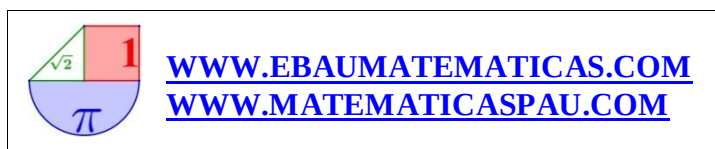


MATEMÁTICAS II

Comunidad de MADRID



PAU 2017 a 2026
(30 exámenes resueltos)



Introducción

En este cuaderno de ejercicios se recopilan los enunciados de los exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad de Madrid desde el año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas de educación secundaria.

Espero que todo lo que aquí aparece os sea útil para preparar el examen de matemáticas II en las pruebas PAU de 2027 y os ayude a conseguir buenos resultados.

En la web www.ebaumatematicas.com hay un banco de ejercicios de matemáticas II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas.

PAU 2026 Extraordinaria Matemáticas II	3
PAU 2026 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas II	18
PAU 2026 Ordinaria Matemáticas II.....	32
PAU 2026 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas II	45
PAU 2025 Extraordinaria Matemáticas II	61
PAU 2025 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas II	78
PAU 2025 Ordinaria Matemáticas II.....	92
PAU 2025 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas II	105
EvAU 2024 Extraordinaria Matemáticas II	123
EvAU 2024 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas II	143
EvAU 2024 Ordinaria Matemáticas II	160
EvAU 2024 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas II	177
EvAU 2023 Extraordinaria Matemáticas II	197
EvAU 2023 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas II	217
EvAU 2023 Ordinaria Matemáticas II	234
EvAU 2023 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas II	251
EvAU 2022 Extraordinaria Matemáticas II	269
EvAU 2022 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas II	289
EvAU 2022 Ordinaria Matemáticas II	308
EvAU 2022 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas II	324
EvAU 2021 Extraordinaria Matemáticas II	342
EvAU 2021 Ordinaria Matemáticas II	358
EvAU 2020 Extraordinaria Matemáticas II	375
EvAU 2020 Ordinaria Matemáticas II	393
EvAU 2019 Extraordinaria Matemáticas II	406
EvAU 2019 Ordinaria Matemáticas II	418
EvAU 2018 Extraordinaria Matemáticas II	432
EvAU 2018 Ordinaria Matemáticas II	445
EvAU 2017 Extraordinaria Matemáticas II	462
EvAU 2017 Ordinaria Matemáticas II	477

PAU 2026 Extraordinaria Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2025-2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	E
---	---	-------------------------

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. El 85 % de los alumnos de un instituto viven en la misma localidad en la que se sitúa el centro educativo y el resto en pueblos de alrededor. El 75 % de los alumnos que acuden al instituto desde fuera de la localidad llegan puntuales a clase por la mañana y el 5 % de los alumnos que viven en la misma localidad que el centro llegan tarde a primera hora.

- (1 punto) Calcule el porcentaje de alumnos del instituto que llegan tarde a primera hora.
- (1 punto) Se elige un alumno del centro al azar. Halle la probabilidad de que sea de un pueblo de alrededor si se sabe que ha llegado puntual a clase por la mañana.

Pregunta 2. (2 puntos) Un diseñador gráfico propone una bandera usando los colores verde, blanco y rojo. Para ello considera un rectángulo de base 8 y altura 2, toma como origen de coordenadas el extremo inferior izquierdo del rectángulo y los lados izquierdo e inferior están sobre los ejes coordenados OY e OX, respectivamente. En el rectángulo descrito traza la curva de ecuación $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ que va del vértice superior izquierdo del rectángulo al vértice inferior derecho. El diseñador quiere que la parte del rectángulo que queda por encima de la curva dada sea blanca. Para la parte que queda por debajo de la curva, toma un nuevo rectángulo con el vértice inferior izquierdo en el origen de coordenadas y el superior derecho en la curva. Ese rectángulo sería verde y lo que queda sería rojo.

Calcule el área que ocupa cada color en esta bandera si el diseñador quiere que el área roja sea la menor posible.

Pregunta 3. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Resuelva la ecuación matricial: $AX + X = B$.
- (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 - Calcule el determinante de la matriz $(2C)^{100}$ aplicando propiedades de los determinantes.
 - Justifique si las matrices A y AB son invertibles.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 4.1. Sean las rectas $r_1 \equiv (x, y, z) = (1+t, 1, 0)$ y $r_2 \equiv (x, y, z) = (1+s, s, 0)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

- a) (1 punto) Estudie la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 .
- b) (1 punto) Halle una recta r_3 tal que las intersecciones de r_1 , r_2 y r_3 formen un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa esté contenida en r_2 y tenga longitud $\sqrt{2}$.

Pregunta 4.2. Se consideran el punto $P(1, 2, 1)$ y el plano de ecuación $2x - 2y + z = 1$. Se traza un cubo con una cara en el plano y un vértice en el punto P .

- a) (1 punto) Determine la longitud del lado de dicho cubo y su volumen.
- b) (1 punto) Halle otro vértice del cubo.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

Halle el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos con sus correspondientes valores.

Pregunta 5.2. (2 puntos) Halle el valor real a tal que

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-a) \operatorname{sen}(3x) dx = \frac{2\pi}{9}$$

SOLUCIONES

Pregunta 1. El 85 % de los alumnos de un instituto viven en la misma localidad en la que se sitúa el centro educativo y el resto en pueblos de alrededor. El 75 % de los alumnos que acuden al instituto desde fuera de la localidad llegan puntuales a clase por la mañana y el 5 % de los alumnos que viven en la misma localidad que el centro llegan tarde a primera hora.

- a) (1 punto) Calcule el porcentaje de alumnos del instituto que llegan tarde a primera hora.
 b) (1 punto) Se elige un alumno del centro al azar. Halle la probabilidad de que sea de un pueblo de alrededor si se sabe que ha llegado puntual a clase por la mañana.

- a) El $100 - 75 = 25$ % de los alumnos que acuden al instituto desde fuera de la localidad llegan tarde por la mañana y el 5 % de los alumnos que viven en la misma localidad que el centro llegan tarde a primera hora.

El 15% de los alumnos viven fuera de la localidad y el $100 - 75 = 25\%$ de ellos llegan tarde, es decir, el $0.15 \cdot 0.25 = 0.0375 = 3.75$ % del total.

El 85% de los alumnos viven en la misma localidad y el 5% de ellos llegan tarde, es decir, el $0.05 \cdot 0.85 = 0.0425 = 4.25$ % del total.

El porcentaje de alumnos del instituto que llegan tarde a primera hora es $3.75 + 4.25 = 8\%$.

- b) Llamamos L al suceso “el alumno vive en la misma localidad en la que se sitúa el centro educativo” y T a “el alumno llega tarde a clase por la mañana”.

Por los datos proporcionados sabemos que $P(L) = 0.85$; $P(\bar{L}) = 1 - 0.85$; $P(\bar{T} / \bar{L}) = 0.75$ y por lo obtenido en el apartado anterior tenemos que $P(T) = 0.08$.

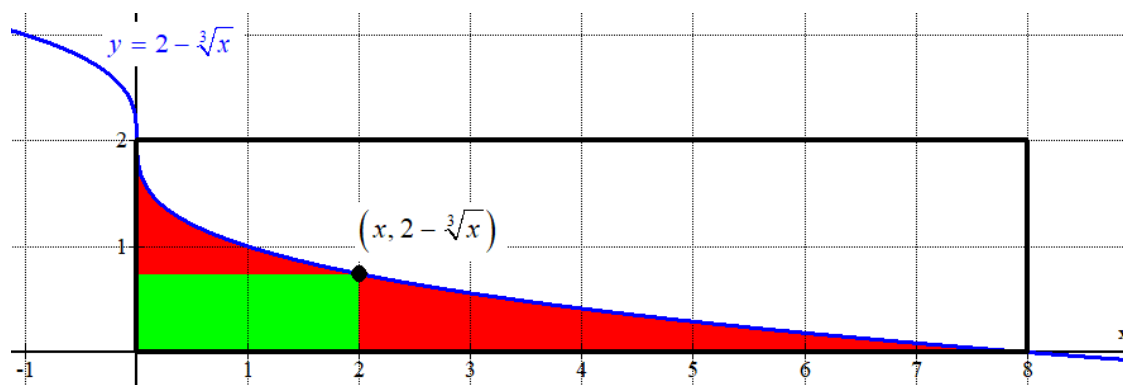
Nos piden calcular $P(\bar{L} / \bar{T})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{L} / \bar{T}) = \frac{P(\bar{L} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(\bar{L})P(\bar{T} / \bar{L})}{1 - P(T)} = \frac{(1 - 0.85) \cdot 0.75}{1 - 0.08} = \boxed{\frac{45}{368} \approx 0.1223}$$

La probabilidad de que un alumno elegido al azar sea de un pueblo de alrededor si se sabe que ha llegado puntual a clase por la mañana tiene un valor de $\frac{45}{368} \approx 0.1223$.

Pregunta 2. (2 puntos) Un diseñador gráfico propone una bandera usando los colores verde, blanco y rojo. Para ello considera un rectángulo de base 8 y altura 2, toma como origen de coordenadas el extremo inferior izquierdo del rectángulo y los lados izquierdo e inferior están sobre los ejes coordenados OY e OX, respectivamente. En el rectángulo descrito traza la curva de ecuación $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ que va del vértice superior izquierdo del rectángulo al vértice inferior derecho. El diseñador quiere que la parte del rectángulo que queda por encima de la curva dada sea blanca. Para la parte que queda por debajo de la curva, toma un nuevo rectángulo con el vértice inferior izquierdo en el origen de coordenadas y el superior derecho en la curva. Ese rectángulo sería verde y lo que queda sería rojo. Calcule el área que ocupa cada color en esta bandera si el diseñador quiere que el área roja sea la menor posible.

Hacemos un dibujo de la situación planteada.



Para que el área roja sea lo menor posible el rectángulo verde debe tener la mayor área posible. Hallamos la expresión del área del rectángulo de base x y altura $2 - \sqrt[3]{x}$.

$$A(x) = x(2 - \sqrt[3]{x}) = 2x - x \cdot x^{1/3} = 2x - x^{4/3}$$

Derivamos la función y averiguamos cuando se anula.

$$A(x) = 2x - x^{4/3} \Rightarrow A'(x) = 2 - \frac{4}{3}x^{4/3-1} = 2 - \frac{4x^{1/3}}{3} = \frac{6 - 4\sqrt[3]{x}}{3}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{6 - 4\sqrt[3]{x}}{3} = 0 \Rightarrow 6 - 4\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow 6 = 4\sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

La función presenta un punto crítico en $x = \frac{27}{8}$. Averiguamos el signo de la segunda derivada en dicho valor.

$$A'(x) = \frac{6 - 4x^{1/3}}{3} \Rightarrow A''(x) = \frac{-4 \cdot \frac{1}{3}x^{1/3-1}}{3} = \frac{-4}{9}x^{-2/3} = \frac{-4}{9\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow A''\left(\frac{27}{8}\right) = \frac{-4}{9\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2}} < 0$$

Para $x = \frac{27}{8}$ la primera derivada se anula y la segunda es negativa. La función tiene un máximo relativo para $x = \frac{27}{8}$. El área roja es la menor posible para $x = \frac{27}{8}$.

El área del rectángulo que es la bandera tiene un valor de $8 \cdot 2 = 16$ unidades cuadradas.

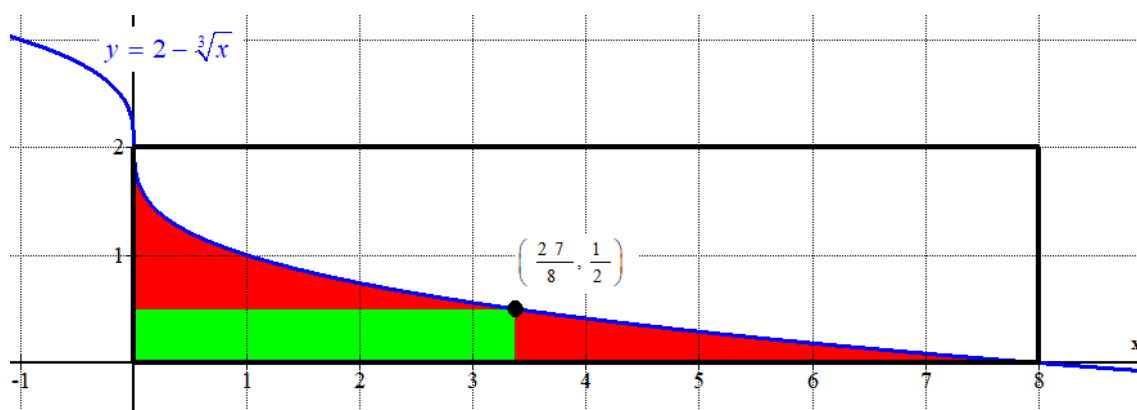
El área del trozo de bandera situada por debajo de la gráfica de $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ es el valor de la integral definida de la función de 0 a 8.

$$\int_0^8 2 - x^{1/3} dx = \left[2x - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} x^{1+1/3} \right]_0^8 = \left[2x - \frac{3}{4} x^{4/3} \right]_0^8 = \left[2 \cdot 8 - \frac{3}{4} 8^{4/3} \right] - \left[2 \cdot 0 - \frac{3}{4} 0^{4/3} \right] = 16 - 12 = 4$$

El área de color blanco vale $16 - 4 = 12$ unidades cuadradas.

El área del rectángulo verde es $A\left(\frac{27}{8}\right) = \frac{27}{8} \left(2 - \sqrt[3]{\frac{27}{8}} \right) = \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{16} = 1.6875 u^2$.

El área de la región de color rojo vale $4 - 1.6875 = 2.3125$ unidades cuadradas.



Pregunta 3. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Resuelva la ecuación matricial: $AX + X = B$.

b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**

b1) Calcule el determinante de la matriz $(2C)^{100}$ aplicando propiedades de los determinantes.

b2) Justifique si las matrices A y AB son invertibles.

a) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX + X = B \Rightarrow (A + I)X = B \Rightarrow X = (A + I)^{-1}B$$

Hallamos la inversa de la matriz A + I.

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A + I| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 8 \neq 0$$

$$(A + I)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A + I)^T}{|A + I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{8} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X = (A + I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} + \frac{2}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} & -\frac{2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 3 \times 2$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

b1) Calculamos primero el determinante de la matriz C.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Calculamos el valor del determinante de $(2C)^{100}$.

$$\begin{aligned} |(2C)^{100}| &= |2C|^{100} = \left\{ \begin{array}{l} C \text{ es una matriz cuadrada de orden } 3 \\ |2C| = 2^3 |C| \end{array} \right\} = (2^3 |C|)^{100} = \\ &= \{ \text{Sabemos que } |C| = 1 \} = (2^3 \cdot 1)^{100} = \boxed{2^{300}} \end{aligned}$$

El determinante vale 2^{300} .

b2) Para que una matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0$$

La matriz A tiene determinante no nulo y es invertible.
Obtenemos la expresión de la matriz AB.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0-1 & -1+0-2 \\ 0+1+0 & 0+0+0 \\ 0+2-1 & 0+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &\quad 3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 3 \times 2 \end{aligned}$$

Esta matriz no es cuadrada y por tanto no tiene matriz inversa.

Pregunta 4.1. Sean las rectas $r_1 \equiv (x, y, z) = (1+t, 1, 0)$ y $r_2 \equiv (x, y, z) = (1+s, s, 0)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

a) (1 punto) Estudie la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 .

b) (1 punto) Halle una recta r_3 tal que las intersecciones de r_1 , r_2 y r_3 formen un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa esté contenida en r_2 y tenga longitud $\sqrt{2}$.

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r_1 \equiv (x, y, z) = (1+t, 1, 0) \Rightarrow \begin{cases} P_1(1, 1, 0) \\ \vec{u}_1 = (1, 0, 0) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv (x, y, z) = (1+s, s, 0) \Rightarrow \begin{cases} Q_2(1, 0, 0) \\ \vec{v}_2 = (1, 1, 0) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales. Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 0, 0) \\ \vec{v}_2 = (1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{0}{0}$$

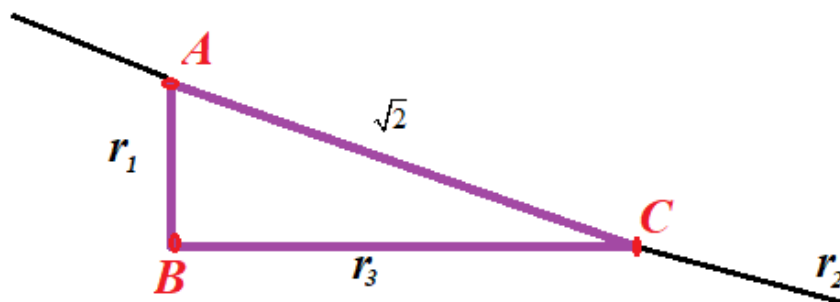
Las rectas se cortan o se cruzan. Obtenemos el valor del producto mixto $[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_1(1, 1, 0) \\ Q_2(1, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_1Q_2} = (1, 0, 0) - (1, 1, 0) = (0, -1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 0, 0) \\ \vec{v}_2 = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = (0, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Al ser nulo el producto mixto las rectas r_1 y r_2 se cortan.

b) Dibujamos la situación planteada.



Hallamos el vértice A del triángulo rectángulo. Este punto es la intersección de las rectas r_1 y r_2 .

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \\ r_2 &\equiv \begin{cases} x=1+s \\ y=s \\ z=0 \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 1+t=1+s \\ 1=s \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow s=t=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1+1=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(2,1,0)}$$

El punto B pertenece a la recta r_1 y sus coordenadas son $B(1+t,1,0)$.

El punto C pertenece a la recta r_2 y sus coordenadas son $C(1+s,s,0)$.

Para que el triángulo ABC sea rectángulo el vector $\overrightarrow{BC}$ debe ser perpendicular al vector $\overrightarrow{BA}$ y su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= (1+s, s, 0) - (1+t, 1, 0) = (s-t, s-1, 0) \\ \overrightarrow{BA} &= (2, 1, 0) - (1+t, 1, 0) = (1-t, 0, 0) \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (s-t, s-1, 0) \cdot (1-t, 0, 0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s-t)(1-t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s-t=0 \rightarrow \boxed{s=t} \\ 1-t=0 \rightarrow \boxed{t=1} \end{cases}$$

Tenemos dos opciones para formar un triángulo rectángulo. Averiguamos cuando se cumple que la hipotenusa tenga longitud $\sqrt{2}$.

$$t=1 \Rightarrow \begin{cases} A(2,1,0) \\ B(1+1,1,0) = (2,1,0) \Rightarrow A=B \\ C(1+s,s,0) \end{cases}$$

Para $t=1$ los puntos A y B son el mismo y no existe el triángulo ABC.

Para $t=s$ hallamos la longitud de los catetos.

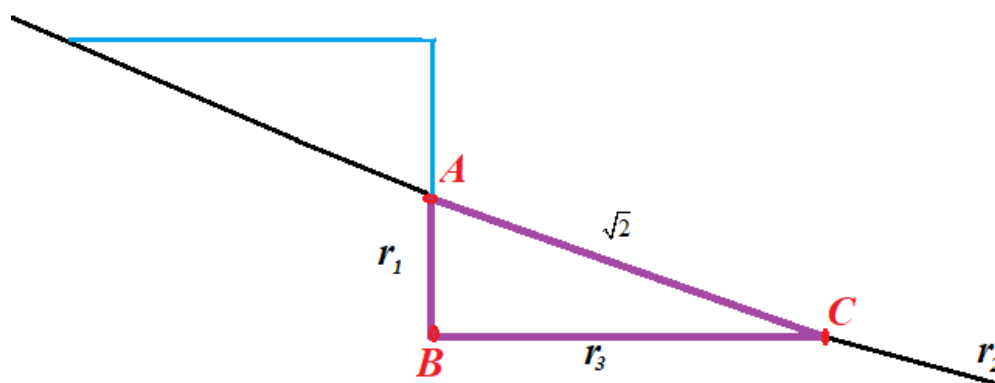
$$t=s \Rightarrow \begin{cases} A(2,1,0) \\ B(1+s,1,0) \\ C(1+s,s,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1+s,1,0) - (2,1,0) = (s-1,0,0) \\ \overrightarrow{BC} = (1+s,s,0) - (1+s,1,0) = (0,s-1,0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(s-1)^2 + 0^2 + 0^2} = |s-1| \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + (s-1)^2 + 0^2} = |s-1| \end{cases}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$\left. \begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = |s-1| \\ |\overrightarrow{BC}| = |s-1| \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = |s-1|^2 + |s-1|^2 \Rightarrow 2|s-1|^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |s-1|^2 = 1 \Rightarrow |s-1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} s-1=1 \rightarrow s=2 \rightarrow \begin{cases} A(2,1,0) \\ B(3,1,0) \\ C(3,2,0) \end{cases} \\ s-1=-1 \rightarrow s=0 \rightarrow \begin{cases} A(2,1,0) \\ B(1,1,0) \\ C(1,0,0) \end{cases} \end{cases}$$



Existen dos soluciones posibles. Hallamos la recta r_3 que contiene los puntos B y C.

$$\left. \begin{array}{l} B(3,1,0) \in r_3 \\ C(3,2,0) \in r_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{BC} = (3,2,0) - (3,1,0) = (0,1,0) \\ C(3,2,0) \in r_3 \end{array} \right\} \Rightarrow r_3 : \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

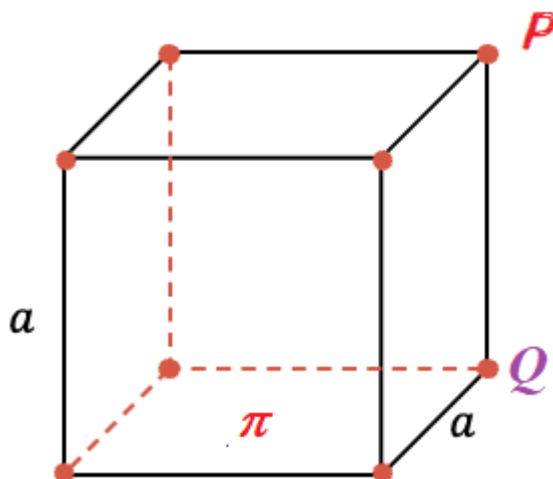
$$\left. \begin{array}{l} B(1,1,0) \in s_3 \\ C(1,0,0) \in s_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{w_3} = \overrightarrow{BC} = (1,0,0) - (1,1,0) = (0,-1,0) \\ C(1,0,0) \in s_3 \end{array} \right\} \Rightarrow s_3 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Las rectas solución del problema son $r_3 : \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ y $s_3 : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

Pregunta 4.2. Se consideran el punto $P(1, 2, 1)$ y el plano de ecuación $2x - 2y + z = 1$. Se traza un cubo con una cara en el plano y un vértice en el punto P .

a) (1 punto) Determine la longitud del lado de dicho cubo y su volumen.

b) (1 punto) Halle otro vértice del cubo.



a) La longitud del lado del cubo es la distancia del punto P al plano $\pi: 2x - 2y + z = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - 2y + z - 1 = 0 \\ P(1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow a = d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{9}} = \boxed{\frac{2}{3} \text{ u}}$$

La longitud el lado del cubo es $\frac{2}{3}$ unidades.

El volumen del cubo es $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ unidades cúbicas.

b) Hallamos el vértice del cubo que es la proyección ortogonal del punto P en el plano. Para ello primero hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P . Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: 2x - 2y + z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, -2, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, -2, 1) \\ P(1, 2, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

El punto Q que buscamos es el punto de corte de la recta r y el plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \\ \pi: 2x - 2y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) - 2(2 - 2\lambda) + 1 + \lambda = 1 \Rightarrow 2 + 4\lambda - 4 + 4\lambda + 1 + \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{2}{9} = \frac{13}{9} \\ y = 2 - 2\frac{2}{9} = \frac{14}{9} \\ z = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{13}{9}, \frac{14}{9}, \frac{11}{9}\right)}$$

Otro vértice del cubo es el punto $Q\left(\frac{13}{9}, \frac{14}{9}, \frac{11}{9}\right)$.

Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

Halle el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos con sus correspondientes valores.

Para que exista el logaritmo neperiano debe ser $x > 0$. Además, el denominador no se debe anular, por lo que $x \neq 1$. El dominio de la función es $(0,1) \cup (1, +\infty)$.

Obtenemos la expresión de la derivada y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = 0 \Rightarrow \ln(x) - 1 = 0 \Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow \boxed{x = e}$$

Tenemos un punto crítico en $x = e$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 1$ y $x = e$.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.1$ y la derivada vale $f'(0.1) = \frac{\ln(0.1) - 1}{(\ln(0.1))^2} = -0.6 < 0$

. La función decrece en $(0,1)$.

- En el intervalo $(1,e)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{\ln(2) - 1}{(\ln(2))^2} = -0.6 < 0$. La

función decrece en $(1,e)$.

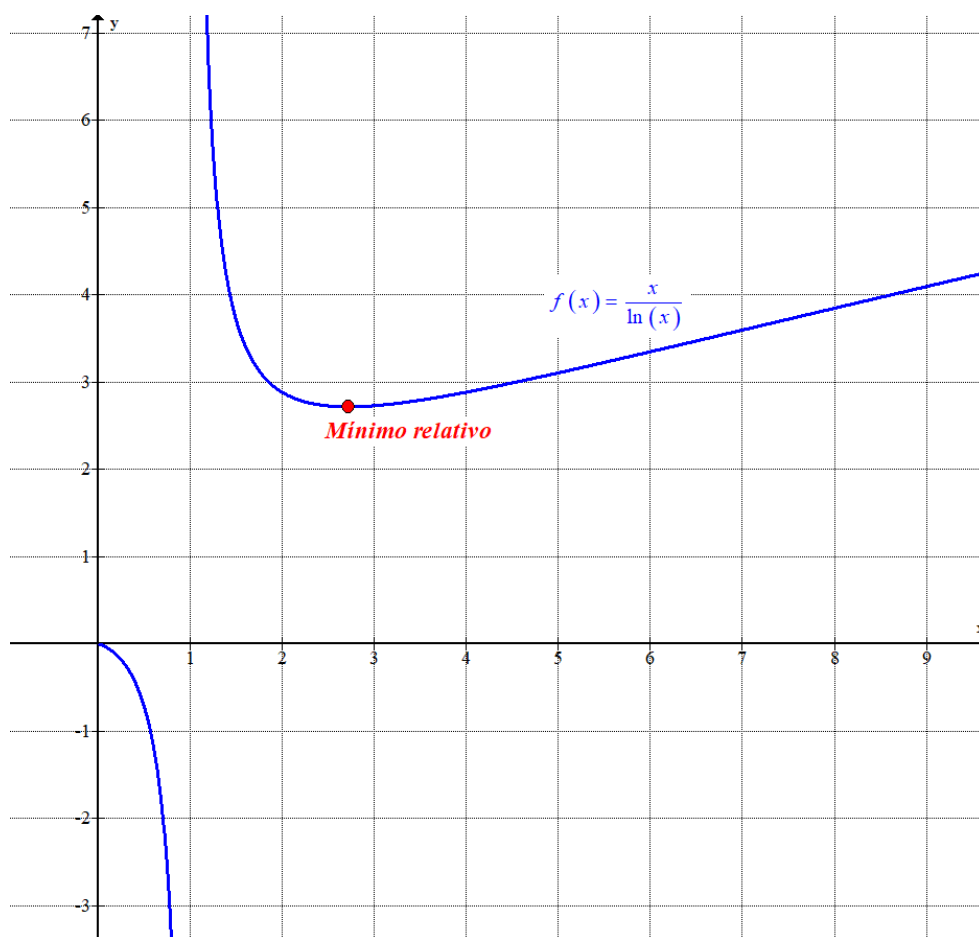
- En el intervalo $(e, +\infty)$ tomamos $x = e^2$ y la derivada vale $f'(e^2) = \frac{\ln(e^2) - 1}{(\ln(e^2))^2} = \frac{1}{4} > 0$.

La función crece en $(e, +\infty)$.

La función decrece en $(0,1) \cup (1,e)$ y crece en $(e, +\infty)$.

Como la función decrece antes de $x = e$ y crece después podemos afirmar que la función presenta un mínimo relativo en $x = e$.

Tenemos que $f(e) = \frac{e}{\ln(e)} = e$, por lo que las coordenadas del mínimo relativo son (e, e)



Pregunta 5.2. (2 puntos) Halle el valor real a tal que

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-a) \operatorname{sen}(3x) dx = \frac{2\pi}{9}$$

Resolvemos primero la integral indefinida utilizando el método de integración por partes.

$$\begin{aligned} \int (x-a) \operatorname{sen}(3x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x-a \rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(3x) dx \rightarrow v = \int \operatorname{sen}(3x) dx = \frac{1}{3}(-\cos(3x)) \end{array} \right\} = \\ &= (x-a) \frac{-\cos(3x)}{3} - \int \frac{-\cos(3x)}{3} dx = \frac{-(x-a)\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3} \int \cos(3x) dx = \\ &= \frac{(a-x)\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} = \frac{(a-x)\cos(3x)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{9} + K \end{aligned}$$

Resolvemos la integral definida planteada.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-a) \operatorname{sen}(3x) dx &= \left[\frac{(a-x)\cos(3x)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{9} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= \left[\frac{\left(a - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right)}{3} \right] - \left[\frac{(a-0)\cos(3 \cdot 0) + \operatorname{sen}(3 \cdot 0)}{3} \right] = \\ &= \frac{\left(a - \frac{\pi}{3}\right)\cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi)}{3} - \frac{a\cos(0) + \operatorname{sen}(0)}{3} = \frac{-\left(a - \frac{\pi}{3}\right)}{3} + \frac{0}{9} - \frac{a}{3} - \frac{0}{9} = \\ &= \frac{\frac{\pi}{3} - a}{3} - \frac{a}{3} = \frac{\pi - 3a}{9} - \frac{a}{3} = \frac{\pi - 3a - 3a}{9} = \boxed{\frac{\pi - 6a}{9}} \end{aligned}$$

Utilizamos el resultado obtenido para resolver la igualdad.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-a) \operatorname{sen}(3x) dx = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow \frac{\pi - 6a}{9} = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow \pi - 6a = 2\pi \Rightarrow -6a = \pi \Rightarrow \boxed{a = \frac{-\pi}{6}}$$

El valor que cumple la igualdad es $a = \frac{-\pi}{6}$.

PAU 2026 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2025-2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	B
---	---	-------------------------

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. Un virus estomacal presenta como síntomas diarreas y fiebres en un 95% de los infectados. En un momento de presión asistencial en la Comunidad de Madrid, 40 de cada mil habitantes están infectados por dicho virus. Por otro lado, un 0.5% de la población no infectada por el virus presenta los mismos síntomas por otras causas.

- (1 punto) Una persona tiene los síntomas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté infectado por el virus estomacal?
- (1 punto) Dadas dos personas que tienen los síntomas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas tenga el virus?

Pregunta 2. La potencia instantánea en el momento t , $P(t)$, es la derivada de la energía producida hasta el momento t . Una instalación fotovoltaica doméstica en un día despejado genera una potencia en kilowatios (kW) que se modeliza por la siguiente función con respecto a la hora del día $t \in [0, 24]$:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ 3 + 3\sin\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) & \text{si } 8 \leq t \leq 20 \\ 0 & \text{si } 20 < t < 24 \end{cases}$$

- (1 punto) Determine cuándo esa potencia aumenta y cuándo disminuye. ¿Cuál es el momento del día en que la instalación entrega su potencia máxima?
- (1 punto) Halle la energía producida a lo largo del día en kilowatios hora (kWh).

Pregunta 3. Sea S el conjunto formado por todas las matrices reales 2×2 triangulares superiores para las que el elemento que ocupa el lugar $(2, 2)$ de la matriz es la suma de los elementos de su primera fila, es decir,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

- a) (1 punto) Pruebe que si A y B son dos matrices cualesquiera del conjunto S , AB está en S .
- b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 - b1) Determine para qué valores de a y b las matrices de S son invertibles. Pruebe que si una matriz de S tiene inversa, esta es también una matriz de S .
 - b2) Calcule todas las matrices A de S tales que $A^2 = A$.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 4.1. Sean la recta $r \equiv (x, y, z) = (1+t, 1+t, 1+t)$, $t \in \mathbb{R}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$.

- a) (1 punto) Determine la posición relativa de la recta r y el plano π .
- b) (1 punto) Halle los puntos de la recta r que se encuentran a distancia $\sqrt{3}$ del plano π .

Pregunta 4.2. Sea la recta $r \equiv (x, y, z) = (t, 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Se pide:

- a) (1 punto) Hallar dos planos que se corten en la recta r , que formen entre sí un ángulo de 90° y uno de ellos pase por el punto $(0, 0, 1)$.
- b) (1 punto) Justificar que todas las rectas contenidas en los dos planos obtenidos en el apartado anterior que no tienen puntos en común con la recta r son necesariamente paralelas entre sí.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 5.1. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - a}$, donde a es un parámetro real.

- a) (1 punto) Halle el valor de a para que la gráfica de $f(x)$ presente una asíntota vertical en $x = 2$. Para dicho valor, estudie el resto de asíntotas de la gráfica.
- b) (1 punto) Obtenga los valores de a para los cuales la gráfica de la función no presenta asíntotas verticales.

Pregunta 5.2. (2 puntos) Para la función $f(x) = \sin(\pi|x^2 - 1|)$, calcule

$$\int_0^2 x f(x) dx$$

SOLUCIONES

Pregunta 1. Un virus estomacal presenta como síntomas diarreas y fiebres en un 95% de los infectados. En un momento de presión asistencial en la Comunidad de Madrid, 40 de cada mil habitantes están infectados por dicho virus. Por otro lado, un 0.5% de la población no infectada por el virus presenta los mismos síntomas por otras causas.

- a) (1 punto) Una persona tiene los síntomas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté infectado por el virus estomacal?
- b) (1 punto) Dadas dos personas que tienen los síntomas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas tenga el virus?

- a) Llamamos V a “la persona está infectada con un virus estomacal” y DF a “la persona presenta diarreas y fiebres”.

Obtenemos las probabilidades asociadas a la información proporcionada.

Un virus estomacal presenta como síntomas diarreas y fiebres en un 95% de los infectados

$$\rightarrow P(DF / V) = 0.95$$

En un momento de presión asistencial en la Comunidad de Madrid, 40 de cada mil

habitantes están infectados por dicho virus $\rightarrow P(V) = \frac{40}{1000} = 0.04$;

Un 0.5% de la población no infectada por el virus presenta los mismos síntomas por otras

$$\text{causas} \rightarrow P(DF / \bar{V}) = 0.005.$$

Nos piden calcular $P(V / DF)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(V / DF) &= \frac{P(V \cap DF)}{P(DF)} = \frac{P(V)P(DF / V)}{P(V)P(DF / V) + P(\bar{V})P(DF / \bar{V})} = \\ &= \frac{0.04 \cdot 0.95}{0.04 \cdot 0.95 + 0.96 \cdot 0.005} = \boxed{\frac{95}{107} \approx 0.8879} \end{aligned}$$

- b) Utilizamos el suceso contrario a “al menos una de las dos personas con síntomas tiene el virus” que es “ninguna de las dos personas con síntomas tiene el virus”.

La probabilidad de que ninguna de las dos personas con síntomas tiene el virus es el producto de la probabilidad de que una no lo tenga por la probabilidad de que la otra no lo tenga.

$$P(\text{al menos una de las dos personas con síntomas tiene el virus}) =$$

$$= 1 - P(\text{ninguna de las dos personas con síntomas tiene el virus}) =$$

$$= 1 - P(\bar{V} / DF)P(\bar{V} / DF) = 1 - \left(1 - \frac{95}{107}\right)\left(1 - \frac{95}{107}\right) = \boxed{0.9874}$$

Pregunta 2. La potencia instantánea en el momento t , $P(t)$, es la derivada de la energía producida hasta el momento t . Una instalación fotovoltaica doméstica en un día despejado genera una potencia en kilowatios (kW) que se modeliza por la siguiente función con respecto a la hora del día $t \in [0, 24]$:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ 3 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) & \text{si } 8 \leq t \leq 20 \\ 0 & \text{si } 20 < t < 24 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Determine cuándo esa potencia aumenta y cuándo disminuye. ¿Cuál es el momento del día en que la instalación entrega su potencia máxima?
 b) (1 punto) Halle la energía producida a lo largo del día en kilowatios hora (kWh).

a) Hallamos cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{aligned} P'(t) &= 3\frac{\pi}{8} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) \\ P'(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3\frac{\pi}{8} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{8}(t-12) = \frac{-3\pi}{2} \rightarrow t-12 = -12 \rightarrow t = 0 \notin [8, 20] \\ \frac{\pi}{8}(t-12) = \frac{-\pi}{2} \rightarrow t-12 = -4 \rightarrow t = 8 \in [8, 20] \\ \frac{\pi}{8}(t-12) = \frac{\pi}{2} \rightarrow t-12 = 4 \rightarrow t = 16 \in [8, 20] \\ \frac{\pi}{8}(t-12) = \frac{3\pi}{2} \rightarrow t-12 = 12 \rightarrow t = 24 \notin [8, 20] \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos: $t = 8$ y $t = 16$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(8, 16)$ tomamos $t = 12$ y la derivada vale

$$P'(12) = 3\frac{\pi}{8} \cos\left(\frac{\pi}{8}(12-12)\right) = \frac{3\pi}{8} > 0. \text{ La función crece en } (8, 16).$$

- En el intervalo $(16, 20]$ tomamos $t = 18$ y la derivada vale

$$P'(18) = 3\frac{\pi}{8} \cos\left(\frac{\pi}{8}(18-12)\right) = \frac{3\pi}{8} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0. \text{ La función decrece en } (16, 20].$$

La potencia aumenta en el intervalo $[8, 16)$ y disminuye en $(16, 20]$.

La potencia máxima se entrega a las 16 horas. Siendo esta potencia máxima de

$$3 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}(16-12)\right) = 3 + 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 6 \text{ kW.}$$

- b) La energía producida hasta el momento t es la integral definida de 0 a t de la potencia.

$$E(t) = \int_0^t P(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ \int_8^t 3 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) dx & \text{si } 8 \leq t \leq 20 \\ \int_8^{20} 3 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) dx & \text{si } 20 < t < 24 \end{cases}$$

Empezamos calculando la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int 3 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) dx &= 3x + 3 \int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) dx = \\ &= 3x + 3 \frac{8}{\pi} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) \right) = 3x - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) + K \end{aligned}$$

Obtenemos la expresión de las integrales definidas.

$$\begin{aligned} \int_8^t 3 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) dx &= \left[3x - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) \right]_8^t = \\ &= \left[3t - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) \right] - \left[3 \cdot 8 - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(8-12)\right) \right] = \\ &= 3t - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) - 24 + \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \boxed{-24 + 3t - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right)} \\ \int_8^{20} 3 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}(x-12)\right) dx &= -24 + 3 \cdot 20 - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(20-12)\right) = \\ &= -24 + 60 - \frac{24}{\pi} \cos(\pi) = \boxed{36 + \frac{24}{\pi}} \end{aligned}$$

La función queda $E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ -24 + 3t - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) & \text{si } 8 \leq t \leq 20 \\ 36 + \frac{24}{\pi} & \text{si } 20 < t < 24 \end{cases}$

Pregunta 3. Sea S el conjunto formado por todas las matrices reales 2×2 triangulares superiores para las que el elemento que ocupa el lugar (2, 2) de la matriz es la suma de los elementos de su primera fila, es decir,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

a) (1 punto) Pruebe que si A y B son dos matrices cualesquiera del conjunto S, AB está en S.

b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**

b1) Determine para qué valores de a y b las matrices de S son invertibles. Pruebe que si una matriz de S tiene inversa, esta es también una matriz de S.

b2) Calcule todas las matrices A de S tales que $A^2 = A$.

a) Consideramos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c+d \end{pmatrix}$. Obtenemos la expresión de AB.

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+b(c+d) \\ 0 & (a+b)(c+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+bc+bd \\ 0 & ac+ad+bc+bd \end{pmatrix}$$

La matriz AB es triangular superior y el elemento que ocupa el lugar (2, 2) de la matriz es la suma de los elementos de su primera fila. La matriz AB está en S.

b1) La matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{vmatrix} = a(a+b) \quad |A| = 0 \Rightarrow a(a+b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ 0 \\ a+b=0 \end{cases}$$

Las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ de S son invertibles cuando $a \neq 0$ y $a+b \neq 0$.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ es una matriz de S invertible entonces $a \neq 0$ y $a+b \neq 0$. Hallamos su inversa.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a+b \end{pmatrix}}{a(a+b)} = \frac{1}{a(a+b)} \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{a(a+b)} \\ 0 & \frac{1}{a+b} \end{pmatrix}$$

La matriz A^{-1} es triangular superior. Comprobamos que la suma de los elementos de la primera fila nos da como resultado el elemento que ocupa la 2ª fila y 2ª columna.

$$\frac{1}{a} + \frac{-b}{a(a+b)} = \frac{a+b-b}{a(a+b)} = \frac{a}{a(a+b)} = \frac{1}{a+b}$$

Se cumple la igualdad y la matriz A^{-1} es una matriz de S.

b2) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ vemos cuando $A^2 = A$.

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab+b(a+b) \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ ab+b(a+b) = b \\ (a+b)^2 = a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \rightarrow a^2 - a = 0 \rightarrow a(a-1) = 0 \\ b(2a+b) = b \rightarrow b(2a+b-1) = 0 \\ (a+b)^2 - (a+b) = 0 \rightarrow (a+b)(a+b-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ o \\ a=1 \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ o \\ 2a+b=1 \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ o \\ a+b=1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } a=0 \rightarrow \begin{cases} \rightarrow a=0 \\ \begin{cases} b=0 \\ o \\ b=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{a=b=0} \\ o \\ \boxed{a=0; b=1} \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ o \\ b=1 \end{cases} \end{cases} \\ \text{Si } a=1 \rightarrow \begin{cases} \rightarrow a=1 \\ \begin{cases} b=0 \\ o \\ b=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{a=1, b=0} \\ o \\ \boxed{a=1; b=-1} \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ o \\ b=0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Las matrices de S que cumplen $A^2 = A$ son cuatro:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 4.1. Sean la recta $r \equiv (x, y, z) = (1+t, 1+t, 1+t)$, $t \in \mathbb{R}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$.

a) (1 punto) Determine la posición relativa de la recta r y el plano π .

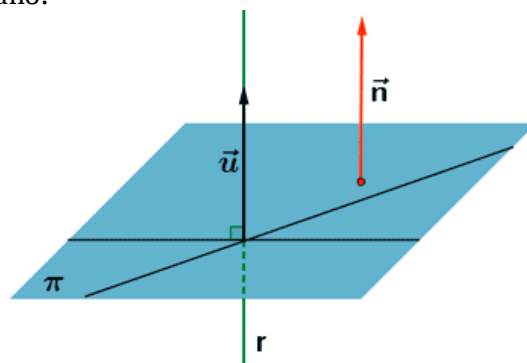
b) (1 punto) Halle los puntos de la recta r que se encuentran a distancia $\sqrt{3}$ del plano π .

a) Obtenemos un vector director de la recta y un vector normal del plano.

$$r \equiv (x, y, z) = (1+t, 1+t, 1+t) \Rightarrow \vec{u}_r = (1, 1, 1)$$

$$\pi \equiv x + y + z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1)$$

El vector director de la recta y el normal del plano son el mismo. La recta corta perpendicularmente el plano.



b) Determinamos la expresión de la distancia de un punto de la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z = 0 \\ r \equiv (x, y, z) = (1+t, 1+t, 1+t) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P_r, \pi) = \frac{|1+t+1+t+1+t|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|3+3t|}{\sqrt{3}}$$

Averiguamos el valor de t para que la distancia valga $\sqrt{3}$.

$$d(P_r, \pi) = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{|3+3t|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow |3+3t| = (\sqrt{3})^2 = 3 \Rightarrow$$

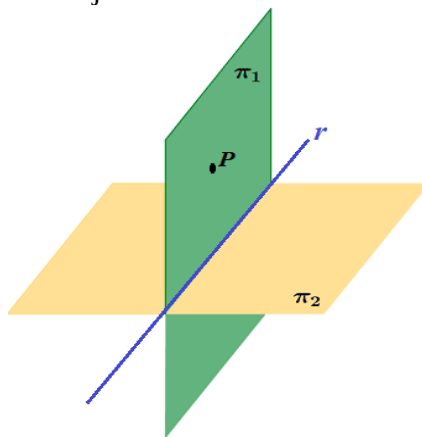
$$\Rightarrow \begin{cases} 3+3t = 3 \rightarrow 3t = 0 \rightarrow t = 0 \rightarrow \boxed{P_r(1, 1, 1)} \\ 3+3t = -3 \rightarrow 3t = -6 \rightarrow t = -2 \rightarrow \boxed{Q_r(-1, -1, -1)} \end{cases}$$

En la recta r hay dos puntos a una distancia $\sqrt{3}$ de π : $P_r(1, 1, 1)$ y $Q_r(-1, -1, -1)$.

Pregunta 4.2. Sea la recta $r \equiv (x, y, z) = (t, 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Se pide:

- a) (1 punto) Hallar dos planos que se corten en la recta r , que formen entre sí un ángulo de 90° y uno de ellos pase por el punto $(0, 0, 1)$.
 b) (1 punto) Justificar que todas las rectas contenidas en los dos planos obtenidos en el apartado anterior que no tienen puntos en común con la recta r son necesariamente paralelas entre sí.

a) La situación planteada es la del dibujo.



Hallamos la ecuación del plano π_1 que contiene la recta r y pasa por el punto $P(0,0,1)$. Este plano tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta. Otro vector director del plano es el vector que une el punto P con un punto Q_r de la recta.

$$r \equiv (x, y, z) = (t, 1, t) \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 0, 1) \\ Q_r(0, 1, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \overrightarrow{PQ_r} = (0, 1, 0) - (0, 0, 1) = (0, 1, -1) \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (1, 0, 1) \\ P(0, 0, 1) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y + 0 - z + 1 - 0 - 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_1 : x - y - z + 1 = 0}$$

El plano de ecuación $\pi_1 : x - y - z + 1 = 0$ contiene a la recta r y pasa por el punto $(0, 0, 1)$.

Hallamos el segundo plano π_2 que contiene la recta r y debe ser perpendicular al plano π_1 . Este plano tiene el vector director de la recta como un vector director del plano y otro vector director del plano es el vector normal del plano π_1 .

$$\pi_1 : x - y - z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, -1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{n}_1 = (1, -1, -1) \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (1, 0, 1) \\ Q_r(0, 1, 0) \in \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

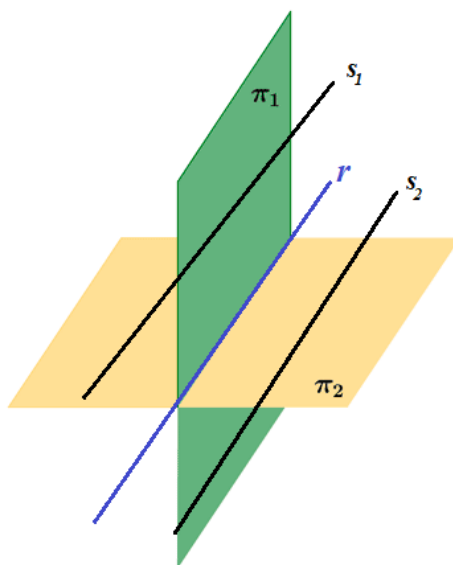
$$\Rightarrow -x - y + 1 + 0 + z - y + 1 - 0 = 0 \Rightarrow -x - 2y + z + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_2 : x + 2y - z - 2 = 0}$$

Los planos que se cortan en la recta r , que formen entre sí un ángulo de 90° y uno de ellos pasa por el punto $(0, 0, 1)$ son $\pi_1 : x - y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 : x + 2y - z - 2 = 0$.

b) Una recta s_1 contenida en el plano π_1 que no corte la recta r debe ser paralela a dicha recta, por lo que un vector director de la recta s_1 es $\vec{u}_r = (1, 0, 1)$.

Una recta s_2 contenida en el plano π_2 que no corte la recta r debe ser paralela a dicha recta, por lo que un vector director de la recta s_2 es $\vec{u}_r = (1, 0, 1)$.

Las rectas s_1 y s_2 tienen el mismo vector director $\vec{u}_r = (1, 0, 1)$, por lo que son paralelas.



Pregunta 5.1. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - a}$, donde a es un parámetro real.

- a) (1 punto) Halle el valor de a para que la gráfica de $f(x)$ presente una asíntota vertical en $x = 2$. Para dicho valor, estudie el resto de asíntotas de la gráfica.
 b) (1 punto) Obtenga los valores de a para los cuales la gráfica de la función no presenta asíntotas verticales.

- a) Para que la gráfica de $f(x)$ presente una asíntota vertical en $x = 2$ el denominador de la función debe anularse para este valor.

$$3 \cdot 2 - a = 0 \Rightarrow 6 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

Para $a = 6$ se cumple lo pedido. La función queda $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 6}$. Comprobamos que la recta $x = 3$ es asíntota vertical y estudiamos el resto de asíntotas.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{3x - 6} = \frac{2^2 - 1}{3 \cdot 2 - 6} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{3x}{x^2} - \frac{6}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x} - \frac{6}{x^2}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{\frac{3}{\infty} - \frac{6}{\infty}} = \frac{1}{0} = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{3x - 6}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{6x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{6}{x}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{3 - \frac{6}{\infty}} = \frac{1}{3}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{3x - 6} - \frac{x}{3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1 - x^2 + 2x}{3x - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{3x - 6} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{3x}{x} - \frac{6}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{3 - \frac{6}{x}} = \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{3 - \frac{6}{\infty}} = \frac{2}{3}$$

La recta $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ es asíntota oblicua de la función.

- b) Para que la función no tenga asíntota vertical debe poder simplificarse la expresión racional.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - a} = \frac{(x-1)(x+1)}{3x - a}$$

Para poder simplificarse debe anularse el denominador para $x=1$ o para $x=-1$.

$$x = -1 \Rightarrow 3(-1) - a = 0 \Rightarrow -3 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

$$x = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 - a = 0 \Rightarrow 3 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

Para $a = -3$ o $a = 3$ la función no tiene asíntota vertical.

Si $a = -3$ la función queda $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x + 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{3(x+1)} = \frac{1}{3}(x-1)$. Esta función es una recta y no tiene asíntota vertical.

Si $a = 3$ la función queda $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{3(x-1)} = \frac{1}{3}(x+1)$. Esta función es una recta y no tiene asíntota vertical.

Pregunta 5.2. (2 puntos) Para la función $f(x) = \sin(\pi|x^2 - 1|)$, calcule

$$\int_0^2 xf(x) dx$$

Obtenemos la expresión como función a trozos de la función $f(x) = \sin(\pi|x^2 - 1|)$.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Si tomamos un valor menor que -1 , por ejemplo $x = -2$ tenemos que $(-2)^2 - 1 > 0$.

Si tomamos un valor entre -1 y 1 , por ejemplo $x = 0$ tenemos que $0^2 - 1 < 0$.

Si tomamos un valor mayor que 1 , por ejemplo $x = 2$ tenemos que $2^2 - 1 > 0$.

La función quedaría $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi(x^2 - 1)) & \text{si } x < -1 \\ \sin(\pi(1 - x^2)) & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \sin(\pi(x^2 - 1)) & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Resolvemos primero la integral indefinida utilizando un cambio de variable.

$$\int xf(x) dx = \int x \sin(\pi(x^2 - 1)) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x^2 - 1 = t \Rightarrow 2x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right\} = \int x \sin(\pi t) \frac{dt}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin(\pi t) dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} (-\cos(\pi t)) = \frac{-\cos(\pi(x^2 - 1))}{2\pi} + K$$

Al intervalo $[0, 2]$ pertenece $x = 1$, que es un punto donde se produce un cambio de definición de la función, por lo que calculamos la integral definida como la suma de la integral definida de 0 a 1 más la integral definida de 1 a 2 .

Resolvemos la integral definida planteada.

$$\begin{aligned} \int_0^2 xf(x) dx &= \int_0^1 xf(x) dx + \int_1^2 xf(x) dx = \int_0^1 x \sin(\pi(1 - x^2)) dx + \int_1^2 x \sin(\pi(x^2 - 1)) dx = \\ &= -\int_0^1 x \sin(\pi(x^2 - 1)) dx + \int_1^2 x \sin(\pi(x^2 - 1)) dx = \\ &= \left[\frac{\cos(\pi(x^2 - 1))}{2\pi} \right]_0^1 + \left[\frac{-\cos(\pi(x^2 - 1))}{2\pi} \right]_1^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{\cos(\pi(1^2-1))}{2\pi} \right] - \left[\frac{\cos(\pi(0^2-1))}{2\pi} \right] + \left[\frac{-\cos(\pi(2^2-1))}{2\pi} \right] - \left[\frac{-\cos(\pi(1^2-1))}{2\pi} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} - \frac{\cos(-\pi)}{2\pi} + \frac{-\cos(3\pi)}{2\pi} - \frac{-1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = \boxed{\frac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

PAU 2026 Ordinaria Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2025-2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto) Discutir el rango de A en función del parámetro λ .
- (1 punto) Para el caso $\lambda = 2$, resolver la ecuación matricial $A^2 - AX = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Pregunta 2. (2 puntos) Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa.

Alicatar la parte cubierta cuesta 30 €/m² y la parte no techada, 50 €/m² pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.

Pregunta 3. Dados el plano $\pi : 2x + 2y - z = 13$ y la recta

$$r : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

- (1 punto) Halle el punto simétrico del punto $P(2, 0, 0)$ respecto al plano π .
- (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 - Halle la distancia entre el plano π y la recta r .
 - Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π .

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 4.1. El proveedor de una fábrica de móviles proporciona baterías cuya duración sigue una distribución normal con media $\mu = 24$ horas y desviación típica $\sigma = 3$ horas. A efectos de control de calidad, se considera que una batería es defectuosa si su duración es inferior a 21 horas.

- (1 punto) Se elige un teléfono al azar de la línea de producción. Calcule la probabilidad de que su batería sea considerada defectuosa.
- (1 punto) Un distribuidor recibe un lote de 10 teléfonos. Suponiendo independencia entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa?

Pregunta 4.2. Sabiendo que $P(B) = 0.4$, $P(\overline{A \cup B}) = 0.4$ y $P(B|A) = 0.2$, calcule las siguientes probabilidades:

- a) (1 punto) $P(\overline{A})$ y $P(A \cap B)$.
 b) (1 punto) $P((A \cap B) | (A \cup B))$.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

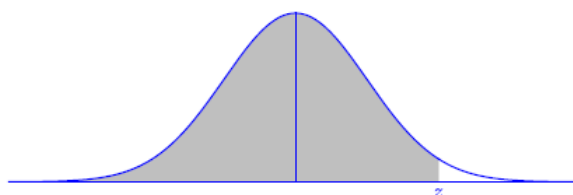
Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea $f(x) = \ln(x)$. Halle el área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$.

Pregunta 5.2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \operatorname{sen}(ax) + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$
 b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

Pregunta 1. Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1 punto) Discutir el rango de A en función del parámetro λ .
 b) (1 punto) Para el caso $\lambda = 2$, resolver la ecuación matricial $A^2 - AX = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

- a) La matriz A es una matriz cuadrada de orden 3 y su rango puede ser 3, 2 o 1.
 Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (\lambda - 2)(\lambda - 1) + 0 - \lambda - 0 - 0 =$$

$$= 1 + \lambda^2 - \lambda - 2\lambda + 2 - \lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3 = \lambda} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1 = \lambda} \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq 1$

En este caso el determinante de A es distinto de cero y el rango de A es 3.

CASO 2. $\lambda = 3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar

la fila y columna terceras tenemos que su determinante vale $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

CASO 3. $\lambda = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de

quitar la fila y columna terceras tenemos que su determinante vale $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

Conclusión: Para $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq 1$ el rango de A es 3 y para $\lambda = 1$ o $\lambda = 3$ el rango es 2.

b) Para $\lambda = 2$ sabemos que el determinante de A es distinto de cero y por tanto la matriz A tiene inversa. Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A^2 - AX = I \Rightarrow A^2 - I = AX \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot A - A^{-1} \cdot I = A^{-1}AX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I \cdot A - A^{-1} = I \cdot X \Rightarrow \boxed{A - A^{-1} = X}$$

Hallamos la inversa de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2-2 & 2 \\ 0 & 1 & 2-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 2 - 0 - 0 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1-2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz X.

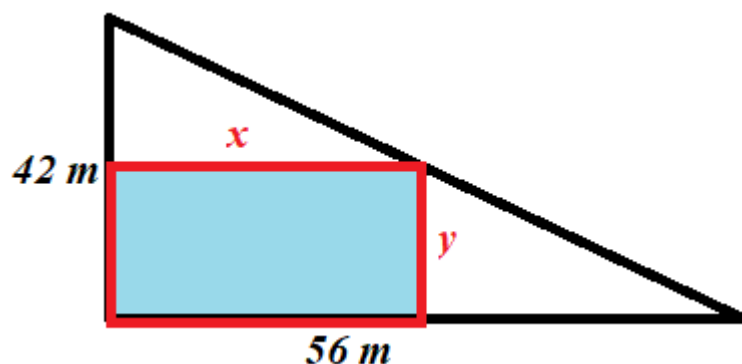
$$X = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pregunta 2. (2 puntos) Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa.

Alicatar la parte cubierta cuesta 30 €/m² y la parte no techada, 50 €/m² pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.

Dibujamos la situación planteada.

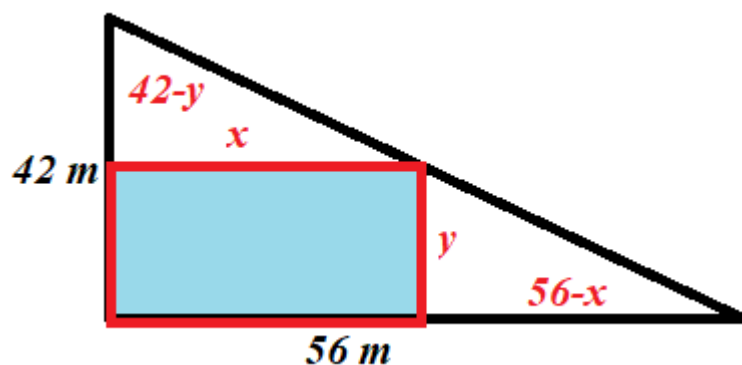


El área del rectángulo techado es $x \cdot y$ metros cuadrados y el coste de su alicatado es $30x \cdot y$ euros.

El resto tiene un área de $\frac{42 \cdot 56}{2} - xy = 1176 - xy$ metros cuadrados y el coste de su alicatado es $50 \cdot 1176 - 50xy = 58800 - 50xy$ euros.

El coste total del alicatado es $C(x, y) = 30xy + 58800 - 50xy = 58800 - 20xy$ euros.

Buscamos la relación entre x e y . Los triángulos rectángulos pequeños son semejantes.



Se cumple que los catetos tienen longitudes proporcionales.

$$\frac{42-y}{y} = \frac{x}{56-x} \Rightarrow (42-y)(56-x) = xy \Rightarrow 2352 - 56y + \cancel{xy} - 42x = \cancel{xy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -56y = 42x - 2352 \Rightarrow y = \frac{2352}{56} - \frac{42}{56}x \Rightarrow y = 42 - \frac{3}{4}x$$

Obtenemos la expresión del coste total del alicatado del jardín.

$$\left. \begin{array}{l} y = 42 - \frac{3}{4}x \\ C(x, y) = 58800 - 20xy \end{array} \right\} \Rightarrow C(x) = 58800 - 20x \left(42 - \frac{3}{4}x \right) = 58800 - 840x + 15x^2$$

El coste del alicatado es $C(x) = 15x^2 - 840x + 58800$ euros.

Calculamos su derivada y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$C(x) = 15x^2 - 840x + 58800 \Rightarrow C'(x) = 30x - 840$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 30x - 840 = 0 \Rightarrow 30x = 840 \Rightarrow x = \frac{840}{30} = 28$$

Sustituimos $x = 28$ en la segunda derivada.

$$C'(x) = 30x - 840 \Rightarrow C''(x) = 30 \Rightarrow C''(28) = 30 > 0$$

Para $x = 28$ se anula la primera derivada y la segunda derivada es positiva, por lo que la función presenta un valor mínimo para $x = 28$.

Para este valor el otro lado de la zona techada vale $y = 42 - \frac{3}{4} \cdot 28 = 21$.

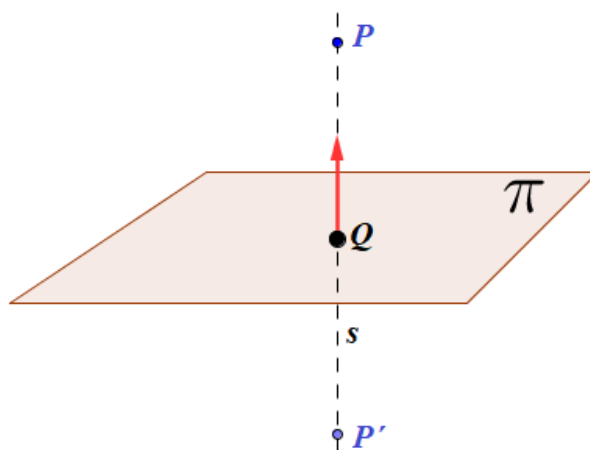
Las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo son 28 metros en el lado largo y 21 en el lado corto, es decir, a la mitad de cada lado.

Pregunta 3. Dados el plano $\pi : 2x + 2y - z = 13$ y la recta

$$r : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

- a) (1 punto) Halle el punto simétrico del punto $P(2, 0, 0)$ respecto al plano π .
 b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 b1) Halle la distancia entre el plano π y la recta r .
 b2) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π .

- a) Hallamos el punto simétrico P' del punto P respecto del plano determinando primero la recta s perpendicular al plano que pasa por P .



$$\pi : 2x + 2y - z = 13 \Rightarrow \vec{n} = (2, 2, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(2, 0, 0) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{n} = (2, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta s y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} s : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \\ \pi : 2x + 2y - z = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(2 + 2\lambda) + 2 \cdot 2\lambda - (-\lambda) = 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 4\lambda + 4\lambda + \lambda = 13 \Rightarrow 9\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 \cdot 1 = 4 \\ y = 2 \cdot 1 = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(4, 2, -1)}$$

El punto P' es el resultado de sumarle al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (4, 2, -1) - (2, 0, 0) = (2, 2, -1)$$

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = (4, 2, -1) + (2, 2, -1) = (6, 4, -2)$$

El punto simétrico del punto $P(2, 0, 0)$ respecto al plano π tiene coordenadas $P'(6, 4, -2)$.

b1) Determinamos la posición relativa de la recta r y el plano π .

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 4)$$

$$\pi: 2x + 2y - z = 13 \Rightarrow \vec{n} = (2, 2, -1)$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1, 1, 4) \cdot (2, 2, -1) = 2 + 2 - 4 = 0$$

Al ser nulo el producto escalar del vector normal del plano y el director de la recta podemos afirmar que la recta es paralela o está contenida en el plano.

La distancia de la recta al plano es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4} \Rightarrow P_r(2, 0, 0) \\ \pi: 2x + 2y - z - 13 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 0 - 13|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \boxed{3u}$$

La distancia tiene un valor de 3 unidades.

b2) El plano π' que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal del plano. También contiene al punto $P_r(2, 0, 0)$ de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} P_r(2, 0, 0) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (1, 1, 4) \\ \vec{v} = \vec{n} = (2, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(x-2) + 8y + 2z - 2z + y - 8(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 2 + 8y + 2z - 2z + y - 8x + 16 = 0 \Rightarrow -9x + 9y + 18 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x - y - 2 = 0}$$

La ecuación del plano buscado es $\pi': x - y - 2 = 0$.

Pregunta 4.1. El proveedor de una fábrica de móviles proporciona baterías cuya duración sigue una distribución normal con media $\mu = 24$ horas y desviación típica $\sigma = 3$ horas. A efectos de control de calidad, se considera que una batería es defectuosa si su duración es inferior a 21 horas.

- a) (1 punto) Se elige un teléfono al azar de la línea de producción. Calcule la probabilidad de que su batería sea considerada defectuosa.
- b) (1 punto) Un distribuidor recibe un lote de 10 teléfonos. Suponiendo independencia entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa?

a) $X =$ Duración en horas de una batería. $X = N(24, 3)$.

La batería es defectuosa si $X < 21$. Nos piden calcular $P(X < 21)$.

$$P(X < 21) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 24}{3} \end{array} \right\} = P\left(Z < \frac{21 - 24}{3}\right) = P(Z < -1) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

z	0.00	0
0.0	0.5000	0
0.1	0.5398	0
0.2	0.5793	0
0.3	0.6179	0
0.4	0.6554	0
0.5	0.6915	0
0.6	0.7257	0
0.7	0.7580	0
0.8	0.7881	0
0.9	0.8159	0
1.0	0.8413	0

La probabilidad de que una batería sea defectuosa es de 0.1587.

- b) La probabilidad de que un teléfono tenga una batería no defectuosa vale $1 - 0.1587 = 0.8413$. Consideramos la variable aleatoria Y que cuenta el número de teléfonos con la batería no defectuosa de un grupo de 10. Esta variable es una binomial de parámetros $n =$ número de repeticiones $= 10$ y $p =$ probabilidad de que un teléfono tenga una batería no defectuosa $= 0.8413$. $Y = B(10, 0.8413)$

Nos piden calcular $P(Y \geq 9)$.

$$P(Y \geq 9) = P(Y = 9) + P(Y = 10) = \binom{10}{9} 0.8413^9 \cdot 0.1587^1 + \binom{10}{10} 0.8413^{10} \cdot 0.1587^0 =$$

$$= 10 \cdot 0.8413^9 \cdot 0.1587 + 0.8413^{10} \approx \boxed{0.5127}$$

La probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa tiene un valor de 0.5127.

Pregunta 4.2. Sabiendo que $P(B) = 0.4$, $P(\overline{A \cup B}) = 0.4$ y $P(B|A) = 0.2$, calcule las siguientes probabilidades:

a) (1 punto) $P(\overline{A})$ y $P(A \cap B)$.

b) (1 punto) $P((A \cap B) | (A \cup B))$.

a) Obtenemos las probabilidades pedidas.

$$P(B|A) = 0.2 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.2 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.2 \cdot P(A)$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 0.4 \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

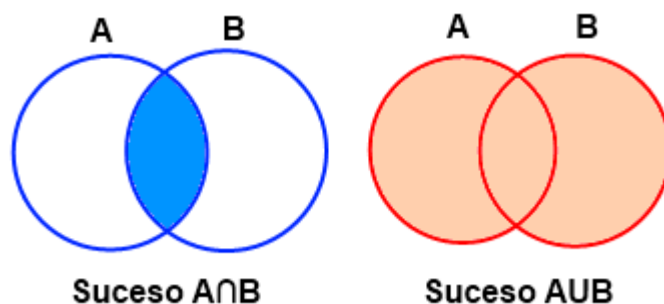
$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(B) = 0.4 \\ P(A \cup B) = 0.6 \\ P(A \cap B) = 0.2 \cdot P(A) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.6 = P(A) + 0.4 - 0.2 \cdot P(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.8 \cdot P(A) = 0.6 - 0.4 = 0.2 \Rightarrow P(A) = \frac{0.2}{0.8} = \frac{1}{4} = 0.25 \Rightarrow \begin{cases} P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.75 \\ P(A \cap B) = 0.2 \cdot P(A) = 0.05 \end{cases}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P((A \cap B) | (A \cup B)) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0.05}{0.6} = \frac{1}{12} \approx 0.0833$$

Hemos utilizado que $A \cap B$ está contenido en $A \cup B$ y por tanto $(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$



Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea $f(x) = \ln(x)$. Halle el área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$.

Hallamos los posibles puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln(x) \\ \text{Eje abscisas} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

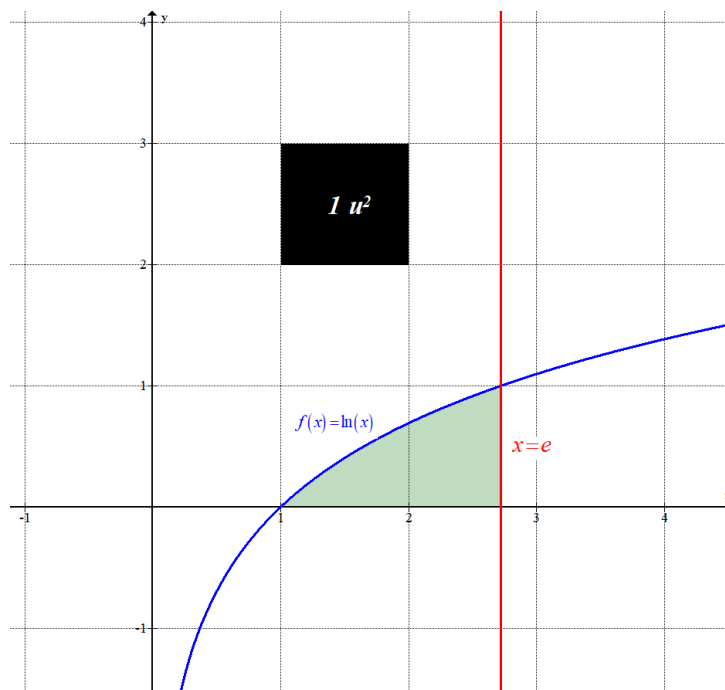
El área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$ es el valor de la integral definida de 1 a e de $f(x) = \ln(x)$.

$$\text{Área} = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \ln(x) dx = \dots$$

$$\int \ln(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int dx = x \ln(x) - x + K$$

$$\dots = [x \ln(x) - x]_1^e = [e \cdot \ln(e) - e] - [1 \cdot \ln(1) - 1] = e \cdot 1 - e - 1 \cdot 0 + 1 = \boxed{1 u^2}$$

Dibujamos la región del plano de la que hemos hallado el área.



Pregunta 5.2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \operatorname{sen}(ax) + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

- a) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$
 b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

a) Para que la función sea continua deben coincidir el valor de la función con los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{2e^0}{1+0^2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^x}{1+x^2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 - \operatorname{sen}(ax) + b = 3 \cdot 0^2 - \operatorname{sen}(a \cdot 0) + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b=2}$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \operatorname{sen}(ax) + 2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Esta función es derivable en

$$\mathbb{R} - \{0\} \text{ siendo su derivada } f'(x) = \begin{cases} 6x - a \cdot \cos(ax) & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x(1+x^2) - 2x \cdot 2e^x}{(1+x^2)^2} = \frac{2e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ deben coincidir sus derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 6x - a \cdot \cos(ax) = 6 \cdot 0 - a \cdot \cos(a \cdot 0) = -a \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2e^0(1-2 \cdot 0 + 0^2)}{(1+0^2)^2} = 2 \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a = 2 \Rightarrow \boxed{a=-2}$$

Los valores buscados son $a = -2$ y $b = 2$.

- b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \frac{2e^2}{1+2^2} = \frac{2}{5}e^2 \\ f'(2) &= \frac{2e^2(1-2 \cdot 2 + 2^2)}{(1+2^2)^2} = \frac{2e^2}{25} \\ y - f(2) &= f'(2)(x - 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{2}{5}e^2 = \frac{2e^2}{25}(x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - \frac{2}{5}e^2 = \frac{2e^2}{25}x - \frac{4e^2}{25} \Rightarrow y = \frac{2e^2}{25}x - \frac{4e^2}{25} + \frac{2}{5}e^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2e^2}{25}x - \frac{4e^2}{25} + \frac{10e^2}{25} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2e^2}{25}x + \frac{6e^2}{25}}$$

La recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$ tiene ecuación

$$y = \frac{2e^2}{25}x + \frac{6e^2}{25}.$$

PAU 2026 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2025-2026 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	---	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. (2 puntos) La NFL es la principal liga profesional de fútbol americano de los Estados Unidos. En un partido de la NFL se pueden anotar puntos de diversas formas, siendo las más comunes las siguientes: touchdown, field goal y extra point al que solo se puede optar después de anotar un touchdown. Según la normativa de la liga, un touchdown vale 6 puntos, un field goal 3 puntos y un extra point 1 punto.

De uno de los dos equipos de un partido finalizado de la NFL se sabe que solo ha conseguido puntos mediante touchdown, field goal y extra point. Además se sabe que:

- Ha anotado 63 puntos.
- El doble de field goals anotados coincidió con el número de touchdowns conseguidos.
- La suma del número de touchdowns y field goals anotados fue cuatro veces el número de extra points conseguidos.

Halle el número de touchdowns, field goals y extra points anotados por el equipo.

Pregunta 2. Dada la función real de variable real $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$, se pide:

- (1 punto) Hallar dónde se alcanzan los máximos y mínimos relativos de $f(x)$, así como sus correspondientes valores.
- (1 punto) Calcular el área del recinto delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x=3$ y $x=6$.

Pregunta 3. Sea r la recta que pasa por $A(1, 2, -5)$ y $B(2, 4, -11)$, sea s la recta dada por la intersección de los planos $x - 2y + 3z = 3$, $x - y = 0$, y sea t la recta paralela a s que pasa por $C(1, 0, 0)$.

- (1 punto) Determine la posición relativa de r y s .
- (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 - Halle la distancia entre s y t .
 - Halle el coseno del ángulo que forman r y s .

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 4.1. Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio que verifican $P(\bar{A}) = 0.6$, $P(A \cup B) = 0.75$ y $P(B/A) = 0.375$. Se pide:

- a) (1 punto) Calcular $P(B)$.
- b) (1 punto) Calcular $P(\bar{A}/B)$.

Pregunta 4.2. En los barrios de Tokio se considera el reciclaje y la clasificación de la basura una obligación ciudadana. Si no se clasifican los residuos de forma correcta para que sean retirados por la empresa de recogida de basuras, estos no son recogidos y el barrio puede ser penalizado por el ayuntamiento. En el barrio de Ueno, el 82.5% de los hogares realizan esta tarea de forma adecuada.

- a) (1 punto) Se analizan los residuos de diez hogares de este barrio. Calcule la probabilidad de que a lo sumo uno de ellos no clasifique correctamente sus residuos.
- b) (1 punto) El ayuntamiento selecciona una muestra aleatoria de 200 hogares en este barrio y si el porcentaje de familias que comete errores en la clasificación de sus residuos es superior o igual al 10%, el barrio es penalizado. Calcule, aproximando por una distribución normal adecuada, la probabilidad de que los vecinos de Ueno no sean sancionados.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

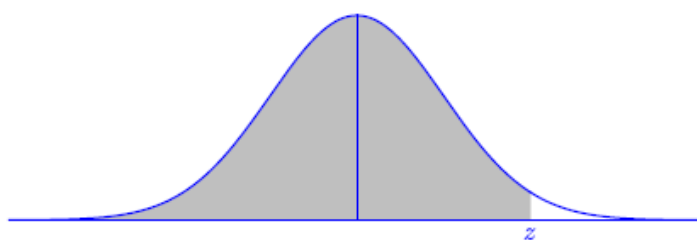
Pregunta 5.1. Sea la función $f(x) = x^2 + bx$.

- a) (1 punto) Determine los valores de b para que la recta $y = x - 1$ sea tangente a la gráfica de la función $f(x)$.
- b) (1 punto) ¿Es cierto que para cualquier valor de b existe una recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ que sea paralela a la recta $y = x - 1$? Justifique la respuesta.

Pregunta 5.2. Calcule los siguientes límites:

- a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$
- b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

Pregunta 1. (2 puntos) La NFL es la principal liga profesional de fútbol americano de los Estados Unidos. En un partido de la NFL se pueden anotar puntos de diversas formas, siendo las más comunes las siguientes: touchdown, field goal y extra point al que solo se puede optar después de anotar un touchdown. Según la normativa de la liga, un touchdown vale 6 puntos, un field goal 3 puntos y un extra point 1 punto.

De uno de los dos equipos de un partido finalizado de la NFL se sabe que solo ha conseguido puntos mediante touchdown, field goal y extra point. Además se sabe que:

- Ha anotado 63 puntos.
- El doble de field goals anotados coincidió con el número de touchdowns conseguidos.
- La suma del número de touchdowns y field goals anotados fue cuatro veces el número de extra points conseguidos.

Halle el número de touchdowns, field goals y extra points anotados por el equipo.

Llamamos “x” al número de touchdowns anotados, “y” al número de field goals y “z” al número de extra points. Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada.

Un touchdown vale 6 puntos, un field goal 3 puntos y un extra point 1 punto. Ha anotado 63 puntos $\rightarrow 6x + 3y + z = 63$.

El doble de field goals anotados coincidió con el número de touchdowns conseguidos $\rightarrow 2y = x$

La suma del número de touchdowns y field goals anotados fue cuatro veces el número de extra points conseguidos $\rightarrow x + y = 4z$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 3y + z = 63 \\ 2y = x \\ x + y = 4z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6 \cdot 2y + 3y + z = 63 \\ 2y + y = 4z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 15y + z = 63 \\ 3y = 4z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 63 - 15y \\ 3y = 4z \end{array} \right\} \Rightarrow 3y = 4(63 - 15y) \Rightarrow 3y = 252 - 60y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 63y = 252 \Rightarrow \boxed{y = \frac{252}{63} = 4} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{z = 63 - 15 \cdot 4 = 3} \\ \boxed{x = 2 \cdot 4 = 8} \end{array} \right.$$

El equipo ha anotado 8 touchdowns, 4 field goals y 3 extra points.

Pregunta 2. Dada la función real de variable real $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar dónde se alcanzan los máximos y mínimos relativos de $f(x)$, así como sus correspondientes valores.
 b) (1 punto) Calcular el área del recinto delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x=3$ y $x=6$.

a) Obtenemos la expresión de la función valor absoluto como una función a trozos.

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6+4}{2} = 5 = x \\ \frac{6-4}{2} = 1 = x \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5 > 0 \\ x=2 \Rightarrow 2^2 - 6 \cdot 2 + 5 = -3 < 0 \\ x=6 \Rightarrow 6^2 - 6 \cdot 6 + 5 = 5 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \in (-\infty, 1) \rightarrow f(x) > 0 \\ x \in (1, 5) \rightarrow f(x) < 0 \\ x \in (5, +\infty) \rightarrow f(x) > 0 \end{array}$$

$$f(x) = |x^2 - 6x + 5| = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si } 1 < x < 5 \\ x^2 - 6x + 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Calculamos su derivada y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 6 & \text{si } 1 < x < 5 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 5 \end{cases} \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \notin (-\infty, 1) \\ -2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3 \in (1, 5) \\ 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \notin (5, +\infty) \end{cases}$$

El único punto crítico se obtiene para $x=3$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x < 5 \\ 2 & \text{si } x > 5 \end{cases} \Rightarrow f''(3) = -2 < 0$$

Para $x=3$ se anula la primera derivada y la segunda derivada toma valor negativo. La función presenta un máximo relativo para $x=3$.

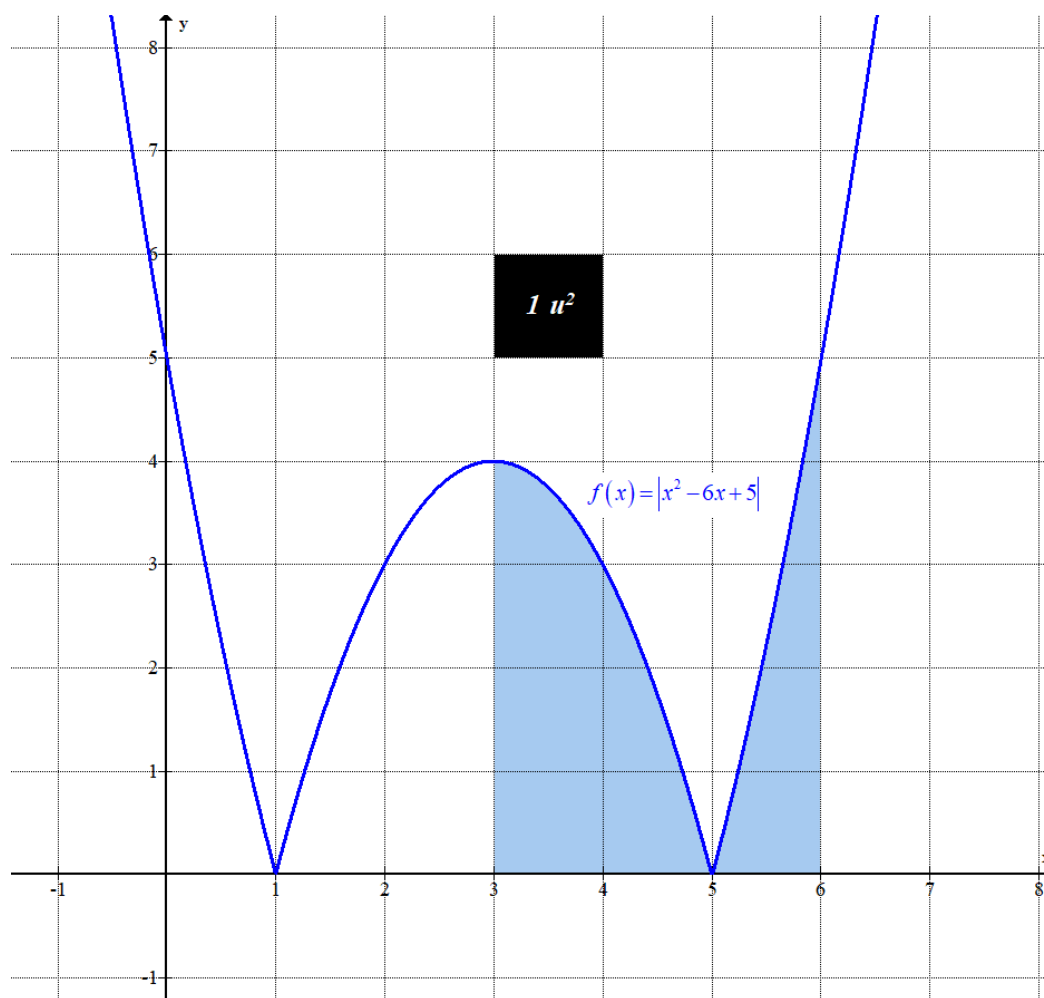
Para $x=3$ la función vale $f(3) = |3^2 - 6 \cdot 3 + 5| = |-4| = 4$.



- b) Como $x=5$ pertenece al intervalo $(3,6)$ la función cambia de definición en este intervalo. Hallamos el área del recinto delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x=3$ y $x=6$ como la suma de la integral definida de 3 a 5 de $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ y la integral definida de 5 a 6 de $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_3^5 -x^2 + 6x - 5 dx + \int_5^6 x^2 - 6x + 5 dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_3^5 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x \right]_5^6 = \\ &= \left[\frac{-5^3}{3} + 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 \right] - \left[\frac{-3^3}{3} + 3 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 \right] + \left[\frac{6^3}{3} - 3 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 \right] - \left[\frac{5^3}{3} - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 \right] = \\ &= \frac{-125}{3} + 75 - 25 + 9 - 27 + 15 + 72 - 108 + 30 - \frac{125}{3} + 75 - 25 = \frac{-250}{3} + 91 = \boxed{\frac{23}{3} \approx 7.66 u^2} \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $\frac{23}{3} \approx 7.66$ unidades cuadradas.



Pregunta 3. Sea r la recta que pasa por $A(1, 2, -5)$ y $B(2, 4, -11)$, sea s la recta dada por la intersección de los planos $x - 2y + 3z = 3$, $x - y = 0$, y sea t la recta paralela a s que pasa por $C(1, 0, 0)$.

a) (1 punto) Determine la posición relativa de r y s .

b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**

b1) Halle la distancia entre s y t .

b2) Halle el coseno del ángulo que forman r y s .

a) Obtenemos un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$s: \begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow y - 2y + 3z = 3 \Rightarrow -y + 3z = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -3 + 3z \Rightarrow s: \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_s(-3, -3, 0) \\ \vec{v}_s = (3, 3, 1) \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} A(1, 2, -5) \in r \\ B(2, 4, -11) \in r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1, 2, -5) \in r \\ \vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (2, 4, -11) - (1, 2, -5) = (1, 2, -6) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales. Las rectas no son paralelas ni coincidentes.

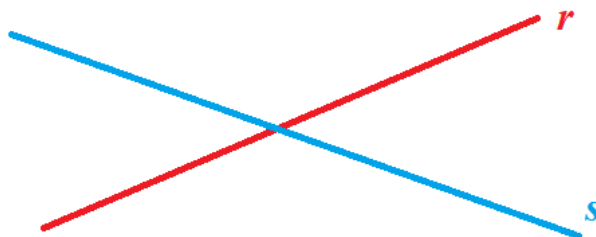
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (3, 3, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 2, -6) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{1} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{1}{-6}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Hallamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_s, \vec{u}_r, \overrightarrow{AP_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, -5) \\ P_s(-3, -3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP_s} = (-3, -3, 0) - (1, 2, -5) = (-4, -5, 5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (3, 3, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 2, -6) \\ \overrightarrow{AP_s} = (-4, -5, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_s, \vec{u}_r, \overrightarrow{AP_s}] = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -6 \\ -4 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 72 - 5 + 8 - 15 - 90 = 0$$

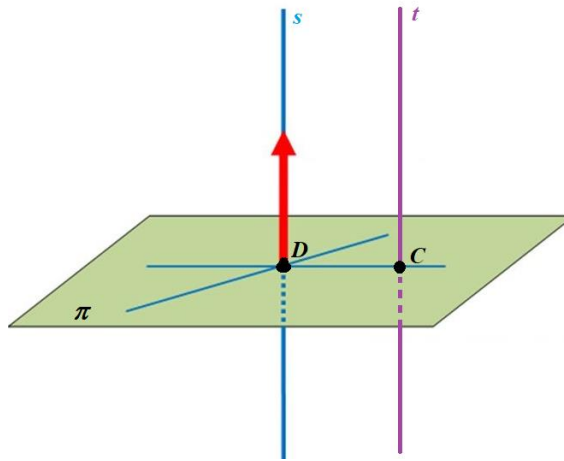
Como el producto mixto es nulo las rectas r y s se cortan (coinciden en un punto).



b1) Hallamos la ecuación de la recta t . Esta recta es paralela a la recta s por lo que tiene como vector director $\vec{v}_s = (3, 3, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_t = \vec{v}_s = (3, 3, 1) \\ C(1, 0, 0) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow t: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Las rectas s y t son paralelas. Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a la recta t que pasa por el punto C . Luego hallamos el punto D de corte de la recta s con el plano π . La distancia entre las rectas es el módulo del vector $\overrightarrow{CD}$.



Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a la recta t que pasa por el punto C . Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{u}_t = (3, 3, 1) \\ C(1, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 3x + 3y + z + K = 0 \\ C(1, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + 0 + 0 + K = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = -3 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x + 3y + z - 3 = 0}$$

Hallamos el punto D de corte de la recta s con el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 3x + 3y + z - 3 = 0 \\ s: \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 3(-3 + 3\lambda) + 3(-3 + 3\lambda) + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9 + 9\lambda - 9 + 9\lambda + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow 19\lambda = 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{21}{19} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 3\frac{21}{19} = \frac{6}{19} \\ y = -3 + 3\frac{21}{19} = \frac{6}{19} \\ z = \frac{21}{19} \end{cases} \Rightarrow \boxed{D\left(\frac{6}{19}, \frac{6}{19}, \frac{21}{19}\right)}$$

Calculamos la distancia entre las rectas s y t .

$$\left. \begin{array}{l} D\left(\frac{6}{19}, \frac{6}{19}, \frac{21}{19}\right) \\ C(1, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \left(\frac{6}{19}, \frac{6}{19}, \frac{21}{19}\right) - (1, 0, 0) = \left(\frac{-13}{19}, \frac{6}{19}, \frac{21}{19}\right)$$

$$d(s, t) = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{\left(\frac{-13}{19}\right)^2 + \left(\frac{6}{19}\right)^2 + \left(\frac{21}{19}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{646}}{19} \approx 1.3377u}$$

La distancia entre las rectas s y t vale $\frac{\sqrt{646}}{19} \approx 1.3377$ unidades.

b2) Las rectas r y s se cortan. Utilizamos el producto escalar de sus vectores directores para determinar el coseno del ángulo que forman.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (3, 3, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 2, -6) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(r, s) = \cos(\vec{v}_s, \vec{u}_r) = \frac{|\vec{v}_s \cdot \vec{u}_r|}{|\vec{v}_s| \cdot |\vec{u}_r|} =$$

$$= \frac{(3, 3, 1)(1, 2, -6)}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{3 + 6 - 6}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{41}} = \frac{3\sqrt{779}}{779}$$

El coseno del ángulo que forman r y s vale $\frac{3\sqrt{779}}{779} \approx 0.1075$.

Pregunta 4.1. Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio que verifican $P(\bar{A}) = 0.6$, $P(A \cup B) = 0.75$ y $P(B/A) = 0.375$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular $P(B)$.

b) (1 punto) Calcular $P(\bar{A}/B)$.

a) Como $P(\bar{A}) = 0.6$ entonces $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.6 = 0.4$.

Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\left. \begin{array}{l} P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.375 \\ P(A) = 0.4 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{0.4} = 0.375 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.4 \cdot 0.375 = 0.15$$

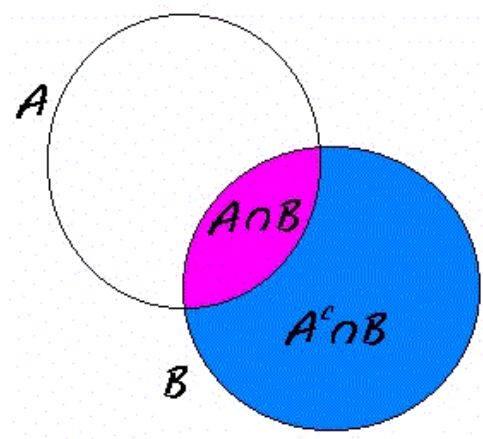
Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos A y B.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A) = 0.4 \\ P(A \cup B) = 0.75 \\ P(A \cap B) = 0.15 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.75 = 0.4 + P(B) - 0.15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B) = 0.75 - 0.4 + 0.15 \Rightarrow \boxed{P(B) = 0.5}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5 - 0.15}{0.5} = \boxed{0.7}$$



Pregunta 4.2. En los barrios de Tokio se considera el reciclaje y la clasificación de la basura una obligación ciudadana. Si no se clasifican los residuos de forma correcta para que sean retirados por la empresa de recogida de basuras, estos no son recogidos y el barrio puede ser penalizado por el ayuntamiento. En el barrio de Ueno, el 82.5% de los hogares realizan esta tarea de forma adecuada.

- a) (1 punto) Se analizan los residuos de diez hogares de este barrio. Calcule la probabilidad de que a lo sumo uno de ellos no clasifique correctamente sus residuos.
- b) (1 punto) El ayuntamiento selecciona una muestra aleatoria de 200 hogares en este barrio y si el porcentaje de familias que comete errores en la clasificación de sus residuos es superior o igual al 10%, el barrio es penalizado. Calcule, aproximando por una distribución normal adecuada, la probabilidad de que los vecinos de Ueno no sean sancionados.

- a) X = Número de hogares que no clasifican los residuos en un grupo de 10. Esta variable es una binomial donde n = número de repeticiones = 10 y p = probabilidad de que un hogar no clasifique bien los residuos = $1 - 0.825 = 0.175$. $X = B(10, 0.175)$.

Nos piden calcular $P(X \leq 1)$.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0} 0.175^0 \cdot 0.825^{10} + \binom{10}{1} 0.175^1 \cdot 0.825^9 =$$

$$= 0.825^{10} + 10 \cdot 0.175 \cdot 0.825^9 \approx \boxed{0.4559}$$

La probabilidad de que a lo sumo uno de los 10 hogares no clasifique correctamente sus residuos tiene un valor aproximado de 0.4559.

- b) X = Número de hogares que no clasifican los residuos en un grupo de 200. Esta variable es una binomial donde n = número de repeticiones = 200 y p = probabilidad de que un hogar no clasifique bien los residuos = 0.175. $X = B(200, 0.175)$.

Para que no sean sancionados el número de errores debe ser menor del 10% de hogares, es decir, menor de $0.1 \cdot 200 = 20$ hogares. Nos piden calcular $P(X < 20)$. Como el número de repeticiones es muy alto aproximamos esta binomial por una normal Y de media

$$np = 200 \cdot 0.175 = 35 \text{ y desviación típica } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.175 \cdot 0.825} = \frac{\sqrt{462}}{2} \approx 5.3735.$$

$$Y = N\left(35, \frac{\sqrt{462}}{2}\right).$$

Esta aproximación es buena pues $np = 35 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0.825 = 165 > 5$.

$$P(X < 20) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 19.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 35}{\sqrt{462}/2} \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{19.5 - 35}{\sqrt{462}/2}\right) = P(Z \leq -2.88) = P(Z \geq 2.88) = 1 - P(Z \leq 2.88) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.998 = \boxed{0.002}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986

La probabilidad de que los vecinos de Ueno no sean sancionados tiene un valor de 0.002.

Pregunta 5.1. Sea la función $f(x) = x^2 + bx$.

- a) (1 punto) Determine los valores de b para que la recta $y = x - 1$ sea tangente a la gráfica de la función $f(x)$.
- b) (1 punto) ¿Es cierto que para cualquier valor de b existe una recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ que sea paralela a la recta $y = x - 1$? Justifique la respuesta.

- a) La recta $y = x - 1$ tiene pendiente $m = 1$. Para que la recta sea tangente a la función en $x = a$ debe cumplirse que $f'(a) = 1$ y que $f(a) = a - 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x + b \\ f'(a) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - 2a$$

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = a - 1 \\ f(x) = x^2 + bx \end{array} \right\} \Rightarrow a - 1 = a^2 + ba$$

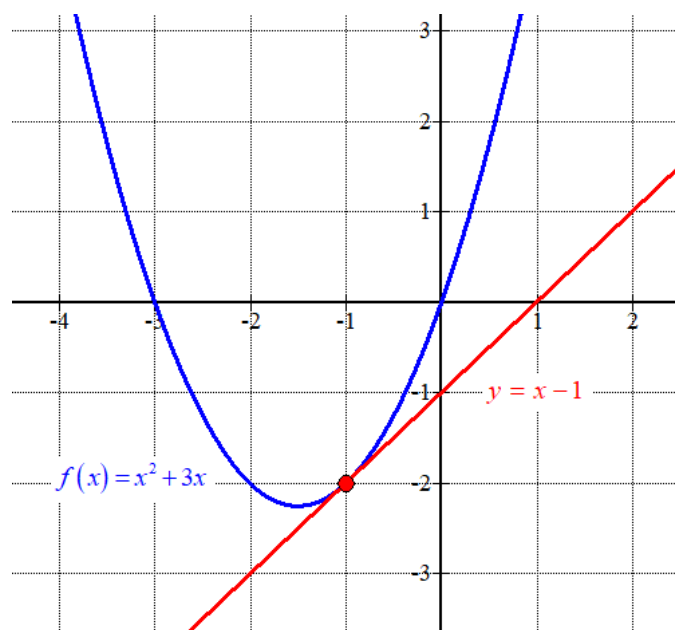
Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a - 1 = a^2 + ba \\ b = 1 - 2a \end{array} \right\} \Rightarrow a - 1 = a^2 + (1 - 2a)a \Rightarrow a - 1 = a^2 + a - 2a^2 \Rightarrow$$

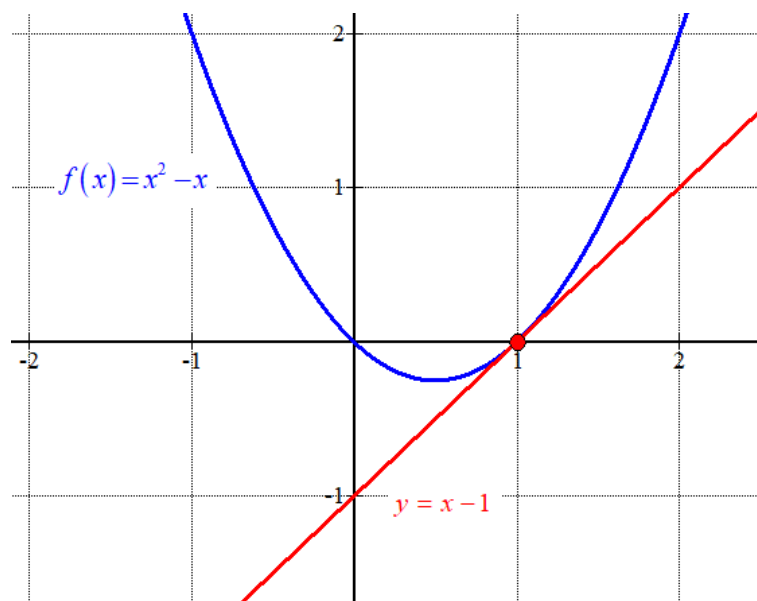
$$\Rightarrow -1 = -a^2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \rightarrow b = 1 - 2(-1) = 3 \\ a = 1 \rightarrow b = 1 - 2 \cdot 1 = -1 \end{cases}$$

Existen dos soluciones posibles.

