MATEMÁTICAS II
PAU
MURCIA
2017 a 2026

WWW.EBAUMATEMATICAS.COM
WWW.MATEMATICASPAU.COM

Introducción

En este cuaderno de ejercicios se recopilan los exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas ebau y pau de Murcia desde el año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García. Ha sido profesor de matemáticas en distintos institutos de educación secundaria.
En la web www.ebaumatematicas.com hay un banco de ejercicios de matemáticas II resueltos de años anteriores en Murcia y de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, así como unos apuntes de la materia.

PAU2026 - **JULIO** 3
PAU2026 - **JUNIO** 18
PAU2025 - **JULIO** 32
PAU2025 - **JUNIO** 48
EBAU2024 - **JULIO** 63
EBAU2024 - **JUNIO** 78
EBAU2023 - **JULIO** 92
EBAU2023 - **JUNIO** 105
EBAU2022 - **JULIO** 120
EBAU2022 - **JUNIO** 134
EBAU2021 - **JULIO** 147
EBAU2021 - **JUNIO** 162
EBAU2020 - **SEPTIEMBRE** 177
EBAU2020 - **JULIO** 189
206 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2019 206
206 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2019 219
206 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2018 235
206 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2018 251
206 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2017 267
206 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2017 288

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

306-MATEMÁTICAS II

PAU2026 - **JULIO**

IMPORTANTE: En las preguntas 1, 2 y 3 no hay optatividad. En las preguntas 4 y 5 hay optatividad, teniendo que contestar solo una de las dos opciones. Si se responden las 2 opciones. solo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada pregunta es 2 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

PREGUNTA 1: Una empresa produce pequeñas cajas con piezas de fruta. Hay tres tipos de cajas, A, B y C. En las cajas de tipo A hay 1 manzana, 1 pera y 1 naranja. En las cajas de tipo B hay 2 manzanas, 1 pera y 1 naranja. En las cajas de tipo C hay 1 manzana, 2 peras y 1 naranja. Un día prepararon *x* cajas de tipo A, *y* cajas de tipo B y *z* cajas de tipo C, y en total se usaron 400 manzanas, 500 peras y *k* naranjas.

a) **[1 ptos.]** Plantee un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas cajas de cada tipo se prepararon.

b) **[1 pto.]** Discuta y resuelva, si se puede, el sistema, dando la solución en términos del parámetro *k*.

PREGUNTA 2: Sea $P(x,y)$ un punto del primer cuadrante que está en la gráfica de la función $g(x)=\sqrt{x+1}$.

a) **[0,5 ptos.]** Demuestre que la distancia de $P(x,y)$ al punto $A(2,0)$ viene dada por la función $f(x)=\sqrt{x^2-3x+5}$.

b) **[1 pto.]** Determine el valor de *x* para que la distancia a A sea mínima.

c) **[0,5 ptos.]** Calcule esa distancia mínima.

PREGUNTA 3: [2 ptos.] Determine la ecuación del plano que contiene al punto $P(-2,2,-2)$ y a la recta r dada como intersección de dos planos

$$r:\begin{cases}2x+y-z=4\\x+y-2z=3\end{cases}$$

PREGUNTA 4 (a elegir entre **4.1** y **4.2**):

4.1) **[2 ptos.]** Justifique que la derivada de la función $f(x)=x\ln\left(x^2+1\right)$ alcanza el valor $\ln\left(\frac{25}{2}\right)$ en algún punto del intervalo $(1,2)$.

4.2) Considere la función $f(x)=\frac{1}{2}+\cos(x)$, donde la variable *x* está expresada en radianes.

a) **[0,5 ptos.]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$

b) **[1,5 ptos.]** Determine el área del recinto del plano limitado por la gráfica de la función *f(x)* con el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

PREGUNTA 5 (a elegir entre **5.1** y **5.2**):

5.1) En una urna U_1 hay 5 bolas negras y 3 bolas blancas. En la urna U_2 hay 6 bolas negras y 2 bolas blancas. Se escoge una urna al azar y se extrae una bola.
a) **[1 pto.]** Calcule la probabilidad de que la bola sea blanca.
b) **[1 pto.]** Sabiendo que la bola ha salido blanca, calcule la probabilidad de que se haya extraído de la urna U_1.

5.2) **[2 ptos.]** La distribución de edades de un cierto conjunto de personas sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$. Sabiendo que el 94.52% tiene menos de 32 años, y un 21.19% tiene menos de 20 años, calcule su media y su desviación típica.

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$P(Z \leq z) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

		p												
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2601	0,2500
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4444	0,4550	0,4800	0,4950	0,4998	0,5000
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1111	0,1225	0,1600	0,2025	0,2401	0,2500
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1327	0,1250
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4084	0,3823	0,3750
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2222	0,2389	0,2880	0,3341	0,3674	0,3750
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0370	0,0429	0,0640	0,0911	0,1176	0,1250
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0677	0,0625
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951	0,3845	0,3456	0,2995	0,2600	0,2500
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2963	0,3105	0,3456	0,3675	0,3747	0,3750
	3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0988	0,1115	0,1536	0,2005	0,2400	0,2500
	4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0123	0,0150	0,0256	0,0410	0,0576	0,0625
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0176	0,0156
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2437	0,1866	0,1359	0,1014	0,0938
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110	0,2780	0,2436	0,2344
	3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2195	0,2355	0,2765	0,3032	0,3121	0,3125
	4	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0823	0,0951	0,1382	0,1861	0,2249	0,2344
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0165	0,0205	0,0369	0,0609	0,0864	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0014	0,0018	0,0041	0,0083	0,0138	0,0156
7	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0090	0,0078
	1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1306	0,0872	0,0604	0,0547
	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,3073	0,2985	0,2613	0,2140	0,1740	0,1641
	3	0,0000	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2561	0,2679	0,2903	0,2918	0,2786	0,2734
	4	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1280	0,1442	0,1935	0,2388	0,2676	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0384	0,0466	0,0774	0,1172	0,1543	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0064	0,0084	0,0172	0,0320	0,0494	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0006	0,0016	0,0037	0,0068	0,0078
8	0	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0046	0,0039
	1	0,0746	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1561	0,1373	0,0896	0,0548	0,0352	0,0313
	2	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2731	0,2587	0,2090	0,1569	0,1183	0,1094
	3	0,0001	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2731	0,2786	0,2787	0,2568	0,2273	0,2188
	4	0,0000	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1707	0,1875	0,2322	0,2627	0,2730	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0683	0,0808	0,1239	0,1719	0,2098	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0171	0,0217	0,0413	0,0703	0,1008	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0024	0,0033	0,0079	0,0164	0,0277	0,0313
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0007	0,0017	0,0033	0,0039
9	0	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0023	0,0020
	1	0,0830	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
	3	0,0001	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2731	0,2716	0,2508	0,2119	0,1739	0,1641
	4	0,0000	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2048	0,2194	0,2508	0,2600	0,2506	0,2461
	5	0,0000	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1024	0,1181	0,1672	0,2128	0,2408	0,2461
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0341	0,0424	0,0743	0,1160	0,1542	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0073	0,0098	0,0212	0,0407	0,0635	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0009	0,0013	0,0035	0,0083	0,0153	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,0016	0,0020

SOLUCIONES

PREGUNTA 1: Una empresa produce pequeñas cajas con piezas de fruta. Hay tres tipos de cajas, A, B y C. En las cajas de tipo A hay 1 manzana, 1 pera y 1 naranja. En las cajas de tipo B hay 2 manzanas, 1 pera y 1 naranja. En las cajas de tipo C hay 1 manzana, 2 peras y 1 naranja. Un día prepararon *x* cajas de tipo A, *y* cajas de tipo B y *z* cajas de tipo C, y en total se usaron 400 manzanas, 500 peras y *k* naranjas.
a) **[1 ptos.]** Plantee un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas cajas de cada tipo se prepararon.
b) **[1 pto.]** Discuta y resuelva, si se puede, el sistema, dando la solución en términos del parámetro *k*.

a) Ponemos los datos en una tabla.

	Manzanas	Peras	Naranjas
Cajas tipo A (x)	x	x	x
Cajas tipo B (y)	2y	y	y
Cajas tipo C (z)	z	2z	z
TOTALES	$x+2y+z$	$x+y+2z$	$x+y+z$

Como usaron 400 manzanas, 500 peras y *k* naranjas el sistema de ecuaciones es:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=400 \\ x+y+2z=500 \\ x+y+z=k \end{array}\right\}$$

b) Discutimos el sistema en función del valor de *k*.
Aplicamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=400 \\ x+y+2z=500 \\ x+y+z=k \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Ecuación\ 2^a - Ecuación\ 1^a \\ \begin{array}{rrrr} x & +y & +2z & =500 \\ -x & -2y & -z & =-400 \end{array} \\ \hline \begin{array}{rrrr} & -y & +z & =100 \end{array} \rightarrow Nueva\ ecuación\ 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Ecuación\ 3^a - Ecuación\ 1^a \\ \begin{array}{rrrr} x & +y & +z & =k \\ -x & -2y & -z & =-400 \end{array} \\ \hline \begin{array}{rrrr} & -y & & =k-400 \end{array} \rightarrow Nueva\ ecuación\ 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+z=400 \\ -y+z=100 \\ -y=k-400 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} Ecuación\ 3^a - Ecuación\ 2^a \\ \begin{array}{rrrr} -y & & = & k-400 \\ y & -z & = & -100 \end{array} \\ \hline \begin{array}{rrrr} & -z & = & k-500 \end{array} \rightarrow Nueva\ ecuación\ 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+z=400 \\ -y+z=100 \\ -z=k-500 \end{array}\right\}$$

Obtenemos la expresión de la solución del sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=400 \\ -y+z=100 \\ -z=k-500 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+z=400 \\ -y+z=100 \\ \boxed{z=500-k} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+500-k=400 \\ -y+500-k=100 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=k-100 \\ -y=k-400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=k-100 \\ \boxed{y=400-k} \end{array}\right\} \Rightarrow x+2(400-k)=k-100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+800-2k=k-100 \Rightarrow \boxed{x=3k-900=3(k-300)}$$

La solución del sistema es $x=3(k-300);\ y=400-k;\ z=500-k$. Donde *k* debe ser una cantidad entera que representa el número de naranjas que se han usado en la elaboración de las cajas. Debe ser positivo el valor de $x=3(k-300)$, por lo que el número *k* de naranjas debe ser mayor de 300. Como $y=400-k$ también debe ser positivo el número *k* de naranjas debe ser menor de 400. Con estas dos condiciones el valor de *z* es positivo.
El problema tiene solución única para todo valor *k* entero y comprendido entre 300 y 400.

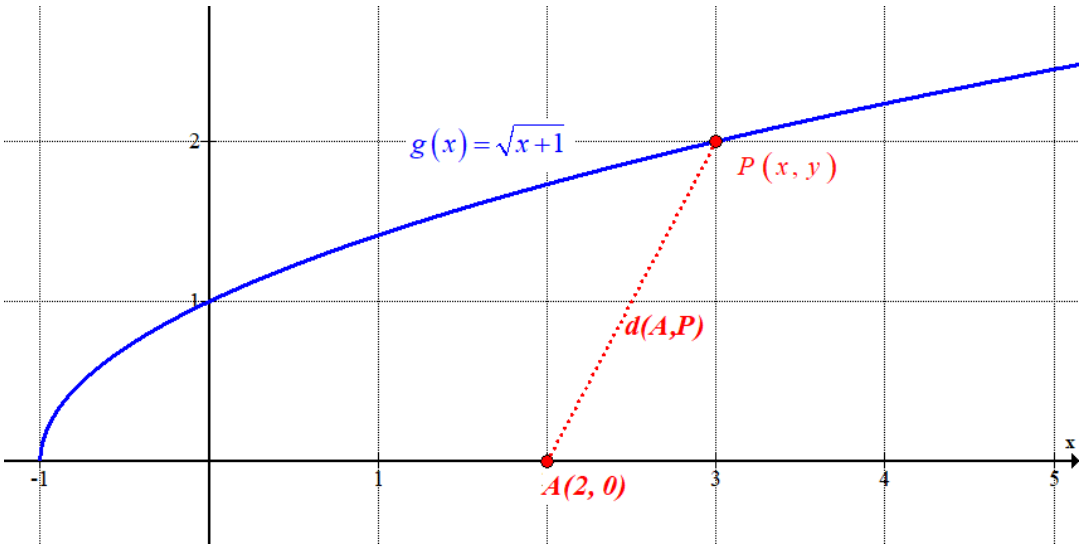
PREGUNTA 2: Sea $P(x,y)$ un punto del primer cuadrante que está en la gráfica de la función $g(x)=\sqrt{x+1}$.

a) **[0,5 ptos.]** Demuestre que la distancia de $P(x,y)$ al punto $A(2,0)$ viene dada por la función $f(x)=\sqrt{x^2-3x+5}$.

b) **[1 pto.]** Determine el valor de *x* para que la distancia a A sea mínima.

c) **[0,5 ptos.]** Calcule esa distancia mínima.

a) Dibujamos la situación planteada.



La distancia del punto A al punto P es el módulo del vector $\overrightarrow{AP}$.

$$\left.\begin{matrix} P\left(x,\sqrt{x+1}\right) \\ A(2,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP}=\left(x,\sqrt{x+1}\right)-(2,0)=\left(x-2,\sqrt{x+1}\right)$$

$$f(x)=d(A,P)=\left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{(x-2)^2+\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=\sqrt{x^2+4-4x+x+1}=\sqrt{x^2-3x+5}$$

b) Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\sqrt{x^2-3x+5} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+5}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+5}}=0 \Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}}$$

Hemos obtenido el punto crítico $x=\frac{3}{2}$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(-1,1.5)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\frac{2\cdot 0-3}{2\sqrt{0^2-3\cdot 0+5}}=\frac{-3}{2\sqrt{5}}<0$. La función decrece en $(-1,1.5)$.
- En el intervalo $(1.5,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{2\cdot 2-3}{2\sqrt{2^2-3\cdot 2+5}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}>0$. La función crece en $(1.5,+\infty)$.

Para $x=\frac{3}{2}$ la primera derivada se anula y la función decrece antes y crece después. La función presenta un mínimo relativo para este valor. Este mínimo relativo es el mínimo absoluto.

c) Hallamos el valor de la distancia para $x=\frac{3}{2}$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\frac{3}{2}+5}=\boxed{\frac{\sqrt{11}}{2}\simeq 1.66}$$

La distancia mínima tiene un valor de $\frac{\sqrt{11}}{2}\simeq 1.66$ unidades.

PREGUNTA 3: [2 ptos.] Determine la ecuación del plano que contiene al punto $P(-2,2,-2)$ y a la recta *r* dada como intersección de dos planos

$$r:\begin{cases}2x+y-z=4\\x+y-2z=3\end{cases}$$

Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta *r*. Y a partir de ellas obtenemos las coordenadas de un punto de la recta y un vector director.

$$r:\begin{cases}2x+y-z=4\\x+y-2z=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y-z=4\\y=2z-x+3\end{cases}\Rightarrow 2x+2z-x+3-z=4\Rightarrow x+z=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-z\Rightarrow y=2z-1+z+3=2+3z\Rightarrow r:\begin{cases}x=1-\lambda\\y=2+3\lambda\\z=\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Q_r(1,2,0)\\\vec{v_r}=(-1,3,1)\end{cases}$$

El plano que contiene la recta *r* y el punto P tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector $\overrightarrow{PQ_r}$.

$$\left.\begin{matrix}Q_r(1,2,0)\\P(-2,2,-2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{PQ_r}=(1,2,0)-(-2,2,-2)=(3,0,2)$$

$$\left.\begin{matrix}Q_r(1,2,0)\in\pi\\\vec{v}=\overrightarrow{PQ_r}=(3,0,2)\\\vec{v}=\vec{v_r}=(-1,3,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z\\3 & 0 & 2\\-1 & 3 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0-2(y-2)+9z-0-3(y-2)-6(x-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y+4+9z-3y+6-6x+6=0\Rightarrow\boxed{\pi:-6x-5y+9z+16=0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi:6x+5y-9z-16=0$.

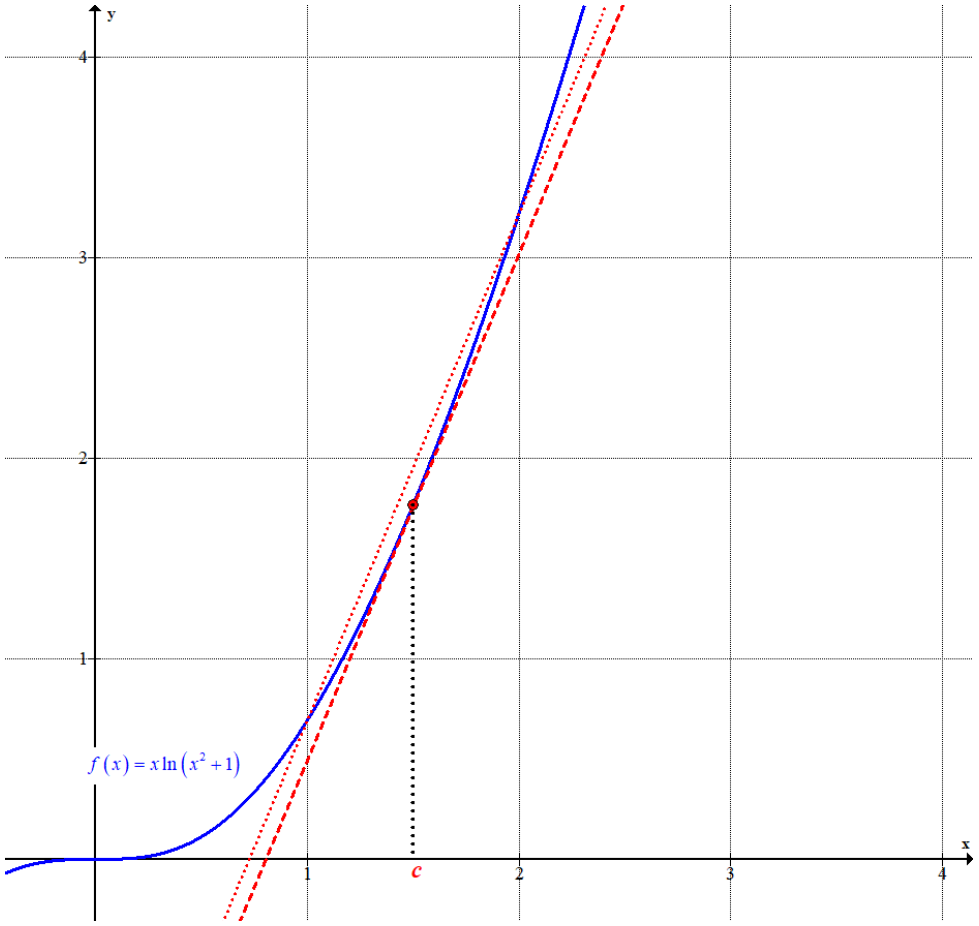
4.1) **[2 ptos.]** Justifique que la derivada de la función $f(x)=x\ln\left(x^2+1\right)$ alcanza el valor $\ln\left(\frac{25}{2}\right)$ en algún punto del intervalo $(1,2)$.

El **Teorema del valor medio** establece que si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe al menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Para el ejercicio consideramos la función $f(x)=x\ln\left(x^2+1\right)$ que es una función continua en todo $\mathbb{R}$ pues es producto de una función logarítmica de una expresión siempre positiva ($x^2+1>0$) y otra polinómica. También es derivable en todo $\mathbb{R}$ por el mismo motivo.

Consideramos el intervalo $(1,2)$ y entonces aplicando el teorema del valor medio existe $c\in(1,2)$ tal que $f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2\cdot\ln\left(2^2+1\right)=2\ln 5=\ln 5^2=\ln 25 \\ f(1)=1\cdot\ln\left(1^2+1\right)=\ln 2 \\ f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}\end{array}\right\}\Rightarrow f'(c)=\frac{\ln 25-\ln 2}{1}=\ln 25-\ln 2=\ln\left(\frac{25}{2}\right)$$



4.2) Considere la función $f(x)=\frac{1}{2}+\cos(x)$, donde la variable *x* está expresada en radianes.

a) **[0,5 ptos.]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$

b) **[1,5 ptos.]** Determine el área del recinto del plano limitado por la gráfica de la función *f(x)* con el eje X y las rectas $x=0$ y $x=\pi$.

a) Calculamos la integral pedida usando el método de cambio de variable.

$$\int f(x)\,dx=\int \frac{1}{2}+\cos(x)\,dx=\frac{1}{2}x+sen(x)+K$$

b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica de la función y el eje X en el intervalo $[0,\pi]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{2}+\cos(x) \\ Eje\ X\rightarrow y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{2}+\cos(x)=0\Rightarrow \cos x=\frac{-1}{2}\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2\pi}{3}\in[0,\pi] \\ x=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}\notin[0,\pi] \end{cases}$$

La gráfica corta el eje X en $x=\frac{2\pi}{3}$. El área del recinto del plano limitado por la gráfica de la función *f(x)* con el eje X y las rectas $x=0$ y $x=\pi$ es la suma de los valores absolutos de la integral definida de la función de 0 a $\frac{2\pi}{3}$ y el de la integral definida de la función de $\frac{2\pi}{3}$ a π.

$$\int_0^{2\pi/3}\frac{1}{2}+\cos(x)\,dx=\left[\frac{x}{2}+sen(x)\right]_0^{2\pi/3}=$$

$$=\left[\frac{2\pi/3}{2}+sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]-\left[\frac{0}{2}+sen(0)\right]=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}>0$$

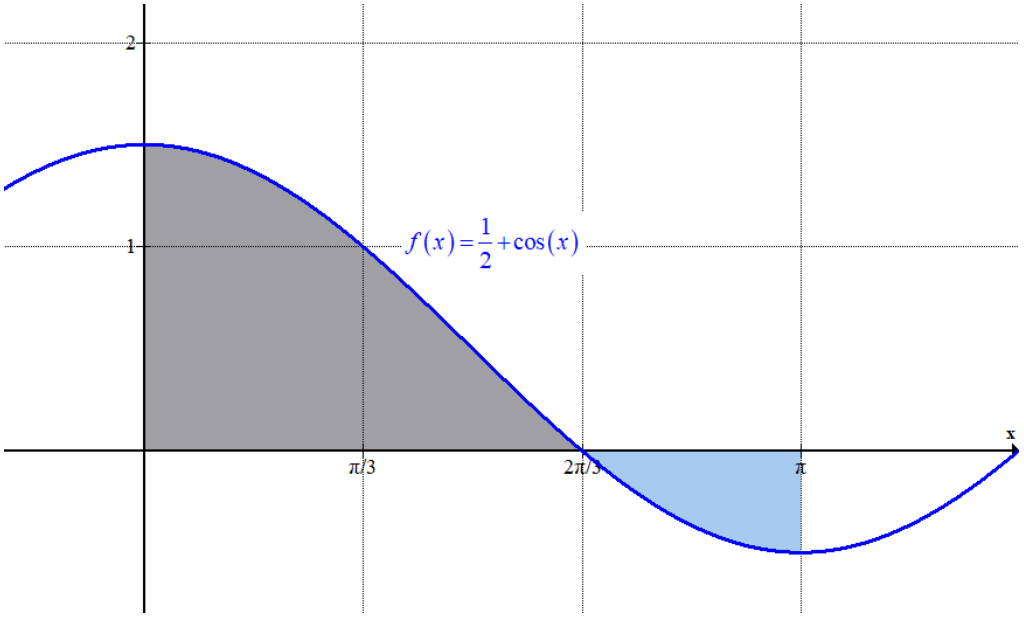
$$\int_{2\pi/3}^{\pi}\frac{1}{2}+\cos(x)\,dx=\left[\frac{x}{2}+sen(x)\right]_{2\pi/3}^{\pi}=$$

$$=\left[\frac{\pi}{2}+sen(\pi)\right]-\left[\frac{2\pi/3}{2}+sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$$

El área es la suma del valor absoluto del resultado de ambas integrales.

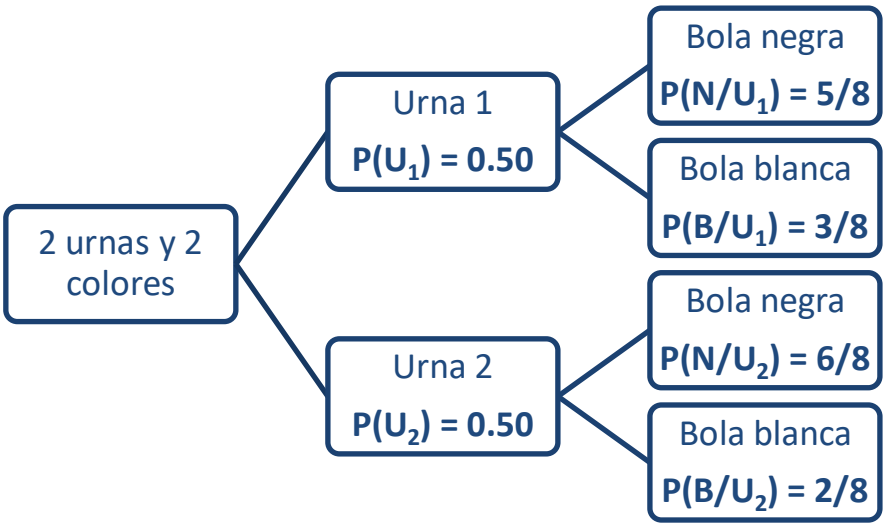
$$\left.\begin{array}{l} Área\,1=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ Área\,2=\left|\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6} \end{array}\right\}\Rightarrow Área=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\simeq 2.26\ u^2$$

El área del recinto tiene un valor de $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\simeq 2.26$ unidades cuadradas.



5.1) En una urna U_1 hay 5 bolas negras y 3 bolas blancas. En la urna U_2 hay 6 bolas negras y 2 bolas blancas. Se escoge una urna al azar y se extrae una bola.
a) **[1 pto.]** Calcule la probabilidad de que la bola sea blanca.
b) **[1 pto.]** Sabiendo que la bola ha salido blanca, calcule la probabilidad de que se haya extraído de la urna U_1.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Calculamos el valor de la probabilidad $P(B)$. Para ello aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B)=P(U_1)P(B/U_1)+P(U_1)P(B/U_1)=0.5\cdot\frac{3}{8}+0.5\cdot\frac{2}{8}=\boxed{\frac{5}{16}=0.3125}$$

La probabilidad de que la bola extraída sea blanca vale 0.03125.

b) Nos piden calcular $P(U_1/B)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(U_1/B)=\frac{P(U_1\cap B)}{P(B)}=\frac{P(U_1)P(B/U_1)}{P(B)}=\frac{0.5\cdot\frac{3}{8}}{0.3125}=\boxed{\frac{3}{5}=0.6}$$

Sabiendo que la bola ha salido blanca, la probabilidad de que se haya extraído de la urna U_1 vale 0.6.

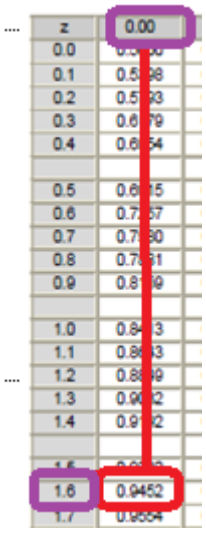
OTRA FORMA DE RESOLVERLO
El experimento "elegir una urna y sacar una bola" es lo mismo que "juntamos las bolas en una bolsa y extraemos una de ellas". Así tendríamos 16 bolas juntas, siendo 11 negras y 5 blancas.
Con este cambio la probabilidad de sacar una bola blanca vale $\frac{5}{16}$.
Sabiendo que la bola ha salido blanca, la probabilidad de que se haya extraído de la urna U_1 vale $\frac{3}{5}$, pues de las 5 bolas blancas de la bolsa 3 procedían de la urna U_1.

5.2) **[2 ptos.]** La distribución de edades de un cierto conjunto de personas sigue una distribución normal $N(\mu,\sigma)$. Sabiendo que el 94.52% tiene menos de 32 años, y un 21.19% tiene menos de 20 años, calcule su media y su desviación típica.

Nos dicen que $P(X<32)=0.9452$.

$$P(X<32)=0.9452 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} Tipificamos \\ Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{matrix}\right\} \Rightarrow P\left(Z<\frac{32-\mu}{\sigma}\right)=0.9452 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N}(0,\,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{32-\mu}{\sigma}=1.6 \Rightarrow 32-\mu=1.6\sigma \Rightarrow \boxed{32-1.6\sigma=\mu}$$



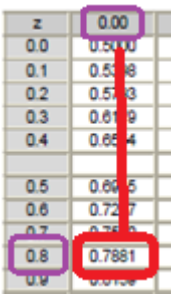
Nos dicen que $P(X<20)=0.2119$.

$$P(X<20)=0.2119 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} Tipificamos \\ Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{matrix}\right\} \Rightarrow P\left(Z<\frac{20-\mu}{\sigma}\right)=0.2119 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{0.2119<0.5 \rightarrow \frac{20-\mu}{\sigma}<0\right\} \Rightarrow P\left(Z>\frac{-(20-\mu)}{\sigma}\right)=0.2119 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-P\left(Z\le\frac{\mu-20}{\sigma}\right)=0.2119 \Rightarrow P\left(Z\le\frac{\mu-20}{\sigma}\right)=1-0.2119=0.7881 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N}(0,\,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\mu-20}{\sigma}=0.8 \Rightarrow \mu-20=0.8\sigma \Rightarrow \boxed{\mu=0.8\sigma+20}$$



Juntamos las dos ecuaciones obtenidas y resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l}\mu = 0.8\sigma + 20\\ 32 - 1.6\sigma = \mu\end{array}\right\} \Rightarrow 32 - 1.6\sigma = 0.8\sigma + 20 \Rightarrow 12 = 2.4\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{12}{2.4} = 5} \Rightarrow \boxed{\mu = 0.8 \cdot 5 + 20 = 24}$$

La media es de 24 años y la desviación típica es de 5 años.

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

306-MATEMÁTICAS II

PAU2026 - **JUNIO**

IMPORTANTE: En las preguntas 1, 2 y 3 no hay optatividad. En las preguntas 4 y 5 hay optatividad, teniendo que contestar solo una de las dos opciones. Si se responden las 2 opciones. solo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada pregunta es 2 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

PREGUNTA 1: Darío y Cayetana están organizando un pequeño negocio y deciden invertir dinero en tres cosas: *x* miles de euros en publicidad, *y* miles de euros en materiales, *z* miles de euros en logística. El reparto depende de un parámetro positivo, *k*, que representa una estrategia de ajuste económico según la situación del mercado. Se sabe que la suma de todo lo invertido es en total 12 mil euros. Darío propone que la inversión en publicidad más el doble de la inversión en materiales sea igual a la inversión en logística más *k*. Cayetana quiere que el doble de la inversión en publicidad menos la inversión en materiales más la inversión en logística sea igual a 4 mil euros.

a) **[0,75 ptos.]** Plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que refleje los datos del problema.

b) **[1,25 ptos.]** Discuta el correspondiente sistema. En caso de existir solución única, encuéntrela y exprésela en función de *k* si es necesario.

PREGUNTA 2: Considere un punto P de coordenadas *(a.b)* que está en el primer cuadrante, sobre una circunferencia de radio 10 centrada en el origen O(0,0). Sea *x* el ángulo que forma el radio OP con el eje horizontal (o eje X), medido en radianes.

a) **[0,75 ptos.]** Demuestre que el área del rectángulo de vértices 0(0,0), A(a,0). B(0, b) y P(a,b) viene dada por la función $f(x)=100\cdot sen(x)\cdot\cos(x)$.

b) **[1,25 ptos.]** Calcule el ángulo *x* (en radianes) para que el área de dicho rectángulo sea máxima.

PREGUNTA 3: Considere el plano $\pi: 2x-y+3z-5=0$ y la recta

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$$

a) **[0,75 ptos.]** Estudie la posición relativa de *r* y π.

b) **[1,25 ptos.]** Si *r* corta a π en un solo punto, calcule dicho punto y el ángulo que forma *r* con π. Si *r* es paralela a π, calcule la distancia de *r* a π.

PREGUNTA 4 (a elegir entre **4.1** y **4.2**):

4.1) **[2 ptos.]** Justifique que la derivada de la función $f(x)=e^x(x-1)+1-x$ se anula en algún punto del intervalo (0.1).

4.2) a) **[1,5 ptos.]** Calcule la integral indefinida $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

b) **[0,5 ptos.]** Determine la primitiva de la función $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas (e. 1).

PREGUNTA 5 (a elegir entre 5.1 y 5.2):

5.1) En una fábrica hay tres máquinas. A, B y C. que producen el mismo tipo de pieza. La máquina A fabrica el 50% de las piezas. y el 3 %, de ellas son defectuosas. La máquina B fabrica el 30% de las piezas, y el 4 % de ellas son defectuosas. La máquina C fabrica el 20% de las piezas, y el 5% de ellas son defectuosas. Se elige una pieza al azar de la producción total.

a) **[0,75 ptos.]** Calcule la probabilidad de que la pieza sea defectuosa.

b) **[0,75 ptos.]** Sabiendo que la pieza elegida es defectuosa, calcule la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina B.

c) **[0,5 ptos.]** Calcule la probabilidad de que la pieza no sea defectuosa sabiendo que procede de la máquina C.

5.2) Una fábrica produce bombillas y se sabe que el 5% son defectuosas.

a) **[0,75 ptos.]** Calcule la probabilidad de que en 9 bombillas escogidas al azar haya exactamente 3 bombillas defectuosas.

b) **[1,25 ptos.]** Calcule la probabilidad de que en 200 bombillas escogidas al azar haya al menos 10 bombillas defectuosas.

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$P(Z \leq z) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

		p												
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2601	0,2500
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4444	0,4550	0,4800	0,4950	0,4998	0,5000
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1111	0,1225	0,1600	0,2025	0,2401	0,2500
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1327	0,1250
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4084	0,3823	0,3750
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2222	0,2389	0,2880	0,3341	0,3674	0,3750
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0370	0,0429	0,0640	0,0911	0,1176	0,1250
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0677	0,0625
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951	0,3845	0,3456	0,2995	0,2600	0,2500
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2963	0,3105	0,3456	0,3675	0,3747	0,3750
	3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0988	0,1115	0,1536	0,2005	0,2400	0,2500
	4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0123	0,0150	0,0256	0,0410	0,0576	0,0625
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0176	0,0156
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2437	0,1866	0,1359	0,1014	0,0938
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110	0,2780	0,2436	0,2344
	3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2195	0,2355	0,2765	0,3032	0,3121	0,3125
	4	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0823	0,0951	0,1382	0,1861	0,2249	0,2344
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0165	0,0205	0,0369	0,0609	0,0864	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0014	0,0018	0,0041	0,0083	0,0138	0,0156
7	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0090	0,0078
	1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1306	0,0872	0,0604	0,0547
	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,3073	0,2985	0,2613	0,2140	0,1740	0,1641
	3	0,0000	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2561	0,2679	0,2903	0,2918	0,2786	0,2734
	4	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1280	0,1442	0,1935	0,2388	0,2676	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0384	0,0466	0,0774	0,1172	0,1543	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0064	0,0084	0,0172	0,0320	0,0494	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0006	0,0016	0,0037	0,0068	0,0078
8	0	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0046	0,0039
	1	0,0746	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1561	0,1373	0,0896	0,0548	0,0352	0,0313
	2	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2731	0,2587	0,2090	0,1569	0,1183	0,1094
	3	0,0001	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2731	0,2786	0,2787	0,2568	0,2273	0,2188
	4	0,0000	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1707	0,1875	0,2322	0,2627	0,2730	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0683	0,0808	0,1239	0,1719	0,2098	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0171	0,0217	0,0413	0,0703	0,1008	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0024	0,0033	0,0079	0,0164	0,0277	0,0313
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0007	0,0017	0,0033	0,0039
9	0	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0023	0,0020
	1	0,0830	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
	3	0,0001	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2731	0,2716	0,2508	0,2119	0,1739	0,1641
	4	0,0000	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2048	0,2194	0,2508	0,2600	0,2506	0,2461
	5	0,0000	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1024	0,1181	0,1672	0,2128	0,2408	0,2461
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0341	0,0424	0,0743	0,1160	0,1542	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0073	0,0098	0,0212	0,0407	0,0635	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0009	0,0013	0,0035	0,0083	0,0153	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,0016	0,0020

SOLUCIONES

PREGUNTA 1: Darío y Cayetana están organizando un pequeño negocio y deciden invertir dinero en tres cosas: x miles de euros en publicidad, y miles de euros en materiales, z miles de euros en logística. El reparto depende de un parámetro positivo, k, que representa una estrategia de ajuste económico según la situación del mercado. Se sabe que la suma de todo lo invertido es en total 12 mil euros. Darío propone que la inversión en publicidad más el doble de la inversión en materiales sea igual a la inversión en logística más k. Cayetana quiere que el doble de la inversión en publicidad menos la inversión en materiales más la inversión en logística sea igual a 4 mil euros.

a) **[0,75 ptos.]** Plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que refleje los datos del problema.

b) **[1,25 ptos.]** Discuta el correspondiente sistema. En caso de existir solución única, encuéntrela y exprésela en función de k si es necesario.

a) Obtenemos las ecuaciones asociadas al enunciado.

