si $c = 1$ es compatible indeterminado.

b) El sistema es compatible determinado para $c \neq 1$ y $c \neq -2$ y compatible indeterminado para $c = 1$.

Resolvemos para $c = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} x+3y-z=-3, \\ x+y+z=1, \\ x+y+z=1. \end{array} \right\} \Rightarrow \{ \text{Ecuación 2ª y 3ª iguales} \} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+3y-z=-3, \\ x+y+z=1. \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x+3y-z=-3, \\ x=1-y-z. \end{array} \right\} \Rightarrow 1-y-z+3y-z=-3 \Rightarrow 2y-2z=-4 \Rightarrow y-z=-2 \Rightarrow \boxed{y=-2+z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-(-2+z)-z \Rightarrow \boxed{x=3-2z}$$

La solución es $x=3-2t$; $y=-2+t$; $z=t$

Resolvemos para $c \neq 1$ y $c \neq -2$:

Utilizamos el método de Cramer. $A = \begin{pmatrix} c & 3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} c & 3 & -1 & -3 \\ 1 & c & 1 & c \\ c & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ c & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & 3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3c+3-c+c-3c+3}{2c^2+2c-4} = \frac{-6c+6}{2c^2+2c-4} = \frac{-6(c-1)}{2(c+2)(c-1)} = \frac{-3}{c+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} c & -3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & 3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{c^2-3c-1+c^2+3-c}{2c^2+2c-4} = \frac{2c^2-4c+2}{2c^2+2c-4} = \frac{2(c^2-2c+1)}{2(c^2+c-2)} = \frac{(c-1)(c-1)}{(c-1)(c+2)} = \frac{c-1}{c+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} c & 3 & -3 \\ 1 & c & c \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & 3 & -1 \\ 1 & c & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{c^2+3c^2-3+3c^2-3-c^2}{2c^2+2c-4} = \frac{6c^2-6}{2c^2+2c-4} = \frac{6(c^2-1)}{2(c^2+c-2)} = \frac{3(c-1)(c+1)}{(c-1)(c+2)} = \frac{3(c+1)}{c+2}$$

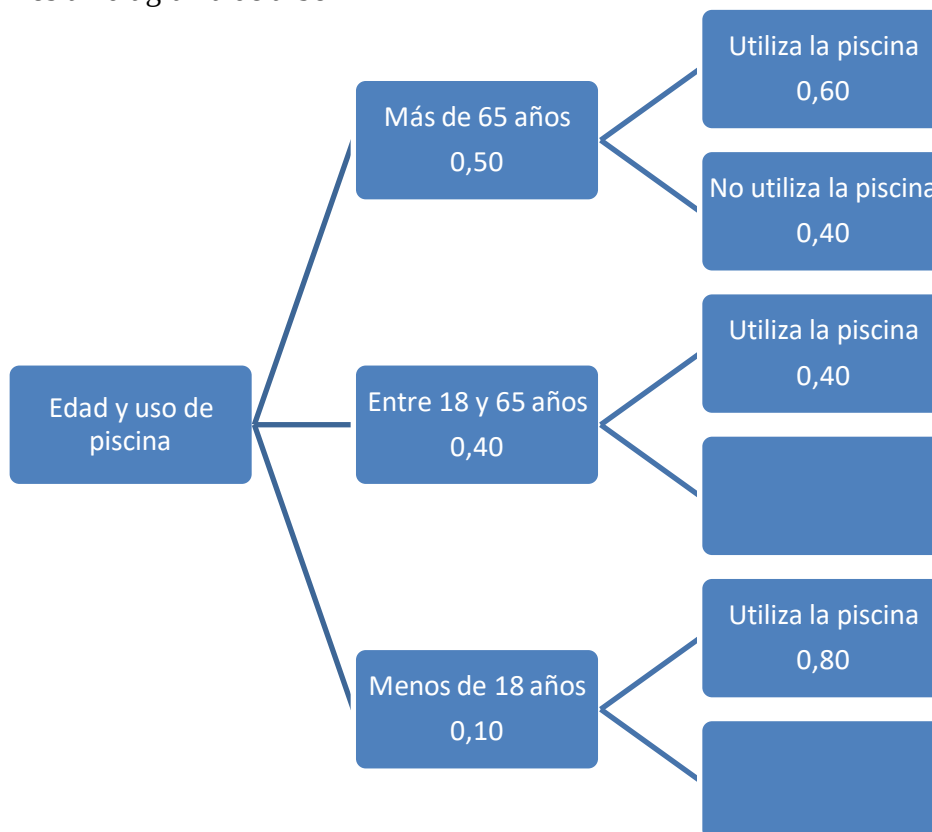
Las soluciones son $x = \frac{-3}{c+2}$; $y = \frac{c-1}{c+2}$; $z = \frac{3(c+1)}{c+2}$

3.- (2 puntos) El 50 % de los habitantes de una localidad tienen más de 65 años y el 10 % tienen menos de 18 años. El 60 % de los mayores de 65 años, así como el 80 % de los menores de 18 y el 40 % del resto de los habitantes, utilizan el complejo de piscinas local.