Para $b = 3$ la función queda $f(x) = x^2 + 3x$ y la recta $y = x - 1$ es tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en $x = -1$.



Para $b = -1$ la función queda $f(x) = x^2 - x$ y la recta $y = x - 1$ es tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en $x = 1$.



- b) Una recta paralela a $y = x - 1$ tiene su misma pendiente y por tanto tiene ecuación $y = x + c$.
Con el mismo razonamiento del apartado anterior: Para que la recta sea tangente a la función en $x = a$ debe cumplirse que $f'(a) = 1$ y que $f(a) = a + c$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x + b \\ f'(a) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - 2a$$

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = a + c \\ f(x) = x^2 + bx \end{array} \right\} \Rightarrow a + c = a^2 + ba$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema e intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} a + c = a^2 + ba \\ b = 1 - 2a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = a^2 + ba - a \\ 2a = 1 - b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = a^2 + (b-1)a \\ a = \frac{1-b}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow c = \left(\frac{1-b}{2}\right)^2 + (b-1)\frac{1-b}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{(1-b)^2}{4} + \frac{(b-1)(1-b)}{2} = \frac{(1-b)^2}{4} - \frac{(1-b)^2}{2} = \frac{-(1-b)^2}{4} \Rightarrow \boxed{c = -\left(\frac{1-b}{2}\right)^2}$$

Para cualquier valor de b la recta $y = x - \left(\frac{1-b}{2}\right)^2$ es una recta paralela a $y = x - 1$ siendo tangente a la gráfica de la función $f(x)$.

Si $b = -1$ o $b = 3$ la recta tangente es la propia recta $y = x - 1$. Y si $b \neq -1$ y $b \neq 3$ la recta tangente a la gráfica de la función es paralela a $y = x - 1$.

Pregunta 5.2. Calcule los siguientes límites:

a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$

b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$

a) Calculamos el valor del límite multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\cancel{2}} + 3x - x^{\cancel{2}}}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{+\infty}} + 1} = \frac{3}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \boxed{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

b) Calculamos el valor del límite utilizando la regla de L'Hôpital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 + 2x)} &= \frac{e^0 - 1}{\ln(1)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3e^{3x}}{1}}{\frac{2}{1 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x}(1 + 2x)}{2} = \frac{3e^{3 \cdot 0}(1 + 2 \cdot 0)}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

PAU 2025 Extraordinaria Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	---	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k :

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Se pide:}$$

- a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de k .
b) (1 punto) Resolver el sistema para $k = 0$.

Pregunta 1.2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1.5 puntos) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen $BA = (A + A^2)B$.
b) (1 punto) Con la matriz $A_1 = A$, se consideran las matrices $A_2 = A_1^2 + A_1$, $A_3 = A_2^2 + A_2$, $A_4 = A_3^2 + A_3$ y así sucesivamente. Hallar A_{2025} .

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un agricultor dispone de 120 metros de valla para delimitar una parcela con forma de pentágono. Los vértices del pentágono se nombrarán consecutivamente como A, B, C, D y E. Se sabe que A, B, D y E forman un rectángulo, y que el punto C se encuentra en el exterior de este rectángulo, formando un triángulo equilátero con los puntos B y D.

¿A qué distancia del vértice A el agricultor debe ubicar los vértices B y E si quiere que la parcela tenga la mayor área posible?

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Sean los puntos $A(1,1,2)$, $B(2,-1,0)$, $C(-2,0,3)$ y $D(2,-3,-1)$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}.$$

- a) (0.5 puntos) Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro determinado por ellos.
- b) (1 punto) Calcule el área de la cara del tetraedro ABCD determinada por los puntos A, B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D.
- c) (1 punto) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D.

Pregunta 3.2. Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,0,1)$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B.
- b) (1.5 puntos) Hallar una ecuación de una recta perpendicular al plano $z=1$ que diste una unidad tanto del punto A como del punto B.

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

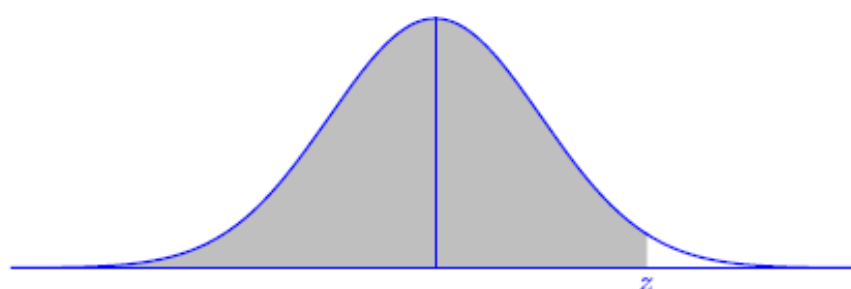
Pregunta 4.1. En base a un estudio de los datos antropométricos de la población laboral española en hombres se considera que la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población es una variable normal de media 75.67 y desviación típica 11.05. Se pide:

- a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa entre 60 y 80 kilogramos.
- b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa superior a 100 kilogramos.
- c) (1 punto) Elegidos diez hombres distintos al azar en esta población calcular la probabilidad de que no más de uno supere los 100 kilogramos.

Pregunta 4.2. La probabilidad de que un corredor sufra una caída en un día con lluvia es de 0.08 y en un día seco es de 0.004. La probabilidad de que llueva y se caiga es de 0.032. Hoy un corredor ha salido. Se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído.
- b) (1.25 puntos) Hallar la probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k :

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Se pide:}$$

a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de k .

b) (1 punto) Resolver el sistema para $k = 0$.

a) El sistema es $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}$. La matriz de coeficientes asociada al sistema es

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y la matriz ampliada es } A/B = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 0 \\ k+1 & 1 & -k & k \\ 1 & k+1 & 0 & 2k \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - k + (k+1)^2 - 1 - 0 + k^2(k+1) =$$

$$= -k + k^2 + 1 + 2k - 1 + k^3 + k^2 = k^3 + 2k^2 + k = k(k^2 + 2k + 1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k(k^2 + 2k + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k^2 + 2k + 1 = 0 \rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = -1 \end{cases}$$

Establecemos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq -1$.

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3. Al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k = 0$

En este caso el determinante de A se anula y el rango de A es menor de 3. Estudiamos el

rango de A y de A/B . La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{1 \quad 1 \quad 0 \quad 0}^{A/B} \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

El rango de A y de A/B es 2, tienen el mismo rango y es menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $k = -1$

En este caso el determinante de A se anula y el rango de A es menor de 3. Estudiamos el

rango de A y de A/B. La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad -2 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{-1 \quad 1 \quad 1 \quad 0}^{A/B} \\ \hline 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -1}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Tienen rangos distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $k \neq 0$ y $k \neq -1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k = 0$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $k = -1$ el sistema es incompatible (sin solución).

b) Hemos visto en el apartado anterior que para $k = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones. Las determinamos partiendo del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Pregunta 1.2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1.5 puntos) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen $BA = (A + A^2)B$.
 b) (1 punto) Con la matriz $A_1 = A$, se consideran las matrices $A_2 = A_1^2 + A_1$, $A_3 = A_2^2 + A_2$, $A_4 = A_3^2 + A_3$ y así sucesivamente. Hallar A_{2025} .

a) Calculamos la expresión de la matriz $A + A^2$.

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-5 & 5-15 \\ -1+3 & -5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideramos la matriz simétrica $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Resolvemos la igualdad planteada.

$$BA = (A + A^2)B \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & 5a-3b \\ b-c & 5b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-5b & -3b-5c \\ a+b & b+c \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a-b = -3a-5b \\ 5a-3b = -3b-5c \\ b-c = a+b \\ 5b-3c = b+c \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4a+4b=0 \\ 5a=-5c \\ -c=a \\ 4b-4c=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b=-a \\ a=-c \\ -c=a \\ b=c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b=-a \\ -a=c \\ b=c \end{array} \right\} \Rightarrow b=c=-a \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -a \end{pmatrix}$$

Las matrices B que cumplen lo pedido son $B = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -a \end{pmatrix}$, siendo a cualquier número real.

b) Tenemos que $A_1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$A_2 = A_1^2 + A_1 = A^2 + A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = A_2^2 + A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9-5 & 15-5 \\ -3+1 & -5+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = A_1$$

$$\begin{aligned}A_4 &= A_3^2 + A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \\&= \begin{pmatrix} 1-5 & 5-15 \\ -1+3 & -5+9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_2\end{aligned}$$

La secuencia que hemos observado es la siguiente:

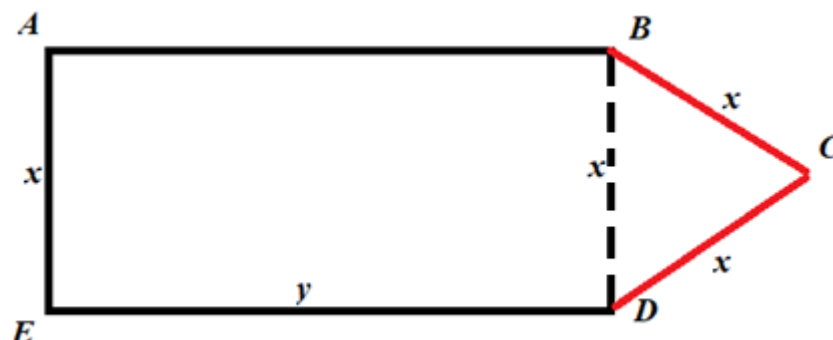
$$A_1, A_2, A_3 = A_1, A_4 = A_2, A_5 = A_1, A_6 = A_2, \dots$$

En las posiciones impares aparece A_1 y en las pares aparece A_2 .

Como 2025 es impar tenemos que $A_{2025} = A_1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Pregunta 2. Un agricultor dispone de 120 metros de valla para delimitar una parcela con forma de pentágono. Los vértices del pentágono se nombrarán consecutivamente como A, B, C, D y E. Se sabe que A, B, D y E forman un rectángulo, y que el punto C se encuentra en el exterior de este rectángulo, formando un triángulo equilátero con los puntos B y D. ¿A qué distancia del vértice A el agricultor debe ubicar los vértices B y E si quiere que la parcela tenga la mayor área posible?

a) Dibujamos la parcela.

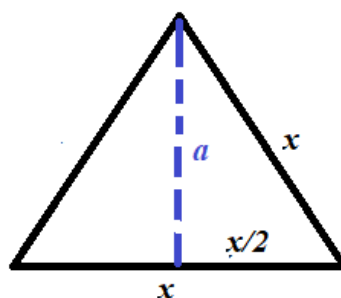


El perímetro de la parcela es $3x + 2y$. Como debe tener 120 metros de longitud obtenemos una igualdad de la que despejamos “y”.

$$3x + 2y = 120 \Rightarrow 2y = 120 - 3x \Rightarrow y = 60 - \frac{3}{2}x$$

Los valores de x e y deben ser positivos $\rightarrow 60 - \frac{3}{2}x \geq 0 \rightarrow 60 \geq \frac{3}{2}x \Rightarrow \frac{120}{3} \geq x \Rightarrow x \leq 40$.

El área de la parcela es el área del rectángulo más el área del triángulo equilátero.



Hallamos el valor de la altura del triángulo equilátero para poder hallar su área.

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = a^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow a^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\text{Área } BCD = \frac{x \cdot a}{2} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

El área del rectángulo vale $xy = x\left(60 - \frac{3}{2}x\right) = 60x - \frac{3}{2}x^2$

El área total de la parcela es la suma de las dos áreas obtenidas.

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 60x - \frac{3}{2}x^2 = \frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2 + 60x, \text{ siendo } 0 \leq x \leq 40$$

Buscamos los puntos críticos de la función área.

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2 + 60x \Rightarrow A'(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{2}x + 60$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-6}{2}x + 60 = 0 \Rightarrow (\sqrt{3}-6)x + 120 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-120}{\sqrt{3}-6} = \frac{120\sqrt{3}+720}{36-3} = \frac{40\sqrt{3}+240}{11} \simeq 28.12 \text{ metros}$$

Comprobamos si para este valor la segunda derivada es negativa.

$$A'(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{2}x + 60 \Rightarrow A''(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{2} \Rightarrow A''(28.12) = \frac{\sqrt{3}-6}{2} < 0$$

La segunda derivada es negativa y el área es máxima para $x = \frac{40\sqrt{3}+240}{11} \simeq 28.12$ metros.

Para este valor determinamos el valor de y.

$$y = 60 - \frac{3}{2} \left(\frac{40\sqrt{3}+240}{11} \right) = 60 - \frac{60\sqrt{3}+360}{11} = \frac{300-60\sqrt{3}}{11} \simeq 17.83 \text{ metros.}$$

El área de la parcela es máxima cuando situamos el punto B a 17.83 metros de A y el E a 28.12 metros de A.

Pregunta 3.1. Sean los puntos $A(1,1,2)$, $B(2,-1,0)$, $C(-2,0,3)$ y $D(2,-3,-1)$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}.$$

- a) (0.5 puntos) Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro determinado por ellos.
 b) (1 punto) Calcule el área de la cara del tetraedro ABCD determinada por los puntos A, B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D.
 c) (1 punto) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D.

a) Hallamos los vectores que definen el tetraedro ABCD. Si su volumen es nulo quiere decir que los puntos son coplanarios y no definen un tetraedro. Si el volumen es distinto de cero es que los puntos no son coplanarios y definen un tetraedro.

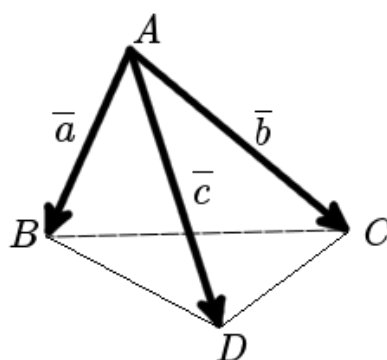
El volumen del tetraedro ABCD es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,1,2) \\ B(2,-1,0) \\ C(-2,0,3) \\ D(2,-3,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,-1,0) - (1,1,2) = (1,-2,-2) \\ \overrightarrow{AC} = (-2,0,3) - (1,1,2) = (-3,-1,1) \\ \overrightarrow{AD} = (2,-3,-1) - (1,1,2) = (1,-4,-3) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 2 - 24 - 2 + 18 + 4 = -3 \neq 0$$

El producto mixto es distinto de cero y los puntos A, B, C y D no son coplanarios.

El volumen del tetraedro definido por ellos vale $\frac{3}{6} = 0.5$ unidades cúbicas.



- b) La cara ABC es un triángulo hallamos su área como la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,-2,-2) \\ \overrightarrow{AC} = (-3,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2i + 6j - k - 6k - j - 2i =$$

$$= -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = (-4, 5, -7)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-7)^2}}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{10}}{2} \approx 4.74 \text{ u}^2}$$

Si dividimos el volumen del paralelepípedo ABCD entre el área del rectángulo de la base tendremos el valor de la altura del tetraedro que parte del vértice D.

$$\text{Altura} = \frac{\text{Volumen paralelepípedo } ABCD}{\text{Área Base } ABC} = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{10} \approx 0.3162 \text{ u}}$$

c) La recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}$ tiene como vector director $\vec{v}_r = (2, 1, -1)$.

La recta s determinada por los puntos B y D tiene como vector director $\vec{u}_s = \overrightarrow{BD}$.

$$\vec{u}_s = \overrightarrow{BD} = (2, -3, -1) - (2, -1, 0) = (0, -2, -1)$$

Las rectas tienen vectores con coordenadas no proporcionales, por lo que se cortan o se cruzan (no son ni paralelas ni coincidentes).

Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r B}]$.

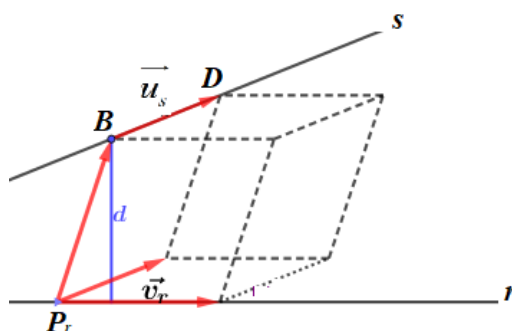
$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, -1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} P_r(1, -1, 0) \\ B(2, -1, 0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r B} = (2, -1, 0) - (1, -1, 0) = (1, 0, 0)$$

$$[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r B}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 0 - 2 - 0 - 0 = -3 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan y la distancia entre ellas se obtiene

con la fórmula $d(r, s) = \frac{|[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r B}]|}{|\vec{v}_r \times \vec{u}_s|}$.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (0, -2, -1) \\ \vec{v}_r = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3i - 2j + 4k = (3, -2, 4)$$

$$d(r, s) = \frac{|\llbracket \vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r B} \rrbracket|}{|\vec{v}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{3}{\sqrt{29}} = \boxed{\frac{3\sqrt{29}}{29} \approx 0.557 \text{ unidades}}$$

La distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D tiene un valor de $\frac{3\sqrt{29}}{29} \approx 0.557$ unidades.

Pregunta 3.2. Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,0,1)$, se pide:

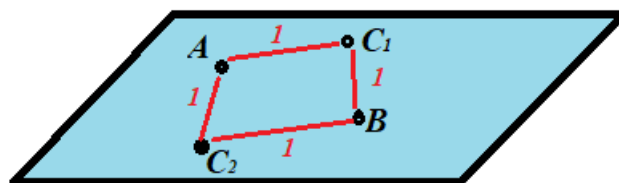
- a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B.
 b) (1.5 puntos) Hallar una ecuación de una recta perpendicular al plano $z=1$ que diste una unidad tanto del punto A como del punto B.

a) El eje OZ es una recta con vector director $\vec{v} = (0,0,1)$. El plano paralelo al eje OZ tiene como uno de sus vectores directores el vector $\vec{v} = (0,0,1)$. Otro de sus vectores directores es el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,0,1) - (0,0,1) = (1,0,0) \\ \vec{v} = (0,0,1) \\ A(0,0,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y = 0$$

El plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B tiene ecuación $\pi: y = 0$.

- b) La recta perpendicular al plano $z=1$ tiene como vector director el vector normal del plano $\vec{n} = (0,0,1)$. Para definir la recta solo falta un punto por el que pase. Este punto puede ser un punto del plano $z=1$ que diste una unidad tanto del punto A como del punto B. Determinamos las coordenadas de este punto o puntos.



$$\left. \begin{array}{l} A(0,0,1) \\ B(1,0,1) \\ C \in z=1 \Rightarrow C(a,b,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (a,b,1) - (0,0,1) = (a,b,0) \\ \overrightarrow{BC} = (a,b,1) - (1,0,1) = (a-1,b,0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} d(A,C)=1 \\ d(B,C)=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}|=1 \\ |\overrightarrow{BC}|=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{a^2+b^2+0^2}=1 \\ \sqrt{(a-1)^2+b^2+0^2}=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a^2+b^2=1 \\ (a-1)^2+b^2=1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} b^2=1-a^2 \\ (a-1)^2+b^2=1 \end{array} \right\} \Rightarrow (a-1)^2+1-a^2=1 \Rightarrow a^2+1-2a+1-a^2=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-2a=0 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}} \Rightarrow b^2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \begin{cases} C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \\ C_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \end{cases}$$

Una de las rectas que cumple lo pedido tiene como vector director $\vec{n} = (0, 0, 1)$ y pasa por el punto $C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (0, 0, 1) \\ C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z = 1 + \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

La otra recta que cumple lo pedido tiene como vector director $\vec{n} = (0, 0, 1)$ y pasa por el punto $C_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \vec{n} = (0, 0, 1) \\ C_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Pregunta 4.1. En base a un estudio de los datos antropométricos de la población laboral española en hombres se considera que la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población es una variable normal de media 75.67 y desviación típica 11.05. Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa entre 60 y 80 kilogramos.
- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa superior a 100 kilogramos.
- (1 punto) Elegidos diez hombres distintos al azar en esta población calcular la probabilidad de que no más de uno supere los 100 kilogramos.

Llamamos X a la variable aleatoria que da la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población. $X = N(75.67, 11.05)$

- a) Nos piden calcular $P(60 \leq X \leq 80)$.

$$\begin{aligned}
 P(60 \leq X \leq 80) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{60 - 75.67}{11.05} \leq Z \leq \frac{80 - 75.67}{11.05}\right) = \\
 &= P(-1.42 \leq Z \leq 0.39) = P(Z \leq 0.39) - P(Z \leq -1.42) = \\
 &= P(Z \leq 0.39) - P(Z \geq 1.42) = P(Z \leq 0.39) - [1 - P(Z \leq 1.42)] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.6517 - 1 + 0.9222 = \boxed{0.5739}
 \end{aligned}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319

- b) Nos piden calcular $P(X > 100)$.

$$\begin{aligned}
 P(X > 100) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{100 - 75.67}{11.05}\right) = P(Z > 2.2) = \\
 &= 1 - P(Z \leq 2.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9861 = \boxed{0.0139}
 \end{aligned}$$

z		
	0,00	
0,0	0,5000	C
0,1	0,5398	C
0,2	0,5793	C
0,3	0,6179	C
0,4	0,6554	C
0,5	0,6915	C
0,6	0,7257	C
0,7	0,7580	C
0,8	0,7881	C
0,9	0,8159	C
1,0	0,8413	C
1,1	0,8643	C
1,2	0,8849	C
1,3	0,9032	C
1,4	0,9192	C
1,5	0,9332	C
1,6	0,9452	C
1,7	0,9554	C
1,8	0,9641	C
1,9	0,9713	C
2,0	0,9772	C
2,1	0,9821	C
2,2	0,9861	C

- c) Consideramos la variable aleatoria Y que cuenta el número de hombres que superan los 100 kilogramos de un grupo de 10. Esta variable es una binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.0139$. $Y = B(10, 0.0139)$.

Nos piden hallar $P(Y \leq 1)$.

$$P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = \binom{10}{0} 0.0139^0 \cdot 0.9861^{10} + \binom{10}{1} 0.0139^1 \cdot 0.9861^9 =$$

$$= 0.9861^{10} + 10 \cdot 0.0139 \cdot 0.9861^9 = \boxed{0.9919}$$

Pregunta 4.2. La probabilidad de que un corredor sufra una caída en un día con lluvia es de 0.08 y en un día seco es de 0.004. La probabilidad de que llueva y se caiga es de 0.032. Hoy un corredor ha salido. Se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído.
b) (1.25 puntos) Hallar la probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo.

Llamamos L al suceso “Llueve ese día” y C a “el corredor sufre una caída”.

Nos dicen que $P(C/L) = 0.08$, $P(C/\bar{L}) = 0.004$ y $P(L \cap C) = 0.032$.

Obtenemos la probabilidad de que llueva un día cualquiera:

$$P(C/L) = \frac{P(L \cap C)}{P(L)} \Rightarrow 0.08 = \frac{0.032}{P(L)} \Rightarrow P(L) = \frac{0.032}{0.08} = 0.4$$

- a) Nos piden hallar el valor de $P(\bar{C})$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(\bar{C}) &= P(L)P(\bar{C}/L) + P(\bar{L})P(\bar{C}/\bar{L}) = \\ &= P(L)[1 - P(C/L)] + [1 - P(L)][1 - P(C/\bar{L})] = \\ &= 0.4(1 - 0.08) + (1 - 0.4)(1 - 0.004) = \boxed{0.9656} \end{aligned}$$

La probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído es de 0.9656.

- b) Nos piden calcular $P(\bar{L}/C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{L}/C) = \frac{P(\bar{L} \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\bar{L})P(C/\bar{L})}{1 - P(\bar{C})} = \frac{(1 - 0.4)0.004}{1 - 0.9656} = \boxed{\frac{3}{43} \approx 0.0698}$$

La probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo vale $\frac{3}{43} \approx 0.0698$.

PAU 2025 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS II	C
---	---	--------------------------------

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. En una granja se crían conejos, gallinas y pavos. El coste diario de la comida por animal es de 1.50 euros si es conejo, de 4 céntimos de euro si es gallina, y de 30 céntimos de euro si se trata de un pavo. El coste diario en comida para estos animales en la granja asciende a 44 euros. Se sabe que hay tantas gallinas como cuatro veces el número de pavos más la cuarta parte de los conejos. Además, el doble del número de gallinas es igual a la suma de conejos y pavos más diez veces el número de conejos. Se pide averiguar el número de animales de cada tipo en la granja.

Pregunta 1.2. Dadas las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1.25 puntos) Estudiar para qué valores del parámetro real a la matriz AB tiene rango 3.
- (1.25 puntos) Calcular la inversa de B para los valores de a en los que sea posible.

Bloque 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 2.1. Sean las funciones: $f(x) = \frac{e}{e^x - e}$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

- (1 punto) Calcule el límite $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x))$.
- (0.75 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en su dominio.
- (0.75 puntos) Estudie las asíntotas de la función $g(x) + g(-x)$.

Pregunta 2.2. Sea la parábola gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4$.

- (1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por $y = 0$ y la gráfica de la función $f(x)$.

- b) (1.5 puntos) Halle las dimensiones del rectángulo de mayor área apoyado sobre el eje OX que se puede inscribir en la parábola de manera que los lados sean paralelos dos a dos con los ejes de coordenadas. ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Sea el punto $A(1, 2, 3)$, la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano

$\pi: x + 2y - 2z = 1$. Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular la distancia de la recta r al plano π .
- (0.75 puntos) Hallar la proyección ortogonal del punto A sobre la recta r .
- (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de corte con los ejes coordenados de un plano que pasa por A y es paralelo a π .

Pregunta 3.2. Sea S el segmento de recta que une los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$. Se pide:

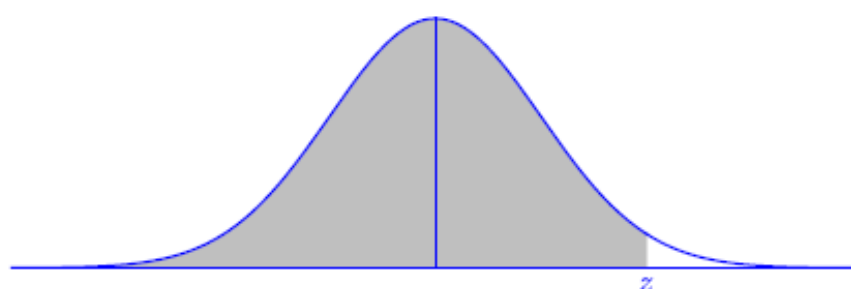
- (1.5 puntos) Hallar un punto sobre S que cumpla que su distancia al punto A sea el doble que su distancia al punto B .
- (1 punto) Hallar una ecuación del plano perpendicular a S que pasa por el punto medio de S .

Bloque 4. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 4. Una compañía ferroviaria tiene el siguiente compromiso de puntualidad en sus trenes de larga distancia: si un tren llega a destino con un retraso de entre 30 y 60 minutos devuelve la mitad del importe del billete a sus usuarios. Si el retraso es de más de una hora, devuelve el importe completo del billete. En los trayectos entre las ciudades A y B , según la compañía, el 80 por ciento de los trenes llegan puntuales o con retraso inferior a la media hora, el 15 por ciento con retraso de entre 30 y 60 minutos y el resto con retraso superior a una hora.

- (1 punto) Un usuario enfurecido escribe este post en una red social; "De los cuarenta trayectos que hice el año pasado entre A y B , en diez trayectos llegué con retraso de más de una hora. Según mis cálculos, esto debería haber ocurrido con una probabilidad menor de una entre un millón." ¿Ha hecho bien los cálculos el usuario enfurecido?
- (1.5 puntos) En enero de 2025 la compañía ha realizado seis trayectos entre A y B cada día. Asumiendo la veracidad de los datos de la compañía y aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que como mucho en una sexta parte de los trayectos la compañía ferroviaria haya tenido que devolver dinero a los usuarios.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

Pregunta 1.1. En una granja se crían conejos, gallinas y pavos. El coste diario de la comida por animal es de 1.50 euros si es conejo, de 4 céntimos de euro si es gallina, y de 30 céntimos de euro si se trata de un pavo. El coste diario en comida para estos animales en la granja asciende a 44 euros. Se sabe que hay tantas gallinas como cuatro veces el número de pavos más la cuarta parte de los conejos. Además, el doble del número de gallinas es igual a la suma de conejos y pavos más diez veces el número de conejos. Se pide averiguar el número de animales de cada tipo en la granja.

Sea “x” el número de conejos, “y” el de gallinas y “z” el de pavos en la granja.

“El coste diario de la comida por animal es de 1.50 euros si es conejo, de 4 céntimos de euro si es gallina, y de 30 céntimos de euro si se trata de un pavo. El coste diario en comida para estos animales en la granja asciende a 44 euros” $\rightarrow 1.5x + 0.04y + 0.3z = 44$.

“Se sabe que hay tantas gallinas como cuatro veces el número de pavos más la cuarta parte de los conejos” $\rightarrow y = 4z + \frac{x}{4}$.

“El doble del número de gallinas es igual a la suma de conejos y pavos más diez veces el número de conejos” $\rightarrow 2y = x + z + 10x$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 1.5x + 0.04y + 0.3z = 44 \\ y = 4z + \frac{x}{4} \\ 2y = x + z + 10x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 150x + 4y + 30z = 4400 \\ 4y = 16z + x \\ 2y = 11x + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 75x + 2y + 15z = 2200 \\ 4y - 16z = x \\ 2y = 11x + z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 75(4y - 16z) + 2y + 15z = 2200 \\ 2y = 11(4y - 16z) + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 300y - 1200z + 2y + 15z = 2200 \\ 2y = 44y - 176z + z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 302y - 1185z = 2200 \\ -42y = -175z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 302y - 1185z = 2200 \\ y = \frac{25}{6}z \end{array} \right\} \Rightarrow 302 \frac{25}{6}z - 1185z = 2200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{220}{3}z = 2200 \Rightarrow \boxed{z = \frac{2200 \cdot 3}{220} = 30} \Rightarrow \boxed{y = \frac{25}{6}30 = 125} \Rightarrow \boxed{x = 4 \cdot 125 - 16 \cdot 30 = 20}$$

En la granja hay 20 conejos, 125 gallinas y 30 pavos.

Pregunta 1.2. Dadas las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1.25 puntos) Estudiar para qué valores del parámetro real a la matriz AB tiene rango 3.
b) (1.25 puntos) Calcular la inversa de B para los valores de a en los que sea posible.

a) Determinamos la expresión de la matriz AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+a+0 & 0+1+0 & 0+0+2 \\ 1+3a+0 & 3+3+0 & 0+0+a \\ a+0+0 & 3a+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1+3a & 6 & a \\ a & 3a & 0 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de AB .

$$|AB| = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1+3a & 6 & a \\ a & 3a & 0 \end{vmatrix} = 0 + a^2 + 6a + 18a^2 - 12a - 0 - 3a^3 = -3a^3 + 19a^2 - 6a$$

$$|AB| = 0 \Rightarrow -3a^3 + 19a^2 - 6a = 0 \Rightarrow a(-3a^2 + 19a - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -3a^2 + 19a - 6 = 0 \rightarrow a = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 - 4(-3)(-6)}}{-6} = \frac{-19 \pm 17}{-6} = \begin{cases} \frac{-19+17}{-6} = \frac{1}{3} = a \\ \frac{-19-17}{-6} = 6 = a \end{cases} \end{cases}$$

Si $a \neq 0$; $a \neq 6$ y $a \neq \frac{1}{3}$ el determinante de AB es distinto de cero y su rango es 3. Para

$a = 0$; $a = 6$ o $a = \frac{1}{3}$ el determinante de AB es nulo y su rango es menor de 3.

b) Para que la matriz B tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 3a - 0 = 1 - 3a$$

$$|B| = 0 \Rightarrow 1 - 3a = 0 \Rightarrow 1 = 3a \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

La matriz B tiene inversa para cualquier valor de a distinto de $\frac{1}{3}$.

Calculamos su inversa para estos casos.

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1-3a} = \frac{1}{1-3a} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & a \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1-3a} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a \end{pmatrix}$$

Para $a \neq \frac{1}{3}$ la inversa de la matriz B es $B^{-1} = \frac{1}{1-3a} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a \end{pmatrix}$.

Pregunta 2.1. Sean las funciones: $f(x) = \frac{e}{e^x - e}$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

a) (1 punto) Calcule el límite $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x))$.

b) (0.75 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en su dominio.

c) (0.75 puntos) Estudie las asíntotas de la función $g(x) + g(-x)$.

a) Calculamos el límite pedido.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1} = \frac{e}{e^1 - e} - \frac{1}{1-1} = \frac{e}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty = \\ &= \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ex - e - e^x + e}{(e^x - e)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ex - e^x}{(e^x - e)(x-1)} = \frac{e - e^1}{(e^1 - e)(1-1)} = \\ &= \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e - e^x}{e^x(x-1) + (e^x - e)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e - e^x}{xe^x - e^x + e^x - e} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e - e^x}{xe^x - e} = \frac{e - e^1}{e^1 - e} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-e^x}{e^x + xe^x} = \frac{-e^1}{e^1 + e^1} = \boxed{\frac{-1}{2}} \end{aligned}$$

b) El dominio de la función $f(x) = \frac{e}{e^x - e}$ es $\mathbb{R} - \{1\}$. Para $x=1$ se anula el denominador.

Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{e}{e^x - e} &\Rightarrow f'(x) = \frac{0 - e^x \cdot e}{(e^x - e)^2} = \frac{-e^{x+1}}{(e^x - e)^2} \\ f'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{-e^{x+1}}{(e^x - e)^2} = 0 \Rightarrow -e^{x+1} = 0 \Rightarrow \text{¡Imposible!} \end{aligned}$$

La función no tiene puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes y después del valor $x=1$ excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{-e^{0+1}}{(e^0 - e)^2} = \frac{-e}{(1 - e)^2} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, 1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale

$$f'(2) = \frac{-e^{2+1}}{(e^2 - e)^2} = \frac{-e^3}{(e^2 - e)^2} < 0. \text{ La función decrece en } (1, +\infty).$$

La función decrece en todo su dominio $\mathbb{R} - \{1\}$.

c) Obtenemos la expresión de la función $g(x) + g(-x)$.

$$g(x) + g(-x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{-x-1} = \frac{-x-1+x-1}{(x-1)(-x-1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

El denominador se anula para $x=1$ y $x=-1$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} (g(x) + g(-x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{0} = \infty.$$

La recta $x=1$ es asíntota vertical.

¿ $x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} (g(x) + g(-x)) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{0} = \infty.$$

La recta $x=-1$ es asíntota vertical.

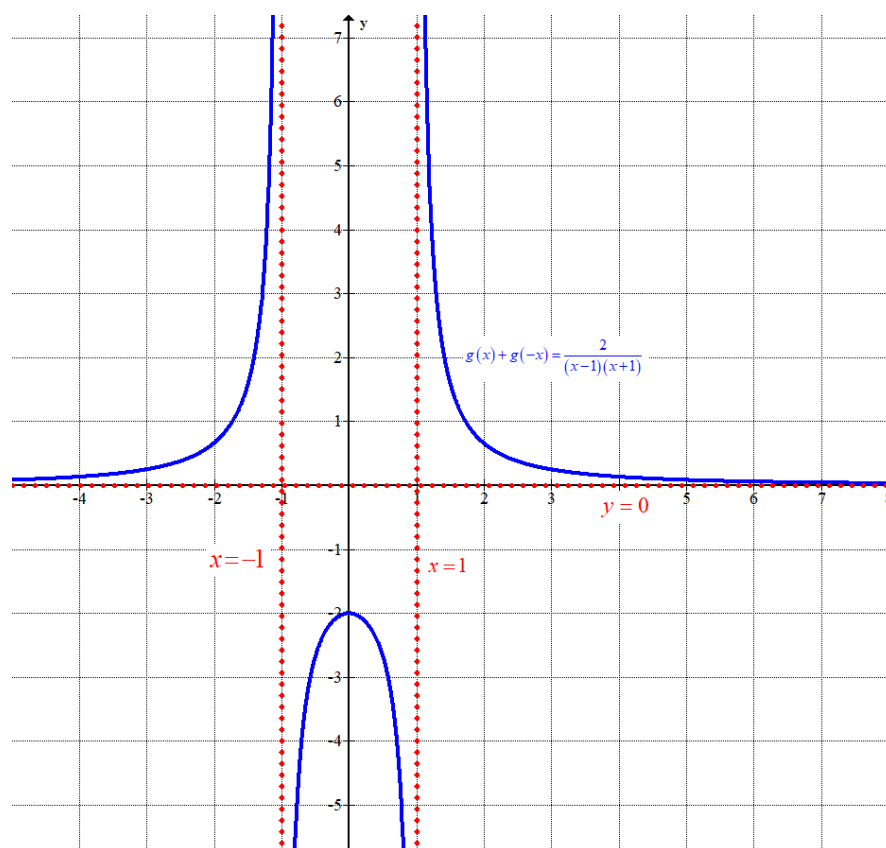
Asíntota horizontal. $y=b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1} = \frac{e}{\infty} - \frac{1}{\infty} = 0 - 0 = 0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al existir asíntota horizontal no existe asíntota oblicua.



Pregunta 2.2. Sea la parábola gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4$.

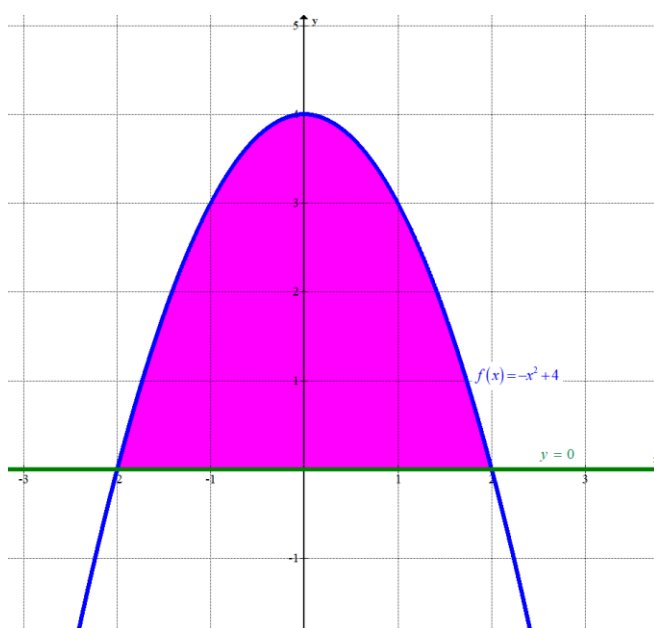
- a) (1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por $y = 0$ y la gráfica de la función $f(x)$.
- b) (1.5 puntos) Halle las dimensiones del rectángulo de mayor área apoyado sobre el eje OX que se puede inscribir en la parábola de manera que los lados sean paralelos dos a dos con los ejes de coordenadas. ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?

a) Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función y el eje de abscisas.

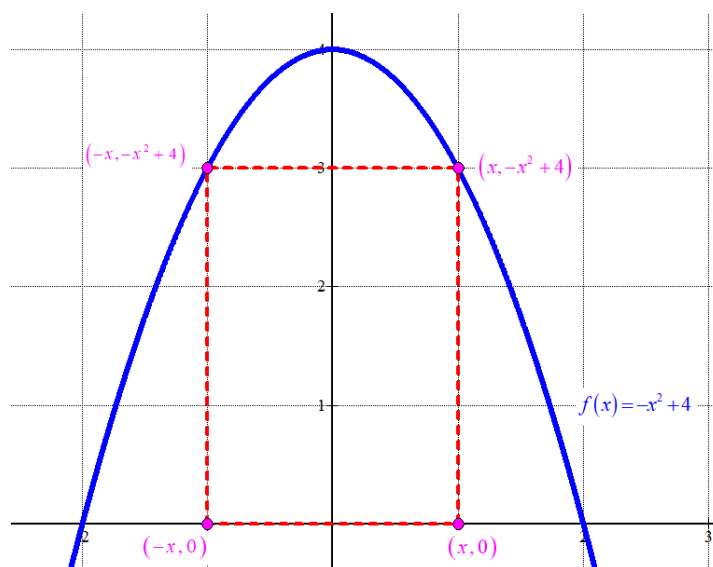
$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

El área de la región acotada delimitada por $y = 0$ y la gráfica de la función $f(x)$ es el valor absoluto de la integral definida entre -2 y 2 de $f(x)$.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^2 -x^2 + 4 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 = \left[\frac{-2^3}{3} + 4 \cdot 2 \right] - \left[\frac{-(-2)^3}{3} + 4(-2) \right] = \\ &= \frac{-8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.66 u^2} \end{aligned}$$



b) Hacemos un dibujo de la situación planteada.



Como los vértices del rectángulo deben apoyarse en la gráfica las coordenadas de los vértices son $(x, 0)$; $(-x, 0)$; $(x, -x^2 + 4)$ y $(-x, -x^2 + 4)$.

El área del rectángulo es el producto de la base $(2x)$ por la altura.

El área viene dada por la expresión $A(x) = 2x(-x^2 + 4) = -2x^3 + 8x$.

Hallamos los puntos críticos de la función área.

$$\left. \begin{array}{l} A'(x) = -6x^2 + 8 \\ A'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -6x^2 + 8 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

El valor positivo o negativo de la raíz nos lleva a la misma solución.

Sustituimos el valor $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ en la segunda derivada.

$$A'(x) = -6x^2 + 8 \Rightarrow A''(x) = -12x \Rightarrow A''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -12\sqrt{\frac{4}{3}} < 0$$

Como la segunda derivada es negativa el área es máxima para $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Para este valor tenemos que $f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 + 4 = \frac{-4}{3} + 4 = \frac{8}{3}$. El rectángulo buscado

tiene de base $2\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ y de altura $\frac{8}{3}$.

El área máxima que se puede conseguir vale $\frac{8}{3} \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{9} \approx 6.16$ unidades cuadradas.

Pregunta 3.1. Sea el punto $A(1, 2, 3)$, la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi: x + 2y - 2z = 1$

. Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular la distancia de la recta r al plano π .
- (0.75 puntos) Hallar la proyección ortogonal del punto A sobre la recta r .
- (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de corte con los ejes coordenados de un plano que pasa por A y es paralelo a π .

a) Estudiamos la posición relativa de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + 2y - 2z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, -2) \\ r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_r(1, 0, 2) \\ \vec{v}_r = (2, 0, 1) \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = (2, 0, 1) \cdot (1, 2, -2) = 2 + 0 - 2 = 0$$

Como el producto escalar del vector director de la recta y el normal del plano es nulo significa que estos vectores son perpendiculares y por lo tanto la recta r y el plano π son paralelos.

La distancia de la recta al plano la podemos obtener como la distancia de un punto cualquiera de la recta, por ejemplo $P_r(1, 0, 2)$ al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, 0, 2) \in r \\ \pi: x + 2y - 2z - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|1 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{3} \text{ unidades}$$

La distancia de la recta al plano es de $\frac{4}{3}$ unidades.

b) La proyección ortogonal del punto A en la recta es la intersección de la recta r con el plano perpendicular a ella que pasa por el punto A .

Hallamos el plano π' perpendicular a la recta que pasa por A . Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}' = \vec{v}_r = (2, 0, 1) \\ A(1, 2, 3) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi': 2x + z + D = 0 \\ A(1, 2, 3) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow \boxed{\pi': 2x + z - 5 = 0}$$

Hallamos la intersección del plano $\pi': 2x + z - 5 = 0$ con la recta. Obtendremos el punto A' proyección ortogonal de A sobre la recta r .

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_r(1, 0, 2) \\ \vec{v}_r = (2, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 0 \\ z = 2 + \alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi': 2x + z - 5 = 0 \\ r: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 0 \\ z = 2 + \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\alpha) + 2 + \alpha - 5 = 0 \Rightarrow 2 + 4\alpha + 2 + \alpha - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\alpha - 1 = 0 \Rightarrow 5\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{1}{5} = \frac{7}{5} \\ y = 0 \\ z = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{7}{5}, 0, \frac{11}{5}\right)$$

La proyección ortogonal del punto A sobre la recta r tiene coordenadas $A'\left(\frac{7}{5}, 0, \frac{11}{5}\right)$.

- c) Hallamos la ecuación del plano π'' que pasa por A y es paralelo a $\pi: x + 2y - 2z = 1$. Como es paralelo debe tener ecuación $\pi'': x + 2y - 2z + D = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi'': x + 2y - 2z + D = 0 \\ A(1, 2, 3) \in \pi'' \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow 1 + 4 - 6 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow \boxed{\pi'': x + 2y - 2z + 1 = 0}$$

Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas del plano $\pi'': x + 2y - 2z + 1 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi'': x + 2y - 2z + 1 = 0 \\ \text{Eje X} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 0 - 0 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \boxed{B(-1, 0, 0)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi'': x + 2y - 2z + 1 = 0 \\ \text{Eje Y} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 2y - 0 + 1 = 0 \Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{C\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi'': x + 2y - 2z + 1 = 0 \\ \text{Eje Z} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 0 - 2z + 1 = 0 \Rightarrow 2z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{D\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)}$$

Hallamos el volumen del tetraedro OBCD como la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los vectores que lo definen.

$$\left. \begin{array}{l} O = (0, 0, 0) \\ B(-1, 0, 0) \\ C\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right) \\ D\left(0, 0, \frac{1}{2}\right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \overrightarrow{OB} = (-1, 0, 0) \\ \overrightarrow{OC} = \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right) \\ \overrightarrow{OD} = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right) \end{array} \Rightarrow [\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Volumen OBCD} = \frac{[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}]}{6} = \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{24} u^3}$$

Pregunta 3.2. Sea S el segmento de recta que une los puntos $A(0,1,0)$ y $B(1,0,1)$. Se pide:

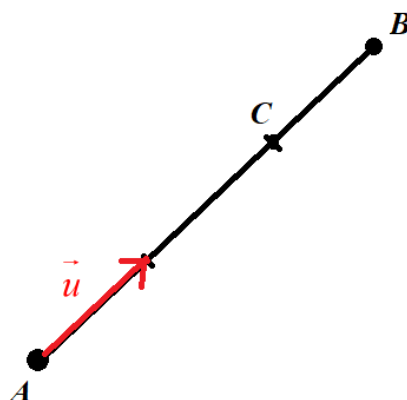
- a) (1.5 puntos) Hallar un punto sobre S que cumpla que su distancia al punto A sea el doble que su distancia al punto B.
 b) (1 punto) Hallar una ecuación del plano perpendicular a S que pasa por el punto medio de S.

a) Dividimos el vector que une los puntos A y B en tres partes.

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,1) - (0,1,0) = (1,-1,1) \Rightarrow \vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{3} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

El punto C que buscamos lo obtenemos sumando al punto A el doble del vector $\vec{u}$.

$$C = A + 2\vec{u} = (0,1,0) + 2\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$



El punto buscado tiene coordenadas $C = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

b) Hallamos las coordenadas del punto medio del segmento S.

$$P = \frac{(1,0,1) + (0,1,0)}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

El plano perpendicular al segmento S tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{AB}$. Hallamos su ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (1, -1, 1) \\ P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : x - y + z + D = 0 \\ P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + D = 0 \Rightarrow D = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\pi : x - y + z - \frac{1}{2} = 0}$$

El plano perpendicular a S que pasa por el punto medio de S tiene ecuación

$$\pi : x - y + z - \frac{1}{2} = 0.$$

Pregunta 4. Una compañía ferroviaria tiene el siguiente compromiso de puntualidad en sus trenes de larga distancia: si un tren llega a destino con un retraso de entre 30 y 60 minutos devuelve la mitad del importe del billete a sus usuarios. Si el retraso es de más de una hora, devuelve el importe completo del billete. En los trayectos entre las ciudades A y B, según la compañía, el 80 por ciento de los trenes llegan puntuales o con retraso inferior a la media hora, el 15 por ciento con retraso de entre 30 y 60 minutos y el resto con retraso superior a una hora.

- a) (1 punto) Un usuario enfurecido escribe este post en una red social; "De los cuarenta trayectos que hice el año pasado entre A y B, en diez trayectos llegué con retraso de más de una hora. Según mis cálculos, esto debería haber ocurrido con una probabilidad menor de una entre un millón." ¿Ha hecho bien los cálculos el usuario enfurecido?
- b) (1.5 puntos) En enero de 2025 la compañía ha realizado seis trayectos entre A y B cada día. Asumiendo la veracidad de los datos de la compañía y aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que como mucho en una sexta parte de los trayectos la compañía ferroviaria haya tenido que devolver dinero a los usuarios.

- a) Con retraso inferior o igual a 1 hora llegan $80 + 15 = 95\%$ de los trenes. El 5% de los trenes llegan con retraso superior a 1 hora.

Llamamos X a la variable aleatoria que da el número de viajes que llegan con retraso de un grupo de 40. Esta variable aleatoria es una binomial. $X = B(40, 0.05)$.

Calculamos la probabilidad de que de 40 viajes 10 lleguen con retraso: $P(X = 10)$.

$$P(X = 10) = \binom{40}{10} 0.05^{10} \cdot 0.95^{30} = 0.0000178 = \frac{17.8}{1000000}$$

La probabilidad de que ocurra lo que dice el usuario enfurecido es mayor de $\frac{1}{1000000}$. El usuario no tiene razón.

- b) Consideramos la variable aleatoria $X = \text{"Número de trayectos en los que la compañía devolvió dinero en enero de 2025"}$.

La empresa realiza 6 viajes diarios durante el mes de enero de 2025, por lo que en total realiza $6 \cdot 31 = 186$ viajes en el mes. Esta variable es una binomial de parámetros $n = 186$ y $p = 0.2$ (el 80% llegan puntuales o con retraso inferior a 30 minutos y no debe devolver dinero).

$X = B(186, 0.2)$.

Como $np = 186 \cdot 0.2 = 37.2 > 5$ y $nq = 186 \cdot 0.8 = 148.8 > 5$ la aproximación de esta variable X por una normal Y de media $np = 37.2$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{186 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = \frac{2\sqrt{186}}{5} \approx 5.46. Y = N(37.2, 5.46) \text{ es buena. } Y = N(37.2, 5.46)$$

La sexta parte de los trayectos significan $\frac{186}{6} = 31$ trayectos. Calculamos $P(X \leq 31)$.

$$P(X \leq 31) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Corrección} \\ \text{de Yates} \end{array} \right\} = P(Y \leq 31.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{31.5 - 37.2}{5.46}\right) =$$

$$= P(Z \leq -1.04) = P(Z \geq 1.04) = 1 - P(Z \leq 1.04) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8508 = \boxed{0.1492}$$

PAU 2025 Ordinaria Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. (2.5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Pregunta 1.2. Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1.25 puntos) Para $\lambda = 5$, calcular un vector no nulo $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que satisfaga que $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$.

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores

distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

- a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[0,12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0,12]$ contenida completamente en el muro?
- b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.
- c) (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva $f(x)$?

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi : x + 2y - 3z = 1$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π .
- b) (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r .
- c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

Pregunta 3.2. Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi : x + y = 2$. Se pide:

- a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π .
- b) (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π .
- c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. Sea $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definida por: $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$ y con el resto de sucesos elementales equiprobables.

Se consideran los sucesos $A = \{7, 11, 13, 19\}$, $B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$ y $C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$. Se pide calcular:

- a) (1.25 puntos) $P(\overline{(A-C)} \cap B)$.
- b) (1.25 puntos) $P((A \cap B) / \overline{C})$.

Pregunta 4.2. Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65.8% entre los de 25 a 64 y al 53.7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.
- b) (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

SOLUCIONES

Pregunta 1.1. (2.5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Llamamos x , y , z al número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido.

Obtenemos las ecuaciones que surgen del enunciado.

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres $\rightarrow 0.80x + 0.50 \cdot 2y + 0.40 \cdot 3z = 80$.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos $\rightarrow \frac{y}{3} = \frac{x+z}{5}$.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos $\rightarrow 2z = x + y - 5$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 0.80x + 0.50 \cdot 2y + 0.40 \cdot 3z = 80 \\ \frac{y}{3} = \frac{x+z}{5} \\ 2z = x + y - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.8x + y + 1.2z = 80 \\ 5y = 3x + 3z \\ 2z = x + y - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 80 - 0.8x - 1.2z \\ 5y = 3x + 3z \\ 2z = x + y - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5(80 - 0.8x - 1.2z) = 3x + 3z \\ 2z = x + 80 - 0.8x - 1.2z - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 400 - 4x - 6z = 3x + 3z \\ 3.2z = 0.2x + 75 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 400 = 7x + 9z \\ 16z = x + 375 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 400 = 7x + 9z \\ 16z - 375 = x \end{array} \right\} \Rightarrow 400 = 7(16z - 375) + 9z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400 = 112z - 2625 + 9z \Rightarrow 3025 = 121z \Rightarrow \boxed{z = \frac{3025}{121} = 25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 16 \cdot 25 - 375 = 25} \Rightarrow \boxed{y = 80 - 0.8 \cdot 25 - 1.2 \cdot 25 = 30}$$

En el partido se realizaron 25 lanzamientos de 1 punto, 30 de 2 puntos y 25 de 3 puntos.

Pregunta 1.2. Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1.25 puntos) Para $\lambda = 5$, calcular un vector no nulo $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que satisfaga que $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

a) Calculamos la expresión de la matriz $A - \lambda I$ y la de su determinante.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3 - \lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3 - \lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda) - 2(2 - \lambda) =$$

$$= (2 - \lambda)[(4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2] = (2 - \lambda)[12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2] =$$

$$= (2 - \lambda)[\lambda^2 - 7\lambda + 10] = 2\lambda^2 - 14\lambda + 20 - \lambda^3 + 7\lambda^2 - 10\lambda = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$$

Tenemos que el polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$.

Determinamos las raíces de este polinomio.

$$\left. \begin{array}{l} P(\lambda) = (2 - \lambda)[\lambda^2 - 7\lambda + 10] \\ P(\lambda) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (2 - \lambda)[\lambda^2 - 7\lambda + 10] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - \lambda = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 2} \\ \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = \boxed{5 = \lambda} \\ \frac{7-3}{2} = \boxed{2 = \lambda} \end{cases} \end{cases}$$

Las raíces del polinomio son $\lambda = 2$ y $\lambda = 5$.

b) Para $\lambda = 5$ la matriz $A - \lambda I$ queda $A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Hemos visto que tiene

determinante nulo y la situación planteada tiene infinitas soluciones.
Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ \Rightarrow x - y = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ \text{Ecuación 1}^a = \text{Ecuación 2}^a \} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow 3y + 2y - 3z = 0 \Rightarrow 5y - 3z = 0 \Rightarrow 5y = 3z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{5}{3}y \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \frac{5}{3}\alpha \end{pmatrix}; \alpha \in \mathbb{R}$$

Si tomamos $\alpha = 3$ tenemos el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ que cumple lo pedido.

Pregunta 2. Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

- a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[0,12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0,12]$ contenida completamente en el muro?
- b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.
- c) (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva $f(x)$?

a) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) \cdot \frac{\pi}{9}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi x}{9} = 0 \rightarrow x = 0 \\ \frac{\pi x}{9} = \pi \rightarrow x = 9 \\ \frac{\pi x}{9} = 2\pi \rightarrow x = 18 \notin [0,12] \\ \dots \end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo $[0,12]$ y en los puntos críticos obtenidos.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 = 3 \text{ Máximo} \\ f(9) &= \cos\left(\frac{9\pi}{9}\right) + 2 = 1 \text{ Mínimo} \\ f(12) &= \cos\left(\frac{12\pi}{9}\right) + 2 = 1.5 \end{aligned} \right\}$$

El valor máximo es 3 y se alcanza en $x = 0$ y el valor mínimo es 1 y se alcanza en $x = 9$.

Como el coseno de un ángulo toma como valor mínimo -1 y máximo 1 la función

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \text{ toma como valor mínimo } -1 + 2 = 1 \text{ y como valor máximo } 1 + 2 = 3.$$

Por lo que la curva está contenida en el muro en el intervalo $[0,12]$.

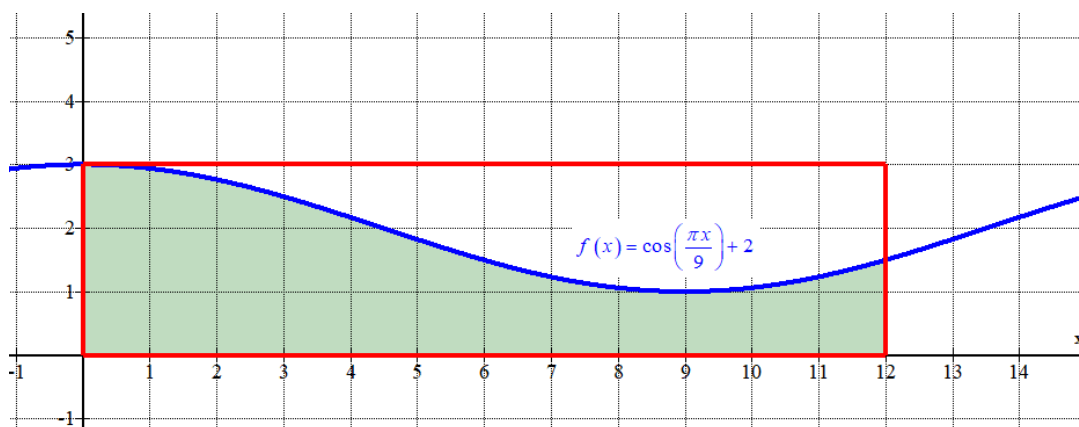
- b) El muro se divide en dos partes una por debajo de la curva y otra por encima de la curva. Hallamos el área de la parte de muro situada por debajo de la curva como la integral definida de la función entre 0 y 12.

$$\int_0^{12} f(x) dx = \int_0^{12} \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 dx = \left[\frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x \right]_0^{12} =$$

$$= \left[\frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{9}\right) + 24 \right] - \left[\frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 \cdot 0 \right] = \boxed{24 + \frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{9}\right) \approx 21.52}$$

La parte de muro situada por debajo de la curva tiene un área aproximada de 21.52 metros cuadrados.

Como el muro tiene una superficie de $3 \cdot 12 = 36$ metros cuadrados la parte superior tiene una superficie aproximada de $36 - 21.52 = 14.48$ metros cuadrados.



- c) Debemos pintar 21.52 metros cuadrados de muro. Como con cada bote de pintura se pintan 3 metros cuadrados de muro, entonces $\frac{21.52}{3} \approx 7.17$. Para pintar toda el área bajo la curva $f(x)$ se necesitarán, por lo menos, 8 botes de pintura, con 7 nos faltaría un trocito de muro por pintar y con 8 nos sobra un poco de pintura.

Pregunta 3.1. Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi: x+2y-3z=1$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π .
 b) (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r .
 c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

- a) El plano π' que contiene a r y es perpendicular a π tiene como vectores directores el vector director de la recta y el normal del plano. Además, contiene a todos los puntos de la recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 0, 1) \\ P_r(1, 0, 2) \end{cases} \quad \pi: x+2y-3z=1 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}' = \vec{v}_r = (2, 0, 1) \\ \vec{v}' = \vec{n} = (1, 2, -3) \\ P_r(1, 0, 2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y+4(z-2)+6y-2(x-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+4z-8+6y-2x+2=0 \Rightarrow \boxed{\pi': -2x+7y+4z-6=0}$$

El plano que contiene a r y es perpendicular a π tiene ecuación $\pi': -2x+7y+4z-6=0$.

- b) Una recta s perpendicular a la recta r debe tener vector director perpendicular a $\vec{v}_r = (2, 0, 1)$, como además debe estar contenida en el plano $\pi: x+2y-3z=1$ también debe ser perpendicular al vector normal del plano. Nos sirve como vector director de la recta s el producto vectorial de los vectores $\vec{v}_r = (2, 0, 1)$ y $\vec{n} = (1, 2, -3)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 2, -3) \\ \vec{v}_r = (2, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{w}_s = \vec{n} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 6j - 4k - j = 2i - 7j - 4k = (2, -7, -4)$$

Solo nos falta un punto por el que deba pasar la recta para cumplir lo pedido. Hallamos el punto P de corte del plano π y la recta r .

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=0 \\ z=2+\lambda \end{cases} \Rightarrow 1+2\lambda+0-3(2+\lambda)=1 \Rightarrow$$

$$\pi: x+2y-3z=1$$

$$\Rightarrow 1+2\lambda-6-3\lambda=1 \Rightarrow -\lambda=6 \Rightarrow \lambda=-6 \Rightarrow \begin{cases} x=1+2(-6)=-11 \\ y=0 \\ z=2-6=-4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(-11, 0, -4)}$$

La recta s buscada contiene el punto $P(-11, 0, -4)$ y tiene como vector director $\vec{w}_s = (2, -7, -4)$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_s = (2, -7, -4) \\ P(-11, 0, -4) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \frac{x+11}{2} = \frac{y}{-7} = \frac{z+4}{-4}$$

La recta contenida en π que corta perpendicularmente a r es $s: \frac{x+11}{2} = \frac{y}{-7} = \frac{z+4}{-4}$.

c) Cualquier punto de la recta r tiene coordenadas $Q(1+2\lambda, 0, 2+\lambda)$. Determinamos la expresión de la distancia de un punto de la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} Q(1+2\lambda, 0, 2+\lambda) \\ \pi: x+2y-3z-1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(Q, \pi) = \frac{|1+2\lambda+2\cdot 0-3(2+\lambda)-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{|1+2\lambda-6-3\lambda-1|}{\sqrt{14}} = \frac{|-6-\lambda|}{\sqrt{14}}$$

Averiguamos cuando esta expresión toma el valor $\sqrt{14}$.

$$d(Q, \pi) = \sqrt{14} \Rightarrow \frac{|-6-\lambda|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \Rightarrow |-6-\lambda| = 14 \Rightarrow \begin{cases} -6-\lambda = 14 \rightarrow -20 = \lambda \\ -6-\lambda = -14 \rightarrow 8 = \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -20 \rightarrow Q_1(1+2(-20), 0, 2-20) \rightarrow Q_1(-39, 0, -18) \\ \lambda = 8 \rightarrow Q_2(1+2\cdot 8, 0, 2+8) \rightarrow Q_2(17, 0, 10) \end{cases}$$

Los dos puntos de la recta que cumplen lo pedido son $Q_1(-39, 0, -18)$ y $Q_2(17, 0, 10)$.

Pregunta 3.2. Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi : x + y = 2$. Se pide:

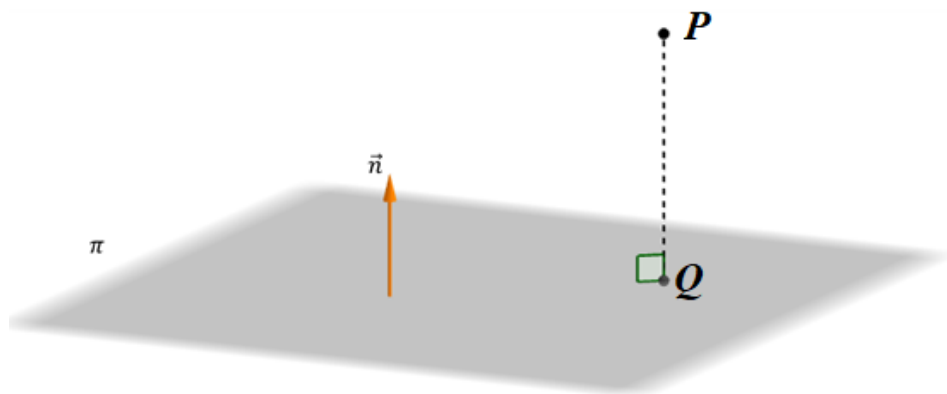
- (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π .
- (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π .
- (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

a) Calculamos la distancia pedida.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y - 2 = 0 \\ P(0,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi, P) = \frac{|0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ unidades}$$

La distancia del punto P al plano π tiene un valor de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades.

b) Debemos hallar el punto Q del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P . Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x + y - 2 = 0 \rightarrow \vec{n} = (1, 1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \vec{n} = (1, 1, 0) \\ P(0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

Este punto Q que buscamos pertenece al plano y pertenece a la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y = 2 \\ s : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + 1 + \alpha = 2 \Rightarrow 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)}$$

El punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π tiene coordenadas $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$.

c) Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y = 2 \\ \text{Eje } OX \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y = 2 \\ \text{Eje } OY \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0, 2, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y = 2 \\ \text{Eje } OZ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2 \Rightarrow \text{No hay punto de corte con } OZ$$

Los vértices del triángulo son $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $P(0, 1, 1)$.

El área del triángulo ABP es la mitad del módulo del producto vectorial de dos vectores que unan dos de sus lados adyacentes.

$$\left. \begin{array}{l} A(2, 0, 0) \\ B(0, 2, 0) \\ P(0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) - (2, 0, 0) = (-2, 2, 0) \\ \overrightarrow{AP} = (0, 1, 1) - (2, 0, 0) = (-2, 1, 1) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 2k + 4k + 2j = 2i + 2j + 2k = (2, 2, 2)$$

$$\text{Área } ABP = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \boxed{\sqrt{3} \text{ u}^2}$$

El área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados tiene un valor de $\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

Pregunta 4.1. Sea $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definida por: $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$ y con el resto de sucesos elementales equiprobables.

Se consideran los sucesos $A = \{7, 11, 13, 19\}$, $B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$ y $C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$. Se pide calcular:

a) (1.25 puntos) $P(\overline{(A-C)} \cap B)$.

b) (1.25 puntos) $P((A \cap B) / \overline{C})$.

Como $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$, $P(E) = 1$ y $P(2) = P(5) = P(11) = P(13) = P(17) = P(19) = p$

entonces $6p + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow 6p + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow 6p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{12}$.

Tenemos que $P(2) = P(5) = P(11) = P(13) = P(17) = P(19) = \frac{1}{12}$

a) Obtenemos el suceso $\overline{(A-C)} \cap B$.

$$\left. \begin{array}{l} A = \{7, 11, 13, 19\} \\ C = \{3, 5, 7, 11, 13\} \end{array} \right\} \Rightarrow A - C = \{19\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{A - C} = E - \{19\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} - \{19\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A - C} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\} \\ B = \{2, 5, 7, 13, 17\} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{(A - C)} \cap B = B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$$

Hallamos la probabilidad pedida.

$$P(\overline{(A - C)} \cap B) = P(2) + P(5) + P(7) + P(13) + P(17) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{7}{12}}$$

b) Determinamos el suceso $(A \cap B) / \overline{C}$.

$$\left. \begin{array}{l} A = \{7, 11, 13, 19\} \\ B = \{2, 5, 7, 13, 17\} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap B = \{7, 13\}$$

$$\left. \begin{array}{l} C = \{3, 5, 7, 11, 13\} \\ E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{C} = E - C = \{2, 17, 19\}$$

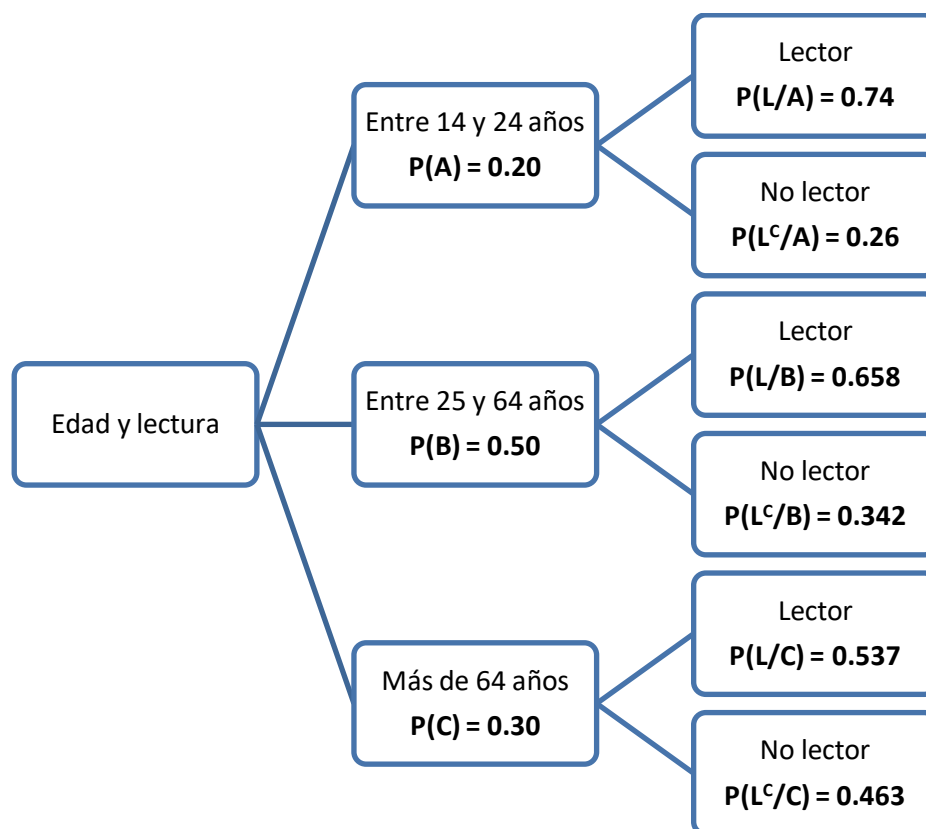
$$\left. \begin{array}{l} A \cap B = \{7, 13\} \\ \overline{C} = \{2, 17, 19\} \end{array} \right\} \Rightarrow (A \cap B) / \overline{C} = \emptyset$$

El suceso $(A \cap B) / \overline{C}$ es un suceso imposible y su probabilidad es cero: $P((A \cap B) / \overline{C}) = 0$

Pregunta 4.2. Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65.8% entre los de 25 a 64 y al 53.7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

- (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.
- (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

Realizamos un diagrama de árbol para ordenar toda la información. Llamamos A, B y C a los sucesos “edad entre 14 y 24 años”, “edad entre 25 y 64” y “mayor de 64 años”, respectivamente. También llamamos L a “ser lector habitual”.



- a) Nos piden calcular $P(L)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(L) &= P(A)P(L/A) + P(B)P(L/B) + P(C)P(L/C) = \\
 &= 0.2 \cdot 0.74 + 0.5 \cdot 0.658 + 0.3 \cdot 0.537 = \boxed{0.6381}
 \end{aligned}$$

- b) Nos piden calcular $P(B/L^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/L^c) = \frac{P(B \cap L^c)}{P(L^c)} = \frac{P(B)P(L^c/B)}{1 - P(L)} = \frac{0.5 \cdot 0.342}{1 - 0.6381} = \frac{1710}{3619} \approx 0.4725$$

PAU 2025 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS II	F
---	--	----------

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda x - y + 3z = 2 \\ 3x - 2y - z = 9 \\ 5x - 3y + \lambda z = 11 \end{cases}$$

- a) (1.5 puntos) Decida en función de los valores del parámetro real λ en qué casos el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
 b) (1 punto) Resuelva el sistema en el caso $\lambda = 2$.

Pregunta 1.2. Una matriz cuadrada se dice estocástica si todos sus elementos son no negativos y la suma de los elementos de cada columna de la matriz es igual a 1.

- a) (1.5 puntos) Consideremos la matriz estocástica $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$. Calcule todas las

matrices diagonales, $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, tales que DA sea una matriz estocástica.

- b) (1 punto) Sea B una matriz estocástica de orden 3. ¿Existe alguna matriz diagonal D , distinta de la identidad, de tal forma que BD sea estocástica?

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 2.1. Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Determinar su dominio y estudiar su paridad.
 b) (1 punto) Calcular los límites: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$.
 c) (0.75 puntos) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x = 1$,

Pregunta 2.2. (2.5 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 9}$$

Calcule la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ tal que $F(0) = \ln 3$.

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 3. Sara está revisando una estructura de vigas metálicas. Para ello, utiliza un programa de cálculo estructural que lleva integrado un módulo de diseño asistido por ordenador. El programa trata las vigas como segmentos entre dos puntos. Cuando dos segmentos comparten algún punto, se fijan simulando una soldadura. Para introducir un segmento basta indicar las coordenadas de los extremos del mismo.

Sara se ha dado cuenta de que una parte de la estructura no es lo suficientemente resistente. En concreto, ha encontrado dos vigas, no soldadas entre sí, que deben reforzarse, por lo que decide añadir otra viga que, soldándola a ambas, solucione el problema. Las dos vigas en cuestión son V1 cuyos extremos son los puntos A(1, 2, -3) y B(1, 6, 1) y V2 cuyos extremos son los puntos C(-2, -8, 7) y D(10, -4, 7).

- a) (1.25 puntos) Como primera solución, Sara decide que la viga añadida esté soldada a los puntos medios de V1 y V2. Calcule las coordenadas de los extremos de la viga añadida y los cosenos de los ángulos que forman dicha viga con V1 y con V2.
 - b) (1.25 puntos) Haciendo un análisis más detallado, Sara encuentra que la resistencia es mayor si la viga añadida es perpendicular tanto a V1 como a V2. Calcule, en el caso de que sea posible, las coordenadas de los extremos de la viga añadida si se adopta esta solución.
-

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. En una empresa tecnológica internacional el 70% de los empleados son europeos, una tercera parte de los empleados no europeos se dedica al desarrollo de software, labor a la que se dedican también tres de cada siete de los empleados europeos. Por el cincuenta aniversario la empresa elige al azar un empleado que será agraciado con un importante paquete de acciones de la empresa. Con estos datos se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el empleado agraciado sea uno de los europeos que no realiza desarrollo de software en la empresa.
- b) (1.5 puntos) En un segundo sorteo se toman al azar 10 empleados distintos y recibirán el mismo paquete de acciones, a repartir, si como mucho 2 de ellos desarrollan software para la empresa. Calcular la probabilidad de que la empresa tenga que dar este segundo paquete de acciones.

Pregunta 4.2. Sean A y B dos sucesos en un espacio muestral, $\bar{A}$ y $\bar{B}$ los correspondientes sucesos complementarios. Se sabe que $P(A) = 0.7$, $P(\bar{B}) = 0.2$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1$

- a) (0.5 puntos) Razone si $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son dos sucesos independientes.
- b) (1 punto) Calcule $P(A \cap B)$.
- b) (1.25 puntos) Calcule $P(\bar{A} / B)$.

SOLUCIONES

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda x - y + 3z = 2 \\ 3x - 2y - z = 9 \\ 5x - 3y + \lambda z = 11 \end{cases}$$

- a) (1.5 puntos) Decida en función de los valores del parámetro real λ en qué casos el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
 b) (1 punto) Resuelva el sistema en el caso $\lambda = 2$.

a) Este sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 9 \\ 5 & -3 & \lambda & 11 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 5 - 27 + 30 + \cancel{3\lambda} - \cancel{3\lambda} = -2\lambda^2 + 8$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2\lambda^2 + 8 \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \boxed{\lambda = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $\lambda = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más fácil de analizar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 10 \quad -6 \quad 4 \quad 22 \\ -10 \quad 5 \quad -15 \quad -10 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -11 \quad 12 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 6 \quad -4 \quad -2 \quad 18 \\ -6 \quad 3 \quad -9 \quad -6 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -11 \quad 12 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -11 & 12 \\ 0 & -1 & -11 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad -11 \quad 12 \\ 0 \quad 1 \quad 11 \quad 12 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{2 \quad -1 \quad 3 \quad 2}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad -11 \quad 12 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. $\lambda = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 9 \\ 5 & -3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a + 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 10 \quad -6 \quad -4 \quad 22 \\ -10 \quad -5 \quad 15 \quad 10 \\ \hline 0 \quad -11 \quad 11 \quad 32 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a + 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 6 \quad -4 \quad -2 \quad 18 \\ -6 \quad -3 \quad 9 \quad 6 \\ \hline 0 \quad -7 \quad 7 \quad 24 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 24 \\ 0 & -11 & 11 & 32 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 7 \cdot \text{Fila } 3^a - 11 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -77 \quad 77 \quad 224 \\ 0 \quad 77 \quad -77 \quad -168 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 56 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{-2 \quad -1 \quad 3 \quad 2}^{A/B} \\ 0 \quad -7 \quad 7 \quad 24 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 56}_A \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Para $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -2$ el sistema es **compatible determinado**, para $\lambda = 2$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $\lambda = -2$ el sistema es **incompatible**.

a) Si $\lambda = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

Buscamos las soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ -y - 11z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ -12 - 11z = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 12 + 11z + 3z = 2 \Rightarrow 2x + 14z = -10 \Rightarrow x + 7z = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -5 - 7z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -5 - 7\lambda \\ y = -12 - 11\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $x = -5 - 7\lambda$; $y = -12 - 11\lambda$; $z = \lambda$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pregunta 1.2. Una matriz cuadrada se dice estocástica si todos sus elementos son no negativos y la suma de los elementos de cada columna de la matriz es igual a 1.

a) (1.5 puntos) Consideremos la matriz estocástica $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$. Calcule todas las

matrices diagonales, $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, tales que DA sea una matriz estocástica.

b) (1 punto) Sea B una matriz estocástica de orden 3. ¿Existe alguna matriz diagonal D , distinta de la identidad, de tal forma que BD sea estocástica?

a) Determinamos la expresión de la matriz DA .

$$DA = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/3 & 0 & x/2 \\ y/3 & y/2 & y/4 \\ z/3 & z/2 & z/4 \end{pmatrix}$$

Para ser una matriz estocástica deben sumar las diagonales 1.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1 \\ \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ 2x + y + z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ y = 2 - z \\ 2x + y + z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2 - z + z = 3 \\ 2x + 2 - z + z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ 2x = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 - \alpha; \text{ siendo } \alpha \geq 0; 2 - \alpha \geq 0 \\ z = \alpha \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 - \alpha; \text{ siendo } 0 \leq \alpha \leq 2 \\ z = \alpha \end{array} \right\}$$

Las matrices diagonales $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, siendo $z \in [0, 2]$ cumplen que DA es una matriz estocástica.

b) Si $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal la matriz BD queda

$$BD = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & by & cz \\ dx & ey & fz \\ gx & hy & iz \end{pmatrix}.$$

Sabemos que la matriz B es estocásticas por lo que todos sus elementos son no negativos y la suma de los elementos de cada columna vale 1.

Para que la matriz BD sea una matriz estocástica deben ser todos los elementos positivos o cero, por lo que $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. También deben sumar 1 los elementos de cada columna.

$$ax + dx + gx = 1 \Rightarrow (a + d + g)x = 1 \Rightarrow \{a + d + g = 1\} \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$by + ey + hy = 1 \Rightarrow (b + e + h)y = 1 \Rightarrow \{b + e + h = 1\} \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$$cz + fz + iz = 1 \Rightarrow (c + f + i)z = 1 \Rightarrow \{c + f + i = 1\} \Rightarrow \boxed{z=1}$$

La única matriz diagonal que cumple lo pedido es $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:**Pregunta 2.1.** Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Determinar su dominio y estudiar su paridad.

b) (1 punto) Calcular los límites: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$.c) (0.75 puntos) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x = 1$,

a) El dominio de la función son todos los números reales que hacen positivo o cero el radicando.

$$x^2 + 3x \geq 0 \Rightarrow x(x+3) \geq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \geq -3 \end{array} \right\} \rightarrow x \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ x+3 \leq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \leq -3 \end{array} \right\} \rightarrow x \leq -3$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$$

El dominio de la función es $(-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$.Estudiamos la paridad de la función. Obtenemos la expresión de $f(-x)$.

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 3(-x)} = \sqrt{x^2 - 3x}$$

Esta expresión de $f(-x)$ no es igual ni a $f(x)$ ni a $-f(x)$. La función no es par ni impar.

b) Calculamos el primer límite.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x} = \{x < 0 \rightarrow -x > 0\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{x^2 + 3x}}{-x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{x^2}{(-x)^2} + \frac{3x}{(-x)^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{3}{x}} = -\sqrt{1 + \frac{3}{-\infty}} = -\sqrt{1+0} = \boxed{-1}$$

Comprobamos el resultado obtenido dando un valor muy pequeño $x = -1000$ y valoramos la cercanía a -1 .

$$\frac{f(-1000)}{-1000} = \frac{\sqrt{(-1000)^2 + 3(-1000)}}{-1000} \simeq -0.9985$$

El resultado obtenido parece correcto.

Calculamos el segundo límite.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x) = \infty - \infty = \text{Indeterminación (Conjugado)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)(\sqrt{x^2 + 3x} - x)}{\sqrt{x^2 + 3x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} - x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x} - \frac{x}{x}} = \{x < 0 \rightarrow -x > 0\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\frac{-\sqrt{x^2 + 3x}}{-x} - 1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-\sqrt{\frac{x^2}{(-x)^2} + \frac{3x}{(-x)^2}} - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - 1} = \\
&= \frac{3}{-\sqrt{1 + \frac{3}{\infty}} - 1} = \frac{3}{-\sqrt{1 + 0} - 1} = \frac{3}{-1 - 1} = \boxed{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Comprobamos el resultado obtenido dando un valor muy pequeño $x = -1000$ y valoramos la cercanía a -1.5 .

$$f(-1000) - 1000 = \sqrt{(-1000)^2 + 3(-1000)} - 1000 \approx -1.50113$$

El resultado obtenido parece correcto.

También lo podemos resolver cambiando al principio para que x tienda a $+\infty$ y no tengamos problemas al introducir x en la raíz.

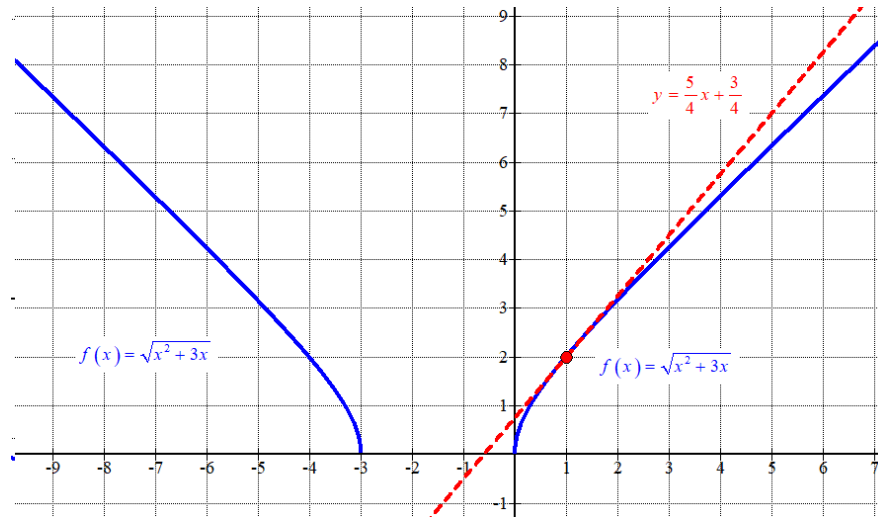
$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(-x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(-x)^2 - 3x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - x) = \\
&= \infty - \infty = \text{Indeterminación (Conjugado)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x} - x)(\sqrt{x^2 - 3x} + x)}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-3x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2}} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} + 1} = \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{3}{+\infty}} + 1} = \frac{-3}{\sqrt{1 - 0} + 1} = \boxed{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

c) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x=1$ tiene la expresión $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{2 \cdot 1 + 3}{2\sqrt{1^2 + 3 \cdot 1}} = \frac{5}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} y - f(1) = f'(1)(x-1) \\ f(1) = \sqrt{1^2 + 3} = 2 \\ f'(1) = \frac{5}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = \frac{5}{4}(x-1) \Rightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4} + 2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}}$$

La recta $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$ es la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x = 1$.



Pregunta 2.2. (2.5 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 9}$$

Calcule la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ tal que $F(0) = \ln 3$.

Para el cálculo de la primitiva pedida primero realizamos la división y simplificamos la expresión de la función.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & -x^2 & & x^2+9 \\ -x^3 & & -9x & \\ \hline & -x^2 & -9x & \\ & x^2 & & +9 \\ & \hline & & -9x & +9 \end{array} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 9} = x - 1 + \frac{-9x + 9}{x^2 + 9}$$

Calculamos la primitiva.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 9} dx = \int x - 1 + \frac{-9x + 9}{x^2 + 9} dx =$$

$$= \int x - 1 dx + \int \frac{-9x + 9}{x^2 + 9} dx = \frac{x^2}{2} - x - 9 \int \frac{x - 1}{x^2 + 9} dx = \dots$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 1}{x^2 + 9} dx &= \int \frac{x}{x^2 + 9} dx - \int \frac{1}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 9} dx - \frac{1}{9} \int \frac{1}{\frac{x^2}{9} + 1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 9) - \frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 9) - \frac{3}{9} \int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 9) - \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\dots = \frac{x^2}{2} - x - 9 \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + 9) - \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) \right) = \boxed{\frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2} \ln(x^2 + 9) + 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C}$$

Determinamos el valor de C aplicando que $F(0) = \ln 3$.

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2} \ln(x^2 + 9) + 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C \\ F(0) &= \ln 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 3 = \frac{0^2}{2} - 0 - \frac{9}{2} \ln(0^2 + 9) + 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{3}\right) + C \Rightarrow \ln 3 = -\frac{9}{2} \ln 9 + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \ln 3 + \frac{9}{2} \ln 9 = \ln 3 + \frac{9}{2} \ln 3^2 = \ln 3 + \frac{9}{2} \cdot 2 \ln 3 = 10 \ln 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2} \ln(x^2 + 9) + 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + 10 \ln 3}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2} \ln(x^2 + 9) + 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + 10 \ln 3$.

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 3. Sara está revisando una estructura de vigas metálicas. Para ello, utiliza un programa de cálculo estructural que lleva integrado un módulo de diseño asistido por ordenador. El programa trata las vigas como segmentos entre dos puntos. Cuando dos segmentos comparten algún punto, se fijan simulando una soldadura. Para introducir un segmento basta indicar las coordenadas de los extremos del mismo.

Sara se ha dado cuenta de que una parte de la estructura no es lo suficientemente resistente. En concreto, ha encontrado dos vigas, no soldadas entre sí, que deben reforzarse, por lo que decide añadir otra viga que, soldándola a ambas, solucione el problema. Las dos vigas en cuestión son V1 cuyos extremos son los puntos A(1, 2, -3) y B(1, 6, 1) y V2 cuyos extremos son los puntos C(-2, -8, 7) y D(10, -4, 7).

- a) (1.25 puntos) Como primera solución, Sara decide que la viga añadida esté soldada a los puntos medios de V1 y V2. Calcule las coordenadas de los extremos de la viga añadida y los cosenos de los ángulos que forman dicha viga con V1 y con V2.
- b) (1.25 puntos) Haciendo un análisis más detallado, Sara encuentra que la resistencia es mayor si la viga añadida es perpendicular tanto a V1 como a V2. Calcule, en el caso de que sea posible, las coordenadas de los extremos de la viga añadida si se adopta esta solución.

a) Determinamos los puntos medios de las vigas V1 y V2.

$$V1 \rightarrow \left. \begin{matrix} A(1, 2, -3) \\ B(1, 6, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow PM_1 = \frac{(1, 2, -3) + (1, 6, 1)}{2} = (1, 4, -1)$$

$$V2 \rightarrow \left. \begin{matrix} C(-2, -8, 7) \\ D(10, -4, 7) \end{matrix} \right\} \Rightarrow PM_2 = \frac{(-2, -8, 7) + (10, -4, 7)}{2} = (4, -6, 7)$$

Los extremos de la viga añadida V3 son $PM_1(1, 4, -1)$ y $PM_2(4, -6, 7)$.

Hallamos los vectores que define cada viga.

$$V1 \rightarrow \left. \begin{matrix} A(1, 2, -3) \\ B(1, 6, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} = (1, 6, 1) - (1, 2, -3) = (0, 4, 4)$$

$$V2 \rightarrow \left. \begin{matrix} C(-2, -8, 7) \\ D(10, -4, 7) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{v}_2 = \overrightarrow{CD} = (10, -4, 7) - (-2, -8, 7) = (12, 4, 0)$$

$$V3 \rightarrow \left. \begin{matrix} PM_1(1, 4, -1) \\ PM_2(4, -6, 7) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{v}_3 = \overrightarrow{PM_2PM_1} = (1, 4, -1) - (4, -6, 7) = (-3, 10, -8)$$

Hallamos los cosenos de los ángulos que forman la viga V3 con V1 y con V2 usando el producto escalar de los vectores que definen cada viga.

$$\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_3) = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_3|} = \frac{(0, 4, 4) \cdot (-3, 10, -8)}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2} \sqrt{(-3)^2 + 10^2 + (-8)^2}} = \frac{40 - 32}{\sqrt{32} \sqrt{173}} = \frac{2}{\sqrt{346}}$$

$$\cos(\vec{v}_2, \vec{v}_3) = \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3}{|\vec{v}_2| \cdot |\vec{v}_3|} = \frac{(12, 4, 0)(-3, 10, -8)}{\sqrt{12^2 + 4^2 + 0^2} \sqrt{(-3)^2 + 10^2 + (-8)^2}} = \frac{-36 + 40}{\sqrt{160} \sqrt{173}} = \frac{1}{\sqrt{1730}}$$

El coseno del ángulo que forman la viga V3 con V1 es $\cos(V1, V3) = \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_3) = \frac{2}{\sqrt{346}}$ y el

coseno del ángulo que forma V3 con V2 es $\cos(V2, V3) = \cos(\vec{v}_2, \vec{v}_3) = \frac{1}{\sqrt{1730}}$.

b) Analizamos la situación de la viga V1 con respecto a la V2.

Las vigas no son paralelas pues los vectores que definen no tienen coordenadas proporcionales.

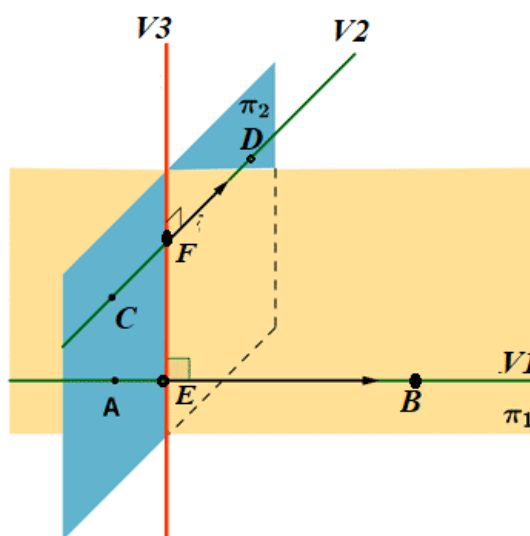
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 = (0, 4, 4) \\ \vec{v}_2 = (12, 4, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0}{12} \neq \frac{4}{4} \neq \frac{4}{0}$$

Analizamos si las vigas están en el mismo plano. Para ello los puntos A, B, C y D deben ser coplanarios.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, -3) \\ B(1, 6, 1) \\ C(-2, -8, 7) \\ D(10, -4, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 4, 4) \\ \overrightarrow{CD} = (12, 4, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-2, -8, 7) - (1, 2, -3) = (-3, -10, 10) \end{array} \right.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 12 & 4 & 0 \\ -3 & -10 & 10 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 480 + 48 - 480 - 0 = -912 \neq 0$$

Al ser el producto mixto distinto de cero las vigas no están en el mismo plano y se cruzan. Se pueden unir con una viga que sea perpendicular a ambas vigas V1 y V2.



Para hallar los extremos E y F de la viga V3 determinamos el vector perpendicular a las vigas V1 y V2 que es el producto vectorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 = (0, 4, 4) \\ \vec{v}_2 = (12, 4, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 0 \\ 12 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 16i + 48k - 48j = (16, -48, 48)$$

Tomamos como vector perpendicular a las vigas el vector:

$$\vec{w} = \frac{1}{16} \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \frac{1}{16} (16, -48, 48) = (1, -3, 3)$$

Hallamos las ecuaciones de las rectas que definen cada una de las vigas.

$$V1 \rightarrow \left. \begin{array}{l} A(1, 2, -3) \\ B(1, 6, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = \frac{1}{4} \vec{v}_1 = \frac{1}{4} (0, 4, 4) = (0, 1, 1) \\ A(1, 2, -3) \in r_1 \end{array} \right\} \Rightarrow r_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = -3 + \alpha \end{cases}$$

$$V2 \rightarrow \left. \begin{array}{l} C(-2, -8, 7) \\ D(10, -4, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_2 = \frac{1}{4} \vec{v}_2 = \frac{1}{4} (12, 4, 0) = (3, 1, 0) \\ C(-2, -8, 7) \in r_2 \end{array} \right\} \Rightarrow r_2 : \begin{cases} x = -2 + 3\beta \\ y = -8 + \beta \\ z = 7 \end{cases}$$

Hallamos las ecuaciones de los planos π_1 y π_2 . El plano π_1 contiene a la recta r_1 y tiene como vector director $\vec{w}$ y el plano π_2 contiene a la recta r_2 y tiene como vector director $\vec{w}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w} = (1, -3, 3) \\ \vec{u}_1 = (0, 1, 1) \\ A(1, 2, -3) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3(x-1) + z+3 - y+2 - 3(x-1) = 0 \Rightarrow -3x+3+z+3-y+2-3x+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_1 : -6x - y + z + 11 = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w} = (1, -3, 3) \\ \vec{u}_2 = (3, 1, 0) \\ C(-2, -8, 7) \in \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x+2 & y+8 & z-7 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(y+8) + z-7 + 9(z-7) - 3(x+2) = 0 \Rightarrow 9y+72+z-7+9z-63-3x-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_2 : -3x + 9y + 10z - 4 = 0}$$

El punto F es el punto de corte del plano π_1 con la recta r_2 .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: -6x - y + z + 11 = 0 \\ r_1: \begin{cases} x = -2 + 3\beta \\ y = -8 + \beta \\ z = 7 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -6(-2 + 3\beta) + 8 - \beta + 7 + 11 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 - 18\beta + 8 - \beta + 7 + 11 = 0 \Rightarrow -19\beta + 38 = 0 \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 3 \cdot 2 = 4 \\ y = -8 + 2 = -6 \\ z = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{F(4, -6, 7)}$$

El punto E es el punto de corte del plano π_2 con la recta r_1 .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_2: -3x + 9y + 10z - 4 = 0 \\ r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = -3 + \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -3 + 9(1 + 2\alpha) + 10(-3 + \alpha) - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 + 9 + 18\alpha - 30 + 10\alpha - 4 = 0 \Rightarrow 28\alpha - 28 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2 = 3 \\ z = -3 + 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E(1, 3, -2)}$$

Los puntos de apoyo de la viga V3 son $E(1, 3, -2)$ y $F(4, -6, 7)$.

Solo faltaría comprobar que el punto F está situado entre C y D, por lo que se apoya en la viga V2. También que el punto E está situado entre A y B y que la viga V3 se apoya en la viga V1.

Comprobamos que los vectores $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{EB}$ tienen el mismo sentido

$$\left. \begin{array}{l} E(1, 3, -2) \\ A(1, 2, -3) \\ B(1, 6, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AE} = (1, 3, -2) - (1, 2, -3) = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{EB} = (1, 6, 1) - (1, 3, -2) = (0, 3, 3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{AE}$$

Comprobamos que los vectores $\overrightarrow{CF}$ y $\overrightarrow{FD}$ tienen el mismo sentido.

$$\left. \begin{array}{l} F(4, -6, 7) \\ C(-2, -8, 7) \\ D(10, -4, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CF} = (4, -6, 7) - (-2, -8, 7) = (6, 2, 0) \\ \overrightarrow{FD} = (10, -4, 7) - (4, -6, 7) = (6, 2, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FD}$$

El punto F es el punto medio de la viga V2.

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. En una empresa tecnológica internacional el 70% de los empleados son europeos, una tercera parte de los empleados no europeos se dedica al desarrollo de software, labor a la que se dedican también tres de cada siete de los empleados europeos. Por el cincuenta aniversario la empresa elige al azar un empleado que será agraciado con un importante paquete de acciones de la empresa. Con estos datos se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que el empleado agraciado sea uno de los europeos que no realiza desarrollo de software en la empresa.
- (1.5 puntos) En un segundo sorteo se toman al azar 10 empleados distintos y recibirán el mismo paquete de acciones, a repartir, si como mucho 2 de ellos desarrollan software para la empresa. Calcular la probabilidad de que la empresa tenga que dar este segundo paquete de acciones.