La suma de todo lo invertido es en total 12 mil euros → $x+y+z=12$

La inversión en publicidad más el doble de la inversión en materiales sea igual a la inversión en logística más k → $x+2y=z+k$.

El doble de la inversión en publicidad menos la inversión en materiales más la inversión en logística sea igual a 4 mil euros → $2x-y+z=4$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=12 \\ x+2y=z+k \\ 2x-y+z=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y+z=12 \\ x+2y-z=k \\ 2x-y+z=4 \end{matrix}\right\}$$

b) Discutimos el sistema en función del valor de k.

Aplicamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=12 \\ x+2y-z=k \\ 2x-y+z=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} Ecuación\ 2^a - Ecuación\ 1^a \\ x \quad +2y \quad -z \quad = k \\ -x \quad -y \quad -z \quad = -12 \\ \hline y \quad -2z \quad = k-12 \rightarrow Nueva\ ecuación\ 2^a \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} Ecuación\ 3^a - 2\cdot Ecuación\ 1^a \\ 2x \quad -y \quad +z \quad = 4 \\ -2x \quad -2y \quad -2z \quad = -24 \\ \hline -3y \quad -z \quad = -20 \rightarrow Nueva\ ecuación\ 3^a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y+\ z=12 \\ y-2z=k-12 \\ -3y-\ z=-20 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} Ecuación\ 3^a + 3\cdot Ecuación\ 2^a \\ -3y \quad -z \quad = \quad -20 \\ 3y \quad -6z \quad = \quad 3k-36 \\ \hline -7z \quad = \quad 3k-56 \rightarrow Nueva\ ecuación\ 3^a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y+\ z=12 \\ y-2z=k-12 \\ -7z=3k-56 \end{matrix}\right\}$$

El sistema triangular obtenido siempre va a tener solución única, independientemente del valor de *k*. Obtenemos la expresión de su solución.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+\ z=12 \\ y-2z=k-12 \\ -7z=3k-56 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+\ z=12 \\ y-2z=k-12 \\ \boxed{z=\dfrac{3k-56}{-7}=8-\dfrac{3k}{7}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+8-\dfrac{3k}{7}=12 \\ y-2\left(8-\dfrac{3k}{7}\right)=k-12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=4+\dfrac{3k}{7} \\ y-16+\dfrac{6k}{7}=k-12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=4+\dfrac{3k}{7} \\ \boxed{y=4+k-\dfrac{6k}{7}=4+\dfrac{k}{7}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+4+\frac{k}{7}=4+\frac{3k}{7} \Rightarrow \boxed{x=\frac{2k}{7}}$$

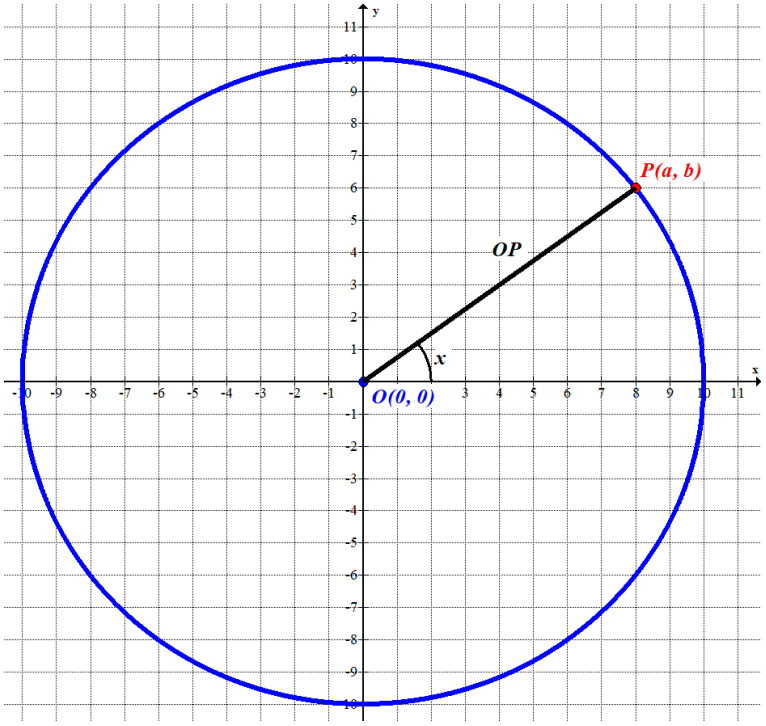
La solución del sistema es $x=\dfrac{2k}{7};\ y=4+\dfrac{k}{7};\ z=8-\dfrac{3k}{7}$.

PREGUNTA 2: Considere un punto P de coordenadas *(a.b)* que está en el primer cuadrante, sobre una circunferencia de radio 10 centrada en el origen O(0,0). Sea *x* el ángulo que forma el radio OP con el eje horizontal (o eje X), medido en radianes.

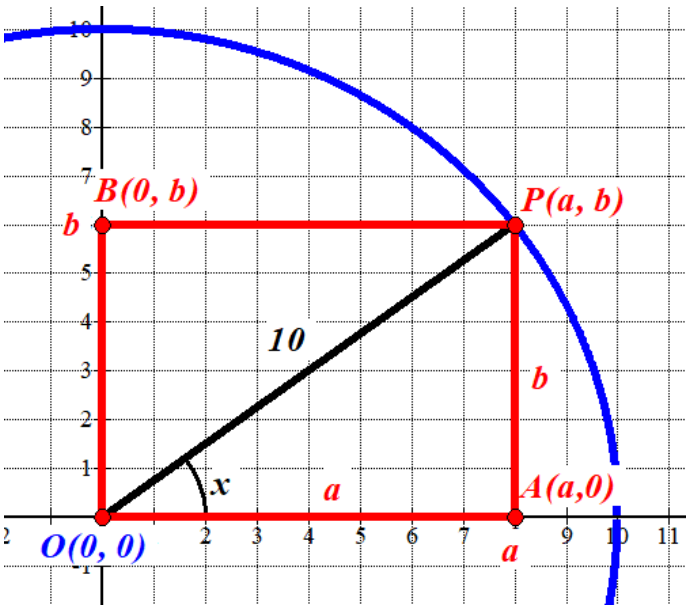
a) **[0,75 ptos.]** Demuestre que el área del rectángulo de vértices 0(0,0), A(a,0). B(0, b) y P(a,b) viene dada por la función $f(x)=100\cdot sen(x)\cdot\cos(x)$.

b) **[1,25 ptos.]** Calcule el ángulo *x* (en radianes) para que el área de dicho rectángulo sea máxima.

Dibujamos la situación planteada.



a) La longitud del radio OP es 10 y el rectángulo del que queremos hallar la expresión de su área es el del dibujo siguiente.



El área del rectángulo OBPA es el producto de la base por la altura: $A(x)=a\cdot b$.

Consideramos el triángulo rectángulo OAP y aplicamos las igualdades trigonométricas.

$$\left.\begin{array}{l} senx = \dfrac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} = \dfrac{b}{10} \to b = 10 \cdot senx \\ \cos x = \dfrac{cateto\,contiguo}{hipotenusa} = \dfrac{a}{10} \to a = 10 \cdot \cos x \\ A(x) = a \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A(x) = 10senx \cdot 10\cos x = 100senx \cdot \cos x}$$

b) Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$f(x) = 100 \cdot sen(x) \cdot \cos(x) \Rightarrow f'(x) = 100 \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) + 100 \cdot sen(x) \cdot (-sen(x)) =$$

$$= 100\cos^2(x) - 100sen^2(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 100\cos^2(x) - 100sen^2(x) = 0 \Rightarrow \cos^2(x) - sen^2(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - sen^2(x) - sen^2(x) = 0 \Rightarrow -2sen^2(x) = -1 \Rightarrow sen^2(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \text{ está en el primer cuadrante} \\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$$

Hemos obtenido el punto crítico $x = \frac{\pi}{4}$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f'(x) = 100\cos^2(x) - 100sen^2(x) \Rightarrow f''(x) = 200\cos(x)(-sen(x)) - 200sen(x)\cos(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = -200sen(x)\cos(x) - 200sen(x)\cos(x) = -400sen(x)\cos(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -400sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -400\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -200 < 0$$

Para $x = \frac{\pi}{4}$ la primera derivada se anula y la segunda toma valor negativo. La función presenta un máximo relativo para este valor del ángulo *x*. Este máximo relativo es el máximo absoluto de la función área.

PREGUNTA 3: Considere el plano $\pi: 2x-y+3z-5=0$ y la recta

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$$

a) **[0,75 ptos.]** Estudie la posición relativa de *r* y π.

b) **[1,25 ptos.]** Si *r* corta a π en un solo punto, calcule dicho punto y el ángulo que forma *r* con π. Si *r* es paralela a π, calcule la distancia de *r* a π.

a) Para estudiar la posición relativa de recta y plano obtengo un vector normal del plano y un vector director de la recta.

$$\pi: 2x-y+3z-5=0 \rightarrow \vec{n}=(2,-1,3)$$

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,-1,2) \\ \vec{v_r}=(2,1,-1) \end{cases}$$

Averiguamos si el producto escalar del vector normal del plano y el director de la recta se anula.

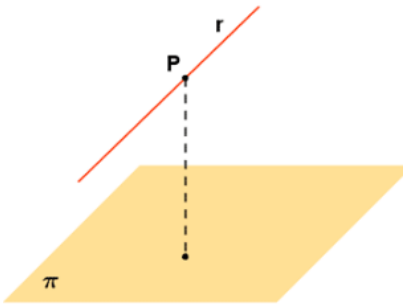
$$\left.\begin{matrix} \vec{n}=(2,-1,3) \\ \vec{v_r}=(2,1,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{v_r}=(2,-1,3)(2,1,-1)=4-1-3=0$$

Al ser nulo el producto escalar la recta es paralela al plano o está contenida en él. Averiguamos si el punto $P_r(1,-1,2)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left.\begin{matrix} \pi: 2x-y+3z-5=0 \\ ¿P_r(1,-1,2)\in\pi? \end{matrix}\right\} \Rightarrow ¿2\cdot 1-(-1)+3\cdot 2-5=0? \Rightarrow ¿2+1+6-5=0? \Rightarrow ¡¡NO!!$$

El punto no pertenece al plano y la recta es paralela al plano.

b) Como la recta es paralela al plano hallo la distancia entre recta y plano. Esta distancia es la distancia de cualquier punto de la recta al plano.



$$\left.\begin{matrix} \pi: 2x-y+3z-5=0 \\ P_r(1,-1,2)\in r \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|2\cdot 1-(-1)+3\cdot 2-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\boxed{\frac{4}{\sqrt{14}}\simeq 1.07\,unidades}$$

La distancia de la recta al plano vale $\frac{4}{\sqrt{14}}\simeq 1.07$ unidades.

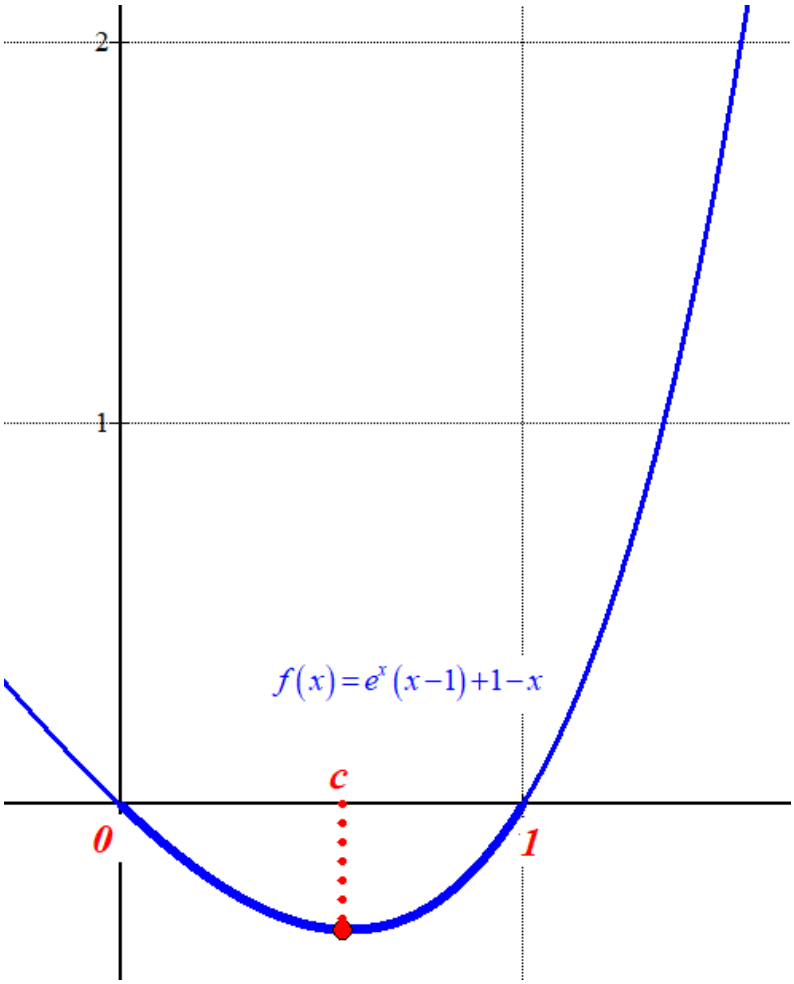
4.1) **[2 ptos.]** Justifique que la derivada de la función $f(x)=e^x(x-1)+1-x$ se anula en algún punto del intervalo (0.1).

El **Teorema de Rolle** establece que si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b), y toma el mismo valor en los extremos (f(a) = f(b)), entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ donde su derivada se anula, es decir, $f'(c)=0$.

Para el ejercicio consideramos la función $f(x)=e^x(x-1)+1-x$ que es una función continua en todo $\mathbb{R}$ pues es producto de una función exponencial y otra polinómica. También es derivable en todo $\mathbb{R}$ por el mismo motivo.
Consideramos el intervalo (0, 1) y vemos si la función toma el mismo valor en los extremos del intervalo de definición.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=e^0(0-1)+1-0=1(-1)+1=-1+1=0 \\ f(1)=e^1(1-1)+1-1=e\cdot 0+0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=f(1)=0$$

Se cumplen todos los requisitos del teorema de Rolle y podemos afirmar que la derivada de la función $f(x)=e^x(x-1)+1-x$ se anula en algún punto del intervalo (0.1).



4.2) a) **[1,5 ptos.]** Calcule la integral indefinida $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$

b) **[0,5 ptos.]** Determine la primitiva de la función $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas (e. 1).

a) Calculamos la integral pedida usando el método de cambio de variable.

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx=\left\{\begin{array}{l}\ln x=t\\ \frac{1}{x}dx=dt\rightarrow dx=xdt\end{array}\right\}=\int \frac{1}{\cancel{x}\cdot t^2}\cancel{x}dt=\int \frac{1}{t^2}dt=\int t^{-2}dt=$$

$$=\frac{t^{-1}}{-1}=\frac{-1}{t}=\left\{\ln x=t\right\}=\boxed{\frac{-1}{\ln x}+K}$$

b) La primitiva de la función $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$ la hemos calculado en el apartado anterior y tiene la expresión $F(x)=\frac{-1}{\ln x}+K$. Determinamos el valor de *K* para que la primitiva pase por el punto de coordenadas (e. 1).

$$\left.\begin{array}{l}F(x)=\frac{-1}{\ln x}+K\\ F(e)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{-1}{\ln e}+K=1\Rightarrow \frac{-1}{1}+K=1\Rightarrow K=2\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{-1}{\ln x}+2}$$

La primitiva buscada es $F(x)=\frac{-1}{\ln x}+2$.

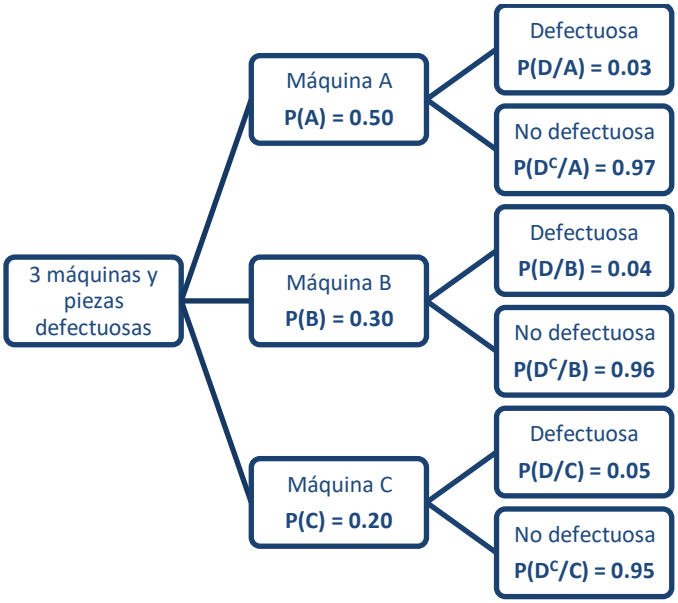
5.1) En una fábrica hay tres máquinas. A, B y C. que producen el mismo tipo de pieza. La máquina A fabrica el 50% de las piezas. y el 3 %, de ellas son defectuosas. La máquina B fabrica el 30% de las piezas, y el 4 % de ellas son defectuosas. La máquina C fabrica el 20% de las piezas, y el 5% de ellas son defectuosas. Se elige una pieza al azar de la producción total.

a) **[0,75 ptos.]** Calcule la probabilidad de que la pieza sea defectuosa.

b) **[0,75 ptos.]** Sabiendo que la pieza elegida es defectuosa, calcule la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina B.

c) **[0,5 ptos.]** Calcule la probabilidad de que la pieza no sea defectuosa sabiendo que procede de la máquina C.

Llamamos A, B y C a los sucesos "pieza producida por la máquina A, B o C. Y denominamos D al suceso "la pieza es defectuosa". Realizamos un diagrama de árbol.



a) Calculamos el valor de la probabilidad $P(D)$. Para ello aplicamos el teorema de la probabilidad total. El valor que obtendremos estará comprendido entre 0.03 y 0.05.

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)=$$

$$=0.5\cdot 0.03+0.3\cdot 0.04+0.2\cdot 0.05=\boxed{0.037}$$

La probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa vale 0.037.

b) Nos piden calcular $P(B/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

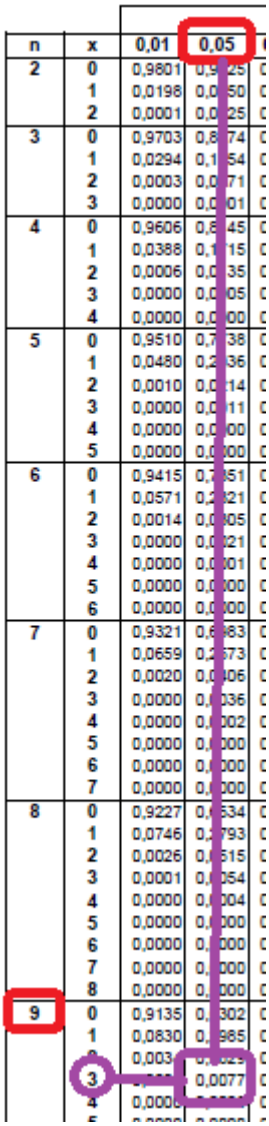
$$P(B/D)=\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{P(B)P(D/B)}{P(D)}=\frac{0.3\cdot 0.04}{0.037}=\boxed{\frac{12}{37}\simeq 0.3243}$$

La probabilidad de que una pieza defectuosa haya sido fabricada por la máquina B vale 0.3243.

c) Nos piden calcular $P(D^C/C)$. Esta probabilidad está puesta en el diagrama de árbol. Como nos dicen que el 5 % de las piezas producidas por la máquina C son defectuosas entonces el 95 % de las piezas producidas por la máquina C no serán defectuosas y la probabilidad pedida vale $P(D^C/C)=0.95$.

5.2) Una fábrica produce bombillas y se sabe que el 5% son defectuosas.
a) **[0,75 ptos.]** Calcule la probabilidad de que en 9 bombillas escogidas al azar haya exactamente 3 bombillas defectuosas.
b) **[1,25 ptos.]** Calcule la probabilidad de que en 200 bombillas escogidas al azar haya al menos 10 bombillas defectuosas.

a) Consideramos X la variable aleatoria que cuenta el número de bombillas defectuosas de un lote de 9. Esta variable es una binomial donde n = número de repeticiones = 9 y p = probabilidad de que una bombilla esté defectuosa = 0.05. X = B(9, 0.05).
Nos piden calcular $P(X=3)$. Buscamos en la tabla de la binomial y vemos que esta probabilidad vale 0.0077.



n	x	0,01	0,05
2	0	0,9801	0,9025
	1	0,0198	0,0950
	2	0,0001	0,0025
3	0	0,9703	0,8574
	1	0,0294	0,1354
	2	0,0003	0,0071
	3	0,0000	0,0001
4	0	0,9606	0,8145
	1	0,0388	0,1715
	2	0,0006	0,0135
	3	0,0000	0,0005
	4	0,0000	0,0000
5	0	0,9510	0,7738
	1	0,0480	0,2036
	2	0,0010	0,0214
	3	0,0000	0,0011
	4	0,0000	0,0000
	5	0,0000	0,0000
6	0	0,9415	0,7351
	1	0,0571	0,2321
	2	0,0014	0,0305
	3	0,0000	0,0021
	4	0,0000	0,0001
	5	0,0000	0,0000
	6	0,0000	0,0000
7	0	0,9321	0,6983
	1	0,0659	0,2573
	2	0,0020	0,0406
	3	0,0000	0,0036
	4	0,0000	0,0002
	5	0,0000	0,0000
	6	0,0000	0,0000
	7	0,0000	0,0000
8	0	0,9227	0,6634
	1	0,0746	0,2793
	2	0,0026	0,0515
	3	0,0001	0,0054
	4	0,0000	0,0004
	5	0,0000	0,0000
	6	0,0000	0,0000
	7	0,0000	0,0000
	8	0,0000	0,0000
9	0	0,9135	0,6302
	1	0,0830	0,2985
		0,003	
	3		0,0077
	4	0,000	

b) Consideramos X la variable aleatoria que cuenta el número de bombillas defectuosas de un lote de 200. Esta variable es una binomial donde n = número de repeticiones = 200 y p = probabilidad de que una bombilla esté defectuosa = 0.05. X = B(200, 0.05).
Nos piden calcular $P(X \geq 10)$. Como el número de repeticiones es muy alto calculamos la probabilidad pedida usando la aproximación a una normal. Como la media es $np = 200 \cdot 0.05 = 10$ y la desviación típica es $\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.05 \cdot 0.95} = \frac{\sqrt{38}}{2} \simeq 3.0822$ la

variable binomial X se aproxima por una variable normal $Y = N\left(10, \frac{\sqrt{38}}{2}\right)$. Esta aproximación es buena pues $np = 10 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0.95 = 190 > 5$.

$$P(X \geq 10) = \{Corrección\ de\ Yates\} = P(Y \geq 9.5) = \left\{\begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \frac{Y - 10}{\sqrt{38}/2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{9.5 - 10}{\sqrt{38}/2}\right) = P(Z \geq -0.162) = P(Z \leq 0.162) = \left\{\begin{matrix} Miramos\ en\ la \\ tabla\ N(0,1) \end{matrix}\right\} = \boxed{0.5636}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	
0.1							0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406

UNIVERSIDAD DE MURCIA Región de Murcia Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

306-MATEMÁTICAS II

PAU2025 - **JULIO**

NOTA IMPORTANTE: Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. En cada cuestión se debe hacer solo la opción A o la opción B. La elección de A o B puede cambiar de una cuestión a otra. Si se responden las 2 opciones de una cuestión, sólo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada cuestión es 2,5 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+kz=2 \\ x+ky+3z=0 \end{cases}$$

a) **[1]** Discute el sistema en función del parámetro *k*.

b) **[0,5]** Calcule su solución en el caso en el que sea compatible indeterminado.

c) **[1]** Calcule su solución (expresada en función de *k*) para cualquier valor de *k* para el que el sistema sea compatible determinado.

1B) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que cumple que $A^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 3 (todos sus elementos son cero).

a) **[0,75]** Demuestre que $(A+I)^2 = 2A+I$ y que $(A+I)^3 = 3A+I$, donde *I* es la matriz identidad de orden 3.

b) **[0,75]** Demuestre que la matriz $I-A$ es inversa de la matriz $I+A$.

c) **[1]** Resuelva la ecuación matricial $X+AX=A$ expresando X en función de A.

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Calcule los siguientes límites:

a) **[1]** $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen(x)}\right)$

b) **[0,5]** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{9x^2+5}$

c) **[1]** $\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)$

2B) Considere la función $f(x)=tg^3(x)$.

a) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$

b) **[0,75]** Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=\frac{\pi}{4}$.

c) **[0,25]** Demuestre, sin aproximar con números decimales, que el área pedida en el apartado anterior es igual a $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):

3A) a) **[1,25]** Determine el valor de *a* y *b* para que el plano $\pi: 2x+y+az=b$ contenga a la recta

$$r:\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$$

b) **[1,25]** ¿Para qué valores de *a* y *b* corta a π? Halle el punto de corte en el caso $a=0$ y $b=7$.

3B) Un helicóptero situado en el punto $P(1,2,1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi: x+y+3z=0$.

a) **[1]** Calcule la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que lo lleve al punto más cercano a π.
b) **[0,75]** Halle dicho punto.
c) **[0,75]** Calcule la distancia que debe recorrer.

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) En un cine hay tres salas. En la sala S1 hay 240 espectadores, en la sala S2 hay 180 y en la sala S3 hay 80. Se sabe que la película de la sala S1 gusta al 40% de los espectadores, la de la sala S2 al 50% y la de la sala S3 al 90%. Cuando acaban las tres películas se elige a un espectador al azar.
a) **[1]** Calcule la probabilidad de que le haya gustado la película.
b) **[0,5]** Calcule la probabilidad de que le haya gustado si ha estado en la sala S3.
c) **[1]** Calcule la probabilidad de que haya estado en la sala S3 si le ha gustado.

4B) Un avión tiene capacidad para 260 pasajeros. Sin embargo, la compañía aérea ha vendido para un día 280 billetes. La compañía sabe que el 95% de los que compran un billete se presenta en el aeropuerto el día correspondiente. Consideramos el número de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes.
a) **[0,5]** Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica.
b) **[0,75]** Calcule la probabilidad de que falten plazas en el avión.
c) **[0,5]** Calcule la probabilidad de que no falten plazas en el avión.
d) **[0,75]** Calcule la probabilidad de que ni sobren ni falten plazas en el avión.

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+kz=2 \\ x+ky+3z=0 \end{cases}$$

a) **[1]** Discute el sistema en función del parámetro *k*.

b) **[0,5]** Calcule su solución en el caso en el que sea compatible indeterminado.

c) **[1]** Calcule su solución (expresada en función de *k*) para cualquier valor de *k* para el que el sistema sea compatible determinado.

a) Este sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k & 2 \\ 1 & k & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = \cancel{6}+k+2k-2-\cancel{6}-k^2=-k^2+3k-2$$

$$|A|=0 \Rightarrow -k^2+3k-2=0 \Rightarrow k=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-1)(-2)}}{2(-1)}=\frac{-3\pm 1}{-2}=\begin{cases} \frac{-3+1}{-2}=\boxed{1=k} \\ \frac{-3-1}{-2}=\boxed{2=k} \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $k\neq 1$ y $k\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada. La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{llll} \text{Fila } 2^{\text{a}} & - & 2\cdot \text{Fila } 1^{\text{a}} & \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^{\text{a}} \right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{a}} \;-\; \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{\text{a}}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{a}} \;+2\cdot \text{Fila } 2^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{\text{a}}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 1 & 1}^{A/B} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & -1 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Tienen rangos distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $k = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada. La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{\text{a}} \;-\; 2\cdot \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^{\text{a}}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{a}} \;-\; \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^{\text{a}}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{Fila\, 2^{\text{a}} \leftrightarrow Fila\, 3^{\text{a}}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 1 & 1}^{A/B} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B. Los rangos son iguales pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k = 1$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) El sistema es compatible indeterminado para $k=2$. Hallamos la expresión de sus infinitas soluciones partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{cccc}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=1\\y+2z=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=1\\y=-1-2z\end{array}\right\}\Rightarrow x-1-2z+z=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2+z\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=2+\lambda\\y=-1-2\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}\\z=\lambda\end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases}x=2+\lambda\\y=-1-2\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}\\z=\lambda\end{cases}$

c) Resolvemos el sistema para valores $k\neq 1$ y $k\neq 2$.

$$\begin{cases}x+y+z=1\\2x+2y+kz=2\\x+ky+3z=0\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación } 2^{\text{a}}-2\cdot\text{Ecuación } 1^{\text{a}}\\2x\quad+2y\quad+kz\quad=2\\-2x\quad-2y\quad-2z\quad=-2\\\hline\qquad\qquad(k-2)z\quad=0\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación } 3^{\text{a}}-\text{Ecuación } 1^{\text{a}}\\x\quad+ky\quad+3z\quad=0\\-x\quad-y\quad-z\quad=-1\\\hline\quad(k-1)y\quad+2z\quad=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=1\\(k-2)z=0\\(k-1)y+2z=-1\end{cases}\Rightarrow\{k-2\neq 0\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=1\\\boxed{z=0}\\(k-1)y+2z=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+0=1\\(k-1)y+2\cdot 0=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\(k-1)y=-1\end{cases}\Rightarrow\{k-1\neq 0\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\\boxed{y=\dfrac{1}{1-k}}\end{cases}\Rightarrow x+\frac{1}{1-k}=1\Rightarrow x=1-\frac{1}{1-k}=\frac{1-k-1}{1-k}\Rightarrow\boxed{x=\frac{k}{k-1}}$$

La solución del sistema es $x=\dfrac{k}{k-1}$, $y=\dfrac{1}{1-k}$, $z=0$, para cualquier valor de *k* distinto de 1 y 2.

1B) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que cumple que $A^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 3 (todos sus elementos son cero).

a) **[0,75]** Demuestre que $(A+I)^2 = 2A+I$ y que $(A+I)^3 = 3A+I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) **[0,75]** Demuestre que la matriz $I-A$ es inversa de la matriz $I+A$.

c) **[1]** Resuelva la ecuación matricial $X+AX=A$ expresando X en función de A.

a) Demostramos la igualdad $(A+I)^2 = 2A+I$.

$$(A+I)^2 = (A+I)(A+I) = A^2 + A\cdot I + I\cdot A + I\cdot I = O + 2A + I = 2A + I$$

Demostramos la igualdad $(A+I)^3 = 3A+I$.

$$(A+I)^3 = (A+I)^2(A+I) = (2A+I)(A+I) = 2A^2 + 2A + A + I\cdot I = 2O + 3A + I = 3A + I$$

b) Realizamos el producto $(I-A)(I+A)$ y comprobamos que se obtiene como resultado la matriz identidad.

$$(I-A)(I+A) = I\cdot I + I\cdot A - A\cdot I - A^2 = I + A - A - O = I$$

Se cumple que el producto da como resultado la matriz identidad y la matriz $I-A$ es inversa de la matriz $I+A$.

c) Resolvemos la ecuación matricial $X+AX=A$.

$$X + AX = A \Rightarrow X(I+A) = A \Rightarrow X(I+A)(I-A) = A(I-A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X\cdot I = A - A^2 \Rightarrow X = A - O \Rightarrow \boxed{X = A}$$

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):
2A) Calcule los siguientes límites:
a) **[1]** $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen(x)}\right)$
b) **[0,5]** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{9x^2+5}$
c) **[1]** $\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)$

a) Calculamos el primer límite.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen(x)}\right)=\frac{1}{0^+}-\frac{1}{sen(0^+)}=\frac{1}{0^+}-\frac{1}{0^+}=+\infty-\infty=In\det er\min ación=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{sen(x)-x}{xsen(x)}=\frac{sen(0)-0}{0\cdot sen(0)}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)-1}{sen(x)+x\cos(x)}=\frac{\cos(0)-1}{sen(0)+0\cdot\cos(0)}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-sen(x)}{\cos(x)+\cos(x)-xsen(x)}=\frac{-sen(0)}{\cos(0)+\cos(0)-0\cdot sen(0)}=\frac{0}{2}=\boxed{0}$$

b) Calculamos el segundo límite.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{9x^2+5}=\frac{\infty}{\infty}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}}}{18x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{36x\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{9\sqrt{2x^2+1}}=\frac{1}{\infty}=\boxed{0}$$

c) Calculamos el tercer límite.

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)=(+\infty)\left(e^{1/\infty}-1\right)=(+\infty)\left(e^0-1\right)=(+\infty)(0)=$$

$$=In\det er\min ación=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}=\frac{e^{1/\infty}-1}{\frac{1}{\infty}}=\frac{e^0-1}{0}=\frac{0}{0}=$$

$$=In\det er\min ación(L´Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{x^2}e^{1/x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{1/x}=e^{1/\infty}=e^0=\boxed{1}$$

2B) Considere la función $f(x)=tg^3(x)$.

a) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$

b) **[0,75]** Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=\frac{\pi}{4}$.

c) **[0,25]** Demuestre, sin aproximar con números decimales, que el área pedida en el apartado anterior es igual a $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

a) Calculamos la integral utilizando equivalencias trigonométricas y realizando un cambio de variable.

$$\int f(x)\,dx=\int tg^3(x)\,dx=\int tg^2(x)\,tg(x)\,dx=...$$

$$tg^2(x)=\frac{sen^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}-\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}-1$$

$$...=\int\left(\frac{1}{\cos^2(x)}-1\right)tg(x)\,dx=\int\frac{1}{\cos^2(x)}tg(x)\,dx-\int tg(x)\,dx=...$$

$$1^a\rightarrow\int\frac{1}{\cos^2(x)}tg(x)\,dx=\left\{\begin{matrix}t=tg(x)\\dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx\end{matrix}\right\}=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}=\frac{tg^2(x)}{2}$$

$$2^a\rightarrow\int tg(x)\,dx=\int\frac{sen(x)}{\cos(x)}dx=\left\{\begin{matrix}t=\cos(x)\\dt=-sen(x)\,dx\rightarrow\frac{dt}{-sen(x)}=dx\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{sen(x)}{t}\frac{dt}{-sen(x)}=-\int\frac{1}{t}dt=-\ln t=-\ln\left|\cos(x)\right|$$

$$...=\frac{tg^2(x)}{2}-\left(-\ln\left|\cos(x)\right|\right)=\frac{tg^2(x)}{2}+\ln\left|\cos(x)\right|+C$$

Hemos obtenido la integral indefinida: $\int f(x)\,dx=\frac{tg^2(x)}{2}+\ln\left|\cos(x)\right|+C$.

b) La función tangente no se anula entre 0 y $\frac{\pi}{4}$ y además es una función positiva.

El área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=\frac{\pi}{4}$ es el valor de la integral definida de la función entre estos dos valores.

$$Área=\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx=\left[\frac{tg^2(x)}{2}+\ln\left|\cos(x)\right|\right]_0^{\pi/4}=$$

$$=\left[\frac{tg^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}+\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]-\left[\frac{tg^2(0)}{2}+\ln\left|\cos(0)\right|\right]=\frac{1}{2}\cdot 1^2+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-0-\ln 1=$$

$$=\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}+\ln 1-\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}-\ln 2^{1/2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2=\boxed{\frac{1}{2}(1-\ln 2)}$$

c) Comprobamos si el valor obtenido $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$ es igual a $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{1}{2}(\ln e-\ln 2)=\frac{1}{2}(1-\ln 2)$$

Es cierta la igualdad y el valor del área se puede expresar como $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):

3A) a) **[1,25]** Determine el valor de *a* y *b* para que el plano $\pi : 2x + y + az = b$ contenga a la recta

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

b) **[1,25]** ¿Para qué valores de *a* y *b* corta a π? Halle el punto de corte en el caso $a = 0$ y $b = 7$.

a) Para que el plano contenga a la recta debe contener a todos los puntos de la recta.

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = x + 2y \end{cases} \Rightarrow x + y + x + 2y = 1 \Rightarrow 2x + 3y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 1 - 3y \Rightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y \Rightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y + 2y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y \Rightarrow \boxed{r : \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \end{cases}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 1 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \rightarrow A_r(-1,1,1) \\ \lambda = -1 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \\ y = -1 \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow B_r(2,-1,0) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi : 2x + y + az = b \\ A_r(-1,1,1) \in \pi \\ B_r(2,-1,0) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -2 + 1 + a = b \\ 4 - 1 = b \rightarrow \boxed{b = 3} \end{cases} \Rightarrow 3 = -1 + a \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

Los valores buscados son $a = 4$ y $b = 3$.

b) La recta corta al plano cuando el vector director de la recta no es perpendicular al vector normal del plano. Para ello el producto escalar de ambos vectores no debe ser cero.

$$\left.\begin{array}{l} \pi : 2x + y + az = b \rightarrow \vec{n} = (2,1,a) \\ r : \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_r} = \left(\frac{-3}{2},1,\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = (2,1,a)\left(\frac{-3}{2},1,\frac{1}{2}\right) = -3 + 1 + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} - 2$$

$$\vec{n}\cdot\vec{v_r}\neq 0\Rightarrow \frac{a}{2}-2\neq 0\Rightarrow a-4\neq 0\Rightarrow \boxed{a\neq 4}$$

Para cualquier valor de *a* distinto de 4 la recta corta el plano.