(I) Elegido al azar un habitante de la localidad, calcule la probabilidad de que utilice el complejo de piscinas local.

(II) Elegido al azar un habitante de la localidad que no utiliza el complejo de piscinas local, halle la probabilidad que tenga más de 65 años.

Realizamos un diagrama de árbol



(I) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Utilice la piscina}) &= P(\text{más de 65 años})P(\text{Utilice la piscina} / \text{más de 65 años}) + \\
 &+ P(\text{Entre 18 y 65 años})P(\text{Utilice la piscina} / \text{Tiene entre 18 y 65 años}) + \\
 &+ P(\text{menos de 18 años})P(\text{Utilice la piscina} / \text{menos de 18 años}) = \\
 &= 0,5 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,30 + 0,16 + 0,08 = \boxed{0,54}
 \end{aligned}$$

(II) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Tenga más de 65 años} / \text{No utiliza la piscina}) &= \\
 &= \frac{P(\text{Tenga más de 65 años y No utiliza la piscina})}{P(\text{No utiliza la piscina})} = \frac{0,5 \cdot 0,4}{1 - 0,54} = \frac{10}{23} = 0,434
 \end{aligned}$$

4.- (3 puntos) Sea la función $f(x) = (8 - x^2)^{1/3}$. Para ella estudie:

(I) El dominio, la continuidad y las asíntotas.

(II) La derivabilidad, los extremos relativos y la monotonía.

(III) La curvatura y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

(I) El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$, pues no presenta ninguna dificultad, el exponente fraccionario representa una raíz cúbica que siempre existe y el radicando es un polinomio que no plantea ningún problema.

Por el mismo motivo es continua en todo $\mathbb{R}$.

Asíntota vertical. $x = a$

No existen asíntotas verticales

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (8 - x^2)^{1/3} = -\infty$$

No existen asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(8 - x^2)^{1/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-x^2)^{1/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^{2/3}}{x} = 0$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} ((8 - x^2)^{1/3} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x) = -\infty$$

No existen asíntotas oblicuas.

(II) La función es derivable y su derivada vale:

$$f(x) = (8 - x^2)^{1/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(8 - x^2)^{1/3-1}(-2x) = -\frac{2x}{3}(8 - x^2)^{-2/3} = \frac{-2x}{3(8 - x^2)^{2/3}}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{3(8 - x^2)^{2/3}} = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(8 - x^2)^2}}$$

La derivada existe salvo para los valores que anulan el denominador.

$$8 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}$$

Localizamos los máximos y mínimos relativos.

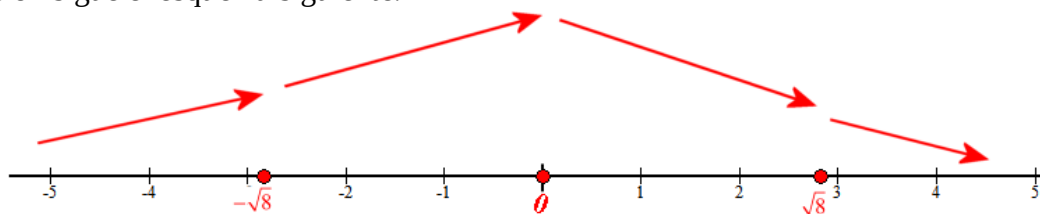
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{3(8 - x^2)^{2/3}} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Tenemos los valores $x = -\sqrt{8}$; $x = 0$; $x = +\sqrt{8}$ como puntos de discontinuidad y críticos.

- En $(-\infty, -\sqrt{8})$ tomo $x = -4$ y la derivada vale $f'(-4) = \frac{8}{3\sqrt[3]{(8 - (-4)^2)^2}} > 0$. La función crece en $(-\infty, -\sqrt{8})$.

- En $(-\sqrt{8}, 0)$ tomo $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{4}{3\sqrt[3]{(8-(-2)^2)^2}} > 0$. La función crece en $(-\sqrt{8}, 0)$
- En $(0, +\sqrt{8})$ tomo $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-4}{3\sqrt[3]{(8-2^2)^2}} < 0$. La función decrece en $(0, +\sqrt{8})$
- En $(\sqrt{8}, +\infty)$ tomo $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{-8}{3(8-4^2)^{2/3}} < 0$. La función decrece en $(\sqrt{8}, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x = 0$. $f(0) = (8-0^2)^{1/3} = 2$.