Pasamos estos valores porcentuales a valores absolutos para obtener toda la información sobre el grupo de empleados. Podremos aplicar la regla de Laplace y responder a las cuestiones planteadas.

Supongamos que hay 100 empleados. El 70% de los empleados son europeos, es decir, hay 70 empleados que son europeos y por tanto hay $100 - 70 = 30$ empleados que no son europeos. Una tercera parte de los empleados no europeos (30) se dedica al desarrollo de software $\rightarrow 30/3 = 10$ empleados no europeos desarrollan software, labor a la que se dedican también tres de cada siete de los empleados europeos $\rightarrow \frac{3}{7} \cdot 70 = 30$ empleados europeos desarrollan software.

Colocamos estos datos en una tabla para tenerlos organizados y fácilmente localizables.

	Desarrollan Software	No desarrollan software	
Europeos	30		70
No europeos	10		30
			100

Completamos la tabla.

	Desarrollan Software	No desarrollan software	
Europeos	30	40	70
No europeos	10	20	30
	40	60	100

- De los 100 empleados solo 40 son europeos que no desarrollan software. La probabilidad de que al elegir a un empleado sea europeo y no desarrolle software es $\frac{40}{100} = 0.4$.

- Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de empleados que desarrollan software de un grupo de 10 empleados elegidos al azar. Esta variable es binomial con parámetros $n = 10$ y $p = 0.4$. $X = B(10, 0.4)$

Nos piden calcular $P(X \leq 2)$.

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{10}{0} 0.4^0 \cdot 0.6^{10} + \binom{10}{1} 0.4^1 \cdot 0.6^9 + \\
 &+ \binom{10}{2} 0.4^2 \cdot 0.6^8 = 0.6^{10} + 10 \cdot 0.4 \cdot 0.6^9 + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^8 = \boxed{0.1673}
 \end{aligned}$$

Pregunta 4.2. Sean A y B dos sucesos en un espacio muestral, $\bar{A}$ y $\bar{B}$ los correspondientes sucesos complementarios. Se sabe que $P(A)=0.7$, $P(\bar{B})=0.2$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B})=0.1$

a) (0.5 puntos) Razone si $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son dos sucesos independientes.

b) (1 punto) Calcule $P(A \cap B)$.

b) (1.25 puntos) Calcule $P(\bar{A} / B)$.

a) Para que dos sucesos sean independientes debe cumplirse que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$.

$$\left. \begin{array}{l} P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3 \\ P(\bar{B}) = 0.2 \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1 \end{array} \right\} \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1 \neq 0.06 = 0.3 \cdot 0.2 = P(\bar{A})P(\bar{B})$$

Los sucesos $\bar{A}$ y $\bar{B}$ no son independientes.

b) Hallamos la probabilidad de la unión de los sucesos A y B aplicando una de las leyes de Morgan.

$$\left. \begin{array}{l} P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.1 = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - 0.1 = 0.9$$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B) = 0.9 \\ P(A) = 0.7 \\ P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.2 = 0.8 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.9 = 0.7 + 0.8 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.7 + 0.8 - 0.9 = 0.6}$$

c) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{A} / B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.8 - 0.6}{0.8} = \boxed{0.25}$$

EvaU 2024 Extraordinaria Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2023-2024 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro λ ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de λ .
- (1 punto) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x = 5$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

- (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0, 0)$.
- (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $(1, 1)$.
- (0.5 puntos) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los puntos $P(1, -1, 3)$ y $Q(2, 1, -1)$:

- (1 punto) Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.
- (1.5 puntos) El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x - 2 = y = z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2 , de igual probabilidad 0.4 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0.2). De cierto suceso B se sabe que $P(B|A_1) = P(B|A_2)$ y $P(B|A_3) = 2P(B|A_1)$. Y de un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C|A_2) = 0.3$ y $P(C|A_3) = 0.6$. Con estos datos se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de B si $P(B|A_1) = 0.25$.
- (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2 .

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Como es bien sabido, la siguiente igualdad de determinantes

$$\det(A+B) = \det A + \det B$$

no es cierta en general.

- a) (0.75 puntos) Si A y B son dos matrices para las que $\det(A+B) = \det A + \det B$, pruebe que entonces

$$\det((A+B)^2) = \det(A^2) + \det(B^2) + 2\det(AB).$$

- b) (1 punto) Dadas las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

determine el único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $\det(C+D) = \det C + \det D$

- c) (0.75 puntos) Para el valor $\alpha = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- b) (1.75 puntos) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x(x-3)$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el punto $P(5, -1, 2)$ y las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}, \quad s \equiv \begin{cases} x-y=5 \\ x+z=3 \end{cases}$$

se pide:

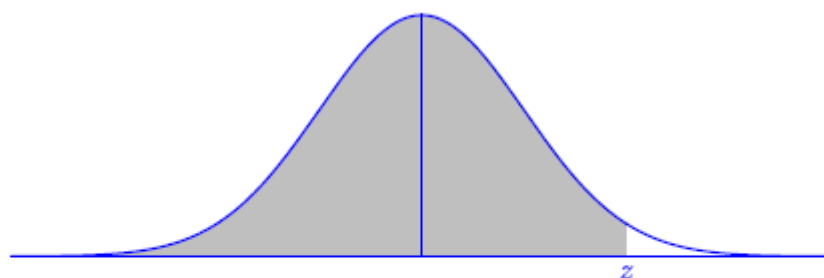
- a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.
- b) (1.5 puntos) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r .

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quién friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta el centro de la diana en el 25% de sus lanzamientos y Benito en el 30%, se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.
- b) (1.5 puntos) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro λ ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de λ .

b) (1 punto) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x = 5$.

b) El sistema queda

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + \cancel{\lambda} + (\lambda-1)^2 - \cancel{\lambda} - \lambda + 1 + 0 =$$

$$= \lambda^2 + 1 - 2\lambda - \lambda + 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (2)}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2 = \lambda} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1 = \lambda} \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $\lambda = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
 Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 2}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -2}_A \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $\lambda = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
 Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 3^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad 1 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 1$ el sistema es **compatible determinado**, para $\lambda = 1$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $\lambda = 2$ el sistema es **incompatible**.

c) Si $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

Buscamos las soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=1-z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=-\lambda \\ y=1-\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $x = -\lambda$; $y = 1 - \lambda$; $z = \lambda$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Buscamos una posible solución con $x = 5$.

$$\begin{cases} x = -\lambda = 5 \rightarrow \lambda = -5 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ z = -5 \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = 5$; $y = 6$; $z = -5$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

- a) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0, 0)$.
- b) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $(1, 1)$.
- c) (0.5 puntos) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

- a) La función pedida tiene la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Si la recta $y = x$ es tangente a la gráfica de la función en el punto $(0, 0)$ implica que la función pasa por $(0, 0)$, es decir, $f(0) = 0$ y que la pendiente de la recta tangente vale 1, es decir, $f'(0) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(x) = ax^2 + bx + c \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \\ f'(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = 2a \cdot 0 + b \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

La función polinómica que cumple lo pedido tiene la expresión $f(x) = ax^2 + x$.

Tomamos $a = 1$ y tenemos la función $f(x) = x^2 + x$ como ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0, 0)$.

- b) La función pedida tiene la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Si la función tiene un máximo relativo en $(1, 1)$ implica que la función pasa por $(1, 1)$, es decir, $f(1) = 1$, que la derivada se anula en $x = 1$, es decir, $f'(1) = 0$. y que la segunda derivada toma valor negativo en $x = 1$, es decir $f''(1) < 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(x) = ax^2 + bx + c \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{1 = a + b + c}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{0 = 2a + b}$$

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 2a \Rightarrow f''(1) = 2a < 0 \Rightarrow \boxed{a < 0}$$

Deben cumplirse las tres condiciones.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 1 \\ 2a + b = 0 \\ a < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 1 \\ b = -2a \\ a < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a - 2a + c = 1 \Rightarrow -a + c = 1 \Rightarrow c = 1 + a$$

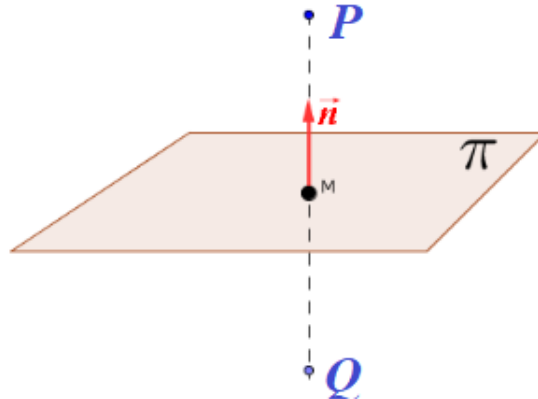
La función queda $f(x) = ax^2 - 2ax + 1 + a$. Tomamos $a = -1 < 0$ y tenemos a la función $f(x) = -x^2 + 2x$ como ejemplo de función polinómica de grado 2 que tiene un máximo relativo en el punto (1, 1).

- c) Una función polinómica de grado 2 tiene la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$. Su derivada es $f'(x) = 2ax + b$ que se anula para un único valor de x . Solo puede tener un punto crítico y por tanto un único máximo o mínimo relativo.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.Sean los puntos $P(1, -1, 3)$ y $Q(2, 1, -1)$:

- a) (1 punto) Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.
 b) (1.5 puntos) El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x - 2 = y = z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

- a) El plano debe pasar por el punto medio M del segmento PQ.



$$M = \frac{(1, -1, 3) + (2, 1, -1)}{2} = (3/2, 0, 1)$$

El vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{PQ} = (2, 1, -1) - (1, -1, 3) = (1, 2, -4)$.

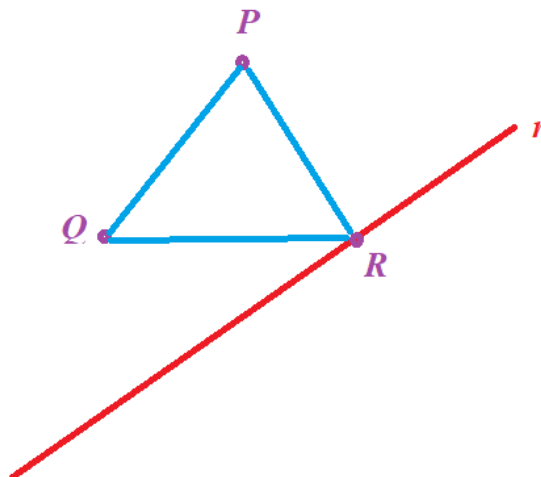
Hallamos la ecuación del plano.

$$\left. \begin{array}{l} M(3/2, 0, 1) \in \pi \\ \vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (1, 2, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M(3/2, 0, 1) \in \pi \\ \pi: x + 2y - 4z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2} + 0 - 4 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \frac{5}{2} \Rightarrow \pi: x + 2y - 4z + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + 4y - 8z + 5 = 0}$$

La ecuación del plano respecto del cual los puntos P y Q son simétricos es $\pi: 2x + 4y - 8z + 5 = 0$.

- b) La situación es la del dibujo.



Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta r .

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1,1,1) \\ P_r(2,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El punto R pertenece a la recta y tiene coordenadas $R(2 + \lambda, \lambda, \lambda)$.

Hallamos las longitudes de los lados del triángulo.

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 2, -4) \Rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QR} &= (2 + \lambda, \lambda, \lambda) - (2, 1, -1) = (\lambda, \lambda - 1, \lambda + 1) \Rightarrow |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{\lambda^2 + (\lambda - 1)^2 + (\lambda + 1)^2} = \\ &= \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 + \lambda^2 + 2\lambda + 1} = \sqrt{3\lambda^2 + 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= (2 + \lambda, \lambda, \lambda) - (1, -1, 3) = (1 + \lambda, 1 + \lambda, \lambda - 3) \Rightarrow |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{(1 + \lambda)^2 + (1 + \lambda)^2 + (\lambda - 3)^2} = \\ &= \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 1 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 + \lambda^2 - 6\lambda + 9} = \sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 11} \end{aligned}$$

La suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34.

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 + |\overrightarrow{QR}|^2 + |\overrightarrow{PR}|^2 = 34 \Rightarrow (\sqrt{21})^2 + (\sqrt{3\lambda^2 + 2})^2 + (\sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 11})^2 = 34 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21 + 3\lambda^2 + 2 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 11 = 34 \Rightarrow 6\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda(3\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Tenemos dos puntos de la recta r que cumplen lo pedido.

$$\text{Si } \lambda = 0 \Rightarrow R(2, 0, 0) \text{ y si } \lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow R\left(2 + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow R\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Como el tercer vértice R no debe tener ninguna de sus coordenadas nula solo es válido el punto $R\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2 , de igual probabilidad 0.4 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0.2). De cierto suceso B se sabe que $P(B|A_1) = P(B|A_2)$ y $P(B|A_3) = 2P(B|A_1)$. Y de un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C|A_2) = 0.3$ y $P(C|A_3) = 0.6$. Con estos datos se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de B si $P(B|A_1) = 0.25$.
 b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2 .

Sabemos que $P(A_1) = P(A_2) = 0.4$.

Nos dicen que $P(A_3) = P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 0.2$.

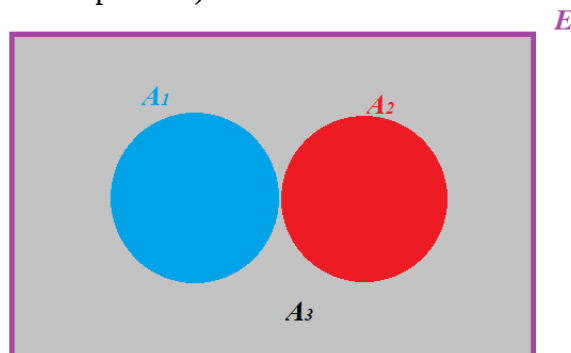
$$P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 0.2 \Rightarrow 1 - P(A_1 \cup A_2) = 0.2 \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.4 + 0.4 - P(A_1 \cap A_2) = 0.8 \Rightarrow \boxed{P(A_1 \cap A_2) = 0}$$

Los sucesos A_1 y A_2 son incompatibles ($A_1 \cap A_2 = \emptyset$).

Reflejamos en el diagrama de Venn que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = E$ y además las intersecciones entre ellos son vacías (sucesos incompatibles).



- a) Sabemos que $P(B|A_1) = P(B|A_2) = 0.25$ y $P(B|A_3) = 2P(B|A_1)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B|A_1) = 0.25 \Rightarrow \frac{P(B \cap A_1)}{P(A_1)} = 0.25 \Rightarrow \frac{P(B \cap A_1)}{0.4} = 0.25 \Rightarrow P(B \cap A_1) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1$$

$$P(B|A_2) = 0.25 \Rightarrow \frac{P(B \cap A_2)}{P(A_2)} = 0.25 \Rightarrow \frac{P(B \cap A_2)}{0.4} = 0.25 \Rightarrow P(B \cap A_2) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1$$

$$P(B|A_3) = 2P(B|A_1) = 2 \cdot 0.25 = 0.5 \Rightarrow \frac{P(B \cap A_3)}{P(A_3)} = 0.5 \Rightarrow P(B \cap A_3) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1$$

Como $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) = 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.3$.

- b) Sabemos que C es independiente de A_1 por lo que $P(C \cap A_1) = P(C)P(A_1) = 0.4P(C)$
También sabemos que $P(C | A_2) = 0.3$ y $P(C | A_3) = 0.6$.

$$P(C | A_2) = 0.3 \Rightarrow \frac{P(C \cap A_2)}{P(A_2)} = 0.3 \Rightarrow \frac{P(C \cap A_2)}{0.4} = 0.3 \Rightarrow P(C \cap A_2) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12$$

$$P(C | A_3) = 0.6 \Rightarrow \frac{P(C \cap A_3)}{P(A_3)} = 0.6 \Rightarrow \frac{P(C \cap A_3)}{0.2} = 0.6 \Rightarrow P(C \cap A_3) = 0.2 \cdot 0.6 = 0.12$$

Como sabemos que $P(C) = P(C \cap A_1) + P(C \cap A_2) + P(C \cap A_3)$ tenemos que:

$$P(C) = 0.4P(C) + 0.12 + 0.12 \Rightarrow P(C) - 0.4P(C) = 0.24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.6P(C) = 0.24 \Rightarrow \boxed{P(C) = \frac{0.24}{0.6} = 0.4}$$

¿C es independiente de A_2 ?

Para que lo sean debe cumplirse la igualdad $P(A_2 \cap C) = P(A_2)P(C)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A_2 \cap C) = 0.12 \\ P(A_2)P(C) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A_2 \cap C) = 0.12 \neq 0.16 = P(A_2)P(C)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos C y A_2 no son independientes.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Como es bien sabido, la siguiente igualdad de determinantes

$$\det(A+B) = \det A + \det B$$

no es cierta en general.

- a) (0.75 puntos) Si A y B son dos matrices para las que $\det(A+B) = \det A + \det B$, pruebe que entonces

$$\det((A+B)^2) = \det(A^2) + \det(B^2) + 2\det(AB).$$

- b) (1 punto) Dadas las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

determine el único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $\det(C+D) = \det C + \det D$

- c) (0.75 puntos) Para el valor $\alpha = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

- a) Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$\begin{aligned} \det((A+B)^2) &= \det((A+B)(A+B)) = \det(A+B)\det(A+B) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Sabemos que} \\ \det(A+B) = \det A + \det B \end{array} \right\} = (\det A + \det B)(\det A + \det B) = \\ &= \det A \cdot \det A + \det A \cdot \det B + \det B \cdot \det A + \det B \cdot \det B = \\ &= (\det A)^2 + 2\det A \cdot \det B + (\det B)^2 = \det(A^2) + 2\det(AB) + \det(B^2) \end{aligned}$$

- b) Hallamos la expresión de $C+D$ y su determinante.

$$C+D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha+2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

$$\det(C+D) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha+2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = 4(\alpha+1) + 0 + 0 - 0 - 0 - 4 = 4\alpha + 4 - 4 = 4\alpha$$

Hallamos la expresión de $\det C + \det D$.

$$\begin{aligned} \det C + \det D &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha + 0 + \alpha + 2 - 0 - 0) + (1 + 0 + \cancel{1} + 1 - 0 - \cancel{1}) = \\ &= 2\alpha + 2 + 2 = 2\alpha + 4 \end{aligned}$$

Buscamos cuando $\det(C + D) = \det C + \det D$.

$$\det(C + D) = \det C + \det D \Rightarrow 4\alpha = 2\alpha + 4 \Rightarrow 2\alpha = 4 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

La igualdad $\det(C + D) = \det C + \det D$ se cumple cuando $\alpha = 2$.

c) Para el valor $\alpha = -1$ la matriz C queda $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Se nos pide resolver el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Obtenemos el sistema y lo resolvemos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ -x + y = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -z + y = 0 \\ 2z - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z + y = 0 \\ z - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Ecuaciones proporcionales}\} \Rightarrow z - y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = y \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las soluciones son $x = \lambda$, $y = \lambda$, $z = \lambda$ para cualquier valor $\lambda \in \mathbb{R}$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
 b) (1.75 puntos) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x(x-3)$.

a) Obtenemos la expresión de $f(-x)$ y la comparamos con $f(x)$.

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$$

La función es impar.

Hallamos la derivada de la función y buscamos cuando se anula.

$$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0$. La función decrece en $(-1, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 12 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.

b) Averiguamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x \\ g(x) = x(x-3) = x^2 - 3x \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 3x = x^2 - 3x \Rightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

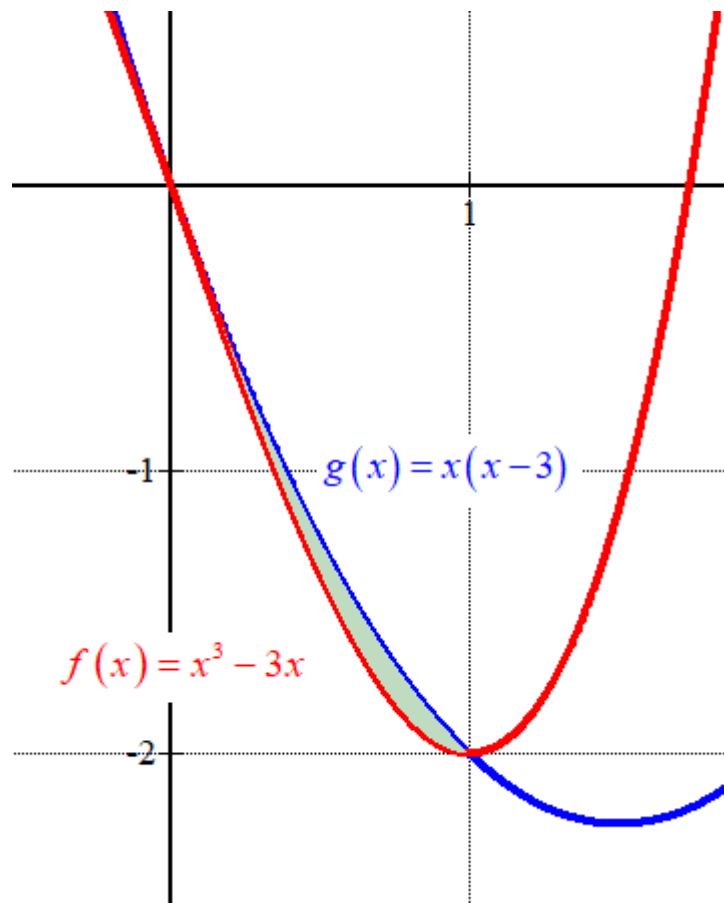
El área de la región acotada delimitada por las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x(x-3)$ es el valor de la integral definida entre 0 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

Como
$$\left. \begin{aligned} f(0.5) &= 0.5^3 - 3 \cdot 0.5 = -1.375 \\ g(0.5) &= 0.5(0.5 - 3) = -1.25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(0.5) > f(0.5)$$

Calculamos el valor del área.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 g(x) - f(x) dx = \int_0^1 x^2 - 3x - (x^3 - 3x) dx = \int_0^1 -x^3 + x^2 dx = \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left[-\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} \right] - \left[-\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{12} \approx 0.0833 u^2} \end{aligned}$$

El área de la región acotada delimitada por las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x(x-3)$ tiene un valor de $\frac{1}{12} \approx 0.0833$ unidades cuadradas.



B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el punto $P(5, -1, 2)$ y las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}, \quad s \equiv \begin{cases} x-y=5 \\ x+z=3 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.
b) (1.5 puntos) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r .

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (3, -1, 1) \\ P_r(2, -1, 0) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-y=5 \\ x+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-5+x \\ z=3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=-5+\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (1, 1, -1) \\ Q_s(0, -5, 3) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (3, -1, 1) \\ \vec{v}_s = (1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{1} \neq \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ y vemos si es nulo o no.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (0, -5, 3) - (2, -1, 0) = (-2, -4, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (3, -1, 1) \\ \vec{v}_s = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (-2, -4, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 - 4 + 2 + 3 - 12 = -4 \neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas se cruzan (distinta dirección en planos paralelos).

Utilizamos la fórmula de la distancia $d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]}|}{|\vec{u}_r \times \vec{v}_s|}$.

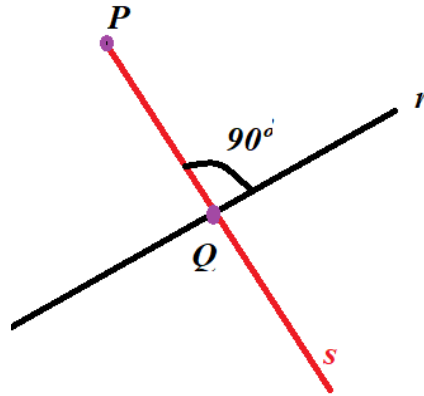
Calculamos el producto vectorial $\vec{u}_r \times \vec{v}_s$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (3, -1, 1) \\ \vec{v}_s = (1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i + j + 3k + k + 3j - i = 4j + 4k = (0, 4, 4)$$

Calculamos la distancia entre las rectas.

$$d(r, s) = \frac{\left| [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] \right|}{\left| \vec{u}_r \times \vec{v}_s \right|} = \frac{|-4|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{4}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7 \text{ unidades}$$

b) Seguimos los pasos indicados en el dibujo.



Hallamos el punto Q de la recta r tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular al vector director de la recta (producto escalar nulo).

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (3, -1, 1) \\ P_r(2, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow Q(2 + 3\lambda, -1 - \lambda, \lambda)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (2 + 3\lambda, -1 - \lambda, \lambda) - (5, -1, 2) = (-3 + 3\lambda, -\lambda, \lambda - 2)$$

$$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}_r \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}_r = 0 \Rightarrow (-3 + 3\lambda, -\lambda, \lambda - 2) \cdot (3, -1, 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9 + 9\lambda + \lambda + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow 11\lambda = 11 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 3 = 5 \\ y = -1 - 1 = -2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow Q(5, -2, 1)$$

Hallamos la recta s que pasa por P y Q.

$$\begin{cases} \vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (5, -2, 1) - (5, -1, 2) = (0, -1, -1) \\ P(5, -1, 2) \in s \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

La recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r tiene ecuación

$$s \equiv \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quién friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta el centro de la diana en el 25% de sus lanzamientos y Benito en el 30%, se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.
 b) (1.5 puntos) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.

Llamamos A a “Antonio acierta en un lanzamiento de dardo” y B a “Benito acierta en un lanzamiento de dardo”.

- a) Si hay 5 lanzamientos para que se decida quien friega antes del cuarto lanzamiento deben de haber acertado uno de ellos 3 lanzamientos y el otro debe de fallar los tres lanzamientos.

Calculamos la probabilidad de que Antonio acierte 3 veces en 3 lanzamientos y Benito falle los tres lanzamientos.

$$P(AAABBB) = P(A)P(A)P(A)P(\bar{B})P(\bar{B})P(\bar{B}) = 0.25^3 \cdot 0.7^3 = \frac{343}{64000}$$

Calculamos la probabilidad de que Benito acierte 3 veces en 3 lanzamientos y Antonio falle en los tres lanzamientos.

$$P(\bar{A}\bar{A}\bar{A}BBB) = P(\bar{A})P(\bar{A})P(\bar{A})P(B)P(B)P(B) = 0.75^3 \cdot 0.3^3 = \frac{729}{64000}$$

La probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega es la suma de las dos probabilidades anteriores: $\frac{343}{64000} + \frac{729}{64000} = \frac{67}{4000} = \boxed{0.1675}$.

- b) Llamamos X = “número de fallos de Antonio al lanzar 60 veces el dardo”.

Esta variable es una binomial de parámetros $n = 60$ y $p = 0.75$.

$$X = B(60, 0.75)$$

El número de lanzamientos es alto aproximamos esta variable binomial a una normal Y de

media $\mu = np = 60 \cdot 0.75 = 45$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{60 \cdot 0.75 \cdot 0.25} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

$$Y = N\left(45, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$$

Fallar al menos las dos terceras partes de 60 lanzamientos es fallar al menos 40 lanzamientos. Nos piden calcular $P(X \geq 40)$.

$$P(X \geq 40) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 39.5) = \left\{ Z = \frac{X - 45}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 45}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{39.5 - 45}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}\right) = P(Z \geq -1.64) = P(Z \leq 1.64) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9495}$$

<i>z</i>	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,

La probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos es de 0.9495.

EvAU 2024 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2023-2024 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} 2x - y + az &= -a \\ x + 2y + 3z &= -2 \\ ax + ay + 2z &= -8 \end{aligned} \right\}$$

- (2 puntos) Discuta el sistema en función del parámetro a .
- (0.5 puntos) Resuelva el sistema para $a = -10$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si } x < 1 \\ e + \frac{x \ln x}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

y se pide:

- (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $x = 1$.
- (0.75 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (0.75 puntos) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Los vértices de un triángulo son $A(-1, 0, 1)$, $B(0, 1, 0)$ y un punto C situado sobre la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = -1 \end{cases}$$

- (1.5 puntos) Calcule las posibles coordenadas de C sabiendo que el área del triángulo es $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- (1 punto) Determine una ecuación de la recta que pasa por $P(2, 1, -1)$ y es paralela a la recta dada r .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un espacio muestral se consideran tres sucesos A , B y C , tales que $P(A \cup B \cup C) = 1$. Sabiendo que los sucesos B y C son independientes y que $P(A) = 0.5$, $P(\overline{C}) = 0.3$, $P(B \cup C) = 0.73$, $P(A \cap C) = 0.21$ y $P(A \cap B \cap C) = 0.06$, se pide:

- (1 punto) Estudiar si los sucesos A y $B \cup C$ son independientes.
- (1.5 puntos) Calcular $P(B)$ y $P(C \cap (A \cup B))$.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Halle un número natural de tres cifras del que se conoce que: sus cifras suman 13; si al número dado se le resta el doble del número que resulta de intercambiar las cifras de las centenas y de las unidades, el resultado es 437; además, la cifra de las decenas excede en una unidad a la media aritmética de las otras dos cifras.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

- (0.5 puntos) Escriba un ejemplo de una función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. Escriba también un ejemplo de una función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas solo en los puntos $x = 1$ y $x = 0$
- (1 punto) Escriba un ejemplo de una función polinómica de grado 3 que tenga un máximo relativo en el punto $(0, 0)$ y un mínimo relativo en el punto $(1, -1)$.
- (1 punto) Justifique si la gráfica de una función polinómica de grado 3 puede no cortar al eje de las abscisas.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$

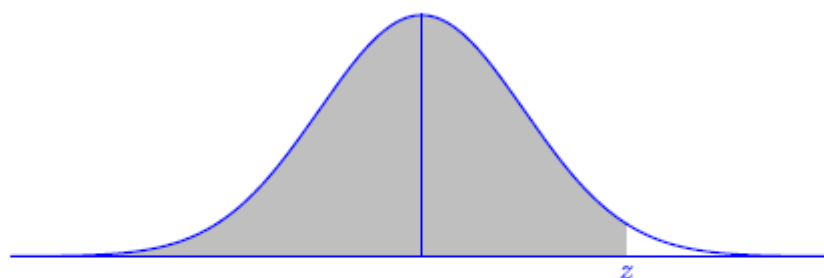
- (0.5 puntos) Calcule el ángulo que forma la recta r con el vector normal al plano $z = 0$.
- (1.25 puntos) Sean π_1 y π_2 dos planos que se cortan en la recta r . Calcule unas ecuaciones de ambos planos sabiendo que π_1 pasa por el punto $P(1, 1, 3)$ y que π_2 no corta el eje OZ .
- (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de la recta r y la recta s de ecuación $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Entre los procesadores que utiliza cierta marca de ordenadores portátiles para un modelo, un 30% son de una nueva tecnología que promete una mayor efectividad. Se utilizan todos los procesadores, se empaquetan los ordenadores fabricados en palés de 10 portátiles y se envían 20 palés a cada una de sus tiendas. Se pide:

- (1.5 puntos) Determinar la distribución, la media y la desviación típica de la variable “*número de portátiles con los procesadores de la nueva tecnología en un palé*”. Calcular la probabilidad de que en un palé haya exactamente dos portátiles con la nueva tecnología.
- (1 punto) Calcular, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el 75% de los portátiles recibidos en una tienda no lleven los procesadores de la nueva tecnología.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro real a :

$$\begin{cases} 2x - y + az = -a \\ x + 2y + 3z = -2 \\ ax + ay + 2z = -8 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función del parámetro a .

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para $a = -10$.

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a & -a \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ a & a & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ a & a & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3a + a^2 - 2a^2 + 2 - 6a = -a^2 - 9a + 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 - 9a + 10 = 0 \Rightarrow a = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot (-1)(10)}}{2(-1)} = \frac{9 \pm 11}{-2} = \begin{cases} \frac{9+11}{-2} = \boxed{-10 = a} \\ \frac{9-11}{-2} = \boxed{1 = a} \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq -10$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad -8 \\ -1 \quad -2 \quad -3 \quad 2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -1 \quad -6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & 4 \\ \hline 0 & -5 & -5 & 3 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 5 \cdot \text{Fila } 3^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 30 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 33 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}}^{A/B} \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 33 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $a = -10$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -10 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -10 & -10 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -10 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -10 & -10 & 2 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} -10 & -10 & 2 & -8 \\ 10 & -5 & -50 & 50 \\ \hline 0 & -15 & -48 & 42 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & -10 & 10 \\ -2 & -4 & -6 & 4 \\ \hline 0 & -5 & -16 & 14 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -10 & 10 \\ 0 & -5 & -16 & 14 \\ 0 & -15 & -48 & 42 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & -15 & -48 & 42 \\ 0 & 15 & 48 & -42 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{array}{cccc} 2 & -1 & -10 & 10 \end{array}}^{A/B} \\ 0 & -5 & -16 & 14 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq 1$ y $a \neq -10$ el sistema es **compatible determinado**, para $a = -10$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $a = 1$ el sistema es **incompatible**.

b) Si $a = -10$ el sistema es compatible indeterminado (CASO 3).

Buscamos las soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -10 & 10 \\ 0 & -5 & -16 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 10z = 10 \\ -5y - 16z = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 10z = 10 \\ -5y = 14 + 16z \rightarrow y = \frac{-14}{5} - \frac{16}{5}z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{14}{5} + \frac{16}{5}z - 10z = 10 \Rightarrow 10x + 14 + 16z - 50z = 50 \Rightarrow 10x - 34z = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x - 17z = 18 \Rightarrow 5x = 18 + 17z \Rightarrow x = \frac{18}{5} + \frac{17}{5}z \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{5} + \frac{17}{5}\lambda \\ y = \frac{-14}{5} - \frac{16}{5}\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{5} + \frac{17}{5} \\ y = \frac{-14}{5} - \frac{16}{5} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -6 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \{\lambda = 5\alpha\} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 + 17\alpha \\ y = -6 - 16\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 5\alpha \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $x = 7 + 17\alpha$; $y = -6 - 16\alpha$; $z = 1 + 5\alpha$; para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si } x < 1 \\ e + \frac{x \ln x}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

y se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $x = 1$.b) (0.75 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.c) (0.75 puntos) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$.a) Para que la función sea continua en $x = 1$ deben coincidir el valor de la función con los límites laterales.

- Existe $f(1) = e + \frac{1 \cdot \ln 1}{1^2 + 1} = e$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} xe^x = 1 \cdot e^1 = e$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e + \frac{x \ln x}{x^2 + 1} = e$
- Los tres valores son iguales: $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = e$

La función es continua en $x = 1$.Para que la función sea derivable en $x = 1$ deben coincidir las derivadas laterales.La derivada de la función en $\mathbb{R} - \{1\}$ es

$$f'(x) = \begin{cases} e^x + xe^x & \text{si } x < 1 \\ \frac{\left(\ln x + x \frac{1}{x}\right)(x^2 + 1) - 2x(x \ln x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(1 + \ln x)(x^2 + 1) - 2x^2 \ln x}{(x^2 + 1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calculamos las derivadas laterales.

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^x + xe^x = e^1 + e^1 = 2e$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 + \ln x)(x^2 + 1) - 2x^2 \ln x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(1 + \ln 1)(1^2 + 1) - 2 \cdot 1^2 \ln 1}{(1^2 + 1)^2} = \frac{1}{2}$$

Tenemos que $f'(1^-) = 2e \neq \frac{1}{2} = f'(1^+)$. La función no es derivable en $x = 1$.

b) Calculamos el limite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e + \frac{x \ln x}{x^2 + 1} = e + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x^2 + 1} = e + \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= e + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + x \frac{1}{x}}{2x} = e + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{2x} = e + \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= e + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = e + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = e + \frac{1}{\infty} = \boxed{e}$$

c) La función en el intervalo $(0, 1)$ tiene la expresión $f(x) = xe^x$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xe^x dx = [xe^x - e^x]_0^1 = [e^1 - e^1] - [0 \cdot e^0 - e^0] = 1$$

Hemos obtenido que $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

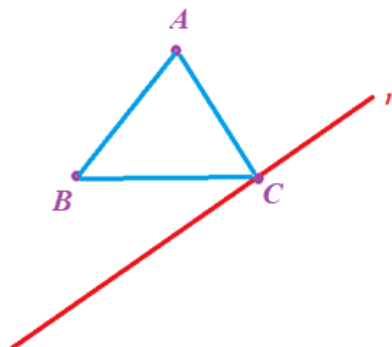
A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Los vértices de un triángulo son $A(-1,0,1)$, $B(0,1,0)$ y un punto C situado sobre la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = -1 \end{cases}$$

- a) (1.5 puntos) Calcule las posibles coordenadas de C sabiendo que el área del triángulo es $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 b) (1 punto) Determine una ecuación de la recta que pasa por $P(2,1,-1)$ y es paralela a la recta dada r .

a) La situación planteada es la del dibujo.



Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y \\ z = -1 - x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases}$$

El punto C que pertenece a la recta r tendrá coordenadas $C(\alpha, 2\alpha, -1-\alpha)$.

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (0,1,0) - (-1,0,1) = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{AC} &= (\alpha, 2\alpha, -1-\alpha) - (-1,0,1) = (\alpha+1, 2\alpha, -2-\alpha) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ \alpha+1 & 2\alpha & -2-\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= i(-2-\alpha+2\alpha) + j(2+\alpha-\alpha-1) + k(2\alpha-\alpha-1) = (\alpha-2, 1, \alpha-1)$$

$$\begin{aligned} \text{Área } ABC &= \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{(\alpha-2)^2 + 1^2 + (\alpha-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4 - 4\alpha + 1 + \alpha^2 + 1 - 2\alpha}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2\alpha^2 - 6\alpha + 6}}{2} \end{aligned}$$

Como el área debe valer $\frac{\sqrt{2}}{2}$ hallamos el valor de α para que se cumpla.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Área } ABC = \frac{\sqrt{2\alpha^2 - 6\alpha + 6}}{2} \\ \text{Área } ABC = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{2\alpha^2 - 6\alpha + 6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2\alpha^2 - 6\alpha + 6} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 - 6\alpha + 6 = 2 \Rightarrow 2\alpha^2 - 6\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2 = \alpha} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1 = \alpha} \end{cases}$$

Existen dos puntos de la recta r que cumplen lo pedido.

Si $\alpha = 1$ el punto es $C(1, 2, -2)$.

Si $\alpha = 2$ el punto es $C(2, 4, -3)$.

b) La recta s paralela a la recta r tiene el mismo vector director.

$$r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 2, -1)$$

Hallamos la ecuación de la recta s que pasa por $P(2, 1, -1)$ y es paralela a la recta dada r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \vec{v}_r = (1, 2, -1) \\ P(2, 1, -1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un espacio muestral se consideran tres sucesos A, B y C, tales que $P(A \cup B \cup C) = 1$.

Sabiendo que los sucesos B y C son independientes y que $P(A) = 0.5$, $P(\bar{C}) = 0.3$,

$P(B \cup C) = 0.73$, $P(A \cap C) = 0.21$ y $P(A \cap B \cap C) = 0.06$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar si los sucesos A y $B \cup C$ son independientes.

b) (1.5 puntos) Calcular $P(B)$ y $P(C \cap (A \cup B))$.

a) Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B \cup C) = 1 \Rightarrow P(A \cup (B \cup C)) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5 + 0.73 - P(A \cap (B \cup C)) = 1 \Rightarrow P(A \cap (B \cup C)) = 1.23 - 1 = 0.23$$

Para que los sucesos A y $B \cup C$ sean independientes se debe cumplir

$$P(A \cap (B \cup C)) = P(A)P(B \cup C).$$

$$\left. \begin{array}{l} P(A)P(B \cup C) = 0.5 \cdot 0.73 = 0.365 \\ P(A \cap (B \cup C)) = 0.23 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A)P(B \cup C) = 0.365 \neq 0.23 = P(A \cap (B \cup C))$$

Los sucesos A y $B \cup C$ no son independientes.

b) Sabemos que $P(A) = 0.5$, $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0.3 = 0.7$.

B y C son independientes, lo que implica que $P(B \cap C) = P(B)P(C) = 0.7 \cdot P(B)$.

Como $P(B \cup C) = 0.73$ tenemos:

$$P(B \cup C) = 0.73 \Rightarrow P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0.73 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B) + 0.7 - 0.7P(B) = 0.73 \Rightarrow 0.3P(B) = 0.03 \Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{0.03}{0.3} = 0.1}$$

Calculamos $P(C \cap (A \cup B))$.

$$P(C \cap (A \cup B)) = P(C \cap A) + P(C \cap B) - P(C \cap A \cap B) =$$

$$= 0.21 + 0.7 \cdot 0.1 - 0.06 = 0.22$$

Hemos visto que $P(B) = 0.1$ y que $P(C \cap (A \cup B)) = 0.22$.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Halle un número natural de tres cifras del que se conoce que: sus cifras suman 13; si al número dado se le resta el doble del número que resulta de intercambiar las cifras de las centenas y de las unidades, el resultado es 437; además, la cifra de las decenas excede en una unidad a la media aritmética de las otras dos cifras.

Llamamos “x” a la cifra de las centenas, “y” a la cifra de las decenas y “z” a la cifra de las unidades.

El número es xyz , por lo que $xyz = 100x + 10y + z$.

Sus cifras suman 13 $\rightarrow x + y + z = 13$.

Si al número dado se le resta el doble del número que resulta de intercambiar las cifras de las centenas y de las unidades, el resultado es 437 $\rightarrow$

$$xyz - 2 \cdot zyx = 437 \Rightarrow (100x + 10y + z) - 2(100z + 10y + x) = 437.$$

La cifra de las decenas excede en una unidad a la media aritmética de las otras dos cifras $\rightarrow$

$$y = \frac{x+z}{2} + 1.$$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 13 \\ (100x + 10y + z) - 2(100z + 10y + x) = 437 \\ y = \frac{x+z}{2} + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 13 \\ \Rightarrow 100x + 10y + z - 200z - 20y - 2x = 437 \\ 2y = x + z + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 13 - y - z \\ 98x - 10y - 199z = 437 \\ 2y = x + z + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 98(13 - y - z) - 10y - 199z = 437 \\ 2y = 13 - y - z + z + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1274 - 98y - 98z - 10y - 199z = 437 \\ 3y = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -108y - 297z = -837 \\ \boxed{y = \frac{15}{3} = 5} \end{array} \right\} \Rightarrow -108 \cdot 5 - 297z = -837 \Rightarrow -297z = -297 \Rightarrow \boxed{z = 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 13 - 5 - 1 = 7}$$

El número de tres cifras que cumple todo lo pedido es el 751.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

- a) (0.5 puntos) Escriba un ejemplo de una función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. Escriba también un ejemplo de una función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas solo en los puntos $x = 1$ y $x = 0$
- b) (1 punto) Escriba un ejemplo de una función polinómica de grado 3 que tenga un máximo relativo en el punto $(0, 0)$ y un mínimo relativo en el punto $(1, -1)$.
- c) (1 punto) Justifique si la gráfica de una función polinómica de grado 3 puede no cortar al eje de las abscisas.

- a) Una función polinómica cuya gráfica corta al eje de las abscisas en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$ es la función $f(x) = (x-0)(x-1)(x-2) = x(x-1)(x-2) = x(x^2 - 2x - x + 2) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

Un ejemplo de función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas solo en los puntos $x = 1$ y $x = 0$ puede ser $f(x) = (x-0)^2(x-1) = x^2(x-1) = x^3 - x^2$.

- b) La función polinómica de grado 3 tiene la expresión $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Como tiene un máximo relativo en el punto $(0, 0)$ se cumple que $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ y que $f''(0) < 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{d = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{0 = c}$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 6ax + 2b \\ f''(0) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2b < 0 \Rightarrow \boxed{b < 0}$$

La función queda $f(x) = ax^3 + bx^2$. Como tiene un mínimo relativo en el punto $(1, -1)$ se debe cumplir que $f(1) = -1$, $f'(1) = 0$ y que $f''(1) > 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 \\ f(1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow a + b = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3a + 2b = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 6ax + 2b \\ f''(1) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6a + 2b > 0 \Rightarrow \boxed{3a + b > 0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a+b=-1 \\ 3a+2b=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=-1-b \\ 3a+2b=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(-1-b)+2b=0 \Rightarrow -3-3b+2b=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b=-3} \Rightarrow \boxed{a=-1+3=2}$$

Se cumple que $3a+b=6-3=3>0$.

La función buscada es $f(x)=2x^3-3x^2$.

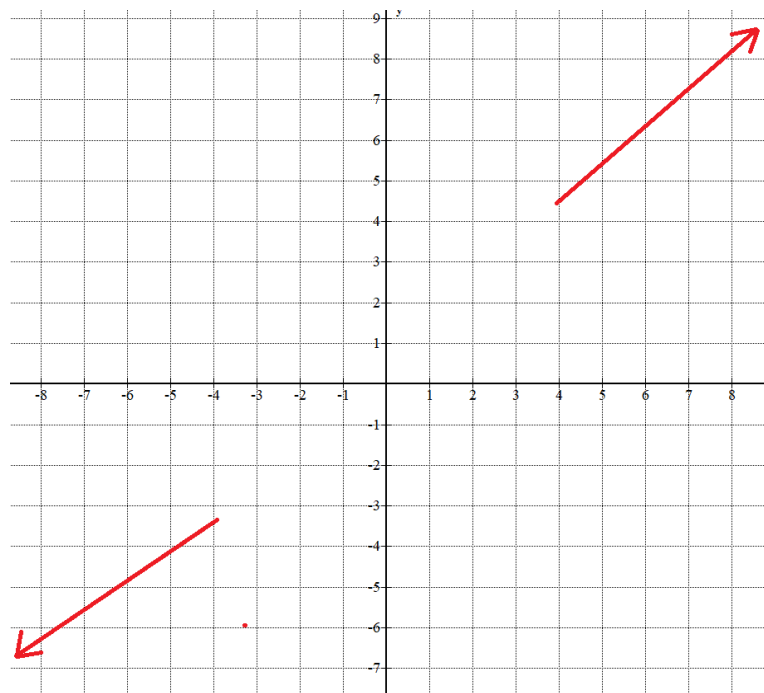
c) Una función polinómica de grado 3 es del tipo $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Supongamos $a > 0$, calculamos los límites de la función cuando x tiende a $+\infty$ y cuando x tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^3 + bx^2 + cx + d = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^3 = \{a > 0\} = a \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^3 + bx^2 + cx + d = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^3 = \{a > 0\} = a \cdot (+\infty) = +\infty$$

La función es continua y por tanto debe cortar el eje de abscisas al menos en un punto de dicho eje.



Se puede razonar de forma similar si $a < 0$.

Conclusión: Toda función polinómica de grado 3 debe cortar el eje en 1, 2 o 3 puntos.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$

- a) (0.5 puntos) Calcule el ángulo que forma la recta r con el vector normal al plano $z = 0$.
 b) (1.25 puntos) Sean π_1 y π_2 dos planos que se cortan en la recta r . Calcule unas ecuaciones de ambos planos sabiendo que π_1 pasa por el punto $P(1,2,3)$ y que π_2 no corta el eje OZ.
 c) (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de la recta r y la recta s de ecuación $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

- a) Hallamos un vector director de la recta y un vector normal al plano.

$$z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (0, 0, 1)$$

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y - z \\ x + y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow 2 - 2y - z + y + 2z = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y + z = 0 \Rightarrow z = y \Rightarrow x = 2 - 2y - y = 2 - 3y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-3, 1, 1) \\ P_r(2, 0, 0) \end{cases}$$

Hallamos el ángulo formado entre estos vectores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (0, 0, 1) \\ \vec{v}_r = (-3, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_r}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}_r|} = \frac{(0, 0, 1) \cdot (-3, 1, 1)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{n}, \vec{v}_r) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right) = 72.4^\circ$$

El ángulo que forma la recta r con el vector normal al plano $z = 0$ es de 72.4° .

- b) El plano π_1 contiene a la recta r y pasa por el punto $P(1,2,3)$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-3, 1, 1) \\ P_r(2, 0, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (-3, 1, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{P_r P} = (1, 2, 3) - (2, 0, 0) = (-1, 2, 3) \\ P_r(2, 0, 0) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 6 - y - 6z + z + 9y - 2x + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_1 \equiv x + 8y - 5z - 2 = 0}$$

El plano π_1 tiene ecuación $\pi_1 \equiv x + 8y - 5z - 2 = 0$.

El plano π_2 contiene a la recta r y no corta el eje OZ. Para no cortar el eje OZ debe ser paralelo a él, por lo que el vector director del eje OZ es un vector director del plano.

Como el eje OZ es la recta con las ecuaciones implícitas $\left. \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \right\}$ ningún punto del plano debe tener de forma simultánea estas dos coordenadas nulas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (-3, 1, 1) \\ x=0 \\ \text{eje OZ} \rightarrow y=0 \\ z=\lambda \\ P_r(2, 0, 0) \in \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} = (0, 0, 1) \Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2 + 3y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_2 \equiv x + 3y - 2 = 0}$$

El plano π_2 tiene ecuación $\pi_2 \equiv x + 3y - 2 = 0$.

c) Hallamos un punto y un vector director de la recta s .

$$s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -2, 3) \\ Q_s(-2, 1, 1) \end{cases}$$

Los vectores directores de ambas rectas no tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-3, 1, 1) \\ \vec{u}_s = (1, -2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-3}{1} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{1}{3}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ y vemos si es nulo o no.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (-2, 1, 1) - (2, 0, 0) = (-4, 1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-3, 1, 1) \\ \vec{u}_s = (1, -2, 3) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (-4, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 12 + 1 - 8 - 1 + 9 = -5 \neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas se cruzan (distinta dirección en planos paralelos).

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Entre los procesadores que utiliza cierta marca de ordenadores portátiles para un modelo, un 30% son de una nueva tecnología que promete una mayor efectividad. Se utilizan todos los procesadores, se empaquetan los ordenadores fabricados en palés de 10 portátiles y se envían 20 palés a cada una de sus tiendas. Se pide:

- a) (1.5 puntos) Determinar la distribución, la media y la desviación típica de la variable “*número de portátiles con los procesadores de la nueva tecnología en un palé*”. Calcular la probabilidad de que en un palé haya exactamente dos portátiles con la nueva tecnología.
- b) (1 punto) Calcular, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el 75% de los portátiles recibidos en una tienda no lleven los procesadores de la nueva tecnología.

- a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de portátiles con procesadores de nueva tecnología.

Esta variable es binomial pues el procesador que lleva cada portátil es independiente del que lleva otro portátil y solo hay dos posibilidades “lleva procesador de nueva tecnología” o no lo lleva. Los parámetros de esta binomial es Número de repeticiones = $n = 10$ y probabilidad de que un portátil lleve un procesador de nueva tecnología es $p = 0.3$. $X = B(10, 0.3)$

La media es $np = 10 \cdot 0.3 = 3$ portátiles.

La desviación típica es $\sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0.3 \cdot 0.7} = \frac{\sqrt{210}}{10} \approx 1.45$ portátiles.

Nos piden calcular $P(X = 2)$.

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} 0.3^2 \cdot 0.7^8 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} 0.3^2 \cdot 0.7^8 = \frac{10 \cdot 9}{2} 0.3^2 \cdot 0.7^8 \approx \boxed{0.2335}$$

La probabilidad de que en un palé haya exactamente dos portátiles con la nueva tecnología tiene un valor aproximado de 0.2335.

- b) Cada tienda recibe $20 \cdot 10 = 200$ portátiles.

Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de portátiles que no llevan procesadores de nueva tecnología. La probabilidad de no llevar un procesador de nueva tecnología es $p = 0.7$.

La nueva variable es $X = B(200, 0.7)$.

Como el número de repeticiones es muy alto el cálculo de la probabilidad pedida la hallamos aproximando esta variable binomial a una normal Y de media $\mu = np = 200 \cdot 0.7 = 140$ y

desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.7 \cdot 0.3} = \sqrt{42} \approx 6.48$.

Nos piden calcular la probabilidad de que al menos el 75% de los portátiles recibidos en una tienda no lleven los procesadores de la nueva tecnología, como $0.75 \cdot 200 = 150$, nos piden calcular $P(X \geq 150)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 150) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 149.5) = \{\text{Tipificamos}\} = \\ &= P\left(Z \geq \frac{149.5 - 140}{\sqrt{42}}\right) = P(Z \geq 1.47) = 1 - P(Z \leq 1.47) = 1 - 0.9292 = \boxed{0.0708} \end{aligned}$$

La probabilidad de que al menos el 75% de los portátiles recibidos en una tienda no lleven los procesadores de la nueva tecnología es de 0.0708.

EvAU 2024 Ordinaria Matemáticas II

 Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2023-2024 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
--	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

- (0.5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.
- (1 punto) Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.
- (1 punto) Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,1,0)$, se pide:

- (1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.
- (1.5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2 , que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(\bar{A}) = \frac{11}{20}$, $P(A/B) - P(B/A) = \frac{1}{24}$ y $P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{10}$, se pide:

- (1.5 puntos) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.
- (1 punto) Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con

$b \neq 0$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

b) (0.75 puntos) Calcular el determinante de AA^t .

c) (0.5 puntos) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Calcule:

a) (1.25 puntos) $\int_1^e (x+2) \ln x dx$.

b) (1.25 puntos) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\left(\frac{1}{\cos x} \right)}$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3, a, 3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) (1.5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a .

b) (1 punto) Dado el punto $Q(3, 3, 3)$, se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2 , P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Llamamos “x” a la longitud del listón largo, “y” a la del intermedio y “z” a la del corto.

Nos dicen “Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total” $\rightarrow 2x + 4y = 3y + 15z$.

Nos dicen “Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto” $\rightarrow x = y + z + 17$.

Por último, nos dicen “con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo” $\rightarrow 9z + 7 = y + x$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y = 3y + 15z \\ x = y + z + 17 \\ 9z + 7 = y + x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 15z \\ x = y + z + 17 \\ 9z + 7 = y + x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2(y + z + 17) + y = 15z \\ 9z + 7 = y + y + z + 17 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z + 34 + y = 15z \\ 8z = 2y + 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + 34 = 13z \\ 4z = y + 5 \rightarrow y = 4z - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(4z - 5) + 34 = 13z \Rightarrow 12z - 15 + 34 = 13z \Rightarrow \boxed{19 = z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 4 \cdot 19 - 5 = 71} \Rightarrow \boxed{x = 71 + 19 + 17 = 107}$$

El listón largo mide 107 cm, el intermedio 71 cm y el corto 19 cm.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.
 b) (1 punto) Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.
 c) (1 punto) Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

- a) La recta tangente en $x = \pi$ tiene ecuación $y - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi)$.

$$f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 \Rightarrow f(\pi) = \pi^4 + \pi \cdot \pi^3 + \pi^2 \cdot \pi^2 + \pi^3 \cdot \pi + \pi^4 = 5\pi^4$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3 \Rightarrow f'(\pi) = 4 \cdot \pi^3 + 3\pi \cdot \pi^2 + 2\pi^2 \cdot \pi + \pi^3 = 10\pi^3$$

$$\left. \begin{array}{l} f(\pi) = 5\pi^4 \\ f'(\pi) = 10\pi^3 \\ y - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 5\pi^4 = 10\pi^3(x - \pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 5\pi^4 = 10\pi^3 x - 10\pi^4 \Rightarrow \boxed{y = 10\pi^3 x - 5\pi^4}$$

La recta tangente tiene ecuación $y = 10\pi^3 x - 5\pi^4$.

- b) La función $f(x)$ es una función polinómica y por tanto es continua y derivable en el intervalo $(-\pi, 0)$. También se cumple que:

$$f(-\pi) = (-\pi)^4 + \pi(-\pi)^3 + \pi^2(-\pi)^2 + \pi^3(-\pi) + \pi^4 = \pi^4 - \pi^4 + \pi^4 - \pi^4 + \pi^4 = \pi^4 \text{ y}$$

$$f(0) = 0^4 + \pi \cdot 0^3 + \pi^2 \cdot 0^2 + \pi^3 \cdot 0 + \pi^4 = \pi^4, \text{ por lo que } f(-\pi) = f(0).$$

Se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle y debe existir un valor $c \in (-\pi, 0)$ donde $f'(c) = 0$.

La derivada de la función $f(x)$ es una función polinómica y por tanto es continua y derivable en el intervalo $(-\pi, 0)$. Tenemos que

$$f'(-\pi) = 4 \cdot (-\pi)^3 + 3\pi \cdot (-\pi)^2 + 2\pi^2 \cdot (-\pi) + \pi^3 = -4\pi^3 + 3\pi^3 - 2\pi^3 + \pi^3 = -2\pi^3 < 0 \text{ y}$$

$$f'(0) = 4 \cdot 0^3 + 3\pi \cdot 0^2 + 2\pi^2 \cdot 0 + \pi^3 = \pi^3 > 0.$$

La función derivada es continua en el intervalo $(-\pi, 0)$ y toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo por lo que según el teorema de Bolzano debe existir $c \in (-\pi, 0)$ donde la función derivada se anule, es decir, tal que $f'(c) = 0$.

- c) La función $g(x)$ queda:

$$g(x) = f(-x) = (-x)^4 + \pi(-x)^3 + \pi^2(-x)^2 + \pi^3(-x) + \pi^4 = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4$$

Hallamos los posibles puntos de corte de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 \\ g(x) &= x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x^4} + \pi x^3 + \cancel{\pi^2 x^2} + \pi^3 x + \cancel{\pi^4} = \cancel{x^4} - \pi x^3 + \cancel{\pi^2 x^2} - \pi^3 x + \cancel{\pi^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi x^3 + 2\pi^3 x = 0 \Rightarrow 2\pi x(x^2 + \pi^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + \pi^2 = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Las funciones se cortan en $x = 0$, por lo que el recinto encerrado entre las dos gráficas en el intervalo $[0, \pi]$ es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y π de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_0^{\pi} f(x) - g(x) dx = \int_0^{\pi} x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 - (x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4) dx =$$

$$= \int_0^{\pi} 2\pi x^3 + 2\pi^3 x dx = \left[\frac{2\pi}{4} x^4 + \frac{2\pi^3}{2} x^2 \right]_0^{\pi} = \left[\frac{\pi}{2} x^4 + \pi^3 x^2 \right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} \cdot \pi^4 + \pi^3 \cdot \pi^2 \right] - \left[\frac{\pi}{2} \cdot 0^4 + \pi^3 \cdot 0^2 \right] = \frac{\pi^5}{2} + \pi^5 = \frac{3\pi^5}{2} \simeq 459.03$$

El área tiene un valor aproximado de 459.03 unidades cuadradas.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,1,0)$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.
- b) (1.5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2 , que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

- a) Si el plano π' es perpendicular al plano $\pi: z = 0$ el vector normal de este plano es un vector director del plano que buscamos. El otro vector director es el vector $\overrightarrow{AB}$ que une los puntos A y B pertenecientes al plano.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,0) - (0,0,1) = (1,1,-1)$$

$$\pi: z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (0,0,1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,-1) \\ \vec{v} = \vec{n} = (0,0,1) \\ A(0,0,1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x - y = 0}$$

El plano que cumple lo pedido tiene ecuación $\pi': x - y = 0$.

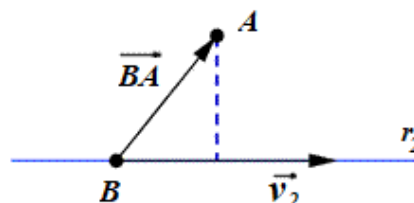
- b) El plano $x + z = 1$ tiene como vector normal $\vec{n} = (1,0,1)$. Las rectas por ser paralelas tienen el mismo vector director y por pertenecer al plano sus vectores directores deben ser perpendiculares a dicho vector normal.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 = (a,b,c) \\ \vec{n} = (1,0,1) \\ \vec{v}_1 \perp \vec{n} \rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (a,b,c)(1,0,1) = 0 \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow c = -a$$

$$r_1 \parallel r_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = (a,b,-a)$$

La distancia entre las dos rectas paralelas es 1, por lo que la distancia del punto A de la recta r_1 a la recta r_2 debe ser 1. Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto A a una recta r_2 .

$$d(A, r_2) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \vec{v}_2|}{|\vec{v}_2|}$$



Hallamos el producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \vec{v}_2$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,1,-1) \\ \vec{v}_2 = (a,b,-a) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ a & b & -a \end{vmatrix} = -ai - aj + bk - ak + aj + bi =$$

$$= (-a+b)i + 0j + (b-a)k \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_2} = (b-a, 0, b-a)$$

Su módulo es $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_2}| = \sqrt{(b-a)^2 + 0^2 + (b-a)^2} = \sqrt{2(b-a)^2}$.

Sustituimos en la expresión de la distancia.

$$\begin{aligned} d(A, r_2) &= \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_2}|}{|\overrightarrow{v_2}|} = \frac{\sqrt{2(b-a)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + (-a)^2}} = \frac{\sqrt{2(b-a)^2}}{\sqrt{2a^2 + b^2}} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{2(b-a)^2} = \sqrt{2a^2 + b^2} \Rightarrow \left(\sqrt{2(b-a)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{2a^2 + b^2}\right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2(b-a)^2 = 2a^2 + b^2 \Rightarrow 2(b^2 + a^2 - 2ab) = 2a^2 + b^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2b^2 + \cancel{2a^2} - 4ab = \cancel{2a^2} + b^2 \Rightarrow b^2 - 4ab = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow b(b-4a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b=0} \\ b-4a=0 \Rightarrow \boxed{b=4a} \end{cases} \end{aligned}$$

Existen dos posibles soluciones.

Si $b = 0$ entonces el vector director es $\overrightarrow{v_2} = (a, 0, -a)$. Podemos tomar $a = 1$ y el vector sería $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, -1)$. Determinamos las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} = (1, 0, -1) \\ A(0, 0, 1) \in r_1 \end{array} \right\} \Rightarrow r_1 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v_2} = (1, 0, -1) \\ B(1, 1, 0) \in r_2 \end{array} \right\} \Rightarrow r_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $b = 4a$ entonces el vector director es $\overrightarrow{v_2} = (a, 4a, -a)$. Podemos tomar $a = 1$ y el vector sería $\overrightarrow{v_2} = (1, 4, -1)$. Determinamos las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} = (1, 4, -1) \\ A(0, 0, 1) \in r_1 \end{array} \right\} \Rightarrow r_1 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v_2} = (1, 4, -1) \\ B(1, 1, 0) \in r_2 \end{array} \right\} \Rightarrow r_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(\bar{A}) = \frac{11}{20}$, $P(A/B) - P(B/A) = \frac{1}{24}$ y $P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{10}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.

b) (1 punto) Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$.

a) Sabemos que $P(\bar{A}) = \frac{11}{20} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$.

También que $P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{10}$ y que $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \\ P(A) = \frac{9}{20} \\ P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{10} = \frac{6}{20} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{9}{20} = P(A \cap B) + \frac{6}{20} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{3}{20}}$$

Utilizamos el teorema de Bayes en la igualdad $P(A/B) - P(B/A) = \frac{1}{24}$.

$$P(A/B) - P(B/A) = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{\frac{3}{20}}{P(B)} - \frac{\frac{3}{20}}{\frac{9}{20}} = \frac{1}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{20P(B)} - \frac{3}{9} = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{3}{20P(B)} = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} \Rightarrow 20P(B) = 8 \Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}}$$

b) Si A y C son independientes se cumple que $P(A \cap C) = P(A)P(C) = \frac{9}{20}P(C)$.

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup C) = \frac{14}{25} \\ P(A \cap C) = \frac{9}{20}P(C) \\ P(A) = \frac{9}{20} \\ P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{14}{25} = \frac{9}{20} + P(C) - \frac{9}{20}P(C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{14}{25} - \frac{9}{20} = P(C) \left(1 - \frac{9}{20} \right) \Rightarrow \frac{11}{100} = \frac{11}{20}P(C) \Rightarrow \boxed{P(C) = \frac{\frac{11}{100}}{\frac{11}{20}} = 0.2}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con

$b \neq 0$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

b) (0.75 puntos) Calcular el determinante de AA^t .

c) (0.5 puntos) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

a) Si $BCB^{-1} = A$ entonces $BCB^{-1}B = AB \Rightarrow BC = AB$.

Sustituimos las matrices y resolvemos la ecuación matricial.

$$BC = AB \Rightarrow \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 3-2+1 & 6-3+1 & 3-1+1 \\ 1+2+1 & 2+3+1 & 1+1+1 \\ 1-2+3 & 2-3+3 & 1-1+3 \end{pmatrix}$$

Esta igualdad se cumple para cualquier valor de b . La única condición es que b no puede ser cero para que su determinante no se anule y exista su inversa B^{-1} .

Se cumple para cualquier valor de b distinto de cero.

b) Como el determinante de la matriz traspuesta A^t es igual al determinante de A tenemos que:

$$|AA^t| = |A| \cdot |A^t| = |A| \cdot |A| = |A|^2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 - 1 - 1 + 3 + 3 = 12 \Rightarrow |AA^t| = 12^2 = 144$$

El determinante de AA^t vale 144.

c) Obtenemos la expresión del sistema y lo resolvemos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+3y+z=-1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+3y+z=-1 \\ z=1-x-y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+1-x-y=3 \\ 2x+3y+1-x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=2} \\ x+2y=-2 \end{cases} \Rightarrow x+4=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=-6} \Rightarrow \boxed{z=1+6-2=5}$$

La solución del sistema es $x = -6, y = 2, z = 5$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Calcule:

a) (1.25 puntos) $\int_1^e (x+2) \ln x dx$.

b) (1.25 puntos) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\left(\frac{1}{\cos x} \right)}$.

a) Calculamos primero la integral indefinida utilizando el método de integración por partes.

$$\int (x+2) \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = (x+2) dx \rightarrow v = \int (x+2) dx = \frac{x^2}{2} + 2x \end{array} \right\} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \frac{1}{x} dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln x - \int x \left(\frac{x}{2} + 2 \right) \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln x - \int \left(\frac{x}{2} + 2 \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln x - \frac{x^2}{4} - 2x + C$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_1^e (x+2) \ln x dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln x - \frac{x^2}{4} - 2x \right]_1^e =$$

$$= \left[\left(\frac{e^2}{2} + 2e \right) \ln e - \frac{e^2}{4} - 2e \right] - \left[\left(\frac{1^2}{2} + 2 \right) \ln 1 - \frac{1^2}{4} - 2 \right] =$$

$$= \frac{e^2}{2} + \cancel{2e} - \frac{e^2}{4} - \cancel{2e} + \frac{1}{4} + 2 = \boxed{\frac{e^2}{4} + \frac{9}{4}}$$

b) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\left(\frac{1}{\cos x} \right)} = \left(\operatorname{tg} \frac{\frac{\pi}{2}}{2} \right)^{\left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}} \right)} = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right)^{\frac{1}{0}} = 1^\infty = \text{Indeterminación}$$

Si llamamos $L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\left(\frac{1}{\cos x} \right)}$ tomamos logaritmos para resolver la indeterminación.

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\left(\frac{1}{\cos x} \right)} \Rightarrow \ln L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\left(\frac{1}{\cos x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)}{\cos x} = \frac{\ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1/2}{\cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1/2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)}}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1/2}{-\sin x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)} =$$

$$= \frac{1/2}{-\sin \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \right)} = \boxed{-1}$$

Como hemos obtenido que $\ln L = -1 \Rightarrow L = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

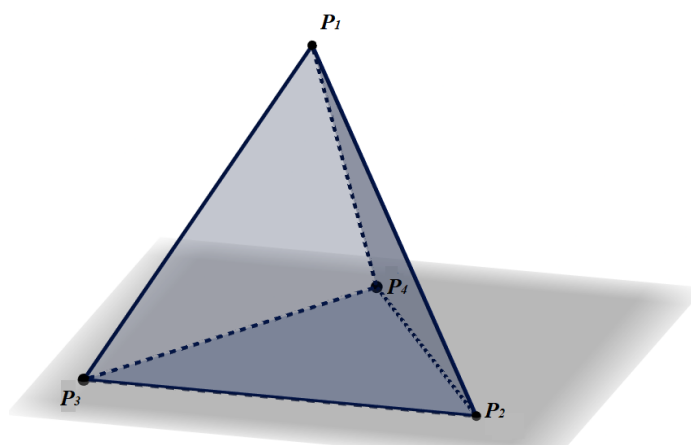
Tenemos que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\left(\frac{1}{\cos x} \right)} = \boxed{\frac{1}{e}}$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3, a, 3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

- a) (1.5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a .
- b) (1 punto) Dado el punto $Q(3, 3, 3)$, se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2 , P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

- a) El volumen del tetraedro es la sexta parte del producto mixto de los vectores que unen un punto del tetraedro con el resto.



$$\left. \begin{array}{l} P_1(1,1,1) \\ P_2(2,1,0) \\ P_3(1,3,2) \\ P_4(3, a, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_1P_2} = (2,1,0) - (1,1,1) = (1,0,-1) \\ \overrightarrow{P_1P_3} = (1,3,2) - (1,1,1) = (0,2,1) \\ \overrightarrow{P_1P_4} = (3,a,3) - (1,1,1) = (2,a-1,2) \end{array} \right.$$

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4} \right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 + 4 - 0 - a + 1 = 9 - a$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Volumen} = \frac{\left| \left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4} \right] \right|}{6} \\ \text{Volumen} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|9-a|}{6} = 1 \Rightarrow |9-a| = 6 \Rightarrow \begin{cases} 9-a = 6 \rightarrow 3 = a \\ 9-a = -6 \rightarrow 15 = a \end{cases}$$

Comprobamos que sus aristas no superan la longitud 10.

Si $a = 3$ entonces quedan $P_1(1,1,1), P_2(2,1,0), P_3(1,3,2), P_4(3, 3, 3)$, hallamos los vectores que forman sus aristas y su longitud.

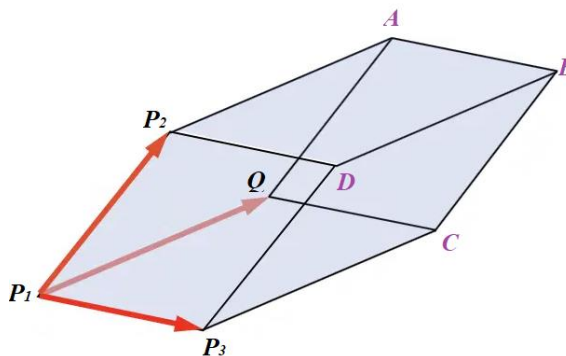
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_1P_2} = (2,1,0) - (1,1,1) = (1,0,-1) \rightarrow |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{2} < 10 \\ \overrightarrow{P_1P_3} = (1,3,2) - (1,1,1) = (0,2,1) \rightarrow |\overrightarrow{P_1P_3}| = \sqrt{5} < 10 \\ \overrightarrow{P_1P_4} = (3,3,3) - (1,1,1) = (2,2,2) \rightarrow |\overrightarrow{P_1P_4}| = \sqrt{12} < 10 \\ \overrightarrow{P_2P_3} = (1,3,2) - (2,1,0) = (-1,2,2) \rightarrow |\overrightarrow{P_2P_3}| = 3 < 10 \\ \overrightarrow{P_2P_4} = (3,3,3) - (2,1,0) = (1,2,3) \rightarrow |\overrightarrow{P_2P_4}| = \sqrt{14} < 10 \\ \overrightarrow{P_3P_4} = (3,3,3) - (1,3,2) = (2,0,1) \rightarrow |\overrightarrow{P_3P_4}| = \sqrt{5} < 10 \end{array} \right. \quad \text{¡Se cumple!}$$

Si $a = 15$ entonces quedan $P_1(1,1,1), P_2(2,1,0), P_3(1,3,2), P_4(3, 15,3)$, hallamos los vectores que forman sus aristas y su longitud.

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_1P_2} = (2,1,0) - (1,1,1) = (1,0,-1) \rightarrow |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{2} < 10 \\ \overrightarrow{P_1P_3} = (1,3,2) - (1,1,1) = (0,2,1) \rightarrow |\overrightarrow{P_1P_3}| = \sqrt{5} < 10 \\ \overrightarrow{P_1P_4} = (3,15,3) - (1,1,1) = (2,14,2) \rightarrow |\overrightarrow{P_1P_4}| = \sqrt{204} > 10 \\ \overrightarrow{P_2P_3} = (1,3,2) - (2,1,0) = (-1,2,2) \rightarrow |\overrightarrow{P_2P_3}| = 3 < 10 \\ \overrightarrow{P_2P_4} = (3,15,3) - (2,1,0) = (1,14,3) \rightarrow |\overrightarrow{P_2P_4}| = \sqrt{206} > 10 \\ \overrightarrow{P_3P_4} = (3,15,3) - (1,3,2) = (2,12,1) \rightarrow |\overrightarrow{P_3P_4}| = \sqrt{149} > 10 \end{array} \right. \quad \text{¡No se cumple!}$$

El único valor que cumple lo pedido es $a = 3$.

b) Dibujamos el paralelepípedo para entender mejor la situación planteada.



Hallamos las coordenadas de los vectores que definen las tres aristas básicas del paralelepípedo.

$$\left. \begin{array}{l} P_1(1,1,1) \\ P_2(2,1,0) \\ P_3(1,3,2) \\ Q(3,3,3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_1P_2} = (2,1,0) - (1,1,1) = (1,0,-1) \\ \overrightarrow{P_1P_3} = (1,3,2) - (1,1,1) = (0,2,1) \\ \overrightarrow{P_1Q} = (3,3,3) - (1,1,1) = (2,2,2) \end{array} \right.$$

Por tener caras paralelas podemos obtener los puntos A, B, C y D sumando a un vértice el vector adecuado.

$$A = P_2 + \overrightarrow{P_1Q} = (2, 1, 0) + (2, 2, 2) = (4, 3, 2)$$

$$B = A + \overrightarrow{P_1P_3} = (4, 3, 2) + (0, 2, 1) = (4, 5, 3)$$

$$C = P_3 + \overrightarrow{P_1Q} = (1, 3, 2) + (2, 2, 2) = (3, 5, 4)$$

$$D = P_3 + \overrightarrow{P_1P_2} = (1, 3, 2) + (1, 0, -1) = (2, 3, 1)$$

Los cuatro vértices restantes del paralelepípedo son A(4,3,2), B(4,5,3), C(3,5,4) y D(2,3,1).

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.
- (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

- Si sacamos un 2 (par) en el dado azul le sumamos el doble de lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar 10 debo sacar un 4.
Si sacamos un 4 (par) en el dado azul le sumamos el doble de lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar 10 debo sacar un 3.
Si sacamos un 6 (par) en el dado azul le sumamos el doble de lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar 10 debo sacar un 2.

Si sacamos un 1 (impar) en el dado azul le sumamos lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar 10 debo sacar un 9. ¡Imposible!.

Si sacamos un 3 (impar) en el dado azul le sumamos lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar 10 debo sacar un 7. ¡Imposible!.

Si sacamos un 5 (impar) en el dado azul le sumamos lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar 10 debo sacar un 5.

Como hay 36 posibles resultados al lanzar dos dados y de ellos 4 resultados nos dan una puntuación de 10, aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de sacar una puntuación de 10 es $4/36 = 1/9$.

Si sacamos un 2 (par) en el dado azul le sumamos el doble de lo que saquemos en el dado rojo. La suma es par.

Si sacamos un 4 (par) en el dado azul le sumamos el doble de lo que saquemos en el dado rojo. La suma es par.

Si sacamos un 6 (par) en el dado azul le sumamos el doble de lo que saquemos en el dado rojo. La suma es par.

Si sacamos un 1 (impar) en el dado azul le sumamos lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar suma impar debo sacar número par con el dado rojo (3 posibilidades).

Si sacamos un 3 (impar) en el dado azul le sumamos lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar suma impar debo sacar número par con el dado rojo (3 posibilidades)

Si sacamos un 5 (impar) en el dado azul le sumamos lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar suma impar debo sacar número par con el dado rojo (3 posibilidades).

Como hay 36 posibles resultados al lanzar dos dados y 9 resultados nos permiten obtener puntuación impar, aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de sacar una puntuación impar es $9/36 = 1/4$.

- Si la puntuación ha sido 8 esto ha podido ocurrir de una de las siguientes maneras:
(2, 3), (4, 2), (6, 1) o bien (3, 5), (5, 3).

Puede haber ocurrido de 5 formas distintas y de ellas solo hay 3 con el primer resultado (dado azul) par. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8 es de $3/5$.

Si la puntuación final es par esto puede haber ocurrido de las siguientes formas:

(2, 1), (2,2), (2, 3), (2, 4) (2, 5), (2, 6)

Igual número de casos sacando 4 con el dado azul.

Igual número de casos sacando 6 con el dado azul.

(1, 1), (1, 3), (1, 5)

Igual número de casos sacando 3 con el dado azul.

Igual número de casos sacando 5 con el dado azul.

Puede haber ocurrido de $6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 3 = 27$ formas distintas. De todas ellas solo tienen resultado impar en el segundo lanzamiento (dado rojo) en $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18$.

La probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par es $18/27 = 2/3$.

EvAU 2024 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas II

 Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2023-2024 MATERIA: MATEMÁTICAS II	H
--	--	----------

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tras una gran cosecha de sandías en una comarca, la producción se mete en cajas cubicas de 1m de lado que se amontonan en una gran pila compacta en forma de ortoedro. Al doble del largo de este ortoedro le faltan 2m para llegar a ser la suma del ancho y el alto. Pero el largo supera en 8m al ancho menos el alto. El perímetro de la base es 54m. ¿Cuántas cajas de sandías ha producido esta cosecha?

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, se pide:

- (1.25 puntos) Hallar su dominio y estudiar las asíntotas de su gráfica.
- (0.75 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 7/3)$.
- (0.5 puntos) Encontrar, si es posible, algún punto x_0 tal que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ sea 1.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(-1, 2, 6)$, el plano $\pi : 3x - 2y + z - 5 = 0$ y la recta $s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{-1}$:

- (1.5 puntos) Halle una ecuación de la recta que pasa por P, es secante a s y paralela al plano π .
- (1 punto) Halle el simétrico del punto P respecto al plano π .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Para conocer la opinión de los usuarios sobre su servicio, la empresa de transporte público de una ciudad ha realizado una encuesta. De esa encuesta se desprende que la nota global otorgada al servicio por sus usuarios se puede considerar una normal de media 6.7 y de desviación típica 1.25. Si un usuario da una nota menor que 5 se considera que ve como insatisfactorio el servicio; si la nota está entre 5 y 7.5, que para el usuario el servicio es satisfactorio; y si la nota es mayor que 7.5, que el servicio es excelente.

- (0.75 puntos) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es excelente?
- (1 punto) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es satisfactorio?

- c) (0.75 puntos) Para conocer de forma más directa la opinión de sus usuarios, de entre todos ellos la empresa convoca a 25 elegidos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de entre los convocados consideren el servicio insatisfactorio?

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean X e Y dos matrices reales y cuadradas de orden dos tales que $5X - 3Y = A$ y $3X + 6Y = B$

, con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) (1.5 puntos) Hallar X , Y y X^{-1} .
b) (1 punto) Calcular A^{127} .

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$.

- a) (1.5 puntos) Analice la monotonía y los extremos relativos de $f(x)$.
b) (1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por la recta $y = \frac{1}{2}$ y la gráfica de $f(x)$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En el punto $A(1, 0, -1)$ se encuentra un emisor láser que dispara un rayo de luz (unidimensional) apuntando hacia el punto $B(3, 1, 0)$. Dicho rayo incide en un punto P del plano

$$\pi : \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 2 + 2\beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \text{ Llamamos al punto } P \text{ el punto de incidencia del rayo de luz sobre el}$$

plano π . Se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular una ecuación del plano de incidencia, es decir, el plano perpendicular a π que contiene al rayo de luz.
b) (0.75 puntos) Calcular la distancia que recorre el rayo de luz desde el emisor hasta el punto P .
c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que debería girar el emisor para que la distancia entre él y el nuevo punto de incidencia sobre π sea mínima.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En la sección de idiomas de una biblioteca municipal se tienen libros, en francés o inglés, de tres categorías: el 50% son cuentos infantiles, el 30%, novelas históricas y el resto, manuales técnicos. Uno de cada cinco de los cuentos está en francés y una de cada tres de las novelas, en inglés. Por otra parte, uno de cada siete de los libros en francés es un manual técnico. Se toma un libro al azar y se pide:

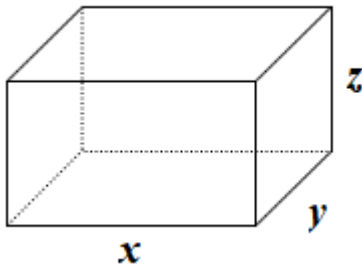
- a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté en francés si no es un manual técnico.
b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté escrito en francés, y la probabilidad de que si está en inglés sea una novela histórica.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tras una gran cosecha de sandías en una comarca, la producción se mete en cajas cubicas de 1m de lado que se amontonan en una gran pila compacta en forma de ortoedro. Al doble del largo de este ortoedro le faltan 2m para llegar a ser la suma del ancho y el alto. Pero el largo supera en 8m al ancho menos el alto. El perímetro de la base es 54m. ¿Cuántas cajas de sandías ha producido esta cosecha?

Tenemos el ortoedro del dibujo.



El largo es “x”, el ancho “y” y el alto es “z”.

“Al doble del largo de este ortoedro le faltan 2m para llegar a ser la suma del ancho y el alto” $\rightarrow 2x + 2 = y + z$.

“El largo supera en 8m al ancho menos el alto” $\rightarrow x = y - z + 8$.

“El perímetro de la base es 54m” $\rightarrow 2x + 2y = 54$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema que resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2 = y + z \\ x = y - z + 8 \\ 2x + 2y = 54 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2 = y + z \\ z = y - x + 8 \\ x + y = 27 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2 = y + y - x + 8 \\ x + y = 27 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 6 \\ x + y = 27 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 6 \\ x = 27 - y \end{array} \right\} \Rightarrow 3(27 - y) - 2y = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 81 - 3y - 2y = 6 \Rightarrow -5y = -75 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-75}{-5} = 15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 27 - 15 = 12} \Rightarrow \boxed{z = 15 - 12 + 8 = 11}$$

El ortoedro tiene 12 metros de largo, 15 metros de ancho y 11 metros de alto.

El volumen del ortoedro es $12 \cdot 15 \cdot 11 = 1980 \text{ m}^3$. Se han producido 1980 cajas.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, se pide:

- a) (1.25 puntos) Hallar su dominio y estudiar las asíntotas de su gráfica.
 b) (0.75 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 7/3)$.
 c) (0.5 puntos) Encontrar, si es posible, algún punto x_0 tal que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ sea 1.

- a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Asíntota vertical. $x = a$.

¿ $x = -1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^3 - 1}{(-1)^2 - 1} = \frac{-2}{0} = \infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical.

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{1^3 - 1}{1^2 - 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \dots$$

$\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \Rightarrow x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$
--

$$\dots = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x-1)}(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

$x = 1$ no es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{0} = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^3 - x} = \frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = 1$$

$$\begin{aligned}
 n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^3} - 1 - \cancel{x^3} + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x} - 1}{(\cancel{x} - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{\infty} = 0
 \end{aligned}$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x$.

b) La recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 7/3)$ tiene ecuación $y - \frac{7}{3} = f'(2)(x - 2)$.

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x + 1)(x + 1) - 1 \cdot (x^2 + x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + x + 1 - x^2 - x - 1}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(2) &= \frac{2^2 + 2 \cdot 2}{(2 + 1)^2} = \frac{8}{9} \\ y - \frac{7}{3} &= f'(2)(x - 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{7}{3} = \frac{8}{9}(x - 2) \Rightarrow y - \frac{7}{3} = \frac{8}{9}x - \frac{16}{9} \Rightarrow \boxed{y = \frac{8}{9}x + \frac{5}{9}}$$

La recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 7/3)$ tiene ecuación $y = \frac{8}{9}x + \frac{5}{9}$.

c) Para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ sea 1 debe ser $f'(x_0) = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f'(x_0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = \frac{x_0^2 + 2x_0}{(x_0 + 1)^2} \Rightarrow (x_0 + 1)^2 = x_0^2 + 2x_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0^2 + 2x_0 + 1 = x_0^2 + 2x_0 \Rightarrow 1 = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!}$$

No existe ningún valor x_0 tal que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ sea 1.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(-1, 2, 6)$, el plano $\pi: 3x - 2y + z - 5 = 0$ y la recta $s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{-1}$:

- a) (1.5 puntos) Halle una ecuación de la recta que pasa por P, es secante a s y paralela al plano π .
 b) (1 punto) Halle el simétrico del punto P respecto al plano π .

- a) La recta r paralela al plano π debe tener un vector director perpendicular al vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 3x - 2y + z - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (3, -2, 1) \\ \vec{v}_r = (a, b, c) \\ r \parallel \pi \rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n} \rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (3, -2, 1)(a, b, c) = 3a - 2b + c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 2b - 3a \Rightarrow \vec{v}_r = (a, b, 2b - 3a)$$

La recta r debe ser secante con la recta s por lo que los vectores directores no deben tener coordenadas proporcionales y el producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{PQ_s}]$ debe ser nulo.

$$s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{-1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_s = (2, 1, -1) \\ Q_s(-1, 2, 0) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (a, b, 2b - 3a) \\ \vec{u}_s = (2, 1, -1) \\ \overrightarrow{PQ_s} = (-1, 2, 0) - (-1, 2, 6) = (0, 0, -6) \\ [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{PQ_s}] = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & 2b - 3a \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6a + 12b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b \Rightarrow \vec{v}_r = (2b, b, 2b - 6b) = (2b, b, -4b)$$

Tomamos $b = 1$ y el vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (2, 1, -4)$.

Los vectores $\vec{v}_r = (2, 1, -4)$ y $\vec{u}_s = (2, 1, -1)$ no tienen coordenadas proporcionales.

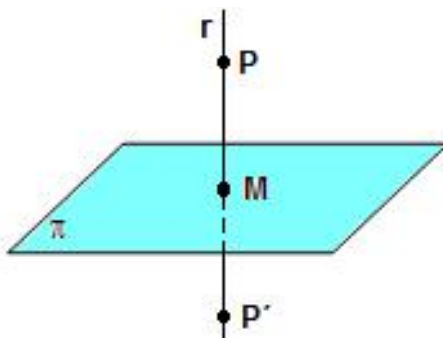
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 1, -4) \\ \vec{u}_s = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{1}{1} \neq \frac{-4}{-1}$$

Determinamos la ecuación de la recta r como la recta que pasa por $P(-1, 2, 6)$ y con vector director $\vec{v}_r = (2, 1, -4)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(-1, 2, 6) \in r \\ \vec{v}_r = (2, 1, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-4}$$

La recta r que pasa por P, es secante a s y paralela al plano π es: $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-4}$

- b) Para obtener las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de un plano π seguiremos el procedimiento descrito en el dibujo.



Hallamos la recta r perpendicular al plano $\pi: 3x - 2y + z - 5 = 0$ y que pasa por P . Por ser perpendicular el vector director de la recta es el vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (3, -2, 1) \\ P(-1, 2, 6) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \left. \begin{array}{l} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 6 + \lambda \end{array} \right\}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 3x - 2y + z - 5 = 0 \\ x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 6 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 3(-1 + 3\lambda) - 2(2 - 2\lambda) + 6 + \lambda - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 + 9\lambda - 4 + 4\lambda + 6 + \lambda - 5 = 0 \Rightarrow 14\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 3\frac{3}{7} = \frac{2}{7} \\ y = 2 - 2\frac{3}{7} = \frac{8}{7} \\ z = 6 + \frac{3}{7} = \frac{45}{7} \end{array} \right. \Rightarrow M\left(\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{45}{7}\right)$$

El punto P' es el resultado de sumarle al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM} = \left(\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{45}{7}\right) - (-1, 2, 6) = \left(\frac{2}{7} + 1, \frac{8}{7} - 2, \frac{45}{7} - 6\right) = \left(\frac{9}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = \left(\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{45}{7}\right) + \left(\frac{9}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{3}{7}\right) = \left(\frac{11}{7}, \frac{2}{7}, \frac{48}{7}\right)$$

El punto P' simétrico del punto P respecto al plano π tiene coordenadas $P'\left(\frac{11}{7}, \frac{2}{7}, \frac{48}{7}\right)$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Para conocer la opinión de los usuarios sobre su servicio, la empresa de transporte público de una ciudad ha realizado una encuesta. De esa encuesta se desprende que la nota global otorgada al servicio por sus usuarios se puede considerar una normal de media 6.7 y de desviación típica 1.25. Si un usuario da una nota menor que 5 se considera que ve como insatisfactorio el servicio; si la nota está entre 5 y 7.5, que para el usuario el servicio es satisfactorio; y si la nota es mayor que 7.5, que el servicio es excelente.

- a) (0.75 puntos) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es excelente?
- b) (1 punto) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es satisfactorio?
- c) (0.75 puntos) Para conocer de forma más directa la opinión de sus usuarios, de entre todos ellos la empresa convoca a 25 elegidos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de entre los convocados consideren el servicio insatisfactorio?

X = La nota otorgada al servicio de transporte público por sus usuarios. $X = N(6.7, 1.25)$

- a) Nos piden calcular $P(X > 7.5)$.

$$P(X > 7.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{7.5 - 6.7}{1.25}\right) = P(Z > 0.64) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.64) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.7389 = \boxed{0.2611}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7421
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734

La probabilidad de que un usuario elegido al azar crea que el servicio de la empresa de transportes es excelente es de 0.2611.

- b) Nos piden calcular $P(5 \leq X \leq 7.5)$.

$$P(5 \leq X \leq 7.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{5 - 6.7}{1.25} \leq Z \leq \frac{7.5 - 6.7}{1.25}\right) = P(-1.36 \leq Z \leq 0.64) =$$

$$= P(Z \leq 0.64) - P(Z \leq -1.36) = P(Z \leq 0.64) - P(Z \geq 1.36) =$$

$$= P(Z \leq 0.64) - [1 - P(Z \leq 1.36)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.7389 - [1 - 0.9131] = \boxed{0.652}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0

La probabilidad de que un usuario elegido al azar crea que el servicio de la empresa de transportes es satisfactorio es de 0.652.

- c) Consideramos la variable aleatoria Y que cuenta el número de encuestados que considera el servicio insatisfactorio de un grupo de 25.

Como la probabilidad de que sea satisfactorio es 0.652, de que sea excelente es 0.2611, la probabilidad de que sea insatisfactorio es $1 - 0.652 - 0.2611 = 0.0869$

Es una variable binomial de parámetros $n = 25$ y $p = 0.0869$. $Y = B(25, 0.0869)$.

Debemos calcular $P(Y \geq 2)$.

$$\begin{aligned}
 P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y < 2) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1)] = \\
 &= 1 - \left[\binom{25}{0} \cdot 0.0869^0 \cdot 0.9131^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0.0869^1 \cdot 0.9131^{24} \right] = \\
 &= 1 - [0.0869^0 \cdot 0.9131^{25} + 25 \cdot 0.0869^1 \cdot 0.9131^{24}] \approx \boxed{0.6518}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que al menos dos de entre los 25 convocados consideren el servicio insatisfactorio es de 0.6518.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean X e Y dos matrices reales y cuadradas de orden dos tales que $5X - 3Y = A$ y $3X + 6Y = B$

, con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1.5 puntos) Hallar X , Y y X^{-1} .

b) (1 punto) Calcular A^{127} .

a) Resolvemos el sistema matricial.

$$\left. \begin{array}{l} 5X - 3Y = A \\ 3X + 6Y = B \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (\times 2) \rightarrow 10X - 6Y = 2A \\ 3X + 6Y = B \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \hline 13X = 2A + B \end{array} \Rightarrow X = \frac{1}{13}(2A + B) = \frac{2}{13}A + \frac{1}{13}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{2}{13}A + \frac{1}{13}B\right) + 6Y = B \Rightarrow \frac{6}{13}A + \frac{3}{13}B + 6Y = B \Rightarrow 6Y = B - \frac{6}{13}A - \frac{3}{13}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6Y = \frac{10}{13}B - \frac{6}{13}A \Rightarrow Y = \frac{5}{39}B - \frac{3}{39}A = \frac{1}{39}(5B - 3A)$$

Hallamos las expresiones de las matrices X e Y .

$$Y = \frac{1}{39}(5B - 3A) = \frac{1}{39}\left(5\begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 195 & 13 \\ -78 & 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1/3 \\ -2 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{13}(2A + B) = \frac{1}{13}\left(2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 39 & 0 \\ -13 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices solución del sistema matricial son $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 5 & 1/3 \\ -2 & 5/3 \end{pmatrix}$.

Hallamos la inversa de la matriz X .

$$|X| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$X^{-1} = \frac{\text{Adj}(X^T)}{|X|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos las primeras potencias de la matriz A en busca de una regularidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = AA^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Hemos comprobado que $A^4 = I$. Como $127 = 31 \cdot 4 + 3$ lo aplicamos al cálculo de A^{127} .

$$A^{127} = A^{31 \cdot 4 + 3} = (A^4)^{31} \cdot A^3 = (I)^{31} \cdot A^3 = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$.

a) (1.5 puntos) Analice la monotonía y los extremos relativos de $f(x)$.

b) (1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por la recta $y = \frac{1}{2}$ y la gráfica de $f(x)$.

a) Buscamos los puntos críticos de la función viendo donde se anula la derivada.

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1} = \begin{cases} \frac{-x}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{-1(x^2+1) - 2x(-x)}{x^2+1} = \frac{-x^2-1+2x^2}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1(x^2+1) - 2x(x)}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x^2}{x^2+1} = \frac{-x^2+1}{x^2+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 0 \rightarrow x^2-1=0 \rightarrow x^2=1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = -1 \in (-\infty, 0) \\ \frac{-x^2+1}{x^2+1} = 0 \rightarrow -x^2+1=0 \rightarrow x^2=1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = 1 \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de -1 , 0 y 1 .

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{(-2)^2-1}{(-2)^2+1} = \frac{3}{5} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = \frac{(-0.5)^2-1}{(-0.5)^2+1} = \frac{-0.75}{1.25} < 0. \text{ La función decrece en } (-1, 0).$$

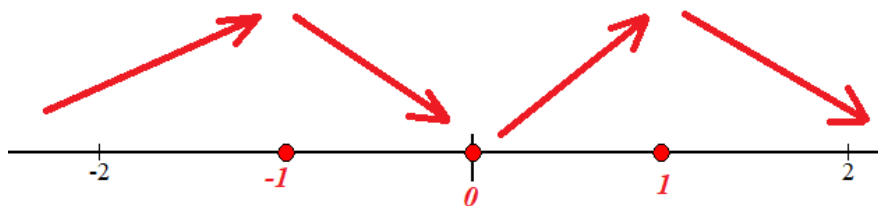
- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{-0.5^2+1}{0.5^2+1} = \frac{0.75}{1.25} > 0. \text{ La función crece en } (0, 1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-2^2+1}{2^2+1} = \frac{-3}{5} < 0.$

La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y decrece en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = -1$ y otro en $x = 1$. La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$.

b) Buscamos los puntos de corte de las gráficas.

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{2} \\
 f(x) &= \begin{cases} \frac{-x}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\
 y = f(x)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \\ f(x) &= \begin{cases} \frac{-x}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} } \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\bullet \frac{-x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \rightarrow -2x = x^2 + 1 \rightarrow x^2 + 2x + 1 \rightarrow \\ &\quad \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = -1 \in (-\infty, 0) \\ &\bullet \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = x^2 + 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 \rightarrow \\ &\quad \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = 1 \in (0, +\infty) \end{aligned} \right.$$

La región del plano limitada por las dos gráficas está situada entre -1 y 1 . Debido al cambio de definición de $f(x)$ en $x = 0$ para el cálculo del valor del área la dividimos en dos partes que calculamos por separado.