Para $a=0$ y $b=7$ la recta corta al plano en un punto P ($a\neq 4$). Determinamos las coordenadas de ese punto resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 2x+y=7\\ r:\begin{cases}x=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\lambda\\ y=\lambda\\ z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\lambda\right)+\lambda=7\Rightarrow 1-3\lambda+\lambda=7\Rightarrow -2\lambda=6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=-3\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(-3)=5\\ y=-3\\ z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-3)=-1\end{cases}\Rightarrow \boxed{P(5,-3,-1)}$$

La recta corta al plano en el punto $P(5,-3,-1)$.

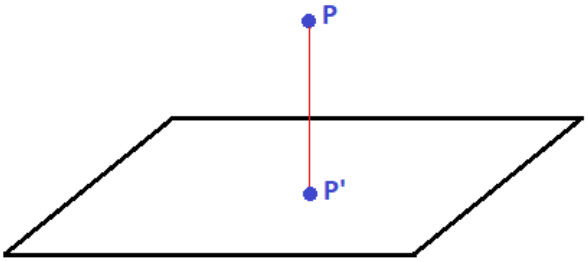
3B) Un helicóptero situado en el punto $P(1,2,1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi: x+y+3z=0$.

a) **[1]** Calcule la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que lo lleve al punto más cercano a π.

b) **[0,75]** Halle dicho punto.

c) **[0,75]** Calcule la distancia que debe recorrer.

a) Debemos calcular la proyección ortogonal del punto P en el plano.
Hallamos la trayectoria que es la recta perpendicular al plano que pasa por P. Al ser ortogonal al plano el vector director de la recta es el vector normal del plano.



$$\pi: x+y+3z=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(1,2,1)\in r \\ \overrightarrow{v_r}=\vec{n}=(1,1,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{3}}$$

La ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que sigue el helicóptero para llegar al punto más cercano a π es $r: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{3}$.

b) El punto P´ al que llega el helicóptero lo determinamos resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$r: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{3} \Rightarrow r: \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=1+3\alpha \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x+y+3z=0 \\ r: \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=1+3\alpha \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\alpha+2+\alpha+3(1+3\alpha)=0 \Rightarrow 1+\alpha+2+\alpha+3+9\alpha=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\alpha=-6 \Rightarrow \alpha=\frac{-6}{11} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11} \\ y=2-\frac{6}{11}=\frac{16}{11} \\ z=1-\frac{18}{11}=\frac{-7}{11} \end{cases} \Rightarrow \boxed{P'\left(\frac{5}{11},\frac{16}{11},\frac{-7}{11}\right)}$$

El punto donde aterriza el helicóptero tiene coordenadas $P'\left(\frac{5}{11},\frac{16}{11},\frac{-7}{11}\right)$.

c) La distancia que debe recorrer es el valor del módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.

$$\left.\begin{matrix} P'\left(\frac{5}{11},\frac{16}{11},\frac{-7}{11}\right) \\ P(1,2,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \left(\frac{5}{11},\frac{16}{11},\frac{-7}{11}\right) - (1,2,1) = \left(\frac{-6}{11},\frac{-6}{11},\frac{-18}{11}\right)$$

$$d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \sqrt{\left(\frac{-6}{11}\right)^2 + \left(\frac{-6}{11}\right)^2 + \left(\frac{-18}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{396}{121}} = \boxed{\frac{6\sqrt{11}}{11} \simeq 1.8 \, unidades}$$

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) En un cine hay tres salas. En la sala S1 hay 240 espectadores, en la sala S2 hay 180 y en la sala S3 hay 80. Se sabe que la película de la sala S1 gusta al 40% de los espectadores, la de la sala S2 al 50% y la de la sala S3 al 90%. Cuando acaban las tres películas se elige a un espectador al azar.

a) **[1]** Calcule la probabilidad de que le haya gustado la película.

b) **[0,5]** Calcule la probabilidad de que le haya gustado si ha estado en la sala S3.

c) **[1]** Calcule la probabilidad de que haya estado en la sala S3 si le ha gustado.

Ponemos estos datos en una tabla para obtener la información implícita y tener más cómodo acceso a toda la información.

	Gusta la película	No gusta la película	
Sala S1	$0.4 \cdot 240 = 96$		240
Sala S2	$0.5 \cdot 180 = 90$		180
Sala S3	$0.9 \cdot 80 = 72$		80
TOTALES			

Completamos la tabla.

	Gusta la película	No gusta la película	
Sala S1	$0.4 \cdot 240 = 96$	**144**	240
Sala S2	$0.5 \cdot 180 = 90$	**90**	180
Sala S3	$0.9 \cdot 80 = 72$	**8**	80
TOTALES	**258**	**242**	**500**

a) De los 500 espectadores le gustó la película a 258. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al espectador elegido al azar le guste la película vale $\frac{258}{500} = 0.516$.

b) A los espectadores de la sala S3 le ha gustado la película al 90%. La probabilidad de que al elegir un espectador de la sala S3 le guste la película vale 0.9.

c) La película ha gustado a 258 espectadores y de estos solo 72 estuvieron en la sala S3. La probabilidad de que el espectador al que le ha gustado la película haya estado en la sala S3 vale $\frac{72}{258} = \frac{12}{43} \simeq 0.28$

4B) Un avión tiene capacidad para 260 pasajeros. Sin embargo, la compañía aérea ha vendido para un día 280 billetes. La compañía sabe que el 95% de los que compran un billete se presenta en el aeropuerto el día correspondiente. Consideramos el número de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes.

a) **[0,5]** Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica.

b) **[0,75]** Calcule la probabilidad de que falten plazas en el avión.

c) **[0,5]** Calcule la probabilidad de que no falten plazas en el avión.

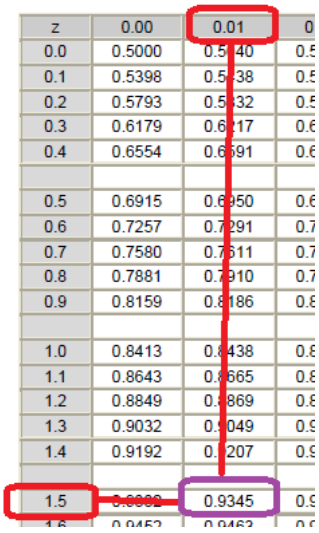
d) **[0,75]** Calcule la probabilidad de que ni sobren ni falten plazas en el avión.

a) Denominamos X = el número de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes. Esta distribución de probabilidad es una binomial siendo n = 280 y p = probabilidad de que un pasajero se presente = 0.95. X = B(280, 0.95).
Existen 280 repeticiones del experimento "el pasajero se presenta" y cada repetición es independiente de las demás.
La media es $n \cdot p = 280 \cdot 0.95 = 266$ y la desviación típica vale $\sqrt{npq} = \sqrt{280 \cdot 0.95 \cdot 0.05} \simeq 3.647$.
Como el número de repeticiones es muy alto para el cálculo de probabilidades aproximamos esta binomial a una normal de media 266 y desviación típica 3.647. Y = N(266, 3.647).
Esta aproximación es buena pues $np = 266 > 5$ y $nq = 280 \cdot 0.05 = 14 > 5$.

b) Nos piden calcular la probabilidad de que se presenten 261 pasajeros o más. Determinamos esta probabilidad usando la aproximación a la normal.

$$P(X \geq 261) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 260.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{260.5 - 266}{3.647}\right) = P(Z \geq -1.51) = P(Z \leq 1.51) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = \boxed{0.9345}$$



z	0.00	0.01	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6
0.6	0.7257	0.7291	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9

La probabilidad de que falten plazas en el avión es de 0.9345.

c) La probabilidad pedida es la del suceso contrario al suceso "faltan plazas en el avión". La probabilidad de que no falten vale 1 – 0.9345 = 0.0655.

d) Nos piden calcular la probabilidad de que se presenten exactamente 260 pasajeros.

$$P(X=260)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(259.5\le Y\le 260.5)=\{Tipificamos\}=$$

$$=P\left(\frac{259.5-266}{3.647}\le Z\le\frac{260.5-266}{3.647}\right)=P(-1.78\le Z\le -1.51)=$$

$$=P(Z\le -1.51)-P(Z\le -1.78)=P(Z\ge 1.51)-P(Z\ge 1.78)=$$

$$=\left[1-P(Z\le 1.51)\right]-\left[1-P(Z\le 1.78)\right]=P(Z\le 1.78)-P(Z\le 1.51)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=0.9625-0.9345=\boxed{0.028}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9625

La probabilidad de que ni sobren ni falten plazas en el avión es de 0.028.

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

306-MATEMÁTICAS II

PAU2025 - **JUNIO**

NOTA IMPORTANTE: Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. En cada cuestión se debe hacer solo la opción A o la opción B. La elección de A o B puede cambiar de una cuestión a otra. Si se responden las 2 opciones de una cuestión, sólo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada cuestión es 2,5 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Daniel quiere contratar a los músicos Darío, Hugo y José. El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m>0$. El sueldo de Hugo es el doble del de José. La suma del sueldo de José multiplicado por *m* más el sueldo de Darío (sin multiplicar por *m*) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por *m*) es 600 €.

a) **[0,75]** Denotando por *x* el sueldo de Darío, por *y* el sueldo de Hugo y por *z* el sueldo de José, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.

b) **[0,25]** Justifique que con estos datos se puede conocer el sueldo de cada uno (que solo dependerá de *m*).

c) **[1,5]** Calcule la expresión general de cada sueldo (en función de *m*), y lo que cobra cada uno para $m=2$.

1B) Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 5 & 0\end{pmatrix}$.

a) **[1,25]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus matrices inversas.

b) **[1,25]** Resuelva la ecuación $A^tXB=C$, donde A^t es la traspuesta de *A*.

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Considere el triángulo rectángulo de catetos *x* e *y* cuya hipotenusa mide $7\sqrt{2}$ cm.

a) **[0,5]** Demuestre que su área viene dada por la expresión

$$f(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{98-x^2}$$

b) **[2]** Calcule las dimensiones que debe tener dicho triángulo para que su área sea la mayor posible. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

2B) Considere la función $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

a) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$

b) **[1]** Compruebe que el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=1$ y $x=2$ es $\ln\left(\frac{27}{16}\right)$.

CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):

3A) Considere las rectas

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=5+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s:\begin{cases} x=7+3\mu \\ y=-5+\mu \\ z=7 \end{cases}$$

a) **[0,5]** Compruebe que se cruzan.
b) **[1,5]** Halle la ecuación de la recta perpendicular a ambas.
c) **[0,5]** Calcule la distancia entre *r* y *s*.

3B) Considere los planos $\pi_1: x-y+z=0$ y $\pi_2: x+y-z=2$

a) **[1]** Calcule la ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan π_1 y π_2.

b) **[0,75]** Halle la ecuación de la recta que pasa por $P(1,2,3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2.

c) **[0,75]** Calcule la proyección ortogonal de *P* en π_1

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) Considere dos urnas, U_1 y U_2, tales que en U_1 hay 2 bolas rojas y 3 verdes, y en U_2 hay 6 bolas rojas y 3 verdes. El experimento aleatorio consiste en sacar una bola de U_1, depositarla en U_2 y, a continuación, sacar una bola de U_2. Calcule la probabilidad de que:
a) **[0,5]** Salga una bola roja en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1.
b) **[0,5]** Salga una bola verde en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1.
c) **[0,5]** Salga una bola verde en U_2.
d) **[0,5]** Haya salido roja en U_1 sabiendo que ha salido roja en U_2.

4B) El 2% de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas.
a) **[1]** Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 10 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa.
b) **[1,5]** Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 2000 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas.

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Daniel quiere contratar a los músicos Darío, Hugo y José. El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m>0$. El sueldo de Hugo es el doble del de José. La suma del sueldo de José multiplicado por *m* más el sueldo de Darío (sin multiplicar por *m*) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por *m*) es 600 €.

a) **[0,75]** Denotando por *x* el sueldo de Darío, por *y* el sueldo de Hugo y por *z* el sueldo de José, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.

b) **[0,25]** Justifique que con estos datos se puede conocer el sueldo de cada uno (que solo dependerá de *m*).

c) **[1,5]** Calcule la expresión general de cada sueldo (en función de *m*), y lo que cobra cada uno para $m=2$.

a) Obtenemos las ecuaciones asociadas al ejercicio.

El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m>0$ → $x=my$.

El sueldo de Hugo es el doble del de José → $y=2z$.

La suma del sueldo de José multiplicado por *m* más el sueldo de Darío (sin multiplicar por *m*) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por *m*) es 600 € → $mz+x+y=600$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x=my \\ y=2z \\ mz+x+y=600 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} x-my & =0 \\ y-2z & =0 \\ x+y+mz & =600 \end{array}\right\}$$

b) Este sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & -m & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & m & 600 \end{pmatrix}.$$

Determinamos la expresión del determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -m & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=m+2m+0-0-0+2=3m+2$$

Esta expresión del determinante de A nunca se anula pues $m>0\rightarrow 3m>0\rightarrow 3m+2>0$.

El rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado para cualquier valor de $m>0$.

c) Intentamos resolver el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x = my \\ y = 2z \\ mz + x + y = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = m \cdot 2z \\ mz + x + 2z = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2mz \\ (m+2)z + x = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m+2)z + 2mz = 600 \Rightarrow (m+2+2m)z = 600 \Rightarrow (3m+2)z = 600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{m > 0 \Rightarrow 3m+2 \neq 0\} \Rightarrow \boxed{z = \frac{600}{3m+2}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2m\frac{600}{3m+2} = \frac{1200m}{3m+2}} \\ \boxed{y = 2\frac{600}{3m+2} = \frac{1200}{3m+2}} \end{cases}$$

El sueldo de Darío es $\frac{1200m}{3m+2}$, el de Hugo es $\frac{1200}{3m+2}$ y el de José es $\frac{600}{3m+2}$. Todos dependen del valor de *m*.

Para $m = 2$ el sueldo de Darío es $\frac{1200 \cdot 2}{3 \cdot 2 + 2} = 300$ euros, el de Hugo es $\frac{1200}{3 \cdot 2 + 2} = 150$ euros y el de José es $\frac{600}{3 \cdot 2 + 2} = 75$ euros

1B) Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 5 & 0\end{pmatrix}$.

a) **[1,25]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus matrices inversas.

b) **[1,25]** Resuelva la ecuación $A^tXB=C$, donde A^t es la traspuesta de *A*.

a) Para que las matrices sean invertibles su determinante debe ser distinto de cero. Lo comprobamos.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-1=5\neq 0$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-0=1\neq 0$$

Ambas matrices son invertibles. Determinamos la matriz inversa de cada una de ellas.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}}{5}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/5 & -1/5\\ -1/5 & 2/5\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

b) Como la matriz A es simétrica se cumple que $A^t=A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A^tXB=C\Rightarrow AXB=C\Rightarrow AX=CB^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$$

Realizamos las operaciones indicadas y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}15-5 & 0+0\\ -5+10 & 0+0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}10 & 0\\ 5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}10+0 & 0+0\\ 5-0 & 0+0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}10 & 0\\ 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

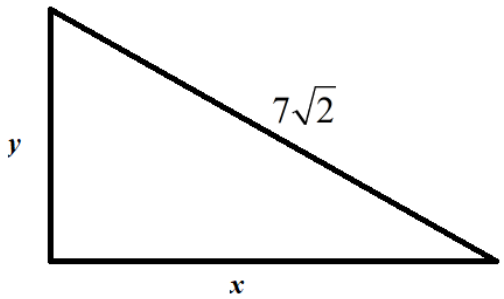
CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Considere el triángulo rectángulo de catetos *x* e *y* cuya hipotenusa mide $7\sqrt{2}$ cm.

a) **[0,5]** Demuestre que su área viene dada por la expresión

$$f(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{98-x^2}$$

b) **[2]** Calcule las dimensiones que debe tener dicho triángulo para que su área sea la mayor posible. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?



a) Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo del dibujo.

$$x^2+y^2=\left(7\sqrt{2}\right)^2\Rightarrow x^2+y^2=98\Rightarrow y^2=98-x^2\Rightarrow y=\sqrt{98-x^2}$$

El área del triángulo rectángulo ($f(x)$) es la mitad del producto de la base (x) por la altura (y).

$$f(x)=\frac{xy}{2}=\frac{x\sqrt{98-x^2}}{2}=\frac{1}{2}x\sqrt{98-x^2}$$

b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función área.

$$f(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{98-x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{98-x^2}+\frac{1}{2}x\frac{-2x}{2\sqrt{98-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{98-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{98-x^2}}=\frac{98-x^2}{2\sqrt{98-x^2}}-\frac{x^2}{2\sqrt{98-x^2}}=\frac{98-x^2-x^2}{2\sqrt{98-x^2}}=\frac{98-2x^2}{2\sqrt{98-x^2}}=\frac{49-x^2}{\sqrt{98-x^2}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{49-x^2}{\sqrt{98-x^2}}=0\Rightarrow 49-x^2=0\Rightarrow x^2=49\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{49}=7}$$

No consideramos el valor negativo de la raíz pues se trata de la longitud.
Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=7$.

- En el intervalo $(0,7)$ consideramos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=\frac{49-1^2}{\sqrt{98-1^2}}=\frac{48}{\sqrt{97}}>0$.

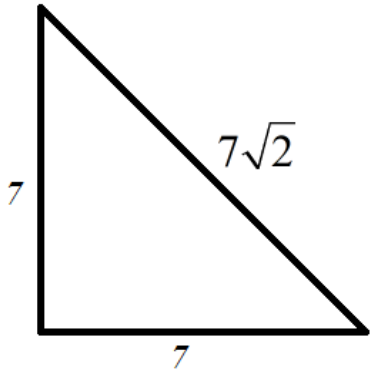
  La función crece en $(0,7)$.
- En el intervalo $\left(7,7\sqrt{2}\right)$ consideramos $x=8$ y la derivada vale

  $f'(8)=\frac{49-8^2}{\sqrt{98-8^2}}=\frac{-15\sqrt{34}}{34}<0$. La función decrece en $\left(7,7\sqrt{2}\right)$.

Como la función crece antes y decrece después de $x=7$ podemos afirmar que el área presenta un máximo relativo en dicho valor.

Para $x=7$ el valor del otro cateto es $y=\sqrt{98-7^2}=7$. El triángulo rectángulo cumpliendo las condiciones con área máxima tiene ambos catetos iguales y de longitud 7 cm.

Este valor máximo del área es $f(7)=\frac{7\cdot 7}{2}=24.5$ centímetros cuadrados.



2B) Considere la función $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

a) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$

b) **[1]** Compruebe que el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=1$ y $x=2$ es $\ln\left(\frac{27}{16}\right)$.

a) Calculamos la integral usando las propiedades de los logaritmos.

$$\int f(x)\,dx=\int \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx=\int \ln(x+1)-\ln x\,dx=\int \ln(x+1)\,dx-\int \ln x\,dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln(x+1)\to du=\frac{1}{x+1}dx\\ dv=dx\to v=\int dx=x\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx\\ dv=dx\to v=\int dx=x\end{array}\right\}=$$

$$=x\ln(x+1)-\int x\frac{1}{x+1}dx-\left[x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx\right]=$$

$$=x\ln(x+1)-\int \frac{x}{x+1}dx-x\ln x+\int dx=x\ln(x+1)-\int \frac{x+1-1}{x+1}dx-x\ln x+x=$$

$$=x+x\ln(x+1)-x\ln x-\int \frac{x+1}{x+1}dx-\int \frac{-1}{x+1}dx=x+x\ln(x+1)-x\ln x-\int dx+\int \frac{1}{x+1}dx=$$

$$=\cancel{x}+x\ln(x+1)-x\ln x-\cancel{x}+\ln(x+1)=\boxed{(x+1)\ln(x+1)-x\ln x+C}$$

Hemos obtenido la integral indefinida: $\int f(x)\,dx=(x+1)\ln(x+1)-x\ln x+C$ ..

b) Buscamos los posibles puntos de corte de la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\\ Eje\ OX\to y=0\end{array}\right\}\Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=0\Rightarrow \frac{x+1}{x}=1\Rightarrow x+1=x\Rightarrow 1=0$$

La gráfica de la función no corta el eje OX. En el intervalo (1, 2) la función es positiva, pues si tomamos un valor del intervalo, por ejemplo $x=1.5$ y sustituimos tenemos que $f(1.5)=\ln\left(\frac{1.5+1}{1.5}\right)\simeq 0.51>0$.

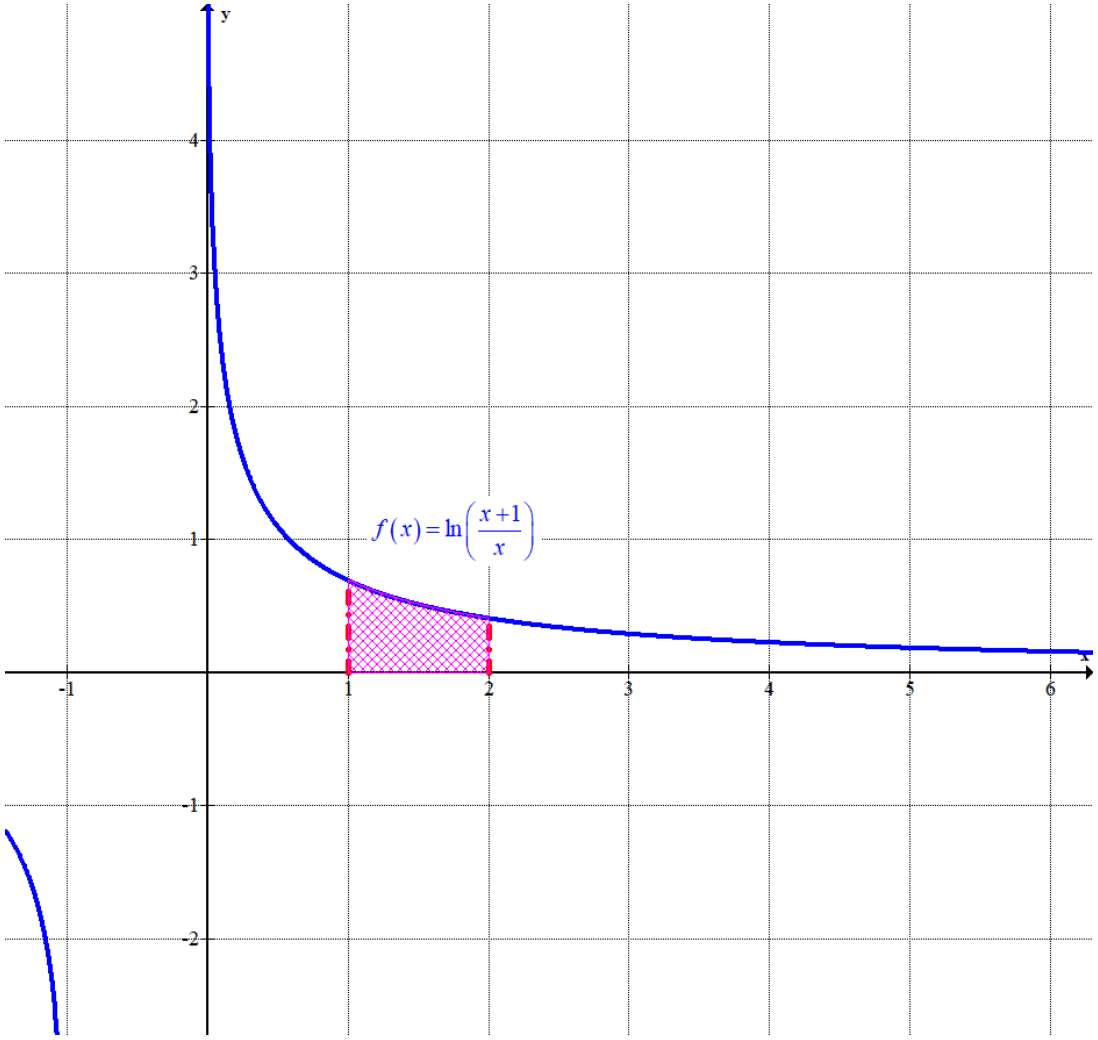
El área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=1$ y $x=2$ es el valor de la integral definida de la función entre 1 y 2.

$$Área = \int_1^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx = \Big[(x+1)\ln(x+1) - x\ln x\Big]_1^2 =$$

$$= \Big[(2+1)\ln(2+1) - 2\cdot\ln 2\Big] - \Big[(1+1)\ln(1+1) - 1\cdot\ln 1\Big] =$$

$$= 3\ln 3 - 2\ln 2 - 2\ln 2 = 3\ln 3 - 4\ln 2 = \ln 3^3 - \ln 2^4 = \ln 27 - \ln 16 = \boxed{\ln\left(\frac{27}{16}\right)}$$

Se cumple lo indicado en el ejercicio.



CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):
3A) Considere las rectas

$$r:\begin{cases}x=1\\y=5+\lambda\\z=\lambda\end{cases} \quad \text{y} \quad s:\begin{cases}x=7+3\mu\\y=-5+\mu\\z=7\end{cases}$$

a) **[0,5]** Compruebe que se cruzan.
b) **[1,5]** Halle la ecuación de la recta perpendicular a ambas.
c) **[0,5]** Calcule la distancia entre *r* y *s*.

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r:\begin{cases}x=1\\y=5+\lambda\\z=\lambda\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\\P_r(1,5,0)\end{cases} \qquad s:\begin{cases}x=7+3\mu\\y=-5+\mu\\z=7\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}\overrightarrow{v_s}=(3,1,0)\\Q_s(7,-5,7)\end{cases}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes pues tienen vectores directores con coordenadas no proporcionales.

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{v_s}=(3,1,0)\\\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{3}{0}\neq\frac{1}{1}\neq\frac{0}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Obtenemos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\left.\begin{matrix}P_r(1,5,0)\\Q_s(7,-5,7)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{P_rQ_s}=(7,-5,7)-(1,5,0)=(6,-10,7)$$

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\\\overrightarrow{v_s}=(3,1,0)\\\overrightarrow{P_rQ_s}=(6,-10,7)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix}0&1&1\\3&1&0\\6&-10&7\end{vmatrix}=0+0-30-6-21-0=-57\neq 0$$

Como el valor de este producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

b) Hallamos el vector director de la recta *t* perpendicular a ambas como el producto vectorial de los vectores directores de *r* y *s*.

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\\\overrightarrow{v_s}=(3,1,0)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{w_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix}i&j&k\\0&1&1\\3&1&0\end{vmatrix}=0+3j+0-3k-0-i=-i+3j-3k=(-1,3,-3)$$

Hallamos la ecuación del plano π que contiene a la recta *r* y que también tiene como vector director $\overrightarrow{w_t}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{w_t}=(-1,3,-3)\\ \vec{v}=\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\\ P_r(1,5,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y-5 & z\\ -1 & 3 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 3(x-1)-0-z+0+y-5+3(x-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-3-z+y-5+3x-3=0\Rightarrow \boxed{\pi: 6x+y-z-11=0}$$

Hallamos la ecuación del plano π ´ que contiene a la recta *s* y que también tiene como vector director $\overrightarrow{w_t}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{w_t}=(-1,3,-3)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(3,1,0)\\ Q_s(7,-5,7)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-7 & y+5 & z-7\\ -1 & 3 & -3\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0-9(y+5)-z+7-9(z-7)-0+3(x-7)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9y-45-z+7-9z+63+3x-21=0\Rightarrow \boxed{\pi': 3x-9y-10z+4=0}$$

La recta *t* buscada es la intersección de los dos planos $\pi: 6x+y-z-11=0$ y $\pi': 3x-9y-10z+4=0$.

$$t:\begin{cases}6x+y-z-11=0\\ 3x-9y-10z+4=0\end{cases}$$

c) Para hallar la distancia entre las dos rectas *r* y *s* que se cruzan determinamos el plano π´´ que contiene a la recta *r* y que es paralelo a la recta *s*. La distancia entre las rectas *r* y *s* es el valor de la distancia de un punto de la recta *s* al plano π´´.
Hallamos la ecuación del plano π´´ que contiene a la recta *r* y tiene como otro de sus vectores directores el director de la recta *s*. Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta *t*.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n''}=\overrightarrow{w_t}=(-1,3,-3)\\ P_r(1,5,0)\in\pi''\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\pi'': -x+3y-3z+D=0\\ P_r(1,5,0)\in\pi''\end{array}\right\}\Rightarrow -1+3\cdot 5-3\cdot 0+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14+D=0\Rightarrow D=-14\Rightarrow \boxed{\pi'': -x+3y-3z-14=0}$$

Hallamos la distancia de $Q_s(7,-5,7)$ al plano $\pi'': -x+3y-3z-14=0$.

$$\left.\begin{array}{l}Q_s(7,-5,7)\\ \pi'': -x+3y-3z-14=0\end{array}\right\}\Rightarrow d(r,s)=d(Q_s,\pi'')=\frac{\left|-7+3(-5)-3\cdot 7-14\right|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+3^2}}=\frac{57}{\sqrt{19}}=3\sqrt{19}$$

La distancia entre *r* y *s* tiene un valor de $3\sqrt{19}$ unidades.

3B) Considere los planos $\pi_1 : x-y+z=0$ y $\pi_2 : x+y-z=2$

a) **[1]** Calcule la ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan π_1 y π_2.

b) **[0,75]** Halle la ecuación de la recta que pasa por $P(1,2,3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2.

c) **[0,75]** Calcule la proyección ortogonal de P en π_1

a) La ecuación implícita de la recta donde se cortan los planos es $r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases}$. Obtenemos la ecuación paramétrica de la recta.

$$r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-z \\ x+y-z=2 \end{cases} \Rightarrow y-z+y-z=2 \Rightarrow 2y-2z=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-z=1 \Rightarrow y=1+z \Rightarrow x=1+z-z=1 \Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

La ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan π_1 y π_2 es $r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$.

b) Comprobamos que el punto P no pertenece a ninguno de los dos planos.

$$\left.\begin{matrix} ¿P(1,2,3)\in\pi_1? \\ \pi_1 : x-y+z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ¿1-2+3=0? \Rightarrow ¿2=0?$$

$$\left.\begin{matrix} ¿P(1,2,3)\in\pi_2? \\ \pi_2 : x+y-z=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ¿1+2-3=2? \Rightarrow ¿0=2?$$

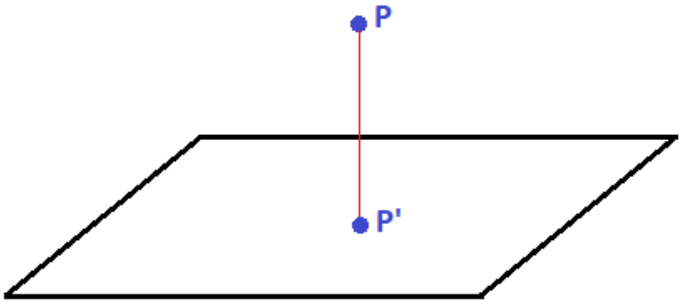
La recta *s* que pasa por $P(1,2,3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2 es la recta paralela a la recta *r* que pasa por el punto P..

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda \Rightarrow \vec{u_r}=(0,1,1) \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} P(1,2,3)\in s \\ \vec{v_s}=\vec{u_r}=(0,1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow s:\begin{cases} x=1 \\ y=2+\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R} \\ z=3+\alpha \end{cases}$$

La recta que pasa por $P(1,2,3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2 tiene ecuación $s:\begin{cases} x=1 \\ y=2+\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R} \\ z=3+\alpha \end{cases}$.

c) Debemos hallar las coordenadas del punto P´ perteneciente al plano tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ sea paralelo a su vector normal.



$$\left.\begin{matrix} \pi_1: x-y+z=0 \\ P'(a,b,c)\in\pi_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a-b+c=0 \Rightarrow a=b-c \Rightarrow P'(b-c,b,c)$$

$$\overrightarrow{PP'}=(b-c,b,c)-(1,2,3)=(b-c-1,b-2,c-3)$$

$$\pi_1: x-y+z=0 \Rightarrow \vec{n_1}=(1,-1,1)$$

$$\overrightarrow{PP'}\,||\,\vec{n_1} \Rightarrow \frac{b-c-1}{1}=\frac{b-2}{-1}=\frac{c-3}{1} \Rightarrow b-c-1=2-b=c-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-c-1=2-b \\ 2-b=c-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b=c+3 \\ 5-b=c \end{cases} \Rightarrow 2b=5-b+3 \Rightarrow 3b=8 \Rightarrow b=\frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=5-\frac{8}{3}=\frac{7}{3} \Rightarrow a=\frac{8}{3}-\frac{7}{3}=\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{P'\left(\frac{1}{3},\frac{8}{3},\frac{7}{3}\right)}$$

La proyección ortogonal de P en π_1 tiene coordenadas $P'\left(\frac{1}{3},\frac{8}{3},\frac{7}{3}\right)$.

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) Considere dos urnas, U_1 y U_2, tales que en U_1 hay 2 bolas rojas y 3 verdes, y en U_2 hay 6 bolas rojas y 3 verdes. El experimento aleatorio consiste en sacar una bola de U_1, depositarla en U_2 y, a continuación, sacar una bola de U_2. Calcule la probabilidad de que:

a) **[0,5]** Salga una bola roja en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1.

b) **[0,5]** Salga una bola verde en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1.

c) **[0,5]** Salga una bola verde en U_2.

d) **[0,5]** Haya salido roja en U_1 sabiendo que ha salido roja en U_2.

a) Si sale roja de la urna U1 entonces la urna U2 pasa a tener 7 bolas rojas y 3 verdes por lo que la probabilidad de extraer una bola roja de la urna U2 es de $\frac{7}{10}=0.7$.

b) Si sale roja de la urna U1 entonces la urna U2 pasa a tener 7 bolas rojas y 3 verdes por lo que la probabilidad de extraer una bola roja de la urna U2 es de $\frac{3}{10}=0.3$.

c) Aplicamos el teorema de la probabilidad total. Sumamos las probabilidades de sacar verde en urna U2 sacando previamente de la urna U1 una bola roja y la probabilidad de sacar verde en urna U2 sacando previamente de la urna U1 una bola verde.

$$P(V_2)=P(V_1)P(V_2/V_1)+P(R_1)P(V_2/R_1)=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{10}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{10}=\boxed{0.36}$$

d) Nos piden calcular $P(R_1/R_2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R_1/R_2)=\frac{P(R_1\cap R_2)}{P(R_2)}=\frac{P(R_1)P(R_2/R_1)}{1-P(V_2)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{10}}{1-0.36}=\boxed{\frac{7}{16}=0.4375}$$

4B) El 2% de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas.
a) **[1]** Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 10 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa.
b) **[1,5]** Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 2000 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas.

a) Denominamos X = Número de piezas en buen estado de un lote de 10 piezas. Esta distribución de probabilidad es una binomial siendo n = 10 y p = probabilidad de que una pieza esté en buen estado = 0.98. X = B(10, 0.98).

Existen 10 repeticiones del experimento "ver si la pieza está en buen estado" y cada repetición es independiente de las demás.

La media es $n\cdot p = 10\cdot 0.98 = 9.8$ y la desviación típica vale $\sqrt{npq} = \sqrt{10\cdot 0.98\cdot 0.02} \simeq 0.4427$.

Para que haya exactamente 1 pieza defectuosa debe haber 9 piezas en buen estado. Debemos calcular $P(X=9)$.

$$P(X=9) = \binom{10}{9} 0.98^9 \cdot 0.02^1 = 10\cdot 0.98^9 \cdot 0.02 \simeq \boxed{0.16667}$$

La probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa en un lote de 10 piezas vale 0.16667

b) Denominamos X = Número de piezas en buen estado de un lote de 2000 piezas. Esta distribución de probabilidad es una binomial siendo n = 2000 y p = probabilidad de que una pieza esté en buen estado = 0.98. X = B(2000, 0.98).

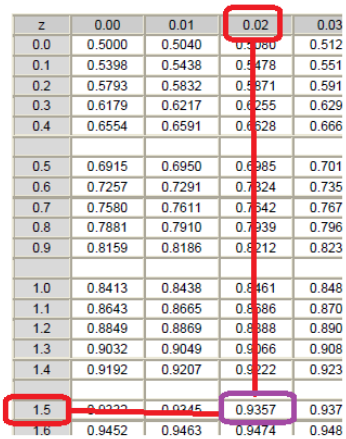
Para el cálculo de probabilidades dado el elevado número de elementos de la muestra aproximamos la distribución binomial a una normal Y, siendo su media $\mu = n\cdot p = 2000\cdot 0.98 = 1960$ y su desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2000\cdot 0.98\cdot 0.02} \simeq 6.26$. Y = N(1960, 6.26).

Esta aproximación es buena pues $n\cdot p = 1960 > 5$ y $n\cdot q = 2000\cdot 0.02 = 40 > 5$.

Para que haya menos de 50 piezas defectuosas debe haber más de 1950 piezas en buen estado. Nos piden calcular $P(X>1950)$.

$$P(X>1950) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y\geq 1950.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{1950.5-1960}{6.26}\right) = P(Z\geq -1.52) = P(Z\leq 1.52) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = \boxed{0.9357}$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.512
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.551
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.629
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.666
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.701
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.735
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.767
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.796
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.823
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.848
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.870
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.890
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.908
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.923
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.948

La probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas en un lote de 2000 piezas vale 0.9357.