El máximo relativo tiene coordenadas $(0, 2)$

La función crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$

(III) Utilizamos la derivada segunda.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{-2x}{3(8-x^2)^{2/3}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2 \cdot 3(8-x^2)^{2/3} - (-2x) \left(3 \cdot \frac{2}{3} (8-x^2)^{2/3-1} (-2x) \right)}{\left(3(8-x^2)^{2/3} \right)^2} = \\
 &= \frac{-6(8-x^2)^{2/3} - 8x^2(8-x^2)^{-1/3}}{9(8-x^2)^{4/3}} = \frac{-6\sqrt[3]{(8-x^2)^2} - \frac{8x^2}{\sqrt[3]{8-x^2}}}{9(8-x^2)^{4/3}} = \\
 &= \frac{\frac{-6\sqrt[3]{(8-x^2)^2} \sqrt[3]{8-x^2} - 8x^2}{\sqrt[3]{8-x^2}}}{9\sqrt[3]{(8-x^2)^4}} = \frac{-6\sqrt[3]{(8-x^2)^2} \sqrt[3]{8-x^2} - 8x^2}{9\sqrt[3]{(8-x^2)^4} \sqrt[3]{8-x^2}} = \frac{-6\sqrt[3]{(8-x^2)^3} - 8x^2}{9\sqrt[3]{(8-x^2)^5}}
 \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{-6(8-x^2)-8x^2}{9\sqrt[3]{(8-x^2)^5}} = \frac{-48+6x^2-8x^2}{9\sqrt[3]{(8-x^2)^5}} = \frac{-48-2x^2}{9\sqrt[3]{(8-x^2)^5}}$$

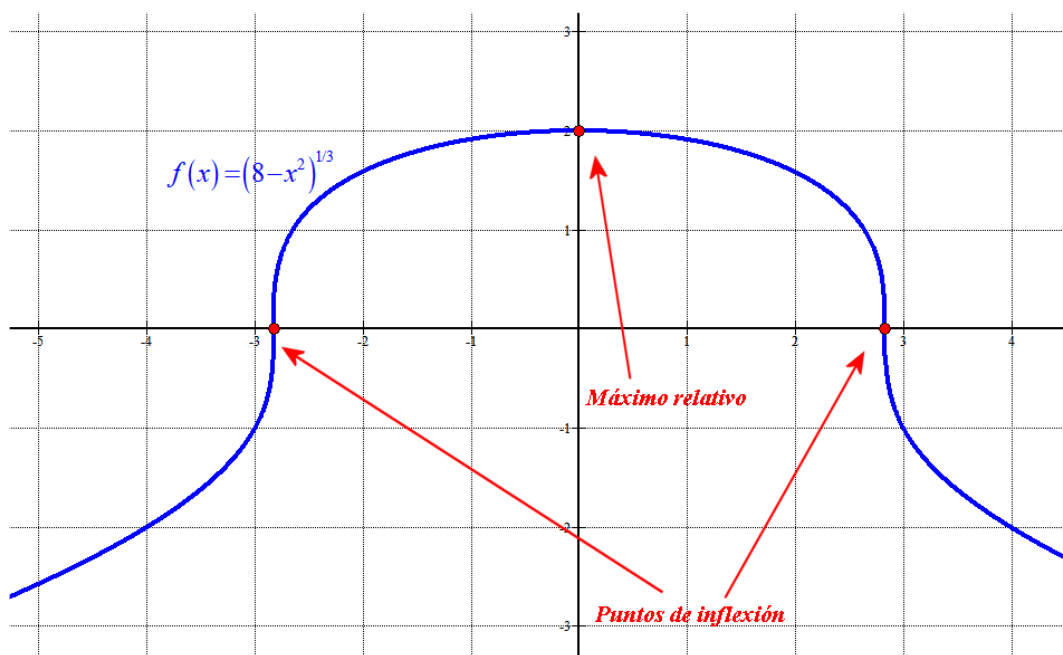
$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-48-2x^2}{9\sqrt[3]{(8-x^2)^5}} = 0 \Rightarrow -48-2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -48 \Rightarrow x = \sqrt{-29} = \text{No existe}$$

No existe un punto de inflexión obtenido a partir de la derivada segunda, pero como la derivada primera no existe para $x = -\sqrt{8}$; $x = +\sqrt{8}$ estudiamos que ocurre con el signo de la derivada segunda (curvatura) antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty, -\sqrt{8})$ tomo $x = -4$ y la derivada segunda vale $f''(-4) = \frac{-48-32}{9\sqrt[3]{(8-16)^5}} = \frac{-}{-} > 0$. La función es convexa (U) en $(-\infty, -\sqrt{8})$.
- En $(-\sqrt{8}, +\sqrt{8})$ tomo $x = 0$ y la derivada vale $f''(0) = \frac{-48}{9\sqrt[3]{(8)^5}} < 0$. La función es cóncava (∩) en $(-\sqrt{8}, +\sqrt{8})$.
- En $(\sqrt{8}, +\infty)$ tomo $x = 4$ y la derivada vale $f''(4) = \frac{-48-32}{9\sqrt[3]{(8-16)^5}} = \frac{-}{-} > 0$. La función es convexa (U) en $(\sqrt{8}, +\infty)$.