Parte 1

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^0 f(x) - \frac{1}{2} dx &= \int_{-1}^0 \frac{-x}{x^2+1} - \frac{1}{2} dx = - \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+1} dx - \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2+1} dx - \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dx = \\
 &= \frac{-1}{2} \left[\ln(x^2+1) \right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{2} x \right]_{-1}^0 = \frac{-1}{2} [\ln(1) - \ln(2)] - \left[0 - \frac{1}{2}(-1) \right] = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \approx -0.15
 \end{aligned}$$

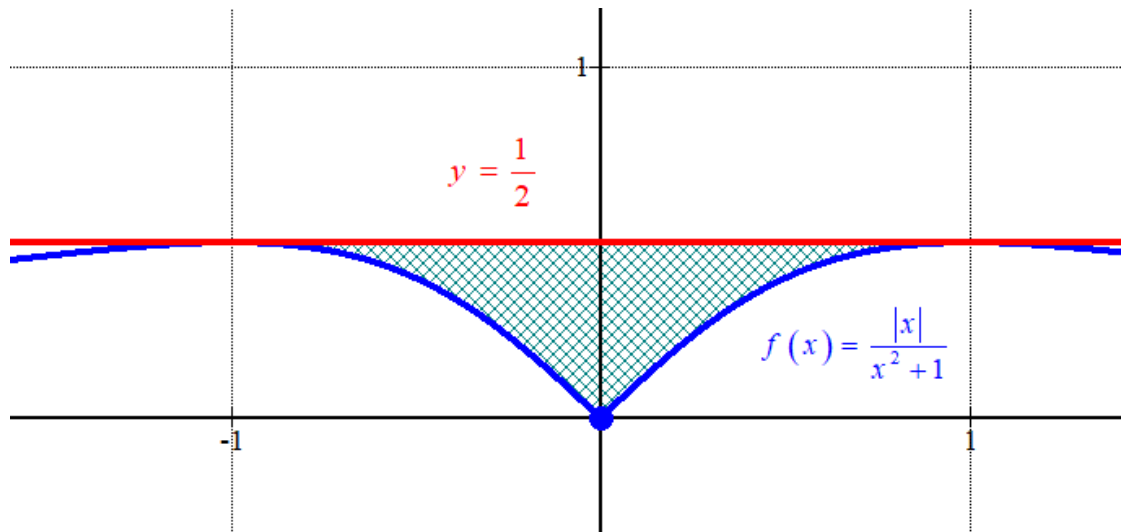
El área de la parte 1 tiene un valor de $\left| \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} \approx 0.15$.

Parte 2

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(x) - \frac{1}{2} dx &= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+1) \right]_0^1 - \left[\frac{1}{2} x \right]_0^1 = \frac{1}{2} [\ln(2) - \ln(1)] - \left[\frac{1}{2} - 0 \right] = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \approx -0.15
 \end{aligned}$$

El área de la parte 2 tiene un valor de $\left| \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} \approx 0.15$.

El área de la región acotada delimitada por la recta $y = \frac{1}{2}$ y la gráfica de $f(x)$ es la suma de las dos áreas obtenidas: $2\left(\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}\right) = 1 - \ln 2 \approx 0.31$ unidades cuadradas.



B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En el punto $A(1, 0, -1)$ se encuentra un emisor láser que dispara un rayo de luz (unidimensional) apuntando hacia el punto $B(3, 1, 0)$. Dicho rayo incide en un punto P del plano

$$\pi : \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 2 + 2\beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \text{ Llamamos al punto } P \text{ el punto de incidencia del rayo de luz sobre el}$$

plano π . Se pide:

- (1.25 puntos) Calcular una ecuación del plano de incidencia, es decir, el plano perpendicular a π que contiene al rayo de luz.
- (0.75 puntos) Calcular la distancia que recorre el rayo de luz desde el emisor hasta el punto P .
- (0.5 puntos) Calcular el ángulo que debería girar el emisor para que la distancia entre él y el nuevo punto de incidencia sobre π sea mínima.

- a) El plano de incidencia π' tiene como uno de sus vectores directores el vector que une los puntos A y B , pues los contiene. El otro vector director es el vector normal del plano π . Hallamos la ecuación implícita del plano π y su vector normal.

$$\pi : \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 2 + 2\beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - x \\ -2\beta = 2 - y \Rightarrow z = 2 - x + 2 - y \Rightarrow \pi : x + y + z - 4 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1) \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}$$

Hallamos las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = (3, 1, 0) - (1, 0, -1) = (2, 1, 1)$$

Hallamos la ecuación del plano de incidencia π' .

$$\left. \begin{array}{l} u = \overrightarrow{AB} = (2, 1, 1) \\ \vec{v} = \vec{n} = (1, 1, 1) \\ B(3, 1, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x-3} + y - 1 + 2z - z - 2(y - 1) - (\cancel{x-3}) = 0 \Rightarrow y - 1 + 2z - z - 2y + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' : -y + z + 1 = 0}$$

El plano de incidencia tiene ecuación $\pi' : -y + z + 1 = 0$.

- b) Hallamos el punto P de incidencia del rayo láser que será el punto de corte de la recta que une los puntos A y B con el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (2, 1, 1) \\ B(3, 1, 0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow 3 + 2\lambda + 1 + \lambda + \lambda - 4 = 0 \Rightarrow 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow P(3, 1, 0)$$

$$\pi: x + y + z - 4 = 0$$

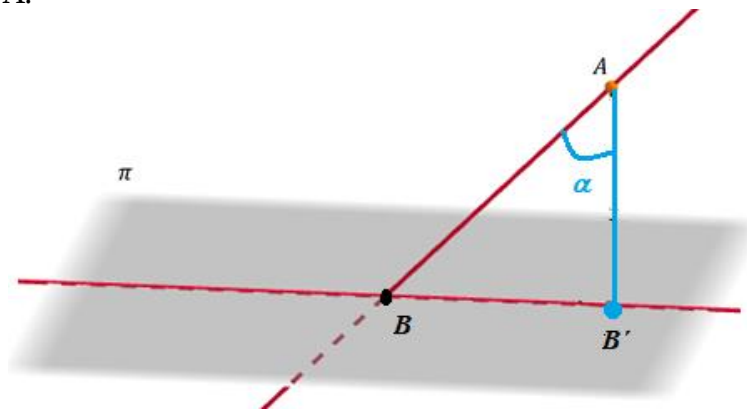
El punto P de incidencia del rayo en el plano π es el punto B, es decir, el punto B pertenece al plano π .

Como el punto P es el punto B la distancia que recorre el rayo es la distancia entre A y B, es decir, el módulo del vector $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 1)$.

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6} \approx 2.45u$$

El rayo láser recorre una distancia aproximada de 2.45 unidades.

- c) Debemos hallar la proyección ortogonal del punto A, que es el punto del plano π más cercano al punto A.



Hallamos la ecuación de la recta r perpendicular al plano que pasa por A. El vector director de la recta es el vector normal del plano.

$$\begin{aligned} \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 1) \\ A(1, 0, -1) \in r \end{aligned} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto B' de corte entre la recta r y el plano π .

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow 1 + \lambda + \lambda - 1 + \lambda - 4 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \\ y = \frac{4}{3} \\ z = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow B' \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Hallamos el ángulo α que debe girar el rayo láser como el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AB'}$.

$$\overrightarrow{AB'} = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) - (1, 0, -1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 1, 1) \\ \overrightarrow{AB'} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \\ \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AB'}|} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}) = \frac{(2, 1, 1) \cdot \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{8}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{\sqrt{6} \sqrt{\frac{16}{3}}} = \frac{\frac{16}{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 19.47^\circ$$

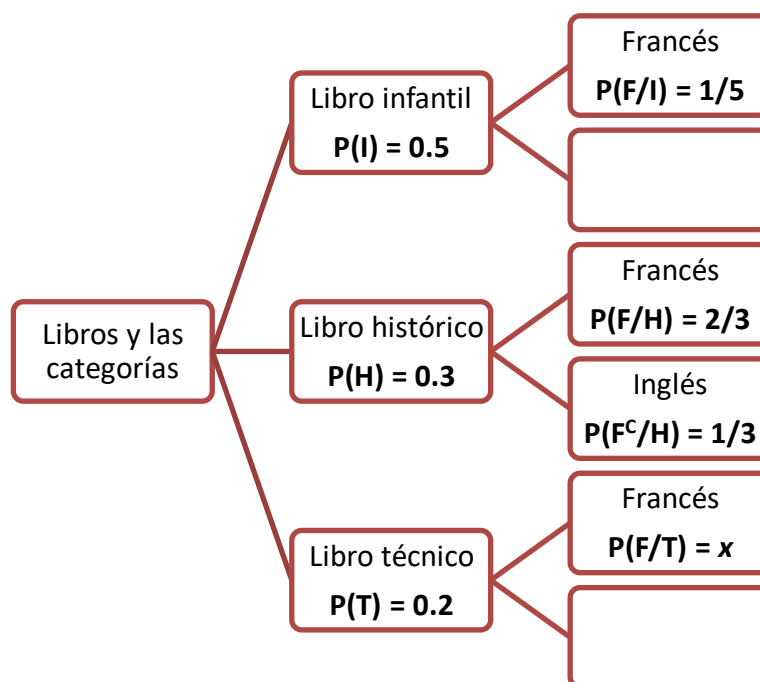
El rayo láser debería girar 19.47° .

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En la sección de idiomas de una biblioteca municipal se tienen libros, en francés o inglés, de tres categorías: el 50% son cuentos infantiles, el 30%, novelas históricas y el resto, manuales técnicos. Uno de cada cinco de los cuentos está en francés y una de cada tres de las novelas, en inglés. Por otra parte, uno de cada siete de los libros en francés es un manual técnico. Se toma un libro al azar y se pide:

- (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté en francés si no es un manual técnico.
- (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté escrito en francés, y la probabilidad de que si está en inglés sea una novela histórica.

Llamamos F al suceso “Libro escrito en francés”, F^C = “Libro escrito en inglés”, I a “el libro es infantil”, H a “el libro es una novela histórica” y T a “el libro es un manual técnico”. Realizamos un diagrama de árbol para organizar todas las probabilidades.



Nos dicen que uno de cada siete de los libros en francés es un manual técnico, lo que implica que $P(T/F) = \frac{1}{7}$. Aplicamos el teorema de Bayes para hallar $P(F/T)$.

$$P(F) = P(I)P(F/I) + P(H)P(F/H) + P(T)P(F/T) = 0.5 \cdot \frac{1}{5} + 0.3 \cdot \frac{2}{3} + 0.2 \cdot x$$

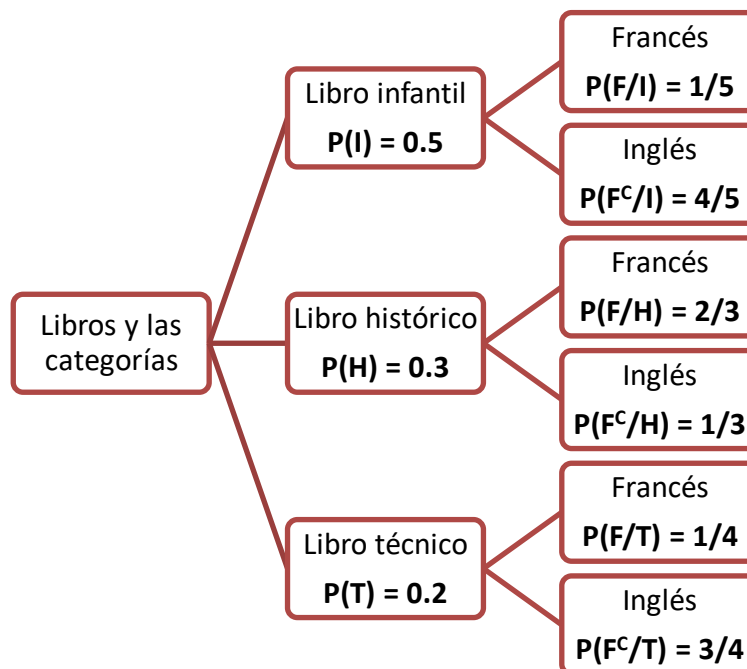
$$P(F) = 0.3 + 0.2x$$

$$P(T/F) = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{P(T \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{P(T)P(F/T)}{P(F)} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{0.2 \cdot x}{0.3 + 0.2x} = \frac{1}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.4x = 0.3 + 0.2x \Rightarrow 1.2x = 0.3 \Rightarrow x = \frac{0.3}{1.2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{P(F/T) = \frac{1}{4}}$$

Tenemos que $P(F/T) = \frac{1}{4}$ y que $P(F) = 0.3 + 0.2 \cdot \frac{1}{4} = 0.35$.

Completamos el diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(F/T^c)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(F/T^c) = \frac{P(F \cap T^c)}{P(T^c)} = \frac{P(F) - P(F \cap T)}{1 - P(T)} = \frac{P(F) - P(T)P(F/T)}{1 - P(T)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(F/T^c) = \frac{0.35 - 0.2 \cdot \frac{1}{4}}{1 - 0.2} = \frac{3}{8} = \boxed{0.375}$$

La probabilidad de que un libro esté en francés si no es un manual técnico es de 0.375.

b) Nos piden calcular $P(H)$, calculado previamente y tiene un valor $P(H) = 0.3$.

También nos piden calcular $P(H/F^c)$.

$$P(H/F^c) = \frac{P(H \cap F^c)}{P(F^c)} = \frac{P(H)P(F^c/H)}{1 - P(F)} = \frac{0.3 \cdot \frac{1}{3}}{1 - 0.35} = \frac{2}{13} \approx 0.1538$$

La probabilidad de que un libro si está en inglés sea una novela histórica es de 0.1538.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos proporcionados a valores absolutos. Consideramos que en la biblioteca hay $3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 10 = 2100$ libros. Consideramos esta cifra para que los cálculos a realizar den un valor exacto.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Infantiles	Novelas	Manuales	
Francés	$\frac{1050}{5} = 210$		$\frac{x}{7}$	x
Inglés		$\frac{630}{3} = 210$		$2100 - x$
	$\frac{2100}{2} = 1050$	$2100 \cdot 0.30 = 630$		2100

De las 630 novelas 210 están en inglés, por lo que $630 - 210 = 420$ están escritas en francés.

Resolvemos la ecuación que se nos plantea en la línea de la fila de francés.

$$210 + 420 + \frac{x}{7} = x \Rightarrow 1470 + 2940 + x = 7x \Rightarrow 4410 = 6x \Rightarrow x = \frac{4410}{6} = 735$$

Hay 735 libros escritos en francés.

Completamos la tabla.

	Infantiles	Novelas	Manuales	
Francés	210	420	$\frac{735}{7} = 105$	735
Inglés	840	210	315	1365
	1050	630	420	2100

Respondemos a las preguntas del ejercicio aplicando la regla de Laplace.

- a) Hay $1050 + 630 = 1680$ libros que no son manuales técnicos.
De ellos hay $210 + 420 = 630$ en francés.

$$P(F / T^c) = \frac{630}{1680} = \frac{3}{8} = \boxed{0.375}$$

- b) Hay 735 libros en francés de un total de 2100 libros.

$$P(F) = \frac{735}{2100} = \frac{7}{20} = 0.35$$

Hay 1365 libros en inglés, de los cuales 210 son novela histórica.

$$P(H / F^c) = \frac{210}{1365} = \frac{2}{13} \approx 0.1538$$

EvAU 2023 Extraordinaria Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2022-2023 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

- (0.5 puntos) Calcular el determinante de $A^t A$.
- (0.5 puntos) Calcular el rango de BA en función de b .
- (0.75 puntos) Calcular B^{-1} para $b = 2$.
- (0.75 puntos) Para $b = 1$, calcular B^5 .

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

$$c(v) = \begin{cases} \frac{5v}{3} & \text{si } 0 \leq v < 3 \\ 14 - 4v + \frac{v^2}{3} & \text{si } v \geq 3 \end{cases}$$

- (1 punto) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?
- (1.5 puntos) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \leq v \leq 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi: z=1$, los puntos $P(1,1,1)$ y $Q(0,0,1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q .

- (0.25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π .
- (1 punto) Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z=0$.
- (1.25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r , con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(A)=0.5$, $P(A/B)=0.625$ y $P(A \cup B)=0.65$, se pide calcular:

- (1.5 puntos) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.
- (1 punto) $P(A/A \cup B)$ y $P(A \cap B/A \cup B)$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema
$$\begin{cases} -2x + y + kz = 1 \\ kx - y - z = 0 \\ -y + (k-1)z = 3 \end{cases}$$
 . se pide:

- (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k .
- (0.5 puntos) Resolverlo para $k = 3$.
- (0.75 puntos) Resolverlo para $k = 3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x = 2$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones

$$f(x) = 2 + 2x - 2x^2 \text{ y } g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3,$$

se pide:

- (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$.
- (1.5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el plano $\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$, se pide:

- (0.5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.
- (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π .
- (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a r , que esté contenida en π , y que corte al eje OZ.

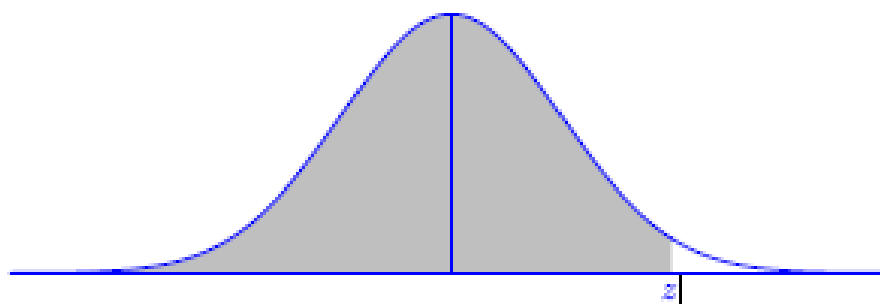
B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El 65% de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consigue a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir.

Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.
- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.
- (1 punto) Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Calcular el determinante de $A^t A$.
- b) (0.5 puntos) Calcular el rango de BA en función de b .
- c) (0.75 puntos) Calcular B^{-1} para $b = 2$.
- d) (0.75 puntos) Para $b = 1$, calcular B^5 .

a) Calculamos la expresión de la matriz $A^t A$.

$$A^t A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & 2-0 & 0-2 \\ 2-0 & 1+0 & 0+0 \\ 0-2 & 0+0 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos el valor de su determinante $|A^t A|$.

$$|A^t A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 20 + 0 + 0 - 4 - 16 - 0 = \boxed{0}$$

b) Hallamos la expresión de la matriz BA .

$$BA = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2-b & 1 & 2b \end{pmatrix}$$

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna 1ª $\rightarrow \begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & 2b \end{vmatrix} = 2b^2$. Este determinante se anula si $b = 0$. El rango de BA es 2 si $b \neq 0$.

Si $b = 0$ la matriz BA queda $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz BA tiene rango 1.

Resumiendo: Si $b \neq 0$ el rango de BA es 2 y si $b = 0$ el rango de BA es 1.

c) Para $b = 2$ la matriz B queda $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Al ser el determinante no nulo existe la inversa de la matriz B . La calculamos.

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^t)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

d) Para $b = 1$ la matriz B queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos las potencias sucesivas de la matriz B hasta llegar a B^5 .

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^5 = B^4 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4+1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}$$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

$$c(v) = \begin{cases} \frac{5v}{3} & \text{si } 0 \leq v < 3 \\ 14 - 4v + \frac{v^2}{3} & \text{si } v \geq 3 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?
 b) (1.5 puntos) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \leq v \leq 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

- a) La función que debemos de manejar es $c(v) = 14 - 4v + \frac{v^2}{3}$ pues $v \geq 3$.

Buscamos el mínimo relativo de la función usando su derivada.

$$\left. \begin{aligned} c(v) = 14 - 4v + \frac{v^2}{3} \Rightarrow c'(v) = -4 + \frac{2v}{3} \\ c'(v) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -4 + \frac{2v}{3} = 0 \Rightarrow -12 + 2v = 0 \Rightarrow 2v = 12 \Rightarrow v = 6$$

$$c''(v) = \frac{2}{3} \Rightarrow c''(6) = \frac{2}{3} > 0 \rightarrow \text{¡Mínimo!}$$

Para que el consumo sea mínimo debe de ir a 60 km/h.

- b) Analizamos la situación en las dos zonas de velocidad.

Con una velocidad $1 \leq v < 3$ la función consumo es $c(v) = \frac{5v}{3}$. Esta función es lineal y creciente, a más velocidad mayor consumo, por lo que el menor consumo estará en $v = 1$. Este consumo es de $c(1) = \frac{5}{3} \approx 1.667$ litros / 100 km.

El consumo máximo estará en v próxima a 3, este consumo será próximo a

$$c(3) = \frac{5 \cdot 3}{3} = 5 \text{ litros / 100 km}$$

Con una velocidad $3 \leq v \leq 8$ la función consumo es $c(v) = 14 - 4v + \frac{v^2}{3}$. En el apartado anterior hemos visto que tiene un consumo mínimo con $v = 6$. Este consumo es de

$$c(6) = 14 - 24 + \frac{6^2}{3} = 2 \text{ litros / 100 km.}$$

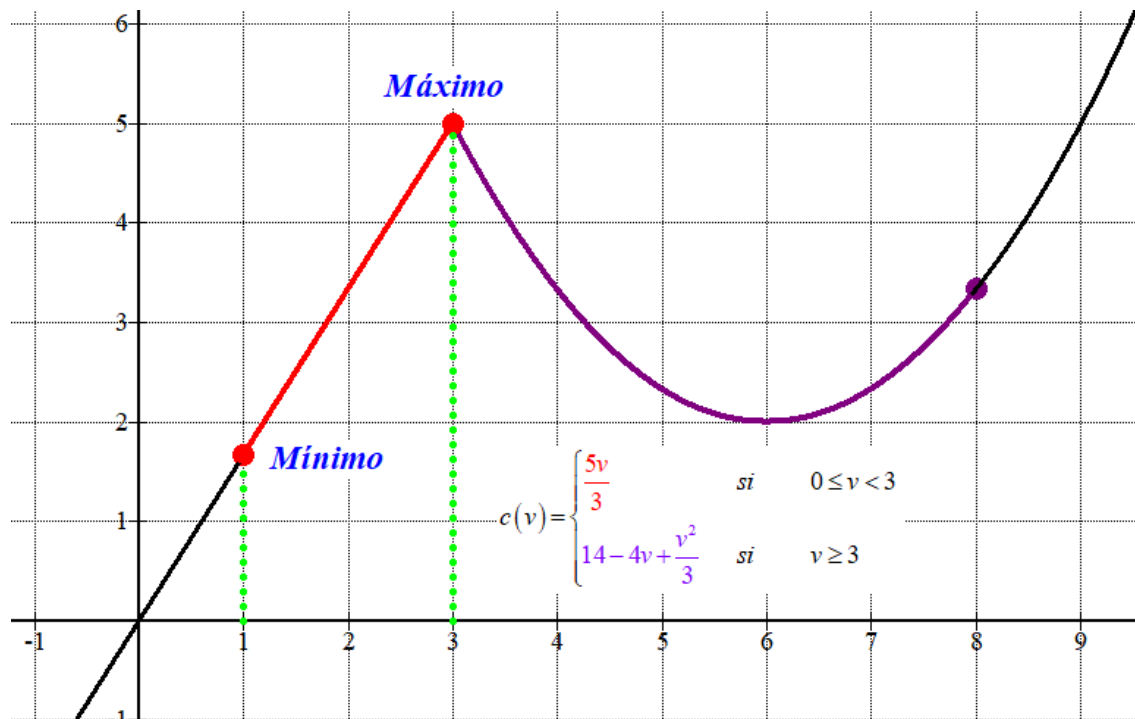
El consumo máximo estará en los extremos del intervalo:

$$c(3) = 14 - 12 + \frac{3^2}{3} = 5 \text{ litros / 100 km}$$

$$c(8) = 14 - 32 + \frac{8^2}{3} = \frac{10}{3} \approx 3.33 \text{ litros} / 100 \text{ km}$$

El mínimo consumo se obtiene con $v = 1$. Este consumo es de 1.667 litros / 100 km .

El máximo consumo se produce con $v = 3$. Este consumo es de 5 litros / 100 km .



A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi: z=1$, los puntos $P(1, 1, 1)$ y $Q(0, 0, 1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q .

- a) (0.25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π .
 b) (1 punto) Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z=0$.
 c) (1.25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r , con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

a) Para que los puntos pertenezcan al plano deben satisfacer su ecuación $\pi: z=1$. Basta con que su tercera coordenada sea 1. Lo cumplen los dos puntos $P(1, 1, 1)$ y $Q(0, 0, 1)$.

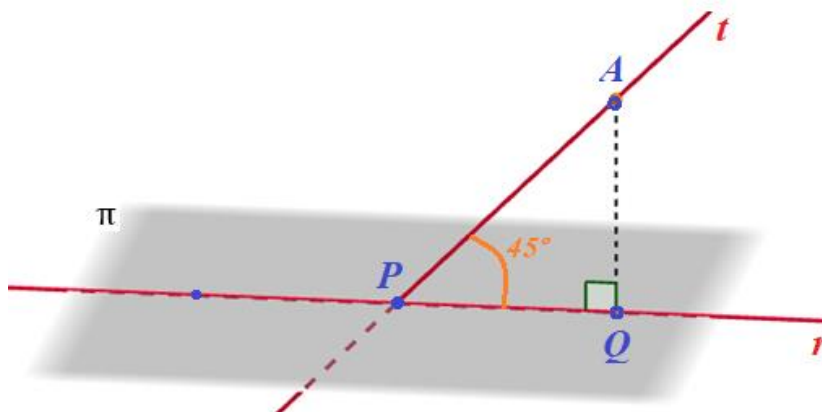
b) Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 1, 1)$ y $Q(0, 0, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{QP} = (1, 1, 1) - Q(0, 0, 1) = (1, 1, 0) \\ Q(0, 0, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

Una recta s paralela a r contenida en el plano $z=0$ debe tener el mismo vector director que r y debe pasar por un punto cualquiera del plano $z=0$, por ejemplo $A(0,0,0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \vec{v}_r = (1, 1, 0) \\ A(0, 0, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

c) Buscamos una recta t como la del dibujo.



Como los puntos P y Q están en el plano π la recta r está contenida en el plano π . La recta t que deseamos hallar debe cortar el plano en el punto P . Además, uno de sus puntos debe proyectarse ortogonalmente en el punto Q . La recta r y t deben formar 45° .

Si $A(a,b,c)$ tenemos que $\overrightarrow{AQ} \perp \pi$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (0, 0, 1) \\ \overrightarrow{AQ} = (0, 0, 1) - (a, b, c) = (-a, -b, 1-c) \\ \overrightarrow{AQ} \perp \pi \Rightarrow \overrightarrow{AQ} \parallel \vec{n} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-a}{0} = \frac{-b}{0} = \frac{1-c}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{-a}{0} = \frac{1-c}{1} \rightarrow -a = 0(1-c) \rightarrow a = 0 \\ \frac{-b}{0} = \frac{1-c}{1} \rightarrow -b = 0(1-c) \rightarrow b = 0 \end{array} \right. \Rightarrow A(0, 0, c)$$

Si $A(0, 0, c)$ tenemos que $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PQ}) = 45^\circ$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PA} = (0, 0, c) - (1, 1, 1) = (-1, -1, c-1) \\ \overrightarrow{PQ} = (0, 0, 1) - (1, 1, 1) = (-1, -1, 0) \\ (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PQ}) = 45^\circ \\ \cos(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PQ}) = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{(-1, -1, c-1)(-1, -1, 0)}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (c-1)^2} \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+1}{\sqrt{2+(c-1)^2} \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2+(c-1)^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \Rightarrow 2\sqrt{2+(c-1)^2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2+(c-1)^2} = 2 \Rightarrow 2+(c-1)^2 = 4 \Rightarrow (c-1)^2 = 2 \Rightarrow c-1 = \sqrt{2} \Rightarrow c = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A(0, 0, 1 + \sqrt{2})}$$

Determinamos la ecuación de la recta t que pasa por A y P . Esta recta tendrá como vector director el vector $\vec{u}_t = \overrightarrow{AP}$.

$$\vec{u}_t = \overrightarrow{AP} = (1, 1, 1) - (0, 0, 1 + \sqrt{2}) = (1, 1, -\sqrt{2})$$

$$\left. \begin{array}{l} A(0, 0, 1 + \sqrt{2}) \in t \\ P(1, 1, 1) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_t = \overrightarrow{AP} = (1, 1, -\sqrt{2}) \\ P(1, 1, 1) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow t : \boxed{\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \sqrt{2}\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(A) = 0.5$, $P(A/B) = 0.625$ y $P(A \cup B) = 0.65$, se pide calcular:

- a) (1.5 puntos) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.
 b) (1 punto) $P(A/A \cup B)$ y $P(A \cap B/A \cup B)$

a) Utilizamos el teorema de Bayes y la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A/B) = 0.625 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.625 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.625 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.625P(B)$$

$$P(A \cup B) = 0.65 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.65 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5 + P(B) - 0.625P(B) = 0.65 \Rightarrow (1 - 0.625)P(B) = 0.65 - 0.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.375P(B) = 0.15 \Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{0.15}{0.375} = 0.4} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.625 \cdot 0.4 = 0.25}$$

b) Calculamos $P(A/A \cup B)$

$$P(A/A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \{A \cap (A \cup B) = A\} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

$$P(A/A \cup B) = \frac{0.5}{0.5 + 0.4 - 0.25} = \frac{0.5}{0.65} = \boxed{\frac{10}{13} \approx 0.769}$$

Calculamos $P(A \cap B/A \cup B)$.

$$P(A \cap B/A \cup B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \{(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B\} =$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} = \frac{0.25}{0.65} = \boxed{\frac{5}{13} \approx 0.3846}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\begin{cases} -2x + y + kz = 1 \\ kx - y - z = 0 \\ -y + (k-1)z = 3 \end{cases}$. se pide:

- a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k .
 b) (0.5 puntos) Resolverlo para $k = 3$.
 c) (0.75 puntos) Resolverlo para $k = 3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x = 2$.

a) Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & k \\ k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & k \\ k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{vmatrix} = 2(k-1) + 0 - k^2 - 0 - k(k-1) + 2 =$$

$$= 2k - 2 - k^2 - k^2 + k + 2 = -2k^2 + 3k$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2k^2 + 3k = 0 \Rightarrow k(-2k + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ -2k + 3 = 0 \rightarrow k = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq \frac{3}{2}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $k = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos el rango de A y el de la matriz ampliada A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad 3 \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & \\ \hline -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline & \underbrace{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Como tienen rangos distintos el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $k = \frac{3}{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Fila } 2^a + 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 6 \quad -4 \quad -4 \quad 0 \\ -6 \quad 3 \quad 4.5 \quad 3 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 0.5 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1.5 & 1 \\ 0 & -1 & 0.5 & 3 \\ 0 & -1 & 0.5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad 0.5 \quad 3 \\ 0 \quad 1 \quad -0.5 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{A/B} & & \\ -2 & 1 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \underbrace{A} & & \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $k \neq 0$ y $k \neq \frac{3}{2}$ el sistema es **compatible determinado**, para $k = 0$ el sistema es **incompatible** y para $k = \frac{3}{2}$ es **compatible indeterminado**.

b) Si $k = 3$ el sistema es compatible determinado. Obtenemos la solución.

$$\begin{cases} -2x + y + 3z = 1 \\ 3x - y - z = 0 \\ -y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + 3z = 1 \\ 3x - y - z = 0 \\ 2z - 3 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2z - 3 + 3z = 1 \\ 3x - (2z - 3) - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 5z = 4 \\ 3x - 2z + 3 - z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + 5z = 4 \\ 3x - 3z = -3 \rightarrow x - z = -1 \rightarrow x = z - 1 \end{cases} \Rightarrow -2(z - 1) + 5z = 4 \Rightarrow -2z + 2 + 5z = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z = 2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{2}{3}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}} \\ \boxed{y = 2 \cdot \frac{2}{3} - 3 = -\frac{5}{3}} \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = -\frac{1}{3}$; $y = -\frac{5}{3}$; $z = \frac{2}{3}$.

c) Si $k = \frac{3}{2}$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos a partir del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado a).

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1.5 & 1 \\ 0 & -1 & 0.5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + 1.5z = 1 \\ -y + 0.5z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + 1.5z = 1 \\ 0.5z - 3 = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + 0.5z - 3 + 1.5z = 1 \Rightarrow -2x + 2z = 4 \Rightarrow -x + z = 2 \Rightarrow x = z - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -3 + 0.5\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Buscamos dentro de las infinitas soluciones del sistema una en la que $x = 2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = -3 + 0.5\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 = -2 + \lambda \rightarrow \lambda = 4 \\ y = -3 + 0.5\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -3 + 0.5 \cdot 4 = -1 \\ z = \lambda = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases}}$$

La solución particular del sistema es $x = 2; y = -1; z = 4$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones

$$f(x) = 2 + 2x - 2x^2 \text{ y } g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3,$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$.b) (1.5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.a) Obtenemos la expresión de la función $h(x)$ como función a trozos.

$$h(x) = |f(x)| = |2 + 2x - 2x^2|$$

Vemos cuando se anula la función.

$$2 + 2x - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = x \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = x \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la función antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$ tomamos $x = -1$ y la expresión $2 + 2x - 2x^2$ vale

$$2 + 2(-1) - 2(-1)^2 = -2 < 0. \text{ La función es}$$

$$h(x) = |2 + 2x - 2x^2| = -(2 + 2x - 2x^2) = 2x^2 - 2x - 2$$

- En el intervalo $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y la expresión $2 + 2x - 2x^2$ vale

$$2 + 2(0) - 2(0)^2 = 2 > 0. \text{ La función es } h(x) = |2 + 2x - 2x^2| = -2x^2 + 2x + 2$$

- En el intervalo $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la expresión $2 + 2x - 2x^2$ vale

$$2 + 2(2) - 2(2)^2 = -2 < 0. \text{ La función es}$$

$$h(x) = |2 + 2x - 2x^2| = -(2 + 2x - 2x^2) = 2x^2 - 2x - 2$$

$$\text{La función } h(x) \text{ queda } h(x) = |2 + 2x - 2x^2| = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 2 & \text{si } x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ -2x^2 + 2x + 2 & \text{si } \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ 2x^2 - 2x - 2 & \text{si } x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Esta función es continua en $\mathbb{R}$.

Esta función es derivable en $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$

La expresión de la derivada es:

$$h'(x) = \begin{cases} 4x-2 & \text{si } x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -4x+2 & \text{si } \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 4x-2 & \text{si } x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Estudiamos su derivabilidad en $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y en $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

¿Es derivable en $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$?

$$\left. \begin{aligned} h'\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^-\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}^-} 4x-2 = 4\frac{1-\sqrt{5}}{2} - 2 = 2 - 2\sqrt{5} - 2 = -2\sqrt{5} \\ h'\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^+\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}^+} -4x+2 = -4\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2 = -2 + 2\sqrt{5} + 2 = 2\sqrt{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^-\right) \neq h'\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^+\right)$$

Al ser las derivadas laterales distintas la función $h(x)$ no es derivable en $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

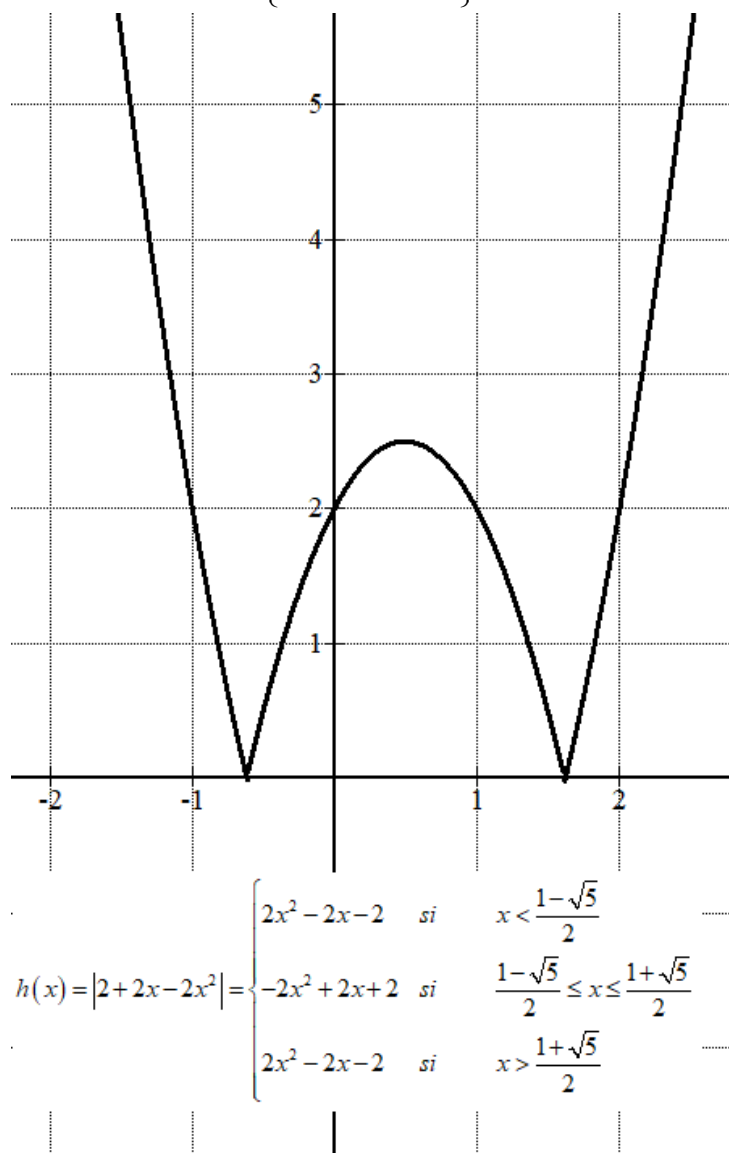
¿Es derivable en $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$?

$$\left. \begin{aligned} h'\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^-\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}^-} -4x+2 = -4\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2 = -2 - 2\sqrt{5} + 2 = -2\sqrt{5} \\ h'\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^+\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}^+} 4x-2 = 4\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 2 = 2 + 2\sqrt{5} - 2 = 2\sqrt{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^-\right) \neq h'\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^+\right)$$

La función $h(x)$ no es derivable en $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La función $h(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$



b) Hallamos los puntos de corte de las gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 2 + 2x - 2x^2 \\ g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 2x - 2x^2 = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3 \Rightarrow -2x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x(x^2 + 3x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-3+5}{2} = 1 \\ \frac{-3-5}{2} = -4 \end{cases} \end{cases}$$

Las gráficas se cortan en tres puntos: $x = -4$, $x = 0$, $x = 1$. Como nos piden determinar el área de la región acotada por las dos gráficas, $x = 0$ y $x = 2$ el área la dividimos en dos trozos: uno entre 0 y 1 y otro entre 1 y 2.

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x) - f(x) dx &= \int_0^1 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3 - (2 + 2x - 2x^2) dx = \\ &= \int_0^1 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3 - 2 - 2x + 2x^2 dx = \int_0^1 -8x + 6x^2 + 2x^3 dx = \\ &= \left[-8\frac{x^2}{2} + 6\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \left[-8\frac{1^2}{2} + 6\frac{1^3}{3} + 2\frac{1^4}{4} \right] - \left[-8\frac{0^2}{2} + 6\frac{0^3}{3} + 2\frac{0^4}{4} \right] = \\ &= -4 + 2 + \frac{1}{2} = -1.5\end{aligned}$$

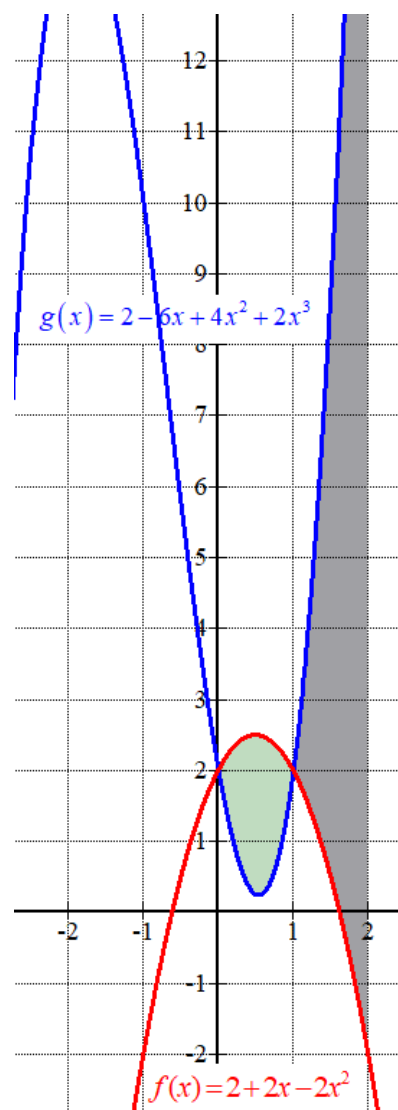
$$\text{Área 1} = \left| \int_0^1 g(x) - f(x) dx \right| = |-1.5| = 1.5 \text{ u}^2$$

$$\begin{aligned}\int_1^2 g(x) - f(x) dx &= \int_1^2 -8x + 6x^2 + 2x^3 dx = \\ &= \left[-8\frac{x^2}{2} + 6\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^4}{4} \right]_1^2 = \left[-4x^2 + 2x^3 + \frac{x^4}{2} \right]_1^2 = \\ &= \left[-4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \frac{2^4}{2} \right] - \left[-4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^3 + \frac{1^4}{2} \right] = \\ &= -16 + 16 + 8 + 4 - 2 - \frac{1}{2} = 9.5\end{aligned}$$

$$\text{Área 2} = \left| \int_1^2 g(x) - f(x) dx \right| = |9.5| = 9.5 \text{ u}^2$$

El área total es la suma de las dos partes.

$$\text{Área} = 1.5 + 9.5 = 11 \text{ u}^2$$



B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el plano $\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.
 b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π .
 c) (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a r , que esté contenida en π , y que corte al eje OZ.

- a) El punto P del plano más próximo al origen de coordenadas es la proyección ortogonal del origen de coordenadas en el plano.

Para hallar esta proyección P obtenemos la recta perpendicular al plano que pasa por $O(0,0,0)$. Después hallamos el punto de corte de plano y recta. Dicho punto es el punto buscado.

La recta s perpendicular al plano tendrá como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 3, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \vec{n} = (1, 3, 2) \\ O(0, 0, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto P como intersección de la recta s y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \\ \pi : x + 3y + 2z + 14 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + 9\lambda + 4\lambda + 14 = 0 \Rightarrow 14\lambda = -14 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(-1, -3, -2)}$$

- b) La proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π es una recta t que determinamos obteniendo la proyección de dos puntos del eje OZ sobre el plano.
 Dos puntos del eje OZ pueden ser $O(0,0,0)$ y $B(0,0,7)$.

La proyección del punto $O(0,0,0)$ la hemos calculado y es $P(-1, -3, -2)$.

Determinamos la proyección del punto $B(0,0,7)$ sobre el plano π siguiendo los mismos pasos que en el apartado a).

Determinamos la recta s' perpendicular al plano que pasa por el punto B.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_{s'} = \vec{n} = (1, 3, 2) \\ B(0, 0, 7) \in s' \end{array} \right\} \Rightarrow s' : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta s' y el plano π .

$$s': \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \lambda + 9\lambda + 14 + 4\lambda + 14 = 0 \Rightarrow 14\lambda = -28 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow$$

$$\pi: x + 3y + 2z + 14 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -6 \\ z = 7 - 4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(-2, -6, 3)}$$

La proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π es la recta que pasa por P y Q.

$$\left. \begin{array}{l} Q(-2, -6, 3) \in t \\ P(-1, -3, -2) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (-2, -6, 3) - (-1, -3, -2) = (-1, -3, 5) \\ P(-1, -3, -2) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: \begin{cases} x = -1 - \alpha \\ y = -3 - 3\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 5\alpha \end{cases}$$

- c) Como la recta t' pedida debe estar contenida en el plano π debe ser perpendicular al vector normal del plano y a su vez perpendicular al vector director de la recta. Este vector es el producto vectorial de ambos vectores.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = \beta \Rightarrow \vec{v}_r = (0, 1, 0) \\ z = 5 \end{cases} \quad \pi: x + 3y + 2z + 14 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 3, 2)$$

$$\Rightarrow \vec{u}_{t'} = \vec{v}_r \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2i - k = (2, 0, -1)$$

Hallamos el punto A de corte del plano π con el eje OZ.

$$\pi: x + 3y + 2z + 14 = 0$$

$$eje\ OZ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + 0 + 2z + 14 = 0 \Rightarrow 2z = -14 \Rightarrow z = -7 \Rightarrow A(0, 0, -7)$$

La recta t' pedida debe tener como vector director $\vec{u}_{t'} = (2, 0, -1)$ y pasar por el punto $A(0, 0, -7)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_{t'} = (2, 0, -1) \\ A(0, 0, -7) \in t' \end{array} \right\} \Rightarrow t': \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 0 \\ z = -7 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El 65% de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consigue a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir. Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.
- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.
- (1 punto) Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.

X = Número de universitarios que necesitan más de un intento para superar el examen práctico de conducir de un grupo de 10.

Es una variable binomial con parámetros $n = 10$ y $p = 1 - 0.65 = 0.35$. $X = B(10, 0.35)$.

- a) Debemos calcular $P(X = 3)$.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0.35^3 \cdot 0.65^7 \approx \boxed{0.2522}$$

- b) Debemos calcular $P(X \geq 1)$. Calculamos la probabilidad del suceso contrario $P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0.35^0 \cdot 0.65^{10} \approx 0.0135$$

Calculamos $P(X \geq 1)$ usando el suceso contrario.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.0135 = \boxed{0.9865}$$

- c) X = Número de universitarios que aprueban a la primera el examen práctico de conducir de un grupo de 60. $X = B(60, 0.65)$

Esta variable binomial se aproxima por una normal de media $np = 60 \cdot 0.65 = 39$ y

desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{60 \cdot 0.65 \cdot 0.35} \approx 3.6946$.

La variable binomial $X = B(60, 0.65)$ se aproxima con una normal $Y = N(39, 3.6946)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 39 > 5$ y $nq = 60 \cdot 0.35 = 21 > 5$.

Nos piden calcular $P(X \geq 30)$.

$$P(X \geq 30) = \{\text{Corrección de Yates}\} =$$

$$= P(Y \geq 29.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{29.5 - 39}{3.6946}\right) =$$

$$= P(Z \geq -2.57) = P(Z \leq 2.57) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla de la } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9949}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9947	0.9949

EvAU 2023 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2022-2023 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	---	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b+c & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c & 2a+4 \\ 4b+4c+2 & 11 \end{pmatrix}$.

Determine los valores de a , b y c sabiendo que dichas matrices verifican simultáneamente estas tres condiciones:

- la matriz AB es simétrica, es decir, coincide con su traspuesta.
- la matriz $A + B$ no tiene inversa.
- la matriz $AB - C$ es igual a la matriz identidad.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se quiere construir un depósito de barro cilíndrico de volumen $432\pi \text{ dm}^3$ para elaborar un vino artesanal usando técnicas antiguas. El depósito se sitúa verticalmente, apoyado sobre su base circular. Se sabe que al utilizar ese material poroso se produce, con el tiempo, una pérdida de líquido a través de la superficie que está en contacto con el vino. Dicha pérdida a través de la pared lateral es de 10 cl por dm^2 y a través del suelo de 20 cl por dm^2 .

Calcular las dimensiones que debe tener el depósito para que la filtración de vino sea mínima.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideremos las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}, \quad s \equiv \begin{cases} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{cases}$$

- (1 punto) Determine la posición relativa de las rectas r y s , y calcule su intersección si existe.
- (1 punto) Calcule una ecuación del plano que contiene a r y s .
- (0.5 puntos) Indique el ángulo que forman las rectas r y s .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tiene un dado de nueve caras numeradas con los números del 2 al 10, cada uno con igual probabilidad de salir al lanzar el dado.

- (0.5 puntos) Si se lanza una vez el dado, calcule la probabilidad del suceso “el resultado es un número primo”.
- (1 punto) Se lanza el dado dos veces consecutivas y se suman los resultados. Calcule la probabilidad de que la suma sea par.
- (1 punto) Se lanza el dado dos veces consecutivas y la suma de los dos resultados es impar. Calcule la probabilidad de que el resultado del primer lanzamiento haya sido primo.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa conservera fabrica latas de macedonia de frutas (melocotón, pera y piña) de 1 kg. Las latas contienen 750 gramos de fruta y el resto es agua y azúcar. Si la empresa utiliza la misma cantidad de todas las frutas, el coste en fruta por lata para la conservera es de 1.8 euros y, si utiliza 0.25 kg de melocotón y 100 gramos más de piña que de pera, el coste en fruta por lata es de 1.9 euros. Si la empresa paga 18000 euros por un lote compuesto de 3000 kg de melocotón, 3000 kg de pera y 2000 kg de piña, calcule el coste para la empresa de cada kg de melocotón, de pera y de piña.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = x^4 - 4x - 1$,

- (0.5 puntos) Estudie los máximos y los mínimos relativos de f .
- (0.5 puntos) Justifique que la función f se anula en un punto del intervalo $[0, 2]$.
- (0.75 puntos) Justifique que la ecuación $x^4 - 4x - 1 = 0$ solo tiene dos raíces reales.
- (0.75 puntos) Halle el área comprendida entre la gráfica de la función f y la recta $y = -4x$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - z = 4 \end{cases}$ y el punto $A(4, -3, 4)$, se pide:

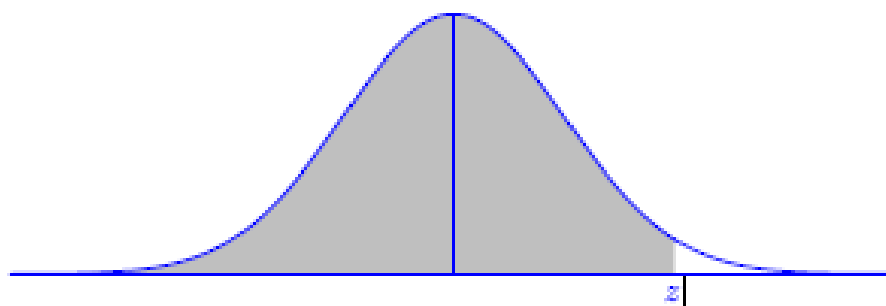
- (1.25 puntos) Calcular la distancia del punto A a la recta r . ¿En qué punto de la recta se alcanza?
- (1.25 puntos) Calcular el volumen del tetraedro determinado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y el plano perpendicular a r que pasa por el punto A.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un determinado jugador de baloncesto tiene un porcentaje de éxito del 85% en tiros libres y del 20% en tiros desde el centro del campo.

- (1.5 puntos) Para finalizar el calentamiento antes de cada partido el citado jugador lanza cuatro tiros libres y cuatro tiros desde el centro del campo. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte tres de los cuatro tiros libres? ¿Cuál es la probabilidad de que acierte tres de los cuatro tiros desde el centro del campo? ¿Y la de que acierte tres tiros libres y tres desde el centro del campo de los ocho lanzados?
- (1 punto) Calcule, mediante la aproximación por una normal, la probabilidad de que el citado jugador falle al menos el 20% de los tiros libres de una serie de 200 tiros libres.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b+c & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c & 2a+4 \\ 4b+4c+2 & 11 \end{pmatrix}$.

Determine los valores de a , b y c sabiendo que dichas matrices verifican simultáneamente estas tres condiciones:

- la matriz AB es simétrica, es decir, coincide con su traspuesta.
- la matriz $A + B$ no tiene inversa.
- la matriz $AB - C$ es igual a la matriz identidad.

Calculamos la matriz AB .

$$AB = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b+c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+2c & 2a+4 \\ 2+4b+4c & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+2c & 2a+4 \\ 2+4b+4c & 12 \end{pmatrix}$$

La matriz AB es simétrica $\rightarrow AB = (AB)^T$.

$$AB = \begin{pmatrix} a+2b+2c & 2a+4 \\ 2+4b+4c & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^T = \begin{pmatrix} a+2b+2c & 2+4b+4c \\ 2a+4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$AB = (AB)^T \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b+2c & 2a+4 \\ 2+4b+4c & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+2c & 2+4b+4c \\ 2a+4 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{2a+4 = 2+4b+4c \Rightarrow 2a-4b-4c = -2 \Rightarrow \boxed{a-2b-2c = -1}\}$$

Calculamos la matriz $A + B$.

$$A+B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b+c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 4 \\ 2+b+c & 6 \end{pmatrix}$$

Si la matriz $A + B$ no tiene inversa implica que su determinante vale cero.

$$|A+B| = \begin{vmatrix} 1+a & 4 \\ 2+b+c & 6 \end{vmatrix} = 6+6a-4(2+b+c) = 6+6a-8-4b-4c = -2+6a-4b-4c$$

$$|A+B| = 0 \Rightarrow -2+6a-4b-4c = 0 \Rightarrow \boxed{3a-2b-2c = 1}$$

Calculamos la matriz $AB - C$.

$$AB-C = \begin{pmatrix} a+2b+2c & 2a+4 \\ 2+4b+4c & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 2a+4 \\ 4b+4c+2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si la matriz $AB - C$ es igual a la matriz identidad tenemos que:

$$AB - C = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b+c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{a+2b+c=1}$$

Reunimos las tres igualdades obtenidas en un sistema de ecuaciones y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a-2b-2c=-1 \\ 3a-2b-2c=1 \\ a+2b+c=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=-1+2b+2c \\ 3a-2b-2c=1 \\ a+2b+c=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3(-1+2b+2c)-2b-2c=1 \\ -1+2b+2c+2b+c=1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3+6b+6c-2b-2c=1 \\ 4b+3c=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4b+4c=4 \rightarrow b+c=1 \rightarrow b=1-c \\ 4b+3c=2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(1-c)+3c=2 \Rightarrow 4-4c+3c=2 \Rightarrow -c=-2 \Rightarrow \boxed{c=2} \Rightarrow$$

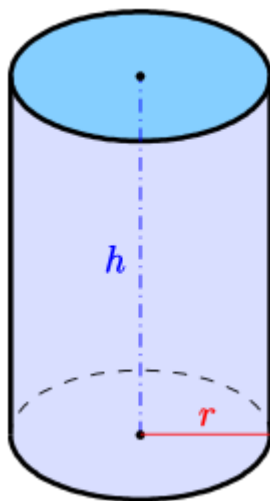
$$\Rightarrow \boxed{b=1-2=-1} \Rightarrow \boxed{a=-1+2(-1)+2(2)=1}$$

Los valores buscados son $a = 1$, $b = -1$ y $c = 2$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se quiere construir un depósito de barro cilíndrico de volumen $432\pi \text{ dm}^3$ para elaborar un vino artesanal usando técnicas antiguas. El depósito se sitúa verticalmente, apoyado sobre su base circular. Se sabe que al utilizar ese material poroso se produce, con el tiempo, una pérdida de líquido a través de la superficie que está en contacto con el vino. Dicha pérdida a través de la pared lateral es de 10 cl por dm^2 y a través del suelo de 20 cl por dm^2 .

Calcular las dimensiones que debe tener el depósito para que la filtración de vino sea mínima.



Un cilindro viene definido por el radio (r) de la base y la altura (h) como aparece en la figura superior.

La superficie de la base es πr^2 por donde se pierde $20\pi r^2$ cl.

La superficie lateral es $2\pi r \cdot h$ por donde se pierde $2\pi r \cdot h \cdot 10 = 20\pi rh$ cl.

En total se pierde $P(r, h) = 20\pi r^2 + 20\pi rh$.

El volumen del cilindro es $\pi r^2 h$.

Como el cilindro tiene volumen $432\pi \text{ dm}^3$ tenemos que:

$$\pi r^2 h = 432\pi \Rightarrow r^2 h = 432 \Rightarrow h = \frac{432}{r^2}$$

Lo sustituimos en la función pérdida y tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} P(r, h) = 20\pi r^2 + 20\pi rh \\ h = \frac{432}{r^2} \end{array} \right\} \Rightarrow P(r) = 20\pi r^2 + 20\pi r \frac{432}{r^2} = 20\pi r^2 + \frac{8640\pi}{r} = \frac{20\pi r^3 + 8640\pi}{r}$$

Deseamos hallar el mínimo de la función $P(r) = \frac{20\pi r^3 + 8640\pi}{r}$.

Hallamos su derivada y la igualamos a cero, en busca de sus puntos críticos.

$$P'(r) = \frac{(60\pi r^2)r - (20\pi r^3 + 8640\pi)}{r^2} = \frac{60\pi r^3 - 20\pi r^3 - 8640\pi}{r^2} = \frac{40\pi r^3 - 8640\pi}{r^2}$$

$$P'(r) = 0 \Rightarrow \frac{40\pi r^3 - 8640\pi}{r^2} = 0 \Rightarrow 40\pi r^3 - 8640\pi = 0 \Rightarrow r^3 - 216 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \sqrt[3]{216} = 6}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $r = 6$.

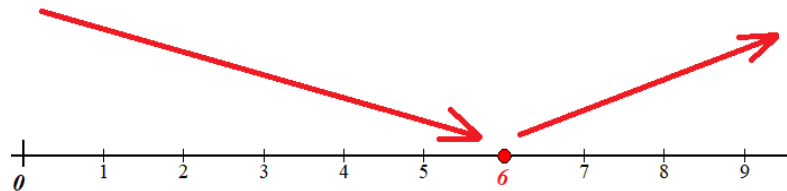
- En el intervalo $(0, 6)$ tomamos $r = 1$ y la derivada vale

$$P'(1) = \frac{40\pi \cdot 1^3 - 8640\pi}{1^2} = -8600\pi < 0. \text{ La función decrece en } (0, 6).$$

- Después de $r = 6$ tomamos $r = 10$ y la derivada vale

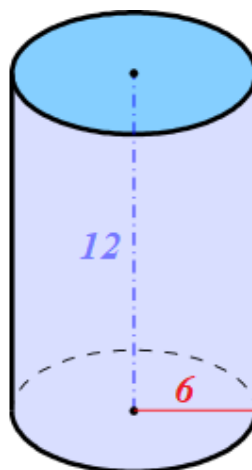
$$P'(10) = \frac{40\pi \cdot 10^3 - 8640\pi}{10^2} = \frac{31360\pi}{100} > 0. \text{ La función crece a partir de } r = 6.$$

La función decrece antes de $r = 6$ y crece después de $r = 6$, por lo que la función tiene un mínimo en dicho valor.



Para un radio de 6 dm la altura vale $h = \frac{432}{6^2} = 12$ dm.

Las pérdidas son mínimas con un depósito cilíndrico con una base de radio 6 dm y con una altura de 12 dm.



A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideremos las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}, \quad s \equiv \begin{cases} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Determine la posición relativa de las rectas r y s , y calcule su intersección si existe.
 b) (1 punto) Calcule una ecuación del plano que contiene a r y s .
 c) (0.5 puntos) Indique el ángulo que forman las rectas r y s .

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(0,1,2) \\ \vec{v}_r = (1,-1,1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2z \\ y=1+z \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} Q_s(1,1,0) \\ \vec{u}_s = (-2,1,1) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas ni son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (-2,1,1) \\ \vec{v}_r = (1,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-2}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan.

Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ para decidir si se cortan o cruzan.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (-2,1,1) \\ \vec{v}_r = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (1,1,0) - (0,1,2) = (1,0,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 + 1 + 2 = 0$$

Como el producto mixto es nulo las rectas se cortan (pertenecen a un mismo plano).

Hallamos el punto de corte resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$r \equiv \begin{cases} P_r(0,1,2) \\ \vec{v}_r = (1,-1,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = 2 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2\lambda = \alpha \\ 1 + \lambda = 1 - \alpha \\ \lambda = 2 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = 1 - (1 - 2\lambda) \\ \lambda = 2 + 1 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = 1 - 1 + 2\lambda \rightarrow -\lambda = -1 \rightarrow \lambda = 1 \\ 3\lambda = 3 \rightarrow \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1, 2, 1)}$$

El punto A de corte de las rectas r y s es el punto $A(-1, 2, 1)$.

- b) El plano que contiene a las rectas r y s tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene el punto $A(-1, 2, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -1, 1) \\ A(-1, 2, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1+y-2+2(z-1)-(z-1)+2(y-2)+x+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1+y-2+2z-2-z+1+2y-4+x+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: 2x+3y+z-5=0}$$

- c) El ángulo que forman las rectas es el formado por sus vectores directores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \\ \vec{v}_r = (1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{u}_s, \vec{v}_r) = \frac{|\vec{u}_s \cdot \vec{v}_r|}{|\vec{u}_s| |\vec{v}_r|} = \frac{|(-2, 1, 1) \cdot (1, -1, 1)|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{u}_s, \vec{v}_r) = \frac{|-2-1+1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{|-2|}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \boxed{(\vec{u}_s, \vec{v}_r) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \approx 61.87^\circ}$$

El ángulo formado por las rectas r y s es de, aproximadamente, 61.87° .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tiene un dado de nueve caras numeradas con los números del 2 al 10, cada uno con igual probabilidad de salir al lanzar el dado.

- a) (0.5 puntos) Si se lanza una vez el dado, calcule la probabilidad del suceso “el resultado es un número primo”.
- b) (1 punto) Se lanza el dado dos veces consecutivas y se suman los resultados. Calcule la probabilidad de que la suma sea par.
- c) (1 punto) Se lanza el dado dos veces consecutivas y la suma de los dos resultados es impar. Calcule la probabilidad de que el resultado del primer lanzamiento haya sido primo.

- a) Para sacar un número primo debe salir 2, 3, 5 o 7. Hay 4 resultados favorables de 9 posibles. Aplicamos la regla de Laplace:

$$P(\text{Sacar n}^\circ \text{ primo}) = \frac{4}{9} \approx 0.4444$$

- b) Al repetir el lanzamiento dos veces los resultados posibles son:

$$\begin{array}{c} 2\ 2, 2\ 3, 2\ 4, 2\ 5, 2\ 6, 2\ 7, 2\ 8, 2\ 9, 2\ 10 \\ 3\ 2, 3\ 3, 3\ 4, 3\ 5, 3\ 6, 3\ 7, 3\ 8, 3\ 9, 3\ 10 \\ \dots \\ 10\ 2, 10\ 3, 10\ 4, 10\ 5, 10\ 6, 10\ 7, 10\ 8, 10\ 9, 10\ 10 \end{array}$$

Un total de $9 \cdot 9 = 81$ resultados posibles.

De todos ellos la suma es par cuando los dos resultados son pares o los dos impares.

Es muy largo escribir todos los resultados favorables. Lo resolvemos de otra forma.

Llamamos P_1 y P_2 a sacar par en el primer lanzamiento o en el segundo.

Llamamos I_1 e I_2 a sacar impar en el primer o segundo lanzamiento.

$$P(\text{Suma par}) = P(P_1 \cap P_2) + P(I_1 \cap I_2) = P(P_1)P(P_2) + P(I_1)P(I_2) =$$

$$= \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{41}{81} \approx 0.5062$$

- c) Nos piden calcular $P(\text{Primo1} / \text{Suma impar})$. Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Primo1} / \text{Suma impar}) = \frac{P(\text{Primo1} \cap \text{Suma impar})}{P(\text{Suma impar})} = \frac{P(\text{Primo1} \cap \text{Suma impar})}{1 - P(\text{Suma par})}$$

Calculamos $P(\text{Primo1} \cap \text{Suma impar})$.

El suceso “Primo en primer lanzamiento” y “Suma impar con los dos lanzamientos” se cumple en los siguientes casos:

$$\begin{array}{c} 2\ 3, 2\ 5, 2\ 7, 2\ 9 \\ 3\ 2, 3\ 4, 3\ 6, 3\ 8, 3\ 10 \\ 5\ 2, 5\ 4, 5\ 6, 5\ 8, 5\ 10 \\ 7\ 2, 7\ 4, 7\ 6, 7\ 8, 7\ 10 \end{array}$$

El suceso se cumple en 19 de los 81 resultados posibles y su probabilidad es $\frac{19}{81}$.

Continuamos calculando la probabilidad pedida.

$$P(\text{Primo1}/\text{Suma impar}) = \frac{P(\text{Primo1} \cap \text{Suma impar})}{P(\text{Suma impar})} = \frac{\frac{19}{81}}{1 - P(\text{Suma par})} =$$

$$= \frac{\frac{19}{81}}{1 - \frac{41}{81}} = \boxed{\frac{19}{40} = 0.475}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa conservera fabrica latas de macedonia de frutas (melocotón, pera y piña) de 1 kg. Las latas contienen 750 gramos de fruta y el resto es agua y azúcar. Si la empresa utiliza la misma cantidad de todas las frutas, el coste en fruta por lata para la conservera es de 1.8 euros y, si utiliza 0.25 kg de melocotón y 100 gramos más de piña que de pera, el coste en fruta por lata es de 1.9 euros. Si la empresa paga 18000 euros por un lote compuesto de 3000 kg de melocotón, 3000 kg de pera y 2000 kg de piña, calcule el coste para la empresa de cada kg de melocotón, de pera y de piña.

Llamamos “x” al precio del kilo de melocotón, “y” al precio del kilo de pera y “z” al precio del kilo de piña.

“Si la empresa utiliza la misma cantidad de todas las frutas, el coste en fruta por lata para la conservera es de 1.8 euros” $\rightarrow$ De los 0.750 kilos de fruta del bote se utilizan 0.250 kilos de cada fruta $\rightarrow 0.250x + 0.250y + 0.250z = 1.8$.

“Si utiliza 0.25 kg de melocotón y 100 gramos más de piña que de pera, el coste en fruta por lata es de 1.9 euros” $\rightarrow$ se utilizan 250 gramos de melocotón y 500 gramos entre pera y piña, como se utilizan 100 gramos más de piña que de pera entonces se utilizan 300 gramos de piña y 200 de pera $\rightarrow 0.25x + 0.2y + 0.3z = 1.9$.

“Si la empresa paga 18000 euros por un lote compuesto de 3000 kg de melocotón, 3000 kg de pera y 2000 kg de piña” $\rightarrow 3000x + 3000y + 2000z = 18000$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 0.250x + 0.250y + 0.250z = 1.8 \\ 0.25x + 0.2y + 0.3z = 1.9 \\ 3000x + 3000y + 2000z = 18000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 7.2 \\ 25x + 20y + 30z = 190 \\ 3x + 3y + 2z = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7.2 \\ \Rightarrow 5x + 4y + 6z = 38 \\ 3x + 3y + 2z = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 7.2 - y - z \\ \Rightarrow 5x + 4y + 6z = 38 \\ 3x + 3y + 2z = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5(7.2 - y - z) + 4y + 6z = 38 \\ 3(7.2 - y - z) + 3y + 2z = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 36 - 5y - 5z + 4y + 6z = 38 \\ 21.6 - 3y - 3z + 3y + 2z = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -y + z = 2 \\ -z = -3.6 \rightarrow \boxed{z = 3.6} \end{array} \right\} \Rightarrow -y + 3.6 = 2 \Rightarrow -y = -1.6 \Rightarrow \boxed{y = 1.6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 7.2 - 1.6 - 3.6 = 2}$$

El precio del melocotón es 2 €/kg, el de la pera es 1.6 €/kg y el de la piña es 3.6 €/kg.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = x^4 - 4x - 1$,

- a) (0.5 puntos) Estudie los máximos y los mínimos relativos de f .
 b) (0.5 puntos) Justifique que la función f se anula en un punto del intervalo $[0, 2]$.
 c) (0.75 puntos) Justifique que la ecuación $x^4 - 4x - 1 = 0$ solo tiene dos raíces reales.
 d) (0.75 puntos) Halle el área comprendida entre la gráfica de la función f y la recta $y = -4x$.

a) Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 4x^3 - 4 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x^3 - 4 = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

Sustituimos $x = 1$ en la segunda derivada.

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(1) = 12 \cdot 1^2 = 12 > 0 \rightarrow x = 1 \text{ es mínimo relativo}$$

Sabemos que $f(1) = 1^4 - 4 \cdot 1 - 1 = -4$.

La función tiene un mínimo relativo en el punto $(1, -4)$. La función no tiene máximo relativo.

b) Aplicamos el teorema de Bolzano a la función en el intervalo $[0, 2]$.

La función es continua en el intervalo pues es una función polinómica.

La función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo:

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0 - 1 = -1 < 0 \\ f(2) = 2^4 - 4 \cdot 2 - 1 = 7 > 0 \end{array} \right\}$$

Aplicando el teorema de Bolzano existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

c) Buscamos el otro valor que anula la función antes de $x = 0$.

Tomamos el intervalo $[-2, 0]$.

La función es continua en el intervalo.

La función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0 - 1 = -1 < 0 \\ f(-2) = (-2)^4 - 4 \cdot (-2) - 1 = 23 > 0 \end{array} \right\}$$

Aplicando el teorema de Bolzano existe $c' \in (-2, 0)$ tal que $f(c') = 0$.

Hemos demostrado que tiene dos raíces. Solo tiene esas dos pues la función decrece antes de 1 (solo puede cortar una vez el eje de abscisas) y crece después de 1 (solo puede cortar una vez el eje de abscisas).

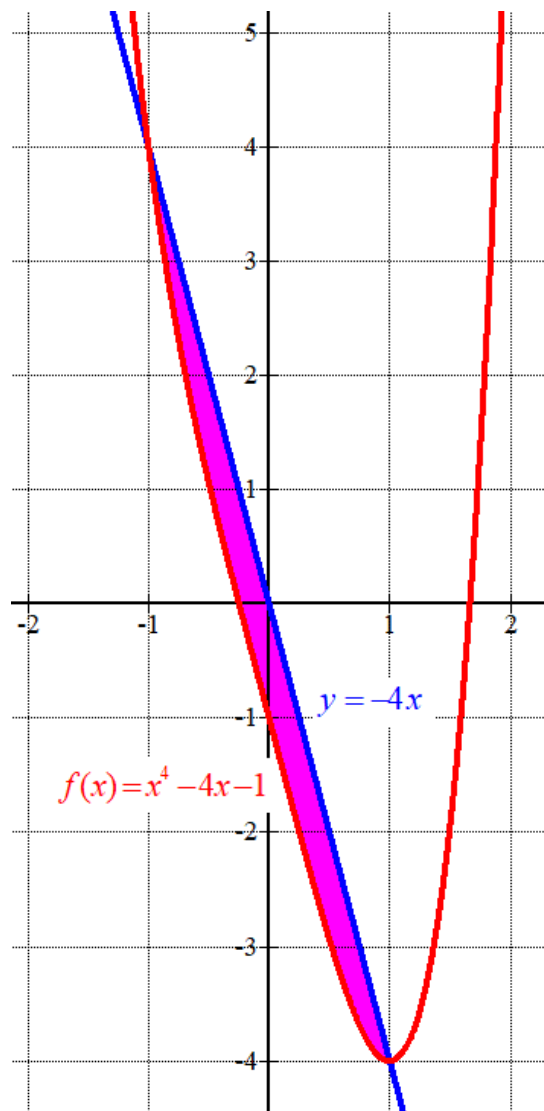
d) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de la función y la recta dada.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^4 - 4x - 1 \\ y = -4x \end{array} \right\} \Rightarrow x^4 - 4x - 1 = -4x \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[4]{1} = \pm 1$$

El área pedida es el valor absoluto de la integral definida entre -1 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^4 - 4x - 1 - (-4x) dx &= \int_{-1}^1 x^4 - 1 dx = \left[\frac{x^5}{5} - x \right]_{-1}^1 = \\ &= \left[\frac{1^5}{5} - 1 \right] - \left[\frac{(-1)^5}{5} - (-1) \right] = \frac{1}{5} - 1 + \frac{1}{5} - 1 = \frac{2}{5} - 2 = \frac{-8}{5} = -1.6 \end{aligned}$$

El área comprendida entre la gráfica de la función f y la recta $y = -4x$ tiene un valor de 1.6 unidades cuadradas.

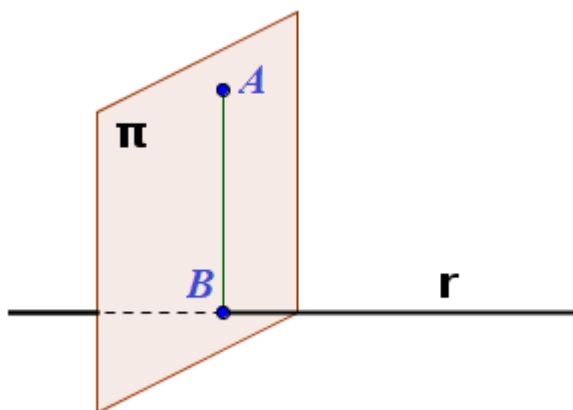


B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - z = 4 \end{cases}$ y el punto $A(4, -3, 4)$, se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular la distancia del punto A a la recta r . ¿En qué punto de la recta se alcanza?
- b) (1.25 puntos) Calcular el volumen del tetraedro determinado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y el plano perpendicular a r que pasa por el punto A.

a) Obtendremos la proyección ortogonal del punto A en la recta r .



Hallamos el plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto A. Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x = 4 + z \end{cases} \Rightarrow 4 + z + y + z = 2 \Rightarrow 2z + y = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -2 - 2z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(4, -2, 0) \\ \vec{v}_r = (1, -2, 1) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{cases} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, -2, 1) \\ A(4, -3, 4) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi \equiv x - 2y + z + D = 0 \\ A(4, -3, 4) \in \pi \end{cases} \Rightarrow 4 - 2(-3) + 4 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14 + D = 0 \Rightarrow D = -14 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - 2y + z - 14 = 0}$$

Hallamos las coordenadas del punto B intersección del plano π y la recta r .

$$\left. \begin{aligned} \pi &\equiv x - 2y + z - 14 = 0 \\ r &\equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 + \lambda - 2(-2 - 2\lambda) + \lambda - 14 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + \lambda + 4 + 4\lambda + \lambda - 14 = 0 \Rightarrow 6\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 6\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 1 = 5 \\ y = -2 - 2 = -4 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(5, -4, 1)}$$

La distancia del punto A a la recta r es la distancia del punto A al punto B. Este valor es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (5, -4, 1) - (4, -3, 4) = (1, -1, -3)$$

$$d(A, r) = d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \boxed{\sqrt{11} \approx 3.3166 \text{ unidades}}$$

Esta distancia se alcanza en el punto $B(5, -4, 1)$ de la recta r .

b) El plano perpendicular a r que pasa por el punto A tiene ecuación $\pi \equiv x - 2y + z - 14 = 0$.

Nos piden hallar el volumen del tetraedro determinado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $\pi \equiv x - 2y + z - 14 = 0$.

Hallamos las coordenadas de los vértices del tetraedro.

Los tres planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ se cortan en el punto $O(0, 0, 0)$.

Punto de corte del plano $x = 0$, $y = 0$ y $\pi \equiv x - 2y + z - 14 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + z - 14 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow z - 14 = 0 \Rightarrow z = 14 \Rightarrow \boxed{C(0, 0, 14)}$$

Punto de corte del plano $x = 0$, $z = 0$ y $\pi \equiv x - 2y + z - 14 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + z - 14 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2y - 14 = 0 \Rightarrow -2y = 14 \Rightarrow y = -7 \Rightarrow \boxed{D(0, -7, 0)}$$

Punto de corte del plano $y = 0$, $z = 0$ y $\pi \equiv x - 2y + z - 14 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + z - 14 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x - 14 = 0 \Rightarrow x = 14 \Rightarrow \boxed{E(14, 0, 0)}$$

Tenemos que hallar el volumen del tetraedro OCDE. Dicho volumen es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OC} = (0, 0, 14) - (0, 0, 0) = (0, 0, 14) \\ \overrightarrow{OD} = (0, -7, 0) - (0, 0, 0) = (0, -7, 0) \\ \overrightarrow{OE} = (14, 0, 0) - (0, 0, 0) = (14, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 14 \\ 0 & -7 & 0 \\ 14 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 14 \cdot 7 \cdot 14 = \boxed{1372}$$

El volumen del tetraedro OCDE es $\frac{1372}{6} = \frac{686}{3} \approx 228.67$ unidades cúbicas.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un determinado jugador de baloncesto tiene un porcentaje de éxito del 85% en tiros libres y del 20% en tiros desde el centro del campo.

- a) (1.5 puntos) Para finalizar el calentamiento antes de cada partido el citado jugador lanza cuatro tiros libres y cuatro tiros desde el centro del campo. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte tres de los cuatro tiros libres? ¿Cuál es la probabilidad de que acierte tres de los cuatro tiros desde el centro del campo? ¿Y la de que acierte tres tiros libres y tres desde el centro del campo de los ocho lanzados?
- b) (1 punto) Calcule, mediante la aproximación por una normal, la probabilidad de que el citado jugador falle al menos el 20% de los tiros libres de una serie de 200 tiros libres.

- a) X = Número de aciertos en tiros libres. Y = Número de aciertos en tiros desde el centro del campo.

X es una variable binomial con parámetros $n = 4$ y $p = 0.85$. $X = B(4, 0.85)$.

Y es una variable binomial con parámetros $n = 4$ y $p = 0.2$. $Y = B(4, 0.2)$.

Debemos calcular $P(X = 3)$.

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0.85^3 \cdot 0.15^1 \approx \boxed{0.3685}$$

Debemos calcular $P(Y = 3)$.

$$P(Y = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^1 \approx \boxed{0.0256}$$

Debemos calcular $P((X = 3) \cap (Y = 3))$.

$$P((X = 3) \cap (Y = 3)) = P(X = 3) \cdot P(Y = 3) = 0.368475 \cdot 0.0256 \approx \boxed{0.0094}$$

- b) Consideramos la variable binomial X = Número de fallos en tiros libres de un total de 200 intentos. Los parámetros son $n = 200$ y $p = 1 - 0.85 = 0.15$. $X = B(200, 0.15)$
Aproximamos esta variable binomial por una normal de parámetros $\mu = np = 200 \cdot 0.15 = 30$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.85 \cdot 0.15} \approx 5.05$. $Y = N(30, 5.05)$.

Nos piden calcular la probabilidad de fallar al menos el 20 % de los tiros $\rightarrow 0.20 \cdot 200 = 40$ tiros, es decir fallar 40 tiros o más. Nos piden calcular $P(X \geq 40)$.

$$P(X \geq 40) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 39.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{39.5 - 30}{5.05}\right) =$$

$$= P(Z \geq 1.88) = 1 - P(Z \leq 1.88) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} =$$

$$= 1 - 0.9699 = \boxed{0.0301}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7853
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8829
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9439
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9655	0.9661	0.9667	0.9673	0.9678	0.9683	0.9688	0.9691
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9766
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817

EvAU 2023 Ordinaria Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2022-2023 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$, se pide:

- (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.
- (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.
- (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los puntos $A(1, -2, 3)$, $B(0, 2, -1)$ y $C(2, 1, 0)$. Se pide:

- (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.
- (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z = 1$.
- (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tiene un suceso A de probabilidad $P(A) = 0.3$.

- (0.75 puntos) Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0.5$ es independiente de A. Calcule $P(A \cup B)$.
- (0.75 puntos) Otro suceso C cumple $P(C | A) = 0.5$. Determine $P(A \cap \bar{C})$.
- (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $P(\bar{A} | D) = 0.2$ y $P(D | A) = 0.5$, calcule $P(D)$.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema
$$\begin{cases} (a+1)x + 4y = 0 \\ (a-1)y + z = 3 \\ 4x + 2ay + z = 3 \end{cases}$$
 se pide:

- a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a .
- b) (0.5 puntos) Resolverlo para $a = 3$.
- c) (0.75 puntos) Resolverlo para $a = 5$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2+x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{2x^2}{3-3x} & \text{si } x > -1 \end{cases}, \text{ se pide:}$$

- a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.
- b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)^{2x^2-1}$.
- c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi: x-z=2$ y el punto $A(1, 1, 1)$, se pide:

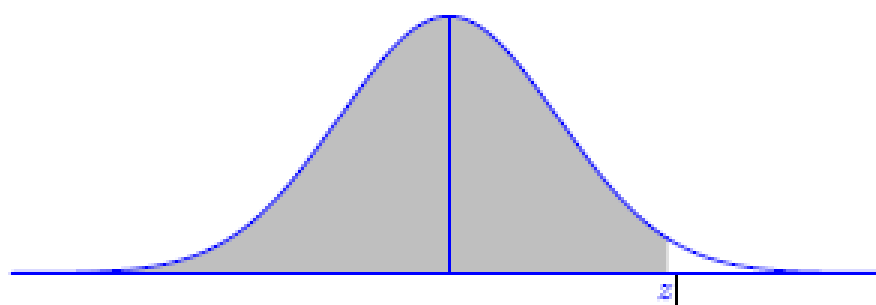
- a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.
- b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π .
- c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r .

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

- a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?
- b) (0.5 puntos) Hallar una longitud $t < 175$ mm tal que entre t y 175 mm estén el 18% de las sardinas capturadas.
- c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuanta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Llamamos “x” al número de camiones A, “y” al número de camiones B y “z” al de camiones C.

“Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra” $\rightarrow 14x + 24y + 28z = 302$

“Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes” $\rightarrow x + 1 = y + z$.

“El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje (C)” $\rightarrow 0.10 \cdot 24y = \frac{1}{7} \cdot 28z$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 14x + 24y + 28z = 302 \\ x + 1 = y + z \\ 0.10 \cdot 24y = \frac{1}{7} \cdot 28z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 14x + 24y + 28z = 302 \\ x = y + z - 1 \\ 2.4y = 4z \rightarrow y = \frac{4}{2.4}z = \frac{5}{3}z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 14x + 24\frac{5}{3}z + 28z = 302 \\ x = \frac{5}{3}z + z - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 14x + 40z + 28z = 302 \\ x = \frac{8}{3}z - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 14x + 68z = 302 \\ x = \frac{8}{3}z - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 14\left(\frac{8}{3}z - 1\right) + 68z = 302 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{112}{3}z - 14 + 68z = 302 \Rightarrow 112z - 42 + 204z = 906 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 316z = 948 \Rightarrow \boxed{z = \frac{948}{316} = 3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{8}{3} \cdot 3 - 1 = 7} \Rightarrow 7 = y + 3 - 1 \Rightarrow \boxed{y = 5}$$

Se han usado 7 camiones del tipo A, 5 del B y 3 del C. Los camiones del tipo A han transportado $7 \cdot 14 = 98$ toneladas de tierra, los del tipo B han transportado $5 \cdot 24 = 120$ toneladas y los del tipo C han transportado $3 \cdot 28 = 84$ toneladas de tierra.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$, se pide:

- (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.
- (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.
- (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

a) Averiguamos la expresión de $f(-x)$ y la comparamos con la expresión de $f(x)$.

$$f(-x) = \sqrt[3]{((-x)^2 - 1)^2} = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} = f(x)$$

La función es par.

b) La derivada de la función es:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} = (x^2 - 1)^{2/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{2/3-1} (2x) = \frac{4x}{3}(x^2 - 1)^{-1/3} = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

Esta expresión de la derivada es válida para cualquier valor de x distinto de -1 y $+1$, pero no para $x = 1$.

La función no es derivable en $x = 1$.

Lo comprobamos también calculando la derivada en $x = 1$ con la definición.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} - \sqrt[3]{(1^2 - 1)^2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} - 0}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2 (x+1)^2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2 (x+1)^2}{(x-1)^3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)}} = \sqrt[3]{\frac{(1+1)^2}{(1-1)}} = \sqrt[3]{\frac{4}{0}} = \infty \end{aligned}$$

No es derivable en $x = 1$.

c) La derivada de la función es $f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}$. La derivada se anula en $x = 0$ y no existe la derivada para $x = 1$ y $x = -1$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{4(-2)}{3\sqrt[3]{(-2)^2 - 1}} = \frac{-8}{3\sqrt[3]{3}} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = \frac{4(-0.5)}{3\sqrt[3]{(-0.5)^2 - 1}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{-0.75}} > 0. \text{ La función crece en } (-1, 0).$$

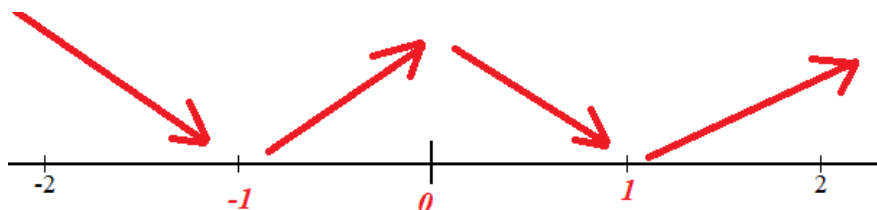
- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{4 \cdot 0.5}{3\sqrt[3]{0.5^2 - 1}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{-0.75}} < 0. \text{ La función decrece en } (0,1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{4 \cdot 2}{3\sqrt[3]{2^2 - 1}} = \frac{8}{3\sqrt[3]{3}} > 0$.

La función crece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en $x = 0$ y dos mínimos relativos en $x = -1$ y $x = 1$.

Para obtener el máximo absoluto valoramos la función en $x = 0$ y también valoramos la función cuando x va más allá de 1.

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \sqrt[3]{(0^2 - 1)^2} = 1$$

$$x = 10 \rightarrow f(10) = \sqrt[3]{(10^2 - 1)^2} = \sqrt[3]{99^2} > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} = +\infty$$

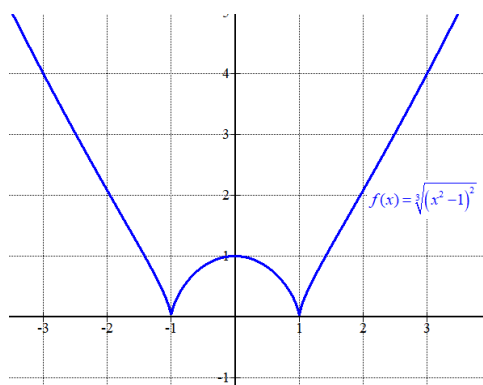
La función no tiene máximo absoluto.

Para obtener el mínimo absoluto valoramos la función en $x = -1$ y en $x = 1$.

$$x = -1 \rightarrow f(-1) = \sqrt[3]{((-1)^2 - 1)^2} = 0$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = \sqrt[3]{(1^2 - 1)^2} = 0$$

La función tiene dos mínimos absolutos en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.



A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los puntos $A(1, -2, 3)$, $B(0, 2, -1)$ y $C(2, 1, 0)$. Se pide:

- a) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.
 b) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z = 1$.
 c) (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T .

- a) Para que formen un triángulo no deben estar alineados. Y para ello los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ no deben indicar la misma dirección, es decir, no deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 2, -1) - (1, -2, 3) = (-1, 4, -4) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 1, 0) - (1, -2, 3) = (1, 3, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{1} \neq \frac{4}{3} = \frac{-4}{-3}$$

Los puntos ABC forman un triángulo T .

Hallamos la ecuación del plano π que los contiene.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1, 4, -4) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, 3, -3) \\ C(2, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-0 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12(x-2) - 4(y-1) - 3z - 4z - 3(y-1) + 12(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4y + 4 - 3z - 4z - 3y + 3 = 0 \Rightarrow -7y - 7z + 7 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : y + z - 1 = 0}$$

- b) Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B .

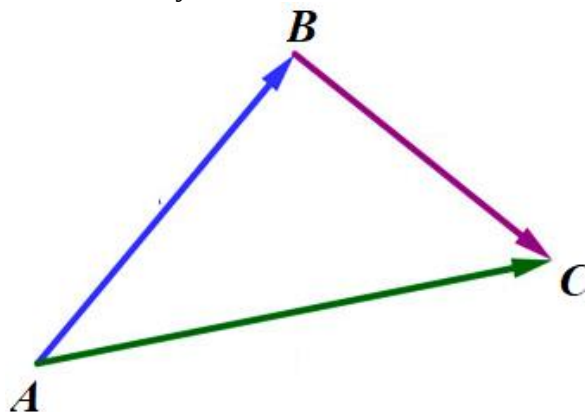
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (-1, 4, -4) \\ A(1, -2, 3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases}$$

Hallo el punto de corte de la recta con el plano $z = 1$.

$$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ 1 = 3 - 4\lambda \rightarrow -2 = -4\lambda \rightarrow \lambda = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = -2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0 \\ 1 = 3 - 4\lambda \rightarrow -2 = -4\lambda \rightarrow \lambda = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{P\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)}$$

- c) El perímetro del triángulo ABC es la suma de la longitud de sus tres lados. Es la suma de los módulos de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$.



$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 2, -1) - (1, -2, 3) = (-1, 4, -4) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 1, 0) - (1, -2, 3) = (1, 3, -3) \\ \overrightarrow{BC} = (2, 1, 0) - (0, 2, -1) = (2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{33} \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{19} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Perímetro} = \sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6} \approx 12.55 \text{ u}}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tiene un suceso A de probabilidad $P(A) = 0.3$.

a) (0.75 puntos) Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0.5$ es independiente de A. Calcule $P(A \cup B)$.

b) (0.75 puntos) Otro suceso C cumple $P(C|A) = 0.5$. Determine $P(A \cap \bar{C})$.

c) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $P(\bar{A}|D) = 0.2$ y $P(D|A) = 0.5$, calcule $P(D)$.

a) Si los sucesos A y B son independientes tenemos que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.5 - 0.3 \cdot 0.5 = \boxed{0.65}$$

b) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(C|A) = 0.5 \Rightarrow \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = 0.5 \Rightarrow \frac{P(C \cap A)}{0.3} = 0.5 \Rightarrow P(C \cap A) = 0.15$$

$$P(A) = P(A \cap \bar{C}) + P(A \cap C) \Rightarrow 0.3 = P(A \cap \bar{C}) + 0.15 \Rightarrow 0.3 - 0.15 = P(A \cap \bar{C}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap \bar{C}) = 0.15}$$

c) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(D|A) = 0.5 \Rightarrow \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = 0.5 \Rightarrow \frac{P(A \cap D)}{0.3} = 0.5 \Rightarrow P(A \cap D) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15$$

$$P(D) = P(A \cap D) + P(\bar{A} \cap D) \Rightarrow P(D) = 0.15 + P(\bar{A} \cap D) \Rightarrow P(\bar{A} \cap D) = P(D) - 0.15$$

Volvemos a utilizar el teorema de Bayes.

$$P(\bar{A}|D) = 0.2 \Rightarrow \frac{P(\bar{A} \cap D)}{P(D)} = 0.2 \Rightarrow \frac{P(D) - 0.15}{P(D)} = 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(D) - 0.15 = 0.2P(D) \Rightarrow P(D) - 0.2P(D) = 0.15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.8P(D) = 0.15 \Rightarrow P(D) = \frac{0.15}{0.8} \Rightarrow \boxed{P(D) = 0.1875}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema
$$\begin{cases} (a+1)x + 4y = 0 \\ (a-1)y + z = 3 \\ 4x + 2ay + z = 3 \end{cases}$$
 se pide:

- a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a .
 b) (0.5 puntos) Resolverlo para $a = 3$.
 c) (0.75 puntos) Resolverlo para $a = 5$.

a) Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 4 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 4 & 2a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a+1 & 4 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 4 & 2a & 1 \end{vmatrix} = (a+1)(a-1) + 16 - 2a(a+1) =$$

$$= a^2 - 1 + 16 - 2a^2 - 2a = -a^2 - 2a + 15$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 - 2a + 15 = 0 \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (15)}}{-2} = \frac{2 \pm 8}{-2} = \begin{cases} \frac{2+8}{-2} = \boxed{-5 = a} \\ \frac{2-8}{-2} = \boxed{3 = a} \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -5$ y $a \neq 3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a = -5$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 4 & -10 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 4 \quad -10 \quad 1 \quad 3 \\ -4 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -6 \quad 1 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -6 \quad 1 \quad 3 \\ 0 \quad 6 \quad -1 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & A/B & & \\ -4 & 4 & 0 & 0 & & \\ 0 & -6 & 1 & 3 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. $a = 3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 4 \quad 6 \quad 1 \quad 3 \\ -4 \quad -4 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \\ 0 \quad -2 \quad -1 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ 0 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq -5$ y $a \neq 3$ el sistema es **compatible determinado** y para $a = 3$ o $a = -5$ el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Si $a = 3$ el sistema es compatible indeterminado.

Obtenemos la solución a partir del sistema equivalente que hemos obtenido en el apartado a).

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 3 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 3 - 2y \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema son $x = -\lambda$; $y = \lambda$; $z = 3 - 2\lambda$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Si $a = 5$ el sistema es compatible determinado.

$$\begin{cases} 6x + 4y = 0 \\ 4y + z = 3 \\ 4x + 10y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 0 \\ z = 3 - 4y \\ 4x + 10y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 4x + 10y + 3 - 4y = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9x - 6y = 0 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -5x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow 0 + 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow \boxed{z = 3 - 0 = 3} \end{array}$$

La solución del sistema es $x = 0$; $y = 0$; $z = 3$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2+x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{2x^2}{3-3x} & \text{si } x > -1 \end{cases}, \text{ se pide:}$$

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)^{2x^2-1}$.

c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

a) En el intervalo $(-\infty, -1)$ la función es $\frac{x^2}{2+x^2}$ que es continua pues el denominador no se anula. En el intervalo $(-1, +\infty)$ la función es $\frac{2x^2}{3-3x}$ cuyo denominador se anula en $x = 1$. La función no es continua en $x = 1$. Estudiamos la continuidad en $x = -1$ viendo si coinciden los límites laterales con el valor de la función.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= \frac{(-1)^2}{2+(-1)^2} = \frac{1}{3} \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{2+x^2} = \frac{1}{3} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2}{3-3x} = \frac{2 \cdot (-1)^2}{3-3(-1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{3}$$

La función es continua en $x = -1$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)^{2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2+x^2} \right)^{2x^2-1} = 1^\infty = \text{Indeterminación} (n^\circ e) = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2-1) \left(\frac{x^2}{2+x^2} - 1 \right)} = \dots$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2-1) \left(\frac{x^2}{2+x^2} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2-1) \left(\frac{x^2-2-x^2}{2+x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2(2x^2-1)}{2+x^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2+2}{2+x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-4x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4 + \frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x^2} + 1} = \frac{-4 + \frac{2}{\infty}}{\frac{2}{\infty} + 1} = \frac{-4}{1} = -4 \end{aligned}$$

$$\dots = e^{-4} = \boxed{\frac{1}{e^4}}$$

c) En el intervalo $(-1, 0)$ la función es $\frac{2x^2}{3-3x}$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{2x^2}{3-3x} dx = \frac{2}{3} \int_{-1}^0 \frac{x^2}{1-x} dx = \dots$$

$\begin{array}{r} x^2 \\ -x^2 + x \\ \hline x \\ -x + 1 \\ \hline 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} \underline{1-x} \\ -x-1 \end{array}$
Tenemos que $\frac{x^2}{1-x} = -x-1 + \frac{1}{1-x}$	

$$\dots = \frac{2}{3} \int_{-1}^0 -x-1 + \frac{1}{1-x} dx = \frac{2}{3} \left(\int_{-1}^0 -x-1 dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x} dx \right) = \frac{2}{3} \left[-\frac{x^2}{2} - x - \ln|1-x| \right]_{-1}^0 =$$

$$= \frac{2}{3} \left(\left[-\frac{0^2}{2} - 0 - \ln|1-0| \right] - \left[-\frac{(-1)^2}{2} - (-1) - \ln|1-(-1)| \right] \right) = \frac{2}{3} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{3}}$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi: x-z=2$ y el punto $A(1, 1, 1)$, se pide:

- (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.
- (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π .
- (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r .

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(1, 0, -1) \\ \vec{v}_r = (2, 1, -2) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y la ecuación del plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 1 + 2\lambda - (-1 - 2\lambda) = 2 \Rightarrow 1 + 2\lambda + 1 + 2\lambda = 2 \Rightarrow$$

$$\pi: x - z = 2$$

$$\Rightarrow 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 - 2 \cdot 0 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(1, 0, -1)}$$

Plano y recta son secantes y se cortan en el punto $P(1, 0, -1)$.

- Hallamos la recta s perpendicular al plano que pasa por el punto A . La proyección ortogonal de A sobre el plano es el punto de corte de esta recta s y el plano.

La recta s perpendicular tendrá como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: x - z = 2 \Rightarrow \vec{n} = (1, 0, -1)$$

$$s: \begin{cases} \vec{v}_s = \vec{n} = (1, 0, -1) \\ A(1, 1, 1) \in s \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

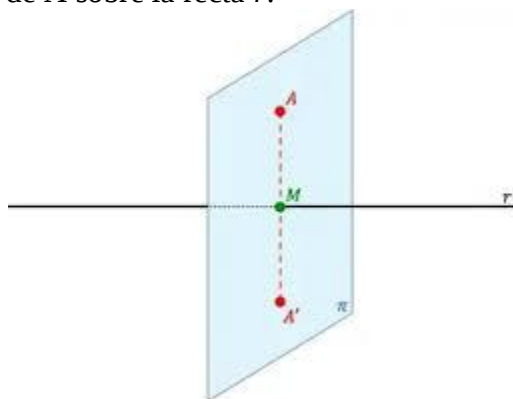
Hallamos el punto de corte de recta y plano.

$$\pi: x - z = 2$$

$$s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 1 + \lambda - (1 - \lambda) = 2 \Rightarrow 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 1 = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A'(2, 1, 0)}$$

La proyección ortogonal del punto A sobre el plano π es el punto $A'(2, 1, 0)$.