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

306-MATEMÁTICAS II

EBAU2024 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: [2,5] Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores en las tres siguientes redes sociales: Instagram, X (antiguo Twitter) y YouTube. Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube. Además, si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares.
Calcule cuántos seguidores tiene Taylor Swift en cada una de estas redes sociales.

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz ortogonal si cumple que $A\cdot A^t = I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e *I* denota la matriz identidad de orden 2.

a) **[1]** Estudie si las siguientes matrices son ortogonales o no:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz ortogonal cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **[0,75]** Justifique que si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A\cdot B$ también lo es.

3: Considere la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-2x+3}$, definida para todo valor $x \in \mathbb{R}$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **y** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$**.**

b) **[1,5]** Determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función *f (x)* y calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos).

c) **[0,5]** Justifique que la función alcanza sus extremos absolutos (máximo y mínimo absolutos) y calcule el valor de dichos extremos absolutos.

4: Considere la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, definida para todo valor de $x > 0$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.

c) **[0,5]** Determine el valor de $a > 0$ para el cual se cumple que $\int_1^a f(x)\,dx = 4$.

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

306-MATEMÁTICAS II

EBAU2024 - **JULIO**

5: Considere los planos $x-y+z=0$ y $x+y-z=2$ y los puntos $P(1,2,3)$ y $Q(1,1,3)$.

a) **[0,75]** Compruebe que ambos planos se cortan en una recta *r* y calcule la ecuación continua de dicha recta.

b) **[1]** Compruebe que el punto P no está en ninguno de los dos planos y calcule la ecuación de la recta que pasa por P y no corta a ninguno de los dos planos.

c) **[0,75]** Determine el punto de la recta *r* que equidista de P y de Q.

6: Considere los planos $x+y+z=-3$ y $x+y-z=3$ y la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}$

a) **[0,75]** Compruebe que ambos planos se cortan y calcule el ángulo que forman.

b) **[0,75]** Estudie la posición relativa de la recta *r* con el plano $x+y-z=3$.

c) **[1]** Determine los puntos de la recta *r* que equidistan de ambos planos.

7: El 60% de los habitantes de una población consume pan integral, el 40% consume pan blanco y el 20% consume ambos tipos de pan.

a) **[0,5]** ¿Son independientes los sucesos "consumir pan integral" y "consumir pan blanco"?

b) **[0,5]** Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

c) **[0,75]** Calcule el porcentaje de la población que no consume ninguno de los dos tipos de pan.

d) **[0,75]** Sabiendo que un habitante no consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes.

Una fábrica de componentes de ordenador produce 2500 microprocesadores al día. Sabiendo que el porcentaje de microprocesadores defectuosos fabricados es del 2%, responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) **[0,5]** ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de microprocesadores defectuosos fabricados al día?

b) **[0,5]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **[0,75]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea menor o igual que 57?

d) **[0,75]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea exactamente 50?

SOLUCIONES

1: [2,5] Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores en las tres siguientes redes sociales: Instagram, X (antiguo Twitter) y YouTube. Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube. Además, si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares.
Calcule cuántos seguidores tiene Taylor Swift en cada una de estas redes sociales.

Llamamos "x" al número de seguidores de Taylor Swift en Instagram (en millones), "y" al número de seguidores de Taylor Swift en X y "z" al número de seguidores de Taylor Swift en YouTube.

"Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores" → $x+y+z=435$

"Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube" → $x+\frac{z}{2}=2(y+z)$

"Si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares" → $10x+20y+30z=6500$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=435 \\ x+\frac{z}{2}=2(y+z) \\ 10x+20y+30z=6500 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=435 \\ x+\frac{z}{2}=2y+2z \\ x+2y+3z=650 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=435 \\ 2x+z=4y+4z \\ x+2y+3z=650 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=435 \\ 2x-4y-3z=0 \\ x=650-2y-3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 650-2y-3z+y+z=435 \\ 2(650-2y-3z)-4y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y-2z=-215 \\ 1300-4y-6z-4y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2z+215=y \\ -8y-9z=-1300 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8(-2z+215)-9z=-1300 \Rightarrow 16z-1720-9z=-1300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7z=420 \Rightarrow \boxed{z=\frac{420}{7}=60} \Rightarrow \boxed{y=-120+215=95} \Rightarrow \boxed{x=650-190-180=280}$$

Taylor Swift tiene 280 millones de seguidores en Instagram, 95 millones en X y 60 millones en YouTube.

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz ortogonal si cumple que $A\cdot A^t = I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.
a) **[1]** Estudie si las siguientes matrices son ortogonales o no:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz ortogonal cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.
c) **[0,75]** Justifique que si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A\cdot B$ también lo es.

a) Para que sean ortogonales deben cumplir $A\cdot A^t = I$.

Primera matriz.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sqrt{3}/2)^2 + 1/4 & -\sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/4 & 1/4 + (\sqrt{3}/2)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 + 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 + 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Se cumple la igualdad y la primera matriz es ortogonal.

Segunda matriz.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sqrt{3}/2)^2 + 1/4 & -\sqrt{3}/4 - \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 - \sqrt{3}/4 & 1/4 + (\sqrt{3}/2)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 + 1/4 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/4 + 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

No se cumple la igualdad y la segunda matriz no es ortogonal.

b) Si A es una matriz ortogonal tenemos que $A\cdot A^t = I$.

$$A\cdot A^t = I \Rightarrow |A\cdot A^t| = |I| \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Propiedad} \\ |AB| = |A|\cdot|B|\end{matrix}\right\}\left\{|I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\right\} \Rightarrow |A|\cdot|A^t| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Propiedad} \\ |A^t| = |A|\end{matrix}\right\} \Rightarrow |A|\cdot|A| = 1 \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{|A| = \sqrt{1} = \pm 1}$$

El determinante de una matriz ortogonal vale 1 o –1.

c) Si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, se cumple $A\cdot A^t = I$ y $B\cdot B^t = I$

Comprobamos si la matriz $C = A \cdot B$ es ortogonal.

$$C = A \cdot B \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Propiedad} \\ \left(A \cdot B\right)^t = B^t \cdot A^t \end{matrix} \right\} \Rightarrow C^t = B^t \cdot A^t$$

$$CC^t = A \cdot B \cdot B^t \cdot A^t = \left\{ B \cdot B^t = I \right\} = A \cdot I \cdot A^t = A \cdot A^t = I$$

Queda justificado que si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A \cdot B$ también lo es.

3: Considere la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-2x+3}$, definida para todo valor $x\in\mathbb{R}$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**.**

b) **[1,5]** Determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función *f (x)* y calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos).

c) **[0,5]** Justifique que la función alcanza sus extremos absolutos (máximo y mínimo absolutos) y calcule el valor de dichos extremos absolutos.

a) **C**alculamos el límite de la función en –∞.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2-2x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{3}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=\frac{2}{1-\dfrac{2}{-\infty}+\dfrac{3}{+\infty}}=\frac{2}{1-0+0}=2$$

De forma análoga calculamos el límite de la función en +∞.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{3}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=\frac{2}{1-\dfrac{2}{+\infty}+\dfrac{3}{+\infty}}=\frac{2}{1-0+0}=2$$

b) Averiguamos el dominio de la función.

$$x^2-2x+3=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(3)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}=\nexists$$

El denominador nunca se anula y el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Utilizamos la derivada para hallar los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{2x^2}{x^2-2x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x\left(x^2-2x+3\right)-2x^2\left(2x-2\right)}{\left(x^2-2x+3\right)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{4x^3}-8x^2+12x-\cancel{4x^3}+4x^2}{\left(x^2-2x+3\right)^2}=\frac{-4x^2+12x}{\left(x^2-2x+3\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-4x^2+12x}{\left(x^2-2x+3\right)^2}=0\Rightarrow -4x^2+12x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

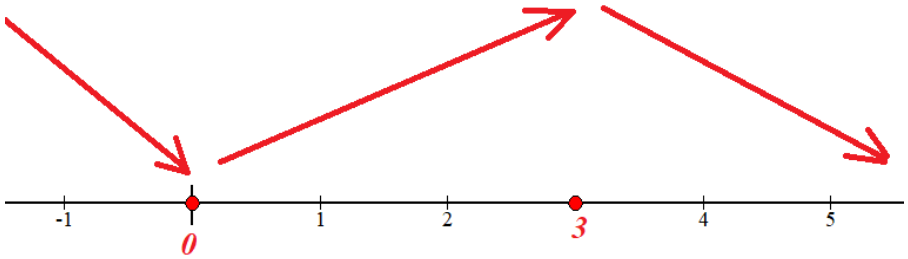
  $f'(-1)=\dfrac{-4(-1)^2+12(-1)}{\left((-1)^2-2(-1)+3\right)^2}=\dfrac{-16}{36}<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.

- En el intervalo $(0,3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{-4+12}{(1-2+3)^2}=2>0$. La función crece en $(0,3)$.

- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale

  $f'(4)=\dfrac{-4(4)^2+12(4)}{\left(4^2-2(4)+3\right)^2}=\dfrac{-16}{121}<0$. La función decrece en $(3,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(0,3)$ y decrece en $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$.

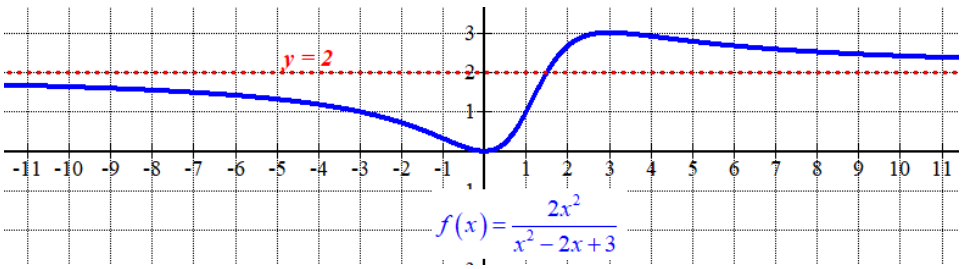
La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 3$.

Como $f(0)=\dfrac{0}{3}=0$ el mínimo relativo tiene coordenadas (0, 0).

Como $f(3)=\dfrac{2\cdot 3^2}{3^2-2\cdot 3+3}=\dfrac{18}{6}=3$ el máximo relativo tiene coordenadas (3, 3).

c) Tenemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, la función es continua siendo su dominio todos los números reales, el valor mínimo relativo es 0 por lo que la función tiene un mínimo absoluto en dicho valor. El mínimo absoluto de la función es 0 y se alcanza en $x = 0$.

Tenemos que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, la función es continua siendo su dominio todos los números reales, el valor máximo relativo es 3 por lo que la función tiene un máximo absoluto en dicho valor. El máximo absoluto de la función es 3 y se alcanza en $x = 3$.



4: Considere la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, definida para todo valor de $x>0$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.

c) **[0,5]** Determine el valor de $a>0$ para el cual se cumple que $\int_1^a f(x)\,dx=4$.

a) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{\frac{1}{x}}=2\sqrt{\frac{1}{+\infty}}=2\cdot 0=\boxed{0}$$

b) Calculamos la integral usando el método de integración por partes.

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int\ln x\cdot x^{-1/2}dx\begin{cases}u=\ln x\to du=\dfrac{1}{x}dx\\ dv=x^{-1/2}dx\to v=\displaystyle\int x^{-1/2}dx=\frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{x}\end{cases}=$$

$$=2\sqrt{x}\ln x-\int\frac{1}{x}2\sqrt{x}dx=2\sqrt{x}\ln x-2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln x-4\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=$$

$$=2\sqrt{x}\ln x-4\cdot\sqrt{x}=\boxed{2\sqrt{x}(\ln x-2)+C}$$

c) Usamos la integral indefinida obtenida en el apartado anterior para obtener la expresión de la integral definida del ejercicio.

$$\int_1^a f(x)\,dx=\Big[2\sqrt{x}(\ln x-2)\Big]_1^a=2\sqrt{a}(\ln a-2)-2\sqrt{1}(\ln 1-2)=2\sqrt{a}(\ln a-2)+4$$

Igualamos la integral definida a 4 y obtenemos el valor de *a*.

$$\left.\begin{aligned}&\int_1^a f(x)\,dx=2\sqrt{a}(\ln a-2)+4\\&\int_1^a f(x)\,dx=4\end{aligned}\right\}\Rightarrow 2\sqrt{a}(\ln a-2)+4=4\Rightarrow 2\sqrt{a}(\ln a-2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=0\to\text{¡Imposible! pues } a>1\\ \ln a-2=0\Rightarrow\ln a=2\Rightarrow\boxed{a=e^2}\end{cases}$$

El valor buscado es $a=e^2$.

5: Considere los planos $x-y+z=0$ y $x+y-z=2$ y los puntos $P(1,2,3)$ y $Q(1,1,3)$.

a) **[0,75]** Compruebe que ambos planos se cortan en una recta *r* y calcule la ecuación continua de dicha recta.

b) **[1]** Compruebe que el punto P no está en ninguno de los dos planos y calcule la ecuación de la recta que pasa por P y no corta a ninguno de los dos planos.

c) **[0,75]** Determine el punto de la recta *r* que equidista de P y de Q.

a) Para que los planos se corten en una recta los vectores normales de los planos no deben tener coordenadas proporcionales (planos no paralelos ni coincidentes).

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,-1,1) \\ x+y-z=2 \Rightarrow \vec{n'}=(1,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$$

Los planos no son paralelos y se cortan en una recta.

Hallamos la ecuación de la recta.

$$r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-z \\ x+y-z=2 \end{cases} \Rightarrow y-z+y-z=2 \Rightarrow 2y-2z=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-z=1 \Rightarrow y=1+z \Rightarrow x=1+z-z=1 \Rightarrow r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases} \vec{v_r}=(0,1,1) \\ P_r(1,1,0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{r:\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}}$$

La ecuación continua de la recta donde se cortan los planos es $r:\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$.

b) Comprobamos si el punto P pertenece al primer plano

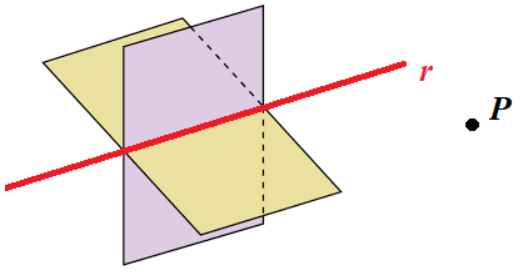
$$¿P(1,2,3) \in x-y+z=0? \Rightarrow ¿1-2+3=0?$$

No se cumple la igualdad y el punto P no está en el primer plano.

Comprobamos si el punto P pertenece al segundo plano

$$¿P(1,2,3) \in x+y-z=2? \Rightarrow ¿1+2-3=2?$$

No se cumple la igualdad y el punto P no está en el segundo plano.



La recta *s* paralela a *r* que pasa por P es una recta que no corta a ninguno de los dos planos.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)\\ P(1,2,3)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases}x=1\\ y=2+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=3+\lambda\end{cases}$$

c) Un punto R de la recta $r:\begin{cases}x=1\\ y=1+\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$ tiene coordenadas $R(1,1+\lambda,\lambda)$. Buscamos el valor de λ tal que $d(R,P)=d(R,Q)$.

$$\left.\begin{array}{l}R(1,1+\lambda,\lambda)\\ P(1,2,3)\\ Q(1,1,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{RP}=(1,2,3)-(1,1+\lambda,\lambda)=(0,1-\lambda,3-\lambda)\\ \overrightarrow{RQ}=(1,1,3)-(1,1+\lambda,\lambda)=(0,-\lambda,3-\lambda)\end{cases}$$

$$d(R,P)=d(R,Q)\Rightarrow\left|\overrightarrow{RP}\right|=\left|\overrightarrow{RQ}\right|\Rightarrow\sqrt{0^2+(1-\lambda)^2+(3-\lambda)^2}=\sqrt{0^2+(-\lambda)^2+(3-\lambda)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda+9+\lambda^2-6\lambda}=\sqrt{\lambda^2+9+\lambda^2-6\lambda}\Rightarrow\sqrt{2\lambda^2-8\lambda+10}=\sqrt{2\lambda^2-6\lambda+9}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\lambda^2-8\lambda+10=2\lambda^2-6\lambda+9\rightarrow-2\lambda=-1\rightarrow\boxed{\lambda=\frac{1}{2}}\\ 2\lambda^2-8\lambda+10=-(2\lambda^2-6\lambda+9)\rightarrow 2\lambda^2-8\lambda+10=-2\lambda^2+6\lambda-9\rightarrow\\ \rightarrow 4\lambda^2-14\lambda+19=0\rightarrow\lambda=\dfrac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4(4)(19)}}{8}=\\ =\dfrac{2\pm\sqrt{-108}}{8}=\textit{No existe}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow R\left(1,1+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Rightarrow R\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

El punto de la recta *r* que equidista de los puntos P y Q es $R\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.

6: Considere los planos $x+y+z=-3$ y $x+y-z=3$ y la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}$

a) **[0,75]** Compruebe que ambos planos se cortan y calcule el ángulo que forman.
b) **[0,75]** Estudie la posición relativa de la recta *r* con el plano $x+y-z=3$.
c) **[1]** Determine los puntos de la recta *r* que equidistan de ambos planos.

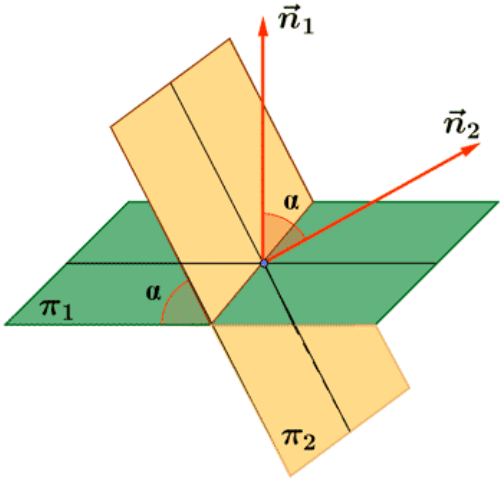
a) Para que los planos se corten en una recta los vectores normales de los planos no deben tener coordenadas proporcionales (planos no paralelos).

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=-3\Rightarrow \vec{n}=(1,1,1) \\ x+y-z=3\Rightarrow \vec{n'}=(1,1,-1) \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-1}$$

Los planos no son paralelos y se cortan en una recta.
Hallamos el ángulo que forman sus vectores normales (ángulo entre los planos).

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=-3\Rightarrow \vec{n}=(1,1,1) \\ x+y-z=3\Rightarrow \vec{n'}=(1,1,-1) \end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\vec{n},\vec{n'}\right)=\frac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{n'}\right|}=$$

$$=\frac{(1,1,1)(1,1,-1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1+1-1}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow\left(\vec{n},\vec{n'}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\simeq 70.53^{o}$$



El ángulo que forman los dos planos es de aproximadamente 70.53º.

b) Hallamos un punto y un vector de la recta.

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3}\Rightarrow r:\begin{cases}\vec{u_r}=(2,1,3)\\ P_r(1,-1,0)\end{cases}$$

Averiguamos si el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u_r}=(2,1,3) \\ x+y-z=3\Rightarrow \vec{n'}=(1,1,-1) \\ ¿\vec{u_r}\perp\vec{n'}?\rightarrow ¿\vec{u_r}\cdot\vec{n'}=0? \end{array}\right\}\Rightarrow ¿(2,1,3)(1,1,-1)=0?\Rightarrow ¿2+1-3=0?$$

Se cumple la igualdad, por lo que el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares y por tanto, la recta y el plano son paralelos o coincidentes.

Comprobamos si el punto $P_r(1,-1,0)$ de la recta pertenece al plano.

$$¿P_r(1,-1,0) \in x+y-z=3? \Rightarrow ¿1-1-0=3?$$

La igualdad es falsa y el punto no pertenece al plano por lo que recta y plano son paralelos.

c) Buscamos los puntos de la recta *r* que equidistan de ambos planos.

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3} \Rightarrow r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(2,1,3) \\ P_r(1,-1,0) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \Rightarrow A_r(1+2\lambda,-1+\lambda,3\lambda) \\ z=3\lambda \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x+y+z+3=0 \\ \pi': x+y-z-3=0 \\ A_r(1+2\lambda,-1+\lambda,3\lambda) \\ d(A_r,\pi)=d(A_r,\pi') \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|1+2\lambda-1+\lambda+3\lambda+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|1+2\lambda-1+\lambda-3\lambda-3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|6\lambda+3|}{\sqrt{3}}=\frac{|-3|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |6\lambda+3|=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6\lambda+3=3 \rightarrow 6\lambda=0 \rightarrow \lambda=0 \rightarrow \boxed{P_r(1,-1,0)} \\ 6\lambda+3=-3 \rightarrow 6\lambda=-6 \Rightarrow \lambda=-1 \rightarrow A_r(1-2,-1-1,-3) \rightarrow \boxed{A_r(-1,-2,-3)} \end{cases}$$

Los puntos de la recta *r* que equidistan de ambos planos son $P_r(1,-1,0)$ y $A_r(-1,-2,-3)$.

7: El 60% de los habitantes de una población consume pan integral, el 40% consume pan blanco y el 20% consume ambos tipos de pan.
a) **[0,5]** ¿Son independientes los sucesos "consumir pan integral" y "consumir pan blanco"?
b) **[0,5]** Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?
c) **[0,75]** Calcule el porcentaje de la población que no consume ninguno de los dos tipos de pan.
d) **[0,75]** Sabiendo que un habitante no consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

a) Realizamos una tabla de contingencia.

	Consumen pan blanco	No consumen pan blanco	
Consumen pan integral	20		60
No consumen pan integral			
	40		100

Completamos la tabla.

	Consumen pan blanco	No consumen pan blanco	
Consumen pan integral	20	**40**	60
No consumen pan integral	**20**	**20**	**40**
	40	**60**	100

Llamamos B al suceso "consumir pan blanco" e I a "consumir pan integral".
Comprobamos si se cumpla la igualdad $P(B\cap I)=P(B)P(I)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(B\cap I)=0.20 \\ P(B)P(I)=0.40\cdot 0.60=0.24 \end{array}\right\} \Rightarrow P(B\cap I)=0.20\neq 0.24=P(B)P(I)$$

La igualdad no se cumple y los sucesos "consumir pan integral" y "consumir pan blanco" no son independientes.

b) Nos piden calcular $P(B/I)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/I)=\frac{P(B\cap I)}{P(I)}=\frac{0.2}{0.6}=\boxed{\frac{1}{3}\simeq 0.333}$$

La probabilidad de que un habitante que consume pan integral consuma pan blanco es de $\frac{1}{3}\simeq 0.333$.

c) Observando la tabla del comienzo del ejercicio sabemos que un 20 % de los habitantes no consume ninguno de los dos tipos de pan.

d) Nos piden calcular $P(B/\bar{I})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/\bar{I})=\frac{P(B\cap\bar{I})}{P(\bar{I})}=\{\text{Datos de la tabla}\}=\frac{0.20}{0.40}=\boxed{\frac{1}{2}=0.5}$$

La probabilidad de que un habitante que no consume pan integral consuma pan blanco es de $\frac{1}{2}=0.5$.

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes.
Una fábrica de componentes de ordenador produce 2500 microprocesadores al día. Sabiendo que el porcentaje de microprocesadores defectuosos fabricados es del 2%, responda razonadamente a las siguientes cuestiones:
a) **[0,5]** ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de microprocesadores defectuosos fabricados al día?
b) **[0,5]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.
c) **[0,75]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea menor o igual que 57?
d) **[0,75]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea exactamente 50?

a) X = "El número de microprocesadores defectuosos de un grupo de 2500"
Esta variable es una binomial pues cada fabricación de un microprocesador es independiente de la anterior y la probabilidad de fabricar un microprocesador defectuoso es 0.02 en cada nueva fabricación. Los resultados siempre son "defectuoso" o "no defectuoso".
X = B(2500, 0.02).

b) La media es $np = 2500 \cdot 0.02 = 50$ microprocesadores defectuosos al día.
La desviación típica es $\sqrt{npq} = \sqrt{2500 \cdot 0.02 \cdot 0.98} = 7$ microprocesadores.

c) Nos piden calcular $P(X \leq 57)$.
Como el número de repeticiones es muy grande (2500) utilizamos la aproximación a la normal con media 50 y desviación típica 7.
Y = N(50, 7)

$$P(X \leq 57) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 57.5) = \left\{\begin{matrix} \textit{Tipificamos} \\ Z = \dfrac{Y - 50}{7} \end{matrix}\right\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{57.5 - 50}{7}\right) = P(Z \leq 1.07) = \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix}\right\} = \boxed{0.8577}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0

La probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea menor o igual que 57 es de 0.8577.

d) Nos piden calcular $P(X = 50)$.
Calculamos esta probabilidad usando la binomial.

$$P(X=50)=\binom{2500}{50}0.02^{50}\cdot 0.98^{2450}=\text{¡La calculadora no es capaz de hacer este cálculo!}=$$

=Utilizando la web Wolfram Alpha = $\boxed{0.0569}$

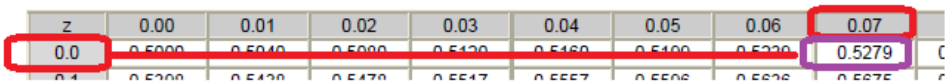
Calculamos esta probabilidad usando la aproximación a la normal.

$$P(X=50)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(49.5\le Y\le 50.5)=P(Y\le 50.5)-P(Y\le 49.5)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{Y-50}{7}\end{matrix}\right\}=P\left(Z\le\frac{50.5-50}{7}\right)-P\left(Z\le\frac{49.5-50}{7}\right)=$$

$$=P(Z\le 0.07)-P(Z\le -0.07)=P(Z\le 0.07)-P(Z\ge 0.07)=$$

$$=P(Z\le 0.07)-\left[1-P(Z\le 0.07)\right]=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=0.5279-1+0.5279=\boxed{0.0558}$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0								0.5279

La probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea exactamente 50 es de 0.0558.

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

306-MATEMÁTICAS II

EBAU2024 - **JUNIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: [2,5] En los años 2022 y 2023, Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10.000 puntos. El número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías.

En la siguiente tabla se detallan los puntos conseguidos por cada torneo ganado en cada una de las categorías:

Grand Slam = 2.000 puntos	Masters 1000 = 1.000 puntos	ATP 500 = 500 puntos

Con esta información, calcule el número de torneos de cada una de las tres categorías ganados por Carlitos en los años 2022 y 2023.

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz de Hadamard si está formada solo por 1's y -1's y cumple que $A \cdot A^t = 2I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) **[1]** Determine cuál de las siguientes matrices es de Hadamard:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \textbf{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz de Hadamard cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **[0,75]** Justifique que toda matriz A de Hadamard de orden 2 es regular (o invertible) y obtenga una expresión para su inversa en términos de A^t.

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1]** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}$

b) **[0,75]** $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}$

c) **[0,75]** $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

4: a) **[1,5]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 sen x dx$.

b) **[1]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=-\pi/2$ y $x=\pi/2$, y la gráfica de la función $f(x)=x^2 sen x$.

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

306-MATEMÁTICAS II

EBAU2024 - **JUNIO**

5: Considere el plano π de ecuación $x+y+z=-1$ y la recta *r* dada por $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{0}$.

a) **[1]** Compruebe que el plano π y la recta *r* son paralelos.
b) **[0,5]** Calcule la distancia de la recta *r* al plano π.
c) **[1]** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano π.

6: Considere las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases}x+2y=13\\z=2\end{cases} \text{ y } s:\begin{cases}y+2z=4\\-x+y=3\end{cases}.$$

a) **[1]** Compruebe que ambas rectas se cruzan en el espacio.
b) **[0.5]** Compruebe que el punto $P(0,3,0)$ no está en ninguna de las dos rectas.
c) **[1]** Calcule la ecuación del plano (en cualquiera de sus formas) que contiene al punto P y es paralelo a ambas rectas.

7: El juego de los dados de Efron tiene 4 dados diferentes. Todos ellos son dados perfectos de 6 caras equiprobables, pero la numeración de sus 6 caras es diferente en cada uno, según se detalla en la siguiente tabla:

Dado A	0	0	4	4	4	4
Dado B	3	3	3	3	3	3
Dado C	2	2	2	2	6	6
Dado D	1	1	1	5	5	5

Ana elige el dado A, Bea elige el dado B, Ceci elige el dado C y Delia elige el dado D. El juego consiste en que cada jugador lanza su dado, gana aquel que saque la mayor puntuación y pierde aquel que saque la menor puntuación. Pueden jugar uno contra uno o todos contra todos. Calcule:

a) **[0,5]** Si Ana juega contra Bea, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ana?
b) **[0,75]** Si Ana juega contra Bea 8 veces, ¿cuál es la probabilidad de que Bea gane al menos 3 veces?
c) **[0,5]** Si Ana juega contra Ceci, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ceci?
d) **[0,75]** Si juegan todos contra todos, ¿cuál es la probabilidad de que Ana ni gane ni pierda?

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes. El cociente intelectual (CI) de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 6,68% de estos estudiantes tiene un CI mayor que 115 y que el 59,87% tiene un CI menor que 102,5.

a) **[0,5]** ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes con CI entre 102,5 y 115?
b) **[1]** Si se eligen al azar 6 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan un CI menor que 115?
c) **[1]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

SOLUCIONES

1: [2,5] En los años 2022 y 2023, Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10.000 puntos. El número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías.

En la siguiente tabla se detallan los puntos conseguidos por cada torneo ganado en cada una de las categorías:

Grand Slam = 2.000 puntos	Masters 1000 = 1.000 puntos	ATP 500 = 500 puntos

Con esta información, calcule el número de torneos de cada una de las tres categorías ganados por Carlitos en los años 2022 y 2023.

Llamamos "x" al número de Grand Slam ganados por Carlitos, "y" al de Masters 1000 y "z" al de ATP 500.

Grand Slam = 2.000 puntos	Masters 1000 = 1.000 puntos	ATP 500 = 500 puntos

"Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500" → $x+y+z=10$

"Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10.000 puntos" → $2000x+1000y+500z=10000$

"El número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías" → $z=1+\frac{x+y}{2}$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ 2000x+1000y+500z=10000 \\ z=1+\frac{x+y}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ 4x+2y+z=20 \\ 2z=2+x+y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=10-y-z \\ 4x+2y+z=20 \\ 2z=2+x+y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4(10-y-z)+2y+z=20 \\ 2z=2+10-y-z+y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 40-4y-4z+2y+z=20 \\ 3z=12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2y-3z=-20 \\ \boxed{z=4} \end{array}\right\} \Rightarrow -2y-12=-20 \Rightarrow 8=2y \Rightarrow \boxed{y=\frac{8}{2}=4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=10-4-4=2}$$

Carlitos Alcaraz durante los años 2022 y 2023 ganó 2 Grand Slams, 3 Masters 1000 y 4 ATP 500.

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz de Hadamard si está formada solo por 1's y -1's y cumple que $A\cdot A^t = 2I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) **[1]** Determine cuál de las siguientes matrices es de Hadamard:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz de Hadamard cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **[0,75]** Justifique que toda matriz A de Hadamard de orden 2 es regular (o invertible) y obtenga una expresión para su inversa en términos de A^t.

a) Las dos matrices cumplen la primera condición, comprobamos si alguna de las dos matrices cumple la segunda: $A\cdot A^t = 2I$.

$$A\cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & -1+1 \\ -1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$$

$$A\cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & -1-1 \\ -1-1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$$

La primera matriz si es una matriz de Hadamard y la segunda no lo es.

b) Si A es una matriz de Hadamard tenemos que $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix}$ y además $A\cdot A^t = 2I$.

$$A\cdot A^t = 2I \Rightarrow \left|A\cdot A^t\right| = \left|2I\right| \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Propiedad} \\ |AB| = |A|\cdot|B|\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}\text{Propiedad} \\ \text{Si A es de orden n} \\ |2A| = 2^n|A|\end{matrix}\right\} \Rightarrow |A|\cdot\left|A^t\right| = 2^2|I| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Propiedad} \\ \left|A^t\right| = |A|\end{matrix}\right\} \left\{|I| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\right\} \Rightarrow |A|\cdot|A| = 4 \Rightarrow |A|^2 = 4 \Rightarrow \boxed{|A| = \sqrt{4} = \pm 2}$$

El determinante de una matriz de Hadamard vale 2 o –2.

c) Acabamos de ver que el determinante de una matriz de Hadamard es $|A| = \pm 2$, como este determinante es no nulo existe la inversa de dicha matriz.
Como una matriz de Hadamard cumple la igualdad $A\cdot A^t = 2I$ tenemos que:

$$A\cdot A^t = 2I \Rightarrow \frac{1}{2}A\cdot A^t = I \Rightarrow A\cdot\left(\frac{1}{2}A^t\right) = I \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}A^t}$$

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1]** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}$

b) **[0,75]** $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}$

c) **[0,75]** $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}=\frac{\cos(0)-\cos(0)}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-3sen(3x)+2sen(2x)}{2x}=\frac{-3sen(0)+2sen(0)}{2\cdot 0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-9\cos(3x)+4\cos(2x)}{2}=\frac{-9\cos(0)+4\cos(0)}{2}=\frac{-5}{2}=\boxed{-2.5}$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}=\infty-\infty=\text{Indeterminación}(Conjugado)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}\right)\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}\right)}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+9}\right)^2-\left(\sqrt{x-9}\right)^2}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+9-(x-9)}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{18}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=\frac{18}{+\infty+\infty}=\boxed{0}$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}=Indet\,ermin\,ación(L´Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\sqrt{x}\right)^2}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2}{+\infty}=\boxed{0}$$

4: a) **[1,5]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 senxdx$.

b) **[1]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=-\pi/2$ y $x=\pi/2$, y la gráfica de la función $f(x)=x^2 senx$.

a) Usamos integración por partes.

$$\int x^2 senxdx = \left.\begin{cases} u=x^2 \to du=2xdx \\ dv=senxdx \to v=\int senxdx=-\cos x \end{cases}\right\} = x^2(-\cos x)-\int -2x\cos xdx =$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos xdx = \left.\begin{cases} u=x \to du=dx \\ dv=\cos xdx \to v=\int \cos xdx=senx \end{cases}\right\} =$$

$$= -x^2\cos x + 2\left(xsenx-\int senxdx\right) = -x^2\cos x + 2\left(xsenx-(-\cos x)\right) =$$

$$= -x^2\cos x + 2\left(xsenx+\cos x\right) = -x^2\cos x + 2xsenx + 2\cos x =$$

$$= \boxed{\left(2-x^2\right)\cos x + 2xsenx + C}$$

b) Averiguamos si la función corta el eje de abscisas entre $x=-\pi/2$ y $x=\pi/2$.

$$\left.\begin{matrix} f(x)=x^2 senx \\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 senx=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ senx=0 \to x=0; x=\pi;... \end{cases}$$

Como la función corta el eje de abscisas en $x = 0$ el área del recinto lo calculamos como la suma del valor absoluto de dos integrales definidas.