La función es convexa (U) en $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$ y cóncava (∩) en $(-\sqrt{8}, +\sqrt{8})$.

Los puntos de inflexión están en $x = -\sqrt{8}$; $x = +\sqrt{8}$



PROPUESTA B:

1.- (2 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(I) Halle, si existe, A^{-1} .

(II) Determine, si existe, la solución X de la ecuación matricial

$$A = AXA^{-1} + B$$

(I) Comprobamos si el determinante de A es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$$

La matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(II) Despejamos de la ecuación matricial la matriz X .

$$A = AXA^{-1} + B \Rightarrow A - B = AXA^{-1} \Rightarrow A^{-1}(A - B)A = X$$

Sustituimos los valores de cada una de las matrices y realizamos las operaciones indicadas.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4+5 & 8 \\ -2-3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 27+8 & 45+16 \\ -15-4 & -25-8 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 35 & 61 \\ -19 & -33 \end{pmatrix}$$

2.- (3 puntos) Dacios los vectores $\vec{u} = (2, -3, 5)$, $\vec{v} = (1, 2, -2)$, $\vec{w} = (2k, -1, k)$.

(I) Calcula el valor de k para que los vectores sean linealmente dependientes.

(II) Compruebe que para $k = 2$ los vectores forman una base del espacio euclídeo tridimensional.

(III) Halla las coordenadas del vector $\vec{a} = (15, -11, 18)$ respecto de la base del apartado anterior.

(I) Para que los vectores sean linealmente dependientes debe ser su determinante nulo.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2k & -1 & k \end{vmatrix} = 4k + 12k - 5 - 20k + 3k - 4 = -k - 9$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Rightarrow -k - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{k = -9}$$

(II) Para que sean una base deben ser linealmente independientes. Lo son, pues para $k = 2$ su producto mixto es no nulo.

$$\vec{u} = (2, -3, 5), \vec{v} = (1, 2, -2), \vec{w} = (4, -1, 2)$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

(III)

$$\vec{a} = (15, -11, 18) = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$$

$$(15, -11, 18) = x(2, -3, 5) + y(1, 2, -2) + z(4, -1, 2)$$

$$(15, -11, 18) = (2x + y + 4z, -3x + 2y - z, 5x - 2y + 2z) \Rightarrow \begin{cases} 15 = 2x + y + 4z \\ -11 = -3x + 2y - z \\ 18 = 5x - 2y + 2z \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 4z = 15 \\ -3x + 2y - z = -11 \\ 5x - 2y + 2z = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a + 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ -6x + 4y - 2z = -22 \\ 6x + 3y + 12z = 45 \\ \hline 0 \quad 7y + 10z = 23 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación } 3^a - 5 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 10x - 4y + 4z = 36 \\ -10x - 5y - 20z = -75 \\ \hline 0 \quad -9y - 16z = -39 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + 4z = 15 \\ 7y + 10z = 23 \\ -9y - 16z = -39 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7 \cdot \text{Ecuación } 3^a + 9 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 0 \quad -63y \quad -112z = -273 \\ 0 \quad 63y \quad +90z = 207 \\ 0 \quad 0 \quad -22z = -66 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + 4z = 15 \\ 7y + 10z = 23 \\ -22z = -66 \end{array} \right\} \Rightarrow z = \frac{-66}{-22} \Rightarrow \boxed{z = 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7y + 10z = 23 \\ z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 7y + 30 = 23 \Rightarrow 7y = -7 \Rightarrow \boxed{y = -1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + 4z = 15 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 1 + 12 = 15 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Las coordenadas del vector $\vec{a} = (15, -11, 18)$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son $\vec{a} = (2, -1, 3)$

3.- (2 puntos) El 50 % de los habitantes de una localidad tienen más de 65 años y el 10 % tienen menos de 18 años. El 60 % de los mayores de 65 años, así como el 80 % de los menores de 18 y el 40 % del resto de los habitantes, utilizan el complejo de piscinas local.

(I) Elegido al azar un habitante de la localidad, calcule la probabilidad de que utilice el complejo de piscinas local.

(II) Elegido al azar un habitante de la localidad que no utiliza el complejo de piscinas local, halle la probabilidad que tenga más de 65 años.

Resuelto en la propuesta A

4.- (3 puntos) Sea la función $f(x) = (8 - x^2)^{1/3}$. Para ella estudie:

(I) El dominio, la continuidad y las asíntotas.

(II) La derivabilidad, los extremos relativos y la monotonía.

(III) La curvatura y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

Resuelto en la propuesta A