- c) Nos piden hallar el punto A' del dibujo. Hallamos el punto M del dibujo que es la proyección ortogonal de A sobre la recta r .



Hallamos la ecuación del plano π' perpendicular a la recta r que pasa por A .

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow \vec{v}_r = (2, 1, -2) \Rightarrow \pi': \begin{cases} \vec{n}' = \vec{v}_r = (2, 1, -2) \\ A(1, 1, 1) \in \pi' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi': 2x + y - 2z + D = 0 \\ A(1, 1, 1) \in \pi' \end{cases} \Rightarrow 2 + 1 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \pi': 2x + y - 2z - 1 = 0$$

Hallamos las coordenadas del punto M (intersección de r y π')

$$\pi': 2x + y - 2z - 1 = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + \lambda - 2(-1 - 2\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 4\lambda + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 = 0 \Rightarrow 9\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{-1}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{-1}{3} \\ z = -1 - 2\frac{-1}{3} = \frac{-1}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

El punto A' resulta de sumar al punto M el vector $\overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right) - (1, 1, 1) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-4}{3}\right)$$

$$A' = M + \overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right) + \left(\frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

- a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?
- b) (0.5 puntos) Hallar una longitud $t < 175$ mm tal que entre t y 175 mm estén el 18% de las sardinas capturadas.
- c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

X = La longitud en mm de la sardina del Pacífico. $X = N(175, 25.75)$.

- a) Debemos calcular $P(X > 160)$.

$$P(X > 160) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 175}{25.75} > \frac{160 - 175}{25.75}\right) = P(Z > -0.58) = P(Z \leq 0.58) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos} \\ \text{en la tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \boxed{0.719}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224

Habrán un 71.9 % de sardinas de la calidad deseada.

- b) Debemos hallar t para que $P(t \leq X \leq 175) = 0.18$

$$P(t \leq X \leq 175) = 0.18 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(\frac{t - 175}{25.75} \leq \frac{X - 175}{25.75} \leq \frac{175 - 175}{25.75}\right) = 0.18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{t - 175}{25.75} \leq Z \leq 0\right) = 0.18 \Rightarrow P(Z < 0) - P\left(Z < \frac{t - 175}{25.75}\right) = 0.18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5 - P\left(Z \leq \frac{t - 175}{25.75}\right) = 0.18 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{t - 175}{25.75}\right) = 0.32 \Rightarrow$$





$$P\left(Z \geq -\frac{t-175}{25.75}\right) = 0.32 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq -\frac{t-175}{25.75}\right) = 0.32 \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{t-175}{25.75}\right) = 0.68 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Mirando en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{t-175}{25.75} = 0.47 \Rightarrow -t + 175 = 25.75 \cdot 0.47 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 175 - 25.75 \cdot 0.47 = 162.9 \text{ mm}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157

c) Es una variable binomial $Y = N^\circ$ de sardinas que miden menos de 150 mm en un lote de 10.

$$p = P(X < 150) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{150-175}{25.75}\right) = P(Z < -0.97) =$$

$$= P(Z > 0.97) = 1 - P(Z < 0.97) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.834 = 0.166$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8314	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577

$$Y = B(10, 0.166)$$

Nos piden calcular $P(Y \geq 1)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.166^0 \cdot 0.834^{10} = 0.8372$$

EvAU 2023 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2022-2023 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto) Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro a .
- (1 punto) Calcular, en el caso de que exista, la inversa de A para $a = 0$.
- (0.5 puntos) Resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para el caso $a = 1$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 + x$, se pide:

- (1.25 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ con mínima pendiente.
- (1.25 puntos) Calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica $f(x)$ y la recta $y = x$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los planos $\pi_1 : y = x$, $\pi_2 : y = x + 1$, $\pi_3 : z = -1$ y $\pi_4 : z = 1$.

- (0.5 puntos) Compruebe que son paralelos los planos π_1 y π_2 , y que son paralelos los planos π_3 y π_4 .
- (0.5 puntos) Compruebe que los planos π_1 y π_2 son perpendiculares a los planos π_3 y π_4 .
- (0.5 puntos) Halle una recta que sea paralela a los cuatro planos y pase por el punto $(1, 0, 2)$.
- (1 punto) Halle dos planos perpendiculares a π_1 , π_2 , π_3 y π_4 , que cumplan que el volumen del paralelepípedo comprendido entre los seis planos sea 1.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En los juegos de rol, cada vez que se lanza un ataque este puede resultar en golpe crítico o no.

- (1.25 puntos) En cierto juego de rol, para determinar si un ataque es crítico o no, se tira una moneda a cara o cruz. Si se obtiene una cruz, el ataque no será crítico. Por contra, si se obtiene una cara, entonces se lanza un dado de 10 caras numeradas del 1 al 10. Solo en caso de que también se obtenga una puntuación mayor o igual a 9 en el dado el ataque es crítico; en caso contrario el ataque no será crítico. Calcule la probabilidad de que, de entre 5 ataques lanzados, se obtengan 3 o menos golpes críticos.
- (1.25 puntos) En otro juego de rol se sabe que la probabilidad de ataque crítico es del 20%. Aproximando mediante una distribución normal, calcule la probabilidad de que, de entre 100 ataques, se obtengan no menos de 15 y no más de 25 golpes críticos.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un dietista veterinario ha establecido la alimentación diaria (en términos de grasas, carbohidratos y proteínas) de un quebrantahuesos pirenaico que se ha recogido en el hogar de recuperación de fauna en el que trabaja. Se sabe que el quebrantahuesos necesita 500 g de alimento al día y que necesita 2500 Kcal. También se sabe que cada gramo de grasa proporciona 9 Kcal, cada gramo de carbohidratos 4 Kcal y cada gramo de proteínas 4 Kcal. Debido a que el ave ha llegado en un estado de debilidad, el veterinario estima que el consumo de carbohidratos debe ser 40 g más del doble de proteínas. Determine la cantidad de kilocalorías diaria que obtendrá el quebrantahuesos procedentes de grasas, de carbohidratos y de proteínas.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 + 2x + 1}$, se pide:

- (1 punto) Hallar, si existen, las asíntotas de la gráfica de f .
- (1.5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y calcular, si existen, sus extremos relativos.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ y los planos $\pi: x+2y+2z-1=0$ y $\pi': 2x+2y+z+4=0$,

se pide:

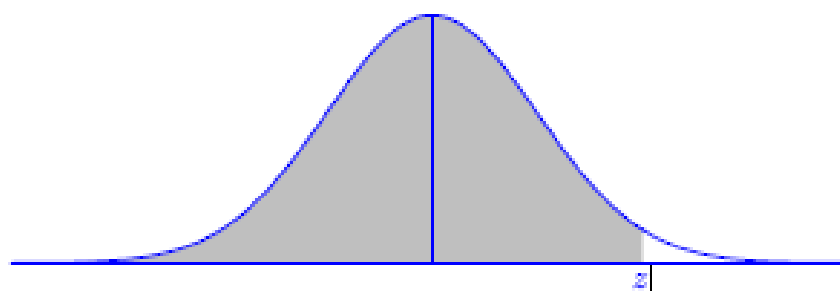
- (0.75 puntos) Comprobar que los planos π y π' se cortan. Hallar el ángulo que forman.
- (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π . Hallar, si es posible, el punto de corte.
- (1 punto) Hallar los puntos de la recta r que equidistan de los planos π y π' .

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Siete de cada veinte personas que entran en cierta joyería acaban comprando algún artículo. El 75% de las personas que se marchan sin comprar nada tienen menos de 50 años y el 80% de las personas que realizan alguna compra tienen al menos 50 años. Entra un cliente en la joyería. Se pide:

- (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea menor de 50 años.
- (1.25 puntos) Sabiendo que tiene como mínimo 50 años, hallar la probabilidad de que salga de la tienda sin haber comprado nada.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro a .
 b) (1 punto) Calcular, en el caso de que exista, la inversa de A para $a = 0$.

c) (0.5 puntos) Resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para el caso $a = 1$.

a) Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{vmatrix} = 6a^2 - 6(a+1) + a - 3(a+1) - a^2 + 12a =$$

$$= 6a^2 - 6a - 6 + a - 3a - 3 - a^2 + 12a = 5a^2 + 4a - 9$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 5a^2 + 4a - 9 = 0 \Rightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(5)(-9)}}{2(5)} = \frac{-4 \pm 14}{10} = \begin{cases} \frac{-4+14}{10} = \boxed{1=a} \\ \frac{-4-14}{10} = \boxed{-1.8=a} \end{cases}$$

Se nos plantean tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $a \neq 1$ y $a \neq -1.8$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.

CASO 2. Si $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3. Su rango es 2 o 1.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de suprimir

la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0$. El rango de A es 2.

CASO 3. Si $a = -1.8$

El determinante de A es nulo y el rango de A no es 3. Su rango es 2 o 1.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} -3.6 & 1 & 1 \\ -1.8 & 3 & -6 \\ -0.8 & 1 & -1.8 \end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de

suprimir la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{vmatrix} -3.6 & 1 \\ -1.8 & 3 \end{vmatrix} = -10.8 + 1.8 = -9 \neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: El rango de A es 3 si $a \neq 1$ y $a \neq -1.8$ y el rango de A es 2 si $a = 1$ o $a = -1.8$.

b) Para $a = 0$ el determinante de A es no nulo y tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 - 3 = -9 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}}{-9} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -9 \\ -6 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/9 & 1 \\ 2/3 & 1/9 & 0 \\ 1/3 & -1/9 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Para $a = 1$ la matriz A tiene determinante nulo y no tiene inversa. La matriz queda

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Resolvemos el sistema.}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 3y - 6z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1^a \text{ y } 3^a \text{ ecuaciones} \\ \text{iguales} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 3y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x - z \\ x + 3y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 3(-2x - z) - 6z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 6x - 3z - 6z = 0 \Rightarrow -5x - 9z = 0 \Rightarrow -5x = 9z \Rightarrow x = \frac{-9}{5}z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -2\frac{-9}{5}z - z = \frac{18}{5}z - z = \frac{13}{5}z \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-9}{5}\lambda \\ y = \frac{13}{5}\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 + x$, se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ con mínima pendiente.
 b) (1.25 puntos) Calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica $f(x)$ y la recta $y = x$

a) La ecuación de la recta tangente en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Su pendiente es $f'(a) = 3a^2 + 2a + 1$.

Si llamamos $g(x) = f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ debemos hallar el mínimo de esta función.

Vemos cuando se anula la derivada de la función $g(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = 6x + 2 \\ g'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x + 2 = 0 \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada de la función $g(x)$.

$$g''(x) = 6 \Rightarrow g''\left(-\frac{1}{3}\right) = 6 > 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ es mínimo relativo}$$

La tangente a la gráfica de la función con mínima pendiente es en $x = -\frac{1}{3}$

Hallamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = -\frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = \frac{-1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{-7}{27} \\ f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3} \\ y - f\left(-\frac{1}{3}\right) = f'\left(-\frac{1}{3}\right)\left(x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{-7}{27} = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + \frac{7}{27} = \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{27}}$$

b) Hallamos los puntos de corte de la gráfica $f(x)$ y la recta $y = x$.

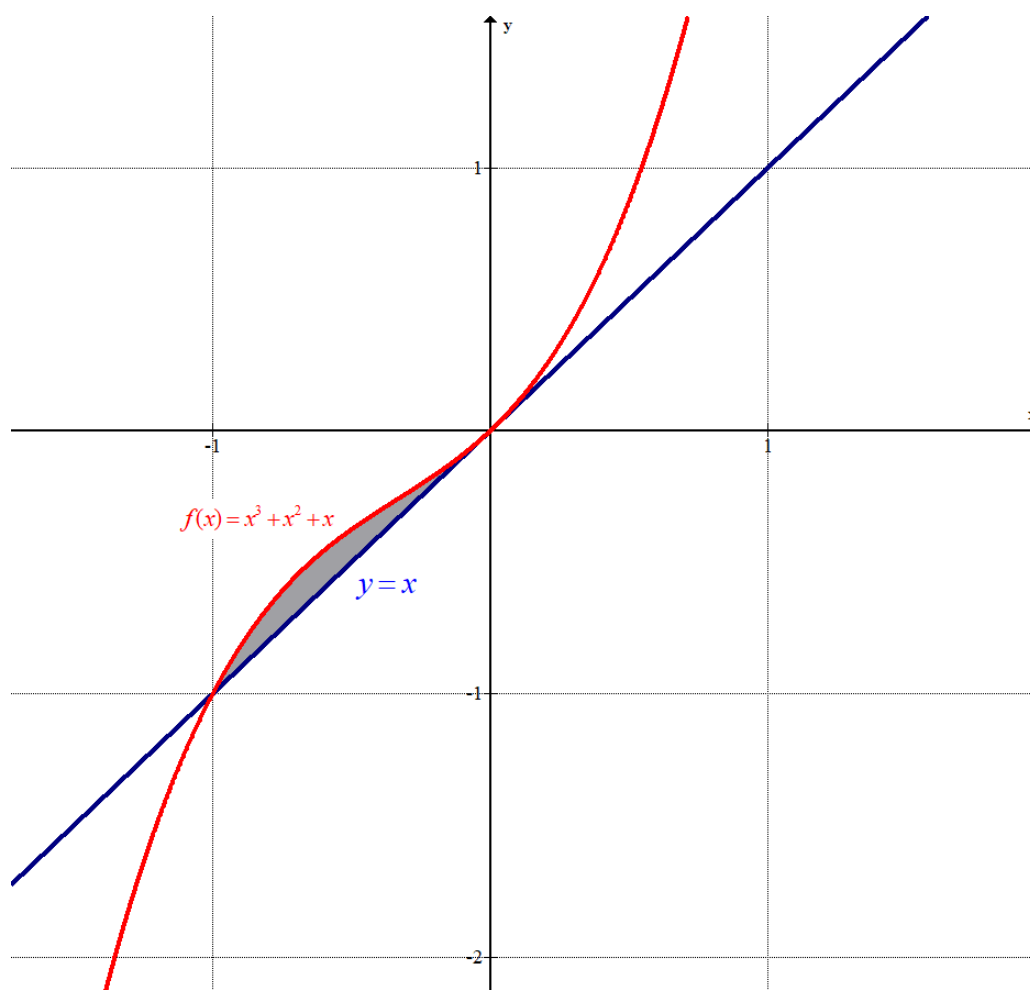
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + x^2 + x \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 + x^2 + x = x \Rightarrow x^3 + x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(x+1) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x=0} \\ x+1=0 \rightarrow \boxed{x=-1} \end{array} \right.$$

El área de la región acotada comprendida entre la gráfica $f(x)$ y la recta $y = x$ es el valor absoluto de la integral definida entre -1 y 0 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 x^3 + x^2 + x - x dx &= \int_{-1}^0 x^3 + x^2 dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = \\ &= \left[\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3} \right] = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \approx 0.83\end{aligned}$$

El área tiene un valor de $\frac{1}{12} \approx 0.83$ unidades cuadradas.



A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los planos $\pi_1 : y = x$, $\pi_2 : y = x + 1$, $\pi_3 : z = -1$ y $\pi_4 : z = 1$.

- a) (0.5 puntos) Compruebe que son paralelos los planos π_1 y π_2 , y que son paralelos los planos π_3 y π_4 .
- b) (0.5 puntos) Compruebe que los planos π_1 y π_2 son perpendiculares a los planos π_3 y π_4 .
- c) (0.5 puntos) Halle una recta que sea paralela a los cuatro planos y pase por el punto $(1, 0, 2)$.
- d) (1 punto) Halle dos planos perpendiculares a π_1 , π_2 , π_3 y π_4 , que cumplan que el volumen del paralelepípedo comprendido entre los seis planos sea 1.

- a) Para que los planos sean paralelos deben tener vectores normales iguales o con coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : y = x \Rightarrow \pi_1 : -x + y = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (-1, 1, 0) \\ \pi_2 : y = x + 1 \Rightarrow \pi_2 : -x + y - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_1 = \vec{n}_2 \Rightarrow \boxed{\pi_1 \parallel \pi_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_3 : z = -1 \Rightarrow \pi_3 : z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_3 = (0, 0, 1) \\ \pi_4 : z = 1 \Rightarrow \pi_4 : z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_4 = (0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_3 = \vec{n}_4 \Rightarrow \boxed{\pi_3 \parallel \pi_4}$$

- b) Para que los planos sean perpendiculares lo deben ser sus vectores normales y para ello el producto escalar de sus vectores normales debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = \vec{n}_2 = (-1, 1, 0) \\ \vec{n}_3 = \vec{n}_4 = (0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = (-1, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Los planos π_1 y π_2 son perpendiculares a los planos π_3 y π_4 .

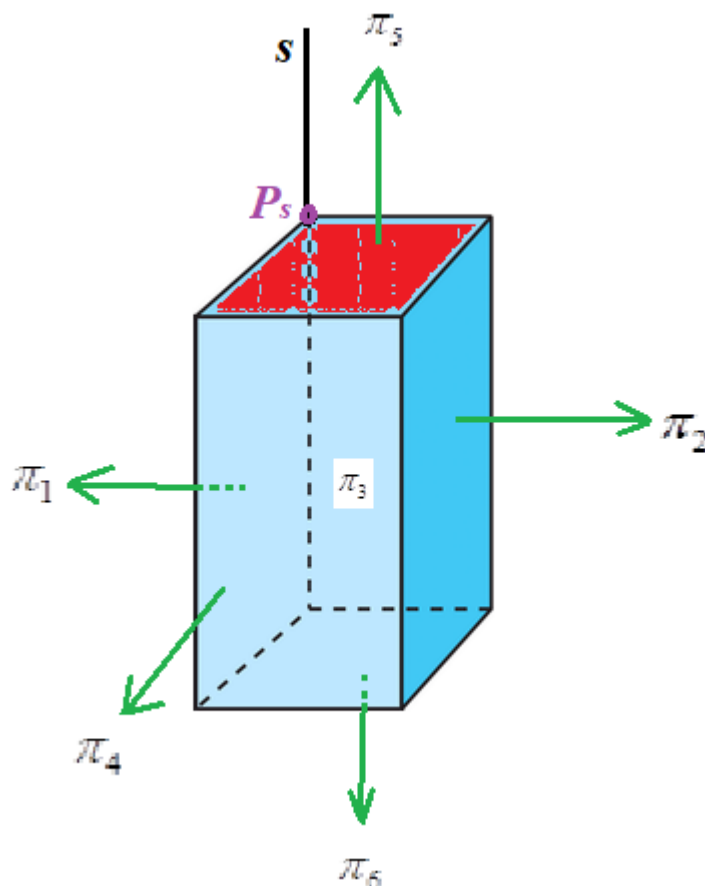
- c) Como los planos π_1 y π_3 son perpendiculares, la recta r buscada debe ser paralela a la recta s intersección de los dos planos.

$$s : \begin{cases} \pi_1 : y = x \\ \pi_3 : z = -1 \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} P_s(0, 0, -1) \\ \vec{u}_s = (1, 1, 0) \end{cases}$$

$$r : \begin{cases} (1, 0, 2) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{u}_s = (1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

- d) Los 4 planos π_1 , π_2 , π_3 y π_4 al ser paralelos dos a dos y perpendiculares entre si forman un prisma sin base ni altura. Nos piden hallar otros dos planos paralelos π_5 y π_6 tales que son la base y la tapa que formen un prisma de volumen 1.
Como nos piden que los planos sean perpendiculares a los dados su vector normal debe ser el vector director de la recta r obtenida en el apartado anterior.

Esta situación tiene infinitas soluciones. Fijamos un punto del plano π_5 para limitar el número de soluciones. Por ejemplo que el punto $P_s(0,0,-1)$ que es un punto de corte de los planos π_1 y π_3 pertenece al plano π_5 .



$$\left. \begin{array}{l} P_s(0,0,-1) \in \pi_5 \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (1,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_s(0,0,-1) \in \pi_5 \\ \pi_5: x+y+D=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0+0+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow \boxed{\pi_5: x+y=0}$$

El otro plano π_6 debe ser paralelo a π_5 y por tanto tiene el mismo vector normal. Y además el volumen del prisma que forman los seis planos debe tener volumen 1.

$$\text{Volumen} = \text{Área de la base} \cdot \text{altura} = d(\pi_1, \pi_2) \cdot d(\pi_3, \pi_4) \cdot d(\pi_5, \pi_6)$$

Hallamos el valor de cada una de esas distancias.

$$\left. \begin{array}{l} P_s(0,0,-1) \\ \pi_2: -x+y-1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi_1, \pi_2) = d(P_s, \pi_2) = \frac{|-0+0-1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_s(0,0,-1) \\ \pi_4: z-1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi_3, \pi_4) = d(P_s, \pi_4) = \frac{|-1-1|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = 2$$

Como el volumen debe ser 1 nos queda la igualdad:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Volumen} = d(\pi_1, \pi_2) \cdot d(\pi_3, \pi_4) \cdot d(\pi_5, \pi_6) \\ \text{Volumen} = 1 \\ d(\pi_1, \pi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ d(\pi_3, \pi_4) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot d(\pi_5, \pi_6) \Rightarrow d(\pi_5, \pi_6) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

El plano está a distancia $\frac{\sqrt{2}}{2}$ del plano paralelo $\pi_5: x + y = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_5: x + y = 0 \\ \pi_5 \parallel \pi_6 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_6: x + y + D = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} d(\pi_5, \pi_6) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \pi_6: x + y + D = 0 \\ P_s(0, 0, -1) \in \pi_5 \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi_5, \pi_6) = d(P_s, \pi_6) = \frac{|0 + 0 + D|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |D| = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} D = 1 \rightarrow \boxed{\pi_6: x + y + 1 = 0} \\ D = -1 \rightarrow \boxed{\pi_6: x + y - 1 = 0} \end{cases}$$

Una solución posible al problema son los planos $\pi_5: x + y = 0$ y $\pi_6: x + y + 1 = 0$ o bien $\pi_5: x + y = 0$ y $\pi_6: x + y - 1 = 0$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En los juegos de rol, cada vez que se lanza un ataque este puede resultar en golpe crítico o no.

- a) (1.25 puntos) En cierto juego de rol, para determinar si un ataque es crítico o no, se tira una moneda a cara o cruz. Si se obtiene una cruz, el ataque no será crítico. Por contra, si se obtiene una cara, entonces se lanza un dado de 10 caras numeradas del 1 al 10. Solo en caso de que también se obtenga una puntuación mayor o igual a 9 en el dado el ataque es crítico; en caso contrario el ataque no será crítico. Calcule la probabilidad de que, de entre 5 ataques lanzados, se obtengan 3 o menos golpes críticos.
- b) (1.25 puntos) En otro juego de rol se sabe que la probabilidad de ataque crítico es del 20%. Aproximando mediante una distribución normal, calcule la probabilidad de que, de entre 100 ataques, se obtengan no menos de 15 y no más de 25 golpes críticos.

Llamamos G al suceso “El golpe es crítico”; C al suceso “sacar cara al lanzar la moneda” y D al suceso “sacar 9 o 10 al lanzar el dado de 10 caras”.

Sabemos que $P(C) = \frac{1}{2}$ y que $P(D) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Para que el golpe sea crítico debe salir cara y luego sacar 9 o 10 al lanzar el dado.

$$P(G) = P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = 0.1$$

- a) Establecemos la distribución binomial X = Número de golpes críticos en 5 ataques lanzados”. Sabemos que la probabilidad de éxito es $p = 0.1$ y que $n = 5$, por lo que la variable aleatoria es $X = B(5, 0.1)$. Nos piden calcular $P(X \leq 3)$.

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$

$$= \binom{5}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^5 + \binom{5}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^4 + \binom{5}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^3 + \binom{5}{3} 0.1^3 \cdot 0.9^2 = \boxed{0.99954}$$

- b) Ahora la variable aleatoria es X = Número de golpes críticos en 100 ataques lanzados”. Y tiene como parámetros $p = 0.2$ y $n = 100 \rightarrow X = B(100, 0.2)$.

Nos piden calcular $P(15 \leq X \leq 25)$.

Para calcular esta probabilidad aproximamos esta variable binomial X a una variable normal Y de parámetros $\mu = np = 100 \cdot 0.2 = 20$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = 4$. $Y = N(20, 4)$

$$P(15 \leq X \leq 25) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(14.5 \leq Y \leq 25.5) =$$

$$= P(Y \leq 25.5) - P(Y \leq 14.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{25.5 - 20}{4}\right) - P\left(Z \leq \frac{14.5 - 20}{4}\right) =$$

$$= P(Z \leq 1.375) - P(Z \leq -1.375) = P(Z \leq 1.375) - P(Z \geq 1.375) =$$

$$= P(Z \leq 1.375) - [1 - P(Z \leq 1.375)] = 2P(Z \leq 1.375) - 1 =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 2 \cdot \frac{0.9147 + 0.9162}{2} - 1 = 2 \cdot 0.91545 - 1 = \boxed{0.8309}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un dietista veterinario ha establecido la alimentación diaria (en términos de grasas, carbohidratos y proteínas) de un quebrantahuesos pirenaico que se ha recogido en el hogar de recuperación de fauna en el que trabaja. Se sabe que el quebrantahuesos necesita 500 g de alimento al día y que necesita 2500 Kcal. También se sabe que cada gramo de grasa proporciona 9 Kcal, cada gramo de carbohidratos 4 Kcal y cada gramo de proteínas 4 Kcal. Debido a que el ave ha llegado en un estado de debilidad, el veterinario estima que el consumo de carbohidratos debe ser 40 g más del doble de proteínas. Determine la cantidad de kilocalorías diaria que obtendrá el quebrantahuesos procedentes de grasas, de carbohidratos y de proteínas.

Llamamos “x” al número de gramos de grasas, “y” al número de gramos de carbohidratos y “z” al número de gramos de proteínas.

Obtenemos las ecuaciones que nos permiten establecer los datos del problema.

“el quebrantahuesos necesita 500 g de alimento al día” $\rightarrow x + y + z = 500$

“necesita 2500 Kcal. También se sabe que cada gramo de grasa proporciona 9 Kcal, cada gramo de carbohidratos 4 Kcal y cada gramo de proteínas 4 Kcal” $\rightarrow 9x + 4y + 4z = 2500$.

“el consumo de carbohidratos debe ser 40 g más del doble de proteínas” $\rightarrow y = 2z + 40$.

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ 9x + 4y + 4z = 2500 \\ y = 2z + 40 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2z + 40 + z = 500 \\ 9x + 4(2z + 40) + 4z = 2500 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3z = 460 \\ 9x + 8z + 160 + 4z = 2500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 460 - 3z \\ 9x + 12z = 2340 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(460 - 3z) + 12z = 2340 \Rightarrow 4140 - 27z + 12z = 2340 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -15z = -1800 \Rightarrow \boxed{z = \frac{1800}{15} = 120} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 460 - 3 \cdot 120 = 100} \\ \boxed{y = 2 \cdot 120 + 40 = 280} \end{cases}$$

En la dieta consume 100 gramos de grasas, 280 de carbohidratos y 120 de proteínas.

Las 2500 kilocalorías diarias provienen $100 \cdot 9 = 900$ kilocalorías de las grasas, $280 \cdot 4 = 1120$ kilocalorías de los carbohidratos y $120 \cdot 4 = 480$ kilocalorías de las proteínas.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 + 2x + 1}$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar, si existen, las asíntotas de la gráfica de f .
 b) (1.5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y calcular, si existen, sus extremos relativos.

a) Estudiamos su dominio.

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Dominio de $f(x)$ es $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Expresamos la función como una función a trozos.

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = x \\ \frac{1-3}{2} = -1 = x \end{cases}$$

Establecemos la expresión de la función antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y $(-2)^2 - (-2) - 2 = 4 > 0$. La función es

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{x-2}{x+1}$$

- En el intervalo $(-1, 2)$ tomamos $x = 0$ y $(0)^2 - (0) - 2 = -2 < 0$. La función es

$$f(x) = \frac{-(x^2 - x - 2)}{x^2 + 2x + 1} = \frac{-(x+1)(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{-(x-2)}{x+1} = \frac{2-x}{x+1}.$$

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y $(3)^2 - (3) - 2 = 3 > 0$. La función es

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x-2}{x+1}.$$

La función $f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 + 2x + 1}$ se puede expresar como $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ \frac{2-x}{x+1} & \text{si } -1 < x < 2 \\ \frac{x-2}{x+1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = -1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2-x}{x+1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-2}{x+1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1 - \frac{2}{+\infty}}{1 + \frac{1}{+\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1 - \frac{2}{-\infty}}{1 + \frac{1}{-\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$y = 1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x = -1$ y una asíntota horizontal: $y = 1$, no tiene asíntota oblicua.

b) Estudiamos el signo de la derivada.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ \frac{2-x}{x+1} & \text{si } -1 < x < 2 \\ \frac{x-2}{x+1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} & \text{si } x < -1 \\ \frac{-(x+1)-(2-x)}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2} & \text{si } -1 < x < 2 \\ \frac{3}{(x+1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

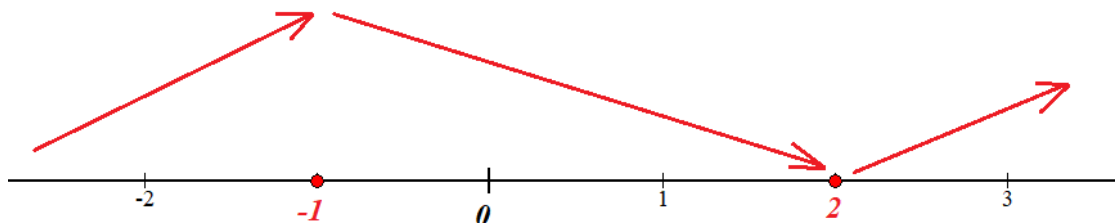
Estudiamos el signo de la derivada en cada intervalo.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ la derivada es $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ y siempre es positiva. La función crece en el intervalo $(-\infty, -1)$.
- En el intervalo $(-1, 2)$ la derivada es $f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2}$ y siempre es negativa. La función decrece en el intervalo $(-1, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ la derivada es $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ y siempre es positiva. La función crece en el intervalo $(2, +\infty)$.

Resumiendo: La función crece en $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-1, 2)$.

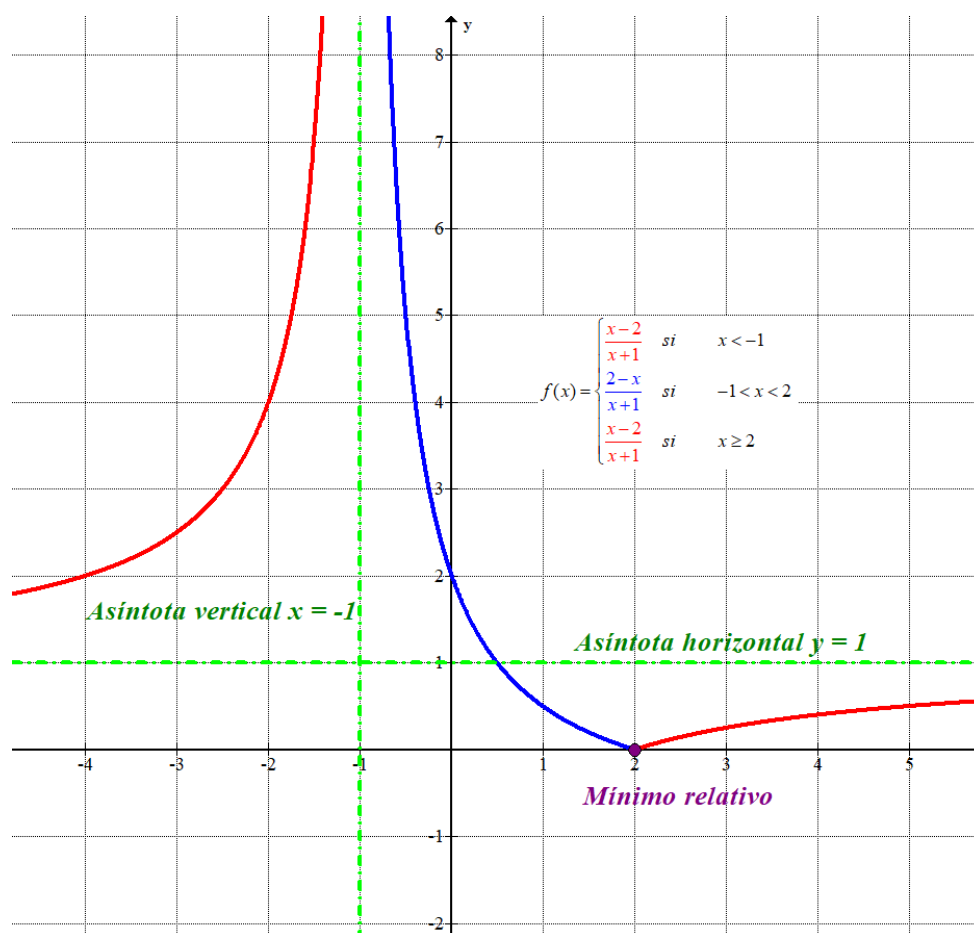
La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un mínimo relativo en $x = 2$. Como $f(2) = \frac{|2^2 - 2 - 2|}{2^2 + 2 \cdot 2 + 1} = \frac{0}{9} = 0$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(2, 0)$.

El valor $x = -1$ no pertenece al dominio de la función, por lo que no es un máximo.

No piden dibujar la gráfica de la función, pero lo hacemos para comprobar la bondad de las respuestas dadas.



B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ y los planos $\pi: x+2y+2z-1=0$ y $\pi': 2x+2y+z+4=0$, se pide:

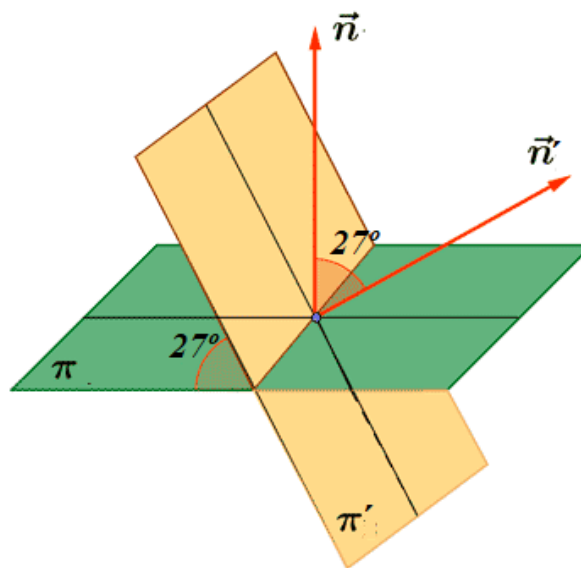
- (0.75 puntos) Comprobar que los planos π y π' se cortan. Hallar el ángulo que forman.
- (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π . Hallar, si es posible, el punto de corte.
- (1 punto) Hallar los puntos de la recta r que equidistan de los planos π y π' .

- a) Comprobamos que los planos no son paralelos y por tanto se cortan en una recta. Averiguamos el ángulo que forman sus respectivos vectores normales. Si forman un ángulo distinto de 0° o 180° se cortan.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x+2y+2z-1=0 \rightarrow \vec{n}=(1,2,2) \\ \pi': 2x+2y+z+4=0 \rightarrow \vec{n}'=(2,2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{n}') = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{n}') = \frac{(1,2,2)(2,2,1)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2} \sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{2+4+2}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{n}, \vec{n}') = \cos^{-1}\left(\frac{8}{9}\right) \approx 27^\circ$$



Los planos se cortan y el ángulo que forman entre ellos es el mismo que forman sus vectores normales, en este caso 27° .

- b) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(1,0,-2) \\ \vec{v}_r = (3,1,-1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$

Para que la recta esté contenida en el plano o sea paralela al plano su vector director debe ser perpendicular al vector normal del plano, es decir, su producto escalar debe ser cero.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (3, 1, -1) \\ \vec{n} = (1, 2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (1, 2, 2)(3, 1, -1) = 3 + 2 - 2 = 3 \neq 0$$

Como el producto escalar es no nulo la recta y el plano se cortan.
Obtenemos su punto de corte resolviendo el sistema planteado por sus ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + 2y + 2z - 1 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 3\lambda + 2\lambda + 2(-2 - \lambda) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 3\lambda + 2\lambda - 4 - 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 3 \cdot \frac{4}{3} = 5 \\ y = \frac{4}{3} \\ z = -2 - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{P\left(5, \frac{4}{3}, -\frac{10}{3}\right)}$$

El punto P de corte de recta y plano tiene coordenadas $P\left(5, \frac{4}{3}, -\frac{10}{3}\right)$.

c) Un punto Q de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$ tiene coordenadas $Q(1 + 3\lambda, \lambda, -2 - \lambda)$.

Hallamos la distancia de un punto Q de la recta r a cada uno de los planos e igualamos las distancias.

$$\left. \begin{array}{l} Q(1 + 3\lambda, \lambda, -2 - \lambda) \\ \pi : x + 2y + 2z - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(Q, \pi) = \frac{|1 + 3\lambda + 2\lambda + 2(-2 - \lambda) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|5\lambda - 4 - 2\lambda|}{3} = \frac{|3\lambda - 4|}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q(1 + 3\lambda, \lambda, -2 - \lambda) \\ \pi' : 2x + 2y + z + 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(Q, \pi') = \frac{|2(1 + 3\lambda) + 2\lambda - 2 - \lambda + 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 6\lambda + \lambda + 2|}{3} = \frac{|7\lambda + 4|}{3}$$

$$d(Q, \pi') = d(Q, \pi) \Rightarrow \frac{|3\lambda - 4|}{3} = \frac{|7\lambda + 4|}{3} \Rightarrow |3\lambda - 4| = |7\lambda + 4| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\lambda - 4 = 7\lambda + 4 \rightarrow -4\lambda = 8 \rightarrow \lambda = -2 \rightarrow \boxed{Q(-5, -2, 0)} \\ 3\lambda - 4 = -7\lambda - 4 \rightarrow 10\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow \boxed{Q'(1, 0, -2)} \end{cases}$$

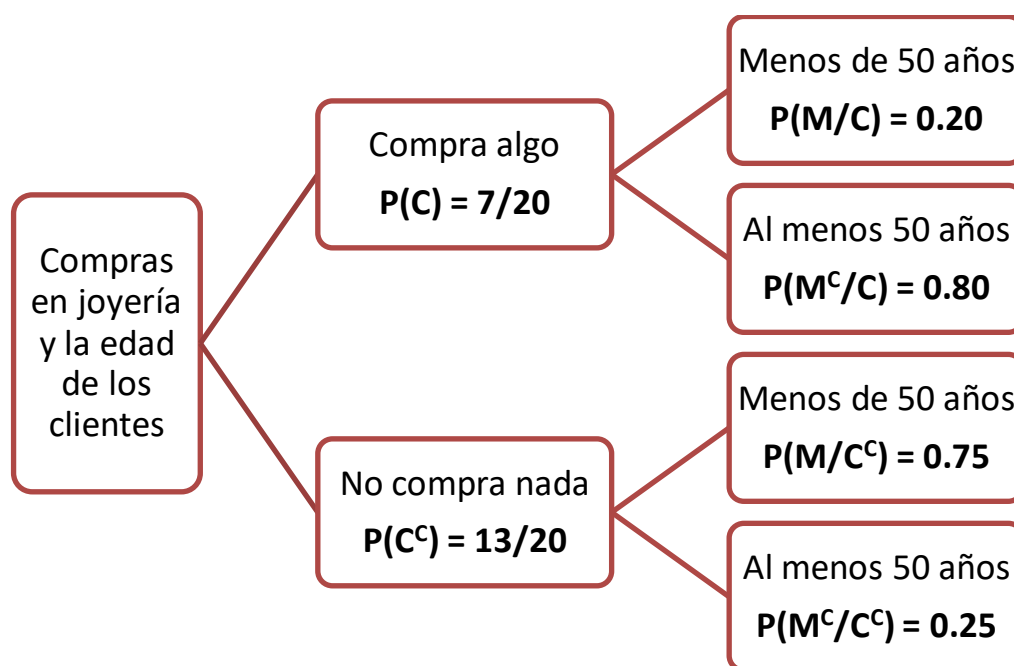
Los dos puntos de la recta r equidistantes de los planos π y π' son $Q(-5, -2, 0)$ y $Q'(1, 0, -2)$.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Siete de cada veinte personas que entran en cierta joyería acaban comprando algún artículo. El 75% de las personas que se marchan sin comprar nada tienen menos de 50 años y el 80% de las personas que realizan alguna compra tienen al menos 50 años. Entra un cliente en la joyería. Se pide:

- (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea menor de 50 años.
- (1.25 puntos) Sabiendo que tiene como mínimo 50 años, hallar la probabilidad de que salga de la tienda sin haber comprado nada.

Realizamos un diagrama de árbol para organizar toda la información proporcionada. Llamamos C al suceso “El cliente compra algo en la joyería” y M al suceso “el cliente tiene menos de 50 años”.



- a) Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(C \cap M) + P(C^c \cap M) = P(C)P(M/C) + P(C^c)P(M/C^c) =$$

$$= \frac{7}{20} \cdot 0.2 + \frac{13}{20} \cdot 0.75 = \boxed{\frac{223}{400} = 0.5575}$$

- b) Nos piden calcular $P(C^c / M^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C^c / M^c) = \frac{P(C^c \cap M^c)}{P(M^c)} = \frac{P(C^c)P(M^c / C^c)}{1 - P(M)} = \frac{\frac{13}{20} \cdot 0.25}{1 - 0.5575} = \boxed{\frac{65}{177} \approx 0.3672}$$

EvAU 2022 Extraordinaria Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2021-2022 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- (0.75 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.
- (0.25 puntos) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.
- (0.75 puntos) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.
- (0.75 puntos) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0, -1, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ pertenecientes al plano π .

- (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π , encuentre los posibles puntos C y D.
- (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π , determine los otros dos vértices del mismo.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato.

Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.
- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.

- c) (1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB . Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$.
 b) (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k .
 c) (0.5 puntos) En el caso $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA .

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.
 b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$, así como los máximos y mínimos relativos.
 c) (1 punto) Calcule $\int_1^2 f(x) dx$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$

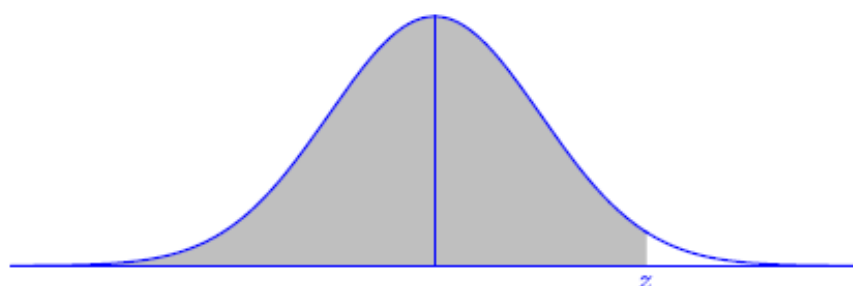
- a) (1.5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.
 b) (0.5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s .
 c) (0.5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s , respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z = 0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q .

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40% de los productos tipo A, un 60% de los productos tipo B y un 20% de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.
 b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

Llamamos “e” al número de libros de ensayos, “n” al número de novelas y “b” al número de libros de biografías.

El número total de libros de la estantería es $e + n + b$.

“Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos” $\rightarrow \frac{3}{16}(e + n + b) = e$

“Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas” $\rightarrow b + \frac{e}{3} = n + 2$

“Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros” $\rightarrow (e + n + b) - \frac{e}{2} - \frac{n}{5} = 105$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{16}(e + n + b) = e \\ b + \frac{e}{3} = n + 2 \\ (e + n + b) - \frac{e}{2} - \frac{n}{5} = 105 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3(e + n + b) = 16e \\ 3b + e = 3n + 6 \\ 10e + 10n + 10b - 5e - 2n = 1050 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3e + 3n + 3b = 16e \\ e = 3n - 3b + 6 \\ 5e + 8n + 10b = 1050 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -13e + 3n + 3b = 0 \\ \Rightarrow e = 3n - 3b + 6 \\ 5e + 8n + 10b = 1050 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -13(3n - 3b + 6) + 3n + 3b = 0 \\ 5(3n - 3b + 6) + 8n + 10b = 1050 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -39n + 39b - 78 + 3n + 3b = 0 \\ 15n - 15b + 30 + 8n + 10b = 1050 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -36n + 42b - 78 = 0 \\ 23n - 5b = 1020 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -6n + 7b = 13 \\ 23n - 5b = 1020 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \times(5) \rightarrow -6n + 7b = 13 \\ \times(7) \rightarrow 23n - 5b = 1020 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -30n + 35b = 65 \\ 161n - 35b = 7140 \end{array} \right\}$$

$$\overline{131n} \quad \quad \quad = 7205 \Rightarrow \boxed{n = \frac{7205}{131} = 55} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6 \cdot 55 + 7b = 13 \Rightarrow 7b = 13 + 330 = 343 \Rightarrow \boxed{b = \frac{343}{7} = 49} \Rightarrow \boxed{e = 3 \cdot 55 - 3 \cdot 49 + 6 = 24}$$

En la estantería hay 24 libros de ensayo, 55 novelas y 49 biografías.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.
- b) (0.25 puntos) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.
- c) (0.75 puntos) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.
- d) (0.75 puntos) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

- a) En $(-\infty, 0)$ la función es $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ y es continua pues el denominador se anula en $x = 0$, pero está excluido del dominio. En $(0, +\infty)$ la función es $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y es continua pues es una función polinómica. Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x} = \frac{0+1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 4x + 3 = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \\ f(0) &= 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Es discontinua en } x = 0.$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

- b) No es derivable pues no es continua.

- c) **Asíntota vertical.** $x = a$.

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x} = \frac{0+1}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical por la izquierda.

Asíntota horizontal. $y = b$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4x + 3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$$

$y = 2$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

- d) La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada, por lo que hay que encontrar donde se anula la derivada.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-1 \cdot (2x+1)}{x^2} = \frac{-1}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x-4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1}{x^2} = 0 \rightarrow -1 = 0 & \text{¡Imposible! si } x < 0 \\ 2x-4 = 0 \rightarrow x = 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En $x = 2$ la derivada se anula. Calculamos la recta tangente en $x = 2$.

$$f(2) = 2^2 - 8 + 3 = -1$$

$$f'(2) = 0$$

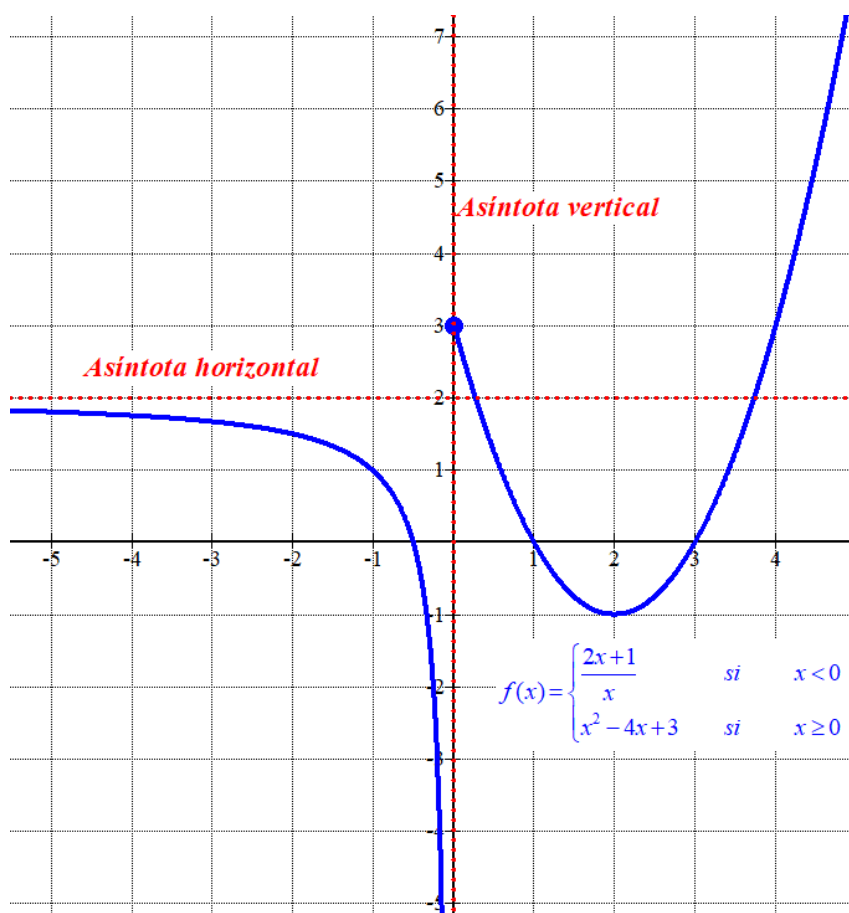
$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

En $x = 2$ hay un extremo relativo de la función. Sustituimos este valor en la derivada segunda para comprobar si es máximo o mínimo.

$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f''(x) = 2 \Rightarrow f''(2) = 2 > 0$$

En $x = 2$ la función presenta un mínimo relativo.

Como $f(2) = -1$ las coordenadas del mínimo relativo son $(2, -1)$

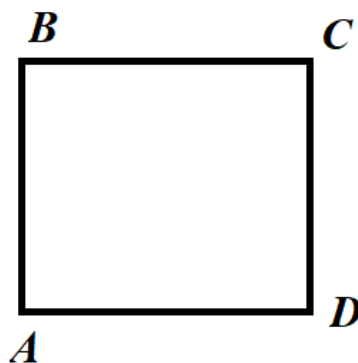


A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0, -1, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ pertenecientes al plano π .

- a) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π , encuentre los posibles puntos C y D.
 b) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π , determine los otros dos vértices del mismo.

- a) La situación planteada es la del dibujo.



Los puntos C y D están en el plano $\pi \equiv z = x$ por lo que sus coordenadas son $C(c, e, c)$ y $D(d, f, d)$

Obtenemos la longitud del lado AB es:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (0, 1, 0) - (0, -1, 0) = (0, 2, 0) \\ |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{2^2} = 2\end{aligned}$$

Como es un cuadrado los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son iguales.

$$\left. \begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (0, 1, 0) - (0, -1, 0) = (0, 2, 0) \\ \overrightarrow{DC} &= (c, e, c) - (d, f, d) = (c-d, e-f, c-d) \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DC}\end{aligned} \right\} \Rightarrow (0, 2, 0) = (c-d, e-f, c-d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = c-d \\ 2 = e-f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = d \\ e = 2+f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(c, 2+f, c) \\ D(c, f, c) \end{cases}$$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ deben ser ortogonales y su producto escalar nulo.

$$\left. \begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (0, 1, 0) - (0, -1, 0) = (0, 2, 0) \\ \overrightarrow{AD} &= (c, f, c) - (0, -1, 0) = (c, f+1, c) \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= 0\end{aligned} \right\} \Rightarrow (0, 2, 0) \cdot (c, f+1, c) = 0 \Rightarrow 2(f+1) = 0 \Rightarrow f = -1$$

Los puntos tienen coordenadas $C(c, 1, c)$ y $D(c, -1, c)$.

La longitud del lado AD debe ser 2.

$$\left. \begin{array}{l} A(0, -1, 0) \\ D(c, -1, c) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (c, -1, c) - (0, -1, 0) = (c, 0, c)$$

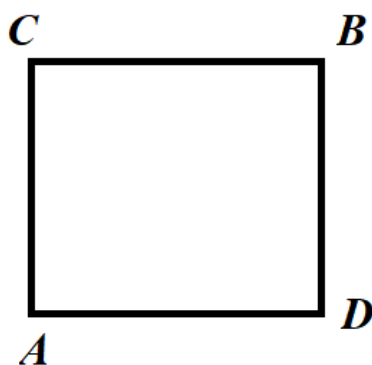
$$|\overrightarrow{AD}| = 2 = \sqrt{c^2 + 0^2 + c^2} \Rightarrow c^2 + c^2 = 4 \Rightarrow 2c^2 = 4 \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}$$

Hay dos soluciones posibles:

Si $c = \sqrt{2}$ los vértices son $C(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$ y $D(\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$

Si $c = -\sqrt{2}$ los vértices son $C(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2})$ y $D(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2})$

b) La situación planteada es la del dibujo.



Los puntos C y D están en el plano $\pi \equiv z = x$ por lo que sus coordenadas son $C(c, e, c)$ y $D(d, f, d)$

Al ser un cuadrado la diagonal AB forma 90° con la diagonal DC y el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0) - (0, -1, 0) = (0, 2, 0) \\ \overrightarrow{DC} = (c, e, c) - (d, f, d) = (c-d, e-f, c-d) \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \end{array} \right\} \Rightarrow (0, 2, 0) \cdot (c-d, e-f, c-d) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(e-f) = 0 \Rightarrow \boxed{e=f}$$

Las coordenadas son $C(c, e, c)$ y $D(d, e, d)$

Como es un cuadrado los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{DB}$ son iguales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (c, e, c) - (0, -1, 0) = (c, e+1, c) \\ \overrightarrow{DB} = (0, 1, 0) - (d, e, d) = (-d, 1-e, -d) \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} \end{array} \right\} \Rightarrow (c, e+1, c) = (-d, 1-e, -d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = -d \\ e+1 = 1-e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -d \\ 2e = 0 \rightarrow e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(-d, 0, -d) \\ D(d, 0, d) \end{cases}$$

La longitud de la diagonal AB debe ser igual a la longitud de la diagonal CD.

$$\left. \begin{array}{l} C(-d, 0, -d) \\ D(d, 0, d) \\ A(0, -1, 0) \\ B(0, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0) - (0, -1, 0) = (0, 2, 0) \\ \overrightarrow{CD} = (d, 0, d) - (-d, 0, -d) = (2d, 0, 2d) \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{2^2} = \sqrt{(2d)^2 + (2d)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 = 4d^2 + 4d^2 \Rightarrow 4 = 8d^2 \Rightarrow d^2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{d = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Hay dos soluciones posibles:

$$\text{Si } d = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ los vértices son } C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Si } d = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ los vértices son } C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Realmente es la misma solución, solo cambia el nombre de los puntos.

$$\text{La solución a esta situación es única: } C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato.

Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.
- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.
- (1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

Es un problema que resolvemos utilizando la distribución binomial.

Número de repeticiones = $n = 6$.

Probabilidad de éxito (estar matriculado en matemáticas II) = $p = 3/5 = 0.6$. $q = 1 - 0.6 = 0.4$

X = Número de alumnos matriculados en matemáticas II de un grupo de 6. $X = B(6, 0.6)$

- a) Nos piden calcular $P(X = 4)$.

$$P(X = 4) = \binom{6}{4} \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^2 = \boxed{0.311}$$

- b) Que “haya alguno matriculado” es lo mismo que “ $X \geq 1$ ”. Nos piden calcular $P(X \geq 1)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= \left\{ P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = 6) \right\} \\ &\quad \left\{ \text{Es muy largo, utilizamos el contrario} \right\} = 1 - P(X = 0) = \\ &= 1 - \binom{6}{0} \cdot 0.6^0 \cdot 0.4^6 = 1 - 0.4^6 = \boxed{0.996} \end{aligned}$$

- c) Pasamos a una binomial $X = B(120, 0.6)$.

Como $\begin{cases} np = 120 \cdot 0.6 = 72 > 5 \\ nq = 120 \cdot 0.4 = 48 > 5 \end{cases}$ entonces la binomial se puede aproximar con una normal de

media $\mu = np = 72$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{120 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = \frac{12\sqrt{5}}{5} \approx 5.367$.

La distribución binomial $X = B(120, 0.6)$ se aproxima con una normal $Y = N(72, 5.367)$.

Nos piden calcular $P(X > 60)$.

$$\begin{aligned} P(X > 60) &= \{ \text{Corrección de Yates} \} = P(Y \geq 60.5) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z \geq \frac{60.5 - 72}{12\sqrt{5}/5} \right) = \\ &= P(Z \geq -2.14) = P(Z \leq 2.14) = \{ \text{Miramos en la tabla } N(0,1) \} = \boxed{0.9838} \end{aligned}$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB . Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$.
 b) (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k .
 c) (0.5 puntos) En el caso $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA .

a) Realizamos el producto AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1+k & 1+1+0 \\ k+1-1 & k-1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{pmatrix}$$

Para que tenga inversa debe tener determinante no nulo.

$$|AB| = \begin{vmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{vmatrix} = k(k-1) - 2k = k^2 - k - 2k = k^2 - 3k$$

$$|AB| = 0 \Rightarrow k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k(k-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ 0 \\ k = 3 \end{cases}$$

La matriz AB tiene inversa si k es distinto de 0 y de 3.

Para $k = 1$ la matriz AB tiene inversa. La calculamos.

$$|AB| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{\text{Adj}((AB)^T)}{|AB|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos BA.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k & -1+1 & k-1 \\ 1-k & -1-1 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

Realizamos transformaciones de la matriz BA consiguiendo una matriz equivalente y que hace más fácil el cálculo de su rango.

$$BA = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1+k & 0 & k-1 \\ \hline 2 & -2 & 2k \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 2 & -2 & 2k \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 2 & -2 & 2k \\ -2 & 2 & -2k \\ \hline 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 2 & -2 & 2k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Columna } 1^a + \text{Columna } 2^a \\ 1+k & 0 & 1+k \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 0 & -2 & 2k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de BA no es 3 sea cual sea el valor de k .

Estudiamos dos casos distintos.

CASO 1. $k \neq -1$

En este caso el rango de AB es 2 pues hay dos filas no nulas en la matriz equivalente a BA.

CASO 2. $k = -1$

En este caso la matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. El rango de esta matriz también es

2 pues la matriz equivalente a BA sigue teniendo dos filas no nulas.

El rango de BA es 2 sea cual sea el valor de k .

c) Para $k = 1$ la matriz $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Si $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones el sistema debe ser:

$$\left. \begin{array}{l} 2x = a \\ -2y + 2z = b \\ x - y + z = c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{2} \\ -y + z = \frac{b}{2} \\ x - y + z = c \end{array} \right\}$$

Si elegimos $a = 2$ y $b = 2$ elegimos un valor de c que haga el sistema incompatible.

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{2}{2} = 1 \\ -y + z = \frac{2}{2} = 1 \\ x - y + z = c \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 1 = c \Rightarrow 2 = c$$

Elegimos un valor de c distinto de 2, por ejemplo, $c = 0$ y el sistema es incompatible.

El sistema pedido sería $\left. \begin{array}{l} 2x = 2 \\ -2y + 2z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\}$

Comprobamos que no tiene solución.

$$\left. \begin{array}{l} 2x = 2 \\ -2y + 2z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{x=1} \\ -y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 1 + y \\ 1 - y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - y + 1 + y = 0 \Rightarrow 2 = 0 \text{ ¡Imposible!}$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.
 b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$, así como los máximos y mínimos relativos.
 c) (1 punto) Calcule $\int_1^2 f(x) dx$.

a) Para ser continua deben coincidir los límites laterales y el valor de la función.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$ la función es continua en $x = 0$.

Estudiamos su derivabilidad.

$$\text{La función derivada en } \mathbb{R} - \{0\} \text{ es } f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \ln(x) + x \frac{1}{x} = 1 + \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Vemos si coinciden las derivadas laterales en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \ln(x) = -\infty \end{aligned} \right\}$$

La función no es derivable en $x = 0$ pues la derivada lateral por la derecha no es finita.

b) Igualamos la derivada a 0 en busca de los puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 = 0 \text{ ¡Imposible!} & \text{si } x < 0 \\ 1 + \ln(x) = 0 \rightarrow \ln(x) = -1 \rightarrow \boxed{x = e^{-1} \approx 0.37 > 0} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Comprobamos si en $x = e^{-1}$ la derivada segunda es positiva o negativa.

$$f'(x) = 1 + \ln(x) \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} = e > 0$$

La derivada segunda es positiva y en $x = e^{-1}$ existe un mínimo relativo.

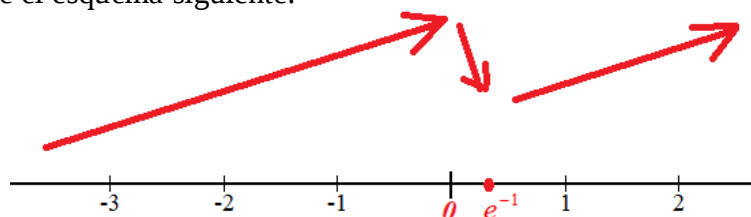
Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

En $(-\infty, 0)$ la función es una recta creciente, la función crece.

En $(0, e^{-1})$ tomamos $x = 0.1$ y la derivada vale $f'(0.1) = 1 + \ln(0.1) = -1.3 < 0$. La función decrece en $(0, e^{-1})$.

En $(e^{-1}, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 1 + \ln(1) = 1 > 0$. La función crece en $(e^{-1}, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty, 0) \cup (e^{-1}, +\infty)$ y decrece en $(0, e^{-1})$.

La función es continua y presenta un máximo relativo en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = e^{-1}$.

Como $f(0) = 0$ y $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln e^{-1} = -e^{-1}$ las coordenadas del máximo relativo son $(0, 0)$ y del mínimo relativo $(e^{-1}, -e^{-1})$.

c) Calculamos primero la integral indefinida.

En el intervalo $(1, 2)$ la función es $f(x) = x \ln(x)$, por lo que:

$$\int f(x) dx = \int x \ln(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + K}$$

Calculamos el valor de la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 x \ln(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{2^2}{2} \ln 2 - \frac{2^2}{4} \right] - \left[\frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1^2}{4} \right] = 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = \boxed{\ln 4 - \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=2-2t \\ y=5+2t, \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

- a) (1.5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.
 b) (0.5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s .
 c) (0.5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s , respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z=0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

a) Obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2-y \\ -2z=-1-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2-y \\ z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-2-t \\ y=t \\ z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} t=1 \rightarrow P_r(-3,1,1) \\ \vec{v}_r = \left(-1, 1, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \vec{u}_r = 2\vec{v}_r = (-2, 2, 1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x=2-2t \\ y=5+2t, \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} Q_s(2,5,0) \\ \vec{v}_s = (-2, 2, 1) \end{cases}$$

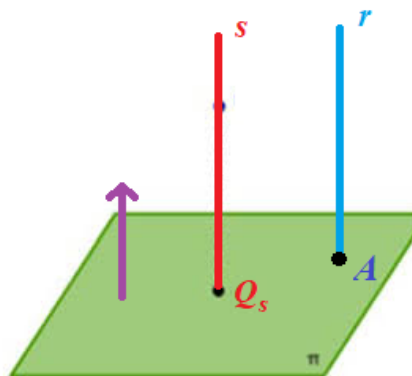
Los vectores directores tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas son paralelas o coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (-2, 2, 1) \\ \vec{v}_s = (-2, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-2}{-2} = \frac{2}{2} = \frac{1}{1}$$

Comprobamos si el punto $Q_s(2,5,0)$ de la recta s pertenece a la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} Q_s(2,5,0) \in r? \\ r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2+5+2=0 \\ 5-0+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9=0 \\ 6=0 \end{cases} \text{ ¡No!}$$

Por lo que las rectas no son coincidentes y son paralelas.



Para determinar la distancia entre las rectas hallamos el plano π perpendicular a la recta s que pasa por el punto Q_s , después determinamos el punto A de corte del plano y la recta r . La distancia entre las dos rectas es la distancia entre los puntos Q_s y A .

Hallamos la ecuación del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_s = (-2, 2, 1) \\ Q_s(2, 5, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv -2x + 2y + z + D = 0 \\ Q_s(2, 5, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -4 + 10 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv -2x + 2y + z - 6 = 0}$$

Hallamos el punto A de corte del plano π y la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -2x + 2y + z - 6 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = -2 - t \\ y = t \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -2(-2 - t) + 2t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t - 6 = 0 \Rightarrow 4 + 2t + 2t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 + 4t + 4t + 1 + t - 12 = 0 \Rightarrow 9t = 3 \Rightarrow t = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 - \frac{1}{3} = -\frac{7}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Calculamos la distancia.

$$\overrightarrow{Q_s A} = \left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) - (2, 5, 0) = \left(-\frac{13}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$d(r, s) = d(Q_s, A) = |\overrightarrow{Q_s A}| = \sqrt{\left(-\frac{13}{3}\right)^2 + \left(-\frac{14}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{369}{9}} = \boxed{\sqrt{41} \approx 6.4u}$$

- b) El plano que contiene a las dos rectas tiene como vectores directores $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_r Q_s}$ y pasa por el punto $Q_s(2, 5, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(-3, 1, 1) \\ Q_s(2, 5, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (2, 5, 0) - (-3, 1, 1) = (5, 4, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{P_r Q_s} = (5, 4, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (-2, 2, 1) \\ Q_s(2, 5, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z \\ 5 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 8 + 2y - 10 + 10z + 8z - 5y + 25 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow 6x - 3y + 18z + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x - y + 6z + 1 = 0}$$

c) Determinamos las coordenadas de los puntos P y Q.

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 0 + 1 = 0 \rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow x - 1 + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \boxed{P(-1, -1, 0)}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ 0 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 0 = 2 \\ y = 5 + 0 = 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(2, 5, 0)}$$

Hallamos la ecuación de la recta t que pasa por P y Q.

$$\left. \begin{array}{l} P(-1, -1, 0) \\ Q(2, 5, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (2, 5, 0) - (-1, -1, 0) = (3, 6, 0)$$

$$t \equiv \begin{cases} \vec{v}_t = \overrightarrow{PQ} = (3, 6, 0) \\ Q(2, 5, 0) \in t \end{cases} \Rightarrow t \equiv \boxed{\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 5 + 6\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}}$$

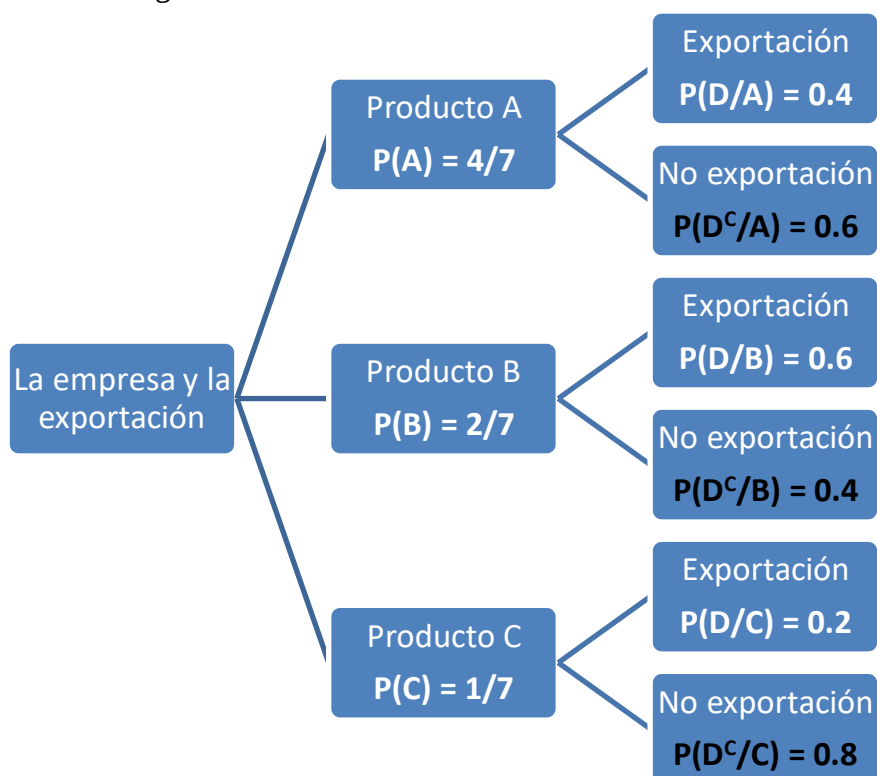
B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40% de los productos tipo A, un 60% de los productos tipo B y un 20% de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:

- (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.
- (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

Llamamos A = “ser producto A”, B = “ser producto B”, C = “ser producto C” y D = “ser producto de exportación”.

Construimos un diagrama de árbol.



- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

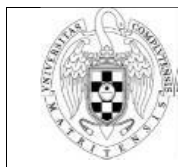
$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= \frac{4}{7} \cdot 0.4 + \frac{2}{7} \cdot 0.6 + \frac{1}{7} \cdot 0.2 = \boxed{\frac{3}{7} \approx 0.43}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{7} \cdot 0.2}{\frac{3}{7}} = \boxed{\frac{1}{15} \approx 0.067}$$

EvAU 2022 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas II



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso 2021-2022
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

- (0.5 puntos) Para $b = a^2$, determinar los valores de a para que la matriz A tenga inversa.
- (1 punto) Para $b = 4$ y $a = -2$, calcular $A^{-1} \cdot (B + 2A) - (A^{-1} + B^t) \cdot B$.
- (1 punto) Para $b = 1$, discutir el rango de la matriz $A + B$ en función del parámetro a .

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = x^3 + \cos(\pi x)$. Se pide:

- (1.25 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$ y probar, utilizando el Teorema de Bolzano, que dicha recta tangente corta a la gráfica de $f(x)$ en algún punto entre $x = -3$ y $x = -2$.
- (1.25 puntos) Calcular $\int x f(x) dx$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un tetraedro tiene por vértices los puntos $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 3)$.

- (0.75 puntos) Calcule el área de la cara dada por el triángulo de vértices A , B y C .
- (0.75 puntos) Calcule el volumen del tetraedro.
- (1 punto) Calcule una ecuación del plano π que pasa por los puntos A , B y C . Determine el punto simétrico respecto de π del punto O .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El 60% de los habitantes de una ciudad utiliza para trabajar un móvil, el 30% utiliza un ordenador portátil y el 25% no usa ninguno de los dos dispositivos.

- (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice ambos dispositivos para trabajar.
- (0.5 puntos) En esa ciudad, ¿es independiente el uso del móvil y del ordenador portátil para trabajar? Justifique la respuesta.
- (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice exclusivamente el ordenador portátil para trabajar.
- (1 punto) Si elegimos al azar 10 individuos, calcule la probabilidad de que exactamente 8 de ellos utilicen para trabajar un móvil.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Los precios de las entradas para un musical son 8 euros para los asistentes menores de 18 años, 25 euros para los adultos de menos de 60 años, y 10 euros para aquellos de al menos 60 años. Tras el concierto, se sabe que se han vendido tantas entradas de 25 euros como de las otras dos categorías juntas; y también que ha habido 9 asistentes menores de edad por cada uno de aquellos de al menos 60 años. Si la recaudación final fue de 8300 euros, calcule el número de asistentes de cada rango de edad.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f(x) = xe^x - e^x$.

- (0.5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad en $\mathbb{R}$.
- (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$ y clasifique sus extremos relativos.
- (1 punto) Sea $g(x) = -e^x$. Calcule el área del recinto acotado que está limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran la recta r y los planos π_1 , π_2 de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \pi_1 \equiv y + z = -1, \quad \pi_2 \equiv 2x - y + z = -3$$

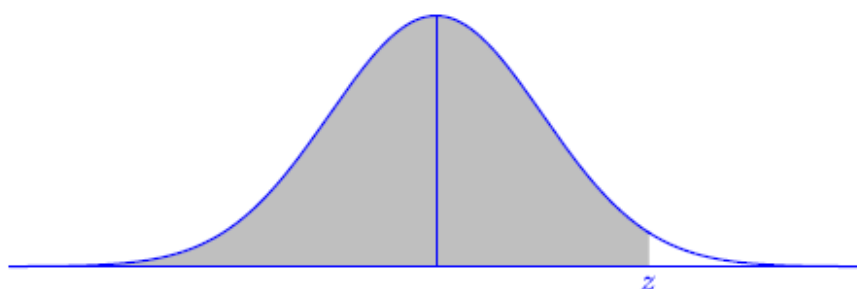
Sea s la recta determinada por la intersección de los planos π_1 y π_2 .

- (0.5 puntos) Halle el ángulo que forman los planos π_1 y π_2 .
- (1.5 puntos) Determine la posición relativa de las rectas r y s .
- (0.5 puntos) Encuentre una ecuación del plano perpendicular a s que corta a la recta r en el punto con segunda coordenada nula.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(A/B) = \frac{1}{3}$, $P(B/A) = \frac{1}{14}$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{7}{15}$, se pide:

- (1.5 puntos) Probar razonadamente que $P(A \cap B) = \frac{1}{30}$.
- (1 punto) Calcular $P(A)$ y $P(B)$.



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

a) (0.5 puntos) Para $b = a^2$, determinar los valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) (1 punto) Para $b = 4$ y $a = -2$, calcular $A^{-1} \cdot (B + 2A) - (A^{-1} + B^t) \cdot B$.

c) (1 punto) Para $b = 1$, discutir el rango de la matriz $A + B$ en función del parámetro a .

a) La matriz A tiene inversa si su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a^2 & 0 \\ a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 - a^5$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^3 - a^5 = 0 \Rightarrow a^3(1 - a^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 0 \rightarrow \boxed{a = 0} \\ 1 - a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1} \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa cuando “a” es distinto de 0, de -1 y de 1.

b) Para $b = 4$ y $a = -2$ la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 32 = 24 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}{24} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Seguimos con el cálculo de la matriz pedida.

$$B + 2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot (B + 2A) = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -20+64 & 32-40 & 0 \\ -40+32 & 64-20 & 0 \\ 0 & 0 & 72 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot (B + 2A) = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 44 & -8 & 0 \\ -8 & 44 & 0 \\ 0 & 0 & 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/6 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 11/6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} + B^t = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/6 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & -5/6 & 0 \\ 0 & 0 & -5/2 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1} + B^t) \cdot B = \begin{pmatrix} -5/6 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & -5/6 & 0 \\ 0 & 0 & -5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot (B + 2A) - (A^{-1} + B^t) \cdot B = \begin{pmatrix} 11/6 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 11/6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5/6 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} \cdot (B + 2A) - (A^{-1} + B^t) \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

c) Para $b = 1$ la matriz $A + B$ es $A + B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$

¿El rango es 3?

$$|A + B| = \begin{vmatrix} a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a-2) - (a-2) = (a-2)[(a-1)^2 - 1] =$$

$$= (a-2)[a^2 - 2a + 1 - 1] = (a-2)[a^2 - 2a] = a(a-2)(a-2) = a(a-2)^2$$

$$|A+B|=0 \Rightarrow a(a-2)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$$

Se nos plantean tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si “a” es distinto de 0 y de 2.

En este caso el determinante de A+B es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. Si $a = 0$.

En este caso el determinante de A+B es nulo y su rango no es 3.

La matriz A+B queda $A+B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. La matriz tiene rango 2, pues si quitamos

la fila y columna 1ª nos queda un menor de orden 2 con determinante no nulo $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

CASO 3. Si $a = 2$.

En este caso el determinante de A+B es nulo y su rango no es 3.

La matriz A+B queda $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz tiene rango 1, pues tiene una fila con

todos los elementos nulos y la fila 1ª y 2ª son iguales.

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$ el rango de A+B es 3. Si $a = 0$ el rango es 2 y si $a = 2$ el rango es 1.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = x^3 + \cos(\pi x)$. Se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x=1$ y probar, utilizando el Teorema de Bolzano, que dicha recta tangente corta a la gráfica de $f(x)$ en algún punto entre $x=-3$ y $x=-2$.
- b) (1.25 puntos) Calcular $\int x f(x) dx$.

- a) Calculamos la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x=1$.

$$f(x) = x^3 + \cos(\pi x) \Rightarrow f(1) = 1^3 + \cos(\pi) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - \pi \operatorname{sen}(\pi x) \Rightarrow f'(1) = 3 \cdot 1^2 - \pi \operatorname{sen}(\pi) = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f'(1) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 3(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 3x - 3}$$

La recta tangente tiene ecuación $y = 3x - 3$.

Consideramos la función $h(x) = f(x) - (3x - 3)$ y aplicamos a $h(x)$ el Teorema de Bolzano en $[-3, -2]$: $h(x)$ es continua en $[-3, -2]$ (propiedades de las funciones continuas); además,

$$h(-3) = f(-3) - (-9 - 3) = (-3)^3 + \cos(-3\pi) + 12 = -27 - 1 + 12 = -16 < 0 \text{ y}$$

$h(-2) = f(-2) - (-6 - 3) = (-2)^3 + \cos(-2\pi) + 9 = -8 + 1 + 9 = 2 > 0$, por lo que aplicando el teorema de Bolzano existe un punto $c \in (-3, -2)$ en el que $h(c) = 0$. Esto implica que la función y la recta tangente coinciden en $x = c$.

- b) Calculamos la integral usando integración por partes.

$$\int x f(x) dx = \int x (x^3 + \cos(\pi x)) dx = \int x^4 + x \cos(\pi x) dx = \frac{x^5}{5} + \int x \cos(\pi x) dx = \dots$$

$$\int x \cos(\pi x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos(\pi x) dx \Rightarrow v = \int \cos(\pi x) dx = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi x) \end{array} \right\} =$$

$$= x \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi x) - \int \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi x) dx = \frac{x}{\pi} \operatorname{sen}(\pi x) - \frac{1}{\pi} \int \operatorname{sen}(\pi x) dx =$$

$$= \frac{x}{\pi} \operatorname{sen}(\pi x) - \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right) = \frac{x}{\pi} \operatorname{sen}(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi x)$$

$$\dots = \boxed{\frac{x^5}{5} + \frac{x}{\pi} \operatorname{sen}(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi x) + K}$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un tetraedro tiene por vértices los puntos O (0, 0, 0), A (1, 0, 0), B (0, 2, 0) y C (0, 0, 3).

- a) (0.75 puntos) Calcule el área de la cara dada por el triángulo de vértices A, B y C.
 b) (0.75 puntos) Calcule el volumen del tetraedro.
 c) (1 punto) Calcule una ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C. Determine el punto simétrico respecto de π del punto O.

- a) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del vector que se obtiene en el producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, 3) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6i + 2k + 3j = (6, 3, 2)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}}{2} = \frac{7}{2} = \boxed{3.5 u^2}$$

- b) El volumen del tetraedro OABC es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (1, 0, 0) \\ \overrightarrow{OB} = (0, 2, 0) \\ \overrightarrow{OC} = (0, 0, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

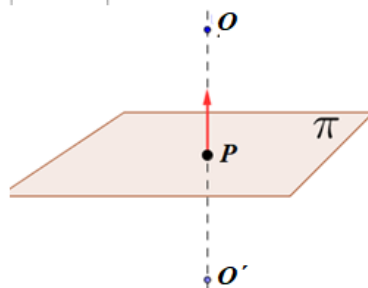
$$\text{Volumen tetraedro OABC} = \frac{[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]}{6} = \frac{6}{6} = \boxed{1 u^3}$$

- c) El plano π que pasa por los puntos A, B y C tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0, 0, 3) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 3) \\ A(1, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x - 6 + 2z + 3y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0}$$

Nos piden hallar el punto O' simétrico de O respecto del plano π



Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto O. Esta recta tendrá como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (6, 3, 2)$$

$$r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = \vec{n} = (6, 3, 2) \\ O(0, 0, 0) \in r \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto P de corte entre la recta r y el plano π .

$$r \equiv \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36\lambda + 9\lambda + 4\lambda - 6 = 0 \\ \pi \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow 49\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{49} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{36}{49} \\ y = \frac{18}{49} \\ z = \frac{12}{49} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right)$$

Las coordenadas del punto O' será el resultado de sumar al punto P el vector $\overrightarrow{OP}$.

$$\begin{matrix} P\left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right) \\ O(0, 0, 0) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right) - (0, 0, 0) = \left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right)$$

$$O' = P + \overrightarrow{OP} = \left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right) + \left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right) = \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49}\right)$$

Las coordenadas del punto O' simétrico de O respecto del plano π son $O' = \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49}\right)$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El 60% de los habitantes de una ciudad utiliza para trabajar un móvil, el 30% utiliza un ordenador portátil y el 25% no usa ninguno de los dos dispositivos.

- (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice ambos dispositivos para trabajar.
- (0.5 puntos) En esa ciudad, ¿es independiente el uso del móvil y del ordenador portátil para trabajar? Justifique la respuesta.
- (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice exclusivamente el ordenador portátil para trabajar.
- (1 punto) Si elegimos al azar 10 individuos, calcule la probabilidad de que exactamente 8 de ellos utilicen para trabajar un móvil.

Realizamos una tabla de contingencia con los datos del problema.

	Usan ordenador (O)	No usan ordenador ($\bar{O}$)	
Usan móvil (M)			60
No usan móvil ($\bar{M}$)		25	
	30		100

Completamos la tabla.

	Usan ordenador (O)	No usan ordenador ($\bar{O}$)	
Usan móvil (M)	15	45	60
No usan móvil ($\bar{M}$)	15	25	40
	30	70	100

Con estos datos y la regla de Laplace respondemos a las preguntas.

a) Nos piden calcular $P(M \cap O)$. Observando los datos de la tabla $P(M \cap O) = \frac{15}{100} = \boxed{0.15}$

b) Comprobamos si $P(M \cap O) = P(M)P(O)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(M) = \frac{60}{100} \\ P(O) = \frac{30}{100} \end{array} \right\} \Rightarrow P(M)P(O) = \frac{60}{100} \cdot \frac{30}{100} = \frac{1800}{10000} = \frac{18}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(M \cap O) = \frac{15}{100} \neq \frac{18}{100} = P(M)P(O)$$

El uso del móvil y del ordenador portátil para trabajar no son independientes.

- c) Si alguien utiliza exclusivamente el ordenador portátil para trabajar significa que utiliza el ordenador y no utiliza el móvil ($O \cap \bar{M}$).

$$P(O \cap \bar{M}) = \frac{15}{100} = \boxed{0.15}$$

- d) Utilizamos la variable binomial X = Número de individuos que usan el móvil para trabajar de un grupo de 10.

El número de repeticiones es $n = 10$ y la probabilidad de éxito es $p = P(M) = \frac{60}{100} = 0.6$.

$$X = B(10, 0.6)$$

Nos piden calcular $P(X = 8)$.

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} 0.6^8 \cdot 0.4^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} 0.6^8 \cdot 0.4^2 \simeq \boxed{0.121}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Los precios de las entradas para un musical son 8 euros para los asistentes menores de 18 años, 25 euros para los adultos de menos de 60 años, y 10 euros para aquellos de al menos 60 años. Tras el concierto, se sabe que se han vendido tantas entradas de 25 euros como de las otras dos categorías juntas; y también que ha habido 9 asistentes menores de edad por cada uno de aquellos de al menos 60 años. Si la recaudación final fue de 8300 euros, calcule el número de asistentes de cada rango de edad.

Llamamos x , y , z al número de entradas vendidas a menores de 18 años, adultos de menos de 60 años y adultos de al menos 60 años, respectivamente.

“La recaudación final fue de 8300 euros” $\rightarrow 8x + 25y + 10z = 8300$

“Se han vendido tantas entradas de 25 euros (y) como de las otras dos categorías juntas ($y + z$)” $\rightarrow y = x + z$

“Ha habido 9 asistentes menores de edad por cada uno de aquellos de al menos 60 años”
 $\rightarrow$ Los asistentes menores de edad son 9 veces los asistentes de al menos 60 años $\rightarrow x = 9z$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 8x + 25y + 10z = 8300 \\ y = x + z \\ x = 9z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8(9z) + 25y + 10z = 8300 \\ y = 9z + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 25y + 82z = 8300 \\ y = 10z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25(10z) + 82z = 8300 \Rightarrow 332z = 8300 \Rightarrow z = \frac{8300}{332} = 25 \Rightarrow \begin{cases} y = 10 \cdot 25 = 250 \\ x = 9 \cdot 25 = 225 \end{cases}$$

Se han vendido 225 entradas a menores de 18 años, 250 a adultos de menos de 60 años y 25 a personas con al menos 60 años.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f(x) = xe^x - e^x$.

- a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad en $\mathbb{R}$.
 b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$ y clasifique sus extremos relativos.
 c) (1 punto) Sea $g(x) = -e^x$. Calcule el área del recinto acotado que está limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

a) $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ (por ser suma y producto de funciones continuas y derivables)

b) Utilizamos la derivada.

$$f(x) = xe^x - e^x \Rightarrow f'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow xe^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^x = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

La función tiene un punto crítico en $x = 0$.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 0$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = -e^{-1} \approx -0.36 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = e^1 \approx 2.71 > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$. Como $f(x) = 0 \cdot e^0 - e^0 = -1$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(0, -1)$.

- c) Averiguamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones, por si existiera en el intervalo $[0, 1]$ un punto de corte.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow xe^x - e^x = -e^x \Rightarrow xe^x = 0 \Rightarrow x = 0$$

El punto de corte está en el extremo del intervalo $[0, 1]$ por lo que el área pedida es la integral definida de la diferencia de las funciones entre 0 y 1. Falta saber que función es mayor en dicho intervalo ($f(0.5) = 0.5e^{0.5} - e^{0.5} = -0.82 < -0.61 = -e^{0.5} = g(0.5)$).

$$\text{Área} = \int_0^1 g(x) - f(x) dx = \int_0^1 xe^x - e^x - (-e^x) dx = \int_0^1 xe^x dx = \dots$$

Calculamos primero la integral indefinida.

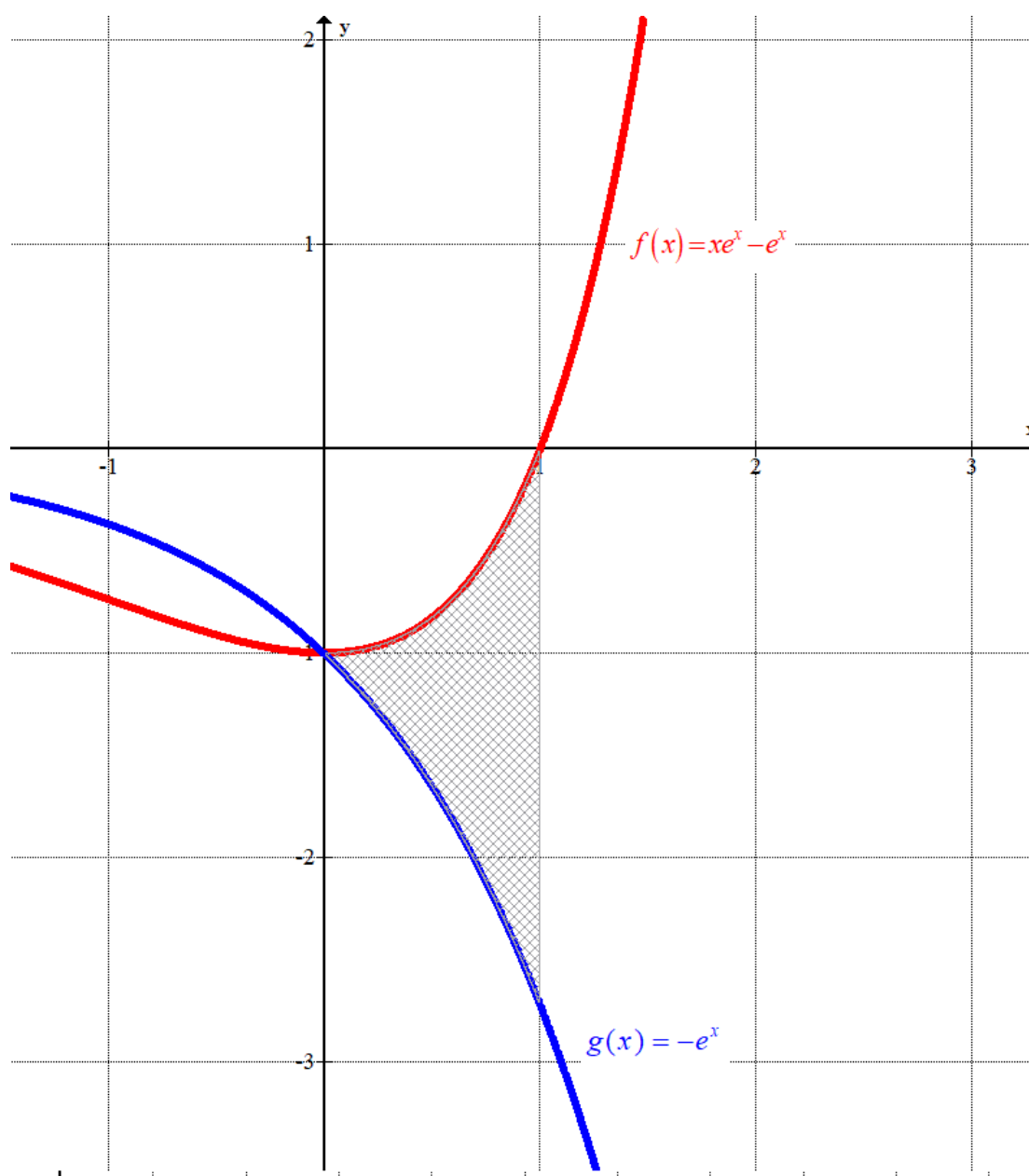
$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + K$$

Seguimos con el cálculo de la integral definida y el área.

$$\dots = \int_0^1 xe^x dx = [xe^x - e^x]_0^1 = [1 \cdot e^1 - e^1] - [0 \cdot e^0 - e^0] = \boxed{1 u^2}$$

El área del recinto acotado que está limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, 1]$ tiene un valor de $1 u^2$.

No se pide en el ejercicio, pero dibujamos las funciones y el recinto acotado del cual hemos hallado el área.



B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran la recta r y los planos π_1 , π_2 , de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \pi_1 \equiv y + z = -1, \quad \pi_2 \equiv 2x - y + z = -3$$

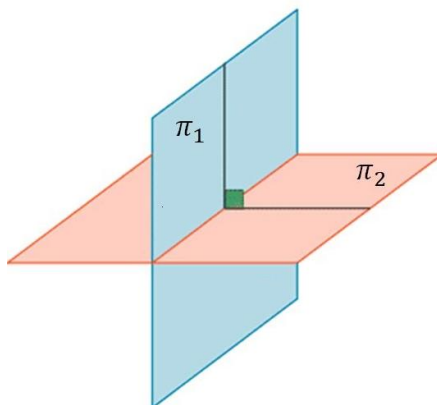
Sea s la recta determinada por la intersección de los planos π_1 y π_2 .

- a) (0.5 puntos) Halle el ángulo que forman los planos π_1 y π_2 .
 b) (1.5 puntos) Determine la posición relativa de las rectas r y s .
 c) (0.5 puntos) Encuentre una ecuación del plano perpendicular a s que corta a la recta r en el punto con segunda coordenada nula.

- a) El ángulo que forman dos planos es el mismo que el que forman sus respectivos vectores normales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv y + z = -1 \rightarrow \vec{n}_1 = (0, 1, 1) \\ \pi_2 \equiv 2x - y + z = -3 \rightarrow \vec{n}_2 = (2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (0, 1, 1) \cdot (2, -1, 1) = -1 + 1 = 0$$

Al ser su producto escalar 0 los vectores normales son perpendiculares (90°) y por tanto los planos son perpendiculares. El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es de 90° .



- b) Hallamos un vector director y un punto de la recta r .

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 2, 1) \\ P_r(2, 0, 2) \end{cases}$$

Hallamos un vector director y un punto de la recta s .

$$\begin{aligned} s &\equiv \begin{cases} y + z = -1 \\ 2x - y + z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 - z \\ 2x - y + z = -3 \end{cases} \Rightarrow 2x + 1 + z + z = -3 \Rightarrow 2x = -4 - 2z \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = -2 - z \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -2 - t \\ y = -1 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (-1, -1, 1) \\ Q_s(-2, -1, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas ni son coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (-1, 2, 1) \\ \vec{v}_s = (-1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{-1} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{1}{1}$$

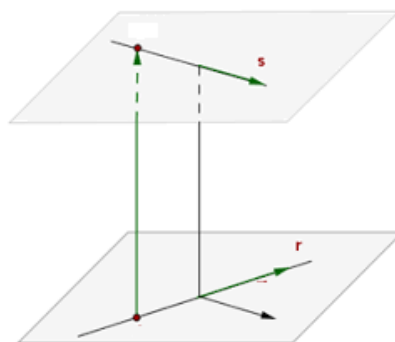
Las rectas se cortan o cruzan.

Averiguamos si el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ es nulo o no.

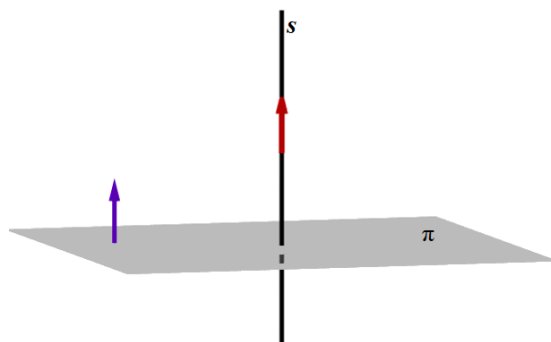
$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (-2, -1, 0) - (2, 0, 2) = (-4, -1, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (-1, 2, 1) \\ \vec{v}_s = (-1, -1, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (-4, -1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 8 + 1 - 4 - 4 - 1 = -18 \neq 0$$

Al ser no nulo el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ las rectas r y s se cruzan.



c) Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a s .



El vector normal del plano es el vector director de la recta s .

$$\vec{n} = \vec{v}_s = (-1, -1, 1) \Rightarrow \pi \equiv -x - y + z + D = 0$$

Hallamos el punto de corte del plano π y la recta r .

$$r \equiv \left. \begin{array}{l} \pi \equiv -x - y + z + D = 0 \\ \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + \lambda - 2\lambda + 2 + \lambda + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

Para que la recta r y el plano π se corten debe ser $D = 0$.

El plano debe ser $\pi \equiv -x - y + z = 0$.

Este plano contiene la recta r . Buscamos un punto de la recta r con segunda coordenada nula.

$$r \equiv \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{P(2, 0, 2)}$$

El plano buscado es $\pi \equiv -x - y + z = 0$ que es perpendicular a la recta s y contiene a la recta r , y en particular coincide con ella en el punto $P(2, 0, 2)$.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(A/B) = \frac{1}{3}$, $P(B/A) = \frac{1}{14}$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{7}{15}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Probar razonadamente que $P(A \cap B) = \frac{1}{30}$.

b) (1 punto) Calcular $P(A)$ y $P(B)$.

a) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(B) = 3P(A \cap B)$$

$$P(B/A) = \frac{1}{14} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{14} \Rightarrow P(A) = 14P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{7}{15} \Rightarrow P(\overline{A \cup B}) = \frac{7}{15} \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos A y B.

$$\left. \begin{array}{l} P(B) = 3P(A \cap B) \\ P(A) = 14P(A \cap B) \\ P(A \cup B) = \frac{8}{15} \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{8}{15} = 3P(A \cap B) + 14P(A \cap B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8}{15} = 16P(A \cap B) \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{8}{15 \cdot 16} = \frac{1}{30}}$$

b) De lo visto en el apartado a) tenemos que $P(A) = 14P(A \cap B) = \frac{14}{30} = \boxed{\frac{7}{15}}$.

$$\text{También tenemos que } P(B) = 3P(A \cap B) = \frac{3}{30} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

a) Cambiamos las probabilidades a valores absolutos.

Tomamos una población de $3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 210$ elementos.

Tenemos que $P(A/B) = \frac{1}{3} = \frac{70}{210}$; $P(B/A) = \frac{1}{14} = \frac{15}{210}$; $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{7}{15} = \frac{98}{210}$

Y además

$$P(A/B) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(B) = 3P(A \cap B)$$

$$P(B/A) = \frac{1}{14} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{14} \Rightarrow P(A) = 14P(A \cap B)$$

Llamamos x al número de elementos de $A \cap B$ y construimos una tabla de contingencia.

	B	$\bar{B}$	
A	x		$14x$
$\bar{A}$		98	
	$3x$		210

Completamos la tabla

	B	$\bar{B}$	
A	x	$13x$	$14x$
$\bar{A}$	$2x$	98	$98+2x$
	$3x$	$98+13x$	210

Debe cumplirse que $3x + 98 + 13x = 210 \rightarrow 16x = 112 \rightarrow x = \frac{112}{16} = 7$.