Zona 1 entre $x=-\pi/2$ y $x = 0$.

$$\int_{-\pi/2}^{0} x^2 senxdx = \left[\left(2-x^2\right)\cos x + 2xsenx\right]_{-\pi/2}^{0} =$$

$$= \left[\left(2-0^2\right)\cos 0 + 2\cdot 0\cdot sen0\right] - \left[\left(2-\left(\frac{-\pi}{2}\right)^2\right)\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + 2\left(\frac{-\pi}{2}\right)sen\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 2-\left[\left(2-\frac{\pi^2}{4}\right)0-\pi(-1)\right] = 2-\pi$$

Zona 2 entre $x = 0$ y $x=\pi/2$.

$$\int_0^{\pi/2} x^2 sen x dx = \left[\left(2-x^2\right)\cos x + 2x sen x\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \left[\left(2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[\left(2-0^2\right)\cos 0 + 2\cdot 0\cdot sen 0\right] - =$$

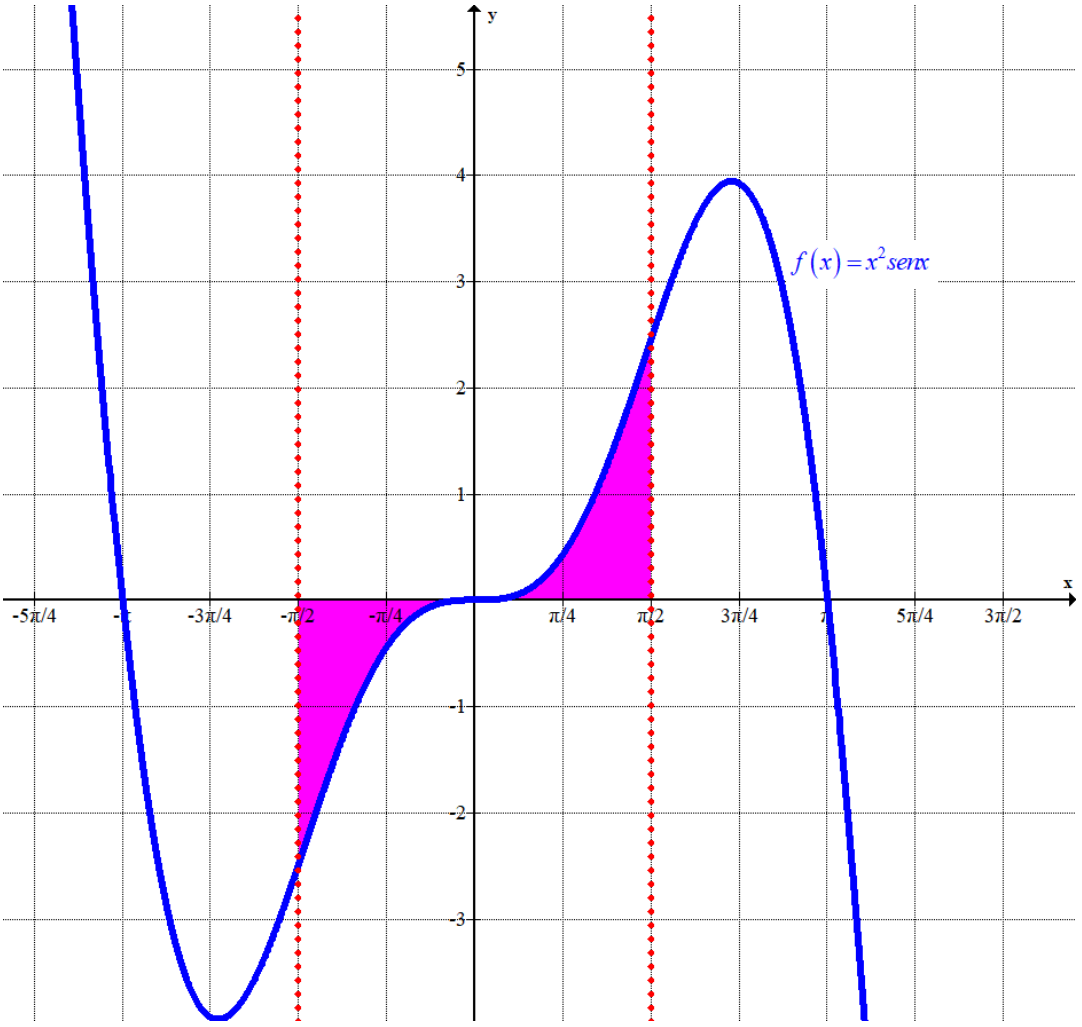
$$= \left[\left(2-\frac{\pi^2}{4}\right)0 + \pi(1)\right] - 2 = \pi - 2$$

El área del recinto es la suma del valor absoluto del resultado obtenido en las dos integrales definidas.

$$\text{Área zona 1 + Área zona 2} = |2-\pi| + (\pi - 2) = \pi - 2 + \pi - 2 = \boxed{2\pi - 4 \simeq 2.28\ u^2}$$

El área del recinto tiene un valor aproximado de 2.28 unidades cuadradas.

No pide dibujar el recinto, pero lo hacemos para comprobar que el valor aproximado de 2 unidades cuadradas es correcto.



5: Considere el plano π de ecuación $x+y+z=-1$ y la recta *r* dada por $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{0}$ ..

a) **[1]** Compruebe que el plano π y la recta *r* son paralelos.
b) **[0,5]** Calcule la distancia de la recta *r* al plano π.
c) **[1]** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano π.

a) Hallamos un vector director de la recta, un vector normal del plano y comprobamos si son perpendiculares, es decir, si su producto escalar es nulo.

$$\left.\begin{array}{l} r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{0}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}P_r(0,1,0)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,-1,0)\end{array}\right.\\ \pi: x+y+z=-1\Rightarrow \vec{n}=(1,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{u_r}=(1,1,1)(1,-1,0)=1-1=0$$

El producto escalar es nulo y la recta es paralela al plano o está contenida en él.
Comprobamos si el punto $P_r(0,1,0)$ de la recta está en el plano.

$$\left.\begin{array}{l}¿P_r(0,1,0)\in\pi\,?\\ \pi: x+y+z=-1\end{array}\right\}\Rightarrow ¿0+1+0=-1?\ \text{¡Falso!}$$

Por lo que la recta no está contenida en el plano y es paralela a él.

b) Como la recta es paralela la distancia de la recta al plano es la distancia de cualquiera de sus puntos al plano, en particular es la distancia del punto $P_r(0,1,0)$ al plano.

$$\left.\begin{array}{l}P_r(0,1,0)\\ \pi: x+y+z+1=0\end{array}\right\}\Rightarrow d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|0+1+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}\ unidades}$$

La distancia de la recta *r* al plano es de $\frac{2}{\sqrt{3}}$ unidades.

c) Si el plano π´ contiene a la recta *r* entonces el vector director de la recta es un vector director del plano π´ que queremos hallar. Como es perpendicular al plano π el vector normal del plano es otro vector director del plano π´.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{u_r}=(1,-1,0)\\ \vec{v}=\vec{n}=(1,1,1)\\ P_r(0,1,0)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow \pi':\begin{vmatrix}x & y-1 & z\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -x+0+z+z-y+1+0=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-y+2z+1=0\Rightarrow \boxed{\pi': x+y-2z=1}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi': x+y-2z=1$.

6: Considere las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases}x+2y=13\\z=2\end{cases} \text{ y } s:\begin{cases}y+2z=4\\-x+y=3\end{cases}.$$

a) **[1]** Compruebe que ambas rectas se cruzan en el espacio.

b) **[0.5]** Compruebe que el punto $P(0,3,0)$ no está en ninguna de las dos rectas.

c) **[1]** Calcule la ecuación del plano (en cualquiera de sus formas) que contiene al punto P y es paralelo a ambas rectas.

a) Hallamos un punto y un vector de cada recta.

$$r:\begin{cases}x+2y=13\\z=2\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=13-2\lambda\\y=\lambda\\z=2\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow r:\begin{cases}P_r(13,0,2)\\\overrightarrow{v_r}=(-2,1,0)\end{cases}$$

$$s:\begin{cases}y+2z=4\\-x+y=3\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}2z=4-y\\-x=3-y\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}z=\frac{4}{2}-\frac{y}{2}\\x=-3+y\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}z=2-\frac{1}{2}y\\x=-3+y\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow s:\begin{cases}x=-3+\lambda\\y=\lambda\\z=2-\frac{1}{2}\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow s:\begin{cases}Q_s(-3,0,2)\\\overrightarrow{v_s}=(1,1,-0.5)\rightarrow\overrightarrow{u_s}=(2,2,-1)\end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{v_r}=(-2,1,0)\\\overrightarrow{u_s}=(2,2,-1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{-2}{2}\neq\frac{1}{2}\neq\frac{0}{-1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el producto mixto $\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ para decidir si se cortan o cruzan en función del resultado nulo o no.

$$\left.\begin{matrix}P_r(13,0,2)\\Q_s(-3,0,2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{P_rQ_s}=(-3,0,2)-(13,0,2)=(-16,0,0)$$

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{v_r}=(-2,1,0)\\\overrightarrow{u_s}=(2,2,-1)\\\overrightarrow{P_rQ_s}=(-16,0,0)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix}-2&1&0\\2&2&-1\\-16&0&0\end{vmatrix}=0+16+0-0-0-0=16\neq0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan en el espacio.

b) ¿El punto $P(0,3,0)$ está en la recta *r*?

$$\left.\begin{array}{l} ¿P(0,3,0)\in r\,? \\ r:\begin{cases} x+2y=13 \\ z=2 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\begin{cases} 0+2\cdot 3=13 \\ 0=2 \end{cases}? \quad \text{¡No es cierto!}$$

El punto P no cumple las ecuaciones de la recta *r*. No pertenece a la recta.

¿El punto $P(0,3,0)$ está en la recta *s*?

$$\left.\begin{array}{l} ¿P(0,3,0)\in s\,? \\ s:\begin{cases} y+2z=4 \\ -x+y=3 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\begin{cases} 3+2\cdot 0=4 \ \text{¡}No\text{!} \\ -0+3=3 \ \text{¡}Si\text{!} \end{cases}? \quad \text{¡No es cierto!}$$

El punto P no cumple las ecuaciones de la recta *s*. No pertenece a la recta.

c) El plano π que contiene al punto P y es paralelo a las dos rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{v_r}=(-2,1,0) \\ \vec{v}=\overrightarrow{u_s}=(2,2,-1) \\ P(0,3,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y-3 & z \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -x+0-4z-2z-2(y-3)+0=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-6z-2y+6=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+2y+6z-6=0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: x+2y+6z-6=0$.

7: El juego de los dados de Efron tiene 4 dados diferentes. Todos ellos son dados perfectos de 6 caras equiprobables, pero la numeración de sus 6 caras es diferente en cada uno, según se detalla en la siguiente tabla:

Dado A	0	0	4	4	4	4
Dado B	3	3	3	3	3	3
Dado C	2	2	2	2	6	6
Dado D	1	1	1	5	5	5

Ana elige el dado A, Bea elige el dado B, Ceci elige el dado C y Delia elige el dado D. El juego consiste en que cada jugador lanza su dado, gana aquel que saque la mayor puntuación y pierde aquel que saque la menor puntuación. Pueden jugar uno contra uno o todos contra todos. Calcule:

a) **[0,5]** Si Ana juega contra Bea, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ana?

b) **[0,75]** Si Ana juega contra Bea 8 veces, ¿cuál es la probabilidad de que Bea gane al menos 3 veces?

c) **[0,5]** Si Ana juega contra Ceci, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ceci?

d) **[0,75]** Si juegan todos contra todos, ¿cuál es la probabilidad de que Ana ni gane ni pierda?

a) Para que Ana (dado A) gane a Bea (dado B) debe sacar un 4 pues Bea solo puede sacar 3. La probabilidad de que gane Ana es la probabilidad de sacar 4. Hay cuatro caras con 4 y dos con 0.

$$P(\text{Gane Ana a Bea}) = P(\text{Ana saca } 4) = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3} \simeq 0.667}$$

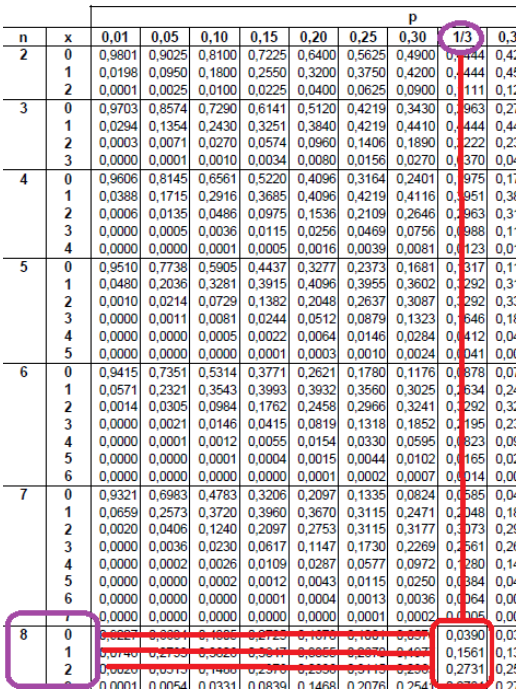
b) Para que Bea gane al menos 3 veces debe ganar 3, 4, 5, 6, 7 u 8 veces.
Sea X = Número de veces que gana Bea.
Es una variable binomial con los siguientes parámetros:
n = número de repeticiones = 8 y p = probabilidad de gane Bea = 1 – 2/3 = 1/3.
X = B(8, 1/3)
Nos piden calcular $P(X \geq 3)$.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) =$$

$$= 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right] =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla binomial}\end{matrix}\right\} =$$

$$= 1 - [0.0390 + 0.1561 + 0.2731] = \boxed{0.5318}$$



		p								
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,3
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4444	0,4
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1111	0,1
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2222	0,2
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0370	0,0
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951	0,3
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2963	0,3
	3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0988	0,1
	4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0123	0,0
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3
	3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2195	0,2
	4	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0823	0,0
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0165	0,0
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0014	0,0
7	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0
	1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1
	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,3073	0,2
	3	0,0000	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2561	0,2
	4	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1280	0,1
	5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0384	0,0
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0064	0,0
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0
8	0	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0
	1	0,0746	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1561	0,1
	2	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2731	0,2
		0,0001	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2731	0,2

La probabilidad de que Bea gane al menos 3 veces es 0.5318.

c) Para que Ceci (dado C) gane a Ana (dado A) puede ocurrir de dos formas: Ceci saca un 2 y Ana 0 o bien Ceci saca 6 y da igual lo que saque Ana. La probabilidad de que Ceci saque 2 es 4/6 y de que saque 6 es 2/6. La probabilidad de que Ana saque 0 es 2/6.

$$P(\text{Ceci gana a Ana}) = P(\text{Ceci saca 2})\,P(\text{Ana saca 0}) + P(\text{Ceci saca 6}) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \boxed{\frac{5}{9} \simeq 0.56}$$

d) Si Ana saca 0 pierde pues es la menor puntuación que hay en los cuatro dados, si Ana saca 4 para que no gane debe sacar Ceci (dado C) un 6 o Delia (dado D) un 5 y no puede perder pues Bea va a sacar un 3 que es menor.

Para que Ana ni gane ni pierda debe sacar un 4 y Ceci debe sacar un 6 o bien Ana saca un 4 y Delia saca un 5.

Teniendo en cuenta los lanzamientos de las tres chicas el suceso del que queremos calcular la probabilidad se descompone en:

(A4, C6, D1), (A4, C6, D5), (A4, C2, D5)

$$P(\text{Ana ni gana ni pierde}) = P(Ana4, Ceci6, Delia1) + P(Ana4, Ceci6, Delia5) +$$

$$+P(Ana4, Ceci2, Delia5) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{4}{9} \simeq 0.44}$$

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes. El cociente intelectual (CI) de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 6,68% de estos estudiantes tiene un CI mayor que 115 y que el 59,87% tiene un CI menor que 102,5.

a) **[0,5]** ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes con CI entre 102,5 y 115?

b) **[1]** Si se eligen al azar 6 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan un CI menor que 115?

c) **[1]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

a) X = "El cociente intelectual (CI) de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia"
X = N(μ, σ)
Nos dicen que $P(X>115)=0.0668$ y $P(X<102.5)=0.5987$.
Debemos calcular $P(102.5<X<115)$.

$$P(102.5<X<115)=P(X<115)-P(X<102.5)=$$

$$=1-P(X>115)-P(X<102.5)=1-0.0668-0.5987=\boxed{0.3345}$$

El porcentaje de estudiantes con CI entre 102,5 y 115 es de 33.45 %.

b) Para que al menos 5 de los 6 estudiantes tengan un CI menor que 115 deben ser 5 o 6 estudiantes (todos) los que tengan ese CI.
Llamamos p = $P(X<115)=1-P(X>115)=1-0.0668=0.9332$.
La probabilidad de que 5 de ellos tengan un CI menor que 115 = $6\cdot 0.0668\cdot 0.9332^5$.
La probabilidad de que 6 de ellos (todos) tengan un CI menor que 115 = 0.9332^6
La probabilidad pedida es la suma de estas dos probabilidades.

$$6\cdot 0.0668\cdot 0.9332^5+0.9332^6=0.9441$$

La probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan un CI menor que 115 es 0.9441.

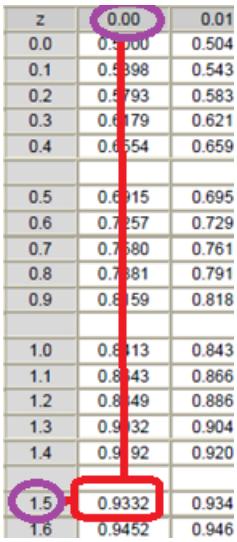
c) Nos dicen que $P(X>115)=0.0668$ y $P(X<102.5)=0.5987$. X = N(μ, σ)

$$P(X>115)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\end{matrix}\right\}=P\left(Z>\frac{115-\mu}{\sigma}\right)=$$

$$=1-P\left(Z\le\frac{115-\mu}{\sigma}\right)=0.0668\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{115-\mu}{\sigma}\right)=1-0.0668=0.9332\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{115-\mu}{\sigma}=1.5\Rightarrow\boxed{115-\mu=1.5\sigma}$$



z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.504
0.1	0.5398	0.543
0.2	0.5793	0.583
0.3	0.6179	0.621
0.4	0.6554	0.659
0.5	0.6915	0.695
0.6	0.7257	0.729
0.7	0.7580	0.761
0.8	0.7881	0.791
0.9	0.8159	0.818
1.0	0.8413	0.843
1.1	0.8643	0.866
1.2	0.8849	0.886
1.3	0.9032	0.904
1.4	0.9192	0.920
1.5	0.9332	0.934
1.6	0.9452	0.946

$$P(X<102.5)=0.5987 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} Tipificamos \\ Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z<\frac{102.5-\mu}{\sigma}\right)=0.5987 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{102.5-\mu}{\sigma}=0.25 \Rightarrow \boxed{102.5-\mu=0.25\sigma}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0

Juntamos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix} 115-\mu=1.5\sigma \\ 102.5-\mu=0.25\sigma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 115-1.5\sigma=\mu \\ 102.5-\mu=0.25\sigma \end{matrix}\right\} \Rightarrow 102.5-115+1.5\sigma=0.25\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.25\sigma=12.5 \Rightarrow \boxed{\sigma=\frac{12.5}{1.25}=10} \Rightarrow \boxed{\mu=115-1.5\cdot 10=100}$$

La media de la distribución es 100 y la desviación típica es 10.

UNIVERSIDAD DE MURCIA · Región de Murcia · Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II

EBAU2023 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Se quiere calcular un número de tres cifras con los siguientes datos:

i) La suma de sus tres cifras es 9.

ii) Si permutamos la cifra de las centenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial menos 99.

iii) Si permutamos la cifra de las decenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial más 36.

a) **[1,5 p.]** Denotando por *x* la cifra de las centenas, por *y* la de las decenas y por *z* la de las unidades, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente la información dada en i), ii) y iii).

b) **[1 p.]** Calcule el número en cuestión.

2: Se dice que una matriz cuadrada A es 2-nilpotente si cumple que $A^2 = 0$.

a) **[0,75 p.]** Justifique razonadamente que una matriz 2-nilpotente nunca puede ser regular (o invertible)

b) **[0,75 p.]** Compruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

c) **[1 p.]** Demuestre para qué valores de *a* y *b* la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

3: Considere la función $f(x) = xe^{-x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) **[0,75 p.]** Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) **[0,75 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función *f(x)* y sus extremos relativos (máximos y/o mínimos).

c) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.

4: Considere la función $f(x) = \dfrac{senx}{1+\cos^2 x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, donde $\cos^2 x = (\cos x)^2$.

a) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.

b) **[0,75 p.]** Calcule la integral definida $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$.

c) **[0,75 p.]** Determine la primitiva de *f(x)* que pasa por el punto $(\pi, 1)$

5: Los puntos $A=(6,-4,4)$ y $B=(12,-1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C es la proyección ortogonal del vértice A sobre la recta

$$r:\begin{cases} x-2y=5 \\ x+2z=5 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice C.

b) **[0,5 p.]** Determine si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice A.

c) **[0,5 p.]** Calcule el área del triángulo ABC.

6: Considere el plano π de ecuación $\pi: 2x+ay-2z=-4$ y la recta *r* dada por

$$r: \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{-2}.$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta *r* en función del parámetro *a*.

Se sabe que cuando *a = 1* la recta *r* corta al plano π. Para ese valor de *a*:

b) **[0,75 p.]** Calcule el punto de corte de la recta *r* y el plano π.

c) **[0,5 p.]** Calcule el ángulo que forman.

7: En un cine hay 3 salas y un total de 250 espectadores repartidos de la siguiente manera: 100 espectadores en la sala A, 50 en la sala B y 100 en la sala C. Se sabe que la película de la sala A gusta al 80 % de los espectadores, la de la sala B al 20 % de los espectadores y la de la sala C al 60 % de los espectadores. A la salida de las tres películas se elige un espectador al azar. Calcule:

a) **[0,25 p.]** La probabilidad de que el espectador haya estado en la sala C.
b) **[0,5 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película, sabiendo que ha estado en la sala C.
c) **[0,5 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película y haya estado en la sala C.
d) **[0,5 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película.
e) **[0,5 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película o haya estado en la sala C.

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades y 2 decimales para los porcentajes. El peso de los recién nacidos en la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 67 % de los recién nacidos pesan menos de 3,464 kg y que el 1,5 % de los recién nacidos pesan más de 4,502 kg.

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es el porcentaje de recién nacidos cuyo peso está comprendido entre 3,464 y 4,502 kg?
b) **[1 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.
c) **[1 p.]** Calcule el porcentaje de recién nacidos que pesan menos de 2,33 kg.

SOLUCIONES

1: Se quiere calcular un número de tres cifras con los siguientes datos:
i) La suma de sus tres cifras es 9.
ii) Si permutamos la cifra de las centenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial menos 99.
iii) Si permutamos la cifra de las decenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial más 36.

a) **[1,5 p.]** Denotando por *x* la cifra de las centenas, por *y* la de las decenas y por *z* la de las unidades, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente la información dada en i), ii) y iii).
b) **[1 p.]** Calcule el número en cuestión.

a) El número es $xyz = 100x + 10y + z$.

"La suma de sus tres cifras es 9" → $x + y + z = 9$
"Si permutamos la cifra de las centenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial menos 99" → $zyx = xyz - 99 \Rightarrow 100z + 10y + x = 100x + 10y + z - 99$.
"Si permutamos la cifra de las decenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial más 36" → $xzy = xyz + 36 \Rightarrow 100x + 10z + y = 100x + 10y + z + 36$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=9 \\ 100z+10y+x=100x+10y+z-99 \\ 100x+10z+y=100x+10y+z+36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=9 \\ 99z-99x=-99 \\ -9y+9z=36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=9 \\ z-x=-1 \\ -y+z=4 \end{array}\right\}$$

b) Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=9 \\ z-x=-1 \\ -y+z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=9 \\ z=x-1 \\ -y+z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+x-1=9 \\ -y+x-1=4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=10 \\ -y+x=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=10 \\ x=5+y \end{array}\right\} \Rightarrow 2(5+y)+y=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10+2y+y=10 \Rightarrow 3y=0 \Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow \boxed{x=5+0=5} \Rightarrow \boxed{z=5-1=4}$$

El número es el 504.

2: Se dice que una matriz cuadrada A es 2-nilpotente si cumple que $A^2 = 0$.

a) **[0,75 p.]** Justifique razonadamente que una matriz 2-nilpotente nunca puede ser regular (o invertible)

b) **[0,75 p.]** Compruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

c) **[1 p.]** Demuestre para qué valores de *a* y *b* la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

a) Para que sea invertible su determinante debe ser no nulo.

$$|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2$$

$$Como\ A^2 = 0 \Rightarrow |A^2| = |0| = 0 \Rightarrow |A|^2 = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

La matriz A no es invertible pues su determinante es nulo.

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-9 & -27+27 \\ 3-3 & -9+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

La matriz A es 2-nilpotente.

c) Planteamos que $A^2 = 0$.

$$A^2 = 0 \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36+4a & 6a+ab \\ 24+4b & 4a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 36+4a=0 \\ 6a+ab=0 \\ 24+4b=0 \\ 4a+b^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a=-36 \rightarrow \boxed{a=-9} \\ 6a+ab=0 \\ 24+4b=0 \rightarrow 4b=-24 \rightarrow \boxed{b=-6} \\ 4a+b^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6(-9)+(-9)(-6)=0 \\ 4(-9)+(-6)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -54+54=0 \\ -36+36=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a=-9 \\ b=-6 \end{cases}}$$

Los valores buscados son $a = -9$ y $b = -6$.

3: Considere la función $f(x) = xe^{-x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) **[0,75 p.]** Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) **[0,75 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función *f(x)* y sus extremos relativos (máximos y/o mínimos).

c) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.

a)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \textit{Indeterminación}(\textit{L´Hôpital}) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

b) Usamos la derivada.

$$f´(x) = e^{-x} + x(-1)e^{-x} = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$$f´(x) = 0 \Rightarrow (1-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - x = 0 \to x = 1 \\ e^{-x} = 0 \to \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de *x = 1*.

En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f´(0) = (1-0)e^{-0} = 1 > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$.

En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f´(2) = (1-2)e^{-2} = \frac{-1}{e^2} < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en *x = 1*.

c)

$$\int f(x)\,dx = \int xe^{-x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \to du = dx \\ dv = e^{-x}dx \to v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{array} \right\} =$$

$$= x(-e^{-x}) - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = \boxed{-xe^{-x} - e^{-x} + K}$$

4: Considere la función $f(x)=\dfrac{senx}{1+\cos^2 x}$, definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$, donde $\cos^2 x=(\cos x)^2$.

a) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.

b) **[0,75 p.]** Calcule la integral definida $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$.

c) **[0,75 p.]** Determine la primitiva de *f(x)* que pasa por el punto $(\pi,1)$

a)

$$\int f(x)\,dx=\int \frac{senx}{1+\cos^2 x}\,dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \cos x=t\rightarrow -senx\,dx=dt\\ dx=\dfrac{1}{-senx}\,dt\end{array}\right\}=\int \frac{\cancel{senx}}{1+t^2}\frac{1}{-\cancel{senx}}\,dt=$$

$$=-\int \frac{1}{1+t^2}\,dt=-arctgt=\boxed{-arctg(\cos x)+K}$$

b)

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx=\left[-arctg(\cos x)\right]_0^{\pi/2}=\left[-arctg\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left[-arctg(\cos 0)\right]=$$

$$=-arctg(0)+arctg(1)=0+\frac{\pi}{4}=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

c) Sabemos que la primitiva $F(x)=-arctg(\cos x)+K$.

Para hallar el valor de *K* hacemos que *F(π) = 1*.

$$\left.\begin{array}{l}F(x)=-arctg(\cos x)+K\\ F(\pi)=1\end{array}\right\}\Rightarrow 1=-arctg(\cos\pi)+K\Rightarrow 1=-arctg(-1)+K\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+K\Rightarrow K=1-\frac{\pi}{4}\Rightarrow\Rightarrow\boxed{F(x)=-arctg(\cos x)+1-\frac{\pi}{4}}$$

5: Los puntos $A=(6,-4,4)$ y $B=(12,-1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C es la proyección ortogonal del vértice A sobre la recta

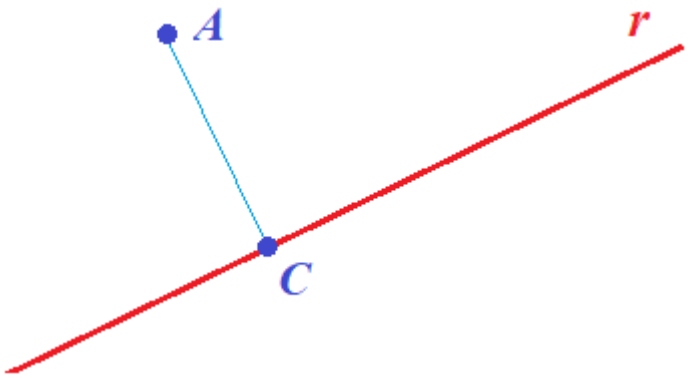
$$r:\begin{cases}x-2y=5\\x+2z=5\end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice C.

b) **[0,5 p.]** Determine si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice A.

c) **[0,5 p.]** Calcule el área del triángulo ABC.

a) Hallamos la proyección ortogonal de A sobre la recta *r*.



Para ello hallamos el plano perpendicular a la recta que pasa por A. Dicho plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$r:\begin{cases}x-2y=5\\x+2z=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2y+5\\x=5-2z\end{cases}\Rightarrow 5-2z=5+2y\Rightarrow -2z=2y\Rightarrow y=-z\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases}x=5-2\lambda\\y=-\lambda\\z=\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_r(5,0,0)\\\vec{u_r}=(-2,-1,1)\end{cases}$$

$$\pi:\begin{cases}A(6,-4,4)\in\pi\\\vec{n}=\vec{u_r}=(-2,-1,1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(6,-4,4)\in\pi\\\pi:-2x-y+z+D=0\end{cases}\Rightarrow -12+4+4+D=0\Rightarrow$$

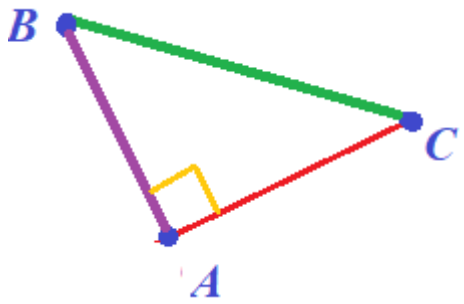
$$\Rightarrow D=4\Rightarrow\pi:-2x-y+z+4=0$$

El punto C es el punto de corte de la recta *r* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:-2x-y+z+4=0\\r:\begin{cases}x=5-2\lambda\\y=-\lambda\\z=\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow -2(5-2\lambda)-(-\lambda)+\lambda+4=0\Rightarrow -10+4\lambda+\lambda+\lambda+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 5-2 = 3 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow C(3,-1,1)$$

b) Si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice A significa que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son ortogonales, es decir, su producto escalar es nulo.



$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (12,-1,1)-(6,-4,4) = (6,3,-3) \\ \overrightarrow{AC} = (3,-1,1)-(6,-4,4) = (-3,3,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (6,3,-3)(-3,3,-3) = -18+9+9 = 0$$

Se cumple y por tanto en el vértice A tenemos un ángulo de 90º.

c) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del vector que resulta del producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (6,3,-3) \\ \overrightarrow{AC} = (-3,3,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 27j + 27k = (0,27,27)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{0^2+27^2+27^2}}{2} = \boxed{\frac{27\sqrt{2}}{2} \simeq 19.09\ u^2}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Como ABC es un triángulo rectángulo el área es la base ($\left|\overrightarrow{AB}\right|$) por la altura ($\left|\overrightarrow{AC}\right|$) dividido entre 2.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (6,3,-3) \\ \overrightarrow{AC} = (-3,3,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Área} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{6^2+3^2+(-3)^2}\sqrt{(-3)^2+3^2+(-3)^2}}{2} = \frac{27\sqrt{2}}{2}$$

6: Considere el plano π de ecuación $\pi: 2x+ay-2z=-4$ y la recta *r* dada por

$$r: \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{-2}.$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta *r* en función del parámetro *a*.

Se sabe que cuando *a = 1* la recta *r* corta al plano π. Para ese valor de *a*:

b) **[0,75 p.]** Calcule el punto de corte de la recta *r* y el plano π.
c) **[0,5 p.]** Calcule el ángulo que forman.

a) Determinamos el vector normal del plano y el director de la recta y obtenemos el valor de su producto escalar.

$$\pi: 2x+ay-2z=-4 \Rightarrow \vec{n}=(2,a,-2)$$

$$r: \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{-2} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(-1,-1,5) \\ \overrightarrow{u_r}=(2,1,-2) \end{cases}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{u_r}=(2,a,-2)(2,1,-2)=4+a+4=8+a$$

Este producto puede ser nulo o no, dando lugar a dos situaciones distintas que analizamos por separado.

- Si $a=-8$ el producto escalar es nulo y por tanto los vectores son ortogonales. En este caso recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.
  Comprobamos si el punto P_r de la recta está en el plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 2x-8y-2z=-4 \\ ¿P_r(-1,-1,5)\in\pi? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿-2+8-10=-4? \rightarrow ¡Cierto!$$

  El punto de la recta está en el plano y por tanto la recta está contenida en el plano.

- Si $a\neq -8$ el producto escalar no es nulo y los vectores no son ortogonales, por lo que recta y plano son secantes, coinciden en un punto.

b) Para *a = 1* la recta *r* corta al plano π en un punto A. Determinamos sus coordenadas.

$$r: \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{-2} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(-1,-1,5) \\ \overrightarrow{u_r}=(2,1,-2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=5-2\lambda \end{cases}$$

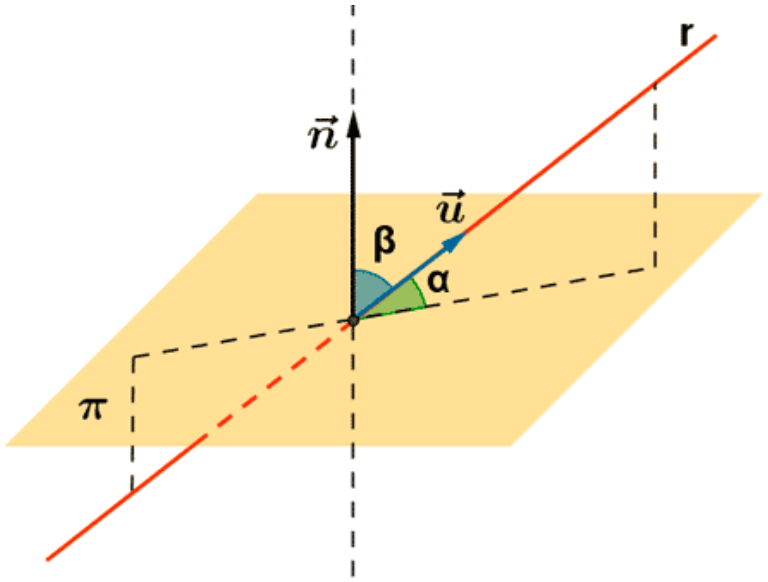
$$\left.\begin{array}{l} \pi: 2x+y-2z=-4 \\ r: \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=5-2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(-1+2\lambda)-1+\lambda-2(5-2\lambda)=-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2+4\lambda-1+\lambda-10+4\lambda=-4 \Rightarrow 9\lambda=9 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1+2 = 1 \\ y = -1+1 = 0 \Rightarrow \boxed{A(1,0,3)} \\ z = 5-2 = 3 \end{cases}$$

El punto de corte de recta y plano es el punto *A(1, 0, 3)*.

c) El ángulo que forman plano y recta (α) lo determina el ángulo que forma el vector normal del plano y el vector director de la recta (β).

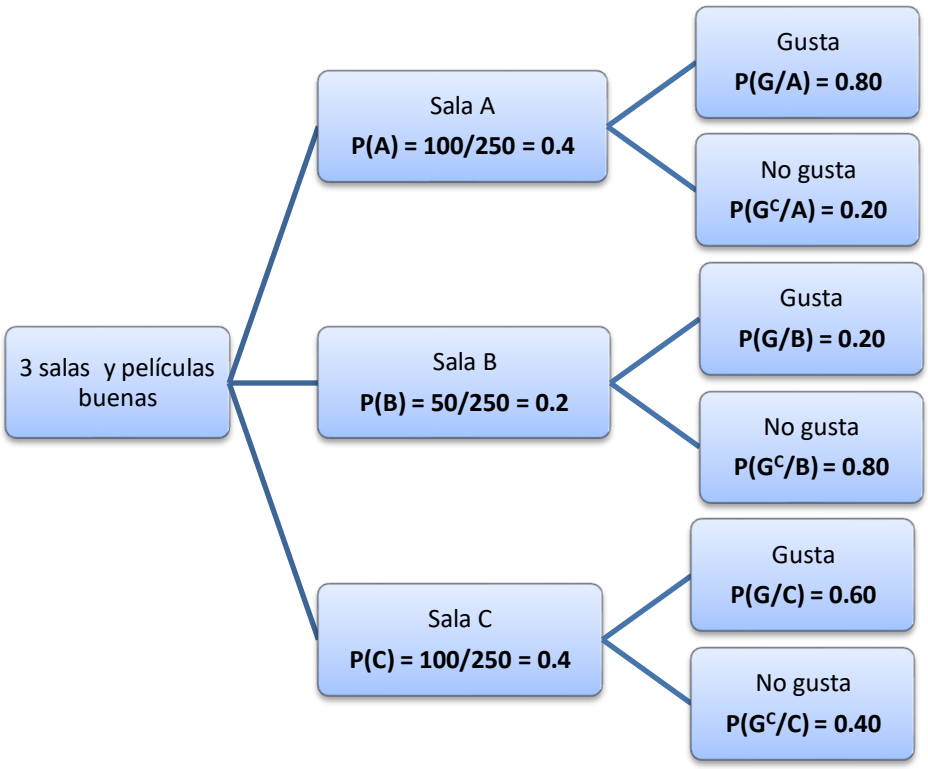


$$\left.\begin{array}{l} \pi : 2x + y - 2z = -4 \Rightarrow \vec{n} = (2,1,-2) \\ r : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-5}{-2} \Rightarrow \vec{u_r} = (2,1,-2) \end{array}\right\}$$

Como estos vectores son iguales entonces $\beta = 0$, significa que recta y plano son perpendiculares (α = 90º).
Recta y plano forman un ángulo de 90º.

7: En un cine hay 3 salas y un total de 250 espectadores repartidos de la siguiente manera: 100 espectadores en la sala A, 50 en la sala B y 100 en la sala C. Se sabe que la película de la sala A gusta al 80 % de los espectadores, la de la sala B al 20 % de los espectadores y la de la sala C al 60 % de los espectadores. A la salida de las tres películas se elige un espectador al azar. Calcule:
a) **[0,25 p.]** La probabilidad de que el espectador haya estado en la sala C.
b) **[0,5 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película, sabiendo que ha estado en la sala C.
c) **[0,5 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película y haya estado en la sala C.
d) **[0,5 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película.
e) **[0,5 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película o haya estado en la sala C.

Realizamos un diagrama de árbol para establecer las probabilidades de los distintos sucesos del experimento.



a) Aplicamos la regla de Laplace y con los datos proporcionados en el ejercicio tenemos:

$$P(C)=\frac{100}{250}=\boxed{\frac{2}{5}=0.4}$$

b) Este es un dato proporcionado en el ejercicio: $P(G/C)=\boxed{0.60}$

c) $P(C\cap G)=P(C)P(G/C)=0.4\cdot 0.6=\boxed{0.24}$

d) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G)=P(A)P(G/A)+P(B)P(G/B)+P(C)P(G/C)=$$

$$=0.4\cdot 0.8+\frac{50}{250}\cdot 0.2+0.24=\boxed{0.6}$$

e) $P(G\cup C)=P(G)+P(C)-P(G\cap C)=0.6+0.4-0.24=\boxed{0.76}$

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades y 2 decimales para los porcentajes.

El peso de los recién nacidos en la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 67 % de los recién nacidos pesan menos de 3,464 kg y que el 1,5 % de los recién nacidos pesan más de 4,502 kg.

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es el porcentaje de recién nacidos cuyo peso está comprendido entre 3,464 y 4,502 kg?

b) **[1 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **[1 p.]** Calcule el porcentaje de recién nacidos que pesan menos de 2,33 kg.

X = El peso de los recién nacidos en la Región de Murcia. $X = N(\mu, \sigma)$

a) Sabemos que $P(X \leq 3.464) = 0.67$ y que $P(X \geq 4.502) = 0.015$.

$$P(X \geq 4.502) = 0.015 \Rightarrow P(X \leq 4.502) = 1 - 0.015 = 0.985$$

Nos piden calcular $P(3.464 \leq X \leq 4.502)$.

$$P(3.464 \leq X \leq 4.502) = P(X \leq 4.502) - P(X \leq 3.464) = 0.985 - 0.67 = \boxed{0.315}$$

El porcentaje es del 31.5 %.

b) Sabemos que $P(X \leq 4.502) = 0.985$.

$$P(X \leq 4.502) = 0.985 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{4.502 - \mu}{\sigma}\right) = 0.985 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{4.502 - \mu}{\sigma} = 2.17 \Rightarrow 4.502 - \mu = 2.17\sigma \Rightarrow \boxed{4.502 - 2.17\sigma = \mu}$$

Sabemos que $P(X \leq 3.464) = 0.67$.

$$P(X \leq 3.464) = 0.67 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{3.464 - \mu}{\sigma}\right) = 0.67 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{3.464 - \mu}{\sigma} = 0.44 \Rightarrow 3.464 - \mu = 0.44\sigma \Rightarrow \boxed{\mu = 3.464 - 0.44\sigma}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix}\mu = 3.464 - 0.44\sigma \\ 4.502 - 2.17\sigma = \mu\end{matrix}\right\} \Rightarrow 4.502 - 2.17\sigma = 3.464 - 0.44\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4.502 - 3,464 = 2.17\sigma - 0.44\sigma \Rightarrow 1.038 = 1.73\sigma \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{1.038}{1.73} = 0.6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = 3.464 - 0.44 \cdot 0.6 = 3.2}$$

La media es de 3.2 kg y la desviación típica es de 0.6 kg.

c) Nos piden calcular $P(X \leq 2.33)$.

$$P(X \leq 2.33) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \leq \frac{2.33 - 3.2}{0.6}\right) = P(Z \leq -1.45) =$$

$$= P(Z \geq 1.45) = 1 - P(Z \leq 1.45) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.9265 = \boxed{0.0735}$$

El porcentaje de niños que pesan menos de 2.33 kg es de 7.35 %.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

--206-MATEMÁTICAS II--

EBAU2023 - **JUNIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Una papelería vende bolígrafos, rotuladores y libretas. Una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos, un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta, y un rotulador cuesta el doble que un bolígrafo.

i) **[0,75 p.]** Denotando por *x* el precio de cada bolígrafo, por *y* el de cada rotulador y por *z* el de cada libreta, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.

ii) **[0,25 p.]** Justifique que, con estos datos, no se puede conocer el precio de cada uno de los tres productos.

iii) **[1 p.]** Calcule el conjunto de todas las posibles soluciones del sistema.

iv) **[0,5 p.]** Sabiendo que una libreta cuesta 18 euros, calcule el precio de cada producto.

2: Considere las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} a & a \\ -1 & a \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) **[0,5 p.]** Determine para qué valores del parámetro *a* la matriz *A* es regular (o invertible).

Se sabe que cuando $a = -2$ la matriz *A* es regular (o invertible). Para ese valor de *a*:

b) **[1 p.]** Calcule la inversa de *A* y compruebe que $A\cdot A^{-1}=I$, con I la matriz identidad de orden 2.

c) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AXA^{-1}+B=C^T$, donde C^T denota la matriz traspuesta de *C*.

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 p.]** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)-1}{xsen(x)}$

b) **[1,25 p.]** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x}$

4: Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$.

a) **[0,5 p.]** Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[0,5 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función.

c) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.

d) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de *f(x)* que pasa por el punto (1, 1).

5: Considere las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases} x-2y=5 \\ y+z=0 \end{cases} \text{ y } s:\frac{x-8}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-1}.$$

a) **[1 p.]** Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) **[1 p.]** Compruebe que el punto $P=(7,1,-1)$ está en la recta *r* y calcule su proyección ortogonal sobre la recta *s*.

c) **[0,5 p.]** Calcule la distancia entre ambas rectas.

6: Considere el plano π de ecuación $\pi: 3x-y-2z=5$ y la recta *r* dada por

$$r:\frac{x-a}{1}=\frac{y-3+a}{1}=\frac{z}{1}.$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta *r* en función del parámetro *a*.

Se sabe que cuando *a = 0* la recta *r* es paralela al plano π. Para ese valor de *a*:

b) **[0,75 p.]** Calcule la distancia de la recta *r* al plano π.

c) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta *r* y es paralelo al plano π.

7: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 3 bolas rojas y 4 bolas negras, y la urna B contiene 1 bola verde, 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

a) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.

b) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

c) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se sacó de la urna A fuera verde, sabiendo que la bola se ha sacado de la urna B ha sido negra.

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

Se lanza una moneda al aire 100 veces y se anota el resultado del lanzamiento, que puede ser cara o cruz con la misma probabilidad. Determine:

a) **[0,5 p.]** Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale cara.

b) **[0,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **[0,5 p.]** Cuál es la probabilidad de que salga cara 60 veces.

d) **[1 p.]** Cuál es la probabilidad de que el número de veces que sale cara sea mayor o igual que 55.

SOLUCIONES

1: Una papelería vende bolígrafos, rotuladores y libretas. Una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos, un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta, y un rotulador cuesta el doble que un bolígrafo.
a) **[0,75 p.]** Denotando por *x* el precio de cada bolígrafo, por *y* el de cada rotulador y por *z* el de cada libreta, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.
b) **[0,25 p.]** Justifique que, con estos datos, no se puede conocer el precio de cada uno de los tres productos.
c) **[1 p.]** Calcule el conjunto de todas las posibles soluciones del sistema.
d) **[0,5 p.]** Sabiendo que una libreta cuesta 18 euros, calcule el precio de cada producto.

Llamamos "x" al precio de un bolígrafo, "y" al precio de un rotulador, "z" al precio de una libreta.

"*Una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos*" → $z = 2(x+y)$

"*Un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta*" → $x = \frac{z}{6}$

"*Un rotulador cuesta el doble que un bolígrafo*" → $y = 2x$

a) El sistema de ecuaciones queda:

$$\left.\begin{array}{l} z = 2(x+y) \\ x = \dfrac{z}{6} \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z = 2x + 2y \\ 6x = z \\ y = 2x \end{array}\right\}$$

b) Lo intentamos resolver.

$$\left.\begin{array}{l} z = 2x + 2y \\ 6x = z \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow 6x = 2x + 2 \cdot 2x \Rightarrow 6x = 6x \Rightarrow \boxed{0 = 0}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

También lo podemos justificar con el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{l} z = 2x + 2y \\ 6x = z \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} & -2x - 2y + z & = & 0 \\ \Rightarrow & 6x \quad - z & = & 0 \\ & -2x + y & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} + 3 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} 6x & -z & = & 0 \\ -6x & -6y & +3z & = 0 \end{array} \\ \hline \quad -6y \quad +2z = 0 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 2^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{ Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} -2x & +y & = & 0 \\ 2x & +2y & -z & = 0 \end{array} \\ \hline \quad 3y \quad -z = 0 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} & -2x - 2y + z & = & 0 \\ & -6y + 2z & = & 0 \\ & 3y \quad - z & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot\text{Ecuación } 3^{\text{a}} + \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ \quad 6y \quad -2z \quad = 0 \\ \quad -6y \quad +2z \quad = 0 \\ \hline \qquad\quad 0 \quad\quad = 0 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-2y+z=0 \\ -6y+2z=0 \\ 0=0 \end{array}\right\}$$

El sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. No se puede determinar de forma única el valor de cada artículo con la información proporcionada.

c) Terminamos de resolver el sistema a partir del sistema triangular obtenido en el apartado anterior.

$$\left.\begin{array}{r} -2x-2y+z=0 \\ -6y+2z=0 \\ 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-2y+z=0 \\ -3y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-2y+z=0 \\ z=3y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x-2y+3y=0 \Rightarrow -2x+y=0 \Rightarrow -2x=-y \Rightarrow x=\frac{y}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\dfrac{\lambda}{2} \\ y=\lambda \ , \ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=3\lambda \end{cases}}$$

d) Si tomamos $z = 18$ obtenemos el resto de precios.

$$\begin{cases} x=\dfrac{\lambda}{2} \\ y=\lambda \\ z=3\lambda=18\rightarrow\lambda=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{6}{2}=3 \\ y=6 \end{cases}$$

El bolígrafo cuesta 3 euros, el rotulador 6 euros y la libreta 18 euros.

2: Considere las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} a & a \\ -1 & a \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} y\ C=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) **[0,5 p.]** Determine para qué valores del parámetro *a* la matriz *A* es regular (o invertible).
Se sabe que cuando $a = -2$ la matriz *A* es regular (o invertible). Para ese valor de *a*:

b) **[1 p.]** Calcule la inversa de *A* y compruebe que $A\cdot A^{-1}=I$, con I la matriz identidad de orden 2.

c) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AXA^{-1}+B=C^T$, donde C^T denota la matriz traspuesta de *C*.

a) Para que sea invertible su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a \\ -1 & a \end{vmatrix}=a^2+a$$

$$|A|=0\Rightarrow a^2+a=0\Rightarrow a(a+1)=0\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a+1=0\rightarrow a=-1 \end{cases}$$

La matriz A es invertible para cualquier valor de *a* distinto de 0 y de –1.

b) Para $a = -2$ la matriz *A* es regular, calculamos su inversa.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow |A|=4-2=2\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Comprobamos que $A\cdot A^{-1}=I$.

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

c) Despejamos X de la ecuación $AXA^{-1}+B=C^T$.

$$AXA^{-1}=C^T-B\Rightarrow A^{-1}AXA^{-1}=A^{-1}\left(C^T-B\right)\Rightarrow XA^{-1}=A^{-1}\left(C^T-B\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow XA^{-1}A=A^{-1}\left(C^T-B\right)A\Rightarrow X=A^{-1}\left(C^T-B\right)A$$

Calculamos la expresión de la matriz X.

$$C^T - B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\left(C^T - B\right)A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6-8 & -2 \\ 3+8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -2 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28+2 & 28+4 \\ -22-1 & -22-2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 30 & 32 \\ -23 & -24 \end{pmatrix}}$$

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 p.]** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)-1}{xsen(x)}$

b) **[1,25 p.]** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x}$

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{xsen(x)}=\frac{\cos(0)-1}{0\cdot sen(0)}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot sen(2x)}{sen(x)+x\cos(x)}=\frac{-2\cdot sen(0)}{sen(0)+0\cdot\cos(0)}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos(2x)}{\cos(x)+\cos(x)+x(-sen(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos(2x)}{2\cos(x)-xsen(x)}=\frac{-4\cos(0)}{2\cos(0)-0\cdot sen(0)}=$$

$$=\frac{-4}{2}=\boxed{-2}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{0}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{9+x}}-\frac{-1}{2\sqrt{9-x}}}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{9+x}}+\frac{1}{2\sqrt{9-x}}}{3}=\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}{3}=\frac{\frac{2}{6}}{3}=\frac{2}{18}=\boxed{\frac{1}{9}}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{0}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(Conjugado)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}\right)\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}{3x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{9+x}\right)^2-\left(\sqrt{9-x}\right)^2}{3x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{9+x-(9-x)}{3x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{9+x-9+x}{3x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}=\frac{2}{3(3+3)}=\frac{2}{18}=\boxed{\frac{1}{9}}$$

4: Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$.

a) **[0,5 p.]** Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[0,5 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función.

c) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.

d) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de *f(x)* que pasa por el punto (1, 1).

a) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{1}{\frac{1}{\infty}+1}=\frac{1}{0+1}=\boxed{1}$$

b) Calculamos la función derivada y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f'(x)=\frac{2x\left(1+x^2\right)-2x\cdot x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2x+2x^3-2x^3}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}=0\Rightarrow x=0$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor. Como el dominio es todo $\mathbb{R}$ no añadimos ningún otro valor a este estudio.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{2(-1)}{\left(1+(-1)^2\right)^2}=\dfrac{-2}{4}<0$.

  La función decrece en $(-\infty,0)$.

- En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{2(1)}{\left(1+1^2\right)^2}=\dfrac{2}{4}>0$. La

  función crece en $(0,+\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,+\infty)$.

c)

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx=\int\frac{x^2+1}{1+x^2}\,dx-\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=$$

$$=\int dx-\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=\boxed{x-arctg(x)+K}$$

d) Para hallar el valor de *K* hacemos que *F(1) = 1*.

$$F(1)=1\Rightarrow 1=1-arctg(1)+K\Rightarrow 1=1-\frac{\pi}{4}+K\Rightarrow K=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\boxed{F(x)=x-arctg(x)+\frac{\pi}{4}}$$

5: Considere las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases} x-2y=5 \\ y+z=0 \end{cases} \text{ y } s:\frac{x-8}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-1}.$$

a) **[1 p.]** Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) **[1 p.]** Compruebe que el punto $P=(7,1,-1)$ está en la recta *r* y calcule su proyección ortogonal sobre la recta *s*.

c) **[0,5 p.]** Calcule la distancia entre ambas rectas.

a) Hallamos un vector director de cada recta y comprobamos si tienen coordenadas proporcionales y por tanto indican la misma dirección, siendo las rectas paralelas o coincidentes.

$$r:\begin{cases} x-2y=5 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ z=-y \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=5+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(5,0,0) \\ \overrightarrow{u_r}=(2,1,-1) \end{cases}$$

$$s:\frac{x-8}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(8,-3,3) \\ \overrightarrow{v_s}=(2,1,-1) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{u_r}=(2,1,-1) \\ \overrightarrow{v_s}=(2,1,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{2}{2}=\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}$$

Las rectas son paralelas o coincidentes al tener el mismo vector director.

Comprobamos si la recta *s* pasa por el punto $P_r(5,0,0)$ de la recta *r*.

$$\left.\begin{matrix} ¿P_r(5,0,0)\in s? \\ s:\frac{x-8}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow ¿\frac{5-8}{2}=\frac{0+3}{1}=\frac{0-3}{-1}? \Rightarrow \frac{-3}{2}\neq\frac{3}{1}=\frac{-3}{-1}$$

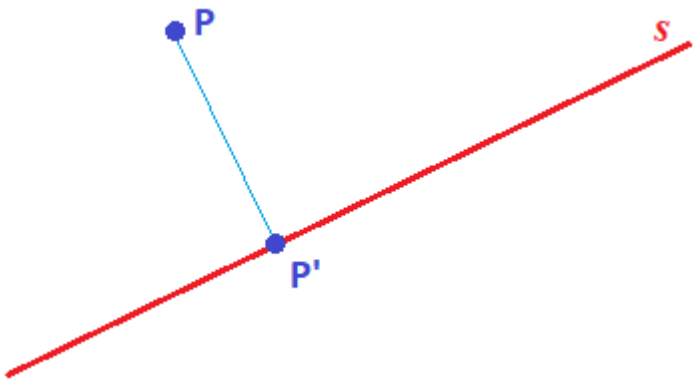
La recta *s* no pasa por el punto P_r y las rectas son paralelas.

b) Sustituimos las coordenadas del punto P en las ecuaciones de la recta *r* y comprobamos si las satisface.

$$\left.\begin{matrix} P=(7,1,-1) \\ r:\begin{cases} x-2y=5 \\ y+z=0 \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow ¿\begin{cases} 7-2\cdot 1=5 \\ 1+(-1)=0 \end{cases}?$$

Se cumplen las dos ecuaciones y el punto P pertenece a la recta *r*.

Nos piden hallar las coordenadas del punto P´ del dibujo.



Hallamos el plano perpendicular a la recta que pasa por P. El punto P´ será el punto de corte de recta y plano.

El plano perpendicular a la recta *s* tendrá como vector normal el vector director de la recta.

$$s:\frac{x-8}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-1}\Rightarrow \vec{v_s}=(2,1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\vec{v_s}=(2,1,-1)\\ P(7,1,-1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi:2x+y-z+D=0\\ P(7,1,-1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 14+1-(-1)+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-16\Rightarrow \pi:2x+y-z-16=0$$

Hallamos el punto P´ de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l}s:\begin{cases}x=8+2\lambda\\ y=-3+\lambda\\ z=3-\lambda\end{cases}\\ \pi:2x+y-z-16=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2(8+2\lambda)+(-3+\lambda)-(3-\lambda)-16=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16+4\lambda-3+\lambda-3+\lambda-16=0\Rightarrow 6\lambda-6=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda=1\Rightarrow\begin{cases}x=8+2=10\\ y=-3+1=-2\\ z=3-1=2\end{cases}\Rightarrow\boxed{P'(10,-2,2)}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

El punto P´ es un punto de la recta *s* que debe de cumplir que el vector $\overrightarrow{PP'}$ sea perpendicular al vector director de la recta y por lo tanto su producto escalar debe ser 0.

$$\left.\begin{array}{l} P´\in s \\ s:\begin{cases} x=8+2\lambda \\ y=-3+\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow P´(8+2\lambda,-3+\lambda,3-\lambda)$$

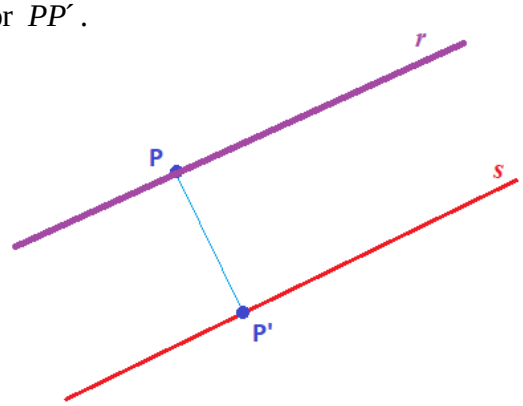
$$\overrightarrow{PP´}=(8+2\lambda,-3+\lambda,3-\lambda)-(7,1,-1)=(1+2\lambda,-4+\lambda,4-\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PP´}=(1+2\lambda,-4+\lambda,4-\lambda) \\ \overrightarrow{v_s}=(2,1,-1) \\ \overrightarrow{PP´}\perp\overrightarrow{v_s}\rightarrow\overrightarrow{PP´}\cdot\overrightarrow{v_s}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1+2\lambda,-4+\lambda,4-\lambda)(2,1,-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(1+2\lambda)+(-4+\lambda)-(4-\lambda)=0\Rightarrow 2+4\lambda-4+\lambda-4+\lambda=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda-6=0\Rightarrow 6\lambda=6\Rightarrow\lambda=1\Rightarrow P´(8+2,-3+1,3-1)\Rightarrow \boxed{P´(10,-2,2)}$$

c) Como el punto P está en la recta r y el punto $P´$ es la proyección ortogonal del punto P en la recta s que es paralela a r la distancia entre las rectas es la distancia entre P y $P´$ o lo que es lo mismo el módulo del vector $\overrightarrow{PP´}$.



$$\overrightarrow{PP´}=(10,-2,2)-(7,1,-1)=(3,-3,3)$$

$$d(r,s)=d(P,P´)=\left|\overrightarrow{PP´}\right|=\sqrt{3^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{27}=\boxed{3\sqrt{3}\simeq 5.196u}$$

6: Considere el plano π de ecuación $\pi: 3x-y-2z=5$ y la recta *r* dada por

$$r: \frac{x-a}{1}=\frac{y-3+a}{1}=\frac{z}{1}.$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta *r* en función del parámetro *a*.
Se sabe que cuando *a = 0* la recta *r* es paralela al plano π. Para ese valor de *a*:
b) **[0,75 p.]** Calcule la distancia de la recta *r* al plano π.
c) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta *r* y es paralelo al plano π.

a) La recta puede estar contenida en el plano, ser paralela al plano (no coincidir en ningún punto) o ser secantes (cortar al plano en un único punto).

$$\pi: 3x-y-2z=5 \Rightarrow \vec{n}=(3,-1,-2)$$

$$r: \frac{x-a}{1}=\frac{y-(3-a)}{1}=\frac{z}{1} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(a,3-a,0) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,1,1) \end{cases}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{u_r}=(3,-1,-2)(1,1,1)=3-1-2=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{u_r}$$

Al ser el vector normal del plano y el director de la recta perpendiculares la recta y el plano o son paralelos o la recta está contenida en el plano. Dependerá de que el punto P_r esté en el plano o no.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 3x-y-2z=5 \\ P_r(a,3-a,0) \\ ¿P_r \in \pi? \end{array}\right\} \Rightarrow 3a-(3-a)-2\cdot 0=5 \Rightarrow 3a-3+a=5 \Rightarrow 4a=8 \Rightarrow a=\frac{8}{4}=2$$

Si $a=2$ el punto P_r pertenece al plano y la recta está contenida en el plano.
Si $a\neq 2$ el punto P_r no pertenece al plano y la recta es paralela al plano.

b) Para $a=0$ la recta queda $r: \frac{x}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(0,3,0) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,1,1) \end{cases}$. La recta y el plano son paralelos.

La distancia de *r* al plano π será la distancia del punto P_r al plano $\pi: 3x-y-2z=5$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 3x-y-2z-5=0 \\ P_r(0,3,0) \end{array}\right\} \Rightarrow d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|3\cdot 0-3-2\cdot 0-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{|-8|}{\sqrt{14}}=\boxed{\frac{8}{\sqrt{14}}\simeq 2.138u}$$

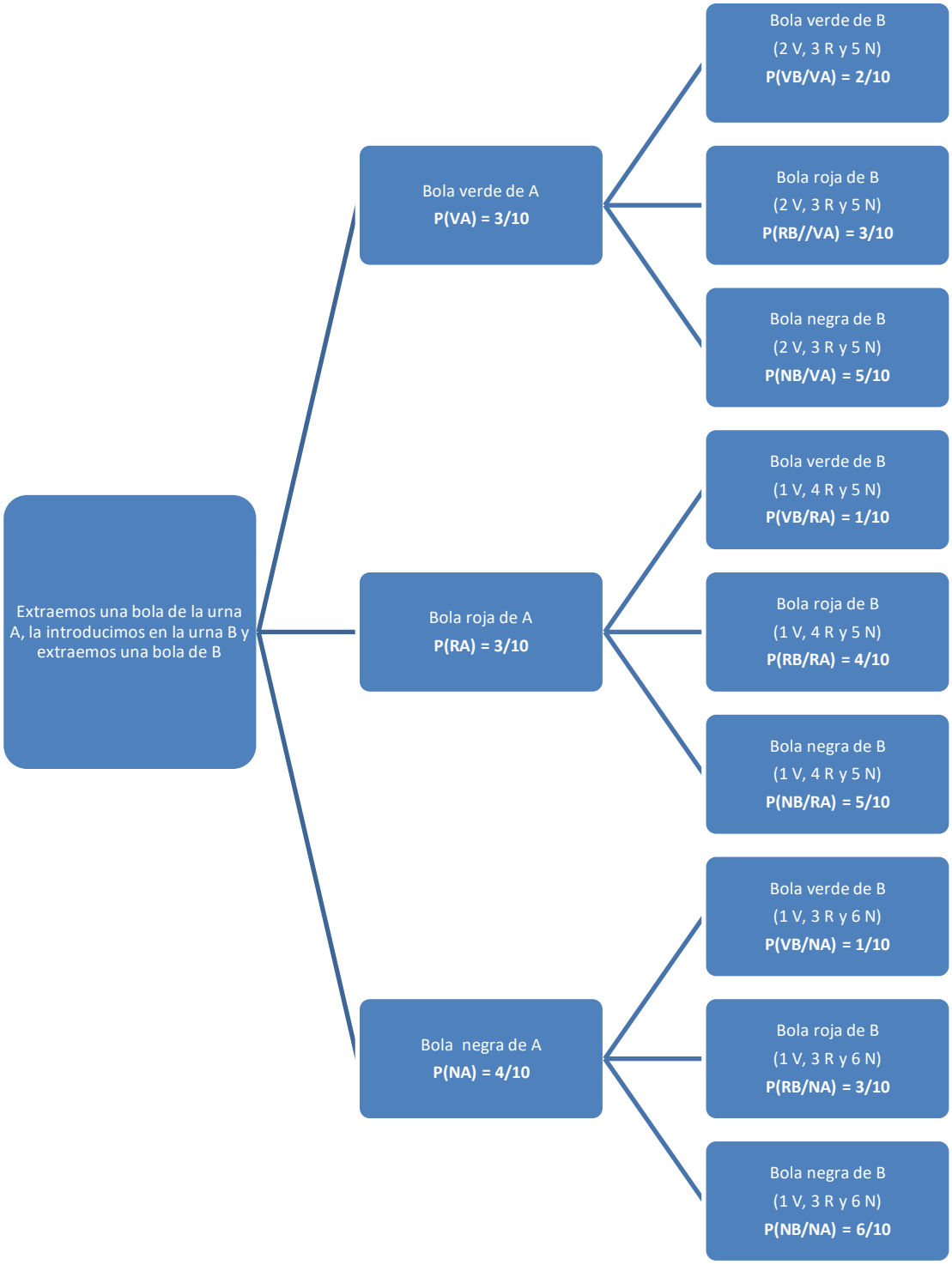
c) El plano π´ que contiene a la recta *r* y es paralelo al plano π tiene el mismo vector normal y contiene el punto P_r.

$$\pi: 3x-y-2z-5=0 \Rightarrow \pi´: 3x-y-2z+D=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi´: 3x-y-2z+D=0 \\ P_r(0,3,0)\in\pi´ \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 0-3-2\cdot 0+D=0 \Rightarrow D=3 \Rightarrow \boxed{\pi´: 3x-y-2z+3=0}$$

7: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 3 bolas rojas y 4 bolas negras, y la urna B contiene 1 bola verde, 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:
a) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.
b) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.
c) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se sacó de la urna A fuera verde, sabiendo que la bola se ha sacado de la urna B ha sido negra.

Realizamos un diagrama de árbol para establecer las probabilidades de los distintos sucesos del experimento.



Llamamos *VA* al suceso "Sacar Verde en urna A", *NA* al suceso "Sacar Negra en urna A, *RA* a "Sacar Roja en urna A", de la misma manera llamamos *VB* a "Sacar verde en urna B", *NB* a "Sacar Negra en urna B" y *RB* a "Sacar Roja en urna B".

a) Si sacamos una bola verde de la urna A y la introducimos en la urna B, tendremos en dicha urna 9 +1 = 10 bolas, siendo 5 de ellas de color negro. Aplicando la regla de Laplace tenemos que:

$$P(NB/VA) = \frac{5}{10} = \boxed{0.5}$$

b)

$$P(NB) = P(VA)\cdot P(NB/VA) + P(RA)\cdot P(NB/RA) + P(NA)\cdot P(NB/NA) =$$

$$= \frac{3}{10}\cdot\frac{5}{10} + \frac{3}{10}\cdot\frac{5}{10} + \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10} = \frac{54}{100} = \boxed{0.54}$$

c) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(VA/NB) = \frac{P(VA\cap NB)}{P(NB)} = \frac{P(VA)P(NB/VA)}{P(NB)} = \frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{10}}{0.54} = \boxed{\frac{5}{18} \simeq 0.27778}$$

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

Se lanza una moneda al aire 100 veces y se anota el resultado del lanzamiento, que puede ser cara o cruz con la misma probabilidad. Determine:
a) **[0,5 p.]** Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale cara.
b) **[0,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.
c) **[0,5 p.]** Cuál es la probabilidad de que salga cara 60 veces.
d) **[1 p.]** Cuál es la probabilidad de que el número de veces que sale cara sea mayor o igual que 55.

a) X = "número de veces que sale cara en 100 lanzamientos de una moneda"

Es una variable binomial, pues las repeticiones son independientes entre sí y la realización de cada tirada solo tiene dos opciones: Éxito = "sacar cara" y Fracaso = "sacar cruz".

El número de repeticiones es $n = 100$ y $p = P(\text{sacar cara al lanzar una moneda}) = 1/2 = 0.5$.

X = B(100, 0.5)

b) Media = $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0.5 = 50$ y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 5$

c) Nos piden calcular $P(X = 60)$.

$$P(X = 60) = \binom{100}{60} \cdot 0.5^{60} \cdot 0.5^{40} \simeq 0.01084$$

d) Esta probabilidad usando la binomial es muy costosa de calcular pues es:

$$P(X \geq 55) = P(X = 55) + P(X = 56) + ... + P(X = 100).$$

La calculamos usando la aproximación a la distribución normal.

Como $\left.\begin{matrix} n \cdot p = 100 \cdot 0.5 = 50 \geq 5 \\ n \cdot q = 100 \cdot 0.5 = 50 \geq 5 \end{matrix}\right\}$ la aproximación es buena.

Se aproxima a una normal de media 50 y desviación típica 5.

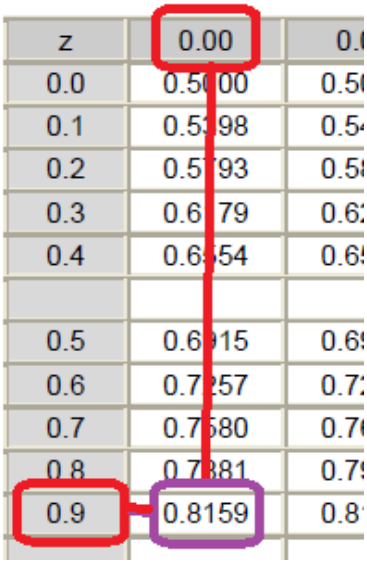
$$X = B(100, 0.5) \rightarrow Y = N(50, 5)$$

$$P(X \geq 55) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 54.5) =$$

$$= \{Tipificamos\} = P\left(\frac{Y - 50}{5} \geq \frac{54.5 - 50}{5}\right) = P(Z \geq 0.9) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.9) = \{\text{Miramos en la tabla N(0,1)}\} =$$

$$= 1 - 0.8159 = \boxed{0.1841}$$



z	0.00	0.(
0.0	0.50[illegible]00	0.5(
0.1	0.53[illegible]98	0.5
0.2	0.57[illegible]93	0.5
0.3	0.61[illegible]79	0.6
0.4	0.64[illegible]54	0.6
0.5	0.69[illegible]15	0.6
0.6	0.72[illegible]57	0.7
0.7	0.75[illegible]80	0.7
0.8	0.78[illegible]81	0.7
0.9	0.8159	0.8

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II.

EBAU2022 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: [2,5 p.] Un conocido defraudador fiscal tiene distribuido su dinero negro en tres paraísos fiscales, las Islas Caimán, Panamá y Fiji. La suma total de este dinero es de 150 millones de euros. Si perdiera la cuarta parte del dinero que tiene en las Islas Caimán, seguiría teniendo allí el triple del dinero que tiene en Panamá. Además, el dinero que tiene en Panamá sumado a las dos quintas partes del dinero que tiene en Fiji es exactamente la mitad del dinero que tiene en las Islas Caimán. Calcule cuánto dinero tiene en cada uno de los paraísos fiscales.

2: Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple que $A^2 = A$

a) **[0,75 p.]** Si *A* es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2022}.

b) **[0,75 p.]** Si *A* es una matriz idempotente y regular (o inversible), calcule razonadamente su determinante.

c) **[1 p.]** Determine para que valores de *a* y *b* la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

3: Considere la función *f(x)* dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & si \quad x > 0 \ y \ x \neq 1 \\ a & si \quad x = 1 \end{cases}$$

a) **[0,5 p.]** Calcule el límite de *f(x)* cuando *x* tiende a $+\infty$.

b) **[1 p.]** Determine el valor de *a* para que la función *f(x)* sea continua en *x = 1*.

c) **[1 p.]** Estudie si, para dicho valor de *a*, la función *f(x)* es derivable en *x = 1*. En caso afirmativo, calcule el valor de la derivada de *f* en *x = 1*.

4: Considere la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) **[1 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.

b) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.

c) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función *f(x)* cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(0,1)$.

5: Considere el plano π de ecuación $\pi : x + y + z = 1$ y la recta *r* dada por

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ ax - z = a - 1 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta *r* en función del parámetro *a*.

b) **[1 p.]** Si a = –1 la recta *r* corta al plano π. Calcule en ese caso el punto de corte y el ángulo que forma la recta *r* con el plano π.

6: Considere las recta *r* y *s* dadas por

$$r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad y \quad s : \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Compruebe que las rectas son coplanarias (es decir, están contenidas en un mismo plano) y calcule la ecuación del plano que las contiene.

b) **[1 p.]** Calcule la distancia de la recta *r* al plano $\pi : x - y + 2z = 3$.

7: Un estudio publicado en *Environmental, Science and Technology* ha revelado que la probabilidad de contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes es 0,45. Además, según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5 % de hombres y un 49,5 % de mujeres.

a) **[0,5 p.]** Suponiendo que los sucesos "contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes" y "ser mujer" sean independientes, calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mujer y contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

b) **[1 p.]** En el mismo supuesto que en el apartado a), calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no sea mujer o no contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

c) **[1 p.]** Si se eligen 8 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de ellas contraigan el Covid-19 en el interior de restaurantes?

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La altura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 4 cm.

a) **[0,75 p.]** Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 170 cm.

b) **[0,75 p.]** Calcule qué porcentaje de la población mide entre 170 y 185 cm.

c) **[1 p.]** Calcule la altura que es superada por el 33 % de la población.

SOLUCIONES

1: [2,5 p.] Un conocido defraudador fiscal tiene distribuido su dinero negro en tres paraísos fiscales, las Islas Caimán, Panamá y Fiji. La suma total de este dinero es de 150 millones de euros. Si perdiera la cuarta parte del dinero que tiene en las Islas Caimán, seguiría teniendo allí el triple del dinero que tiene en Panamá. Además, el dinero que tiene en Panamá sumado a las dos quintas partes del dinero que tiene en Fiji es exactamente la mitad del dinero que tiene en las Islas Caimán. Calcule cuánto dinero tiene en cada uno de los paraísos fiscales.

Llamamos "x" al dinero depositado en Islas Caimán (en millones de euros), "y" a lo depositado en Panamá y "z" a lo depositado en Fiji.

"La suma total de este dinero es de 150 millones de euros" → $x+y+z=150$

"Si perdiera la cuarta parte del dinero que tiene en las Islas Caimán (se queda con ¾ de *x*), seguiría teniendo allí el triple del dinero que tiene en Panamá" → $\frac{3}{4}x=3y$

"El dinero que tiene en Panamá sumado a las dos quintas partes del dinero que tiene en Fiji es exactamente la mitad del dinero que tiene en las Islas Caimán" → $y+\frac{2}{5}z=\frac{x}{2}$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=150 \\ \frac{3}{4}x=3y \\ y+\frac{2}{5}z=\frac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=150 \\ 3x=12y \\ 10y+4z=5x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=150 \\ x=4y \\ 10y+4z=5x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4y+y+z=150 \\ 10y+4z=5(4y) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5y+z=150 \\ 10y+4z=20y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=150-5y \\ 4z=10y \end{array}\right\} \Rightarrow 4(150-5y)=10y \Rightarrow 600-20y=10y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 600=30y \Rightarrow \boxed{y=\frac{600}{30}=20} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=4\cdot 20=80} \\ \boxed{z=150-5\cdot 20=50} \end{cases}$$

En las Islas Caimán tiene 80 millones de euros, en Panamá 20 y en Fiji tiene 50 millones.