Por lo que $P(A \cap B) = \frac{7}{210} = \boxed{\frac{1}{30}}$

b) En las expresiones obtenidas sustituimos el valor de x .

$$P(B) = 3x = 3 \frac{1}{30} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

$$P(A) = 14x = 14 \frac{1}{30} = \boxed{\frac{7}{15}}$$

EvAU 2022 Ordinaria Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2021-2022 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m :

$$\left. \begin{array}{l} x - 2my + z = 1 \\ mx + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m .

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m = \frac{1}{2}$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (0.5 puntos) Estudie si $f(x)$ presenta algún tipo de simetría par o impar.

c) (1 punto) Calcule la siguiente integral: $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1, 1, 1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$.

a) (0.5 puntos) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.

b) (1.25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.

c) (0.75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27.7 %. Se reunieron 10 de estos consejeros.

a) (0.75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.

b) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.

c) (1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35% de representación femenina.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio Pablo recibe 420 euros más que Alicia, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

- (0.5 puntos) Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 1]$
- (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.
- (1 punto) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1, 1]$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$ y el punto $P(0, 1, 0)$.

- (0.5 puntos) Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.
- (0.75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1 .
- (1.25 puntos) Calcule una ecuación de la recta, r_2 , que pase por P y sea paralela a r_1 . Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2 .

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.
- (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.
- (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m :

$$\left. \begin{aligned} x - 2my + z &= 1 \\ mx + 2y - z &= -1 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m .

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m = \frac{1}{2}$

a) Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2m - m - 2 + 2m^2 - 1 = 2m^2 + m - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m^2 + m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{-1+3}{4} = \boxed{\frac{1}{2} = m} \\ \frac{-1-3}{4} = \boxed{-1 = m} \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m \neq \frac{1}{2}$ y $m \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad 2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Fila } 3^a + 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -12 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 12 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la fila 3^a es nula el rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $m = \frac{1}{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad -4 \quad 2 \quad 2 \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad -5 \quad 3 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $m = \frac{1}{2}$ el sistema es compatible indeterminado.

Obtenemos las soluciones a partir del sistema equivalente que hemos obtenido en el apartado a).

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ -5y + 3z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ -5y = 3 - 3z \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ y = -\frac{3}{5} + \frac{3}{5}z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{3}{5} - \frac{3}{5}z + z = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{5}z - z \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}z}$$

Las soluciones del sistema son $x = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}t$; $y = -\frac{3}{5} + \frac{3}{5}t$; $z = t$; $t \in \mathbb{R}$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (0.5 puntos) Estudie si $f(x)$ presenta algún tipo de simetría par o impar.

c) (1 punto) Calcule la siguiente integral: $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx$.

a) ¿La función es continua en $x = 0$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 e^{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \frac{1}{e^{1/x^2}} = 0^3 \frac{1}{e^{+\infty}} = 0 \cdot \frac{1}{e^{+\infty}} = 0 \cdot 0 = 0 = f(0)$$

La función es continua.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ y su derivada es:

$$f(x) = x^3 e^{-1/x^2} = x^3 e^{-x^{-2}} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 e^{-1/x^2} + x^3 e^{-1/x^2} \frac{2}{x^3} = 3x^2 e^{-1/x^2} + 2e^{-1/x^2} \quad \text{si } x \neq 0$$

¿La función es derivable en $x = 0$?

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 e^{-1/x^2} + 2e^{-1/x^2} = 3 \cdot 0^2 e^{-1/0^2} + 2e^{-1/0^2} = 0 \cdot e^{-\infty} + 2e^{-\infty} = 0 + 0 = 0$$

La función es derivable en $x = 0$.

La función es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) Vemos la expresión de $f(-x)$ y lo comparamos con $f(x)$.

$$f(-x) = (-x)^3 e^{-1/(-x)^2} = -x^3 e^{-1/x^2} = -f(x)$$

La función presenta simetría impar.

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int \frac{f(x)}{x^6} dx &= \int \frac{x^3 e^{-1/x^2}}{x^6} dx = \int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ -\frac{1}{x^2} = -x^{-2} = t \Rightarrow 2x^{-3} dx = dt \\ \frac{2}{x^3} dx = dt \Rightarrow dx = \frac{x^3}{2} dt \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{e^t}{x^3} \frac{x^3}{2} dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^{-1/x^2} + K \end{aligned}$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida.

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx = \left[\frac{1}{2} e^{-1/x^2} \right]_1^2 = \left[\frac{1}{2} e^{-1/2^2} \right] - \left[\frac{1}{2} e^{-1/1^2} \right] = \left[\frac{1}{2e^{1/4}} - \frac{1}{2e} \right]$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1, 1, 1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$.

- a) (0.5 puntos) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.
 b) (1.25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.
 c) (0.75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r .

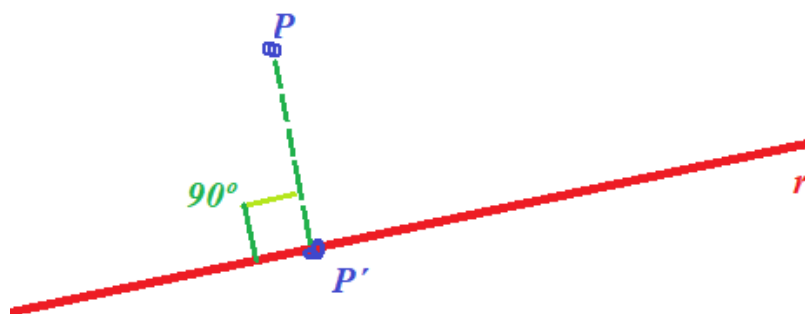
a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta y un vector director.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = 10 - 2x \\ -z = -90 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -10 + 2x \\ z = 90 + x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -10 + 2t \\ z = 90 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, -10, 90) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 1) \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte de la recta r con el plano $z = 0$

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -10 + 2t \\ z = 90 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -10 + 2t \\ 0 = 90 + t \rightarrow t = -90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -90 \\ y = -10 - 180 = -190 \end{cases} \Rightarrow Q(-90, -190, 0)$$

b) El punto P' que se busca es el del dibujo.



Obtenemos el plano π perpendicular a la recta que pasa por P . El punto de corte de recta y plano es el punto P' .

Hallamos la ecuación del plano π .

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 2, 1) \\ P(1, 1, 1) \in \pi \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{aligned} \pi : x + 2y + z + D = 0 \\ P(1, 1, 1) \in \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow D = -4 \Rightarrow \pi : x + 2y + z - 4 = 0 \end{aligned}$$

Hallamos el punto P' de intersección de plano y recta.

$$\pi : x + 2y + z - 4 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = -10 + 2t \\ z = 90 + t \end{array} \right\} \Rightarrow t + 2(-10 + 2t) + 90 + t - 4 = 0 \Rightarrow t - 20 + 4t + 90 + t - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6t + 66 = 0 \Rightarrow 6t = -66 \Rightarrow t = -11 \Rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = -10 - 22 = -32 \\ z = 90 - 11 = 79 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(-11, -32, 79)}$$

c) El plano $x + y = 2$ tiene como vector normal $\vec{n} = (1, 1, 0)$.

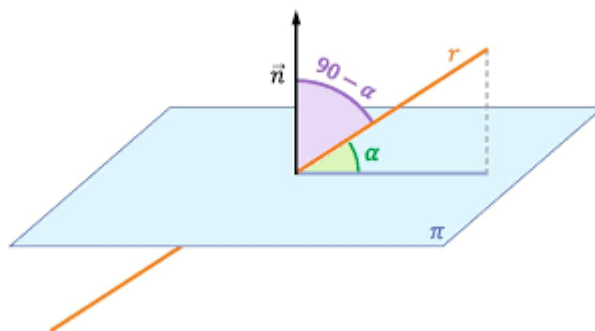
La recta $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -10 + 2t \\ z = 90 + t \end{cases}$ tiene como vector director $\vec{v}_r = (1, 2, 1)$.

Hallamos el ángulo formado entre el vector normal del plano y el director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 2, 1) \\ \vec{n} = (1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{n}) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{n}}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(1, 2, 1)(1, 1, 0)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1 + 2}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{v}_r, \vec{n}) = 30^\circ$$

El ángulo que forman recta y plano es $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.



A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27.7 %. Se reunieron 10 de estos consejeros.

- (0.75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.
- (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.
- (1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35% de representación femenina.

Es un problema que resolvemos utilizando la distribución binomial.

Número de repeticiones = $n = 10$. Probabilidad de éxito (sea mujer) = $p = 0.277$.

$q = 1 - 0.277 = 0.723$

X = Número de mujeres en un grupo de 10. $X = B(10, 0.277)$

- a) Nos piden calcular $P(X = 5)$.

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot 0.277^5 \cdot 0.723^5 = 252 \cdot 0.277^5 \cdot 0.723^5 = \boxed{0.0812}$$

- b) Que “haya al menos un hombre” es lo mismo que “Haya 9 mujeres o menos”.

Nos piden calcular $P(X \leq 9)$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 9) &= \left\{ P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 9) \right\} = 1 - P(X = 10) = \\ &= 1 - \binom{10}{10} \cdot 0.277^{10} \cdot 0.723^0 = 1 - 0.277^{10} \approx \boxed{0.999997} \end{aligned}$$

- c) Pasamos a una binomial $X = B(200, 0.277)$.

El 35 % de 200 consejeros son $0.35 \cdot 200 = 70$.

Como $\left. \begin{array}{l} np = 200 \cdot 0.277 = 55.4 > 5 \\ nq = 200 \cdot 0.723 = 144.6 > 5 \end{array} \right\}$ entonces la binomial se puede aproximar con una normal

de media $\mu = np = 55.4$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.277 \cdot 0.723} \approx 6.329$

La distribución binomial $X = B(200, 0.277)$ se aproxima con una normal $Y = N(55.4, 6.329)$.

Nos piden calcular $P(X \geq 70)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 70) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 69.5) = \{\text{Tipificamos}\} = \\ &= P\left(Z \geq \frac{69.5 - 55.4}{6.329}\right) = P(Z \geq 2.23) = 1 - P(Z \leq 2.23) = \\ &= \{\text{Miramos en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 0.9871 = \boxed{0.0129} \end{aligned}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio Pablo recibe 420 euros más que Alicia, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

Llamamos “x” a la edad de Pablo, “y” a la edad de Alejandro y “z” a la edad de Alicia.

“La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia” $\rightarrow x + y = 2z + 3$

“La edad de los tres primos juntos es de 45 años” $\rightarrow x + y + z = 45$

En el reparto del dinero tocan a $9450 / 45 = 210$ euros por año.

“En el reparto del premio Pablo recibe 420 euros más que Alicia” como $420 / 210 = 2$, esto significa que Pablo tiene 2 años más que Alicia $\rightarrow x = z + 2$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2z + 3 \\ x + y + z = 45 \\ x = z + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z + 2 + y = 2z + 3 \\ z + 2 + y + z = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = z + 1 \\ y = -2z + 43 \end{array} \right\} \Rightarrow z + 1 = -2z + 43 \Rightarrow 3z = 42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{42}{3} = 14} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 14 + 1 = 15} \\ \boxed{x = 14 + 2 = 16} \end{cases}$$

Pablo tiene 16 años, Alejandro 15 y Alicia 14.

Pablo recibe $16 \cdot 210 = 3360$ €, Alejandro $15 \cdot 210 = 3150$ € y Alicia $14 \cdot 210 = 2940$ €

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

- a) (0.5 puntos) Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1,1]$
- b) (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.
- c) (1 punto) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1,1]$.

a) La función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ es continua en el intervalo $[-1,1]$. Es un cociente de polinomios, pero el denominador no se anula para ningún valor de x .

La función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo:

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2} < 0 \\ f(1) &= \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2} > 0 \end{aligned} \right\}$$

Se cumplen las dos condiciones necesarias para poder aplicar el teorema de Bolzano.

b) Hallamos la derivada y la igualamos a cero, en busca de los puntos críticos.

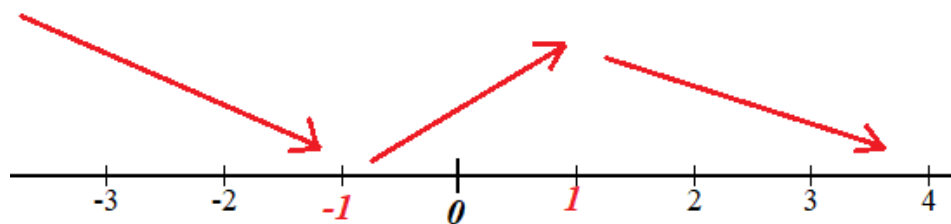
$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores hallados.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$, la derivada vale $f'(-2) = \frac{1 - (-2)^2}{((-2)^2 + 1)^2} = \frac{-3}{25} < 0$. La función decrece en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$, la derivada vale $f'(0) = \frac{1 - 0^2}{(0^2 + 1)^2} = 1 > 0$. La función crece en $(-1, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$, la derivada vale $f'(2) = \frac{1 - 2^2}{(2^2 + 1)^2} = \frac{-3}{25} < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un mínimo relativo en $x = -1$ y un máximo relativo en $x = 1$.

Como $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = \frac{-1}{2}$ y $f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$ el mínimo relativo tiene coordenadas

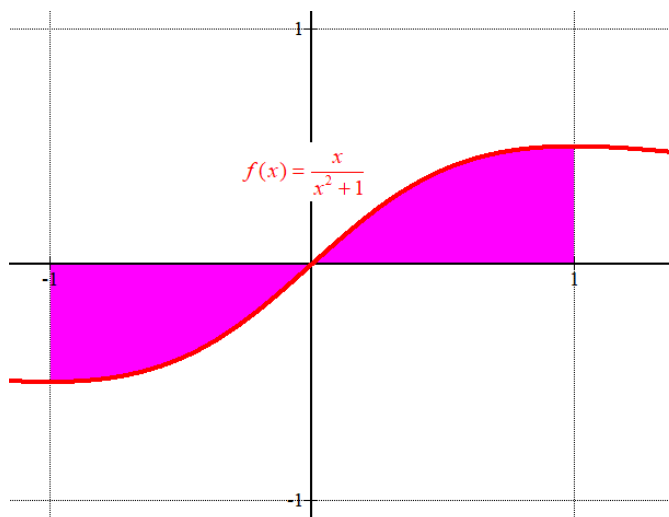
$\left(-1, \frac{-1}{2}\right)$ y el máximo relativo $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

c) Averiguamos si la función corta el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \in [-1, 1]}$$

El recinto del cual queremos hallar su área lo dividimos en dos partes.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-1}^0 f(x) dx \right| + \left| \int_0^1 f(x) dx \right| = \left| \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2 + 1} dx \right| + \left| \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2 + 1} dx \right| + \left| \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx \right| = \left| \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_0^1 \right| = \\ &= \left| \left[\frac{1}{2} \ln(0^2 + 1) \right] - \left[\frac{1}{2} \ln((-1)^2 + 1) \right] \right| + \left| \left[\frac{1}{2} \ln(1^2 + 1) \right] - \left[\frac{1}{2} \ln(0^2 + 1) \right] \right| = \\ &= \left| 0 - \frac{1}{2} \ln 2 \right| + \left| \frac{1}{2} \ln 2 \right| = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \boxed{\ln 2 \approx 0.693 u^2} \end{aligned}$$



B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$ y el punto $P(0, 1, 0)$.

- a) (0.5 puntos) Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.
 b) (0.75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1 .
 c) (1.25 puntos) Calcule una ecuación de la recta, r_2 , que pase por P y sea paralela a r_1 . Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2 .

a) Basta comprobar que dos puntos de la recta pertenecen al plano.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow Q_1(1, 1, -1) \\ \lambda = 1 \Rightarrow R_1(2, 0, -1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} Q_1(1, 1, -1) \in \pi? \\ \pi \equiv x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 1 + 1 - 1 = 1? \quad \text{!!!Cierto!!!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} R_1(2, 0, -1) \in \pi? \\ \pi \equiv x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 + 0 - 1 = 1? \quad \text{!!!Cierto!!!}$$

Como los dos puntos Q y R pertenecen al plano la recta está contenida en el plano.

¿El punto P pertenece al plano?

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P(0, 1, 0) \in \pi? \\ \pi \equiv x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 0 + 1 + 0 = 1? \quad \text{!!!Cierto!!!}$$

El punto P pertenece al plano.

- b) Como la recta pedida debe estar contenida en el plano debe ser perpendicular al vector normal del plano y, a su vez, nos piden que sea perpendicular a r_1 por lo que nos servirá como vector director de la recta pedida el producto vectorial del vector normal del plano y el director de la recta r_1 .

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1) \\ r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_1 = (1, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_s = \vec{n} \times \vec{u}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = j - k - k + i = (1, 1, -2)$$

Hallamos la ecuación de la recta pedida.

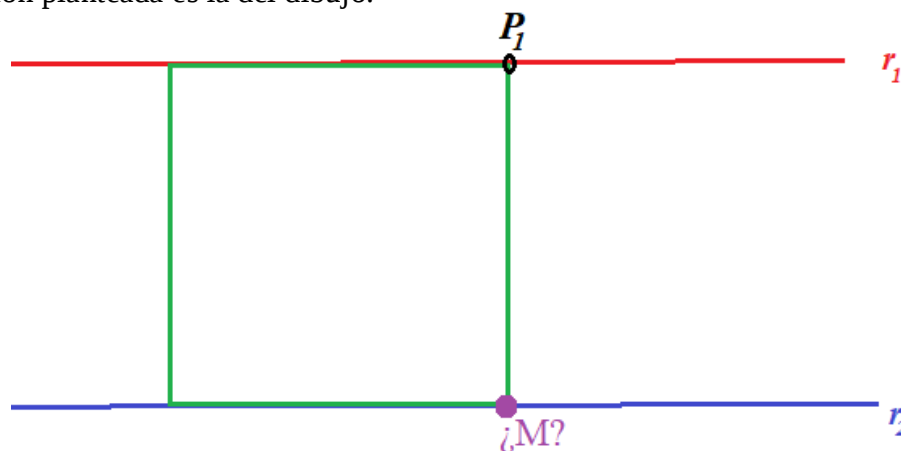
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 1, -2) \\ P(0, 1, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{s: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}}$$

c) La recta r_2 paralela a r_1 tiene su mismo vector director.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_1 = (1, -1, 0)$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} \vec{u}_2 = \vec{u}_1 = (1, -1, 0) \\ P(0, 1, 0) \in r_2 \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

La situación planteada es la del dibujo.



Basta hallar la distancia entre las dos rectas para hallar el área pedida.

Para calcular esta distancia tomamos un punto $P_1(1, 1, -1)$ de la recta r_1 , calculamos el plano perpendicular a la recta que pasa por P_1 , luego hallamos el punto M de corte de la recta r_2 y el plano. La distancia entre las dos rectas será la distancia entre P_1 y M .

El plano perpendicular a r_1 tiene como vector normal a $\vec{u}_1 = (1, -1, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{u}_1 = (1, -1, 0) \\ P_1(1, 1, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - y + D = 0 \\ P_1(1, 1, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y = 0$$

Hallamos el punto M de intersección del plano y r_2

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - y = 0 \\ r_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda - (1 - \lambda) = 0 \Rightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)}$$

Calculamos la distancia entre las dos rectas.

$$d(r_1, r_2) = d(P_1, M) = |\overrightarrow{P_1M}| = \dots$$

$$\overrightarrow{P_1M} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - (1, 1, -1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\dots = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Hemos obtenido el valor de la longitud del lado del cuadrado.

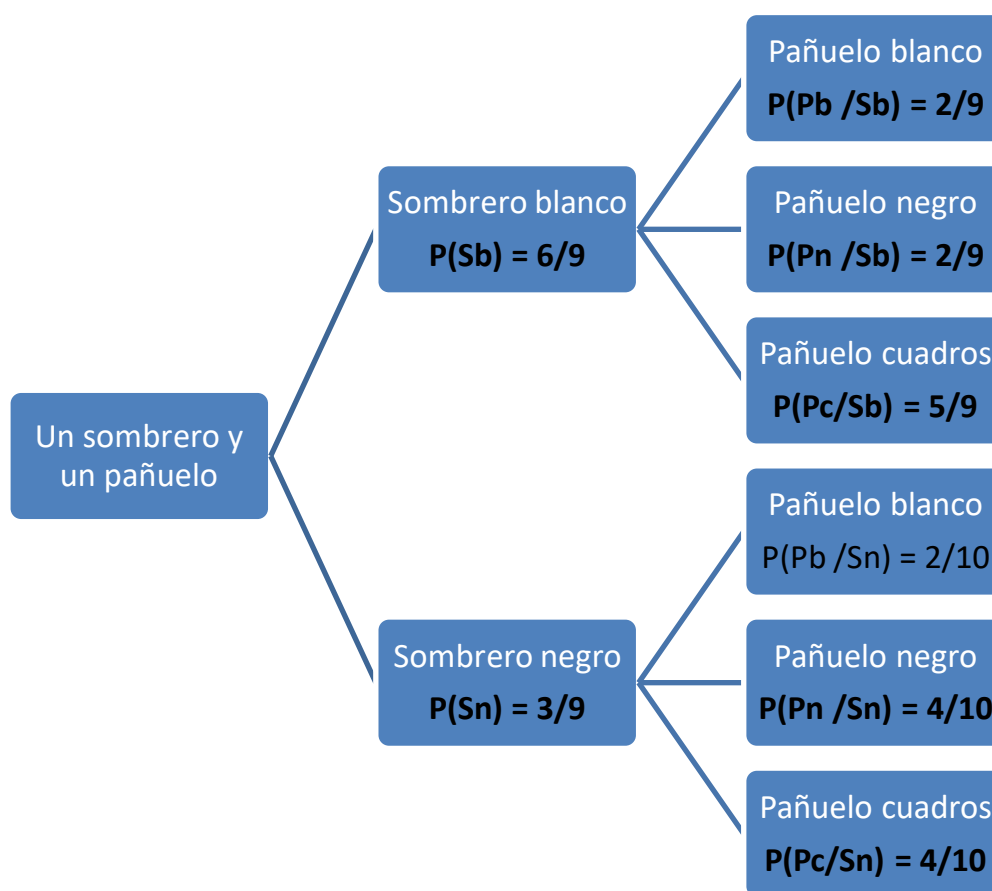
$$\text{El área del cuadrado es } \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = \frac{3}{2}u^2$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.
- (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.
- (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

Realizamos un diagrama de árbol.



He llamado Sb al suceso “Elegir sombrero blanco”, Sn a “Elegir sombrero negro”, Pb a “Elegir pañuelo blanco”, Pn a “Elegir pañuelo negro” y Pc a “Elegir pañuelo a cuadros”.

- Interpreto que el suceso del cual se pide calcular la probabilidad es el suceso “Elegir un pañuelo de cuadros o de color distinto al sombrero”.

$$\begin{aligned}
 &P(\text{Elegir pañuelo con un color que no sea del sombrero}) = \\
 &= P(Sb) \cdot P(Pn / Sb) + P(Sb) \cdot P(Pc / Sb) + P(Sn) \cdot P(Pb / Sn) + P(Sn) \cdot P(Pc / Sn) = \\
 &= \frac{6}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{10} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{10} = \frac{42}{81} + \frac{18}{90} = \frac{97}{135} \approx 0.719
 \end{aligned}$$

- b) Como el suceso planteado ocurre de numerosas formas calculamos la probabilidad pedida haciendo uso del suceso contrario.

$$\begin{aligned} P(\text{Al menos uno de los complementos tiene algo de color negro}) &= \\ &= 1 - P(\text{Ninguno de los complementos tiene algo de color negro}) = \\ &= 1 - P(Sb) \cdot P(Pb / Sb) = 1 - \frac{6}{9} \cdot \frac{2}{9} = \boxed{\frac{23}{27} \approx 0.852} \end{aligned}$$

- c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(Sn / Pc) &= \frac{P(Sn \cap Pc)}{P(Pc)} = \frac{P(Sn)P(Pc / Sn)}{P(Sb)P(Pc / Sb) + P(Sn)P(Pc / Sn)} = \\ &= \frac{\frac{3}{9} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{6}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{10}} = \frac{\frac{12}{90}}{\frac{30}{81} + \frac{12}{90}} = \boxed{\frac{9}{34} \approx 0.265} \end{aligned}$$

EvAU 2022 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2021-2022 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m :

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ mx + (m+1)y - z &= m-1 \\ -x - 2y + (2m-1)z &= 1-m \end{aligned} \right\}$$

- (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m .
- (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m=1$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

- (1 punto) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$.
- (1.5 puntos) Dada la función $g(x) = \frac{5-x}{2}$, halle el área de la región acotada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(1, 1, 0)$.

- (1 punto) Halle los puntos pertenecientes a la recta r que distan de P una unidad.
- (1.5 puntos) Halle unas ecuaciones de las rectas que pasan por P , son perpendiculares a r y forman un ángulo $\frac{\pi}{3}$ radianes con la normal al plano $x=0$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una tienda se hace un estudio sobre la venta de dos productos A y B a lo largo de un mes. La probabilidad de que un cliente compre el producto A es de un 62% y la de que compre el producto B es de un 40 %. Se observa, además, que el 12% de los clientes compran al mismo tiempo el producto A y el producto B. Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente haya comprado el producto A sabiendo que no ha adquirido el producto B.

- b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente no compre ni el producto A ni el producto B.
- c) (1 punto) Sabiendo que a lo largo de un mes visitan la tienda 3000 personas, calcular, utilizando la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución normal, cuál es la probabilidad de que compren el producto B más de 1250 personas.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) (1 punto) Calcular el valor de a para que el sistema de ecuaciones $C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea compatible.
- b) (1.5 puntos) Calcular los valores de a , b y c para que la multiplicación de dos de las matrices sea igual a la restante.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f(x)$ una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f'(1) = 1$ y $f'(2) = 2$. Se consideran, además, las funciones $g(x) = (f(x))^2$ y $h(x) = (f \circ f)(x)$. Se pide:

- a) (0.5 puntos) Calcular $g(2)$ y $g'(2)$.
- b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $h(x)$ en el punto $x = 1$.
- c) (1 punto) Probar, utilizando el Teorema del Valor Medio, que existe un punto en el intervalo $(1, 2)$ en el que el valor de la derivada de $f(x)$ es -1 .

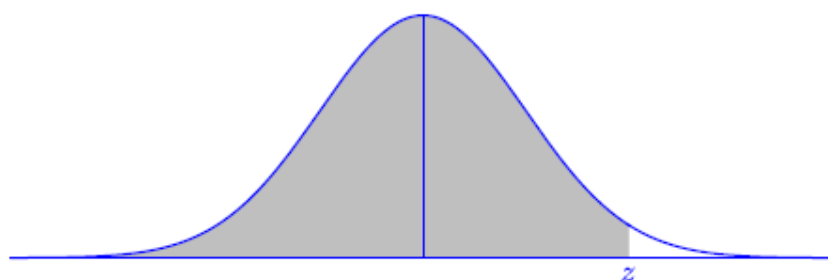
B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

- a) (0.5 puntos) Calcule el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (0, 0, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, \sqrt{3})$.
- b) (1 punto) Sea O el origen de coordenadas, y los puntos A(2, 0, 0), B(0, 3, 0) y C(0, 2, $2\sqrt{3}$). Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por las tres aristas concurrentes OA, OB y OC.
- c) (1 punto) Calcule una ecuación de la recta perpendicular común a las rectas r y s , siendo r la recta que pasa por O y por C y s la recta de ecuaciones $y - 3 = 0$, $z = 0$.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una *influencer* famosa publica en su Instagram un 20% de fotografías dedicadas a viajes, un 50% referentes a temas de moda y el resto sobre maternidad. El 5% de las publicaciones de viajes reciben menos de 20 000 *Me gusta* y lo mismo ocurre con el 20% de las de moda y con el 35% de las que tratan asuntos de maternidad. Elegida una fotografía al azar, se pide:

- a) (1.25 puntos) Determinar la probabilidad de que tenga más de 20 000 *Me gusta*.
- b) (1.25 puntos) Si tiene menos de 20 000 *Me gusta*, calcular la probabilidad de que el tema tratado en ella haya sido sobre viajes.



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m :

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ mx + (m+1)y - z &= m-1 \\ -x - 2y + (2m-1)z &= 1-m \end{aligned} \right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m .

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m = 1$

a) Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ m & m+1 & -1 \\ -1 & -2 & 2m-1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ m & m+1 & -1 \\ -1 & -2 & 2m-1 \end{vmatrix} = \\ &= 2(m+1)(2m-1) + 1 + 2m - (m+1) - m(2m-1) - 4 = \\ &= 2(2m^2 - m + 2m - 1) + 1 + 2m - m - 1 - 2m^2 + m - 4 = \\ &= 4m^2 - 2m + 4m - 2 + 1 + 2m - m - 1 - 2m^2 + m - 4 = 2m^2 + 4m - 6 \\ |A| &= 0 \Rightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 = m \\ \frac{-2-4}{2} = -3 = m \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq -3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

$$\text{El sistema queda } \left. \begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \\ -x - 2y + z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ -1 \quad -2 \quad 1 \quad 0 \\ 1 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 4 \quad -2 \quad 0 \\ -2 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{2 \quad 1 \quad -1 \quad 0}^A & & & \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{}_{A/B} \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $m = -3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -3x - 2y - z = -4 \\ -x - 2y - 7z = 4 \end{cases}$$

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a + 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -6 \quad -4 \quad -2 \quad -8 \\ 6 \quad 3 \quad -3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -5 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad -4 \quad -14 \quad 8 \\ 2 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -15 \quad 8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & -3 & -15 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad -3 \quad -15 \quad -24 \\ 0 \quad 3 \quad 15 \quad -8 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -32 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{2 \quad 1 \quad -1}^A & 0 & & \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \\ \underbrace{}_{A/B} \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3, por lo que los rangos son distintos y el sistema es incompatible (no tiene solución).

Resumiendo: Si $m \neq 1$ y $m \neq -3$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $m = -3$ el sistema es incompatible (sin solución)

b) Si $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

Obtenemos las soluciones a partir del sistema equivalente que hemos obtenido en el apartado a).

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ z = 3y \end{cases} \Rightarrow 2x + y - 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y \Rightarrow \boxed{\text{Solución: } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}}$$

Para $m = 1$ las soluciones del sistema son $x = t$; $y = t$; $z = 3t$; $t \in \mathbb{R}$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

- a) (1 punto) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$.
- b) (1.5 puntos) Dada la función $g(x) = \frac{5-x}{2}$, halle el área de la región acotada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

- a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulen el denominador.

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Usamos la derivada para estudiar el comportamiento de la función.

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} = 1 + x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 0 + (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{x^2} = 0 \Rightarrow -1 = 0 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

La función derivada no se anula y siempre es negativa ($f'(1) = \frac{-1}{1^2} = -1 < 0$).

La función decrece en su dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

- b) Hallamos los puntos de corte de ambas funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} = \frac{5-x}{2} \Rightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{5-x}{2} \Rightarrow 2(x+1) = x(5-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 2 = 5x - x^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2=x} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

La región encerrada entre las dos gráficas está entre $x = 1$ y $x = 2$, vemos que gráfica está por encima.

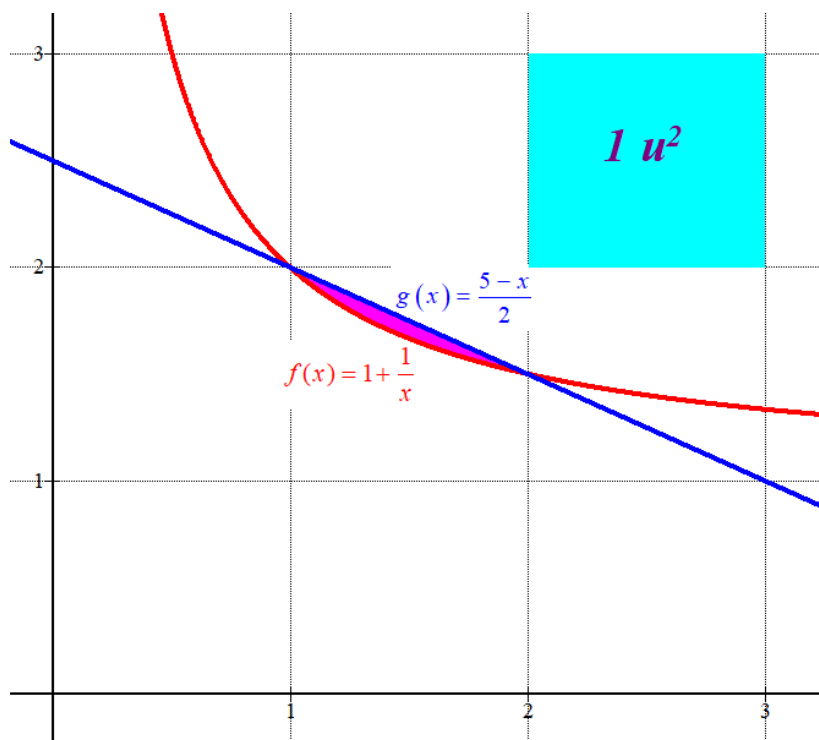
$$\left. \begin{aligned} f(1.5) &= 1 + \frac{1}{1.5} \approx 1.66 \\ g(1.5) &= \frac{5-1.5}{2} = 1.75 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1.5) < g(1.5)$$

El área de la región encerrada entre las gráficas de las dos funciones es:

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_1^2 g(x) - f(x) dx = \int_1^2 \frac{5-x}{2} - \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{x} dx = \\
 &= \int_1^2 \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x} dx = \left[\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \ln x \right]_1^2 = \left[\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \ln x \right]_1^2 = \\
 &= \left[\frac{3}{2} \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 2^2 - \ln 2 \right] - \left[\frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 1^2 - \ln 1 \right] = 3 - 1 - \ln 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4} - \ln 2 \approx 0.057 u^2}
 \end{aligned}$$

No piden dibujar la región. Lo hacemos para comprobar la bondad de la solución, dado que el valor del área es muy pequeño.

Podemos comprobar que el área de la región rosa del dibujo (la que nos piden calcular) es mucho más pequeña que un cuadradito (en color azul) de la gráfica que tiene de valor $1 u^2$.



A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(1, 1, 0)$.

- a) (1 punto) Halle los puntos pertenecientes a la recta r que distan de P una unidad.
 b) (1.5 puntos) Halle unas ecuaciones de las rectas que pasan por P , son perpendiculares a r y forman un ángulo $\frac{\pi}{3}$ radianes con la normal al plano $x = 0$.

a) Un punto A perteneciente a la recta r tiene coordenadas $A(a, a, 0)$.

La distancia entre los puntos A y P es el módulo del vector que los une.

$$\left. \begin{matrix} P(1,1,0) \\ A(a,a,0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = (1,1,0) - (a,a,0) = (1-a, 1-a, 0)$$

$$d(A, P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(1-a)^2 + (1-a)^2 + 0^2} = \sqrt{2(1-a)^2} = \sqrt{2}|1-a|$$

Igualemos la distancia a 1.

$$\left. \begin{matrix} d(A, P) = 1 \\ d(A, P) = \sqrt{2}|1-a| \end{matrix} \right\} \Rightarrow 1 = \sqrt{2}|1-a| \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} = 1-a \rightarrow a = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow A\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} = -1+a \rightarrow a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow A\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \end{cases}$$

Los dos puntos de la recta r que cumplen lo pedido son $A\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y

$$A\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

- b) Solo nos falta un vector director de la recta s pedida. Supongamos que $\vec{v}_s = (a, b, c)$ es ese vector director.

La recta s es perpendicular a $r \rightarrow$ el producto escalar de sus vectores directores es nulo.

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_r = (1, 1, 0)$$

$$\left. \begin{matrix} \vec{v}_s = (a, b, c) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 0) \\ \vec{v}_s \cdot \vec{u}_r = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (a, b, c) \cdot (1, 1, 0) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a \Rightarrow \vec{v}_s = (a, -a, c)$$

La recta s forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes con la normal al plano $x = 0$.

Un vector normal al plano $x = 0$ es $\vec{n} = (1, 0, 0)$, por lo que el vector director de la recta s y el vector normal del plano forman ese ángulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 0, 0) \\ \vec{v}_s = (a, -a, c) \\ (\vec{n}, \vec{v}_s) = \frac{\pi}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_s) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{|(1, 0, 0)(a, -a, c)|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \sqrt{a^2 + (-a)^2 + c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = \frac{|a|}{\sqrt{2a^2 + c^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|a|}{\sqrt{2a^2 + c^2}} \Rightarrow \sqrt{2a^2 + c^2} = 2|a| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2 + c^2 = 4a^2 \Rightarrow c^2 = 2a^2 \Rightarrow c = \sqrt{2} \cdot |a| \Rightarrow \begin{cases} c = \sqrt{2} \cdot a \Rightarrow \vec{v}_s = (a, -a, \sqrt{2} \cdot a) \\ 0 \\ c = -\sqrt{2} \cdot a \Rightarrow \vec{w}_s = (a, -a, -\sqrt{2} \cdot a) \end{cases}$$

Existen dos rectas que cumplen lo pedido.

La primera:

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \rightarrow \vec{v}_s = (1, -1, \sqrt{2}) \\ P(1, 1, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \sqrt{2}\lambda \end{cases}$$

La segunda:

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \rightarrow \vec{w}_s = (1, -1, -\sqrt{2}) \\ P(1, 1, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\sqrt{2}\lambda \end{cases}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una tienda se hace un estudio sobre la venta de dos productos A y B a lo largo de un mes. La probabilidad de que un cliente compre el producto A es de un 62% y la de que compre el producto B es de un 40 %. Se observa, además, que el 12% de los clientes compran al mismo tiempo el producto A y el producto B. Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente haya comprado el producto A sabiendo que no ha adquirido el producto B.
- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente no compre ni el producto A ni el producto B.
- (1 punto) Sabiendo que a lo largo de un mes visitan la tienda 3000 personas, calcular, utilizando la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución normal, cuál es la probabilidad de que compren el producto B más de 1250 personas.

Hacemos una tabla de contingencia para obtener el resto de información que viene implícita con los datos del problema planteado.

	Compra el producto B	No compra el producto B	
Compra el producto A	12		62
No compra el producto A			
	40		100

Completamos la tabla.

	Compra el producto B (B)	No compra el producto B ($\bar{B}$)	
Compra el producto A (A)	12	50	62
No compra el producto A ($\bar{A}$)	28	10	38
	40	60	100

$$a) P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{50}{60} = \boxed{\frac{5}{6} \approx 0.83}$$

$$b) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{10}{100} = \boxed{0.1}$$

- c) Sabemos que $P(\text{comprar el producto B}) = p = 0.4$.

Consideramos la variable binomial X = Número de personas que compran el producto B de un grupo de 3000.

El número de repeticiones es $n = 3000$.

$X = B(3000, 0.4)$

Como el número de repeticiones es muy grande: $n = 3000$ la aproximamos a una normal Y de media $n \cdot p = 3000 \cdot 0.4 = 1200$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{3000 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = 12\sqrt{5} \approx 26.83$$

Esta aproximación es buena pues $n \cdot p = 1200 > 5$ y $n \cdot q = 3000 \cdot 0.6 = 1800 > 5$.

Nos piden calcular $P(X > 1250)$.

$$P(X > 1250) = P(X \geq 1251) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 1250.5) =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{Y - 1200}{12\sqrt{5}} \geq \frac{1250.5 - 1200}{12\sqrt{5}}\right) = P(Z \geq 1.88) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.88) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0.9699 = \boxed{0.0301}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9644	0,9648	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) (1 punto) Calcular el valor de a para que el sistema de ecuaciones $C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea compatible.
- b) (1.5 puntos) Calcular los valores de a , b y c para que la multiplicación de dos de las matrices sea igual a la restante.

- a) Para ser un sistema compatible el rango de la matriz de coeficientes debe ser igual al de la matriz ampliada.

La matriz de coeficientes es $C = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $C^* = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de C es 2 pues tiene un menor de orden 2 con determinante no nulo, el que se obtiene quitando la primera fila $\rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$.

Comprobamos cuando el determinante de C^* es nulo y por tanto también su rango es 2.

$$|C^*| = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2a + 4 + 1 + \cancel{3} - 2 - \cancel{3} - a - 2 = a + 1$$

$$|C^*| = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

El rango de C^* es 2 cuando $a = -1$ y es 3 cuando $a \neq -1$.

El sistema es compatible cuando $a = -1$, pues el rango de C es 2 igual que el rango de C^* .

- b) Buscamos que productos se pueden realizar como se plantea en el ejercicio.

$$A \cdot B = C \text{ tiene dimensiones } 3 \times 2 \rightarrow \text{No es posible, pues la matriz } C \text{ es de dimensiones } 3 \times 3$$

$\xrightarrow{2 \times \boxed{2 \times 2} \times 3} 2 \times 3$

3×2 y la matriz resultado del producto AB es de dimensiones 2×3 .

$$A \cdot C = B$$

$\xrightarrow{2 \times \boxed{2 \times 3} \times 2}$ No se puede realizar el producto $A \cdot C$, pues el número de columnas de A es 2,

distinto del número de filas de C (3).

$$B \cdot C = A \text{ tiene dimensiones } 2 \times 2$$

$\xrightarrow{2 \times \boxed{3 \times 3} \times 2} 2 \times 2$ El producto BC es posible y su resultado puede ser A .

Nos planteamos el producto $BC = A$ y determinamos los valores necesarios de a , b y c .

$$BC = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+2+6+3 & 1+4+3 \\ 2a+4+3a+3c+4 & 2+2a+2c+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+11=c \\ 8=8 \\ 5a+3c+8=1 \\ 2a+2c+6=b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+11=c \\ 5a+3c=-7 \\ 2a+c-b=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a+3(a+11)=-7 \\ 2a+a+11-b=-6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a+3a+33=-7 \\ 3a-b=-17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a=-40 \rightarrow \boxed{a=-5} \\ 3a-b=-17 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -15-b=-17 \Rightarrow \boxed{b=2} \Rightarrow \boxed{c=-5+11=6}$$

Los valores buscados son $a = -5$, $b = 2$ y $c = 6$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f(x)$ una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f'(1) = 1$ y $f'(2) = 2$. Se consideran, además, las funciones $g(x) = (f(x))^2$ y $h(x) = (f \circ f)(x)$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular $g(2)$ y $g'(2)$.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $h(x)$ en el punto $x = 1$.

c) (1 punto) Probar, utilizando el Teorema del Valor Medio, que existe un punto en el intervalo $(1, 2)$ en el que el valor de la derivada de $f(x)$ es -1 .

a)

$$g(2) = (f(2))^2 = (1)^2 = 1$$

$$g(x) = (f(x))^2 \Rightarrow g'(x) = 2(f(x)) \cdot f'(x) \Rightarrow g'(2) = 2(f(2)) \cdot f'(2) = 2(1)(2) = 4$$

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $h(x)$ en el punto $x = 1$ tiene la expresión:

$$y - h(1) = h'(1)(x - 1)$$

Calculamos $h(1)$ y $h'(1)$ y obtenemos la ecuación pedida.

$$h(1) = (f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2) = 1$$

$$h'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) \Rightarrow h'(1) = f'(f(1)) \cdot f'(1) = f'(2) \cdot f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} h(1) = 1 \\ h'(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $h(x)$ en el punto $x = 1$ es $y = 2x - 1$.

c) La función $f(x)$ es continua en $[1, 2]$ y derivable en $(1, 2)$. Aplicando el Teorema Valor Medio, existe un punto c en $(1, 2)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{1 - 2}{2 - 1} = -1$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

- a) (0.5 puntos) Calcule el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (0, 0, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, \sqrt{3})$.
- b) (1 punto) Sea O el origen de coordenadas, y los puntos A(2, 0, 0), B(0, 3, 0) y C(0, 2, $2\sqrt{3}$). Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por las tres aristas concurrentes OA, OB y OC.
- c) (1 punto) Calcule una ecuación de la recta perpendicular común a las rectas r y s, siendo r la recta que pasa por O y por C y s la recta de ecuaciones $y - 3 = 0$, $z = 0$.

a) Utilizamos el producto escalar.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (0, 0, 1) \\ \vec{v} = (0, 1, \sqrt{3}) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(0, 0, 1) \cdot (0, 1, \sqrt{3})}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ$$

El ángulo formado por los vectores es de 30° .

b) El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los vectores $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ y $\vec{OC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{OA} = (2, 0, 0) \\ \vec{OB} = (0, 3, 0) \\ \vec{OC} = (0, 2, 2\sqrt{3}) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Volumen } OABC = [\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = 12\sqrt{3} \approx 20.78 u^3$$

c) Calculamos la ecuación de la recta r que pasa por O y C.

$$\left. \begin{array}{l} O(0, 0, 0) \in r \\ C(0, 2, 2\sqrt{3}) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} O(0, 0, 0) \in r \\ \vec{u}_r = \vec{OC} = (0, 2, 2\sqrt{3}) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 2\lambda \\ z = 2\sqrt{3}\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta s.

$$s \equiv \begin{cases} y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} P_s(0, 3, 0) \\ \vec{v}_s = (1, 0, 0) \end{cases}$$

Estudiamos la posición relativa de las rectas r y s.

Los vectores directores de ambas rectas no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (0, 2, 2\sqrt{3}) \\ \vec{v}_s = (1, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0}{1} \neq \frac{2}{0} \neq \frac{2\sqrt{3}}{0}$$

Comprobamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{OP_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (0, 2, 2\sqrt{3}) \\ \vec{v}_s = (1, 0, 0) \\ \overrightarrow{OP_s} = (0, 3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{OP_s}] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6\sqrt{3} \neq 0$$

Como este producto mixto es no nulo las rectas r y s se cruzan.

Hallamos la recta perpendicular común a las rectas r y s como la intersección de dos planos.

Hallamos el vector perpendicular a ambas rectas que resulta del producto vectorial de sus respectivos vectores directores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (0, 2, 2\sqrt{3}) \\ \vec{v}_s = (1, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} = \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\sqrt{3}j - 2k = (0, 2\sqrt{3}, -2)$$

El primer plano π contiene a la recta r y tiene como uno de sus vectores directores el vector $\vec{n} = \vec{u}_r \times \vec{v}_s$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_r = (0, 2, 2\sqrt{3}) \\ \vec{v} = \vec{n} = (0, 2\sqrt{3}, -2) \\ O(0, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4x - 4(\sqrt{3})^2 x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x = 0}$$

El segundo plano π' contiene a la recta s y tiene como uno de sus vectores directores el vector $\vec{n} = \vec{u}_r \times \vec{v}_s$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_s = (1, 0, 0) \\ \vec{v} = \vec{n} = (0, 2\sqrt{3}, -2) \\ P_s(0, 3, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{3}z + 2y - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' \equiv y + \sqrt{3}z - 3 = 0}$$

La recta t perpendicular común a las rectas r y s tiene ecuación:

$$t \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + \sqrt{3}z = 3 \end{cases} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - \sqrt{3}\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

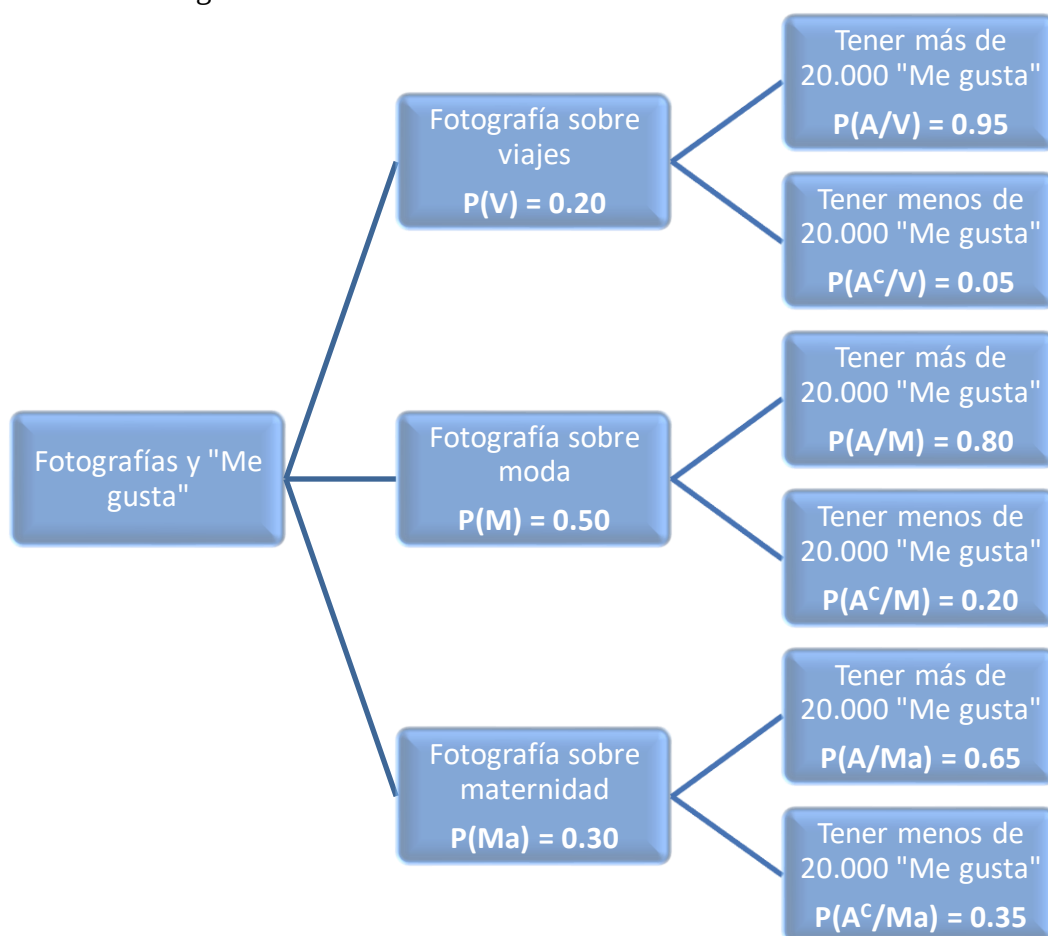
B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una *influencer* famosa publica en su Instagram un 20% de fotografías dedicadas a viajes, un 50% referentes a temas de moda y el resto sobre maternidad. El 5% de las publicaciones de viajes reciben menos de 20 000 *Me gusta* y lo mismo ocurre con el 20% de las de moda y con el 35% de las que tratan asuntos de maternidad. Elegida una fotografía al azar, se pide:

- (1.25 puntos) Determinar la probabilidad de que tenga más de 20 000 *Me gusta*.
- (1.25 puntos) Si tiene menos de 20 000 *Me gusta*, calcular la probabilidad de que el tema tratado en ella haya sido sobre viajes.

Consideremos los sucesos V = “Fotografía sobre viajes”, M = “Fotografía sobre moda”, Ma = “Fotografía sobre maternidad” y A = “Tener más de 20 000 *Me gusta*”.

Realizamos un diagrama de árbol.



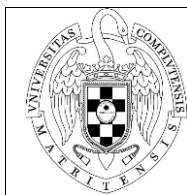
- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(V)P(A/V) + P(M)P(A/M) + P(Ma)P(A/Ma) = \\
 &= 0.2 \cdot 0.95 + 0.5 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.65 = \boxed{0.785}
 \end{aligned}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V/A^c) = \frac{P(V \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(V)P(A^c/V)}{1 - P(A)} = \frac{0.2 \cdot 0.05}{1 - 0.785} = \boxed{\frac{2}{43} \approx 0.047}$$

EvAU 2021 Extraordinaria Matemáticas II



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2020-2021**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) 1.25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

$$\text{a.1) (0.5 puntos) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\operatorname{sen} x} \qquad \text{a.2) (0.75 puntos) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}} \right)$$

(Indicación: use el cambio de variable $t = 1/x$ donde sea necesario).

b) (1.25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

$$\text{b.1) (0.5 puntos) } \int \frac{x}{x^2-1} dx \qquad \text{b.2) (0.75 puntos) } \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el punto $A(1, 0, -1)$, la recta $r \equiv x-1 = y+1 = \frac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$, se pide:

- (0.75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A .
- (0.75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π .
- (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A , forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

- (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?
- (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

- a) (0.75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y , que tenga como soluciones $\{x = 1, y = 2\}$ y $\{x = 0, y = 0\}$.
- b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y y z cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$$

- c) (0.75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y , que solo tenga como solución $x = 1$ e $y = 2$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = x^3 - |x| + 2$$

- a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.
- b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.
- c) (0.75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f , el eje de abscisas $y = 0$, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \quad s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}.$$

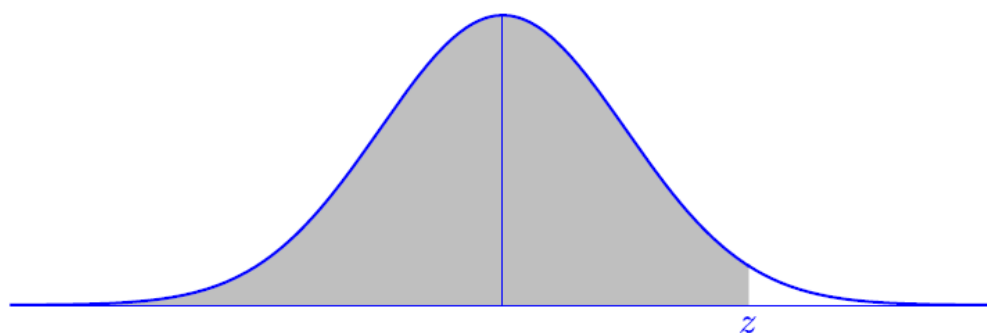
- a) (1.5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s .
- b) (1 punto) Calcule la distancia entre r y s .

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

- a) (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.
- b) (1.5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

Llamamos “x” al número de seguidores de Sara, “y” al número de seguidores de Cristina y “z” al número de seguidores de Jimena.

“Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social” $\rightarrow x + y + z = 15000$

“Si Jimena perdiera el 25% (se queda con el 75 %) de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara” $\rightarrow 0.75z = 3x$

“La mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena” $\rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = \frac{z}{4}$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 15000 \\ 0.75z = 3x \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 15000 \\ \frac{0.75z}{3} = x \\ \frac{10x}{20} + \frac{4y}{20} = \frac{5z}{20} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 15000 \\ 0.25z = x \\ 10x + 4y = 5z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.25z + y + z = 15000 \\ 10 \cdot 0.25z + 4y = 5z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 1.25z = 15000 \\ 2.5z + 4y = 5z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 15000 - 1.25z \\ -2.5z + 4y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2.5z + 4(15000 - 1.25z) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2.5z + 60000 - 5z = 0 \Rightarrow -7.5z = -60000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{60000}{7.5} = 8000} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = 15000 - 1.25 \cdot 8000 = 5000} \\ \boxed{x = 0.25 \cdot 8000 = 2000} \end{array} \right.$$

Sara tiene 2000 seguidores, Cristina tiene 5000 y Jimena tiene 8000.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) 1.25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

$$\text{a.1) (0.5 puntos) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\operatorname{sen} x} \quad \text{a.2) (0.75 puntos) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}} \right)$$

(Indicación: use el cambio de variable $t = 1/x$ donde sea necesario).

b) 1.25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

$$\text{b.1) (0.5 puntos) } \int \frac{x}{x^2-1} dx \quad \text{b.2) (0.75 puntos) } \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

a.1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\operatorname{sen} x} &= \frac{0^2(1-0)}{0-0-\operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(1-2x) + x^2(-2)}{1-4x-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-4x^2-2x^2}{1-4x-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-6x^2}{1-4x-\cos x} = \frac{0-0}{1-0-\cos 0} = \frac{0}{0} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-12x}{0-4+\operatorname{sen} x} = \frac{2-0}{-4+\operatorname{sen} 0} = \boxed{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

a.2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}} = 0 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\cos \frac{1}{x}} = - \frac{2}{\cos 0} = \boxed{-2} \end{aligned}$$

b.1)

$$\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2-1| + K$$

b.2) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned}
 \int x^2 e^{-x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^{-x} dx \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = x^2 (-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) 2x dx = \\
 &= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = \\
 &= -x^2 e^{-x} + 2 \left[x (-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx \right] = -x^2 e^{-x} + 2 \left[-x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right] = \\
 &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + K
 \end{aligned}$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida pedida en el ejercicio.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= \left[-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} \right]_0^1 = \\
 &= \left[-1^2 e^{-1} - 2e^{-1} - 2e^{-1} \right] - \left[-0^2 e^{-0} - 2 \cdot 0 e^{-0} - 2e^{-0} \right] = -5e^{-1} + 2 = \boxed{2 - \frac{5}{e}}
 \end{aligned}$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r \equiv x-1 = y+1 = \frac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A .
- b) (0.75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π .
- c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A , forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π .

- a) Hallamos la ecuación del plano π' perpendicular a la recta r que pasa por el punto $A(1,0,-1)$.
Al ser perpendicular a la recta su vector normal es el director de la recta $\vec{u}_r = (1,1,2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}' = \vec{u}_r = (1,1,2) \\ A(1,0,-1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi' \equiv x+y+2z+D=0 \\ A(1,0,-1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 1+0-2+D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=1 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x+y+2z+1=0}$$

Hallamos el ángulo que forman los planos π y π' hallando el ángulo que forman sus vectores normales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x+y-z-6=0 \\ \pi' \equiv x+y+2z+1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1,1,-1) \\ \vec{n}' = (1,1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow (\pi, \pi') = (\vec{n}, \vec{n}') = \arccos \left(\frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} \right)$$

$$(\pi, \pi') = \arccos \left(\frac{(1,1,-1) \cdot (1,1,2)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2+2^2}} \right) = \arccos \left(\frac{1+1-2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} \right) = \arccos(0)$$

$$(\pi, \pi') = 90^\circ$$

Los planos son perpendiculares.

- b) Estudiemos la posición relativa de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv x-1 = y+1 = \frac{z-2}{2} \\ \pi \equiv x+y-z=6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1,1,2) \\ \vec{n} = (1,1,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{n} = (1,1,2) \cdot (1,1,-1) = 1+1-2=0$$

Vector director de la recta r y vector normal del plano son perpendiculares, por lo que recta y plano son paralelos.

La distancia de la recta al plano es la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv x-1=y+1=\frac{z-2}{2} \Rightarrow P_r(1,-1,2) \in r \\ \pi \equiv x+y-z-6=0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|1-1-2-6|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \boxed{\frac{8}{\sqrt{3}}}$$

- c) Una recta s que no corte el plano π debe ser una recta paralela a π . Por lo que el vector director de la recta s es perpendicular al vector normal del plano $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

Además, es perpendicular a la recta r , por lo que también es perpendicular al vector director $\vec{u}_r = (1, 1, 2)$ de la recta r .

Un vector director de la recta s puede ser el producto vectorial de $\vec{n}$ y $\vec{u}_r$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 1, -1) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_s = \vec{n} \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -3, 0)$$

Hallamos la ecuación de la recta s con vector director $\vec{v}_s = (3, -3, 0)$ y que pasa por el punto $A(1, 0, -1)$.

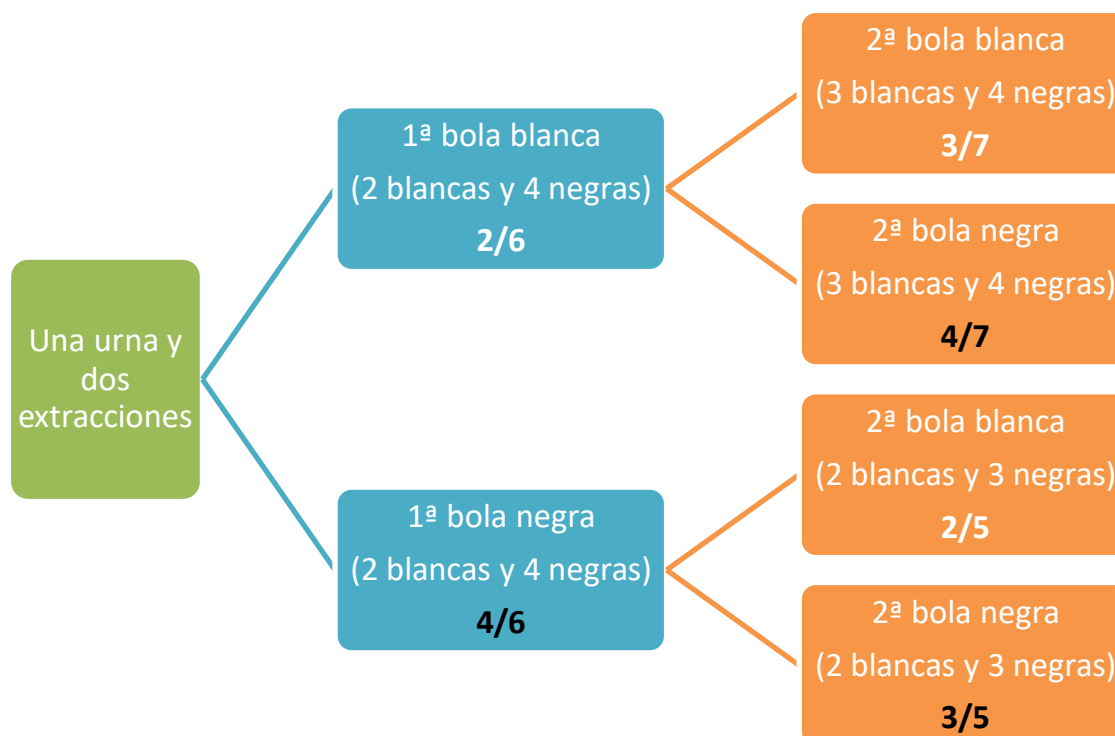
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (3, -3, 0) \\ A(1, 0, -1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{0}}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

- a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?
- b) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

Realizamos un diagrama de árbol para facilitar el cálculo de probabilidades.



Llamamos B1 y B2 a sacar bola blanca en 1ª y 2ª extracción, Análogamente N1 y N2 a sacar negra en 1ª y 2ª extracción.

- a) Para sacar dos bolas de distinto color deben ser una blanca y la otra negra, pudiendo ser la 1ª blanca y 2ª negra o 1ª negra y 2ª blanca.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Dos bolas de distinto color}) &= P(B1 \cap N2) + P(N1 \cap B2) = \\
 &= P(B1)P(N2/B1) + P(N1)P(B2/N1) = \{\text{Miramos el diagrama de árbol}\} = \\
 &= \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \boxed{\frac{16}{35} \approx 0.457}
 \end{aligned}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(N1/B2) &= \frac{P(N1 \cap B2)}{P(B2)} = \frac{P(N1)P(B2/N1)}{P(B1)P(B2/B1) + P(N1)P(B2/N1)} = \\
 &= \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5}} = \boxed{\frac{28}{43} \approx 0.65}
 \end{aligned}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

- a) (0.75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y , que tenga como soluciones $\{x = 1, y = 2\}$ y $\{x = 0, y = 0\}$.
- b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x , y y z cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$$

- c) (0.75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y , que solo tenga como solución a $x = 1$ e $y = 2$.

- a) Si tiene dos soluciones tendrá infinitas, por lo que debe tener las dos ecuaciones proporcionales.

Basta encontrar una ecuación con dos incógnitas que cumplan las dos soluciones que nos dicen.

Observamos que la “ y ” es el doble de la “ x ” en las dos soluciones, por lo que la ecuación es $y = 2x$ y la segunda ecuación puede ser esta multiplicada por “10” $\rightarrow 10y = 20x$.

$$\text{El sistema es } \begin{cases} y = 2x \\ 10y = 20x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 20x - 10y = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ z = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

c)

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Añadimos una 3ª ecuación} \\ \text{que sea la suma de las dos ecuaciones} \end{array} \right. \Rightarrow \\ \left. \begin{array}{l} 2x \quad -y \quad = 0 \\ x \quad -y \quad = -1 \\ \hline 3x \quad -2y \quad = -1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y = -1 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}}$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = x^3 - |x| + 2$$

- a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.
 b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.
 c) (0.75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f , el eje de abscisas $y = 0$, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

- a) Expresamos la función como una función definida a trozos. El valor absoluto de “ x ” cambia de definición en $x = 0$.

$$f(x) = x^3 - |x| + 2 = \begin{cases} x^3 + x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 - x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Comprobamos la continuidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^3 - |0| + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 + x + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - x + 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

La función es continua en $x = 0$.Calculamos las derivadas laterales y estudiamos la derivabilidad en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 - x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calculamos el valor de las derivadas laterales en $x = 0$ y las comparamos.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 + 1) = 3 \cdot 0^2 + 1 = 1 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 - 1) = 3 \cdot 0^2 - 1 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

La función no es derivable en $x = 0$.

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 - x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Igualamos a cero las derivadas en busca de los puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \rightarrow x = \sqrt{-\frac{1}{3}} = \text{No existe} & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} & \text{Solo nos quedamos con } +\sqrt{\frac{1}{3}}, \text{ pues } x > 0 \end{cases}$$

El punto crítico $x = +\sqrt{\frac{1}{3}}$ lo sustituimos en la segunda derivada para ver si es máximo o mínimo.

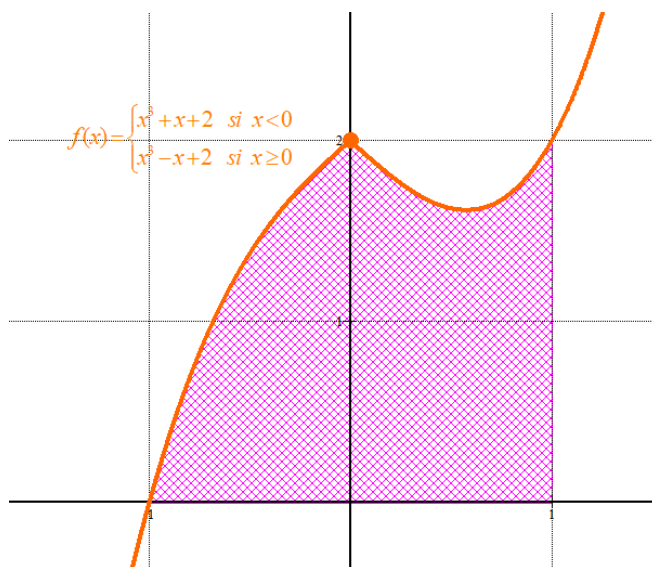
$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''\left(+\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 6\sqrt{\frac{1}{3}} > 0, \text{ por lo que se trata de un mínimo relativo.}$$

Como $f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 - \sqrt{\frac{1}{3}} + 2 = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}$ el mínimo relativo tiene coordenadas $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

En $x = 0$ la función no es derivable, pero es continua, como la función crece antes de $x = 0$, pues $f'(0^-) = 1 > 0$ y después de $x = 0$ decrece pues $f'(0^+) = -1 < 0$ en $x = 0$ hay un máximo relativo. Sus coordenadas son $(0, 2)$.

Resumiendo: La función tiene un máximo relativo en $(0, 2)$ y un mínimo relativo en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

c) Dibujamos la gráfica de la función y la región de la cual nos piden calcular su área.



El área es la suma de las integrales definidas entre $x = -1$ y $x = 0$ de $f(x) = x^3 + x + 2$ y entre $x = 0$ y $x = 1$ de $f(x) = x^3 - x + 2$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^0 x^3 + x + 2 dx + \int_0^1 x^3 - x + 2 dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{0^4}{4} + \frac{0^2}{2} + 0 \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^2}{2} - 2 \right] + \left[\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} + 2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} + 0 \right] = \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 = \boxed{3u^2} \end{aligned}$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \quad s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y s .b) (1 punto) Calcule la distancia entre r y s .

a) Comprobamos la posición relativa de las rectas.

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3} \Rightarrow \begin{cases} P_r(2, -1, -4) \\ \vec{u}_r = (1, 1, -3) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-z \\ -2(2-z)+y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow -2(2-z)+y-2z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4+2z+y-2z=1 \Rightarrow y=5 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=2-t \\ y=5 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(2, 5, 0) \\ \vec{v}_s = (-1, 0, 1) \end{cases}$$

Los vectores directores de ambas rectas no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, -3) \\ \vec{v}_s = (-1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{-3}{1}$$

por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

Vemos si se cortan o se cruzan.

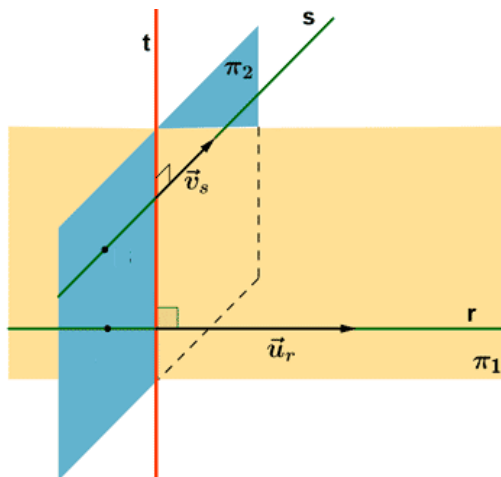
$$\left\{ \begin{array}{l} P_r(2, -1, -4) \\ \vec{u}_r = (1, 1, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{P_r Q_s} = (2, 5, 0) - (2, -1, -4) = (0, 6, 4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_s(2, 5, 0) \\ \vec{v}_s = (-1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_r = (1, 1, -3) \quad \vec{v}_s = (-1, 0, 1)$$

$$\Rightarrow [\vec{P_r Q_s}, \vec{u}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[\vec{P_r Q_s}, \vec{u}_r, \vec{v}_s] = 0 + 18 + 0 + 4 - 0 - 6 - 0 = 16 \neq 0$$

Las rectas se cruzan.



Para hallar la recta “t” perpendicular común a r y s vamos a hallar $\vec{w}_t$ el vector director de t como el producto vectorial de los vectores directores de las rectas r y s . Luego hallamos el plano π_1 que contiene a r y con vector director $\vec{w}_t$. También el plano π_2 que contiene a la recta s y con vector director $\vec{w}_t$. La recta “t” es la intersección de ambos planos.

Hallamos el vector perpendicular a las rectas r y s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, -3) \\ \vec{v}_s = (-1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{w}_t = \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 2, 1)$$

Hallamos la ecuación de π_1 .

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \left\{ \begin{array}{l} P_r(2, -1, -4) \\ \vec{u}_r = (1, 1, -3) \end{array} \right\} \\ \vec{w}_t = (1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_r(2, -1, -4) \in \pi_1 \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (1, 1, -3) \\ \vec{v} = \vec{w}_t = (1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x-2-3y-3+2z+8-z-4-y-1+6x-12=0 \Rightarrow \boxed{\pi_1 \equiv 7x-4y+z-14=0}$$

Hallamos la ecuación de π_2 .

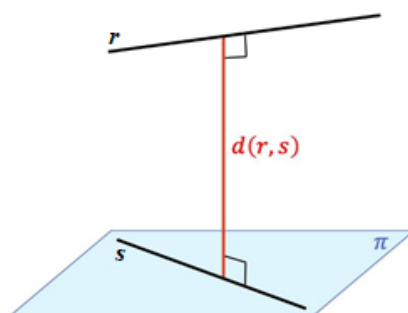
$$\left. \begin{array}{l} s \equiv \left\{ \begin{array}{l} Q_s(2, 5, 0) \\ \vec{v}_s = (-1, 0, 1) \end{array} \right\} \\ \vec{w}_t = (1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q_s(2, 5, 0) \in \pi_2 \\ \vec{u} = \vec{v}_s = (-1, 0, 1) \\ \vec{v} = \vec{w}_t = (1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$y-5-2z+y-5-2x+4=0 \Rightarrow -2x+2y-2z-6=0 \Rightarrow \boxed{\pi_2 \equiv x-y+z+3=0}$$

La recta t perpendicular común a las rectas r y s tiene ecuación:

$$t \equiv \begin{cases} 7x-4y+z-14=0 \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$$

- b) Hallamos el plano π_3 paralelo a r que contiene a s . La distancia entre las rectas será la distancia de cualquier punto de la recta r al plano π_3 .

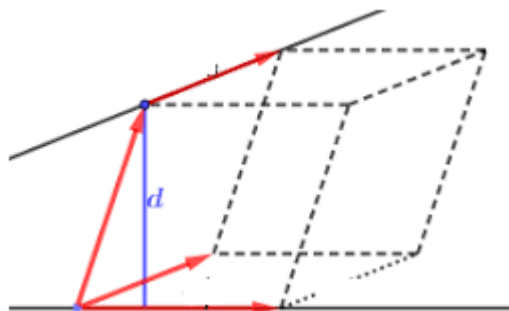


$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} Q_s(2,5,0) \\ \vec{v}_s = (-1,0,1) \\ \vec{u}_r = (1,1,-3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q_s(2,5,0) \in \pi_2 \\ \vec{u} = \vec{v}_s = (-1,0,1) \\ \vec{v} = \vec{u}_r = (1,1,-3) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_3 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$y-5-z-3y+15-x+2=0 \Rightarrow \boxed{\pi_3 \equiv x+2y+z-12=0}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_r(2,-1,-4) \\ \pi_3 \equiv x+2y+z-12=0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r,s) = d(P_r, \pi_3) = \frac{|2+2(-1)-4-12|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{16}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{8\sqrt{6}}{3} \approx 6.53 u}$$

También se puede calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan con una fórmula.



$$\left\{ \begin{array}{l} [\overrightarrow{P_r Q_s}, \vec{u}_r, \vec{v}_s] = 16 \\ \vec{u}_r \times \vec{v}_s = (1,2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(r,s) = \frac{[\overrightarrow{P_r Q_s}, \vec{u}_r, \vec{v}_s]}{|\vec{u}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{16}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \boxed{\frac{16}{\sqrt{6}} u}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

- a) (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.
 b) (1.5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

- a) X = El número de días que ha llovido en 100 días.

Es una variable binomial pues la probabilidad de que llueva un día es independiente de lo que pasó el días anteriores o posteriores.

La probabilidad de que llueva es siempre $p = 0.45$, de que no llueva es $q = 0.55$, el número de repeticiones es $n = 100$.

$$X = B(100, 0.45)$$

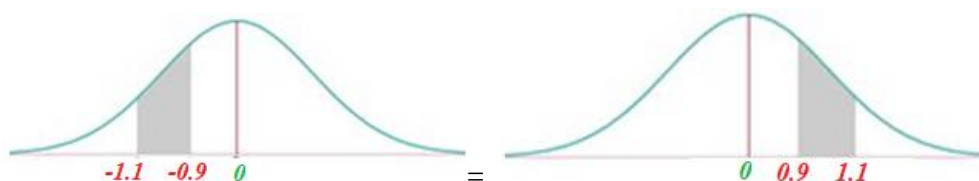
$$P(X = 40) = \binom{100}{40} 0.45^{40} \cdot 0.55^{60} = \frac{100!}{40! \cdot 60!} 0.45^{40} \cdot 0.55^{60} = \text{No es posible con calculadora}$$

Con la herramienta "Wolfram Alpha" obtenemos ≈ 0.0488

- b) Como $n \cdot p = 100 \cdot 0.45 = 45 > 5$ y $n \cdot q = 100 \cdot 0.55 > 5$ aproximamos los valores de la probabilidad de la binomial mediante una normal de media $\mu = np = 100 \cdot 0.45 = 45$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.45 \cdot 0.55} \approx 4.975$

X variable binomial se aproxima con una variable normal $Y = N(45, 4.975)$

$$\begin{aligned} P(X = 40) &= P(39.5 \leq Y \leq 40.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{39.5 - 45}{4.975} \leq Z \leq \frac{40.5 - 45}{4.975}\right) = \\ &= P(-1.1 \leq Z \leq -0.9) = P(0.9 \leq Z \leq 1.1) = \\ &= P(Z \leq 1.1) - P(Z \leq 0.9) = 0.8643 - 0.8159 = \boxed{0.0484} \end{aligned}$$



z	0,00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915
0,6	0,7257
0,7	0,7580
0,8	0,7881
0,9	0,8159
1,0	0,8413
1,1	0,8643
1,2	0,8849
1,3	0,9032

EvAU 2021 Ordinaria Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2020-2021 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A, B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 2 + x - x^2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$. Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π .
- (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$.
- (0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

- (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?
- (1 punto) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?
- (0.5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} ax - 2y + (a-1)z &= 4 \\ -2x + 3y - 6z &= 2 \\ -ax + y - 6z &= 6 \end{aligned} \right\}$$

- a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a .
 b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 1$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.
 b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$.
 Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.

- c) (0.75 puntos) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) dx$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

- a) (1.5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.
 b) (0.5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2 .
 c) (0.5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y .

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2 , la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2 , la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

- a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?
 b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?
 c) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos “en un día se supera el nivel permitido de NO_2 ” y “en un día se supera el nivel permitido de partículas”?
 d) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2 , sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A, B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

Llamamos x = número de acciones de A, y = número de acciones de B, z = número de acciones de C. Luego se las reparten por igual entre ellos.

“Hay un total de 540 acciones” $\rightarrow x + y + z = 540$

“Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro y valoradas en 1560 euros” $\rightarrow$ “Cada acción de B es 1 €, cada acción de A es $3 \cdot 1 = 3$ € y cada acción de C es $2 \cdot 3 = 6$ €. Todas juntas valen 1560 €” $\rightarrow 3x + y + 6z = 1560$

“El número de acciones de C es la mitad que el de B” $\rightarrow z = \frac{y}{2}$

Todas estas ecuaciones forman un sistema que resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 540 \\ 3x + y + 6z = 1560 \\ z = \frac{y}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 540 \\ 3x + y + 6z = 1560 \\ 2z = y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2z + z = 540 \\ 3x + 2z + 6z = 1560 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3z = 540 \\ 3x + 8z = 1560 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 540 - 3z \\ 3x + 8z = 1560 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(540 - 3z) + 8z = 1560 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1620 - 9z + 8z = 1560 \Rightarrow -z = -60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 60} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 540 - 3 \cdot 60 = 540 - 180 = 360} \\ \boxed{y = 2 \cdot 60 = 120} \end{array} \right.$$

Hay que repartir 360 acciones de A, 120 de B y 60 de C.

A cada hermano le tocan 120 acciones de la empresa A, 40 de la empresa B y 20 de la C.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 2 + x - x^2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x$$

Averiguamos sus puntos de corte para establecer el comienzo y final de la región limitada por ambas gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 + x - x^2 = 2x^2 - 4x \Rightarrow 0 = 3x^2 - 5x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-2)}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{5+7}{6} = 2 \\ \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

El área será el valor absoluto de la integral definida entre $-\frac{1}{3}$ y 2 de la diferencia de las funciones.

$$\int_{-\frac{1}{3}}^2 f(x) - g(x) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^2 2 + x - x^2 - (2x^2 - 4x) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^2 2 + x - x^2 - 2x^2 + 4x dx =$$

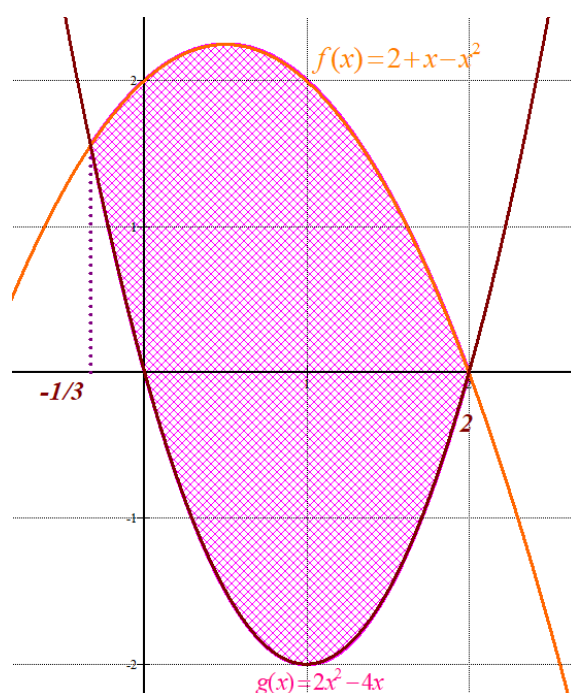
$$= \int_{-\frac{1}{3}}^2 -3x^2 + 5x + 2 dx = \left[-x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x \right]_{-\frac{1}{3}}^2 =$$

$$= \left[-2^3 + \frac{5}{2}2^2 + 2 \cdot 2 \right] - \left[-\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) \right] =$$

$$= -8 + 10 + 4 - \frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3} = \frac{343}{54} \approx 6.35$$

$\text{Área} = \left \int_{-\frac{1}{3}}^2 f(x) - g(x) dx \right = \frac{343}{54} \approx 6.35 u^2$

Dibujamos el recinto como comprobación:

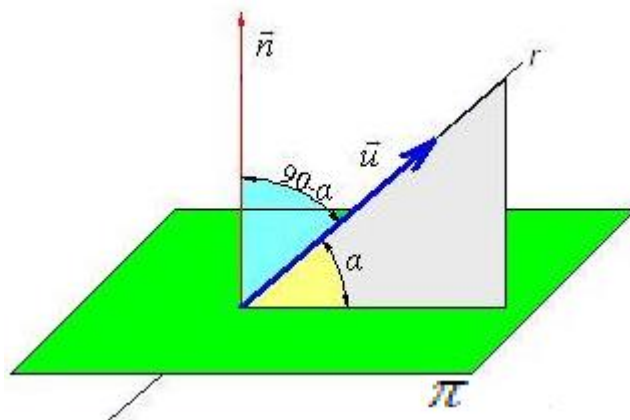


A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$. Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π .
- (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$.
- (0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π .

a) Nos piden hallar el ángulo α que forman r y π .



El ángulo lo obtenemos a partir del ángulo que forman el vector normal del plano y el director de la recta.

$$\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 1, -1)$$

$$r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x + y \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 3y - x - y + 1 = 0 \Rightarrow x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 - 2y \Rightarrow z = -1 - 2y + y = -1 - y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-2, 1, -1) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{cases}$$

Utilizamos la fórmula del producto escalar:

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_r \cdot \vec{n} &= (-2, 1, -1)(2, 1, -1) = -4 + 1 + 1 = -2 \\ |\vec{v}_r| &= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \\ |\vec{n}| &= \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{n}) = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}_r| |\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{6}}$$

$$\cos(\vec{v}_r, \vec{n}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow (\vec{v}_r, \vec{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 70.5^\circ$$

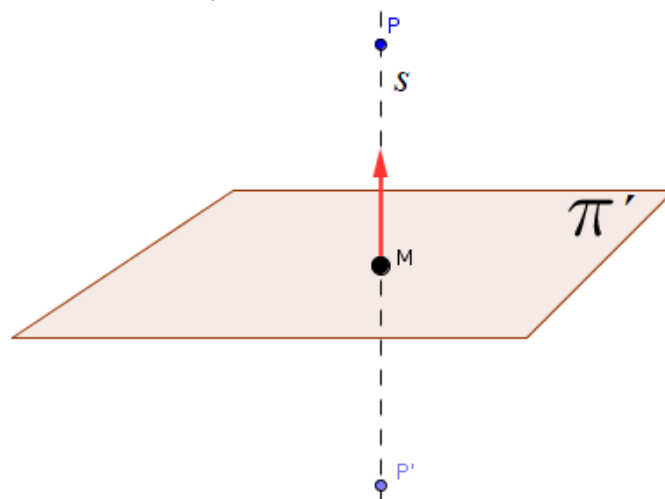
El ángulo que forman recta y plano es $90^\circ - 70.5^\circ = 19.5^\circ$.

b) Hallamos el punto P de intersección de la recta r y el plano π .

$$\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases} \Rightarrow 2(-1 - 2t) + t - (-1 - t) + 3 = 0 \Rightarrow -2 - 4t + t + 1 + t + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$-2t + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2 = -3 \\ y = 1 \\ z = -1 - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow P(-3, 1, -2)$$



El plano $\pi' \equiv -y + z = 0$ tiene como vector normal $\vec{n'} = (0, -1, 1)$. Hallamos la recta s perpendicular al plano π' que pasa por P .

$$\begin{aligned} \vec{v_s} = \vec{n'} = (0, -1, 1) \\ P(-3, 1, -2) \in s \end{aligned} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de recta s y plano π' .

$$\begin{aligned} s \equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 - t \\ z = -2 + t \end{cases} \\ \pi' \equiv -y + z = 0 \end{aligned} \Rightarrow -(1 - t) - 2 + t = 0 \Rightarrow -1 + t - 2 + t = 0 \Rightarrow 2t = 3 \Rightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \\ z = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

El punto P' es el resultado de sumarle al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

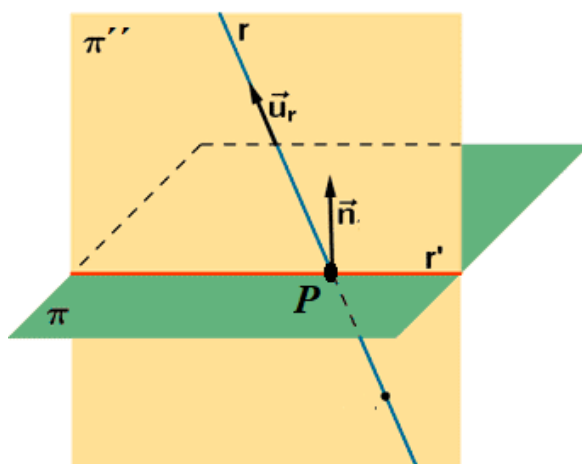
$$\overrightarrow{PM} = \left(-3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - (-3, 1, -2) = \left(0, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$P' = \left(-3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \left(0, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = (-3, -2, 1)$$

c) r y π se cortan en el punto $P(-3, 1, -2)$. Este punto pertenece a la proyección pedida.

Hallamos el plano π'' perpendicular al plano π que contiene a la recta r .

Este plano tiene como vectores directores el normal del plano π y el director de la recta. El punto P pertenece al plano π'' .



$$\left. \begin{aligned} \pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0 &\Rightarrow \vec{n} = (2, 1, -1) \\ \vec{v}_r = (-2, 1, -1) & \\ P(-3, 1, -2) \in \pi'' & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi'' \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z+2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi'' \equiv \cancel{x} - 3 + 2y - 2 + 2z + 4 + 2z + 4 + 2y - 2 + \cancel{x} + 3 = 0 \Rightarrow \pi'' \equiv 4y + 4z + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi'' \equiv y + z + 1 = 0$$

La recta r' que es la proyección de r sobre el plano π es la intersección de los planos π y π'' , por lo que sus ecuaciones son:

$$\left. \begin{aligned} \pi'' \equiv y + z + 1 = 0 \\ \pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow r' \equiv \begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

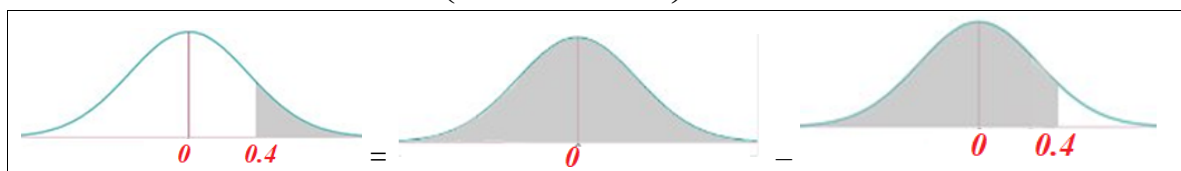
A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

- a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?
- b) (1 punto) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?
- c) (0.5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

a) X = Tiempo de vida (en meses) de un individuo de cierta especie animal. $X = N(8.8, 3)$

$$P(X \geq 10) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{10 - 8.8}{3}\right) = P(Z \geq 0.4) = \dots$$

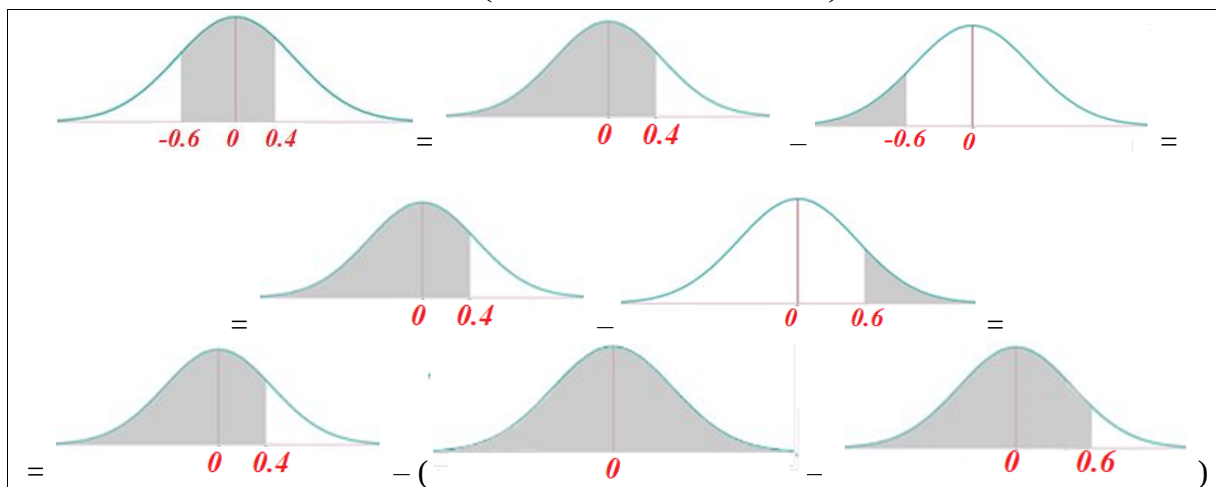


$$\dots = 1 - P(Z < 0.4) = \{\text{Miro en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 0.6554 = \boxed{0.3446 = 34.46\%}$$

z	0.00	0.1
0.0	0.5000	0.5039
0.1	0.5398	0.5793
0.2	0.5793	0.6179
0.3	0.6179	0.6554
0.4	0.6554	0.6915
0.5	0.6915	0.7257

También piden

$$P(7 \leq X \leq 10) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{7 - 8.8}{3} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{10 - 8.8}{3}\right) = P(-0.6 \leq Z \leq 0.4) = \dots$$



$$\dots = P(Z \leq 0.4) - P(Z \leq -0.6) = P(Z \leq 0.4) - P(Z \geq 0.6) = P(Z \leq 0.4) - (1 - P(Z \leq 0.6)) =$$

$$= \{\text{Miro en la tabla } N(0,1)\} = 0.6554 - (1 - 0.7257) = \boxed{0.3811 = 38.11\%}$$

z	0.00	0.0
0.0	0.5000	0.50
0.1	0.5398	0.54
0.2	0.5793	0.58
0.3	0.6179	0.62
0.4	0.6554	0.65
0.5	0.6915	0.69
0.6	0.7257	0.72
0.7	0.7580	0.76

b) La probabilidad de que un espécimen no supere los 10 meses es:

$$p = P(X < 10) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{10-8.8}{3}\right) = P(Z < 0.4) = 0.6554$$

Y = Número de especímenes que no superan los 10 meses de un grupo de 4.

Esta variable aleatoria es una binomial con parámetros $n = 4$ y $p = 0.6554$. $Y = B(4, 0.6554)$

Nos piden calcular $P(Y \geq 1)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0.6554^0 (1-0.6554)^4 = 1 - 0.3446^4 = \boxed{0.9859}$$

c) Nos piden hallar el valor de c tal que $P(8.8 - c < X < 8.8 + c) = 0.98$.

$$P(8.8 - c < X < 8.8 + c) = 0.98 \Rightarrow P\left(\frac{8.8 - c - 8.8}{3} < Z < \frac{8.8 + c - 8.8}{3}\right) = 0.98 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-c}{3} < Z < \frac{c}{3}\right) = 0.98 \Rightarrow P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - P\left(Z < -\frac{c}{3}\right) = 0.98 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - P\left(Z \geq \frac{c}{3}\right) = 0.98 \Rightarrow P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - \left[1 - P\left(Z < \frac{c}{3}\right)\right] = 0.98 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - 1 + P\left(Z < \frac{c}{3}\right) = 0.98 \Rightarrow 2 \cdot P\left(Z < \frac{c}{3}\right) = 0.98 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{c}{3}\right) = \frac{1.98}{2} = 0.99 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la tabla } N(0,1) \\ \text{la probabilidad de 0.99} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{c}{3} \approx 2.325 \Rightarrow \boxed{c \approx 6.975}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664

2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} ax - 2y + (a-1)z &= 4 \\ -2x + 3y - 6z &= 2 \\ -ax + y - 6z &= 6 \end{aligned} \right\}$$

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a .

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 1$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} a & -2 & a-1 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -a & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A y vemos para que valores de a se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{vmatrix} = -18a - 12a - 2a + 2 + 3a(a-1) + 24 + 6a = 3a^2 - 29a + 26$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3a^2 - 29a + 26 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4(3)(26)}}{6} = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4(3)(26)}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{29 \pm 23}{6} = \begin{cases} \frac{29+23}{6} = \frac{52}{6} = \frac{26}{3} = a \\ \frac{29-23}{6} = 1 = a \end{cases}$$

Surgen tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq \frac{26}{3}$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (solución única)

CASO 2. $a = 1$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$. Utilizamos Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \hline 2 \quad -4 \quad 0 \quad 8 \\ 0 \quad -1 \quad -6 \quad 10 \\ \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ \hline -1 \quad 1 \quad -6 \quad 6 \\ 1 \quad -2 \quad 0 \quad 4 \\ 0 \quad -1 \quad -6 \quad 10 \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ \hline 0 \quad -1 \quad -6 \quad 10 \\ 0 \quad 1 \quad 6 \quad 10 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Equivalente a } A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Al ser la cuarta fila toda nula sabemos que el rango de la matriz A y el de la ampliada es 2, siendo el número de incógnitas 3. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

CASO 3. $a = \frac{26}{3}$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} \frac{26}{3} & -2 & \frac{23}{3} & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -\frac{26}{3} & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$ Utilizamos Gauss para obtener

una matriz triangular equivalente.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \begin{pmatrix} \frac{26}{3} & -2 & \frac{23}{3} & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -\frac{26}{3} & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 1^a \rightarrow \text{Nueva Fila } 1^a \\ 3 \cdot \text{Fila } 3^a \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 26 & -6 & 23 & 12 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -26 & 3 & -18 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 13 \cdot \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ \hline -26 \quad 39 \quad -78 \quad 26 \\ 26 \quad -6 \quad 23 \quad 12 \\ \hline 0 \quad 33 \quad -55 \quad 38 \\ \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ \hline -26 \quad 3 \quad -18 \quad 18 \\ 26 \quad -6 \quad 23 \quad 12 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 5 \quad 30 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 26 & -6 & 23 & 12 \\ 0 & 33 & -55 & 38 \\ 0 & -3 & 5 & 30 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 11 \cdot \text{Fila } 3^a \\ \hline 0 \quad 33 \quad -55 \quad 38 \\ 0 \quad -33 \quad 55 \quad 330 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 368 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Equivalente a } A/B = \begin{pmatrix} \overbrace{26 \quad -6 \quad 23 \quad 12}^{A/B} \\ 0 \quad 33 \quad -55 \quad 38 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 368}_A \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la ampliada es 3. Los rangos tienen valor distinto y el sistema es incompatible (no tiene solución).

Resumiendo: Si $a \neq \frac{26}{3}$ y $a \neq 1$ sistema es compatible determinado (solución única), si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $a = \frac{26}{3}$ el sistema es incompatible (no tiene solución).

- b) Para $a = 1$ hemos obtenido un sistema equivalente en el CASO 2 del apartado a). Utilizando esta transformación, el sistema inicial es equivalente al sistema siguiente que resolvemos:

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 4 \\ -y - 6z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 2y \\ -6z = 10 + y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 2y \\ z = \frac{10 + y}{-6} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = t \\ z = \frac{10 + t}{-6} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.
 b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$.
 Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.
 c) (0.75 puntos) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) dx$.

- a) Para que sea continua deben ser iguales el valor de la función y sus límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0e^0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sen} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^x = 0e^0 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

La función es continua en $x = 0$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ y su derivada es:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ e^x + xe^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = 0$ deben coincidir sus derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x + xe^x = e^0 + 0e^0 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$

La función es derivable en $x = 0$.

- b) Gracias a la continuidad de la función podemos dividir el estudio en dos partes: $(-\pi, 0)$ y $(0, 2)$.

En $(-\pi, 0)$ la función es $f(x) = \operatorname{sen} x$ y su derivada es $f'(x) = \cos x$, que se anula en $-\frac{\pi}{2}$.

Vemos cómo evoluciona la función antes y después de este valor.