2: Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple que $A^2 = A$

a) **[0,75 p.]** Si *A* es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2022}.

b) **[0,75 p.]** Si *A* es una matriz idempotente y regular (o inversible), calcule razonadamente su determinante.

c) **[1 p.]** Determine para que valores de *a* y *b* la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

a) Calculamos las primeras potencias de A en busca de una regularidad.

$$A^2 = A$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$$
$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$$
$$A^5 = A^4 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$A^{2022} = A^{2021} \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$$

Realmente cualquier potencia de A da como resultado la matriz A.

b)

$$A^2 = A \Rightarrow |A^2| = |A| \Rightarrow |A|^2 = |A| \Rightarrow |A|^2 - |A| = 0 \Rightarrow |A|(|A|-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0, \text{ no es posible} \\ \text{pues A es regular y } |A| \neq 0 \\ o \\ |A| - 1 \Rightarrow \boxed{|A| = 1} \end{cases}$$

El determinante de A vale 1.

c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2a+2-2a & (1-a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2 & (1-a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2 & (1-a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \rightarrow a^2 - a = 0 \rightarrow a(a-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ o \\ a = 1 \end{cases} \\ (1-a)^2 = 1-a \rightarrow a^2 - 2a + 1 = 1 - a \rightarrow a^2 - a = 0 \rightarrow a(a-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ o \\ a = 1 \end{cases} \\ b^2 = b \rightarrow b^2 - b = 0 \rightarrow b(b-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ o \\ b = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Los valores serían $a = 0$ o $a = 1$ y $b = 0$ o $b = 1$.

3: Considere la función *f(x)* dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1} & si \quad x>0 \ y \ x\neq 1\\ a & si \quad x=1\end{cases}$$

a) **[0,5 p.]** Calcule el límite de *f(x)* cuando *x* tiende a +∞.
b) **[1 p.]** Determine el valor de *a* para que la función *f(x)* sea continua en *x = 1*.
c) **[1 p.]** Estudie si, para dicho valor de *a*, la función *f(x)* es derivable en *x = 1*. En caso afirmativo, calcule el valor de la derivada de *f* en *x = 1*.

a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=\boxed{0}$$

b) Para que sea continua en *x = 1* deben coincidir el límite con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\dfrac{0}{0}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x}=1\\ f(1)=a\\ \lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{a=1}$$

c) Para *a = 1* la función es $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1} & si \quad x>0 \ y \ x\neq 1\\ 1 & si \quad x=1\end{cases}$.

Calculamos la derivada en *x = 1* usando la definición.

$$f´(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\ln x-x+1}{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\frac{\ln1-1+1}{(1-1)^2}=$$

$$=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}=\frac{0}{0}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{2}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{2x^2}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

La función es derivable en *x = 1* y su valor es $f´(1)=-\frac{1}{2}$.

4: Considere la función $f(x)=x^2e^{-x}$, definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$.

a) **[1 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.
b) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.
c) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función *f(x)* cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(0,1)$

a)

$$f'(x)=2xe^{-x}+x^2(-1)e^{-x}=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x)$$

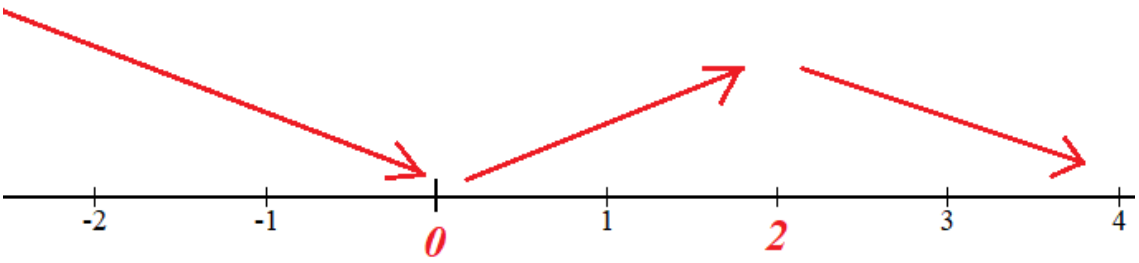
Igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos.

$$f'(x)=0\Rightarrow xe^{-x}(2-x)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ e^{-x}=0 \quad \text{¡Imposible!}\\ 2-x=0\Rightarrow\boxed{x=2}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1)=(-1)e^{-(-1)}(2-(-1))=-3e<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,2)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=(1)e^{-1}(2-1)=e^{-1}>0$. La función crece en $(0,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3)=3e^{-3}(2-3)=-3e^{-3}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y crece en $(0,2)$.

b)

$$\int f(x)dx=\int x^2e^{-x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x^2\rightarrow du=2xdx\\ dv=e^{-x}dx\rightarrow v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\end{array}\right\}=$$

$$=x^2(-e^{-x})-\int 2x(-e^{-x})dx=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx=\ldots$$

$$\int xe^{-x}dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u = x \to du = dx\\ dv = e^{-x}dx \to v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}\end{array}\right\} = x\left(-e^{-x}\right) - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

$$... = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} = \boxed{-e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + K}$$

c) La primitiva de la función es $F(x) = -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + K$. Si pasa por el punto (0, 1) entonces se debe cumplir que F(0) = 1.

$$F(0) = 1 \Rightarrow -e^{-0}\left(0^2 + 2\cdot 0 + 2\right) + K = 1 \Rightarrow -2 + K = 1 \Rightarrow \boxed{K = 3}$$

La primitiva buscada es $F(x) = -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + 3$

5: Considere el plano π de ecuación $\pi: x+y+z=1$ y la recta *r* dada por

$$r:\begin{cases} x-y=0 \\ ax-z=a-1 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta *r* en función del parámetro *a*.

b) **[1 p.]** Si a = –1 la recta *r* corta al plano π. Calcule en ese caso el punto de corte y el ángulo que forma la recta *r* con el plano π.

a) El vector normal del plano $\pi: x+y+z=1$ es $\vec{n}=(1,1,1)$.

Hallamos un vector director de la recta.

$$r:\begin{cases} x-y=0 \\ ax-z=a-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ ax-a+1=z \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=-a+1+a\lambda \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} P_r(0,0,1-a) \\ \vec{v_r}=(1,1,a) \end{cases}$$

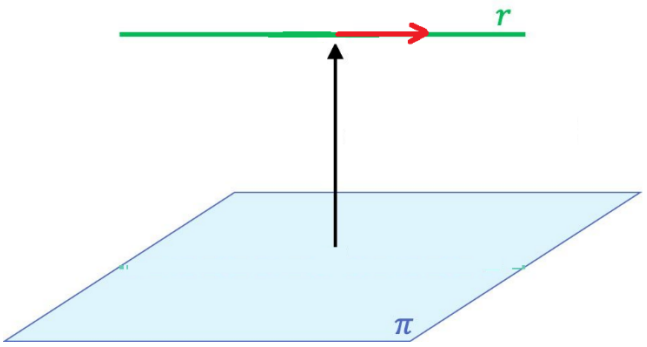
Recta y plano son paralelos o coincidentes si vector normal del plano y vector director de la recta forman 90º, es decir, su producto escalar es cero.

$$\left.\begin{matrix} \vec{v_r}=(1,1,a) \\ \vec{n}=(1,1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{v_r}\cdot\vec{n}=(1,1,a)(1,1,1)=1+1+a=2+a$$

$$\vec{v_r}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow 2+a=0 \Rightarrow \boxed{a=-2}$$

Hay dos casos diferentes a estudiar.

CASO 1. $a=-2$

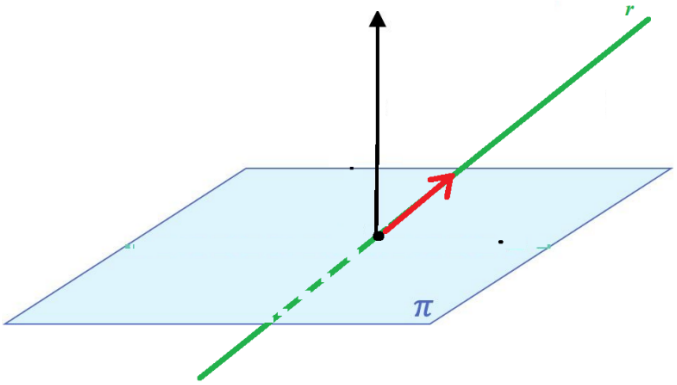


En este caso el producto escalar del vector normal del plano y vector director de la recta es cero.
Plano y recta son paralelos o la recta está contenida en el plano.
Comprobamos si el punto $P_r(0,0,1-(-2))=(0,0,3)$ pertenece al plano $\pi: x+y+z=1$.

$$\left.\begin{matrix} P_r(0,0,3) \\ \pi: x+y+z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ¿0+0+3=1?$$

No se cumple. Recta y plano son paralelos.

CASO 2. $a \neq -2$



En este caso el producto escalar del vector normal del plano y vector director de la recta no es cero. La recta y el plano son secantes.

b) Si a = –1 la recta *r* queda $r:\begin{cases} x-y=0 \\ -x-z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ z=2-x \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} P_r(0,0,2) \\ \vec{v_r}=(1,1,-1) \end{cases}$.

Hallamos el punto A de corte de recta y plano.

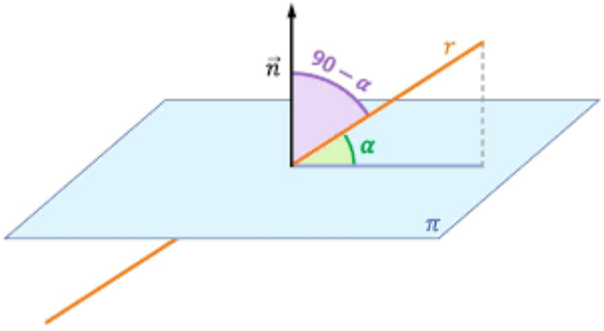
$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases} \\ \pi: x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow t+t+2-t=1 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=2-(-1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1,-1,3)}$$

Hallamos el ángulo formado entre recta y plano. Hallamos primero el ángulo entre vector normal del plano $\vec{n}=(1,1,1)$ y el director de la recta $\vec{v_r}=(1,1,-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r}=(1,1,-1) \\ \vec{n}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\vec{v_r},\vec{n}\right)=\frac{\vec{v_r}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{v_r}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{(1,1,-1)(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1+1-1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\vec{v_r},\vec{n}\right)=arc\cos\frac{1}{3}=70.52^o$$

El ángulo entre recta y plano será 90º – 70.52º = 19.48º.



6: Considere las recta *r* y *s* dadas por

$$r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1} \quad y \quad s:\begin{cases}x+2z=1\\ y=0\end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Compruebe que las rectas son coplanarias (es decir, están contenidas en un mismo plano) y calcule la ecuación del plano que las contiene.

b) **[1 p.]** Calcule la distancia de la recta *r* al plano $\pi: x-y+2z=3$.

a) Las rectas son coplanarias si son paralelas o se cortan.
Obtenemos un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}\Rightarrow r:\begin{cases}P_r(1,0,0)\\ \overrightarrow{u_r}(-1,1,1)\end{cases}$$

$$s:\begin{cases}x+2z=1\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1-2z\\ y=0\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}x=1-2\lambda\\ y=0\\ z=\lambda\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}Q_s(1,0,0)\\ \overrightarrow{v_s}=(-2,0,1)\end{cases}$$

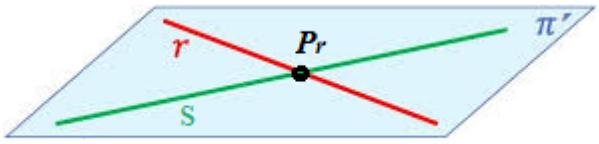
Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{u_r}(-1,1,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(-2,0,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{-1}{-2}\neq\frac{1}{0}\neq\frac{1}{1}$$

Las rectas se cortan (un punto en común) o se cruzan (ningún punto en común).

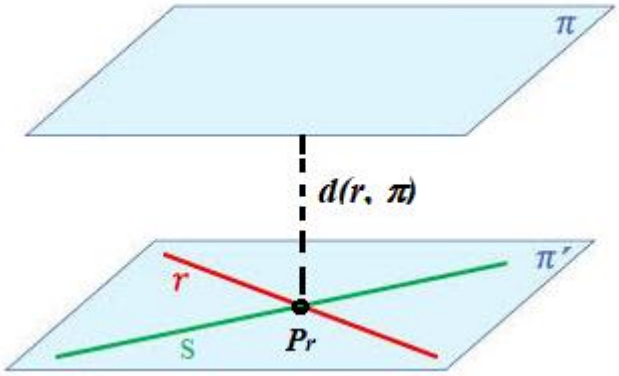
Como *Pr = Qs = (1, 0, 0)* ambas rectas se cortan en el punto *Pr(1, 0, 0).*
Las rectas son secantes y por tanto coplanarias.

El plano π´ que las contiene tiene como vectores directores los vectores directores de ambas rectas y contiene el punto $P_r(1,0,0)$.



$$\left.\begin{matrix}\vec{u}=\overrightarrow{u_r}(-1,1,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(-2,0,1)\\ P_r(1,0,0)\in\pi\end{matrix}\right\}\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ -1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x-1-2y+2z+y=0\Rightarrow\boxed{\pi':x-y+2z-1=0}$$

b) El plano $\pi: x-y+2z=3$ es paralelo al plano π´ obtenido en el apartado a), por lo que la recta *r* y el plano π son paralelos. La distancia de la recta al plano π es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.



$$\left.\begin{array}{l}\pi: x-y+2z-3=0\\ P_r(1,0,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|1-0-0-3|}{\sqrt{1+(-1)^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}u}$$

7: Un estudio publicado en *Environmental, Science and Technology* ha revelado que la probabilidad de contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes es 0,45. Además, según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5 % de hombres y un 49,5 % de mujeres.

a) **[0,5 p.]** Suponiendo que los sucesos "contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes" y "ser mujer" sean independientes, calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mujer y contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

b) **[1 p.]** En el mismo supuesto que en el apartado a), calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no sea mujer o no contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

c) **[1 p.]** Si se eligen 8 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de ellas contraigan el Covid-19 en el interior de restaurantes?

Llamamos C = "Contagiarse de Covid-19 en restaurantes" y M = "Ser mujer".

a) Los sucesos "contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes" y "ser mujer" son independientes por lo que:

$$P(\text{Ser mujer y contraer el Covid}) = P(C \cap M) = P(C)P(M) = 0.45 \cdot 0.495 = \boxed{0.22275}$$

b) Nos piden calcular el valor de $P(\overline{M} \cup \overline{C})$.

$$P(\overline{M} \cup \overline{C}) = P(\overline{M \cap C}) = 1 - P(M \cap C) = 1 - 0.22275 = \boxed{0.77725}$$

c) Se trata de una binomial donde X = Número de personas que contraen el Covid-19 en el interior de restaurantes de un grupo de 8. Los parámetros son p = 0.45, n = 8. X = B(8, 0.45).

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\right] =$$

$$= 1 - \left[\binom{8}{0} 0.45^0 \cdot 0.55^8 + \binom{8}{1} 0.45^1 \cdot 0.55^7 + \binom{8}{2} 0.45^2 \cdot 0.55^6 + \binom{8}{3} 0.45^3 \cdot 0.55^5\right] =$$

$$= 1 - \left[0.0084 + 0.0548 + 0.1569 + 0.2568\right] = \boxed{0.5231}$$

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La altura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 4 cm.

a) **[0,75 p.]** Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 170 cm.
b) **[0,75 p.]** Calcule qué porcentaje de la población mide entre 170 y 185 cm.
c) **[1 p.]** Calcule la altura que es superada por el 33 % de la población.

X = La altura de los individuos de una población. $X = N(175, 4)$

a) Nos piden calcular $P(X > 170)$.

$$P(X > 170) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X - 175}{4} \end{matrix} \right\} = P\left(Z > \frac{170 - 175}{4} \right) = P(Z > -1.25) =$$

$$= P(Z < 1.25) = \{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\} = \boxed{0.8944}$$

b)

$$P(170 < X < 185) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X - 175}{4} \end{matrix} \right\} = P\left(\frac{170 - 175}{4} < Z < \frac{185 - 175}{4} \right) = P(-1.25 < Z < 2.5) =$$

$$= P(Z < 2.5) - P(Z < -1.25) = P(Z < 2.5) - P(Z > 1.25) = P(Z < 2.5) - \left[1 - P(Z < 1.25) \right]$$

$$= \{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\} = 0.9938 - \left[1 - 0.8944 \right] = \boxed{0.8882}$$

El porcentaje de población que mide entre 170 y 185 cm es del 88.82 %

c) Nos piden hallar "a" tal que $P(X > a) = 0.33$
Como el porcentaje es menor de 0.5 el valor de "a" debe ser mayor que la media 175 cm.

$$P(X > a) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X - 175}{4} \end{matrix} \right\} = P\left(Z > \frac{a - 175}{4} \right) = \left\{ \frac{a - 175}{4} > 0 \right\} = 1 - P\left(Z < \frac{a - 175}{4} \right) = 0.33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{a - 175}{4} \right) = 1 - 0.33 = 0.67 \Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a - 175}{4} = 0.44 \Rightarrow a - 175 = 1.76 \Rightarrow a = 175 + 1.76 = \boxed{176.76\,cm}$$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II.

EBAU2022 - **JUNIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: [2,5 p.] La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años. La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora. Además, dentro de 4 años la edad de Aurora será la edad que actualmente tiene Esperanza. Calcule las edades de cada una de ellas.

2: Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

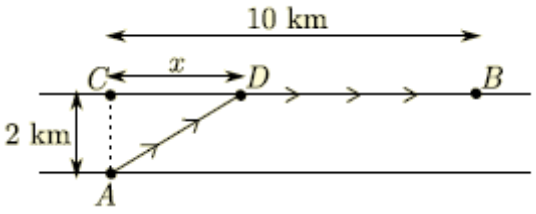
a) **[1 p.]** Si I denota la matriz identidad de orden 3, compruebe que $A^3=-I$ y calcule A^{2023}.

b) **[0,5 p.]** Calcule la inversa de A.

c) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AX-B^T=A^2$, donde B^T denota la matriz traspuesta de B.

3: En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).

Un triatleta participa en una competición de SwimRun en la que debe ir desde el punto A, situado en la orilla de un canal de agua en reposo de 2 kilómetros de ancho, hasta el punto B, situado en la otra orilla del canal y a una distancia de 10 kilómetros del punto C (punto opuesto de A), tal y como se indica en la figura. Para ello, debe ir nadando desde A hasta cualquier punto D de la otra orilla del canal y continuar corriendo desde D hasta B. El triatleta tiene plena libertad para elegir D.



a) **[1 p.]** Sabiendo que el triatleta es capaz de nadar a una velocidad de 4 km/h y de correr a una velocidad de 12 km/h, demuestre que el tiempo total empleado por el triatleta en ir desde A hasta B (pasando por D) viene dado por la función $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{10-x}{12}$, donde x denota la distancia de C a D.

b) **[1,5 p.]** Calcule cuál debe ser el punto D para que el tiempo empleado por el triatleta en ir desde A hasta B sea mínimo. ¿Cuánto tardará en dicho caso?

4: Considere la función $f(x) = x\ ln(x)$, definida para $x > 0$.

a) **[1 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.
b) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.
c) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función *f(x)* cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(1,0)$.

5: Considere las siguientes rectas:

$$r: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

a) **[1,5 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule la ecuación del plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

6: Considere los puntos $A = (1, -1, 2)$ y $B = (3, 5, 2)$.

a) **[1,5 p.]** Determine la ecuación del plano π perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de dicho segmento.
b) **[1 p.]** Calcule la distancia del punto A al plano π.

7: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras, y la urna B contiene 2 bolas verdes, 4 bolas negras y 3 bolas rojas. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

a) **[0,75 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea roja.
b) **[0,75 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea verde, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.
c) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

El cociente intelectual (CI) de los estudiantes universitarios sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que la media es igual a 10 veces la desviación típica y que el 93,32% de los estudiantes tiene un CI menor de 115.

a) **[1,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.
b) **[1 p.]** Si se eligen al azar 5 estudiantes universitarios, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos tengan un CI mayor de 115?

SOLUCIONES

1: [2,5 p.] La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años. La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora. Además, dentro de 4 años la edad de Aurora será la edad que actualmente tiene Esperanza. Calcule las edades de cada una de ellas.

Llamamos "x" a la edad de Carmela, "y" a la edad de Esperanza, "z" a la edad de Aurora.

"*La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años*" → $x+y+z=68$

"*La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora*" → $x=5+\frac{y+z}{2}$

"D*entro de 4 años la edad de Aurora ($z+4$) será la edad que actualmente tiene Esperanza (y)*" → $z+4=y$

El sistema de ecuaciones queda:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=68 \\ x=5+\dfrac{y+z}{2} \\ z+4=y \end{array}\right\}$$

Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=68 \\ x=5+\dfrac{y+z}{2} \\ z+4=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=68 \\ 2x=10+y+z \\ z+4=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+(z+4)+z=68 \\ 2x=10+(z+4)+z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z=64 \\ 2x-2z=14 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z=64 \\ x-z=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z=64 \\ x=7+z \end{array}\right\} \Rightarrow 7+z+2z=64 \Rightarrow 3z=57 \Rightarrow \boxed{z=\frac{57}{3}=19} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=7+19=26} \\ \boxed{y=19+4=23} \end{cases}$$

La edad de Carmela es 26, la de Esperanza es 23 y la de Aurora es 19.

2: Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Si I denota la matriz identidad de orden 3, compruebe que $A^3=-I$ y calcule A^{2023}.
b) **[0,5 p.]** Calcule la inversa de A.
c) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AX-B^T=A^2$, donde B^T denota la matriz traspuesta de B.

a) Comprobamos que $A^3=-I$.

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3-4 & 0-12+12 & 0-15+16\\ 0-4+5 & 3+16-15 & 4+20-20\\ 0+3-4 & -3-12+12 & -4-15+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0-1 & -3+0+3 & -4+0+4\\ 0+4-4 & 3-16+12 & 4-20+16\\ 0-3+3 & -3+12-9 & -4+15-12\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^3=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=-I}$$

Calculamos A^{2023}.

$$\begin{array}{r|l}2023 & 3\\ 223 & 674\\ 13 & \\ 1 & \end{array}$$

Tenemos que $2023=3\cdot 674+1$

$$A^{2023}=A^{3\cdot 674+1}=A^{3\cdot 674}\cdot A^1=\left(A^3\right)^{674}\cdot A=\left(-I\right)^{674}\cdot A=\left(-I\right)\cdot ...674 veces.....\cdot\left(-I\right)\cdot A=I\cdot A=A$$

$$\boxed{A^{2023}=A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}}$$

b) Comprobamos si la matriz A es invertible.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{vmatrix}=0+15+12-16-12-0=-1\neq 0$$

La matriz A es invertible.

$$A=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}0&1&-1\\3&-4&3\\4&-5&4\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0&1&-1\\3&-4&3\\4&-5&4\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-4&3\\-5&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&3\\4&4\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&-4\\4&-5\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&-1\\-5&4\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&-1\\4&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\4&-5\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&-1\\-4&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&-1\\3&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\3&-4\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=-\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&-4&-4\\1&3&3\end{pmatrix}}$$

También se pude hacer teniendo en cuenta el apartado a).

$$A^3=-I\Rightarrow A^2\cdot A=-I\Rightarrow -A^2\cdot A=I\Rightarrow\left(-A^2\right)\cdot A=I\Rightarrow A^{-1}=-A^2$$

Como A^2 lo hemos calculado en el apartado a), tenemos que:

$$\boxed{A^{-1}=-A^2=-\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&-4&-4\\1&3&3\end{pmatrix}}$$

c) En el apartado anterior se ha calculado la inversa de A, la utilizamos para resolver la ecuación.

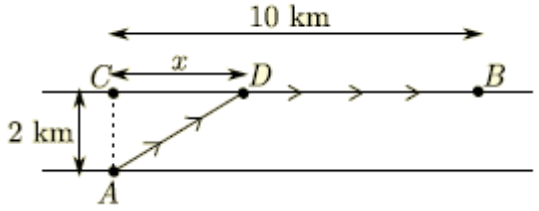
$$AX-B^T=A^2\Rightarrow AX=B^T+A^2\Rightarrow X=A^{-1}\left(B^T+A^2\right)$$

$$B^T+A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&5&5\\-1&-3&-2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&-4&-4\\1&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\1&5&5\\-1&-3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0+1&1+0+3&2+0+2\\0-4+4&-1-20+12&-2-20+8\\0+3-3&1+15-9&2+15-6\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}1&4&4\\0&-9&-14\\0&7&11\end{pmatrix}}$$

3: En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).
Un triatleta participa en una competición de SwimRun en la que debe ir desde el punto A, situado en la orilla de un canal de agua en reposo de 2 kilómetros de ancho, hasta el punto B, situado en la otra orilla del canal y a una distancia de 10 kilómetros del punto C (punto opuesto de A), tal y como se indica en la figura. Para ello, debe ir nadando desde A hasta cualquier punto D de la otra orilla del canal y continuar corriendo desde D hasta B. El triatleta tiene plena libertad para elegir D.



a) **[1 p.]** Sabiendo que el triatleta es capaz de nadar a una velocidad de 4 km/h y de correr a una velocidad de 12 km/h, demuestre que el tiempo total empleado por el triatleta en ir desde A hasta B (pasando por D) viene dado por la función $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{10-x}{12}$, donde *x* denota la distancia de C a D.
b) **[1,5 p.]** Calcule cuál debe ser el punto D para que el tiempo empleado por el triatleta en ir desde A hasta B sea mínimo. ¿Cuánto tardará en dicho caso?

a) Se observa en la figura, la distancia que el triatleta debe nadar es la distancia de A a D y la distancia que debe correr es la distancia de D a B.
La distancia de A a D es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son 2 y *x* km, por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:

$$d(A,D)=\sqrt{x^2+2^2}=\sqrt{x^2+4}\,km$$

Como nada a una velocidad de 4 km/h, el tiempo invertido para recorrer esa distancia es:

$$\text{velocidad}=\frac{espacio}{tiempo}\Rightarrow \text{Tiempo nadando}=\frac{espacio}{velocidad}=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}\,horas$$

Por otro lado, a partir de la figura se ve que la distancia de D a B es

$$\text{Distancia}(D,B)=10-x\quad km$$

Como corre a una velocidad de 12 km/h, el tiempo invertido para recorrer esa distancia es

$$\text{Tiempo corriendo}=\frac{espacio}{velocidad}=\frac{10-x}{12}\,horas$$

Por lo tanto, el tiempo total empleado para ir de A a B, en función de *x* es

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{10-x}{12}\,horas$$

b) Se trata de calcular para qué valor de *x* se alcanza el mínimo de la función *f(x)*, teniendo en cuenta que los valores "permitidos" de *x* son de 0 a 10.
Para estudiar el crecimiento y/o decrecimiento de la función *f(x)* en su dominio, estudiamos en primer lugar su derivada obteniendo sus puntos críticos (candidatos a ser extremos relativos).

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{10-x}{12}=\frac{1}{4}\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{12}(10-x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4}}\left(\cancel{2}x\right)+\frac{1}{12}(-1)=\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}-\frac{1}{12}$$

Igualamos a cero la derivada

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}-\frac{1}{12}=0\Rightarrow\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}=\frac{1}{12}\Rightarrow 12x=4\sqrt{x^2+4}\Rightarrow 3x=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(3x)^2=\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2=x^2+4\Rightarrow 9x^2=x^2+4\Rightarrow 8x^2=4\Rightarrow 2x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

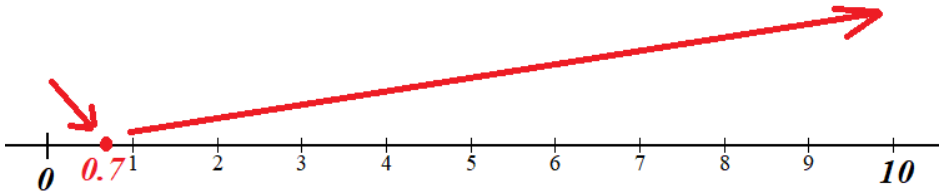
$$\Rightarrow x=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\simeq 0.707\,km$$

Nos quedamos solo con la raíz positiva porque no tiene sentido una distancia negativa.
Para comprobar si se trata de un mínimo, podemos hacerlo estudiando el signo de la derivada antes y después de $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\simeq 0.707$

$$f'(0.5)=\frac{0.5}{4\sqrt{0.5^2+4}}-\frac{1}{12}=-0.02<0$$

$$f'(2)=\frac{2}{4\sqrt{2^2+4}}-\frac{1}{12}=0.09>0$$

Por lo que la función sigue el esquema:



La función presenta un mínimo en $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\simeq 0.707$.

Para tardar el mínimo tiempo posible el triatleta debe ir nadando desde la salida en el punto A hasta el punto D situado aproximadamente a 707 metros del punto C, y a partir de ahí continuar corriendo hasta la meta situada en el punto B. El tiempo que tardaría es $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+4}}{4}+\frac{10-\frac{1}{\sqrt{2}}}{12}\simeq 1.3\,horas$. Tardaría 1 hora y 18 minutos aproximadamente.

4: Considere la función $f(x)=x\,ln(x)$, definida para $x>0$.

a) **[1 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.
b) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.
c) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función *f(x)* cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(1,0)$.

a) $f(x)=x\,ln(x)\Rightarrow f'(x)=ln(x)+x\frac{1}{x}=\ln(x)+1$

Averiguamos cuando se anula la derivada para obtener sus puntos críticos.

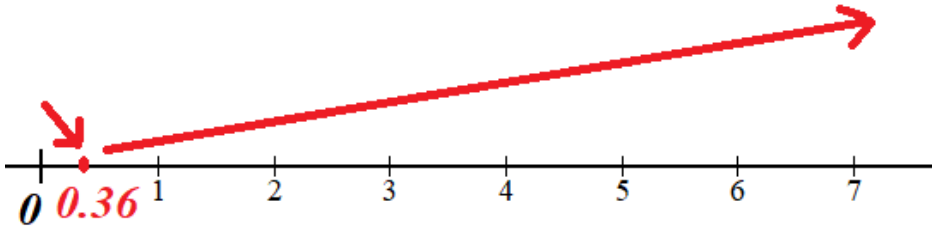
$$f'(x)=0\Rightarrow \ln(x)+1=0\Rightarrow \ln(x)=-1\Rightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}\simeq 0.368$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

$$f'(0.2)=\ln(0.2)+1=-0.6<0$$

$$f'(2)=\ln(2)+1=1.69>0$$

La función sigue el esquema siguiente



La función decrece en $(0,1/e)$ y crece en $(1/e,+\infty)$

b) Utilizamos el método de integración por partes.

$$\int f(x)dx=\int x\,ln(x)dx=\left\{\begin{array}{l} u=\ln(x)\rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=xdx\rightarrow v=\int xdx=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\}=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}=\boxed{\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}+C}$$

c) La primitiva es $F(x)=\int f(x)dx=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}+C$, calculada en el apartado anterior.

Sustituimos el punto $(1,0)$ en la primitiva.

$$F(1)=0\Rightarrow\frac{1^2}{2}\ln(1)-\frac{1^2}{4}+C=0\Rightarrow-\frac{1}{4}+C=0\Rightarrow\boxed{C=\frac{1}{4}}$$

La primitiva es $\boxed{F(x)=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}}$

5: Considere las siguientes rectas:

$$r: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

a) **[1,5 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule la ecuación del plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

a) Obtenemos punto y vector director de cada recta.

$$r: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(-2,3,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1,1,0) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} Q_s(0,1,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,0,1) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales, por lo que las rectas ni son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{0}{1}$$

Comprobamos si se cortan o cruzan calculando el producto mixto de $\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$.

$$\left.\begin{matrix} Q_s(0,1,0) \\ P_r(-2,3,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (0,1,0) - (-2,3,0) = (2,-2,0)$$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,0,1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (2,-2,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 0 - 0 - 2 = 0$$

Al ser nulo el producto mixto las rectas se cortan (están en un mismo plano).

b) Hallamos la ecuación del plano que las contiene utilizando los vectores directores de las rectas que también son los directores del plano y un punto cualquiera, por ejemplo $Q_s(0,1,0)$.

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,0,1) \\ Q_s(0,1,0) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - z - (-1)(y-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x + y - z - 1 = 0}$$

Hallamos el ángulo que forman las rectas que es el ángulo formado por sus vectores directores.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(-1,1,0)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos(r,s)=\cos\left(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{u_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{u_s}\right|}=\frac{\left|(-1,1,0)(1,0,1)\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}$$

$$\cos(r,s)=\frac{|-1|}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow(r,s)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=60^{o}$$

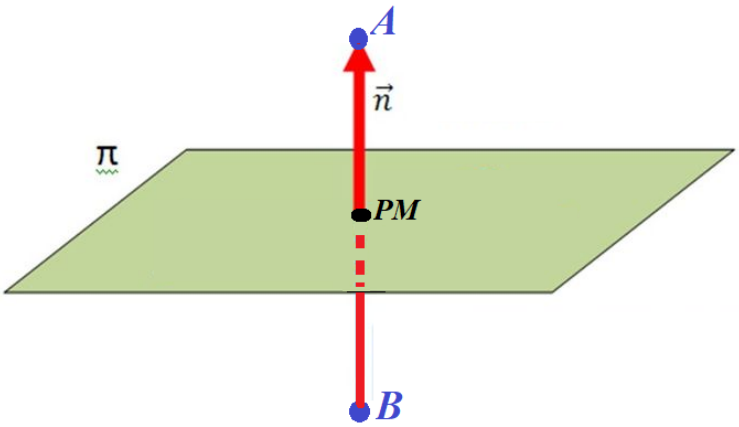
Las rectas forman un ángulo de 60º.

6: Considere los puntos $A=(1,-1,\ 2)$ y $B=(3,\ 5,\ 2)$.

a) **[1,5 p.]** Determine la ecuación del plano π perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de dicho segmento.

b) **[1 p.]** Calcule la distancia del punto A al plano π.

a) La situación planteada es la del dibujo.



Hallamos el punto medio de dicho segmento. $\overline{AB}$.

$$\left.\begin{matrix}A=(1,-1,\ 2)\\ B=(3,\ 5,\ 2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow PM=\frac{(1,-1,\ 2)+(3,\ 5,\ 2)}{2}=(2,2,2)$$

Como el plano es perpendicular al segmento $\overline{AB}$ el vector $\overrightarrow{AB}$ es el vector normal del plano, por lo que su ecuación es:

$$\left.\begin{matrix}A=(1,-1,\ 2)\\ B=(3,\ 5,\ 2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(3,\ 5,\ 2)-(1,-1,\ 2)=(2,6,0)$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(2,6,0)\\ PM=(2,2,2)\in\pi\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\pi: 2x+6y+D=0\\ PM=(2,2,2)\in\pi\end{matrix}\right\}\Rightarrow 4+12+D=0\Rightarrow D=-16\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: 2x+6y-16=0\Rightarrow \boxed{\pi: x+3y-8=0}$$

b) Utilizamos la fórmula de distancia de un punto a un plano.

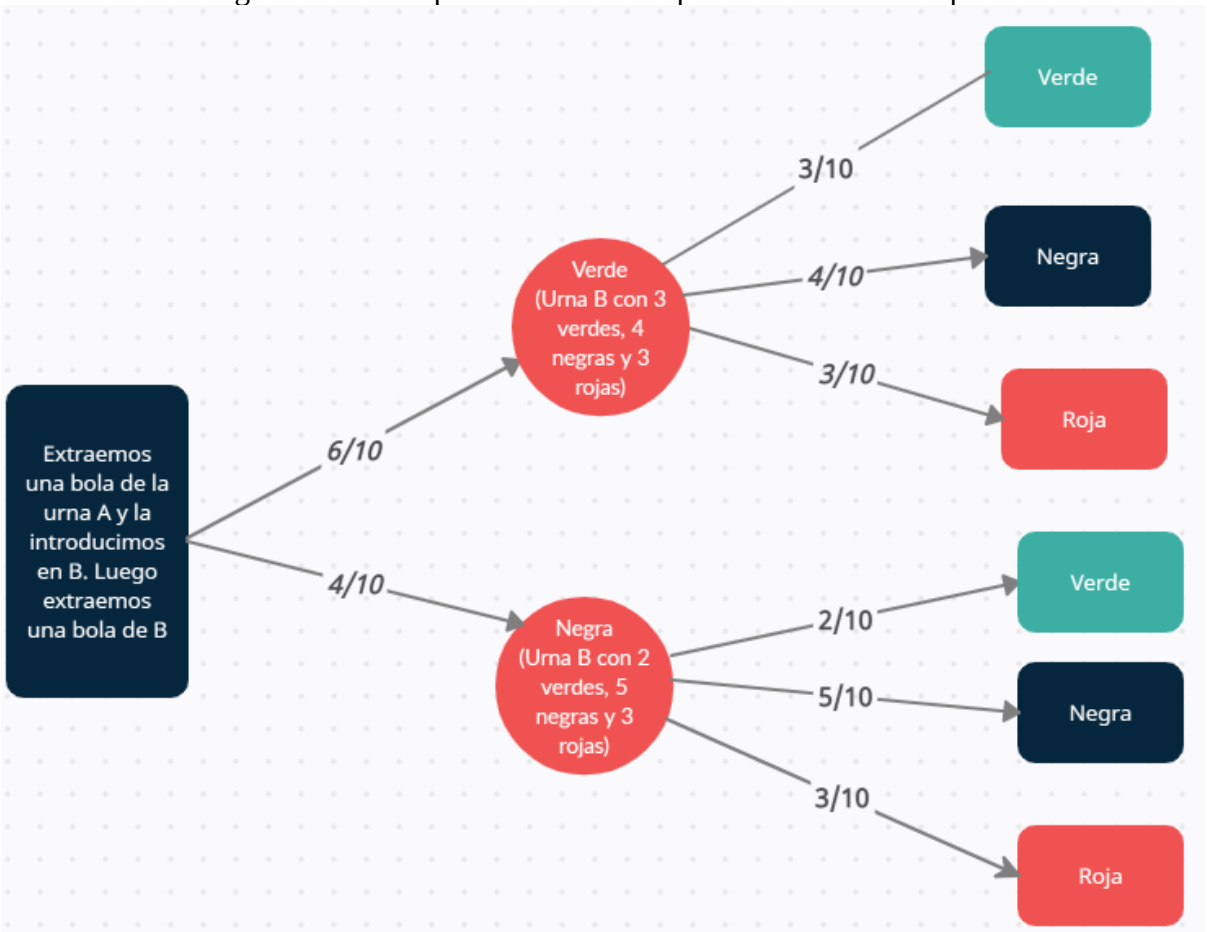
$$\left.\begin{matrix}A=(1,-1,\ 2)\\ \pi: x+3y-8=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \boxed{d(A,\pi)=\frac{|1+3(-1)-8|}{\sqrt{1^2+3^2+0^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}\,u}$$

También se puede obtener esta distancia como la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}=(2,6,0)\Rightarrow \boxed{d(A,\pi)=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{2}=\frac{\sqrt{2^2+6^2}}{2}=\frac{\sqrt{40}}{2}=\sqrt{10}\,u}$$

7: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras, y la urna B contiene 2 bolas verdes, 4 bolas negras y 3 bolas rojas. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:
a) **[0,75 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea roja.
b) **[0,75 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea verde, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.
c) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

Realizamos un diagrama de árbol para establecer las probabilidades del experimento.