- En $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ tomamos $x = -\frac{3\pi}{4}$ y la derivada es $f'\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) < 0$. La función decrece en $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$.
- En $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ tomamos $x = -\frac{\pi}{4}$ y la derivada es $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) > 0$. La función crece en $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

En $(0, 2)$ la función es $f(x) = xe^x$ y su derivada es $f'(x) = e^x + xe^x$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x + xe^x = 0 \Rightarrow e^x(1+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 & \text{No es posible} \\ 1+x = 0 \Rightarrow x = -1 \notin (0, 2) \end{cases}$$

La derivada no se anula, siempre es positiva y la función siempre es creciente, ya que $f'(x) = e^x + xe^x > 0$ si $0 < x < 2$

Resumiendo: La función decrece en $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ y crece en $\left(-\frac{\pi}{2}, 2\right)$

Segunda pregunta. En el intervalo $[0, 1]$ nuestra función es $f(x) = xe^x$, que es continua en el intervalo, además $f(0) = 0$ y $f(1) = e$, como $2 \in [0, e]$ por el teorema de los valores intermedios existe un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 2$.

- c) Por el cambio de definición de la función en $x = 0$ obtenemos la integral definida pedida como la suma dos integrales definidas, una entre $-\frac{\pi}{2}$ y 0, la otra entre 0 y 1.

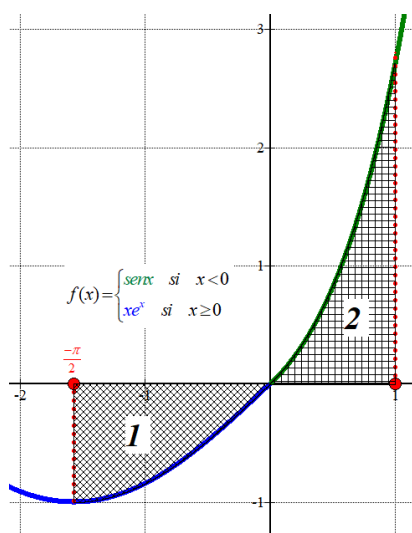
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x dx + \int_0^1 xe^x dx = \boxed{1} + \boxed{2} = \dots$$

$$\boxed{1} = \left[-\cos x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\cos 0 + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 0 = -1$$

$$\boxed{2} \Rightarrow \int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

$$\int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x - e^x \right]_0^1 = \left[1e^1 - e^1 \right] - \left[(0)e^0 - e^0 \right] = e - e + 1 = 1$$

$$\dots = -1 + 1 = \boxed{0}$$



B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

- a) (1.5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.
 b) (0.5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2 .
 c) (0.5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y .

- a) Si los planos son paralelos a $\pi_1 \equiv x + y = 1$ entonces tienen ecuación $\pi_3 \equiv x + y = D$ y $\pi_4 \equiv x + y = E$.

Como $d(\pi_3, (0, 0)) = 2$ y $d(\pi_4, (0, 0)) = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_3 \equiv x + y - D = 0 \\ d(\pi_3, (0, 0, 0)) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = \frac{|0 + 0 - D|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} \Rightarrow 2\sqrt{2} = |D| \Rightarrow \begin{cases} D = 2\sqrt{2} \\ 0 \\ D = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

Estos serían los dos planos pedidos: $\pi_3 \equiv x + y = 2\sqrt{2}$ y $\pi_4 \equiv x + y = -2\sqrt{2}$

- b) Si la recta es perpendicular al plano tiene como vector director el normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_2 \equiv x + z = 1 \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 0, 1) \\ (0, 2, 0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}}$$

- c) Hallemos los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + y = 1 \\ \text{eje } OX \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow t + 0 = 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow A(1, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + y = 1 \\ \text{eje } OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + t = 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow B(0, 1, 0)$$

Hallamos las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ y la distancia entre los puntos es el módulo del vector.

$$\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$$

$$\boxed{d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ u}}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

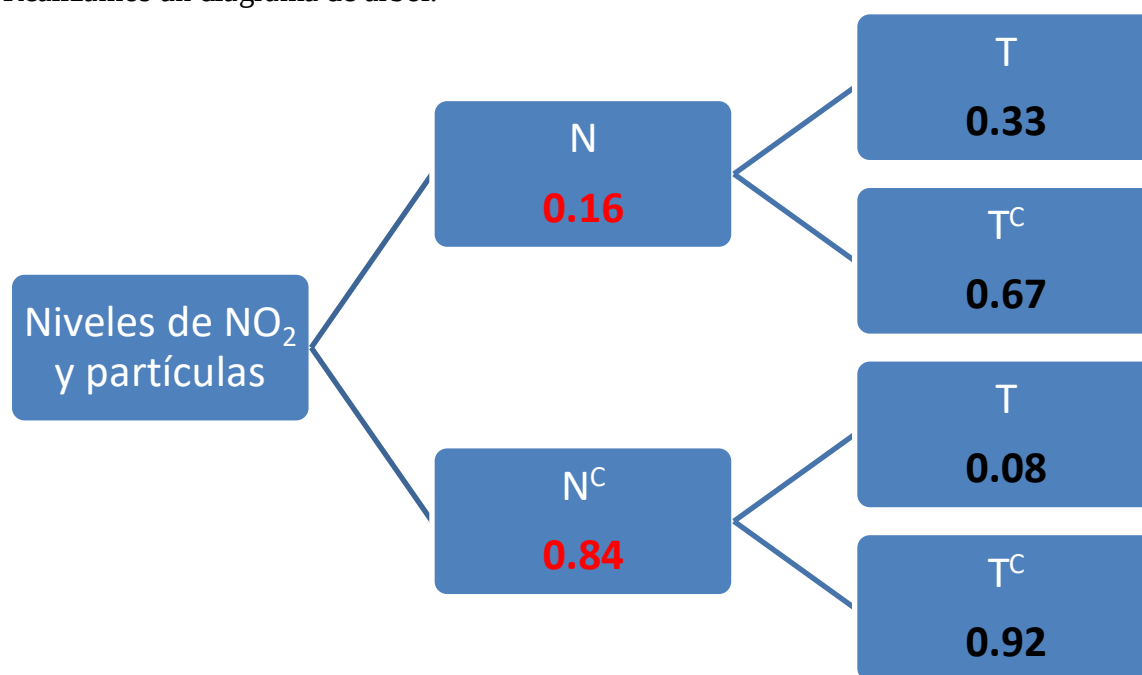
Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2 , la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2 , la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

- a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?
- b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?
- c) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos “en un día se supera el nivel permitido de NO_2 ” y “en un día se supera el nivel permitido de partículas”?
- d) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2 , sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Llamamos N = “Nivel de NO_2 superior al permitido”.

T = “Nivel de partículas superior al permitido”

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular la probabilidad del suceso $N \cap T$.

$$P(N \cap T) = P(N)P(T / N) = 0.16 \cdot 0.33 = \boxed{0.0528}$$

- b) Con el suceso contrario la probabilidad de que al menos se supere uno de los indicadores sería $1 - \text{Probabilidad de que ninguno de los se supere}$.

$$\begin{aligned} P(\text{Al menos se supere uno de los indicadores}) &= 1 - P(\overline{N} \cap \overline{T}) = \\ &= 1 - P(\overline{N})P(\overline{T} / \overline{N}) = 1 - 0.84 \cdot 0.92 = \boxed{0.2272} \end{aligned}$$

- c) ¿Son independientes los sucesos N y T ?

Calculamos la probabilidad de la intersección de ambos sucesos y la probabilidad de ambos por separado y vemos si $P(N \cap T) = P(N)P(T)$.

$$P(N \cap T) = \{\text{apartado a)}\} = 0.0528$$

$$P(N) = 0.16$$

$$P(T) = P(N \cap T) + P(\bar{N} \cap T) = 0.16 \cdot 0.33 + 0.84 \cdot 0.08 = \frac{3}{25} = 0.12$$

$$\left. \begin{array}{l} P(N \cap T) = 0.0528 \\ P(N)P(T) = 0.16 \cdot 0.12 = 0.0192 \end{array} \right\} \Rightarrow P(N \cap T) \neq P(N)P(T)$$

Los sucesos no son independientes.

d) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(N/\bar{T}) = \frac{P(N \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(N)P(\bar{T}/N)}{P(\bar{T})} = \frac{0.16 \cdot 0.67}{1 - 0.12} = \boxed{\frac{67}{550} \approx 0.1218}$$

EvAU 2020 Extraordinaria Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2019-2020 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3, 4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

- (0.5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.
- (0.5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.
- (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
- (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
- (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

- (0.5 puntos) Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.
- (1.25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.
- (0.75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(3, 3, 0)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$, se pide:

- (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r .
- (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r .
- (0.75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen tres urnas A , B y C . La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.
- (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.

- c) (0.5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A .
- (0.5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.
- (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

- (0.5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.
- (0.75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.
- (1.25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante t , $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(4, 3, -2)$. Se pide:

- (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC .
- (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.
- (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X , Y . Sabemos que $P(X) = 0.4$ y que $P(X \cap \overline{Y}) = 0.08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:

- (1 punto) Calcular $P(Y)$.
- (0.5 puntos) Calcular $P(X \cup Y)$.
- (1 punto) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X , y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3, 4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

- (0.5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.
- (0.5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.
- (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
- (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
- (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

La matriz A tiene la expresión $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ siendo $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ y $d \neq 0$.

- a) $(a \ b \ c \ d) = \alpha(1,1,1,1) + \beta(1,2,3,4)$. Por ejemplo, ponemos $\alpha = 1$ y $\beta = 1$.

Quedaría $(a \ b \ c \ d) = (1,1,1,1) + (1,2,3,4) = (2,3,4,5)$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

- b) Cambiamos en la matriz del apartado a) un elemento de la 3ª fila y comprobamos que son linealmente independientes viendo que el rango de A es 3.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Tomo el menor formado por 1ª, 2ª y 3ª columnas, veamos si su

determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 + 3 - 2 - 4 - 9 = -1 \neq 0$$

Por lo que el rango de A es 3 y las filas son linealmente independientes.

- c) Para que sea la matriz ampliada de un sistema compatible determinado debe tener rango 3 al igual que la matriz de los coeficientes.

Tomamos como matriz ampliada la matriz del apartado b) que era $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

La matriz de coeficientes sería $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Hemos comprobado en el apartado b) que la matriz A tiene rango 3 y la matriz de coeficientes también, pues su determinante es no nulo (calculado arriba). Por lo que la matriz A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.

- d) Para que sea la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado debe ocurrir lo planteado en el apartado a).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ tiene rango 2 pues la 3ª fila es combinación lineal de la 1ª y 2ª. El rango}$$

de la matriz de coeficientes también es 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$ y el menor de orden 2 que

resulta de quitar la fila y columna 3ª es $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$.

Rango de matriz de coeficientes y rango de matriz ampliada son iguales a 2, que es menor que el número de incógnitas (3). Sistema compatible indeterminado.

- e) Para que sea incompatible el rango de la matriz ampliada debe ser 3 y la de la matriz de

$$\text{coeficientes 2. Nos sirve } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} & 5 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos el rango de la matriz de coeficientes.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ tiene la fila 2ª y 3ª iguales, el rango no es 3 y si tomamos el menor que resulta de

quitar fila y columna 3ª tiene determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, por lo que el rango es 2.

Comprobamos el rango de la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} & 5 \end{pmatrix}. \text{ Consideramos el menor que resulta al quitar la columna 1ª } \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ \color{red}{2} & \color{red}{3} & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 - 6 - 6 - 10 - 12 = -27 \neq 0.$$

El rango de la ampliada es 3 y el de la matriz de coeficientes es 2, por lo que el sistema sería incompatible.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.
 b) (1.25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.
 c) (0.75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

a) $f(0) = \frac{0-1}{0^2-1} = 1$

$$(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(1) = \frac{1^2+1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

b) Para ser continua en $x = 1$ debe cumplirse:

- Existe $f(1) = \frac{1^2+1}{4} = \frac{1}{2}$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{4x} = \frac{1}{2} \end{cases} = \frac{1}{2}$
- Son iguales. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

Se cumplen las tres condiciones y la función es continua en $x = 1$.

Para ser derivable en $x = 1$ deben coincidir las derivadas laterales.
 Antes de derivar simplifico la función.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x+1)^2} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{2x \cdot 4x - 4(x^2+1)}{(4x)^2} = \frac{8x^2 - 4x^2 - 4}{(4x)^2} = \frac{4x^2 - 4}{(4x)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Por lo que las derivadas laterales en $x = 1$ son:

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(1+1)^2} = -\frac{1}{4} \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^2 - 4}{(4x)^2} = \frac{4-4}{(4)^2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(1^-) = -\frac{1}{4} \neq 0 = f'(1^+)$$

Su valor no coincide y la función no es derivable en $x = 1$.

Para ver si hay un extremo en $x = 1$ no podemos utilizar la derivada. Veamos cómo evoluciona la función antes y después de $x = 1$.

Antes de $x = 1$ la derivada es $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ que siempre es negativa, por lo que la función

decrece antes de $x = 1$.

Después de $x = 1$ la derivada es $f'(x) = \frac{4x^2 - 4}{(4x)^2} = \frac{x^2 - 1}{4x^2}$ que de 1 en adelante siempre es positiva, por lo que la función crece después de $x = 1$.

La función es continua en $x = 1$, decrece antes y crece después, por lo que en $x = 1$ hay un mínimo relativo.

c) La función es $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, estudiamos las asíntotas en sus dos ramas.

- En $x < 1$ la función es una fracción cuyo denominador se anula en $x = -1$ y $x = 1$. Comprobamos los límites de la función en esos dos puntos:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{-2}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

- En $x > 1$ la definición de la función es una fracción cuyo denominador se anula en $x = 0$, pero no pertenece al dominio de definición de esa rama de la función.

Asíntota vertical. $x = a$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{-2}{0} = \infty$$

La asíntota vertical es $x = -1$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = \frac{+\infty}{4} = +\infty$$

La asíntota horizontal en $-\infty$ es $y = 0$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

En $-\infty$ no existe pues hay asíntota horizontal.

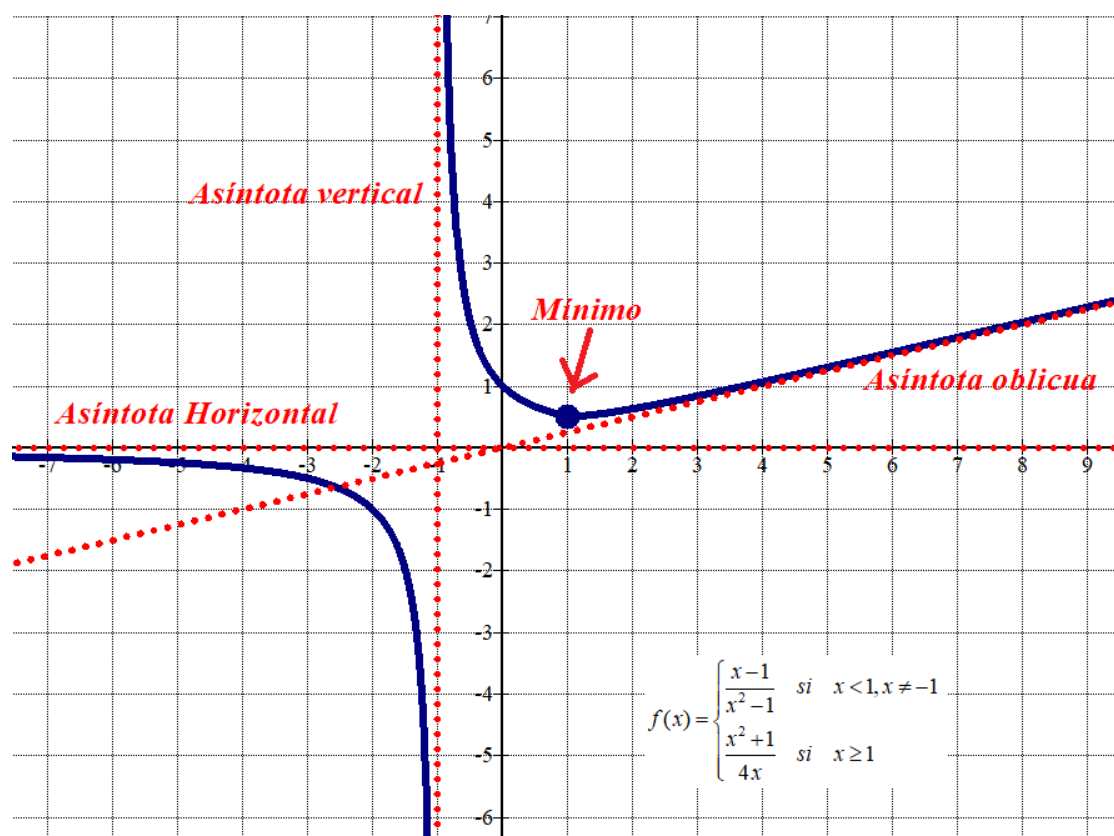
Busquemos la asíntota oblicua en $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2+1}{4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2}+1}{4\cancel{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{4x} - \frac{x}{4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua en $+\infty$ es $y = \frac{1}{4}x$.

Dibujamos la gráfica de la función y comprobamos que se cumple todo lo obtenido en el ejercicio.



A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(3, 3, 0)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$, se pide:

- (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r .
- (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r .
- (0.75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A .

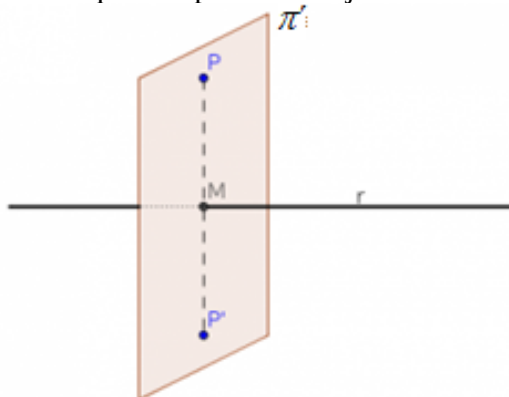
- a) La recta r tiene como vector director $\vec{v}_r = (-1, 1, 0)$ y pasa por el punto $Q(2, 0, -1)$.

El plano que nos piden pasa por $P(3, 3, 0)$ y al contener a la recta r tiene como vectores directores $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} P(3, 3, 0) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (-1, 1, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (2, 0, -1) - (3, 3, 0) = (-1, -3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-x+3+3z+z-y+3=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x+y-4z-6=0}$$

- b) Llamemos P' al punto simétrico que nos piden. Dibujamos la situación planteada.



Buscamos las coordenadas del punto P' del dibujo.

Hallamos la ecuación del plano π' perpendicular a la recta que pasa por el punto P . El punto de corte de recta y plano será el punto M .

El punto P' (simétrico de P respecto de la recta r) tendrá coordenadas tales que M sea el punto medio del segmento PP' .

El plano π' tiene como vector normal el director de la recta $\vec{v}_r = (-1, 1, 0)$, por lo que su ecuación es $-x + y + D = 0$, como pasa por el punto $P(3, 3, 0)$ debe cumplirse:

$$-3+3+D=0 \Rightarrow D=0.$$

La ecuación del plano es $\pi' \equiv -x + y = 0$.

Hallamos el punto M resolviendo el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de la recta y la ecuación del plano.

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} r &\equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0} \\ \pi' &\equiv -x+y=0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow r &\equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow -2+\lambda+\lambda=0 \Rightarrow 2\lambda=2 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} x=2-1 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow M(1,1,-1)
 \end{aligned}$$

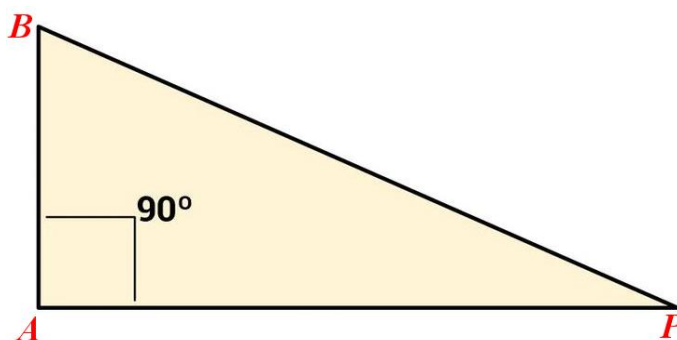
El punto $M(1,1,-1)$ es el punto medio del segmento $P'P$.

Si $P'(a,b,c)$ entonces:

$$(1,1,-1) = \frac{(a,b,c) + (3,3,0)}{2} \Rightarrow (2,2,-2) = (a+3, b+3, c) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} a+3 &= 2 \\ b+3 &= 2 \\ c &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a &= -1 \\ b &= -1 \\ c &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{P'(-1,-1,-2)}
 \end{aligned}$$

- c) La recta r tiene ecuaciones paramétricas $r \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1 \end{cases}$, por lo que los puntos buscados tienen coordenadas $A(2-a, a, -1)$ y $B(2-b, b, -1)$.

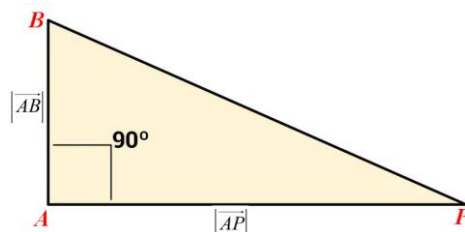


El triángulo es rectángulo en el vértice A, entonces los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AB}$ forman 90° y su producto escalar es 0.

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (3,3,0) - (2-a, a, -1) = (1+a, 3-a, 1) \\ \overrightarrow{AB} &= (2-b, b, -1) - (2-a, a, -1) = (a-b, b-a, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow (1+a)(a-b) + (3-a)(b-a) &= 0 \Rightarrow (1+a)(a-b) + (3-a)(b-a) = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow (1+a)(a-b) - (3-a)(a-b) &= 0 \Rightarrow (a-b)[1+a-3+a] = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \rightarrow a=b \\ 0 \\ 2a-2=0 \rightarrow a=1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Si $a = b \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AP} = (1+a, 3-a, 1) \\ \overrightarrow{AB} = (0, 0, 0) \end{cases}$ no nos sirve esta opción pues si $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 0)$ entonces los puntos A y B serían los mismos y no se formaría triángulo.

Si $a = 1 \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AP} = (2, 2, 1) \\ \overrightarrow{AB} = (1-b, b-1, 0) \end{cases}$ Aplicamos la condición de que el área del triángulo sea $\frac{3}{\sqrt{2}}$.



$$\text{Área} = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AB}| = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{4+4+1} \sqrt{(1-b)^2 + (b-1)^2} = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2(1-b)^2} = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2(1-b)^2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2(1-b)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow 2(1-b)^2 = \frac{4}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-b)^2 = 1 \Rightarrow 1-b = \sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} 1-b=1 \Rightarrow b=0 \\ 1-b=-1 \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

Las parejas de puntos solución del ejercicio son:

Para $a = 1$ y $b = 0 \rightarrow A(1, 1, -1)$ y $B(2, 0, -1)$

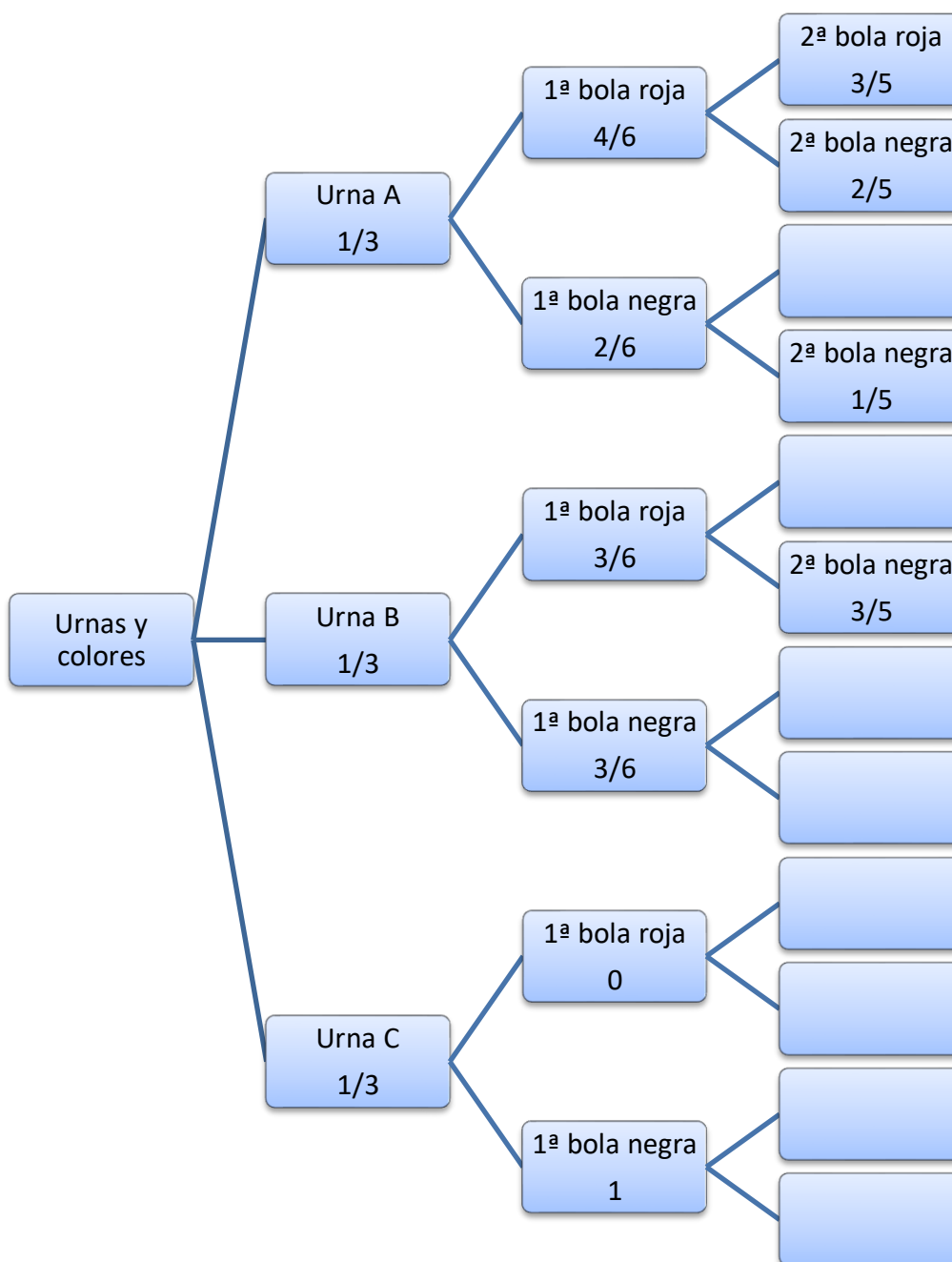
Para $a = 1$ y $b = 2 \rightarrow A(1, 1, -1)$ y $B(0, 2, -1)$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.
- (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.
- (0.5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

Realizamos un diagrama de árbol. Aunque en este caso se obtiene un diagrama algo complejo, pero nos ayuda a entender la situación planteada y cómo influye lo ocurrido en la 1ª extracción en la probabilidad de lo que ocurra en la 2ª. Dejamos opciones sin rellenar pues no es necesario para calcular lo pedido en el ejercicio.



- a) Ocurre de dos formas diferentes, aplicamos el teorema de la probabilidad total y su probabilidad es:

$$\begin{aligned}
 P(1^{\text{a}} \text{ bola roja}) &= P(\text{Elegir urna A}) P(1^{\text{a}} \text{ bola roja} / \text{Haber elegido urna A}) + \\
 &+ P(\text{Elegir urna B}) P(1^{\text{a}} \text{ bola roja} / \text{Haber elegido urna B}) + \\
 &+ P(\text{Elegir urna C}) P(1^{\text{a}} \text{ bola roja} / \text{Haber elegido urna C}) = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} + 0 = \frac{4+3}{18} = \boxed{\frac{7}{18} = 0,384}
 \end{aligned}$$

- b) Puede ocurrir de dos formas distintas.

$$\begin{aligned}
 P(1^{\text{a}} \text{ bola roja y } 2^{\text{a}} \text{ negra}) &= \\
 &= P(\text{Elegir urna A}) P(1^{\text{a}} \text{ roja} / \text{urna A}) P(2^{\text{a}} \text{ negra} / \text{urna A y sacar } 1^{\text{a}} \text{ roja}) + \\
 &+ P(\text{Elegir urna B}) P(1^{\text{a}} \text{ roja} / \text{urna B}) P(2^{\text{a}} \text{ negra} / \text{urna B y sacar } 1^{\text{a}} \text{ roja}) = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8+9}{90} = \boxed{\frac{17}{90} = 0,182}
 \end{aligned}$$

- c) Utilizamos la fórmula de la probabilidad condicionada.

$$P(2^{\text{a}} \text{ sea negra} / 1^{\text{a}} \text{ es roja}) = \frac{P(1^{\text{a}} \text{ es roja} \cap 2^{\text{a}} \text{ sea negra})}{P(1^{\text{a}} \text{ es roja})} = \frac{17/90}{7/18} = \boxed{\frac{17}{35} = 0,486}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A .
 b) (0.5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.
 c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

a) $|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 2 + 2 + 0 = 1 \neq 0$. Existe la inversa y la calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$C = A^2 - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$C = \begin{pmatrix} 0-2+2 & 0-1+0 & 0+1+2 \\ 0+1+0 & -2+1+0 & 4-1-1 \\ 0+0+1 & -1+0+0 & 2+0+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Calculamos la matriz D y luego su determinante.

$$D = ABB^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2-2 & -1 & 2 \\ 10+2+1 & 4+1 & -2-1 \\ 5-1 & 2 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |D| = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 52 - 40 - 24 = 0$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

- (0.5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.
- (0.75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.
- (1.25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante t , $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

a) Esto significa calcular el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 25te^{-t^2/4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25t}{e^{t^2/4}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{e^{t^2/4} \frac{2t}{4}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{t}{2} e^{t^2/4}} = \frac{25}{\infty} = 0\end{aligned}$$

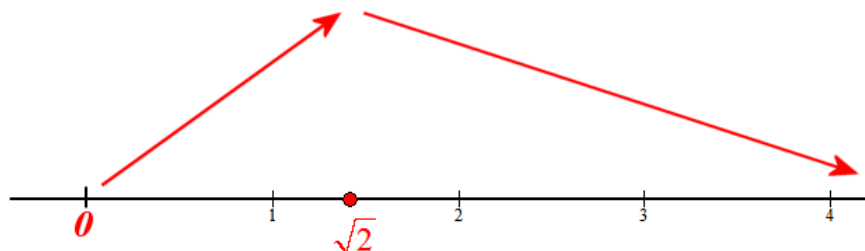
La potencia generada por la pila tiende a cero.

b) Utilizamos la derivada.

$$\begin{aligned}P'(t) &= 25e^{-t^2/4} + 25t \frac{-2t}{4} e^{-t^2/4} = 25e^{-t^2/4} - 25 \frac{t^2}{2} e^{-t^2/4} = 25e^{-t^2/4} \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow P'(t) = 0 &\Rightarrow 25e^{-t^2/4} \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{2} = 0 \rightarrow 1 = \frac{t^2}{2} \rightarrow t^2 = 2 \rightarrow t = +\sqrt{2} \\ e^{-t^2/4} = 0 \rightarrow \text{Imposible} \end{cases}\end{aligned}$$

Veamos la evolución de la potencia entre 0 y $\sqrt{2}$, y después de $\sqrt{2}$.

- En $(0, \sqrt{2})$ tomo $t = 1$ y la derivada vale $P'(1) = 25e^{-1/4} \left(1 - \frac{1^2}{2}\right) = \frac{25e^{-1/4}}{2} > 0$. La potencia crece en $(0, \sqrt{2})$.
- En $(\sqrt{2}, +\infty)$ tomo $t = 2$ y la derivada vale $P'(2) = 25e^{-2^2/4} \left(1 - \frac{2^2}{2}\right) = -25e^{-1} < 0$. La potencia decrece en $(\sqrt{2}, +\infty)$.



La potencia presenta un máximo valor en $t = \sqrt{2} = 1,41$. Siendo esta potencia máxima de

$$P(\sqrt{2}) = 25\sqrt{2}e^{-(\sqrt{2})^2/4} = 25\sqrt{2}e^{-1/2} = 25\sqrt{\frac{2}{e}} = 21,44$$

- c) Si $E'(t) = P(t)$ entonces la energía es la primitiva de $P(t)$ con $E(0) = 0$.
Calculo la integral de $P(t)$.

$$\int P(t)dt = \int 25te^{-t^2/4}dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ -\frac{t^2}{4} = x \Rightarrow -\frac{2t}{4}dt = dx \\ -\frac{t}{2}dt = dx \Rightarrow dt = -\frac{2}{t}dx \end{array} \right\} = 25 \int te^x \left(-\frac{2}{t}dx \right) =$$

$$= -50 \int e^x dx = -50e^x = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshaciendo el cambio de variable} \\ -\frac{t^2}{4} = x \end{array} \right\} \Rightarrow \int P(t)dt = -50e^{-t^2/4} + K$$

Hemos obtenido que $E(t) = -50e^{-t^2/4} + K$.

Como $E(0) = 0 \Rightarrow E(0) = -50e^{-0^2/4} + K = 0 \Rightarrow -50 + K = 0 \Rightarrow K = 50$

La función Energía tiene la expresión $E(t) = -50e^{-t^2/4} + 50$

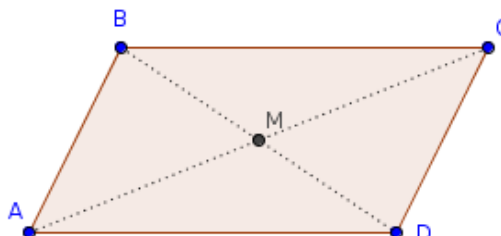
Para calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$, valoramos la función energía en el instante $t = 2$.

$$E(2) = -50e^{-2^2/4} + 50 = 50 - 50e^{-1} \approx 31.6$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(4, 3, -2)$. Se pide:

- (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC .
- (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.
- (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.



- La recta que nos piden es una recta r que pasa por el punto M y es perpendicular al plano que define el paralelogramo. Su vector director es el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$.

Hallamos las coordenadas del punto M .

$$M = \frac{(1, 0, -1) + (4, 3, -2)}{2} = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

Hallamos las coordenadas del vector director de la recta $\vec{v}_r$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (2, 1, 0) - (1, 0, -1) = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (4, 3, -2) - (1, 0, -1) = (3, 3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_r = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -i + 3j + 3k - 3k + j - 3i = -4i + 4j \Rightarrow \vec{v}_r = (-4, 4, 0)$$

Tomaremos como vector director el anterior simplificado.

Obtenemos la expresión de la ecuación de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} M = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \in r \\ \vec{v}_r = (-4, 4, 0) \rightarrow \vec{u}_r = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{5}{2} - \lambda \\ y = \frac{3}{2} + \lambda \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

- Para hallar las coordenadas de D basta sumarle al punto C el vector $\overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{BA} = (1, 0, -1) - (2, 1, 0) = (-1, -1, -1) \Rightarrow D = C + \overrightarrow{BA} = (4, 3, -2) + (-1, -1, -1) = (3, 2, -3)$$

El valor del área se obtiene con el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$, que ya hemos calculado.

$$\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0) - (1, 0, -1) = (1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AD} = (4, 3, -2) - (1, 0, -1) = (3, 3, -1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -i + 3j + 3k - 3k + j - 3i = -4i + 4j = (-4, 4, 0)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$$

$$\text{Área del paralelogramo ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{32} = \boxed{5,66 \, u^2}$$

c) Utilizamos el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 1, 0) - (1, 0, -1) = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (4, 3, -2) - (1, 0, -1) = (3, 3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)(3, 3, -1) = 3 + 3 - 1 = 5$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow 5 = \sqrt{1+1+1} \sqrt{9+9+1} \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{19}} = \frac{5}{\sqrt{57}} \approx 0,66}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X , Y . Sabemos que $P(X) = 0.4$ y que $P(X \cap \bar{Y}) = 0.08$ (donde $\bar{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:

- a) (1 punto) Calcular $P(Y)$.
 b) (0.5 puntos) Calcular $P(X \cup Y)$.
 c) (1 punto) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X , y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

- a) Si son independientes los sucesos X e Y se cumple $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$.

$$P(X \cap Y) = P(X)P(Y) = 0.4 \cdot P(Y)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(X \cap \bar{Y}) = 0.08 \\ P(X) = 0.4 \\ P(X \cap Y) = 0.4 \cdot P(Y) \\ P(X) = P(X \cap Y) + P(X \cap \bar{Y}) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.4 = 0.4 \cdot P(Y) + 0.08 \Rightarrow 0.4 \cdot P(Y) = 0.4 - 0.08 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(Y) = \frac{0.32}{0.4} = 0.8}$$

- b) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(Y) = 0.8 \\ P(X) = 0.4 \\ P(X \cap Y) = 0.4 \cdot P(Y) = 0.4 \cdot 0.8 = 0.32 \\ P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \end{array} \right\} \Rightarrow P(X \cup Y) = 0.4 + 0.8 - 0.32 = \boxed{0.88}$$

- c) Es una binomial donde n = Número de repeticiones = 8

$$p = P(\text{éxito}) = P(\bar{X}) = 1 - P(X) = 1 - 0.4 = 0.6$$

Sea X = Número de éxitos en 8 repeticiones. $X = B(8, 0.6)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] =$$

$$= 1 - \left[\binom{8}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^8 + \binom{8}{1} 0.6^1 \cdot 0.4^7 \right] = 1 - [0.4^8 + 8 \cdot 0.6 \cdot 0.4^7] = \boxed{0.991}$$

La probabilidad de tener éxito al menos 2 veces es de 0.991.

EvAU 2020 Ordinaria Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2019-2020 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} x + ay + z &= a + 1 \\ -ax + y - z &= 2a \\ -y + z &= a \end{aligned} \right\}$$

Se pide:

- (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a .
- (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 0$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

- (0.5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.
- (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.
- (1 punto) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

se pide:

- (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s .
- (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$.
- (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

- b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.
 c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4; 4]$.
 b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4; 4]$.
 c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $P(-3, 1, 2)$ y $Q(-1, 0, 1)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 3z = 4$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π .
 b) (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P .
 c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q .

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.25$ y $P(A \cap B) = 0.125$.

Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

- a) (0.5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B . ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?
 b) (0.5 puntos) ¿Son A y B independientes?
 c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ (donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).
 d) (0.75 puntos) Calcular $P(\overline{B} / A)$.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} x + ay + z &= a + 1 \\ -ax + y - z &= 2a \\ -y + z &= a \end{aligned} \right\}$$

Se pide:

- a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a .
 b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 0$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + a + a^2 - 1 = a^2 + a$$

Si igualamos a cero el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución. Es **compatible determinado**.

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante es nulo. El rango de A no es 3.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Tomamos el menor que resulta de quitar la 3ª fila y la 3ª columna $\rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

Averiguamos el rango de $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Se observa que la columna 1ª y 4ª son iguales, por lo que el rango de A/B es el mismo que el de A .

El rango de A es 2, al igual que el de A/B , pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema tiene infinitas soluciones. Es **compatible indeterminado**.

CASO 3. $a = -1$

En este caso el determinante es nulo. El rango de A no es 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ La 2ª y 3ª columnas son proporcionales, por lo que tomamos el menor}$$

que resulta de quitar la 3ª fila y la 3ª columna $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

$$\text{Averiguamos el rango de } A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ Se observa que la columna 2ª y 3ª}$$

son proporcionales, por lo que considero el menor de orden 3 que resulta de quitar la 2ª

$$\text{columna } \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ con determinante } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 2 = 4 \neq 0. \text{ El rango de}$$

A/B es 3.

El rango de A es 2 distinto del rango de A/B que es 3. El sistema no tiene solución. El **sistema es incompatible**.

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el sistema es **compatible determinado**. Si $a = 0$ el sistema es **compatible indeterminado** y si $a = -1$ el sistema es **incompatible**.

b) Para $a = 0$ estamos en el caso 2 por lo que es compatible indeterminado.

Hallamos la expresión de las infinitas soluciones del sistema.

$$\left. \begin{matrix} x + z = 1 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Ecuación 2ª} = \text{Ecuación 3ª} \\ \text{Quito ecuación 3ª} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x = 1 - z \\ y = z \end{matrix} \right\}$$

La solución es $\boxed{x = 1 - t; \quad y = t; \quad z = t \text{ con } t \in \mathbb{R}}$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.
- b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.
- c) (1 punto) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$

- a) Consideramos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 - 1 - 6x = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$.

La función $h(x)$ es un polinomio y es continua en $[1, 10]$. Toma en los extremos del intervalo valores de distinto signo:

$$h(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 6 - 1 = -3 < 0 \text{ y } h(10) = 10^3 + 3 \cdot 10^2 - 60 - 1 = 1000 + 300 - 61 = 1239 > 0.$$

Aplicando el teorema de Bolzano tenemos que existe $c \in [1, 10]$ tal que $h(c) = 0 \rightarrow$

$$f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c).$$

- b) La recta tangente tiene como pendiente el valor de la derivada.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x.$$

Para encontrar el valor donde se hace mínima la derivada vuelvo a derivar e igualo a cero.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6x + 6$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow 6x = -6 \Rightarrow x = -1$$

Veamos si la derivada siguiente (tercera) es positiva para $x = -1$.

$$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(-1) = 6 > 0$$

La pendiente de la recta tangente presenta un mínimo en $x = -1$.

La ecuación de la tangente en $x = -1$ es:

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = -1 + 3 - 1 = 1 \\ f'(-1) &= 3(-1)^2 + 6(-1) = 3 - 6 = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 1 = -3(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = -3x - 2}$$

- c)

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x} dx = \int_1^2 \frac{x^3}{6x} + \frac{3x^2}{6x} - \frac{1}{6x} dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2}{6} dx + \int_1^2 \frac{x}{2} dx - \int_1^2 \frac{1}{6x} dx = \frac{1}{6} \int_1^2 x^2 dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x dx - \frac{1}{6} \int_1^2 \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left[\frac{1}{6} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} \ln x \right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{18} + \frac{2^2}{4} - \frac{1}{6} \ln 2 \right] - \left[\frac{1^3}{18} + \frac{1^2}{4} - \frac{1}{6} \ln 1 \right] = \boxed{\frac{41}{36} - \frac{1}{6} \ln 2}$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

se pide:

- (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s .
- (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$.
- (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s .

a) Pasamos la ecuación de la recta r a paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 3x - z = -1 \end{cases} \Rightarrow 3(2 + y) - z = -1 \Rightarrow 6 + 3y - z = -1 \Rightarrow z = 7 + 3y$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 7 + 3t \end{cases}$$

La recta r pasa por el punto $P_r(2, 0, 7)$ y tiene vector director $\vec{u}_r = (1, 1, 3)$

La recta $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ pasa por el punto $Q_s(-1, -4, 0)$ y tiene como uno de sus vectores directores $\vec{v}_s = (2, -1, 1)$.

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales por lo que las rectas no son ni coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, 3) \\ \vec{v}_s = (2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{3}{1}$$

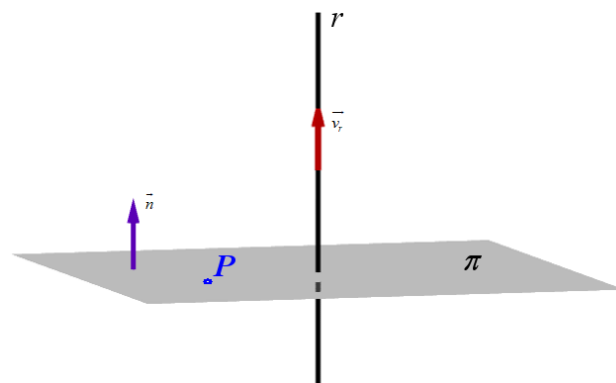
Calculamos el valor del producto mixto de los vectores $\vec{u}_r = (1, 1, 3)$, $\vec{v}_s = (2, -1, 1)$ y $\overrightarrow{P_r Q_s}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, 3) \\ \vec{v}_s = (2, -1, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (-1, -4, 0) - (2, 0, 7) = (-3, -4, -7) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 - 3 - 24 - 9 + 14 + 4 = -36 + 25 = -11 \neq 0$$

Como tiene un valor distinto de cero quiere decir que las dos rectas no son coplanarias y se cruzan.

b) El vector normal del plano $\vec{n}$ es el vector director de la recta $\vec{v}_r = (1, 1, 3)$

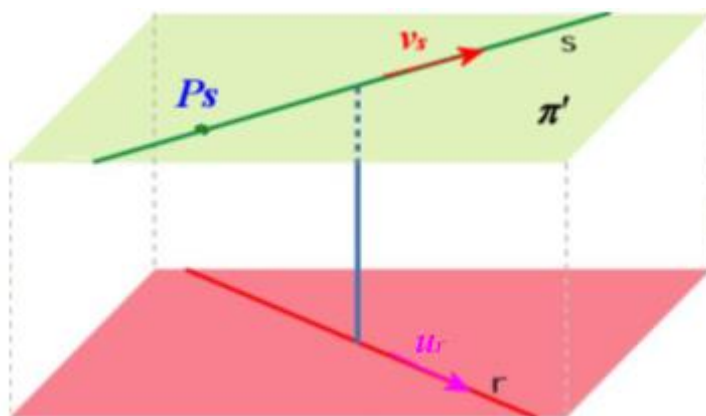


$$\left. \begin{array}{l} P(2, -1, 5) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + 3z + D = 0 \\ P(2, -1, 5) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - 1 + 15 + D = 0 \Rightarrow D = -16$$

$$\boxed{\pi \equiv x + y + 3z - 16 = 0}$$

- c) Si el plano contiene a la recta s entonces pasa por $Q_s(-1, -4, 0)$ y tiene como vector director $\vec{v}_s = (2, -1, 1)$.

Como es paralelo a r entonces también tiene como otro de sus vectores directores el vector director de la recta r : $\vec{u}_r = (1, 1, 3)$.



La ecuación del plano π' queda:

$$\left. \begin{array}{l} Q_s(-1, -4, 0) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{v}_s = (2, -1, 1) \\ \vec{v} = \vec{u}_r = (1, 1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x - 3 + y + 4 + 2z + z - 6y - 24 - x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv -4x - 5y + 3z - 24 = 0}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.
- (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.
- (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

- a) Nos piden la probabilidad de acertar en uno de los intentos 1º, 2º o 3º.

$$P(\text{Acertar en intento 1º o Acertar en intento 2º o Acertar en intento 3º}) =$$

$$= P(\text{Acertar en intento 1º}) + \\ + P(\text{Fallar en intento 1º y Acertar en intento 2º}) + \\ + P(\text{Fallar en intento 1º, Fallar en intento 2º y Acertar en intento 3º}) =$$

$$= 0,30 + 0,7 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,30 + 0,28 + 0,21 = \boxed{0,79}$$

- b) Nos piden la probabilidad de fallar los 4 disparos.

$$P(\text{Fallar el 1º y Fallar el 2º y Fallar el 3º y Fallar el 4º}) = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = \boxed{0,084}$$

- c) Estas son 10 repeticiones con igual probabilidad de éxito en cada intento, por lo que es una binomial de parámetros $n = 10$ y $p = P(\text{acertar en el blanco en un disparo}) = 0,85$.

$$X = \text{Número de aciertos en 10 tiradas. } X = B(10, 0.85).$$

Nos piden calcular $P(X = 6)$.

$$P(X = 6) = \binom{10}{6} 0,85^6 \cdot 0,15^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2}} 0,85^6 \cdot 0,15^4 = 210 \cdot 0,85^6 \cdot 0,15^4 = \boxed{0,04}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

Si se vendieron 7400 toneladas de rodaballo por un valor de 63.6 millones de euros entonces:

$$\frac{63600000}{7400000} = \frac{636}{74} = 8.59 \text{ € / kg}$$

El rodaballo se vendió a 8.59 €/kg.

Si a los 275.8 millones que vale todo el pescado le quitamos los 63.6 millones del rodaballo nos queda $275.8 - 63.6 = 212.2$ millones de euros. Esto es lo que valen las doradas y las lubinas juntas.

Por otro lado, si llamamos “x” al precio del kilo de lubina. Nos dicen que el precio del kilo de dorada es 0.11 € más cara, por lo que el precio de la dorada es “x + 0.11”.

Teniendo en cuenta los ingresos por las lubinas y las doradas (212.2 millones de euros) y los ingresos por la venta de lubina (23440 toneladas) y de dorada (13740 toneladas de doradas) tenemos la ecuación $13740000(x + 0.11) + 23440000x = 212200000$.

Resolvemos esta ecuación.

$$13740000(x + 0.11) + 23440000x = 212200000$$

$$1374(x + 0.11) + 2344x = 21220$$

$$1374x + 151.14 + 2344x = 21220$$

$$3718x = 21068.86$$

$$x = \frac{21068.86}{3718} = 5.67 \text{ € / kg}$$

Aproximadamente los precios son:

La lubina a 5.67 €/kg, la dorada a $5.67 + 0.11 = 5.78$ €/kg y el rodaballo a 8.59 €/kg.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.
 b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.
 c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

- a) Las dos definiciones son polinómicas y no presentan ningún problema de continuidad. Solo hay que comprobar la continuidad en el momento de cambio de definición. Vemos si la función es continua en $x = 1$.

- Existe $f(1) = (1-1)^2 = 0$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 = (1-1)^2 = 0$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^3 = (1-1)^3 = 0$
- Los tres valores son iguales.

Como se cumplen las condiciones la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en todo su dominio y en particular en $[-4, 4]$.

- b) La derivada de la función en $\mathbb{R} - \{1\}$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) = 2x-2 & \text{si } x < 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = 1$ averiguamos si coinciden sus derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^+) &= 3(1-1)^2 = 0 \\ f'(1^-) &= 2-2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

Coinciden los valores de las derivadas laterales, la derivada en $x = 1$ existe y vale $f'(1) = 0$.

Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos $(-4, 1)$ y $(1, 4)$.

La rama $2x-2$ se anula en $x = 1$, por lo que es negativa en $[-4, 1]$ pues es una recta y vale $-8-2 = -10$ en -4 . La función decrece en $(-4, 1)$.

La derivada se anula en $x = 1$.

La rama $3(x-1)^2$ es positiva siempre. La función crece en $(1, 4)$.

La función decrece en $(-4, 1)$ y crece en $(1, 4)$

c) La función $g(x) = f'(x)$ está definida y su expresión es:

$$g(x) = f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Cada una de las ramas es continua pues son polinomios y en $x = 1$ lo comprobamos.

- Existe $g(1) = 2 - 2 = 0$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x - 2 = 0$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3(x-1)^2 = 3(1-1)^2 = 0$
- Los tres valores son iguales.

Como se cumplen todas las condiciones la función $g(x)$ es continua.

Para la derivabilidad en $x = 1$ vemos si coinciden sus derivadas laterales.

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 6(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(1^-) = 2 \\ g'(1^+) = 6(1-1) = 0 \end{cases}$$

No coinciden, por lo que la función no es derivable en $x = 1$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

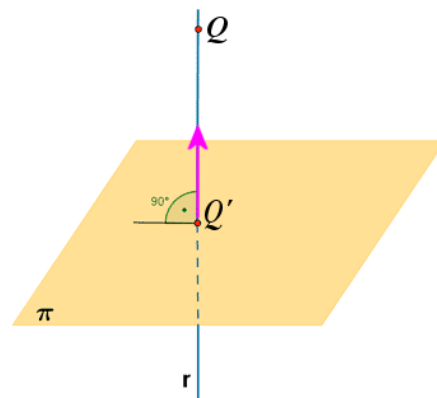
Dados los puntos $P(-3, 1, 2)$ y $Q(-1, 0, 1)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 3z = 4$, se pide:

- (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π .
- (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P .
- (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q .

- a) Seguimos el esquema del dibujo para obtener el punto Q' proyección de Q sobre π .

La recta r perpendicular al plano $x + 2y - 3z = 4$ tiene como vector director el normal del plano $\vec{v}_r = \vec{n} = (1, 2, -3)$ y pasa por el punto $Q(-1, 0, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 2, -3) \\ Q(-1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$



El punto Q' es el punto de corte de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 + t \\ r \equiv y = 2t \\ z = 1 - 3t \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -1 + t + 4t - 3 + 9t = 4 \\ x + 2y - 3z = 4 \end{cases} \Rightarrow 14t = 8 \Rightarrow t = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 + \frac{4}{7} = \frac{-3}{7} \\ y = 2t = \frac{8}{7} \\ z = 1 - 3t = 1 - \frac{12}{7} = \frac{-5}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow Q' \left(\frac{-3}{7}, \frac{8}{7}, \frac{-5}{7} \right)$$

- b) Si el plano π' es paralelo a $x + 2y - 3z = 4$ entonces tiene ecuación $x + 2y - 3z = D$. Como pasa por $P(-3, 1, 2)$ entonces $-3 + 2 - 6 = D \Rightarrow D = -7$.

El plano π' tiene ecuación $\boxed{\pi': x + 2y - 3z = -7}$

- c) Si el plano π'' pasa por P y Q tiene como vector director $\overrightarrow{PQ} = (-1, 0, 1) - (-3, 1, 2) = (2, -1, -1)$. Al ser perpendicular a π' : $x + 2y - 3z = -7$, el vector normal $\vec{n}' = (1, 2, -3)$ es otro vector director del nuevo plano π'' .

$$\left. \begin{array}{l} Q(-1, 0, 1) \in \pi'' \\ \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (2, -1, -1) \\ \vec{v} = \vec{n}' = (1, 2, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi'' \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 3 - y + 4z - 4 + z - 1 + 6y + 2x + 2 = 0 \Rightarrow 5x + 5y + 5z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi'' \equiv x + y + z = 0}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.25$ y $P(A \cap B) = 0.125$.

Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

- a) (0.5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B . ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?
- b) (0.5 puntos) ¿Son A y B independientes?
- c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\overline{A \cap B})$ (donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).
- d) (0.75 puntos) Calcular $P(\overline{B} / A)$.

- a) Si C es incompatible con A quiere decir que no tienen nada en común $\rightarrow A \cap C = \emptyset$
 Si C es incompatible con B quiere decir que no tienen nada en común $\rightarrow B \cap C = \emptyset$
 Entonces C no puede tener nada en común con la unión de los dos sucesos, por lo que C es incompatible con $A \cup B$.

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$$

- b) Para que dos sucesos A y B sean independientes debe cumplirse la igualdad $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.125 \\ P(A)P(B) = 0.5 \cdot 0.25 = 0.125 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.125 = P(A)P(B)$$

Son iguales, por lo que los sucesos son independientes.

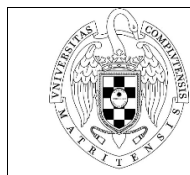
- c) Aplicamos las leyes de Morgan y la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cap B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = \\ &= 1 - (0.5 + 0.25 - 0.125) = \boxed{0.375} \end{aligned}$$

- d) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{B} / A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{0.5} = \frac{0.5 - 0.125}{0.5} = \frac{0.375}{0.5} = \boxed{0.75}$$

EvAU 2019 Extraordinaria Matemáticas II



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso 2018-2019
MATERIA: MATEMÁTICAS II

uc3m
Universidad
Carlos III
de Madrid

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} kx + (k+1)y + z = 0 \\ -x + ky - z = 0 \\ (k-1)x - y = -(k+1) \end{cases}$$
 se pide:

- (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k .
- (0.5 puntos) Resolver el sistema para $k = -1$.

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

- (1.25 puntos) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1) = 1; f'(1) = 2; g(1) = 3; g'(1) = 4;$$

Dada $h(x) = f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

- (1.25 puntos) Calcule la integral $\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t = \sin x$.)

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 3, -3)$ y $C(-3, -1, 1)$, se pide:

- (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.
- (0.5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A , B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.
- (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX , de modo que el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y P sea igual a 1.

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

- a) (1.25 puntos) Se sabe que el 40% del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.
- b) (1.25 puntos) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X , de media 5.6 y desviación típica σ . Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8.2$ es 0.67, calcule σ .

OPCIÓN B

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.
- b) (0.75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a .
- c) (0.75 puntos) Calcular, en función de a , el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10-t)$.

- a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.
- b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.
- c) (0.5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el plano, $\pi \equiv 2x + 3y - z = 4$, y las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ y

$s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se pide:

- a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de π .
- b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π , que pasa por el punto intersección de las rectas r y s .
- c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s .

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama $1/3$ de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1.6 %, mientras que para los de alta gama es del 0.9 %. En un control de calidad preventiva, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

- a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.
- b) (1.5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} kx + (k+1)y + z = 0 \\ -x + ky - z = 0 \\ (k-1)x - y = -(k+1) \end{cases}$$
 se pide:

- a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k .
 b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $k = -1$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -k^2 + 1 + 1 - k^2 + k - k = -2k^2 + 2$$

Si igualamos a cero el determinante $\rightarrow |A| = 0 \Rightarrow -2k^2 + 2 = 0 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = 1; k = -1$
 Distinguiremos tres casos diferentes en la resolución del sistema.

CASO 1. $k \neq 1; k \neq -1$

El rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el de la ampliada e igual al número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

CASO 2. $k = 1$

Intentamos resolver el sistema que nos queda.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ \boxed{y = 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4 + z = 0 \\ -x + 2 - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = -4 \\ -x - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = -4 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

Este sistema es INCOMPATIBLE, pues $x + z$ no puede tomar dos valores diferentes. No tiene solución

CASO 3. $k = -1$

Resolvemos el sistema que nos queda.

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ -x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 3}^a - 2 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ -2x - y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}}$$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

- b) Para $k = -1$ está resuelto en el apartado anterior. Las soluciones son $x = \lambda; y = -2\lambda; z = \lambda$.

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (1.25 puntos) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1) = 1; f'(1) = 2; g(1) = 3; g'(1) = 4:$$

Dada $h(x) = f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$,

calcule $k'(1)$.

b) (1.25 puntos) Calcule la integral $\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t = \sin x$.)

a) Si $h(x) = f((x+1)^2)$ su derivada es $h'(x) = f'((x+1)^2) \cdot 2(x+1)$, luego

$$h'(0) = f'((1)^2) \cdot 2(0+1) = 2 \cdot f'(1) = 2 \cdot 2 = \boxed{4}$$

Si $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ su derivada es $k'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$, luego

$$k'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - f(1) \cdot g'(1)}{(g(1))^2} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{3^2} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

b) Resolvemos la integral con el método de cambio de variable.

$$\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx \\ dx = \frac{dt}{\cos x} \end{array} \right\} = \int t^4 (\cos x)^3 \frac{dt}{\cos x} = \int t^4 (\cos x)^2 dt =$$

$$= \int t^4 (1 - \sin^2 x) dt = \int t^4 (1 - t^2) dt = \int t^4 - t^6 dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos cambio} \\ t = \sin x \end{array} \right\} =$$

$$= \boxed{\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C}$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 3, -3)$ y $C(-3, -1, 1)$, se pide:

- a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.
 b) (0.5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.
 c) (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

- a) Necesitamos las coordenadas de los vectores que unen los puntos

$$\overrightarrow{AB} = (1, 3, -3) - (1, 1, 1) = (0, 2, -4) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (-3, -1, 1) - (1, 1, 1) = (-4, -2, 0)$$

Estos vectores no son proporcionales por lo que definen un plano.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,1,1) \\ \overrightarrow{AB} = (0, 2, -4) \\ \overrightarrow{AC} = (-4, -2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 16y - 16 + 8z - 8 - 8x + 8 = 0$$

$$-8x + 16y + 8z - 16 = 0 \Rightarrow \boxed{-x + 2y + z - 2 = 0}$$

La ecuación del plano es $-x + 2y + z - 2 = 0$.

- b) Un punto D tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes hay infinitos, cualquier punto del plano anterior cumple esta condición. Probemos con el punto $D(0,0,2)$ del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 2, -4) \\ \overrightarrow{AC} = (-4, -2, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (0, 0, 2) - (1, 1, 1) = (-1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 16 + 8 + 8 = 0$$

Lo cual demuestra la dependencia lineal de los vectores.

- c) El punto P del eje OX debe tener coordenadas $P(a, 0, 0)$ y el volumen del tetraedro con vértices A, B, C y P es:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 2, -4) \\ \overrightarrow{AC} = (-4, -2, 0) \\ \overrightarrow{AP} = (a, 0, 0) - (1, 1, 1) = (a-1, -1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Volumen tetraedro ABCP} = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \\ a-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \right|$$

$$\text{Volumen tetraedro ABCP} = \left| \frac{-16 - 8a + 8 - 8}{6} \right| = \left| \frac{-16 - 8a}{6} \right|$$

Caben dos posibilidades:

$$\left| \frac{-16 - 8a}{6} \right| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-16 - 8a}{6} = 1 \Rightarrow -16 - 8a = 6 \Rightarrow -8a = 22 \Rightarrow a = -\frac{22}{8} = -\frac{11}{4} \\ \frac{-16 - 8a}{6} = -1 \Rightarrow -16 - 8a = -6 \Rightarrow -8a = 10 \Rightarrow a = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Los puntos solución del problema son $P\left(-\frac{11}{4}, 0, 0\right)$ y $P\left(-\frac{5}{4}, 0, 0\right)$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) (1.25 puntos) Se sabe que el 40% del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

b) (1.25 puntos) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X , de media 5.6 y desviación típica σ . Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8.2$ es 0.67, calcule σ .

a) Sea X = número de amigos seleccionados. Se trata de una variable binomial, siendo 8 las repeticiones y $p = 0,40$. $X = B(8, 0.4)$

Nos piden calcular $P(X \geq 2)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = \\ &= 1 - \left(\binom{8}{0} 0,4^0 0,6^8 + \binom{8}{1} 0,4^1 0,6^7 \right) = 1 - (0,6^8 + 8 \cdot 0,4 \cdot 0,6^7) = \boxed{0,8936} \end{aligned}$$

b) X = puntuaciones obtenidas. $X = N(5.6, \sigma)$.

$P(X \leq 8.2) = 0,67 \Rightarrow$ Tipificamos la variable

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X - 5.6}{\sigma} \leq \frac{8.2 - 5.6}{\sigma}\right) &= 0,67 \Rightarrow \\ \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{2.6}{\sigma}\right) &= 0,67 \end{aligned}$$

Buscando en la tabla de la normal $N(0,1)$ encontramos que:

$$\frac{2.6}{\sigma} = 0.44 \Rightarrow 2.6 = 0.44\sigma \Rightarrow \sigma = \frac{2.6}{0.44} = 5.91$$

OPCIÓN B**Ejercicio 1 : Calificación máxima: 2.5 puntos.**

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.
- b) (0.75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a .
- c) (0.75 puntos) Calcular, en función de a , el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

a)

$$A^2 - I = 2A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1-a)^2 + 1 & 1-a+1+a \\ 1-a+1+a & 1+(1+a)^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+a^2-2a+1 & 2 \\ 2 & 1+1+a^2+2a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+a^2-2a-1 & 2 \\ 2 & 2+a^2+2a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 - 2a + 1 = 2 - 2a \\ 2 = 2 \\ 2 = 2 \\ 1 + a^2 + 2a = 2 + 2a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a=1}; \boxed{a=-1}$$

Se cumple para $a=1$ o $a=-1$

b) La matriz tiene inversa cuando su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = 1-a^2-1 = -a^2$$

El determinante es nulo cuando $a=0$. Para $a \neq 0$ la matriz A es invertible.

Calculemos su inversa con la fórmula $A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|}$.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}}{-a^2} = \frac{\begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}}{-a^2} = \begin{pmatrix} \frac{1+a}{-a^2} & \frac{-1}{-a^2} \\ \frac{-1}{-a^2} & \frac{1-a}{-a^2} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1-a}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{-1+a}{a^2} \end{pmatrix}$$

c) Averiguamos la expresión de la matriz $(AA^t)^2$.

$$\begin{aligned} (AA^t)^2 &= \left(\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \right)^2 = \left(\begin{pmatrix} 2-2a+a^2 & 2 \\ 2 & 2+2a+a^2 \end{pmatrix} \right)^2 = \\ &= \begin{pmatrix} 2-2a+a^2 & 2 \\ 2 & 2+2a+a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-2a+a^2 & 2 \\ 2 & 2+2a+a^2 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} (2-2a+a^2)(2-2a+a^2) + 2 \cdot 2 &= 4-4a+2a^2-4a+4a^2-2a^3+2a^2-2a^3+a^4+4 \\ (2-2a+a^2) \cdot 2 + 2 \cdot (2-2a+a^2) &= 4-4a+2a^2+4+4a+2a^2 \\ 2 \cdot (2-2a+a^2) + (2+2a+a^2) \cdot 2 &= 4-4a+2a^2+4+4a+2a^2 \\ 2 \cdot 2 + (2+2a+a^2)(2+2a+a^2) &= 4+4+4a+2a^2+4a+4a^2+2a^3+2a^2+2a^3+a^4 \end{aligned} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} a^4-4a^3+8a^2-8a+8 & 8+4a^2 \\ 8+4a^2 & a^4+4a^3+8a^2+8a+8 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de su determinante.

$$\begin{aligned} |(AA^t)^2| &= \begin{vmatrix} a^4-4a^3+8a^2-8a+8 & 8+4a^2 \\ 8+4a^2 & a^4+4a^3+8a^2+8a+8 \end{vmatrix} = \\ &= (a^4-4a^3+8a^2-8a+8)(a^4+4a^3+8a^2+8a+8) - (8+4a^2)(8+4a^2) = \\ &= a^8+4a^7+8a^6+8a^5+8a^4-4a^7-16a^6-32a^5-32a^4-32a^3 \dots\dots\dots \\ &= \boxed{a^8} \end{aligned}$$

Otra forma de hacerlo es aplicando las propiedades de los determinantes.

$$\begin{aligned} |(AA^t)^2| &= \{ \text{Sabemos que } |B^2| = |B|^2 \} = |AA^t|^2 = \\ &= \{ \text{Sabemos que } |A \cdot B| = |A| \cdot |B| \} = (|A| |A^t|)^2 = \\ &= \{ \text{Sabemos que } |B^t| = |B| \} = (|A| |A|)^2 = ((-a^2)(-a^2))^2 = \boxed{a^8} \end{aligned}$$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10-t)$.

- a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.
 b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.
 c) (0.5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

a) Usamos el cálculo integral para obtener la función $F(t)$.

$$F'(t) = t^2(10-t) \Rightarrow F(t) = \int F'(t) dt = \int t^2(10-t) dt = \int 10t^2 - t^3 dt$$

$$F(t) = 20\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C$$

Como sabemos que $F(0) = 6$ entonces $F(0) = 20\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4} + C = 6 \Rightarrow C = 6$

La función es $F(t) = 20\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6$

- b) Buscamos un máximo de la función $F(t) = 20\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6$, para ello usamos su derivada y la igualamos a cero.

$$F'(t) = t^2(10-t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 10-t = 0 \Rightarrow t = 10 \end{cases}$$

Comprobemos cual es el máximo usando la segunda derivada.

$$F'(t) = t^2(10-t) = 10t^2 - t^3 \Rightarrow F''(t) = 20t - 3t^2$$

Como $F''(0) = 0 \Rightarrow$ No sabemos si es máximo o mínimo, pero

$F'''(t) = 20 - 6t \Rightarrow F'''(0) = 20 \neq 0$, por lo que es un punto de inflexión.

Como $F''(10) = 200 - 300 = -100 < 0$

El signo de la segunda derivada es negativo y $t = 10$ es máximo relativo.

$$F(10) = 20\frac{10^3}{3} - \frac{10^4}{4} + 6 = 839$$

Al cabo de 10 días se alcanza el máximo de enfermos, y esta cantidad es 839 enfermos.

- c) Como $F(13) = 189,08$ y $F(14) = -451,33$. Según el teorema de Bolzano en el intervalo $(13,14)$ hay un momento c en el que $F(c) = 0$. Por lo tanto, el brote acaba a los 14 días.

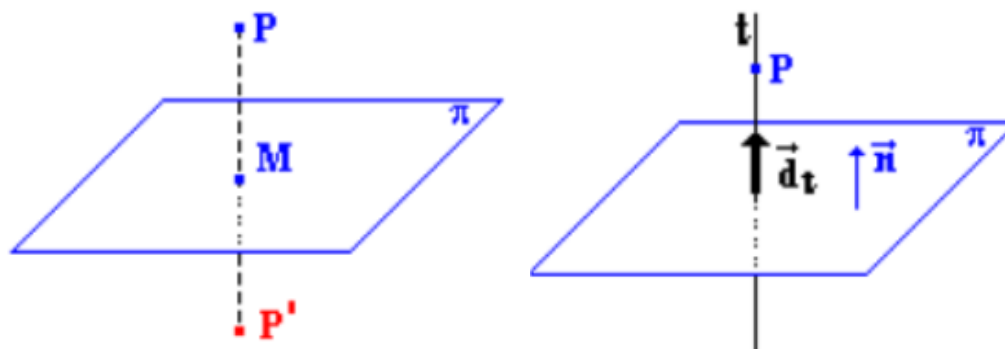
Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el plano, $\pi \equiv 2x + 3y - z = 4$, y las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ y

$s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se pide:

- (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de π .
- (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π , que pasa por el punto intersección de las rectas r y s .
- (0.5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s .

- a) Hallamos la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano, para ello utilizamos el vector normal del plano como vector director de la recta.



$$\pi \equiv 2x + 3y - z = 4 \Rightarrow \vec{n} = \vec{v}_r = (2, 3, -1) \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Pasa por el punto $P(1, 2, 3)$

Hallemos el punto M de corte de recta y plano.

$$\pi \equiv 2x + 3y - z = 4 \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2t) + 3(2 + 3t) - (3 - t) = 4 \Rightarrow 2 + 4t + 6 + 9t - 3 + t = 4$$

$$14t + 5 = 4 \Rightarrow t = \frac{-1}{14}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2 \cdot \frac{-1}{14} \\ y = 2 + 3 \cdot \frac{-1}{14} \\ z = 3 - \frac{-1}{14} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \frac{-2}{14} = \frac{12}{14} \\ y = 2 + \frac{-3}{14} = \frac{25}{14} \\ z = 3 + \frac{1}{14} = \frac{43}{14} \end{array} \right.$$

El punto M tiene coordenadas $M\left(\frac{12}{14}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14}\right)$

Como M es el punto medio del segmento de extremos P y P' se cumple que:

$$\frac{P + P'}{2} = M \Rightarrow P + P' = 2M \Rightarrow P' = 2M - P$$

$$P' = 2\left(\frac{12}{14}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14}\right) - (1, 2, 3) = \left(\frac{24}{14} - 1, \frac{50}{14} - 2, \frac{86}{14} - 3\right) = \left(\frac{10}{14}, \frac{22}{14}, \frac{44}{14}\right) = \left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{7}\right)$$

b) Hallamos el punto intersección de las rectas r y s .

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda + 2 - 3 - \lambda = 0 \\ 1 + \lambda + 2 + 3 + \lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2\lambda = -4 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

El punto de intersección es $Q(-1, 2, 1)$. Como la recta t debe ser perpendicular al plano $\pi \equiv 2x + 3y - z = 4$ su vector director debe ser el normal al plano $\vec{n} = \vec{v}_t = (2, 3, -1)$.

Hallamos la ecuación de la recta t pedida.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_t = (2, 3, -1) \\ \text{Pasa por } Q(-1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

c) El ángulo entre las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ y $s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)$ es el ángulo entre sus vectores directores.

$$v_s = (1, 0, 1) \text{ y } v_r = (1, 1, -1) \times (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i - j + k - k - j + i = 2i - 2j = (2, -2, 0)$$

Ángulo entre r y s = Ángulo entre $\vec{v}_s = (1, 0, 1)$ y $\vec{v}_r = (2, -2, 0)$.

$$\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{(2, -2, 0) \cdot (1, 0, 1)}{\sqrt{4+4}\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{8}\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

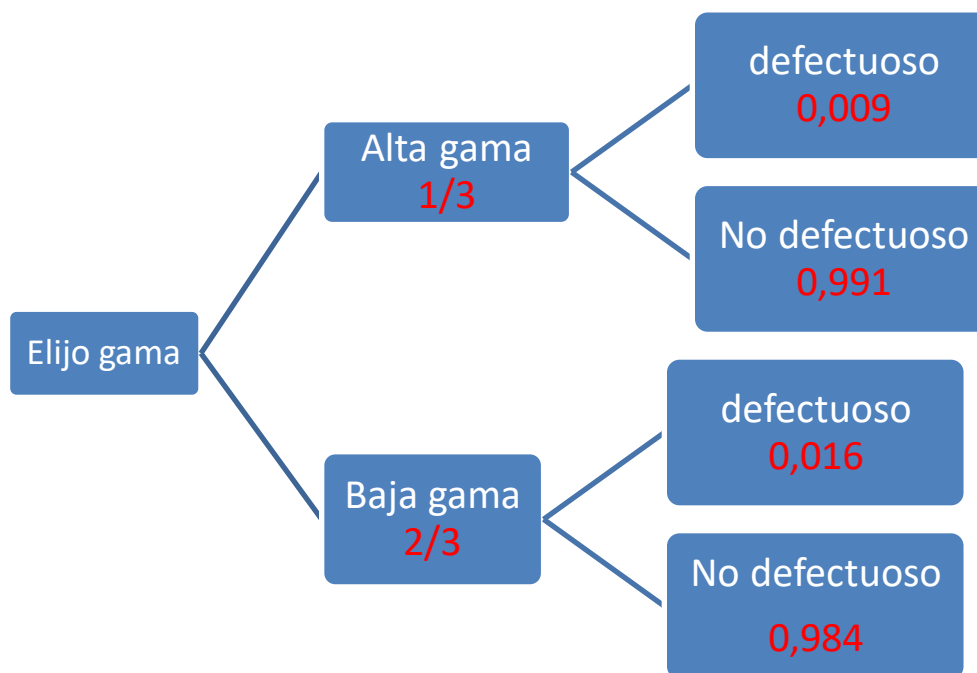
Las rectas r y s forman un ángulo de 60° .

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama $\frac{1}{3}$ de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1.6 %, mientras que para los de alta gama es del 0.9 %. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

- a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.
 b) (1.5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

Realizamos un diagrama de árbol para facilitar el cálculo de probabilidades.



- a) Calculamos la probabilidad pedida usando el teorema de la probabilidad total y utilizando la información del diagrama de árbol.

$$P(\text{defectuoso}) = P(\text{alta gama}) \cdot P(\text{defectuoso siendo de alta gama}) + \\ + P(\text{baja gama}) \cdot P(\text{defectuoso siendo de baja gama}) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0,009 + \frac{2}{3} \cdot 0,016 = 0,0137 = \boxed{1,37 \%}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{siendo defectuoso, que sea de gama baja}) = P(\text{sea de gama baja} / \text{Sea defectuoso}) = \\ = \frac{P(\text{sea de gama baja} \cap \text{Sea defectuoso})}{P(\text{Sea defectuoso})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,016}{0,0137} = 0,7805 = \boxed{78,05 \%}$$

EvAU 2019 Ordinaria Matemáticas II



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

uc3m
Universidad
Carlos III
de Madrid

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix} \text{ y } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ se pide:}$$

- (1.5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.
- (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

- (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.
- (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.
- (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2; -5; 1)$ y tiene dirección $(-1; 0; -1)$, se pide:

- (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.
- (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.
- (0.5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10%. Se pide:

- (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.
- (1.5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

OPCIÓN B**Ejercicio 1 : Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.

Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40% respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

- (0.5 puntos) Determinar su dominio.
- (1.5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- (0.5 puntos) Calcular los límites laterales $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto A(2, 1, 0) y el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 4z = 36$, se pide:

- (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π .
- (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.
- (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π .

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80% de los casos.

Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

- (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.
- (1.5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

SOLUCIONES**OPCIÓN A****Ejercicio 1 : Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix} \text{ y } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ se pide:}$$

- a) (1.5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.
 b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso a = 0.

a) La matriz A es de orden 3x4, su rango máximo es 3, buscamos un menor de orden 3 no nulo:

METODO 1. Utilizando determinantes:

Con las tres primeras columnas de A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 6 + 8 - (-4a + 3a + 4) = a^2 - 6 + 8 + 4a - 3a - 4 = a^2 + a - 2$$

$$a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} a = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ a = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Consideramos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq -2$.

El determinante de A es no nulo y el rango de A es 3

CASO 2. $a = 1$. La matriz queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La cuarta columna es igual a la primera con lo que rango de A = rango de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

En esta matriz su determinante es 0, por lo que el rango de A es menor de 3.

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0$. El rango de A es 2

CASO 3. $a = -2$. La matriz queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

La fila 2ª y 3ª son proporcionales, por lo que el rango de A no es 3.

Tomemos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y las columnas 3ª y 4ª, su

determinante vale $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0$. El rango de A es 2

Conclusión: Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el rango de A es 3. $a = 1$ o $a = -2$ el rango de A es 2.

METODO 2. También se puede estudiar utilizando el método de Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$$

Hacemos fila 2ª - fila 1ª. También fila 3ª + fila 1ª

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 3 & 4 & 1 \\ \text{Nueva fila 2ª} & + & -1 & -a & -2 & a-2 \\ \hline & 0 & 3-a & 2 & a-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 3 & 4 & 1 \\ \text{Nueva fila 3ª} & + & -1 & 2 & a & a-2 \\ \hline & 0 & 5 & 4+a & a-1 \end{array}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3-a & 2 & a-1 \\ 0 & 5 & 4+a & a-1 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos columna 2ª y columna 4ª

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & a-1 & 2 & 3-a \\ 0 & a-1 & 4+a & 5 \end{pmatrix}$$

Hacemos fila 3ª - fila 2ª

$$\begin{array}{cccc} & 0 & a-1 & 4+a & 5 \\ \text{Nueva fila 3ª} & + & 0 & -a+1 & -2 & -3+a \\ \hline & 0 & 0 & a+2 & a+2 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & a-1 & 2 & 3-a \\ 0 & 0 & a+2 & a+2 \end{pmatrix}$$

Se observa que al ser una matriz triangular:

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$. Rango de A es 3

Si $a = 1$ la matriz equivalente queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ que tiene rango 2 pues la fila 2ª y fila 3ª son proporcionales}$$

Si $a = -2$ la matriz equivalente queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solo tiene dos filas no nulas y el rango de A es 2

b) La matriz AM es de orden 3x3 y si $a = 0$ la matriz producto AM quedaría:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Para ser invertible debe tener determinante no nulo:

$$|AM| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 2 - (0 - 6 + 4) = -4 + 2 = -2 \neq 0$$

Calculemos su inversa:

$$\begin{aligned} (AM)^{-1} &= \frac{Adj(AM^T)}{|AM|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{-2} = \\ &= \frac{\begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

- (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.
- (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.
- (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

a) Calculemos los límites de la función en el infinito.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} &= \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (Regla de L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0\end{aligned}$$

La asíntota horizontal es la recta de ecuación $y = 0$. El eje de abscisas.

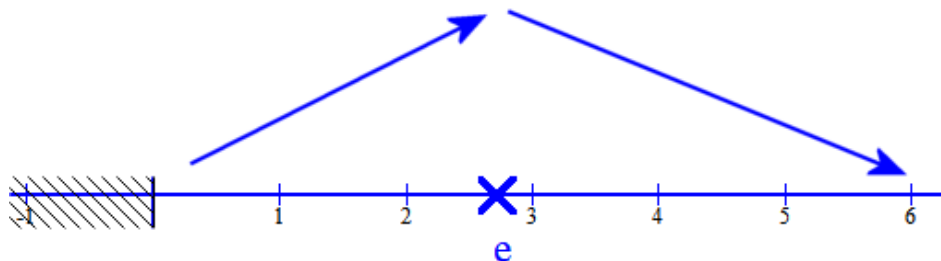
b) La pendiente de la recta tangente es la derivada de la función en el punto de tangencia, si debe ser horizontal la derivada debe anularse.

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{\ln(x)}{x} &\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \\ f'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow \boxed{x = e}\end{aligned}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = e$.

- En el intervalo $(0, e)$ tomamos el valor 1 y $f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1 > 0$. La función crece en el intervalo $(0, e)$.
- En el intervalo $(e, +\infty)$ tomamos el valor 4 y $f'(4) = \frac{1 - \ln 4}{4^2} = \frac{-0,38}{16} = -0,02 < 0$. La función decrece en el intervalo $(e, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en $x = e$.

c) Averiguamos los puntos de corte de las funciones $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ e $y = 0$.

$$\frac{\ln(x)}{x} = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

El área pedida se calcula con la integral definida de la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ en el intervalo $[1, e]$.

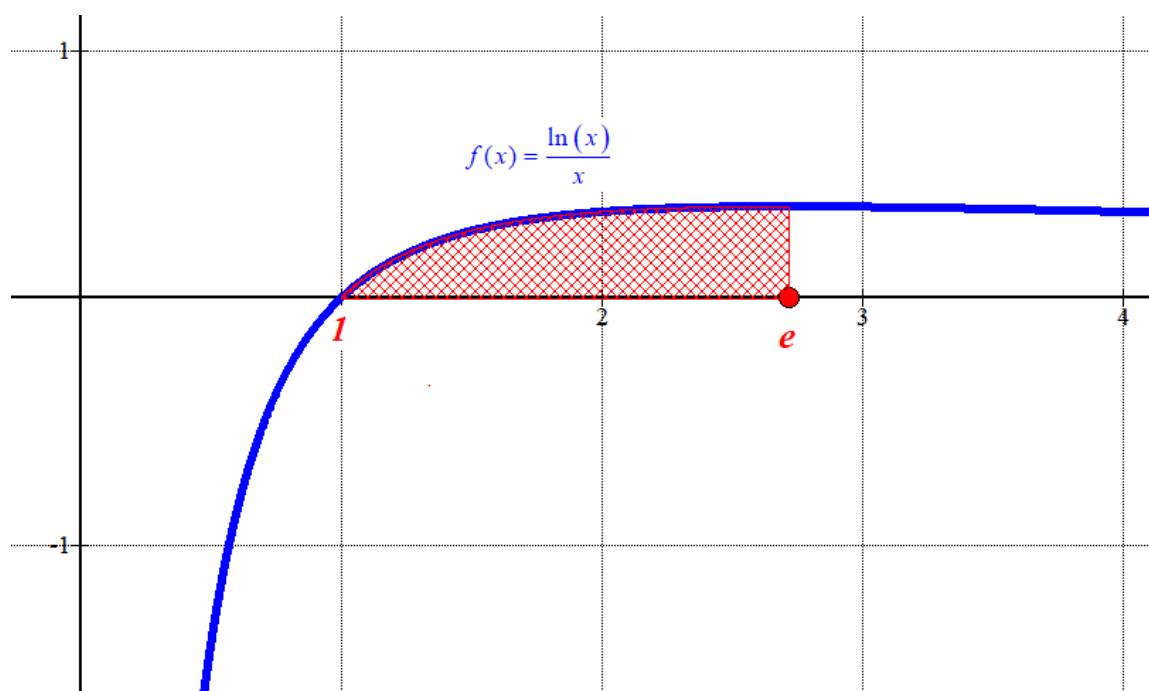
Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \\ dx = x dt \end{array} \right\} = \int \frac{t}{x} x dt = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida que nos proporciona el valor del área pedida.

$$\text{Área} = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} u^2$$

Dibujamos el recinto para comprobar la bondad de la solución.



Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2; -5; 1)$ y tiene dirección $(-1; 0; -1)$, se pide:

- (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.
- (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s .
- (0.5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

- a) Para estudiar la posición relativa de dos rectas, nos planteamos si son paralelas y para ello comprobamos si sus vectores directores tienen coordenadas proporcionales:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, -2, 1) \\ \vec{v}_s = (-1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{-1} \neq \frac{-2}{0} \neq \frac{1}{-1}$$

No existe proporcionalidad y no son paralelas. Estas rectas se cortan o se cruzan.

Estudiamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ formado por sus vectores directores y el vector que une un punto $P_r(1, 3, 0)$ de la recta r y otro punto $Q_s(2, -5, 1)$ de la recta s .

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (2, -5, 1) - (1, 3, 0) = (1, -8, 1)$$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 8 + 0 - (2 + 16 + 0) = -8 \neq 0$$

Como el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ es no nulo las rectas se cruzan.

- b) El plano π paralelo a r y que contenga a s tendrá como vectores directores los de ambas rectas (no son paralelas) y pasará por un punto P_s de la recta s . Obtenemos la ecuación del plano.

$$\pi \equiv \begin{cases} P_s(2, -5, 1) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (2, -2, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (-1, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x - 4 - y - 5 + 0 - (2z - 2 - 2y - 10 + 0) = 0 \Rightarrow 2x - 4 - y - 5 - 2z + 2 + 2y + 10 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv 2x + y - 2z + 3 = 0}$$

- c) El plano π' perpendicular a r y que pase por $P(0, 0, 0)$ debe tener como vector normal el vector director de la recta r :

$$\vec{n} = \vec{v}_r = (2, -2, 1) \Rightarrow \pi \equiv 2x - 2y + z + D = 0$$

Como pasa por $P(0, 0, 0) \rightarrow 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$. El plano es $\pi' \equiv 2x - 2y + z = 0$.

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10%. Se pide:

- a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.
- b) (1.5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

- a) Este ejercicio no se puede hacer con diagrama de árbol debido a que serían 10 ramificaciones. Hay que resolverlo con la binomial.

X = Número de peces que sobreviven más de 5 años de un grupo de 10.

$n = 10$; $p = 0,10 \rightarrow X = B(10; 0,1)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - (P(x=0) + P(x=1)) = \\ &= 1 - \left(\binom{10}{0} 0,1^0 \cdot 0,9^{10} + \binom{10}{1} 0,1^1 \cdot 0,9^9 \right) = \\ &= 1 - (0,3487 + 0,3874) = 1 - 0,7361 = \boxed{0,2639} \end{aligned}$$

- b) X = El número de peces que sobreviven más de 5 años de un grupo de 200 peces.

$n = 200$; $p = 0,10 \rightarrow X = B(200; 0,1)$.

Obtenemos el valor de la media y la desviación típica de la variable binomial.

$$\left. \begin{array}{l} n = 200 \\ p = 0,1 \\ q = 0,9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mu = np = 200 \cdot 0,1 = 20 \\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0,1 \cdot 0,9} = 4,24 \end{array} \right\}$$

La distribución binomial $X = B(200; 0,1)$ se aproxima por una normal $Y = N(20; 4,24)$

Esta aproximación es buena pues $\left. \begin{array}{l} np = 200 \cdot 0,1 = 20 > 5 \\ nq = 200 \cdot 0,9 = 180 > 5 \end{array} \right\}$.

Calculamos la probabilidad pedida usando esta aproximación y haciendo una corrección por continuidad de 0,5:

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= P(Y \geq 10 - 0,5) = P(Y \geq 9,5) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ \text{la variable a } Z = N(0, 1) \end{array} \right\} = P\left(\frac{Y - 20}{4,24} \geq \frac{9,5 - 20}{4,24} \right) = \\ &= P(Z \geq -2,48) = P(Z \leq 2,48) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la tabla} \\ \text{de la } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0,9934} \end{aligned}$$

OPCIÓN B**Ejercicio 1 : Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.

Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40% respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Llamemos “b” al precio de un bocadillo, “r” al precio de un refresco y “p” al precio de una bolsa de patatas.

“3 bocadillos + 1 que cobraron de más, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas + 1 que cobraron de más costaron 19 €” $\rightarrow 4b + 2r + 3p = 19$

“Le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros” $\rightarrow b + p = 4$

“Un bocadillo y un refresco por 3 euros, con un descuento del 40% respecto a sus precios originales. Es decir, pagó el 60% de su precio original” $\rightarrow 0,6b + 0,6r = 3$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 4b + 2r + 3p = 19 \\ b + p = 4 \\ 0,6b + 0,6r = 3 \Rightarrow 6b + 6r = 30 \Rightarrow b + r = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4b + 2r + 3p = 19 \\ b + p = 4 \\ b + r = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 4b + 2r + 3p = 19 \\ \Rightarrow b = 4 - p \\ b + r = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4(4 - p) + 2r + 3p = 19 \\ 4 - p + r = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 16 - 4p + 2r + 3p = 19 \\ -p + r = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -p + 2r = 3 \\ -p + r = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -p + 2r = 3 \\ r = p + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -p + 2(p + 1) = 3 \Rightarrow -p + 2p + 2 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p = 1} \Rightarrow \boxed{r = 1 + 1 = 2} \Rightarrow \boxed{b = 4 - 1 = 3}$$

Un bocadillo ha costado 3 €, un refresco 2 € y una bolsa de patatas 1 €.

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar su dominio.

b) (1.5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0.5 puntos) Calcular los límites laterales $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$

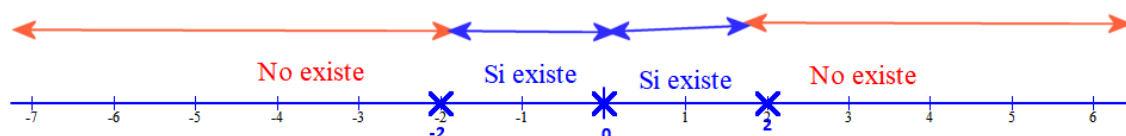
a) El dominio de la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$ son los valores de x que hacen positivo el radicando. Planteamos y resolvemos la ecuación correspondiente:

$$4x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(4 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Los números reales se dividirían en 4 intervalos o semirrectas, veamos en cuales existe la función:

- $(-\infty, -2) \rightarrow$ por ejemplo $x = -4 \rightarrow f(-4) = \sqrt{4(-4)^2 - (-4)^4} = \sqrt{64 - 256} = \sqrt{-192} = \text{No existe}$
- $(-2, 0) \rightarrow$ por ejemplo $x = -1 \Rightarrow f(-1) = \sqrt{4(-1)^2 - (-1)^4} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} = \text{Si existe}$
- $(0, 2) \rightarrow$ por ejemplo $x = 1 \Rightarrow f(1) = \sqrt{4(1)^2 - (1)^4} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} = \text{Si existe}$
- $(2, \infty) \rightarrow$ por ejemplo $x = 4 \Rightarrow f(4) = \sqrt{4(4)^2 - (4)^4} = \sqrt{64 - 256} = \sqrt{-192} = \text{No existe}$

Visualmente la situación queda como indica el gráfico.



El dominio de la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$ es $[-2, 2]$

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento se estudian con la derivada:

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 8x - 4x^3 = 0 \Rightarrow$$

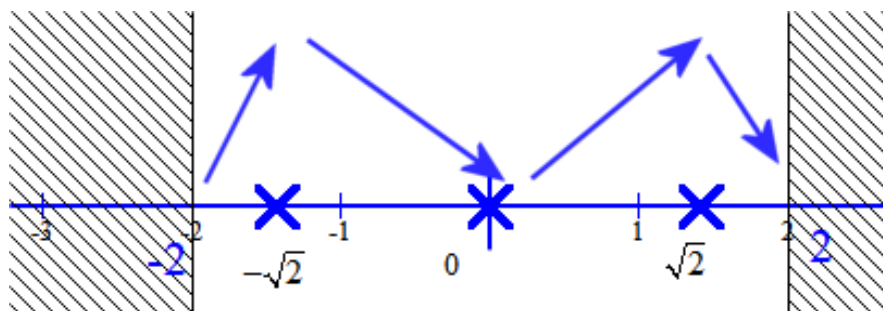
$$\Rightarrow 4x(2 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

El intervalo del dominio $[-2, 2]$ se divide en 4 partes, estudiemos el signo de la derivada en cada una de ellas:

- $(-2, -\sqrt{2}) \rightarrow$ por ejemplo $x = -1,5 \Rightarrow$

$$f'(-1,5) = \frac{8(-1,5) - 4(-1,5)^3}{2\sqrt{4(-1,5)^2 - (-1,5)^4}} = \frac{-12 + 12,5}{+} = + > 0 \text{ la función crece}$$
- $(-\sqrt{2}, 0) \rightarrow$ por ejemplo $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = \frac{8(-1) - 4(-1)^3}{2\sqrt{4(-1)^2 - (-1)^4}} = \frac{-8 + 4}{+} = - < 0$ la función decrece
- $(0, \sqrt{2}) \rightarrow$ por ejemplo $x = 1 \Rightarrow f'(1) = \frac{8(1) - 4(1)^3}{2\sqrt{4(1)^2 - (1)^4}} = \frac{8 - 4}{+} = + > 0$ la función crece
- $(\sqrt{2}, 2) \rightarrow$ por ejemplo $x = 1,5 \Rightarrow f'(1,5) = \frac{8(1,5) - 4(1,5)^3}{2\sqrt{4(1,5)^2 - (1,5)^4}} = \frac{12 - 12,5}{+} = - < 0$ la función decrece.

Visualmente la situación queda como indica el gráfico.



La función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$ crece en $(-2, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$ y decrece en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, 2)$

c) Calculamos el límite por la derecha.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2(4 - x^2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{4 - x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x} \sqrt{4 - x^2}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{4 - x^2} = \boxed{2} \end{aligned}$$

Calculamos el límite por la izquierda.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2(4 - x^2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{4 - x^2}}{x} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Como } x \text{ son números negativos} \\ \sqrt{x^2} = -x \\ \text{ya que es la raíz positiva de } x \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\cancel{x} \sqrt{4 - x^2}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{4 - x^2} = \boxed{-2} \end{aligned}$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $A(2, 1, 0)$ y el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 4z = 36$, se pide:

- (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π .
- (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.
- (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π .

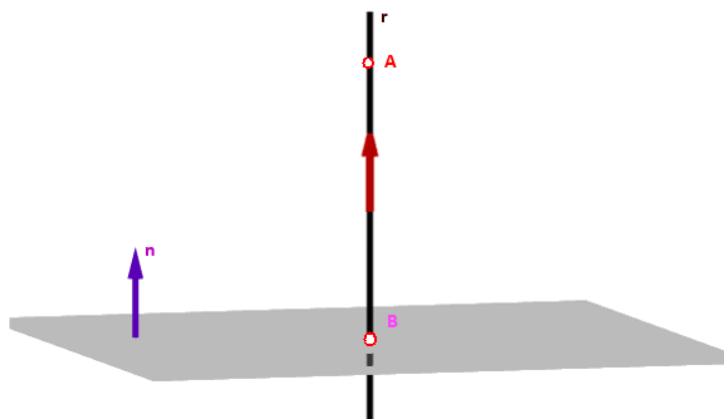
- a) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left. \begin{array}{l} A(2,1,0) \\ \pi \equiv 2x + 3y + 4z - 36 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(A; \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 36|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \boxed{\sqrt{29} \text{ u}}$$

- b) Para determinar el punto buscamos la recta perpendicular al plano que pasa por A y luego averiguaremos el punto de corte de recta y plano.

$$\pi \equiv 2x + 3y + 4z = 36 \Rightarrow \vec{n} = (2, 3, 4)$$

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(2,1,0) \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (2, 3, 4) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 4t \end{array} \right.$$



El punto B de corte de r y π se obtiene de resolver el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 36 \\ x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 4t \end{array} \right. \Rightarrow 2(2 + 2t) + 3(1 + 3t) + 4(4t) = 36 \Rightarrow 4 + 4t + 3 + 9t + 16t = 36$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2 = 4 \\ 29t = 29 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow y = 1 + 3 = 4 \\ z = 4 \end{array} \right.$$

El punto pedido es $B(4, 4, 4)$

- c) Para hallar el punto A' simétrico de A respecto del plano π , utilizaremos el punto B obtenido en el apartado anterior. Así B es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$ y, por tanto:

$$B = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow (4, 4, 4) = \frac{(2, 1, 0) + (x, y, z)}{2} \Rightarrow (8, 8, 8) = (2, 1, 0) + (x, y, z)$$

$$(8, 8, 8) - (2, 1, 0) = (x, y, z) \Rightarrow \boxed{A' = (6, 7, 8)}$$

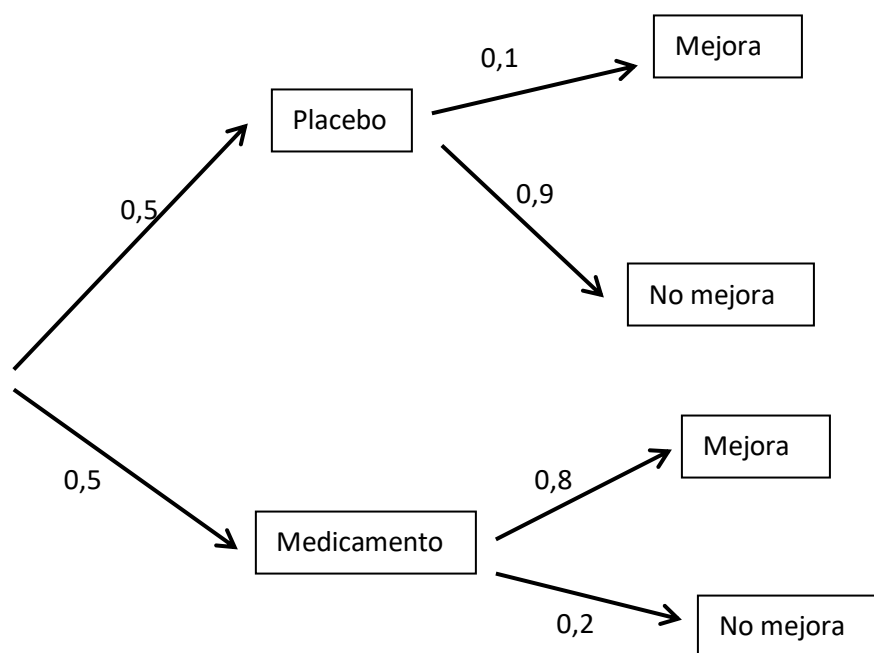
Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80% de los casos.

Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

- (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.
- (1.5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Construimos el diagrama de árbol que expresa los sucesos posibles y la probabilidad de que ocurran:



- Utilizamos el teorema de la probabilidad total y la información del diagrama de árbol.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Mejore un paciente}) &= P(\text{Toma placebo y mejora}) + P(\text{Toma medicamento y mejora}) = \\
 &= 0,5 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,8 = 0,05 + 0,4 = \boxed{0,45}
 \end{aligned}$$

- Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 &P(\text{Tome medicamento sabiendo que ha mejorado}) = \\
 &= P(\text{Tome medicamento} / \text{ha mejorado}) = \\
 &= \frac{P(\text{Tome medicamento y mejora})}{P(\text{Mejore})} = \frac{0,5 \cdot 0,8}{0,45} = \boxed{0,89}
 \end{aligned}$$

EvAU 2018 Extraordinaria Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2017-2018 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
--	--	---

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1.25 puntos) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro α .
- (0.75 puntos) Para $\alpha = 0$, calcular, si es posible, A^{-1} .
- (0.5 puntos) Resolver, si es posible, el sistema $AX = B$, en el caso $\alpha = 0$.

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^3 - 4x}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y se pide:

- (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de f en $x = 2$.
- (1 punto) Calcular las asíntotas de $f(x)$. ¿Hay alguna asíntota vertical?
- (0.75 puntos) Calcular $\int_0^2 f(x) dx$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ y el punto $A(-4, 4, 7)$. Se pide:

- (1 punto) Determinar el vector $\vec{w}_1$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.
- (0.75 puntos) Hallar el vector no nulo $\vec{w}_2$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.
- (0.75 puntos) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overline{OA}$.

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

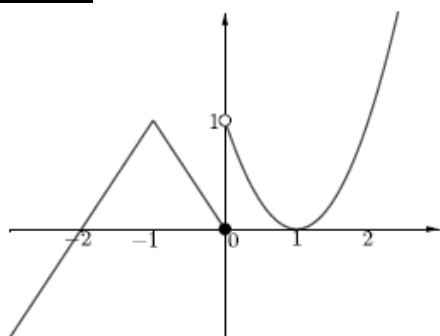
Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13,8% de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43% de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años.

- (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?
- (1,5 puntos) Cierta test diagnostica correctamente el 96% de los casos positivos de diabetes, pero da un 2% de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?

OPCIÓN B**Ejercicio 1 : Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza.

En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. Usando la información de la figura, se pide:

- (0.5 puntos) Indicar los valores de $f(-1)$ y $f'(-1)$.
- (1 punto) Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.
- (0.5 puntos) Indicar razonadamente si f es derivable en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.

- (0.5 puntos) Determinar el valor de $\int_{-2}^0 f(x) dx$.

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(0, -1, 1)$ y la recta r , que pasa por el punto $Q(1, 0, 1)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (0, 1, 2)$, se pide:

- (0.5 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P .
- (0.5 puntos) Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\overrightarrow{SP}$ sea perpendicular a la recta r .
- (1.5 puntos) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1, T_2 , contenidos en la recta r , que están a distancia $\sqrt{5}$ de P .

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 8.5$ y desviación típica $\sigma = 2.5$. Se pide:

- (1.25 puntos) Calcular el valor a tal que $P(X \leq a) = 0,05$.
- (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9.3.

SOLUCIONES

OPCIÓN A**Ejercicio 1. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1.25 puntos) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro α .
 b) (0.75 puntos) Para $\alpha = 0$, calcular, si es posible, A^{-1} .
 c) (0.5 puntos) Resolver, si es posible, el sistema $AX = B$, en el caso $\alpha = 1$.

a) El determinante de la matriz es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{vmatrix} = 490\alpha - 210 - 280 = 490\alpha - 490$$

Si igualamos a cero:

$$|A| = 0 \Rightarrow 490\alpha - 490 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{490}{490} = 1$$

Hay que estudiar dos casos distintos.

CASO 1. $\alpha \neq 1$

En este caso el rango de A es 3, pues su determinante es no nulo.

CASO 2. $\alpha = 1$.

La matriz queda

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Su determinante es } 0, \text{ por lo que el rango de } A \text{ no es } 3.$$

¿El rango de A es 2?

Tomamos el menor de orden 2 que surge de quitar la fila 3ª y columna 3ª.

$$\begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 98 \neq 0. \text{ El rango es } 2.$$

b) Para $\alpha = 0$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

con determinante $|A| = \begin{vmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -210 - 280 = -490 \neq 0$

Existe la inversa y calculamos su expresión.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 14 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}}{-490} = \frac{1}{-490} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-490} \begin{pmatrix} -20 & 40 & -70 \\ 15 & -30 & -70 \\ -21 & -56 & 98 \end{pmatrix} = \frac{1}{490} \begin{pmatrix} 20 & -40 & 70 \\ -15 & 30 & 70 \\ 21 & 56 & -98 \end{pmatrix}$$

c) Para $\alpha = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

con determinante $|A| = \begin{vmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 490 - 210 - 280 = 0$

La matriz no tiene inversa. Hay que resolver la ecuación $AX = B$ planteando el sistema asociado.

$$AX = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 14x + 10z = 2 \\ 7y + 5z = \frac{37}{2} \\ 3x + 4y + 5z = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x + 5z = 1 \\ 7y + 5z = \frac{37}{2} \\ 3x + 4y + 5z = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7 \cdot \text{Ecuación } 3^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 21x + 28y + 35z = 77 \\ -21x \quad \quad -15z = -3 \\ \hline 28y + 20z = 74 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x + 5z = 1 \\ 7y + 5z = \frac{37}{2} \\ 28y + 20z = 74 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 4 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 28y + 20z = 74 \\ -28y - 20z = -74 \\ \hline 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x + 5z = 1 \\ 7y + 5z = \frac{37}{2} \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x + 5z = 1 \\ 7y + 5z = \frac{37}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x = 1 - 5z \\ 7y = \frac{37}{2} - 5z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{1-5z}{7} \\ y = \frac{37}{14} - \frac{5z}{7} \end{array} \right\}$$

La matriz X solución de la ecuación $AX = B$ es $X = \begin{pmatrix} \frac{1-5z}{7} \\ \frac{37}{14} - \frac{5z}{7} \\ z \end{pmatrix}$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^3 - 4x}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y se pide:

- a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de f en $x = 2$.
 b) (1 punto) Calcular las asíntotas de $f(x)$. ¿Hay alguna asíntota vertical?
 c) (0.75 puntos) Calcular $\int_0^2 f(x) dx$

a) La función exponencial es continua y la función racional solo presenta problemas en $x = 2$ no incluido en la definición de $f(x)$. Hay que estudiar la continuidad en el cambio de definición de la función, en $x = 2$.

Deben cumplirse:

- Existe $f(2) = 8e^{4-4} = 8$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 8e^{2x-4} = 8$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x(x+2) = 8$$

- Los tres valores son iguales.

Se cumplen las cuatro condiciones y la función es continua en $x = 2$ y por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

b) **Asíntota vertical**, $x = a$.

No presenta ninguna, ya que podría ser $x = 2$, pero hemos calculado el límite

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} = 8. \text{ Por lo que no es asíntota vertical.}$$

Asíntota horizontal, $y = b$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 8e^{2x-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{e^{-2x+4}} = \frac{8}{\infty} = 0$$

La función presenta una asíntota horizontal en $-\infty$: $y = 0$

Asíntota oblicua, $y = mx + n$

Como la función presenta una asíntota horizontal en $x < 0$, solo estudiamos la posibilidad de asíntota oblicua en $x > 0$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 - 4x}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x} = +\infty$$

La función no tiene asíntotas oblicuas.

$$c) \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 8e^{2x-4} dx = \left[\frac{8}{2} e^{2x-4} \right]_0^2 = \left[4e^{2x-4} \right]_0^2 = \left[4e^{4-4} \right] - \left[4e^{-4} \right] = \left[4 - \frac{4}{e^4} \right]$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ y el punto $A(-4, 4, 7)$. Se pide:

- a) (1 punto) Determinar el vector $\vec{w}_1$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.
- b) (0.75 puntos) Hallar el vector no nulo $\vec{w}_2$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.
- c) (0.75 puntos) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overline{OA}$.

- a) Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 6j - 4k - j = -2i + 5j - 4k = (-2, 5, -4)$$

Como además queremos que sea unitario, lo dividimos por su módulo.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{4 + 25 + 16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{(-2, 5, -4)}{3\sqrt{5}} = \left(\frac{-2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{-4}{3\sqrt{5}} \right)$$

- b) Imponemos al vector $\vec{w}_2$ las dos condiciones pedidas.

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}_2 &= a\vec{u} + b\vec{v} \\ (a\vec{u} + b\vec{v})\vec{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a\vec{u}\vec{v} + b\vec{v}\vec{v} = 0 \Rightarrow a(-1, 2, 3)(2, 0, -1) + b(2, 0, -1)(2, 0, -1) = 0 \Rightarrow$$

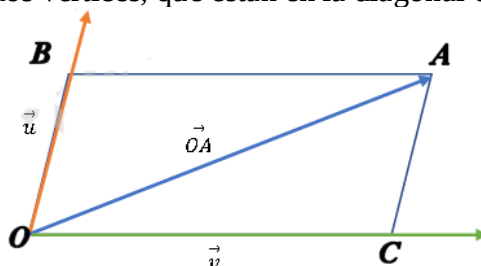
$$\Rightarrow a(-2 - 3) + b(4 + 1) = 0 \Rightarrow -5a + 5b = 0 \Rightarrow 5b = 5a \Rightarrow \boxed{a = b}$$

El vector es $\vec{w}_2 = a\vec{u} + a\vec{v} = a(\vec{u} + \vec{v}) = a((-1, 2, 3) + (2, 0, -1)) = (a, 2a, 2a)$ siendo $a \neq 0$

- c) Al no ser los vectores paralelos, nos indican la dirección de cada uno de los lados adyacentes del paralelogramo.

La diagonal $\overline{OA} = (-4, 4, 7)$ significa que un vértice es $O(0, 0, 0)$ y el otro es $A(-4, 4, 7)$.

Falta determinar los otros dos vértices, que están en la diagonal contraria.



El vértice B es la intersección de la recta con dirección $\vec{u}$ que pasa por O y la recta que pasa por A con dirección $\vec{v}$.

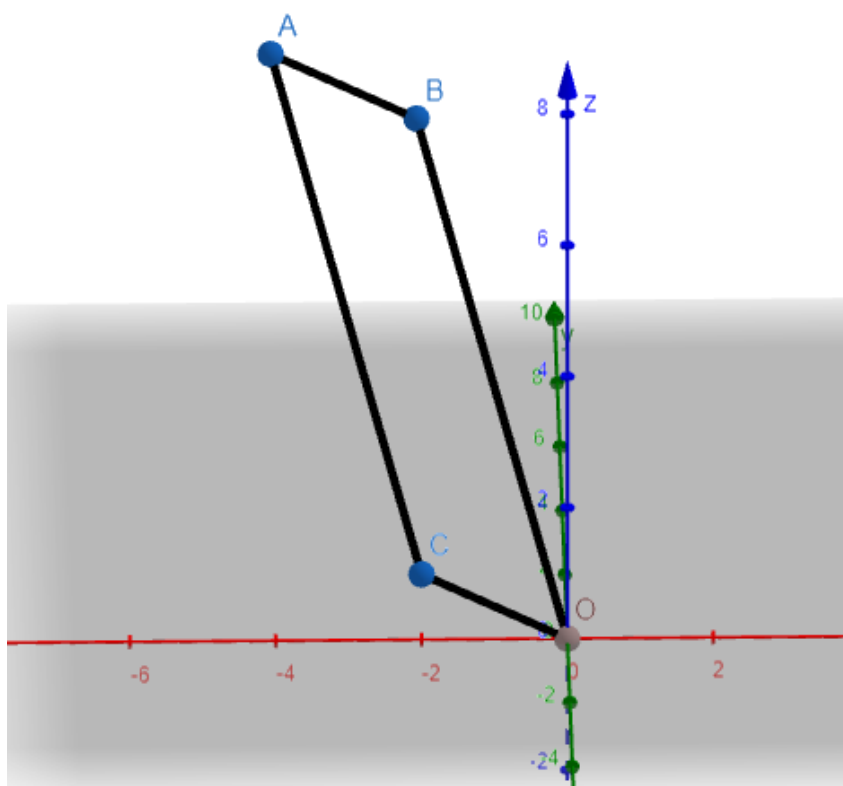
$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (-1, 2, 3) \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -t' \\ y = 2t' \\ z = 3t' \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -4 + 2t = -t' \\ 4 = 2t' \\ 7 - t = 3t' \end{array} \right\} \Rightarrow t' = 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -4 + 2t = -2 \\ 7 - t = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (2, 0, -1) \\ A(-4, 4, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -4 + 2t \\ y = 4 \\ z = 7 - t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2t = 2 \\ t = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -4 + 2 = -2 \\ y = 4 \\ z = 7 - 1 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{B(-2, 4, 6)}$$

El tercer vértice tiene coordenadas B(-2,4,6).

El cuarto vértice C lo obtenemos sumando el vector $\overrightarrow{BO}$ al punto A.

$$C = \overrightarrow{BO} + A = (2, -4, -6) + (-4, 4, 7) = (-2, 0, 1)$$



Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13,8% de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43% de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años.

- a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?
- b) (1,5 puntos) Cierta test diagnostica correctamente el 96% de los casos positivos de diabetes, pero da un 2% de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?

- a) Llamamos D al suceso “ser diabético” y S al suceso “Sabe que es diabético”.

Los datos del ejercicio nos permiten afirmar que $P(D) = 0.138$ y que

$$P(S/D) = 1 - P(\bar{S}/D) = 1 - 0.43 = 0.57.$$

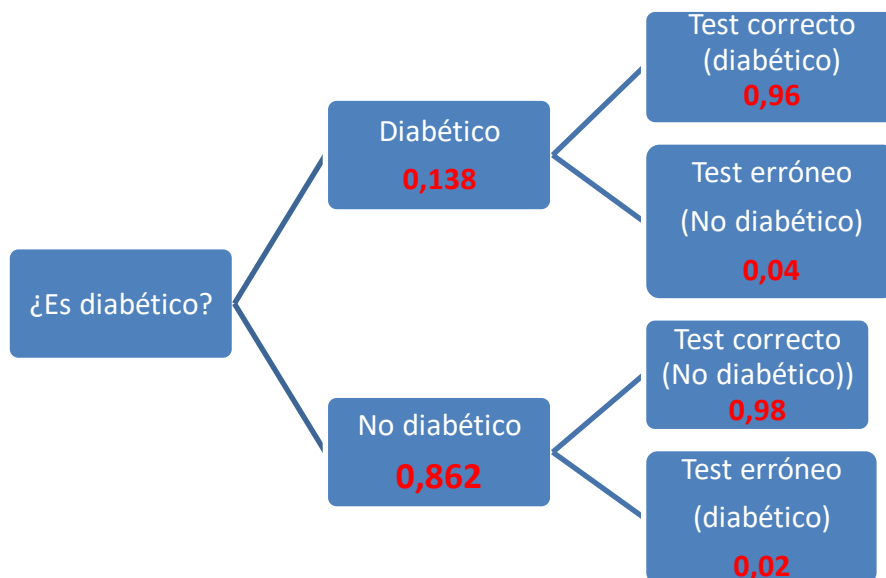
Nos piden calcular $P(D \cap S)$.

$$P(D \cap S) = P(D) \cdot P(S/D) = 0.138 \cdot 0.57 = \boxed{0.078}$$

Nos piden calcular $P(\bar{D} \cup \bar{S})$. Aplicamos las leyes de Morgan.

$$P(\bar{D} \cup \bar{S}) = P(\overline{D \cap S}) = 1 - P(D \cap S) = 1 - 0.078 = \boxed{0.922}$$

- b) Realicemos un diagrama de árbol para ayudarnos a resolver este problema.



Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Diabético} / \text{Test da diabético}) &= \frac{P(\text{Diabético y Test da diabético})}{P(\text{Test da diabético})} = \\
 &= \frac{0,138 \cdot 0,96}{0,138 \cdot 0,96 + 0,862 \cdot 0,02} = \boxed{0,885}
 \end{aligned}$$

OPCIÓN B**Ejercicio 1 : Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza.

En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Sea x = número de días en Francia, y = número de días en Alemania, z = número de días en Suiza.

Con la información proporcionada en el ejercicio obtenemos las ecuaciones siguientes.

El viaje ha durado 15 días $\rightarrow x + y + z = 15$

Han estado en Francia el doble de días que en Suiza $\rightarrow x = 2z$

El total del viaje ha costado 765 € $\rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hoteles} \rightarrow 20x + 25y + 30z \\ \text{comida} \rightarrow 20x + 15y + 25z \\ \text{Transporte} \rightarrow 8 \cdot 15 = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow 20x + 25y + 30z + 20x + 15y + 25z + 120 = 765 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40x + 40y + 55z = 645 \Rightarrow 8x + 8y + 11z = 129$$

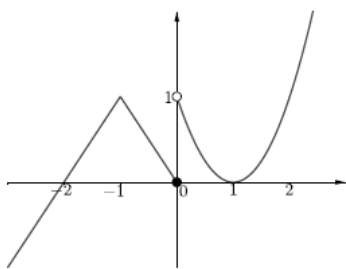
Unimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ x = 2z \\ 8x + 8y + 11z = 129 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z + y + z = 15 \\ 16z + 8y + 11z = 129 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 15 - 3z \\ 27z + 8y = 129 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27z + 8(15 - 3z) = 129 \Rightarrow 27z + 120 - 24z = 129 \Rightarrow 3z = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{9}{3} = 3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 2 \cdot 3 = 6} \\ \boxed{y = 15 - 3 \cdot 3 = 15 - 9 = 6} \end{array} \right.$$

Han estado 6 días en Francia, 6 en Alemania y 3 en Suiza.

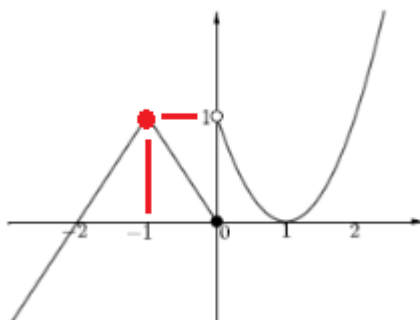
Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $y = f(x)$.

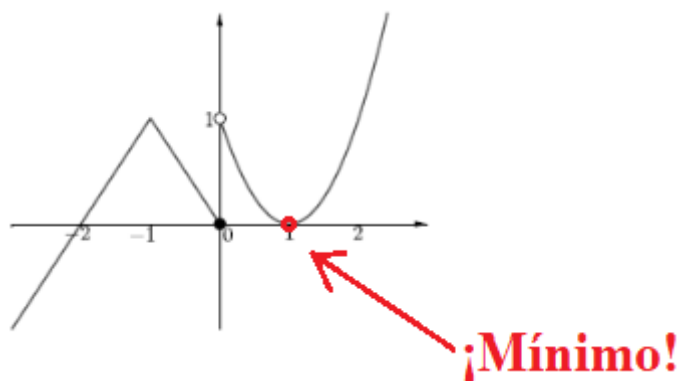
Usando la información de la figura, se pide:

- (0.5 puntos) Indicar los valores de $f(-1)$ y $f'(1)$.
- (1 punto) Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.
- (0.5 puntos) Indicar razonadamente si f es derivable en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.
- (0.5 puntos) Determinar el valor de $\int_{-2}^0 f(x) dx$.

- a) Mirando la gráfica observamos que en $x = -1$ la función pasa por el pico que está a una altura de 1 $\rightarrow f(-1) = 1$.



Como en $x = 1$ hay un mínimo la primera derivada de la función debe anularse $\rightarrow f'(1) = 0$.



- b) Es continua en $x = -1$ ya que $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

Es discontinua en $x = 0$ ya que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

- c) $f(x)$ no es derivable en $x = -1$ pues presenta un pico. Las derivadas laterales son distintas.
 $f'(-1^-) = 1$ y $f'(-1^+) = -1$.

Tampoco es derivable en $x = 0$ ya que no es continua en $x = 0$.

- d) La integral definida de $x = -2$ hasta $x = 0$ es el área de la región limitada entre la función y el eje X. Este recinto es un triángulo de base 2 y altura 1. Esta área vale $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = 1$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(0, -1, 1)$ y la recta r , que pasa por el punto $Q(1, 0, 1)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (0, 1, 2)$, se pide:

- (0.5 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P .
- (0.5 puntos) Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\overrightarrow{SP}$ sea perpendicular a la recta r .
- (1.5 puntos) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1, T_2 , contenidos en la recta r , que están a distancia $\sqrt{5}$ de P .

- a) El plano que contiene a r y pasa por $P(0, -1, 1)$ tiene como vectores directores $\vec{v} = (0, 1, 2)$ y $\overrightarrow{PQ} = (1, 0, 1) - (0, -1, 1) = (1, 1, 0)$. Su ecuación implícita es:

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y + 2 - z + 1 - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{-2x + 2y - z + 3 = 0}$$

- b) La recta r tiene ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (0, 1, 2) \\ Q(1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{array} \right\}$$

Si S es un punto de r tiene coordenadas $S(1, t, 1 + 2t)$.

El vector $\overrightarrow{SP} = (0, -1, 1) - (1, t, 1 + 2t) = (-1, -1 - t, -2t)$ es perpendicular al vector $\vec{v} = (0, 1, 2)$, por lo que su producto escalar es cero.

$$\overrightarrow{SP} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (-1, -1 - t, -2t) \cdot (0, 1, 2) = 0 \Rightarrow -1 - t - 4t = 0 \Rightarrow -5t = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{5}$$

$$S(1, t, 1 + 2t) = \left(1, -\frac{1}{5}, 1 - \frac{2}{5}\right) = \left(1, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

El punto S buscado tiene coordenadas $S = \left(1, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

- c) Averiguamos las coordenadas de los puntos T_1, T_2 .

Estos puntos pertenecen a la recta r por lo que sus coordenadas son:

$$T_1(1, t, 1 + 2t); \quad T_2(1, t', 1 + 2t')$$

La distancia de los puntos T_1 y T_2 a P es $\sqrt{5}$.

$$\overrightarrow{T_1P} = (0, -1, 1) - (1, t, 1 + 2t) = (-1, -1 - t, -2t)$$

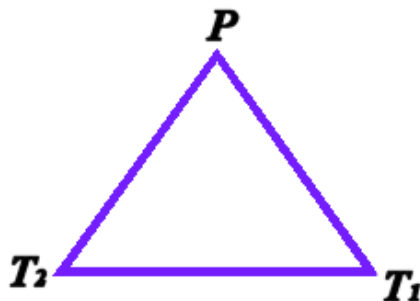
$$d(T_1, P) = \sqrt{5} \Rightarrow |\overrightarrow{T_1P}| = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{1 + (1 + t)^2 + 4t^2} = \sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1+1+t^2+2t+4t^2 &= 5 \Rightarrow 5t^2+2t-3=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow t &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{10} = \frac{-2 \pm 8}{10} = \begin{cases} t = \frac{-2+8}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \\ t' = \frac{-2-8}{10} = \frac{-10}{10} = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Obtenemos dos valores que corresponden a cada uno de los dos puntos.

$$\begin{aligned} t = \frac{3}{5} &\Rightarrow T_1(1, t, 1+2t) = \left(1, \frac{3}{5}, 1+\frac{6}{5}\right) = \left(1, \frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right) \\ t' = -1 &\Rightarrow T_2(1, t', 1+2t') = (1, -1, 1-2) = (1, -1, -1) \end{aligned}$$

El área del triángulo PT_1T_2 es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{PT_1}$ y $\overrightarrow{PT_2}$.



$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{PT_1} &= \left(1, \frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right) - (0, -1, 1) = \left(1, \frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right) \\ \overrightarrow{PT_2} &= (1, -1, -1) - (0, -1, 1) = (1, 0, -2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PT_1} \times \overrightarrow{PT_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 8/5 & 6/5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-16}{5}i + \frac{6}{5}j - \frac{8}{5}k + 2j = \frac{-16}{5}i + \frac{16}{5}j - \frac{8}{5}k = \left(\frac{-16}{5}, \frac{16}{5}, \frac{-8}{5}\right)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{PT_1} \times \overrightarrow{PT_2}|}{2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{-16}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{-8}{5}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{576}{25}}}{2} = \frac{\frac{24}{5}}{2} = \frac{24}{10} = 2,4 u^2$$

El área pedida vale $2,4 u^2$.

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 8.5$ y desviación típica $\sigma = 2.5$. Se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular el valor a tal que $P(X \leq a) = 0,05$.
 b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9.3.

$$X = N(8.5, 2.5)$$

$$a) P(X \leq a) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 8.5}{2.5} \leq \frac{a - 8.5}{2.5}\right) = P\left(Z \leq \frac{a - 8.5}{2.5}\right) = 0,05$$

Como es una probabilidad menor que 0,5 la expresión $\frac{a - 8.5}{2.5}$ es negativa, para poder buscarlo en la tabla de la $N(0, 1)$ lo pasamos a positivo.

$$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a - 8.5}{2.5}\right) = 0,05 \Rightarrow P\left(Z \geq -\frac{a - 8.5}{2.5}\right) = 0,05 \Rightarrow \\ \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a - 8.5}{2.5}\right) = 1 - 0,05 = 0,95$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599

Buscando en la tabla de la normal tipificada $N(0, 1)$ obtenemos que $-\frac{a - 8.5}{2.5} = 0.1645$.

$$-\frac{a - 8.5}{2.5} = 1.645 \Rightarrow -a + 8.5 = 4.1125 \Rightarrow a = 8.5 - 4.1125 = 3.3875$$

b)

$$P(8 < X < 9.3) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{8 - 8.5}{2.5} < \frac{X - 8.5}{2.5} < \frac{9.3 - 8.5}{2.5}\right) =$$

$$= P(-0.2 < Z < 0.32) = P(Z < 0.32) - P(Z < -0.2) = P(Z < 0.32) - P(Z > 0.2) =$$

$$= P(Z < 0.32) - (1 - P(Z < 0.2)) = 0.6255 - (1 - 0.5793) = \boxed{0.2048}$$

EvAU 2018 Ordinaria Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2017-2018 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
--	--	---

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A**Ejercicio 1. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ -2x - (m+1)y + z = -1 \\ x + (2m-1)y + (m+2)z = 2 + 2m \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro m .
- (0.5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m = 0$.

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

- (1.5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0.92$; $m_2 = 0.94$; $m_3 = 0.89$; $m_4 = 0.90$; $m_5 = 0.91$.

Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función

$$E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + (x - m_3)^2 + (x - m_4)^2 + (x - m_5)^2 \text{ alcanza el mínimo.}$$

Calcule dicho valor x .

- (1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral

$$\int_1^2 x^2 \ln(x) dx, \text{ donde } \ln \text{ significa logaritmo neperiano.}$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$, $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$, se pide:

- (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.
- (1.5 puntos) Para el cuadrado de vértices consecutivos ABCD, con A(2, 1, 3) y B(1, 2, 3), calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

El 60% de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15% de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8% si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

- (1.25 puntos) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.
- (1.25 puntos) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

OPCIÓN B**Ejercicio 1 : Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.
- (1 punto) Para $m=0$, calcular $A \cdot B$ y $A^{-1} \cdot B$.
- (0.5 puntos) Calcular $B^t \cdot B$ y $B \cdot B^t$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B .

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 9}}$, se pide:

- (0.5 puntos) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.
- (0.75 puntos) Calcular $f'(4)$.
- (1.25 puntos) Hallar el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(1, 1, 1)$ y las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{cases}$, $s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1/3}$ se pide:

- (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r .
- (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s .
- (0.5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P .

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75% de los productos fabricados son de tipo A y el 25% de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5% de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2.5% de las veces.

- (1 punto) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?
- (1.5 puntos) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

SOLUCIONES

OPCIÓN A**Ejercicio 1. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ -2x - (m+1)y + z = -1 \\ x + (2m-1)y + (m+2)z = 2 + 2m \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro m .b) (0.5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m = 0$.

a) El sistema tiene asociada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{pmatrix}$ con determinante

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{vmatrix} = -(m+1)(m+2) + m + 2m(m+2) - 2m + 1 = \\ &= -m^2 - 2m - m - 2 + m + 2m^2 + 4m - 2m + 1 = m^2 - 1 \end{aligned}$$

Lo igualamos a cero $\rightarrow |A| = 0 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \sqrt{1} = \pm 1$

Hay tres casos distintos a considerar.

CASO 1. $m \neq \pm 1$ En este caso el rango de A es 3 al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado**. Tiene solución única.**CASO 2.** $m = 1$

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ no tiene rango 3 ya que su determinante es nulo.

¿El rango de A es 2?

Consideramos el menor que resulta de quitar la 1ª columna y 3ª fila.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de } A \text{ es } 2$$

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Si consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna (es igual que la

$$2^{\text{a}} \text{ columna}) \text{ su determinante vale } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 - 1 + 3 = 0.$$

El rango de A/B no es 3.

Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna 1ª y 2ª y la fila 3ª.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

El rango de A/B es 2.

El sistema es **compatible indeterminado**, ya que rango de A es 2 al igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). Tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $m = -1$

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ no tiene rango 3 ya que su determinante es nulo.

¿El rango de A es 2?

Consideramos el menor que resulta de quitar la 3ª columna y 3ª fila. Su determinante vale

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0. \text{ Como es no nulo el rango de A es 2.}$$

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna. Su determinante

$$\text{vale } \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$$

El rango de A/B es 3.

El sistema es **incompatible**, ya que el rango de A (2) es distinto del rango de A/B (3). El sistema no tiene solución.

b) Si $m = 0$ el sistema es compatible determinado y queda
$$\begin{cases} x = 1 \\ -2x - y + z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

Lo resolvemos:

$$\begin{cases} \boxed{x=1} \\ -2x - y + z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 - y + z = -1 \\ 1 - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 1 \\ -y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 + y \\ -y + 2(1 + y) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y + 2 + 2y = 1 \Rightarrow \boxed{y = -1} \Rightarrow \boxed{z = 1 - 1 = 0}$$

La solución es $x = 1, y = -1, z = 0$.

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (1.5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0.92$; $m_2 = 0.94$; $m_3 = 0.89$; $m_4 = 0.90$; $m_5 = 0.91$.

Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función

$$E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + (x - m_3)^2 + (x - m_4)^2 + (x - m_5)^2 \text{ alcanza el mínimo.}$$

Calcule dicho valor x .

b) (1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$, donde $\ln$ significa logaritmo neperiano.

a) La función es $E(x) = (x - 0,92)^2 + (x - 0,94)^2 + (x - 0,89)^2 + (x - 0,9)^2 + (x - 0,91)^2$ con derivada

$$E'(x) = 2(x - 0,92) + 2(x - 0,94) + 2(x - 0,89) + 2(x - 0,9) + 2(x - 0,91)$$

$$E'(x) = 10x - 1,84 - 1,88 - 1,78 - 1,8 - 1,82$$

$$E'(x) = 10x - 9,12$$

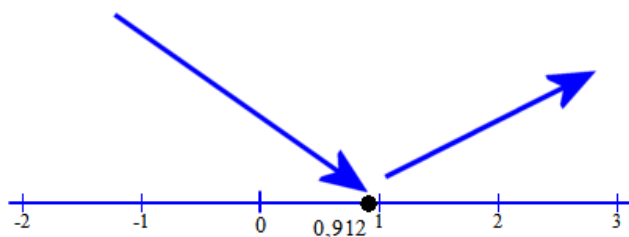
Igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos de $E(x)$.

$$E'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 9,12 = 0 \Rightarrow 10x = 9,12 \Rightarrow x = \frac{9,12}{10} = 0,912$$

Comprobamos el signo de la derivada antes y después de 0,912.

- En $(-\infty, 0.912)$ tomamos $x = 0$ y la derivada es $E'(0) = 0 - 9,12 = -9,12 < 0$. La función decrece.
- En $(0,912, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada es $E'(1) = 10 - 9,12 = 0,88 > 0$. La función crece.

La función sigue el esquema siguiente.



Como observamos en el esquema la función tiene un mínimo en $x = 0,912$.

b) Calculamos primero la integral indefinida usando integración por partes.

$$\int x^2 \ln(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx \rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln(x) dx = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_1^2 x^2 \ln(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} \right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{2^3}{3} \ln(2) - \frac{2^3}{9} \right] - \left[\frac{1^3}{3} \ln(1) - \frac{1^3}{9} \right] = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}}$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$, $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$, se pide:

- a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.
 b) (1.5 puntos) Para el cuadrado de vértices consecutivos ABCD, con A(2, 1, 3) y B(1, 2, 3), calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

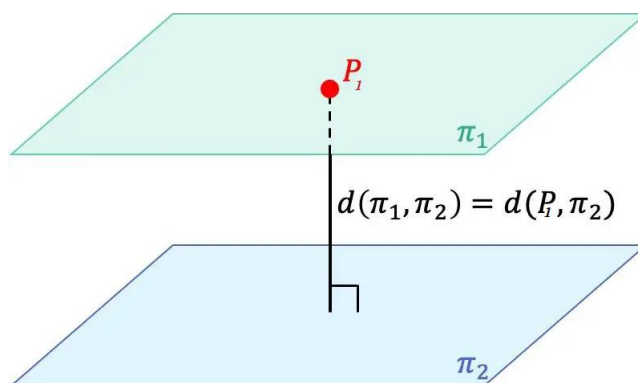
- a) Veamos la posición relativa de los planos. Utilizamos sus vectores normales.

$$\vec{n}_1 = (4, 6, -12) \text{ y } \vec{n}_2 = (-2, -3, 6).$$

¿Son paralelos los vectores?

$\frac{4}{-2} = \frac{6}{-3} = \frac{-12}{6}$ e iguales a -2 . Los vectores normales son proporcionales y los planos son paralelos.

El cubo del que nos piden su volumen tiene sus dos caras opuestas en cada uno de los planos. Averiguamos la distancia entre los planos y el volumen del cubo será esa distancia al cubo.



Obtenemos un punto del plano $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ 4x + 6y - 12z + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{6} \Rightarrow P_1 \left(0, -\frac{1}{6}, 0 \right)$$

Calculamos la distancia entre los planos paralelos como la distancia de un punto de uno de ellos al otro plano.

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = \frac{\left| \frac{3}{6} - 5 \right|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{\left| -\frac{27}{6} \right|}{\sqrt{49}} = \frac{\frac{27}{6}}{7} = \frac{27}{42} = \frac{9}{14} u$$

$$\text{Volumen del cubo es } \left(\frac{9}{14} \right)^3 = \boxed{\frac{729}{2744} u^3}$$

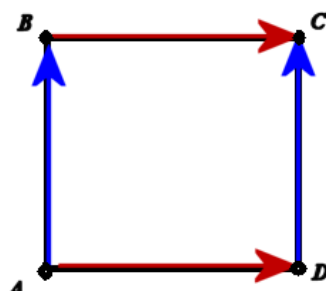
- b) Averiguamos las coordenadas del punto C.

El punto de corte de los dos planos se obtiene de resolver el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de los planos $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$ y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0 \\ \pi_3 \equiv x - y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2x - 3y + 6z - 5 = 0 \\ x = y - z + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow -2y + 2z - 4 - 3y + 6z - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y + 8z - 9 = 0 \Rightarrow y = \frac{9-8z}{-5} \Rightarrow x = \frac{9-8z}{-5} - z + 2 = \frac{9-8z+5z-10}{-5} \Rightarrow x = \frac{-3z-1}{-5} = \frac{1+3z}{5}$$

El punto C tiene coordenadas $C\left(\frac{1+3z}{5}, \frac{8z-9}{5}, z\right)$.



Observando el dibujo se aprecia que deben ser ortogonales los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$. Su producto escalar debe ser cero.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 2, 3) - (2, 1, 3) = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{BC} = \left(\frac{1+3z}{5}, \frac{8z-9}{5}, z\right) - (1, 2, 3) = \left(\frac{3z-4}{5}, \frac{8z-19}{5}, z-3\right) \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3z-4}{5}, \frac{8z-19}{5}, z-3\right) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \Rightarrow \frac{-3z+4}{5} + \frac{8z-19}{5} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5z - 15 = 0 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{1+9}{5}, \frac{24-9}{5}, 3\right) = (2, 3, 3)}$$

Además, debe cumplirse que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Averiguamos las coordenadas del cuarto punto del cuadrado, el punto D(a,b,c).

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (1, 2, 3) - (2, 1, 3) = (2, 3, 3) - (a, b, c) \Rightarrow (-1, 1, 0) = (2-a, 3-b, 3-c) \Rightarrow$$

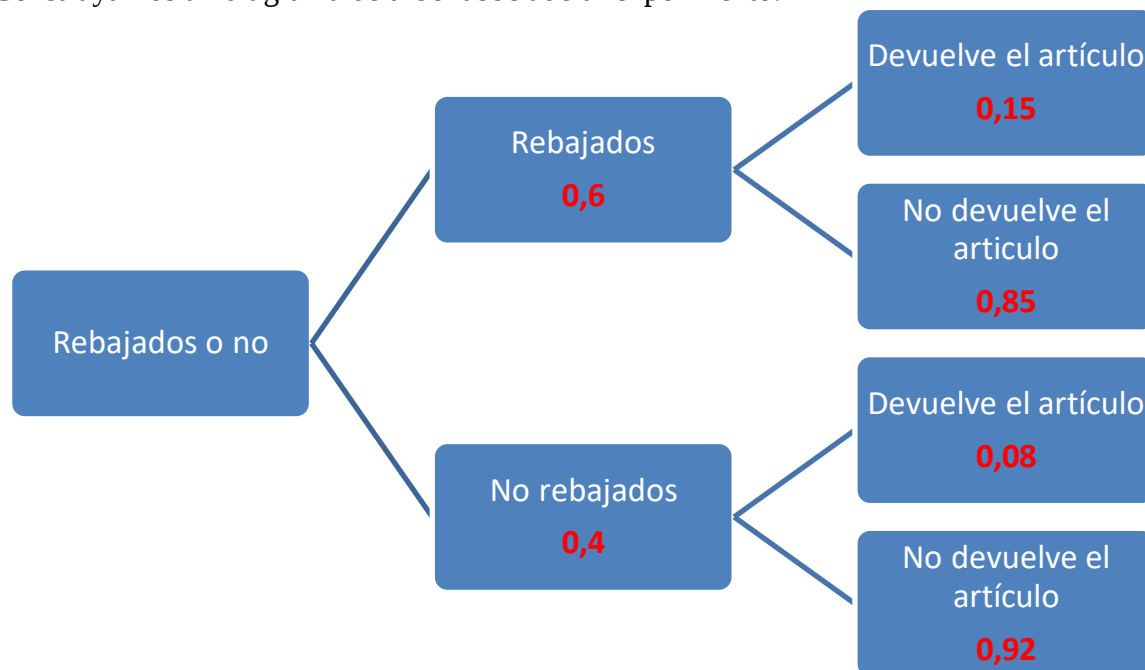
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -1 = 2-a \\ 1 = 3-b \\ 0 = 3-c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{D(3, 2, 3)}$$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

El 60% de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15% de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8% si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

- a) (1.25 puntos) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.
 b) (1.25 puntos) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

Construyamos un diagrama de árbol asociado al experimento.



Llamamos R al suceso “artículo rebajado” y D al suceso “artículo devuelto”.

Sabemos que $P(R) = 0.6$, $P(D/R) = 0.15$ y $P(D/\bar{R}) = 0.08$.

- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(R) \cdot P(D/R) + P(\bar{R}) \cdot P(D/\bar{R}) = 0.6 \cdot 0.15 + 0.4 \cdot 0.08 = \boxed{0.122}$$

El porcentaje de artículos devueltos es del 12,2%.

- b) Tenemos que calcular $P(R/D)$.

Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R/D) = \frac{P(R \cap D)}{P(D)} = \frac{P(R)P(D/R)}{P(D)} = \frac{0.6 \cdot 0.15}{0.122} = \boxed{0.737}$$

El porcentaje de artículos devueltos que fueron adquiridos con precios rebajados es del 73,7%.

OPCIÓN B**Ejercicio 1 : Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1 punto) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.
 b) (1 punto) Para $m=0$, calcular AB y $A^{-1} \cdot B$.
 c) (0.5 puntos) Calcular $B^t \cdot B$ y $B \cdot B^t$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B .

- a) Para que una matriz tenga inversa debe tener determinante no nulo.

$$\text{El determinante de la matriz } A \text{ vale } |A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4m - 4 - m^2$$

Averiguamos cuando se anula este determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

La matriz A tiene inversa siempre que $m \neq -2$.

b) Para $m=0$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular $A^{-1} \cdot B$ debemos hallar primero la inversa de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot B = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } B^t = (-2 \quad 0 \quad 0)$$

$$B^t \cdot B = (-2 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (4)$$

$\xrightarrow{(1 \times 3) \cdot (3 \times 1) = 1 \times 1}$

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (-2 \quad 0 \quad 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{(3 \times 1) \cdot (1 \times 3) = 3 \times 3}$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.
 b) (0.75 puntos) Calcular $f'(4)$.
 c) (1.25 puntos) Hallar el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

a) **Asíntota vertical.** $x = a$

Como el dominio es todo $\mathbb{R}$, no hay asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-x} = 1$$

La asíntota horizontal es $y = 1$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No hay, al existir asíntota horizontal.

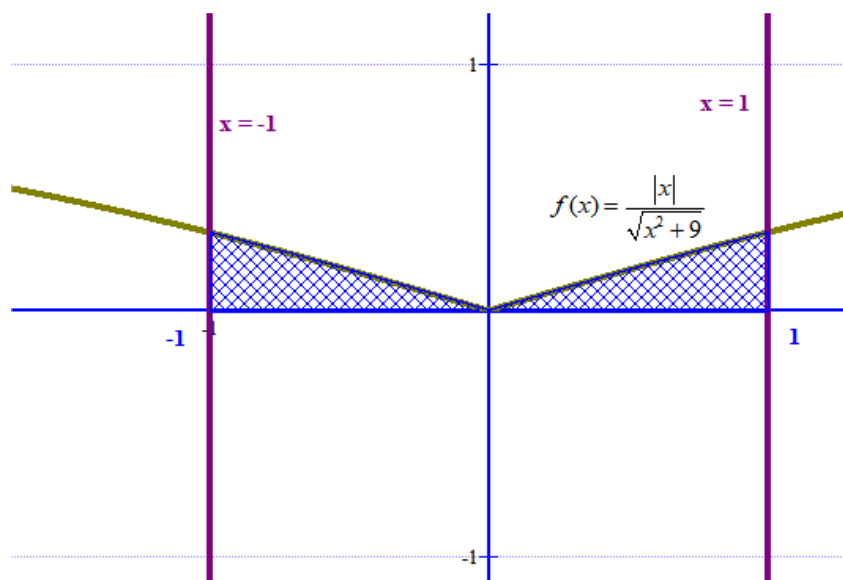
b) La función $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$ se puede expresar como $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Calculamos la expresión de su derivada.

$$f'(x) = \begin{cases} = \frac{-\sqrt{x^2+9} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}{(\sqrt{x^2+9})^2} = \frac{-\sqrt{x^2+9} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} & \text{si } x < 0 \\ = \frac{\sqrt{x^2+9} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{El valor de } f'(4) = \frac{\sqrt{4^2+9} - \frac{4^2}{\sqrt{4^2+9}}}{4^2+9} = \frac{5 - \frac{16}{5}}{25} = \frac{\frac{9}{5}}{25} = \frac{9}{125}$$

- c) La función $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$ solo corta al eje OX en $x = 0$, pero siempre es positiva. La región de la cual nos piden el área es la de la figura:



Como se puede apreciar es menor que 1 u^2 .

Calculémosla con el uso de una integral definida y teniendo en cuenta la simetría, el área pedida es el doble del área entre 0 y 1.

$$\text{Área} = 2 \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = 2 \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} dx = 2 \left[\sqrt{x^2 + 9} \right]_0^1 = 2 \left(\left[\sqrt{1^2 + 9} \right] - \left[\sqrt{0^2 + 9} \right] \right)$$

$$\text{Área} = 2(\sqrt{10} - 3) = 2\sqrt{10} - 6 \text{ u}^2 = \boxed{0,32 \text{ u}^2}$$

OTRA FORMA DE CALCULAR EL ÁREA

Como la función siempre es positiva, aunque corte el eje OX en $x = 0$, el área es:

$$\text{Área} = \int_{-1}^0 \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 9}} dx + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = - \int_{-1}^0 \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} dx + \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} dx =$$

$$= \left[-\sqrt{x^2 + 9} \right]_{-1}^0 + \left[\sqrt{x^2 + 9} \right]_0^1 =$$

$$= \left(\left[-\sqrt{0^2 + 9} \right] - \left[-\sqrt{(-1)^2 + 9} \right] \right) + \left(\left[\sqrt{1^2 + 9} \right] - \left[\sqrt{0^2 + 9} \right] \right) = -3 + \sqrt{10} + \sqrt{10} - 3$$

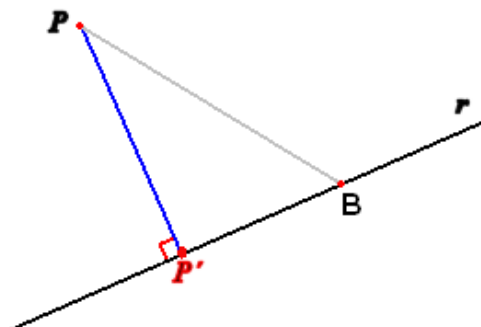
$$\text{Área} = 2\sqrt{10} - 6 \text{ u}^2 = \boxed{0,32 \text{ u}^2}$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(1, 1, 1)$ y las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{cases}$, $s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1/3}$ se pide:

- a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r .
 b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s .
 c) (0.5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P .

a) La situación es la del dibujo.



Podemos hallar esta distancia calculando las coordenadas del punto P' que pertenece a la recta r , tal que el segmento $\overline{PP'}$ es perpendicular a r .

Determinamos la ecuación de la recta r' perpendicular a r y que pasa por P .

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{cases} \Rightarrow r' \equiv \begin{cases} x = x \\ y = 2 - 2x \\ z = 6 - 5x \end{cases}$$

El vector director de r es $\vec{u}_r = (1, -2, -5)$. Si P' pertenece a r sus coordenadas son

$$P'(x, 2 - 2x, 6 - 5x).$$

Los vectores $\overline{PP'}$ y el vector director de la recta r son ortogonales por lo que su producto escalar es nulo.

$$\overline{PP'} = (x, 2 - 2x, 6 - 5x) - (1, 1, 1) = (x - 1, 1 - 2x, 5 - 5x)$$

$$\overline{PP'} \cdot \vec{u}_r = 0 \Rightarrow (x - 1, 1 - 2x, 5 - 5x) \cdot (1, -2, -5) = 0 \Rightarrow x - 1 - 2 + 4x - 25 + 25x = 0$$

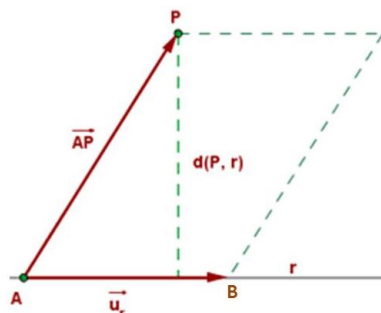
$$30x - 28 = 0 \Rightarrow x = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

$$\overline{PP'} = \left(\frac{14}{15} - 1, 1 - 2 \cdot \frac{14}{15}, 5 - 5 \cdot \frac{14}{15} \right) = \left(\frac{-1}{15}, \frac{-13}{15}, \frac{5}{15} \right)$$

$$d(P, r) = |\overline{PP'}| = \sqrt{\left(\frac{-1}{15} \right)^2 + \left(\frac{-13}{15} \right)^2 + \left(\frac{5}{15} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{225} + \frac{169}{225} + \frac{25}{225}} = \sqrt{\frac{195}{225}}$$

$$d(P, r) = \sqrt{\frac{195}{225}} = \sqrt{\frac{13}{15}} = 0,93 u$$

OTRA FORMA DE HACERLO



La ecuación de la recta es $r \equiv \begin{cases} x = x \\ y = 2 - 2x \\ z = 6 - 5x \end{cases}$, un punto de esta recta es $A(0, 2, 6)$. La distancia

del punto P a la recta r es el cociente del módulo del producto vectorial del vector $\vec{u}_r$ y $\vec{AP}$ (el área del paralelogramo formado por los vectores), dividido entre el módulo del vector director $\vec{u}_r$ (la base del paralelogramo).

$$\vec{AP} = (1, 1, 1) - (0, 2, 6) = (1, -1, -5)$$

$$\vec{AP} \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 5i - 5j - 2k + k + 5j - 10i = -5i - k = (-5, 0, -1)$$

$$d(P, r) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = \frac{\sqrt{25+1}}{\sqrt{1+4+25}} = \sqrt{\frac{26}{30}} = \sqrt{\frac{13}{15}} u$$

b) Para estudiar la posición relativa de las rectas veamos si sus vectores directores tienen coordenadas proporcionales (rectas paralelas o coincidentes).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, -2, -5) \\ \vec{u}_s = \left(-1, 1, \frac{1}{3}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{1} \neq \frac{-5}{1/3}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes.

¿Son secantes o se cruzan?

Planteamos el sistema formado por las dos rectas, si tiene solución se cortan (al haber punto de intersección entre ellas) y si no tiene solución se cruzan (al no haber punto de intersección entre ellas).

$$\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = 6 - 5t' \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + \frac{1}{3}t \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} t' = 2 - t \\ 2 - 2t' = -1 + t \\ 6 - 5t' = 1 + \frac{1}{3}t \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 - 2(2 - t) = -1 + t \\ 6 - 5(2 - t) = 1 + \frac{1}{3}t \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 - 4 + 2t = -1 + t \\ 6 - 10 + 5t = 1 + \frac{1}{3}t \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t = 1 \\ 5t - \frac{1}{3}t = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 - \frac{1}{3} = 5 \text{ Esta igualdad es imposible.}$$

El sistema no tiene solución y las rectas se cruzan (no tienen punto en común, pero no son paralelas).

c) El plano perpendicular a la recta $s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1/3}$ tiene como vector normal el

director de s , es decir, $\vec{u}_s = \left(-1, 1, \frac{1}{3}\right)$. El plano tiene ecuación $\pi \equiv -x + y + \frac{1}{3}z + D = 0$.

Como pasa por el punto $P(1, 1, 1)$, las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación del plano $\rightarrow -1 + 1 + \frac{1}{3} + D = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} + D = 0 \Rightarrow D = -\frac{1}{3}$.

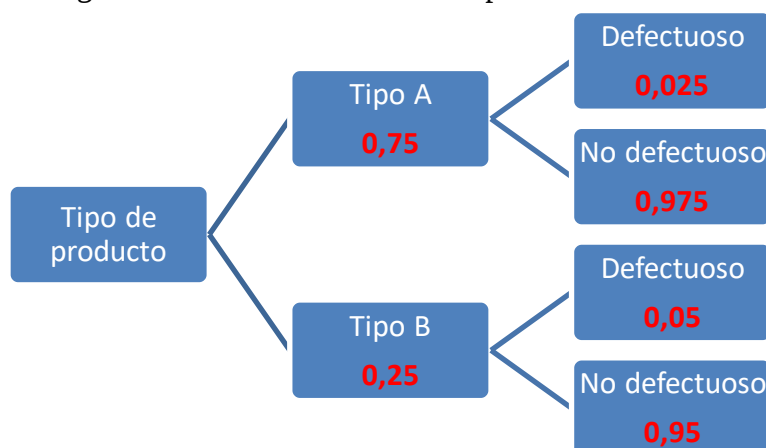
El plano pedido tiene ecuación $\pi \equiv -x + y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv -3x + 3y + z - 1 = 0}$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75% de los productos fabricados son de tipo A y el 25% de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5% de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2.5% de las veces.

- a) (1 punto) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?
- b) (1.5 puntos) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

Realizamos un diagrama de árbol con la situación planteada.



- a) Obtenemos la probabilidad de que un producto sea defectuoso.

$$P(\text{Defectuoso}) = P(\text{Es del tipo A}) \cdot P(\text{Es defectuoso/Tipo A}) + \\ + P(\text{Es del tipo B}) \cdot P(\text{Es defectuoso/Tipo B}) = 0,75 \cdot 0,025 + 0,25 \cdot 0,05 = \boxed{0,03125}$$

Multiplicamos esta probabilidad por los 5000 productos del mes $\rightarrow 5000 \cdot 0,03125 = 156,25$ saldrán defectuosos.

De 5000 productos aproximadamente 156 productos saldrán defectuosos.

- b) Sea X = Número de productos defectuosos del tipo A.

n = número de repeticiones = 6000.

Probabilidad de sacar un producto defectuoso es de 0,025 $\rightarrow p = 0,025$

$$X = B(6000, 0,025)$$

Se aproxima a una normal de media $\mu = n \cdot p = 6000 \cdot 0,025 = 150$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{6000 \cdot 0,025 \cdot 0,975} = 12,1. \text{ Esto es posible dado que } n \text{ es muy grande y}$$

$$np = 150 > 5 \text{ y } nq = 6000 \cdot (1 - 0,025) = 5850 > 5.$$

$X = B(6000, 0,025)$ se aproxima a una normal $N(150, 12,1)$.

$$P(X > 160) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(X \geq 160,5) = \\ = 1 - P(X < 160,5) = \{\text{Tipifico}\} = 1 - P\left(\frac{X - 150}{12,1} < \frac{160,5 - 150}{12,1}\right) = \\ = 1 - P(Z < 0,867) = 1 - \frac{0,8051 + 0,8078}{2} = \boxed{0,193}$$

EvAU 2017 Extraordinaria Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2016-2017 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
--	--	---

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

CALIFICACIÓN: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos, la 3ª y la 4ª sobre 2 puntos.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A**Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.**

Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, donde $\ln$ significa logaritmo neperiano, se

pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^0 f(x) dx$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1, \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3, \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2 .

b) (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.

c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y el punto $P(1, 2, 3)$.

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72% de oro y una proporción del 16% de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determinése las cantidades x , y , z .

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que

$p(A) = \frac{4}{9}$, $p(B) = \frac{1}{2}$ y $p(A \cup B) = \frac{2}{3}$, se pide:

- a) (1 punto) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.
- b) (1 punto) Calcular $p(\bar{A}/B)$, donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario de A.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Calcular la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$.
- b) (1.5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A - I$, $A^2 - I$ y $A^3 - I$.
- c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6 , en caso de que exista.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1}$ y se pide:

- a) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.
- b) (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.
- c) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3, 2, 0)$ y $P_2(7, 0, 2)$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar la distancia del punto $Q(3, 5, -3)$ a la recta r .
- b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q .

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 3, -1)$, $B(3, 1, 0)$ y $C(2, 5, 1)$ y se pide:

- a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.
- b) (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

SOLUCIONES

OPCIÓN A**Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.**

Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, donde $\ln$ significa logaritmo neperiano, se

pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.b) (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^0 f(x) dx$ a) Para que sea continua en $x = 0$, la función en dicho valor y sus límites laterales deben coincidir.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{\ln(0+1)}{0+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{2x} = 0e^0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \frac{\ln(0+1)}{0+1} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Son todos los valores iguales y la función es continua en $x = 0$.

Para que sea derivable estudiamos sus derivadas laterales y vemos si coinciden.

$$f'(x) = \begin{cases} e^{2x} + 2xe^{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - 1 \cdot \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = e^0 + 2 \cdot 0 \cdot e^0 = 1 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1 - \ln(0+1)}{(0+1)^2} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$

La función es derivable en $x = 0$ y su derivada vale $f'(0) = 1$.b) Calculamos el límite en $-\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-2x}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2e^{-2x}} = \frac{1}{-\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

Calculamos el límite en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

c) Calculamos primero la integral indefinida usando el método de integración por partes.

$$\int f(x) dx = \int x e^{2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = x \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx =$$

$$= x \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = x \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} e^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$$

La integral definida valdrá:

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 x e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]_{-1}^0 = \left[\frac{1}{2} e^0 \left(0 - \frac{1}{2} \right) \right] - \left[\frac{1}{2} e^{-2} \left(-1 - \frac{1}{2} \right) \right] =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{4} + \frac{3}{4e^2}}$$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1, \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3, \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$ se pide:

- (1 punto) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2 .
- (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.
- (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y el punto $P(1, 2, 3)$.

- a) Pasamos las ecuaciones de las rectas a paramétricas y obtenemos un punto y un vector director de cada una.

$$r_1 \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1, \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - y = 1 + z \\ 2x - y = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - y = 1 + z \\ -2x + y = -1 + z \end{cases}$$

$$4x = 2z \Rightarrow x = \frac{1}{2}z \Rightarrow z - y = 1 - z \Rightarrow -1 + 2z = y$$

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = -1 + 2z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} \vec{v}_1 = \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right) \\ P_1(0, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} \vec{u}_1 = 2\vec{v}_1 = (1, 4, 2) \\ P_1(0, -1, 0) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3, \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 5y = 3 + 2z \\ 3x + y = 3 - 4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 5y = 3 + 2z \\ -3x - y = -3 + 4z \end{cases}$$

$$-6y = 6z \Rightarrow y = -z \Rightarrow 3x - z = 3 - 4z \Rightarrow 3x = 3 - 3z \Rightarrow x = 1 - z$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 - z \\ y = -z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} \vec{u}_2 = (-1, -1, 1) \\ P_2(1, 0, 0) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 4, 2) \\ \vec{u}_2 = (-1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{4}{-1} \neq \frac{2}{1}$$

Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan.

Para averiguar cuál de estas dos situaciones cumplen r_1 y r_2 calculamos el producto mixto de los vectores $\vec{u}_1 = (1, 4, 2)$, $\vec{u}_2 = (-1, -1, 1)$ y $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 0) - (0, -1, 0) = (1, 1, 0)$.

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{P_1P_2}] = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4 - 2 + 2 + 0 - 1 = 3 \neq 0$$

Al ser no nulo el producto mixto las rectas se cruzan, están en distintos planos y no coinciden en ningún punto sin ser paralelas.

- b) La distancia entre dos rectas que se cruzan es el volumen del paralelepípedo dividido entre el área de su base tomando como aristas del paralelepípedo los vectores directores de las rectas y un vector que una un punto de r_1 con un punto de r_2 .

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4i - 2j - k + 4k - j + 2i = 6i - 3j + 3k = (6, -3, 3)$$

$$\text{Distancia}(r_1, r_2) = \frac{[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{P_1P_2}]}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|} = \frac{3}{\sqrt{36+9+9}} = \frac{3}{\sqrt{54}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6} u}$$

- c) El plano π que contiene a r_1 y el punto $P(1, 2, 3)$ es un plano con vectores directores $\vec{u}_1 = (1, 4, 2)$ y $\vec{P_1P} = (1, 2, 3) - (0, -1, 0) = (1, 3, 3)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 2, 3) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{u}_1 = (1, 4, 2) \\ \vec{v} = \vec{P_1P} = (1, 3, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x - 12 + 2y - 4 + 3z - 9 - 4z + 12 - 3y + 6 - 6x + 6 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv 6x - y - z - 1 = 0}$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72% de oro y una proporción del 16% de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determinéase las cantidades x , y , z .

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C $\rightarrow x + y + z = 25$.

Construimos una tabla.

	Gramos de oro	Gramos de plata
Gramos de A (x)	x	0
Gramos de B (y)	$0.75y$	$0.15y$
Gramos de C (z)	$0.6z$	$0.22z$
TOTALES	$x + 0.75y + 0.6z$	$0.15y + 0.22z$

Como deseamos conseguir un lingote de 25 gramos con un 72% de oro, es decir, $25 \cdot 0.72 = 18$ gramos de oro $\rightarrow x + 0.75y + 0.6z = 18$

El 16% de los 25 gramos del lingote son plata, es decir, $0.16 \cdot 25 = 4$ gramos de plata $\rightarrow 0.15y + 0.22z = 4$

Tenemos dos ecuaciones más que completan el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 25 \\ x + 0.75y + 0.6z &= 18 \\ 0.15y + 0.22z &= 4 \end{aligned} \right\}$$

Lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 25 \\ x + 0.75y + 0.6z &= 18 \\ 0.15y + 0.22z &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= 25 - y - z \\ x + 0.75y + 0.6z &= 18 \\ 0.15y + 0.22z &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 25 - y - z + 0.75y + 0.6z &= 18 \\ 0.15y + 0.22z &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} -0.25y - 0.4z &= -7 \\ 0.15y + 0.22z &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 0.25y + 0.4z &= 7 \\ 0.15y + 0.22z &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 0.25y &= 7 - 0.4z \\ 0.15y + 0.22z &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} y &= \frac{7 - 0.4z}{0.25} \\ 0.15y + 0.22z &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0.15 \frac{7 - 0.4z}{0.25} + 0.22z = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.15(7 - 0.4z) + 0.25 \cdot 0.22z = 4 \cdot 0.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.05 - 0.06z + 0.055z = 1 \Rightarrow -0.005z = -0.05 \Rightarrow \boxed{z = \frac{0.05}{0.005} = 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{7 - 0.4 \cdot 10}{0.25} = 12} \Rightarrow \boxed{x = 25 - 12 - 10 = 3}$$

Son necesarios 3 gramos de la aleación A, 12 gramos de la B y 10 de la C.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Construimos una tabla.

	Gramos de oro	Gramos de plata	Otros metales
Gramos de A (x)	x	0	0
Gramos de B (y)	0.75y	0.15y	0.1y
Gramos de C (z)	0.6z	0.22z	0.18z
TOTALES	$x + 0.75y + 0.6z$	$0.15y + 0.22z$	$0.1y + 0.18z$

Como deseamos conseguir un lingote de 25 gramos con un 72% de oro, es decir, $25 \cdot 0.72 = 18$ gramos de oro.

El 16% de los 25 gramos del lingote es plata, es decir, $0.16 \cdot 25 = 4$ gramos de plata.

El resto del lingote, es decir, $25 - 18 - 4 = 3$ gramos de “otros metales”.

Nos queda un sistema de tres ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 0.75y + 0.6z = 18 \\ 0.15y + 0.22z = 4 \\ 0.1y + 0.18z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 100x + 75y + 60z = 1800 \\ 15y + 22z = 400 \\ 10y + 18z = 300 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 15y + 12z = 360 \\ 15y + 22z = 400 \\ 5y + 9z = 150 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 2^a \\ 15y + 27z = 450 \\ -15y - 22z = -400 \\ \hline 5z = 50 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 15y + 12z = 360 \\ 15y + 22z = 400 \\ 5z = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 15y + 12z = 360 \\ 15y + 22z = 400 \\ \boxed{z = 10} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 15y + 120 = 360 \\ 15y + 220 = 400 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 15y = 240 \\ 15y = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 15y = 240 \\ \boxed{y = \frac{180}{15} = 12} \end{array} \right\} \Rightarrow 20x + 180 = 240 \Rightarrow 20x = 60 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

Son necesarios 3 gramos de la aleación A, 12 gramos de la B y 10 de la C.

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que

$$p(A) = \frac{4}{9}, \quad p(B) = \frac{1}{2} \text{ y } p(A \cup B) = \frac{2}{3}, \text{ se pide:}$$

- a) (1 punto) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.
 b) (1 punto) Calcular $p(\bar{A}/B)$, donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario de A.

- a) Calculamos la probabilidad de la intersección de A y B y comparamos su valor con el producto de las probabilidades de A y B.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} - p(A \cap B) \Rightarrow$$

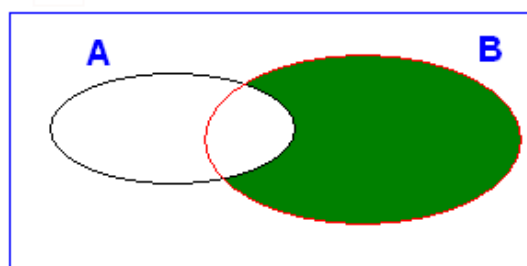
$$\Rightarrow p(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{18}$$

$$p(A) \cdot p(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{18} \neq \frac{5}{18} = p(A \cap B)$$

No coinciden los valores obtenidos y los sucesos A y B no son independientes.

- b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$p(\bar{A}/B) = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{9}{18} - \frac{5}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$



$$\begin{aligned} \bar{A} \cap B &= \\ &= B - A \cap B \end{aligned}$$

OPCIÓN B**Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Calcular la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$.
- b) (1.5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A - I$, $A^2 - I$ y $A^3 - I$.
- c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6 , en caso de que exista.

a)

$$B = (A - I)(2I + 2A)$$

$$B = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \left[2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2+2 & -2+2 \\ 0 & 2-2 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(A - I) < 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A - I) = 2$$

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Rango}(A^2 - I) = 1$, pues la matriz sólo tiene un elemento no nulo.

$$A^3 - I = A^2 A - I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 - 7 = 0 \rightarrow \text{Rango}(A^3 - I) < 3$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A^3 - I) = 2$$

c) Hemos calculado la expresión de A^3 . Seguimos a partir de ahí.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = A^3 A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A^6| = 64 \neq 0; \text{ Existe la inversa de } A^6.$$

$$(A^6)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A^6)^T)}{|A^6|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{64} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A^6)^{-1} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1}$ y se pide:

- (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.
- (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.
- (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

a) Calculamos los valores de la función y su derivada en $x = 0$.

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{e^{-0}}{0^2 + 1} = 1$$

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2 + 1) - 2xe^{-x}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-e^{-x}(x^2 + 1 + 2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$x = 0 \Rightarrow f'(0) = \frac{-e^{-0}(0^2 + 1 + 0)}{(0^2 + 1)^2} = -1$$

Hallamos la ecuación de la recta tangente.

$$\left. \begin{array}{l} y - f(a) = f'(a)(x - a) \\ a = 0 \\ f(a) = 1 \\ f'(a) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 1 = -1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -x + 1}$$

b) El dominio de la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1}$ es todo $\mathbb{R}$, pues el denominador no se anula y la exponencial siempre existe.

Asíntota vertical. $x = a$

No tiene, pues su dominio es $\mathbb{R}$.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x(x^2 + 1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2 + 1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{2x} = \frac{-\infty}{-\infty} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty \end{aligned}$$

Existe asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

No existe asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

c) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2 + 2x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-e^{-x}(x^2 + 2x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = -1$$

Estudiemos el signo de la derivada antes y después de $x = -1$.

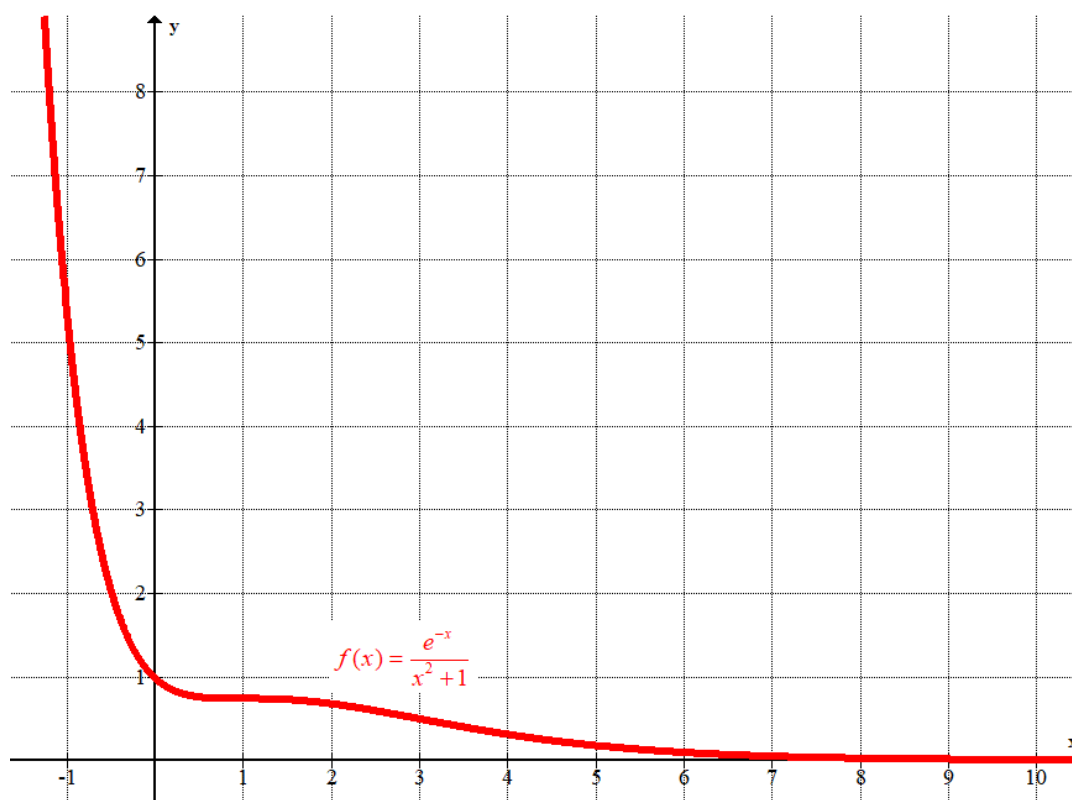
- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{-e^{-(-2)}((-2)^2 + 2(-2) + 1)}{((-2)^2 + 1)^2} = \frac{-e^2}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En $(-1, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-e^{-0}(0^2 + 0 + 1)}{(0^2 + 1)^2} = -1 < 0$. La función decrece en $(-1, +\infty)$.

La función decrece en todo su dominio. En $x = -1$ la función presenta un punto de inflexión.

No presenta extremos relativos.



Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3, 2, 0)$ y $P_2(7, 0, 2)$, se pide:

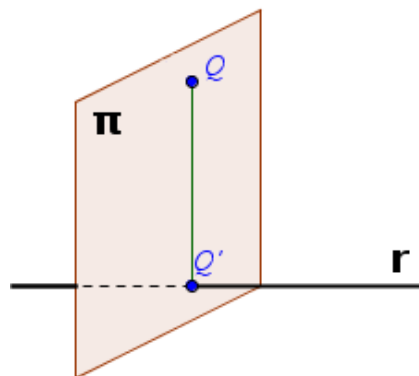
- a) (1 punto) Hallar la distancia del punto $Q(3, 5, -3)$ a la recta r .
 b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q .

a) Hallamos primero el vector director de la recta y su ecuación.

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (7, 0, 2) - (3, 2, 0) = (4, -2, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_1(3, 2, 0) \in r \\ \vec{v} = (4, -2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Hallamos el plano π que contiene a Q y es perpendicular a la recta r .



$$\left. \begin{array}{l} Q(3, 5, -3) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v} = (4, -2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q(3, 5, -3) \in \pi \\ \pi \equiv 4x - 2y + 2z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 12 - 10 - 6 + D = 0 \Rightarrow D = 4$$

$$\pi \equiv 4x - 2y + 2z + 4 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0$$

Hallamos el punto Q' de corte de plano y recta.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0 \\ x = 3 + 4\lambda \\ r \equiv y = 2 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 6 + 8\lambda - 2 + 2\lambda + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow 12\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = -0.5$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 - 2 = 1 \\ y = 2 + 1 = 3 \\ z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow Q'(1, 3, -1)$$

La distancia de Q a la recta r es la distancia entre los puntos Q y Q' .

$$\overrightarrow{QQ'} = (1, 3, -1) - (3, 5, -3) = (-2, -2, 2)$$

$$\boxed{\text{Distancia}(Q, r) = \text{Distancia}(Q, Q') = |\overrightarrow{QQ'}| = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12} \text{ u}}$$

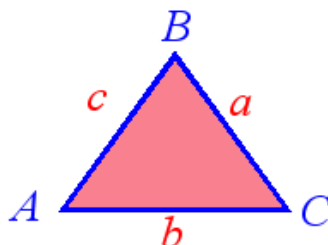
b) Lo hemos determinado para hallar la distancia del punto Q a la recta r . Es $Q'(1, 3, -1)$.

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,3,-1), B(3,1,0) y C(2,5,1) y se pide:

- a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.
b) (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

- a) El tipo de triángulo se decide comparando las longitudes de sus lados.



Calculamos la longitud de cada lado.

$$\overrightarrow{BC} = (2, 5, 1) - (3, 1, 0) = (-1, 4, 1) \rightarrow a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$$

$$\overrightarrow{AC} = (2, 5, 1) - (1, 3, -1) = (1, 2, 2) \rightarrow b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$\overrightarrow{AB} = (3, 1, 0) - (1, 3, -1) = (2, -2, 1) \rightarrow c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

Tiene dos lados iguales $b = c$ y el tercero desigual, por lo que es un triángulo isósceles.

- b) Para calcular los ángulos utilizamos los vectores que definen cada lado.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (-1, 4, 1) \\ \overrightarrow{BA} = (-2, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1, 4, 1) \cdot (-2, 2, -1) = \sqrt{1+16+1} \sqrt{9} \cos(B) \Rightarrow 2+8-1 = 3\sqrt{18} \cos(B)$$

$$\cos(B) = \frac{9}{3\sqrt{18}} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\pi}{4} = 45^\circ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (1, 2, 2) \\ \overrightarrow{AB} = (2, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1, 2, 2) \cdot (2, -2, 1) = \sqrt{9} \sqrt{9} \cos(A) \Rightarrow 2-4+2 = 9 \cos(A)$$

$$\cos(A) = 0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{\pi}{2} = 90^\circ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{CA} = (-1, -2, -2) \\ \overrightarrow{CB} = (1, -4, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1, -2, -2) \cdot (1, -4, -1) = \sqrt{9} \sqrt{18} \cos(C) \Rightarrow -1+8+2 = 3\sqrt{18} \cos(C)$$

$$\cos(C) = \frac{3}{\sqrt{18}} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\pi}{4} = 45^\circ}$$

Los ángulos son de 90° , 45° y 45° . Es un triángulo rectángulo isósceles (una escuadra).

EvAU 2017 Ordinaria Matemáticas II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2016-2017 MATERIA: MATEMÁTICAS II	 Universidad Carlos III de Madrid
--	---	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

CALIFICACIÓN: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos, la 3ª y la 4ª sobre 2 puntos.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A**Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.**

Dado el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases}$$
, se pide:

- (2 puntos) Discute en función de los valores del parámetro real a .
- (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a=1$.
- (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a=2$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados los puntos $P(1, -2, 1)$, $Q(-4, 0, 1)$, $R(-3, 1, 2)$, $S(0, -3, 0)$, se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.
- (1 punto) Estudiar la posición relativa de la recta r , que pasa por los puntos P y Q, y la recta s , que pasa por R y S.
- (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + x + 6}{x - 2}$, se pide:

- (0,5 puntos) Determinar su dominio y asíntotas verticales.
- (0,5 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (1 punto) Calcular $\int_3^5 f(x) dx$.

OPCIÓN B**Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.**

Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, se pide:

- (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) - \frac{2}{g(x)} \right)$.
- (0,75 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $\left(\frac{1}{2}, 4 \right)$.
- (1,25 puntos) Calcular el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x + 3$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- (1 punto) Determinar la matriz P^{-1} , inversa de la matriz P .
- (1 punto) Determinar la matriz B^{-1} , inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.
- (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2 , siendo $A = PJP^{-1}$.

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

- (1 punto) Determine la distancia entre las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z \quad y \quad r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

- (1 punto) Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s , que pasa por el origen.

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

El 40% de los sábados Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30% restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras, y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

- (1 punto) Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.
- (1 punto) Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases}$$
, se pide:

- a) (2 puntos) Discute en función de los valores del parámetro real a .
 b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a = 1$.
 c) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a = 2$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{vmatrix} = 8a + 4 + a^2 - 8a - 8 = a^2 - 4.$$

Buscamos cuando se anula el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{4} = \pm 2$$

Distinguimos tres casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 2$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a = -2$

El determinante de A es 0 por lo que su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ Consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow$

$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6 \neq 0$.

El rango de A es 2.

Averiguamos el rango de $A/B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 2ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{con determinante } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8 \neq 0$$

El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 $\neq$ 3 = Rango de A/B.

El sistema es incompatible.

CASO 3. $a = 2$

El determinante de A es 0 por lo que su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \text{ Consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna } 3^a \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ con determinante } \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 2 = -10 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

$$\text{Averiguamos el rango de } A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ es el mismo que A pues solo hemos}$$

añadido una columna, la 4ª que es igual que la 1ª.

Rango de A = Rango de A/B = 2 < 3 = Número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a = 1$ el sistema es compatible determinado (CASO 1).

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 4y + 2z = 1 \\ 4y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 4y + 2z = 1 \\ 4y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 4y = 1 \\ x - 4y + 8y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ -2x - 8y = -2 \end{cases}$$

$$-3y = -1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{3}} \Rightarrow x + \frac{4}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{z = \frac{4}{3}}$$

$$\text{La solución es } \boxed{x = -\frac{1}{3}; \quad y = \frac{1}{3}; \quad z = \frac{4}{3}}$$

c) Para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ x - 4y + 3z = 1 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ x - 4y + 3z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ x - 4y + 3z = 1 \\ \boxed{z = 2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2y = 2 \\ x - 4y + 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Son ecuaciones iguales}\} \Rightarrow x + 2y = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1 - 2y}$$

$$\text{Las soluciones son } \boxed{x = 1 - 2t; \quad y = t; \quad z = 2t}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados los puntos $P(1, -2, 1)$, $Q(-4, 0, 1)$, $R(-3, 1, 2)$, $S(0, -3, 0)$, se pide:

- (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.
- (1 punto) Estudiar la posición relativa de la recta r , que pasa por los puntos P y Q, y la recta s , que pasa por R y S.
- (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

- a) Si el plano contiene a los puntos P, Q y R tiene como vectores directores

$$\overrightarrow{PQ} = (-4, 0, 1) - (1, -2, 1) = (-5, 2, 0) \text{ y } \overrightarrow{PR} = (-3, 1, 2) - (1, -2, 1) = (-4, 3, 1).$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1, -2, 1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-5, 2, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PR} = (-4, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x - 2 - 15z + 15 + 8z - 8 + 5y + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x + 5y - 7z + 15 = 0}$$

- b) Hallamos las ecuaciones de las rectas r y s .

$$\left. \begin{array}{l} P(1, -2, 1) \in r \\ \vec{u}_r = \overrightarrow{PQ} = (-5, 2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} R(-3, 1, 2) \in s \\ \vec{v}_s = \overrightarrow{RS} = (0, -3, 0) - (-3, 1, 2) = (3, -4, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -3 + 3\alpha \\ y = 1 - 4\alpha \\ z = 2 - 2\alpha \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores de ambas rectas no son proporcionales:

$$\frac{-5}{3} \neq \frac{2}{-4} \neq \frac{0}{-2}$$

Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

¿Se cortan o se cruzan?

Calculamos el producto mixto de $\vec{u}_r = (-5, 2, 0)$, $\vec{v}_s = (3, -4, -2)$ y $\overrightarrow{PR} = (-4, 3, 1)$.

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PR}] = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 20 + 16 - 6 - 30 = 0$$

Como este producto mixto es nulo significa que las rectas se cortan, son coplanarias.

- c) El área del triángulo PQR es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (-5, 2, 0) \\ \overrightarrow{PR} = (-4, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 15k + 8k + 5j = 2i + 5j - 7k = (2, 5, -7)$$

$$\text{Área triángulo PQR} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{\sqrt{4 + 25 + 49}}{2} = \frac{\sqrt{78}}{2} = 4,41 u^2$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$c(t) = te^{-t/2} \Rightarrow c'(t) = e^{-t/2} - \frac{t}{2}e^{-t/2} = e^{-t/2} \left(1 - \frac{t}{2}\right)$$

$$c'(t) = 0 \Rightarrow e^{-t/2} \left(1 - \frac{t}{2}\right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{t}{2} = 0 \Rightarrow 2 - t = 0 \Rightarrow \boxed{t = 2}$$

Obtenemos un punto crítico en $t = 2$.

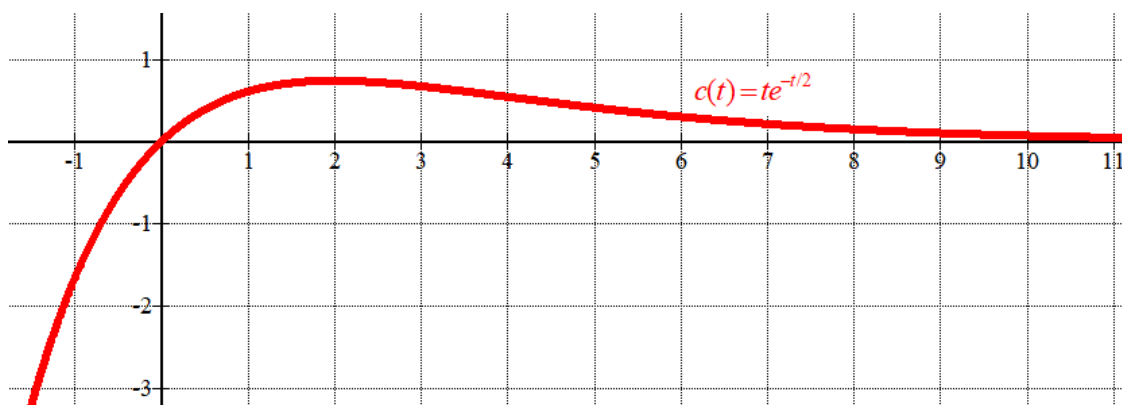
Comprobamos si es máximo o mínimo utilizando el signo de la segunda derivada.

$$c'(t) = e^{-t/2} - \frac{t}{2}e^{-t/2} \Rightarrow c''(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2} - \frac{1}{2}e^{-t/2} + \frac{t}{4}e^{-t/2} = -e^{-t/2} + \frac{t}{4}e^{-t/2}$$

$$c''(t) = e^{-t/2} \left(-1 + \frac{t}{4}\right) \Rightarrow c''(2) = e^{-2/2} \left(-1 + \frac{2}{4}\right) = -e^{-1} \frac{1}{2} < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función $c(t) = te^{-t/2}$ presenta un máximo relativo en $t = 2$. La concentración presenta un máximo en $t = 2$, a las 2 horas la máxima concentración en sangre es de $c(2) = 2e^{-2/2} = \frac{2}{e} = 0,735 \text{ mg / ml}$.

La concentración siempre toma valores por debajo del máximo pues la función es continua y todos sus valores son inferiores al valor máximo 0,735 mg/ml. No hay riesgo para el paciente en ningún momento.



Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + x + 6}{x - 2}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar su dominio y asíntotas verticales.

b) (0,5 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) (1 punto) Calcular $\int_3^5 f(x) dx$.

a) El dominio son todos los reales menos los valores de x que anulan el denominador.

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{2\}$$

Asíntotas verticales. $x = a$.

¿ $x = 2$ es asíntota?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + 6}{x - 2} = \frac{12}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + x + 6}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 6}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{1 + \frac{1}{\infty} + \frac{6}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty}} = \frac{1 + 0 + 0}{1 - 0} = \boxed{1} \end{aligned}$$

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int \frac{x^2 + x + 6}{x - 2} dx =$$

Realizamos la división.

$$\begin{array}{r} x^2 \quad +x \quad +6 \quad |x-2 \\ \underline{-x^2 \quad +2x} \quad \quad \quad x+3 \\ \quad \quad 3x \quad +6 \\ \quad \quad \underline{-3x \quad +6} \quad \quad \quad 12 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 12 \end{array} \rightarrow \frac{x^2 + x + 6}{x - 2} = x + 3 + \frac{12}{x - 2}$$

$$= \int x + 3 + \frac{12}{x - 2} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 12 \ln|x - 2| + C$$

Lo aplicamos a la integral definida pedida:

$$\begin{aligned} \int_3^5 f(x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} + 3x + 12 \ln|x - 2| \right]_3^5 = \left[\frac{5^2}{2} + 15 + 12 \ln|5 - 2| \right] - \left[\frac{3^2}{2} + 9 + 12 \ln|3 - 2| \right] = \\ &= \frac{25}{2} + 15 + 12 \ln 3 - \frac{9}{2} - 9 = \boxed{14 + 12 \ln 3} \end{aligned}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = \sin(x)$, se pide:

- a) (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) - \frac{2}{g(x)} \right)$.
- b) (0,75 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $\left(\frac{1}{2}, 4 \right)$.
- c) (1,25 puntos) Calcular el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x + 3$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) - \frac{2}{g(x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\sin x - 2x}{x \sin(x)} \right) = \frac{0}{0} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\cos x - 2}{\sin x + x \cos x} \right) = \frac{0}{0} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-2\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} \right) = \frac{0}{2} = \boxed{0} \end{aligned}$$

- b) La ecuación de la recta tangente en $x = a$ tiene la expresión $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

$$y = f(x) = \frac{2}{x} = 2x^{-1} \rightarrow f'(x) = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$$

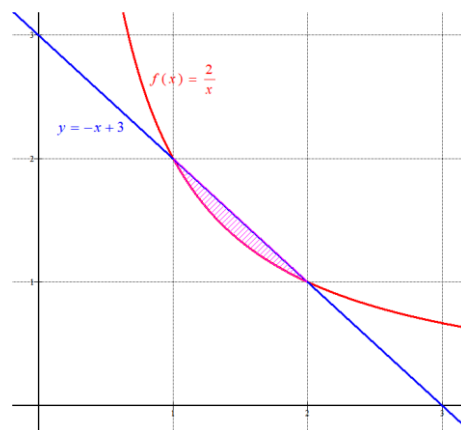
$$\text{Para } x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = -8 \end{cases} \Rightarrow y - 4 = -8\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y - 4 = -8x + 4 \Rightarrow \boxed{y = -8x + 8}$$

- c) Hallamos los puntos de corte entre ambas gráficas.

$$\frac{2}{x} = -x + 3 \Rightarrow 2 = -x^2 + 3x \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 = x \\ \frac{3-1}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Entre 1 y 2 tomamos $x = 1.5$, la función vale $f(1.5) = \frac{2}{1.5} = 1.33$ y la recta vale $y = -1.5 + 3 = 1.5$. La recta está por encima de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^2 -x + 3 - \frac{2}{x} dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x \right]_1^2 = \\ &= \left[-\frac{2^2}{2} + 6 - 2 \ln 2 \right] - \left[-\frac{1^2}{2} + 3 - 2 \ln 1 \right] = \\ &= -2 + 6 - \ln 4 + \frac{1}{2} - 3 = \boxed{\frac{3}{2} - \ln 4 = 0.113 \text{ u}^2} \end{aligned}$$



Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- a) (1 punto) Determinar la matriz P^{-1} , inversa de la matriz P .
 b) (1 punto) Determinar la matriz B^{-1} , inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.
 c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2 , siendo $A = PJP^{-1}$.

a) Veamos si existe la inversa de la matriz P .

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 8 + 9 - 4 - 12 - 6 = -1 \neq 0$$

Existe y la calculamos.

$$P^{-1} = \frac{\text{Adj}(P^t)}{|P|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = - \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Para calcular $B = P^{-1}J^{-1}$ necesitamos la inversa de la matriz J .

$$|J| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$J^{-1} = \frac{\text{Adj}(J^t)}{|J|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$J^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de B .

$$B = P^{-1}J^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -1/2 & 4 \end{pmatrix}$$

Pasamos a calcular la inversa de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} -2 & 1/2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -1/2 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2} - 2 + 4 + 1 = \frac{1}{2} \neq 0$$

Existe la inversa de la matriz B.

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^t)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}}{1/2} = 2 \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1/2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER ESTE APARTADO

$$B^{-1} = (P^{-1}J^{-1})^{-1} = (J^{-1})^{-1}(P^{-1})^{-1} = J \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Como $A = PJP^{-1}$ entonces $A^2 = AA = PJP^{-1}PJP^{-1} = PJJP^{-1}$.

Por propiedades de determinantes:

$$|A^2| = |PJJP^{-1}| = |P| \cdot |J| \cdot |J| \cdot |P^{-1}| = |P| \cdot |J| \cdot |J| \cdot \frac{1}{|P|} = |J| \cdot |J| = (-2)(-2) = \boxed{4}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER ESTE APARTADO

$$A^2 = PJJP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -6 \\ 12 & 1 & -6 \\ 18 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$|A^2| = \begin{vmatrix} 13 & 0 & -6 \\ 12 & 1 & -6 \\ 18 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -104 + 108 = 4$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Determine la distancia entre las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z \quad y \quad r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

b) (1 punto) Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s , que pasa por el origen.

a) Veamos la posición relativa de las rectas.

Para ello planteo el sistema formado por sus ecuaciones y veo si tienen puntos en común.

$$\left. \begin{array}{l} r_1 \equiv x = y = z \\ r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} z + z - 1 = 0 \\ z - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z - 1 = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$$

Situación imposible, por lo que las rectas no tienen puntos en común. Pueden ser paralelas o se cruzan.

Hallemos los vectores directores de las rectas y un punto de cada una de ellas.

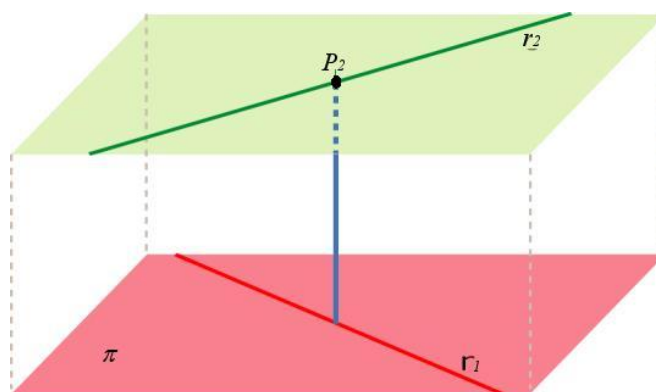
$$r_1 \equiv x = y = z \Rightarrow r_1 \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = (1,1,1) \\ P_1(0,0,0) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 1 + x \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_2 = (1, -1, 1) \\ P_2(0, 1, 1) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales:

$$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$$

Las rectas se cruzan.



Se puede obtener la distancia con la fórmula del cociente entre el producto mixto de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$ y el módulo del producto vectorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, pero vamos a resolverlo determinando el plano π que contiene a r_1 y es paralelo a r_2 . Y a partir de ahí la distancia entre las rectas es la distancia del punto P_2 al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} P_1(0,0,0) \\ \vec{v}_1 = (1,1,1) \\ \vec{v}_2 = (1,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y - z - z - y + x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2z = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - z = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - z = 0 \\ P_2(0,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(r_1, r_2) = d(P_2, \pi) = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707 u}$$

b) La recta s tiene la expresión $s \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$, por lo que tiene como vector director $\vec{v}_s = (1, -1, 1)$

El plano π' perpendicular a $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ que pasa por $O(0,0,0)$ tiene como vector normal el director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in \pi' \\ n' = \vec{v}_s = (1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in \pi' \\ x - y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x - y + z = 0$$

Resolvemos el sistema formado por ecuación de recta y plano para hallar el punto de corte.

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv x - y + z = 0 \\ s \equiv x = 2 - y = z - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x = 2 - y \\ 2 - y = z - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x = 2 - y \\ 3 - y = z \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - y - y + 3 - y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y = -5 \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{3}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \frac{5}{3} \\ 3 - \frac{5}{3} = z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = \frac{1}{3}} \\ \boxed{z = \frac{4}{3}} \end{array} \right.$$

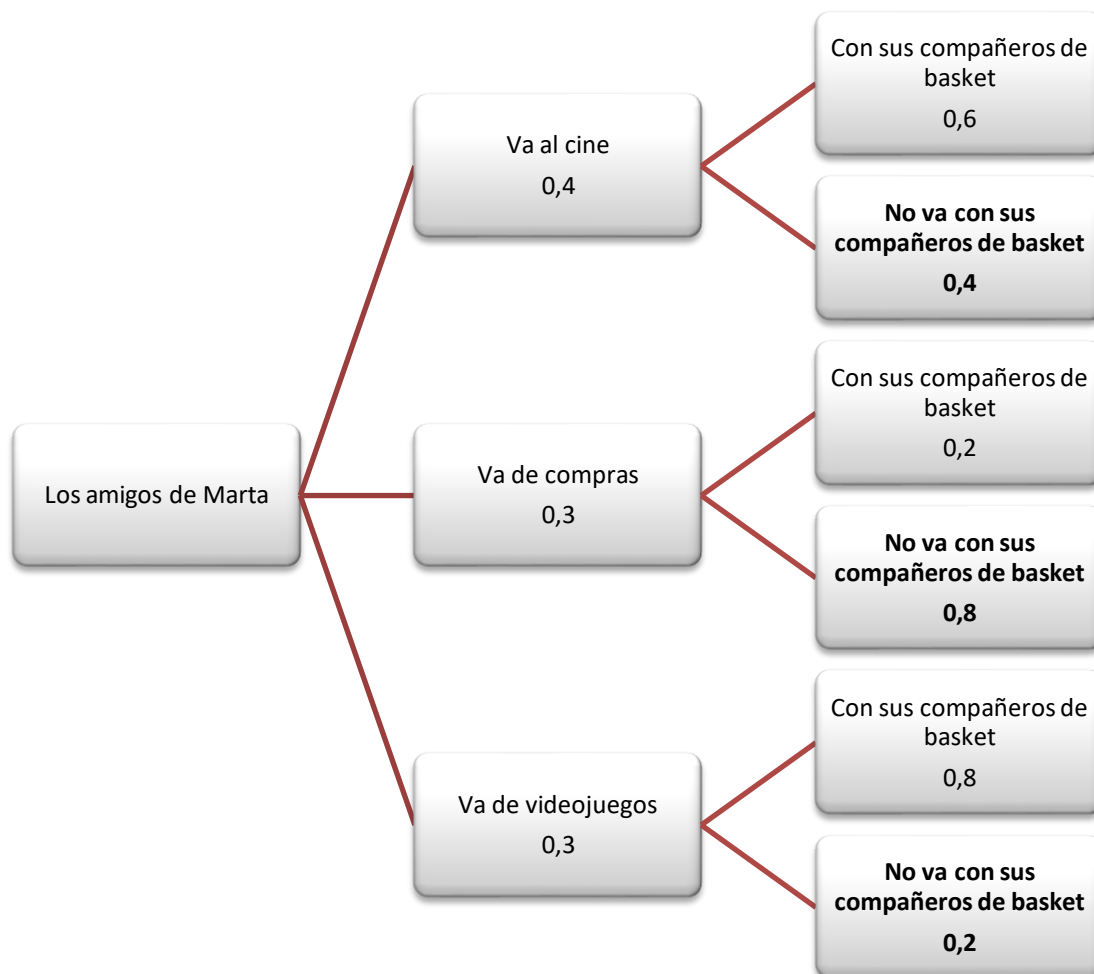
El punto de corte tiene coordenadas $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

El 40% de los sábados Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30% restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras, y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

- (1 punto) Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.
- (1 punto) Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

Realizamos un diagrama de árbol.



- Aplicamos el teorema de la probabilidad total y los datos que nos proporciona el diagrama de árbol.

$$P(\text{Marta no quede con sus amigos}) = 0,4 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,2 = \boxed{0,46}$$

- Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(\text{Vaya al cine} / \text{Ha quedado con sus amigos de baloncesto}) &= \\ &= \frac{P(\text{Vaya al cine} \cap \text{Ha quedado con sus amigos de baloncesto})}{P(\text{Ha quedado con sus amigos de baloncesto})} = \\ &= \frac{0,4 \cdot 0,6}{1 - 0,46} = \frac{0,24}{0,54} = \boxed{\frac{4}{9} = 0,444} \end{aligned}$$