Llamamos *Va* al suceso "Sacar Verde en urna A", *Na* al suceso "Sacar Negra en urna A, de la misma manera llamamos *Vb* a "Sacar verde en urna B", *Nb* a "Sacar Negra en urna B" y *Rb* a "Sacar Roja en urna B".

a) $P(Rb) = P(Va)\cdot P(Rb/Va) + P(Na)\cdot P(Rb/Na) = \frac{6}{10}\cdot\frac{3}{10} + \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{10} = \frac{3}{10} = \boxed{0.3}$

b) Es una probabilidad a priori que aparece en una de las ramas del diagrama de árbol.

$$P(Vb/Va) = \frac{3}{10} = \boxed{0.3}$$

c) $P(Nb) = P(Va)\cdot P(Nb/Va) + P(Na)\cdot P(Nb/Na) = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10} + \frac{4}{10}\cdot\frac{5}{10} = \frac{44}{100} = \boxed{0.44}$

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

El cociente intelectual (CI) de los estudiantes universitarios sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que la media es igual a 10 veces la desviación típica y que el 93,32% de los estudiantes tiene un CI menor de 115.

a) **[1,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

b) **[1 p.]** Si se eligen al azar 5 estudiantes universitarios, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos tengan un CI mayor de 115?

a) X = CI de un estudiante universitario. $X = N(\mu, \sigma)$

"*Se sabe que la media es igual a 10 veces la desviación típica*" → $\mu = 10\sigma$

"*El 93,32% de los estudiantes tiene un CI menor de 115*" → $P(X \le 115) = 0.9332$

Obtenemos la ecuación que nos falta del dato de la probabilidad.

$$P(X \le 115) = 0.9332 \Rightarrow \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{115-\mu}{\sigma}\right) = 0.9332 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{115-\mu}{\sigma}\right) = 0.9332 \Rightarrow \{\text{Miramos en la tabla N}(0,1)\} \Rightarrow \frac{115-\mu}{\sigma} = 1.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 115 - \mu = 1.5\sigma \Rightarrow \mu = 115 - 1.5\sigma$$

Unimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} \mu = 115 - 1.5\sigma \\ \mu = 10\sigma \end{array}\right\} \Rightarrow 115 - 1.5\sigma = 10\sigma \Rightarrow 115 = 11.5\sigma \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{115}{11.5} = 10} \Rightarrow \boxed{\mu = 10 \cdot 10 = 100}$$

La media es 100 y la desviación típica es 10.

b) Es una variable binomial. Determinamos sus parámetros.

Y = Número de estudiantes con un CI mayor de 115. *Y = B(n,p)*

El número de repeticiones es *n = 5*.

Como $P(X \le 115) = 0.9332$ entonces $p = P(X > 115) = 1 - P(X \le 115) = 1 - 0.9332 = 0.0668$

Tenemos que la binomial es *Y = B(5, 0.0668)*

Calculamos $P(Y = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0.0668^3 \cdot (1 - 0,0668)^2 \simeq \boxed{0.0026}$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II.

EBAU2021 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x + ay - z = 0 \\ 2x + y + az = 0 \\ x + 5y - az = a + 1 \end{cases}$$

a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,75 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Si se denota por tr(A) la traza de la matriz A (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) y por |A| el determinante de A, compruebe que, para cualquier valor de *a*, se cumple la ecuación $A^2 = tr(A)A - |A|I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.

b) **[0.5 p.]** Determine para qué valores de *a* la matriz A es regular (o inversible).

c) **[1 p.]** Para $a = -3$, resuelva la ecuación matricial $AX - A^t = A$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

3: Dada la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, se pide:

a) **[1,5 p.]** Calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos) y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

4:

a) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int x sen(x^2)\, dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución).

b) **[1 p.]** Determine el menor valor de a > 0 para el cual se cumple $\int_0^a x sen(x^2)\, dx = 1$

5: Considere las rectas de ecuaciones

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}.$$

a) **[0,75 p.]** Compruebe que las rectas se cortan en un punto y calcule su punto de corte.

b) **[1 p.]** Determine el ángulo que forman las dos rectas.

c) **[0,75 p.]** Calcule la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

6: Los puntos $A=(2,0,0)$ y $B=(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C se encuentra en la recta *r* dada por

$$r: \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del tercer vértice C sabiendo que la recta *r* es perpendicular a la recta que pasa por A y C.

b) **[1 p.]** Determine si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en A y calcule su área.

7: Una urna contiene cinco bolas negras, numeradas del 1 al 5, y siete bolas blancas, numeradas del 1 al 7. Se saca de la urna una bola al azar. Calcule:

a) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola sea blanca.

b) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola esté numerada con un número par.

c) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola esté numerada con un número par, sabiendo que es una bola blanca.

d) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola sea blanca y esté numerada con un número par.

e) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola sea blanca, sabiendo que está numerada con un número par

8: Juan es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Él se defiende diciendo que no es para tanto y que la tutora le tiene manía. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximos 9 días Juan llega tarde como mucho 2 días, la tutora le sube 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Juan llegue tarde a clase cada día es 0,45, determine:

a) **[1 p.]** El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Juan llega tarde a clase en los próximos 9 días. ¿Cuáles son sus parámetros?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que Juan consiga la ansiada subida de 1 punto en la nota final?

SOLUCIONES

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x + ay - z = 0 \\ 2x + y + az = 0 \\ x + 5y - az = a + 1 \end{cases}$$

a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,75 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Realizamos el estudio completo y luego respondemos a las preguntas planteadas en cada apartado.

Consideramos la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 5 & -a \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 1 & 5 & -a & a+1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos donde se anula el determinante de la matriz de coeficientes *A*.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 5 & -a \end{vmatrix} = -a + a^2 - 10 + 1 + 2a^2 - 5a = 3a^2 - 6a - 9$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3a^2 - 6a - 9 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $a \neq -1 \quad y \quad a \neq 3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de la ampliada A/B también es 3, así como el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado (**solución única)**.

CASO 2. $a = -1$

Las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Como la matriz ampliada solo tiene añadida una cuarta columna con todo ceros el rango de A y de A/B van a ser el mismo, por lo que el sistema es compatible. Como el rango de A no es 3 pues

el determinante es nulo, el rango de A = Rango de A/B pero menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $a=3$

Las matrices quedan $A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&1&3\\1&5&-3\end{pmatrix}$ y $A/B=\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\2&1&3&0\\1&5&-3&4\end{pmatrix}$.

Transformamos la matriz A/B en otra matriz triangular equivalente con el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\2&1&3&0\\1&5&-3&4\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Fila } 2^{\text{a}}-2\cdot\text{Fila } 1^{\text{a}}\\ 2\quad 1\quad 3\quad 0\\ -2\quad -6\quad 2\quad 0\\ \hline 0\quad -5\quad 5\quad 0\\ \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\text{Fila } 3^{\text{a}}-\text{Fila } 1^{\text{a}}\\ 1\quad 5\quad -3\quad 4\\ -1\quad -3\quad 1\quad 0\\ \hline 0\quad 2\quad -2\quad 4\\ \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\0&-5&5&0\\0&2&-2&4\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\frac{1}{5}\cdot\text{Fila } 2^{\text{a}}\rightarrow\text{Nueva Fila } 2^{\text{a}}\\ \frac{1}{2}\cdot\text{Fila } 3^{\text{a}}\rightarrow\text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\0&-1&1&0\\0&1&-1&2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Fila } 3^{\text{a}}+\text{Fila } 2^{\text{a}}\\ 0\quad 1\quad -1\quad 2\\ 0\quad -1\quad 1\quad 0\\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad 2\\ \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\end{matrix}\right\}\Rightarrow(A/B)'=\begin{pmatrix}\overbrace{1&3&-1}^{A}&0\\0&-1&1&0\\\underbrace{0&0&0}_{A}&2\end{pmatrix}$$

Observando la matriz triangular obtenida vemos que al quitar la 4ª columna nos queda una matriz triangular con 2 filas no nulas, el rango de A es 2, pero si la miramos al completo observamos que hay 3 filas no nulas, el rango de A/B es 3. Los rangos de A y de A/B son distintos.
Por lo que el sistema es incompatible (no tiene solución).

a) El sistema tiene solución única para $a\neq -1$ y $a\neq 3$.

b) El sistema tiene infinitas soluciones para $a=-1$. Averiguamos su expresión utilizando el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$\left\{\begin{matrix}x-y-z=0\\2x+y-z=0\\x+5y+z=0\end{matrix}\right.\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Ecuación } 2^{\text{a}}-2\cdot\text{Ecuación } 1^{\text{a}}\\ 2x\quad +y\quad -z\quad =0\\ -2x\quad +2y\quad +2z\quad =0\\ \hline 0\quad 3y\quad +z\quad =0\\ \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\text{Ecuación } 3^{\text{a}}-\text{Ecuación } 1^{\text{a}}\\ x\quad +5y\quad +z\quad =0\\ -x\quad +y\quad +z\quad =0\\ \hline 0\quad 6y\quad +2z\quad =0\\ \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ 3y+z=0 \\ 6y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - 2 \cdot \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ 6y+2z=0 \\ -6y-2z=0 \\ \hline 0=0 \\ \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ 3y+z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ 3y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ \boxed{z=-3y} \end{cases} \Rightarrow x-y+3y=0 \Rightarrow x+2y=0 \Rightarrow \boxed{x=-2y}$$

Las soluciones del sistema son $x = -2t$; $y = t$, $z = -3t$.

c) Para $a=3$ el sistema no tiene solución.

2: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Si se denota por tr(A) la traza de la matriz A (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) y por |A| el determinante de A, compruebe que, para cualquier valor de *a*, se cumple la ecuación $A^2 = tr(A)A - |A|I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.

b) **[0.5 p.]** Determine para qué valores de *a* la matriz A es regular (o inversible).

c) **[1 p.]** Para $a = -3$, resuelva la ecuación matricial $AX - A^t = A$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calculamos la expresión de ambos miembros de la igualdad $A^2 = tr(A)A - |A|I$

Primer miembro → $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & 2a+2a \\ -2-2 & -a+4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4-a & 4a \\ -4 & 4-a \end{pmatrix}}$

Segundo miembro → $tr(A)A - |A|I = (2+2)\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= 4\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - (4+a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4a \\ -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+a & 0 \\ 0 & 4+a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8-4-a & 4a-0 \\ -4-0 & 8-4-a \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4-a & 4a \\ -4 & 4-a \end{pmatrix}}$$

Como se comprueba se obtiene el mismo resultado.

b) Vemos cuando el determinante de A es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$$

La matriz A es regular para cualquier valor de *a* distinto de –4.

c) Para $a = -3$ la matriz es invertible.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \neq 0$$

Calculamos su inversa.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación la matriz X.

$$AX - A^t = A \Rightarrow AX = A + A^t \Rightarrow X = A^{-1}\left(A + A^t\right)$$

Sustituimos y obtenemos el valor de la matriz X.

$$X = A^{-1}\left(A + A^t\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-12 & -8+12 \\ 4-8 & -4+8 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}}$$

3: Dada la función $f(x)=x^2e^{-x}$ definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$, se pide:
a) **[1,5 p.]** Calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos) y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

a) Derivamos e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=x^2e^{-x}\Rightarrow f\,'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2-x)xe^{-x}$$

$$f\,'(x)=0\Rightarrow(2-x)xe^{-x}=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos, comprobamos el comportamiento de la función antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty,0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f\,'(-1)=(2-(-1))(-1)e^{-(-1)}=-3e<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En $(0,2)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f\,'(1)=(2-1)(1)e^{-1}=\frac{3}{e}>0$. La función crece en $(0,2)$
- En $(2,+\infty)$ tomo $x = 3$ y la derivada vale $f\,'(3)=(2-3)(3)e^{-3}=-\frac{3}{e^3}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:

La función crece en $(0,2)$ y decrece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$.

Como $f(0)=0^2e^{-0}=0$ las coordenadas del mínimo relativo son $P(0,0)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 2$.

Como $f(2)=2^2e^{-2}=\frac{4}{e^2}$ las coordenadas del máximo relativo son $Q\left(2,\frac{4}{e^2}\right)$

b)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{+\infty}{e^{+\infty}}=\frac{\infty}{\infty}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=\boxed{0}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=(-\infty)^2e^{+\infty}=(+\infty)(+\infty)=\boxed{+\infty}$$

4:

a) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int xsen\left(x^2\right)dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución).

b) **[1 p.]** Determine el menor valor de a > 0 para el cual se cumple $\int_0^a xsen\left(x^2\right)dx = 1$

a)

$$\int xsen\left(x^2\right)dx = \left\{\begin{array}{l} x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array}\right\} = \int \cancel{x}\, sen\left(t\right)\frac{dt}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int sentdt = -\frac{1}{2}\cos t =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ x^2 = t \end{array}\right\} = \boxed{-\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right) + K}$$

b)

$$\int_0^a xsen\left(x^2\right)dx = 1 \Rightarrow \left[-\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right)\right]_0^a = 1 \Rightarrow \left[-\frac{1}{2}\cos\left(a^2\right)\right] - \left[-\frac{1}{2}\cos\left(0^2\right)\right] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\cos\left(a^2\right) + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow -\cos\left(a^2\right) + 1 = 2 \Rightarrow \cos\left(a^2\right) = -1 \Rightarrow a^2 = \arccos\left(-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \pi + 2\pi k, \; siendo \; k = 0,1,2,3,4,...$$

Como nos piden el valor de *a* positivo más pequeño tomamos $k = 0$.

$$a^2 = \pi \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{\pi}}$$

5: Considere las rectas de ecuaciones

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1} \quad \text{y} \quad s:\begin{cases}x-2y=-1\\ y+z=1\end{cases}.$$

a) **[0,75 p.]** Compruebe que las rectas se cortan en un punto y calcule su punto de corte.

b) **[1 p.]** Determine el ángulo que forman las dos rectas.

c) **[0,75 p.]** Calcule la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

a)

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(1,1,-1)\\ P_r=(1,0,1)\end{cases}$$

$$s:\begin{cases}x-2y=-1\\ y+z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1+2y\\ z=1-y\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}x=-1+2\lambda\\ y=\lambda\\ z=1-\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_s}=(2,1,-1)\\ Q_s=(-1,0,1)\end{cases}$$

Comprobamos si sus vectores directores tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{u_r}=(1,1,-1)\\ \overrightarrow{v_s}=(2,1,-1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}\neq\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales y por tanto las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan.

Consideramos los vectores $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$ y vemos si su producto mixto es nulo o no.

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{P_rQ_s}=(-1,0,1)-(1,0,1)=(-2,0,0)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,1,-1)\\ \overrightarrow{v_s}=(2,1,-1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix}-2&0&0\\1&1&-1\\2&1&-1\end{vmatrix}=2-2=0$$

El producto mixto es nulo y las rectas son coplanarias con distinta dirección y por lo tanto se cortan en un punto.
Averiguamos el punto de corte resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{matrix}r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}\Rightarrow r:\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=\alpha\\ z=1-\alpha\end{cases}\\ s:\begin{cases}x-2y=-1\\ y+z=1\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}x=-1+2\lambda\\ y=\lambda\\ z=1-\lambda\end{cases}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}1+\alpha=-1+2\lambda\\ \alpha=\lambda\\ 1-\alpha=1-\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-2+2\lambda\\ \alpha=\lambda\\ \alpha=\lambda\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda=-2+2\lambda\Rightarrow 2=\lambda\Rightarrow\begin{cases}x=-1+4=3\\ y=2\\ z=1-2=-1\end{cases}\Rightarrow C(3,2,-1)$$

El punto de corte de las rectas es $C(3,2,-1)$.

Se puede responder este apartado resolviendo directamente el sistema y comprobando que las rectas se cortan en un único punto.

b) El ángulo formado entre ambas rectas es el ángulo que forman sus vectores directores.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,-1)\\ \overrightarrow{v_s}=(2,1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s}\right)=\frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{v_s}}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_s}\right|}=\frac{(1,1,-1)(2,1,-1)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2+1+1}{\sqrt{3}\sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{18}}$$

$$(r,s)=\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s}\right)=\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{18}}\right)\simeq 19,47^o$$

Las rectas forman un ángulo de 19º.

c) El plano π que contiene las dos rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y el punto $C(3,2,-1)$ pertenece al plano.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{u_r}=(1,1,-1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(2,1,-1)\\ C(3,2,-1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x-3 & y-2 & z+1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{-x+3}-2y+4+z+1-2z-2+y-2\cancel{+x-3}=0\Rightarrow -y-z+1=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv y+z-1=0}$$

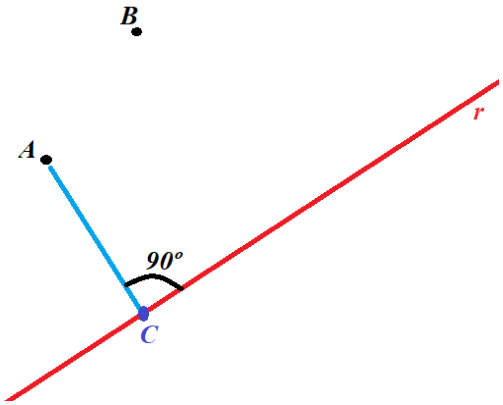
6: Los puntos $A=(2,0,0)$ y $B=(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C se encuentra en la recta *r* dada por

$$r:\begin{cases}4x+3z=33\\ y=0\end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del tercer vértice C sabiendo que la recta *r* es perpendicular a la recta que pasa por A y C.

b) **[1 p.]** Determine si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en A y calcule su área.

a) La situación planteada es la del dibujo siguiente.



Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta *r*.

$$r:\begin{cases}4x+3z=33\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P(0,0,11)\in r\\ Q(3,0,7)\in r\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}P(0,0,11)\in r\\ \vec{v_r}=\overrightarrow{QP}=(0,0,11)-(3,0,7)=(-3,0,4)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases}x=-3\alpha\\ y=0\\ z=11+4\alpha\end{cases}$$

Sabemos que el punto C pertenece a la recta *r*, por lo que cumple sus ecuaciones.

El punto C tiene coordenadas $C(-3a,0,11+4a)$.

Como el vector $\overrightarrow{AC}$ es perpendicular a la recta *r*, el producto escalar de $\overrightarrow{AC}$ y $\vec{v_r}$ debe ser cero.

$$\overrightarrow{AC}=(-3a,0,11+4a)-(2,0,0)=(-3a-2,0,11+4a)$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{v_r}=0\Rightarrow(-3a-2,0,11+4a)(-3,0,4)=0\Rightarrow 9a+6+0+44+16a=0\Rightarrow$$

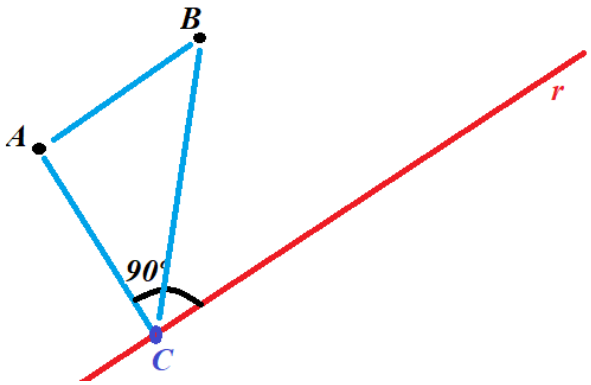
$$\Rightarrow 25a=-50\Rightarrow a=-2\Rightarrow\left.\begin{matrix}C(-3a,0,11+4a)\\ a=-2\end{matrix}\right\}\Rightarrow C(6,0,3)$$

El punto C tiene coordenadas $C(6,0,3)$

b) Para que tenga ángulo recto en A el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(6,0,3)-(2,0,0)=(4,0,3)\\ \overrightarrow{AB}=(-1,12,4)-(2,0,0)=(-3,12,4)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=(4,0,3)(-3,12,4)=-12+12=0$$

El ángulo en el vértice A es de 90º.



Por ser un triángulo rectángulo el área del triángulo es la mitad del producto de la base (módulo del vector $\overrightarrow{AC}$) por la altura (módulo del vector $\overrightarrow{AB}$).

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(4,0,3)\rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+0^2+3^2}=5\\ \overrightarrow{AB}=(-3,12,4)\rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-3)^2+12^2+4^2}=13\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{Área=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}{2}=\frac{5\cdot 13}{2}=32.5\,u^2}$$

7: Una urna contiene cinco bolas negras, numeradas del 1 al 5, y siete bolas blancas, numeradas del 1 al 7. Se saca de la urna una bola al azar. Calcule:

a) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola sea blanca.

b) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola esté numerada con un número par.

c) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola esté numerada con un número par, sabiendo que es una bola blanca.

d) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola sea blanca y esté numerada con un número par.

e) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola sea blanca, sabiendo que está numerada con un número par

Nombramos y describimos los sucesos asociados al experimento aleatorio.

B = Sacar bola blanca = {1 blanco, 2 blanco, 3 blanco, 4 blanco, 5 blanco, 6 blanco, 7 blanco}

$\overline{B}$ = Sacar bola negra.

A = Sacar número par = {2 **negro**, 4 **negro**, 2 blanco, 4 blanco, 6 blanco}.

$\overline{A}$ = Sacar impar = {1 **negro**, 3 **negro**, 5 **negro**, 1 blanco, 3 blanco, 5 blanco, 7 blanco}.

a) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(B)=\frac{7\ bolas\ blancas}{12\ bolas}=\boxed{\frac{7}{12}\simeq 0.583}$$

b) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(A)=\frac{5\ bolas\ con\ número\ par}{12\ bolas}=\boxed{\frac{5}{12}\simeq 0.417}$$

c) Hemos reducido los casos posibles a sólo 7 bolas blancas numeradas del 1 al 7.

Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(A/B)=\frac{\text{Nº de bolas blancas con número par}}{\text{Nº bolas blancas}}=\boxed{\frac{3}{7}\simeq 0.429}$$

d) Sólo hay 3 bolas blancas numeradas con un número par.
Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(B\cap A)=\boxed{\frac{3}{12}=0.25}$$

e) A = Sacar número par = {2 negro, 4 negro, 2 blanco, 4 blanco, 6 blanco}

Si sabemos que es par, los casos posibles son solamente 5 →{2 negro, 4 negro, 2 blanco, 4 blanco, 6 blanco}.
De ellos favorables al suceso (blancas) hay 3 → {2 blanco, 4 blanco, 6 blanco}.

$$P(B/A)=\boxed{\frac{3}{5}=0.6}$$

8: Juan es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Él se defiende diciendo que no es para tanto y que la tutora le tiene manía. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximos 9 días Juan llega tarde como mucho 2 días, la tutora le sube 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Juan llegue tarde a clase cada día es 0,45, determine:

a) **[1 p.]** El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Juan llega tarde a clase en los próximos 9 días. ¿Cuáles son sus parámetros?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que Juan consiga la ansiada subida de 1 punto en la nota final?

a) X = número de días que Juan llega tarde a clase en los próximos 9 días.
X es una variable aleatoria binomial, pues la probabilidad de llegar tarde a clase es 0,45, independientemente del día y solo puede ocurrir dos cosas: que llegue tarde o no.
Los parámetros son n = 9 que es el número de repeticiones y p = probabilidad de llegar tarde un día a clase = 0.45.

X = B(9, 0.45)

b) La media es $n \cdot p = 9 \cdot 0.45 = 4.05$ veces.
La desviación típica es $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{9 \cdot 0.45 \cdot 0.55} = 1.49$

c) Para conseguir la subida de 1 punto debe llegar tarde a clase ninguno, uno o dos días.

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \{\text{Mirando en la tabla de la binomial}\} =$$
$$= 0.0046 + 0.0339 + 0.1110 = \boxed{0.1495}$$

		p											
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4444	0,4550	0,4800	0,4950	0,
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1111	0,1225	0,1600	0,2025	0,
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4084	0,
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2222	0,2389	0,2880	0,3341	0,
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0370	0,0429	0,0640	0,0911	0,
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951	0,3845	0,3456	0,2995	0,
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2963	0,3105	0,3456	0,3675	0,
	3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0988	0,1115	0,1536	0,2005	0,
	4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0123	0,0150	0,0256	0,0410	0,
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2437	0,1866	0,1359	0,
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110	0,2780	0,
	3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2195	0,2355	0,2765	0,3032	0,
	4	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0823	0,0951	0,1382	0,1861	0,
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0165	0,0205	0,0369	0,0609	0,
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0014	0,0018	0,0041	0,0083	0,
7	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,
	1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1306	0,0872	0,
	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,3073	0,2985	0,2613	0,2140	0,
	3	0,0000	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2561	0,2679	0,2903	0,2918	0,
	4	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1280	0,1442	0,1935	0,2388	0,
	5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0384	0,0466	0,0774	0,1172	0,
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0064	0,0084	0,0172	0,0320	0,
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0006	0,0016	0,0037	0,
8	0	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,
	1	0,0746	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1561	0,1373	0,0896	0,0548	0,
	2	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2731	0,2587	0,2090	0,1569	0,
	3	0,0001	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2731	0,2786	0,2787	0,2568	0,
	4	0,0000	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1707	0,1875	0,2322	0,2627	0,
	5	0,0000	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0683	0,0808	0,1239	0,1719	0,
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0171	0,0217	0,0413	0,0703	0,
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0024	0,0033	0,0079	0,0164	0,
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0007	0,0017	0,
9	0	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,
	1	0,0830	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,
	3	0,0001	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2731	0,2716	0,2508	0,2119	0,

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II.

EBAU2021 - **JUNIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases}$$

a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,75 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) **[1,5 p.]** Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

b) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AX - B = C^t$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C.

3: En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).

Se quiere diseñar una lata de refresco de forma cilíndrica, con tapas inferior y superior. El material para las tapas tiene un coste de 5 euros cada cm^2 y el material para el resto del cilindro tiene un coste de 3 euros cada cm^2.

a) **[1 p.]** Si denotamos por x el radio de las tapas y por y la altura de la lata, demuestre que el coste total del material necesario para construir dicha lata viene dado por $10\pi x^2 + 6\pi xy$.

b) **[1,5 p.]** Si el volumen de la lata es 90π cm^3, determine sus dimensiones (radio y altura) para que el coste del material sea mínimo.

4: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

a) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

b) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int x^2\ln(x)\,dx$. Determine la primitiva de la función $f(x)=x^2\ln(x)$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas (1, 0).

5: Considere los planos de ecuaciones $\pi_1: x-y+z=0$ y $\pi_2: x+y-z=2$.

a) **[1 p.]** Compruebe que los planos se cortan y calcule la ecuación de la recta *r* determinada por la intersección de ambos planos.

b) **[1,5 p.]** Compruebe que el punto A = (3, 2, 1) no está en π_1 ni en π_2 y calcule la ecuación del plano π_3 que contiene a la recta *r* y pasa por el punto *A*.

6: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

Considere los puntos *A = (a, 4, 3), B = (0, 0, 5)* y *C = (0, 3, –1)*.

a) **[1 p.]** Calcule los valores de *a* para los cuales el triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice *A*.

b) **[1,5 p.]** Tomando el valor de *a = 3*, determine la ecuación del plano que pasa por los puntos *A* y *B* y es paralelo a la recta dada por $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$.

7: Un estudio revela que el 10 % de los hombres son daltónicos y que el 1 % de las mujeres son daltónicas. Según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5% de hombres y un 49,5 % de mujeres. Determine:

a) **[1 p.]** La probabilidad de que una persona elegida al azar sea daltónica.

b) **[1 p.]** Si una persona es daltónica, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) **[0,5 p.]** ¿Son independientes los sucesos "ser una persona daltónica" y "ser mujer"?

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La velocidad de los vehículos en una autopista con límite de velocidad de 120 Km/h sigue una distribución normal de media μ km/h y desviación típica σ = 10 km/h. Se sabe que el 69,15 % de los vehículos no sobrepasan la velocidad de 130 km/h.

a) **[0,75 p.]** Calcule la media de la distribución.

b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es el porcentaje de vehículos que no sobrepasan la velocidad máxima permitida?

c) **[1 p.]** La DGT establece una multa de 100 euros a los vehículos que viajan entre 120 y 150 km/h ¿Cuál es la probabilidad de ser sancionado con dicha multa?

SOLUCIONES

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases}$$

a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,75 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Realizamos el estudio completo y luego respondemos a las preguntas planteadas en cada apartado.

Consideramos la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$.

Averiguamos donde se anula el determinante de la matriz de coeficientes *A*.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 1 + 1 + a - 1 - a = -a^2 + 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $a \neq 1 \quad y \quad a \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de la ampliada A/B también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema tiene **solución única**.

CASO 2. $a = -1$

Para $a = -1$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz A no tiene rango 3 pues su determinante vale cero.

La matriz A tiene rango 2 pues al considerar el menor de orden 2 que resulta de eliminar la 3ª fila y la 3ª columna tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$

La matriz A/B tiene también rango 2 pues no tiene rango 3, ya que el menor de orden 3 que resulta de quitar la 2ª columna (= 3ª columna) tiene determinante 0 →

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+1+4-4-1+1=0$. El rango de A/B es 2.

También podemos justificar que el rango de A/B es 2 diciendo que las filas 2ª y 3ª de la matriz ampliada son iguales.

Por lo que el rango de A/B (2) es igual al rango de A (2) y es menor que el número de incógnitas (3). El sistema tiene **infinitas soluciones**.

CASO 3. $a=1$

Para $a=1$ las matrices quedan $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

La matriz A no tiene rango 3 pues su determinante vale 0.
La matriz A tiene rango 2 pues si consideramos el menor de orden 2 que resulta de eliminar la 3ª fila y la 3ª columna tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1=-2\neq 0$

Para determinar el rango de la matriz ampliada A/B consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª columna (=1ª columna) →

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2+1+4+4-3-1=3\neq 0$

El determinante es no nulo y el rango de A/B es 3.

Como rango de A (2) es distinto de rango de A/B (3) el sistema no tiene solución.

Respondemos a lo planteado en cada apartado.

a) El sistema tiene solución única en el caso 1, es decir, cuando $a\neq 1$ y $a\neq -1$.

b) El sistema tiene infinitas soluciones en el caso 2, es decir, cuando $a=-1$.
Lo resolvemos para $a=-1$.
El sistema queda:

$$\begin{cases} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

Como tiene dos ecuaciones iguales (2ª y 3ª), podemos eliminar la tercera ecuación y obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

Continuamos resolviendo:

$$\begin{cases} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y+z=4 \\ z=1-y-x \end{cases} \Rightarrow -x+y+1-y-x=4 \Rightarrow -2x=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{-3}{2}} \Rightarrow z=1-y+\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{z=\frac{5}{2}-y}$$

La solución es $\boxed{x=-\frac{3}{2};\quad y=t;\quad z=\frac{5}{2}-t}$

c) El sistema no tiene solución para $a=1$. Es el caso 3 estudiado anteriormente.

2: Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&2&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\2&1\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

a) **[1,5 p.]** Compruebe que la matriz *A* es regular (o inversible) y calcule su inversa.

b) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AX-B=C^t$, donde C^t denota la matriz traspuesta de *C*.

a) Para que *A* tenga inversa debe de tener determinante no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&2&2\end{vmatrix}=2+0+0-1-0-0=1\neq 0$$

La matriz es regular. Calculamos su inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&0&2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\0&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\0&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}}$$

b) Como sabemos que la matriz A tiene inversa, podemos utilizarla para despejar en la ecuación la matriz X.

$$AX-B=C^t\Rightarrow AX=C^t+B\Rightarrow X=A^{-1}\left(C^t+B\right)$$

Sustituimos y obtenemos la matriz X buscada.

$$C^t+B=\begin{pmatrix}-2&1\\0&-1\\-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-2\\1&2\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\left(C^t+B\right)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\0&-2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+0-1&2+0-2\\0+0+0&0-2+0\\1+0+1&-1+2+2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-3&0\\0&-2\\2&3\end{pmatrix}}$$

$$3\times\boxed{3\ \cdot\ 3}\times 2\longrightarrow 3\times 2$$

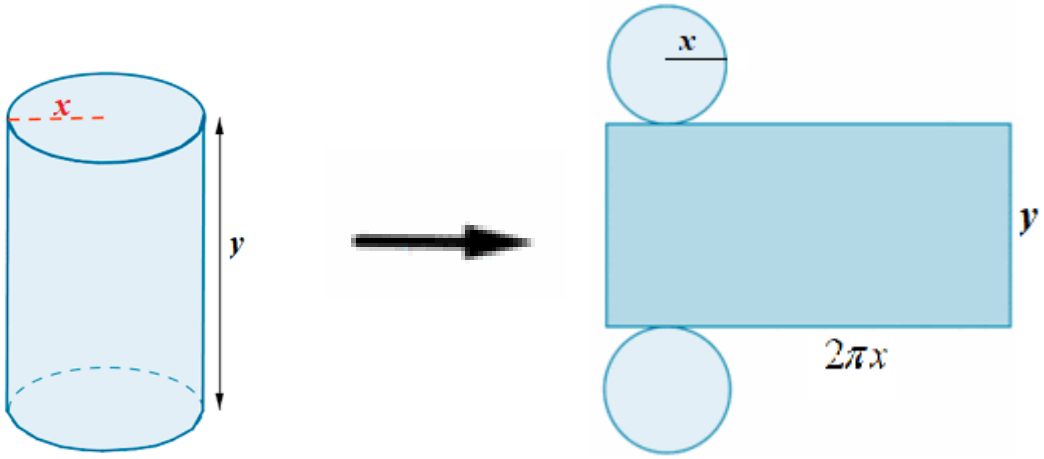
3: En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).

Se quiere diseñar una lata de refresco de forma cilíndrica, con tapas inferior y superior. El material para las tapas tiene un coste de 5 euros cada cm^2 y el material para el resto del cilindro tiene un coste de 3 euros cada cm^2.

a) **[1 p.]** Si denotamos por *x* el radio de las tapas y por *y* la altura de la lata, demuestre que el coste total del material necesario para construir dicha lata viene dado por $10\pi x^2 + 6\pi xy$.

b) **[1,5 p.]** Si el volumen de la lata es $90\pi\ cm^3$, determine sus dimensiones (radio y altura) para que el coste del material sea mínimo.

a) Llamamos "x" al radio de la tapa e "y" a la altura del bote.
Hacemos un dibujo para aclarar lo que se pide.



El material necesario se divide en dos partes: las dos tapas, teniendo cada una un área $\pi r^2 = \pi x^2$ y el área lateral que es un rectángulo de base la longitud de la circunferencia de la tapa $2\pi x$ con altura *y*, por lo que el área total es:

$$\textit{área total} = 2 \cdot \text{área tapa} + \text{área lateral} = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot y$$

Como las tapas cuestan a 5 € el cm^2 y el resto a 3 € el cm^2 el coste queda expresado:

$$\text{Coste}(x, y) = 2\pi x^2 \cdot 5 + 2\pi x \cdot y \cdot 3 = 10\pi x^2 + 6\pi xy$$

b) Utilizando la fórmula del volumen de un cilindro y sabiendo que este volumen es $90\pi\ cm^3$ se cumple:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Volumen cilindro} = \textit{Área base} \cdot \text{altura} = \pi x^2 \cdot y \\ \text{Volumen cilindro} = 90\pi\end{array}\right\} \Rightarrow \pi x^2 \cdot y = 90\pi \Rightarrow x^2 \cdot y = 90 \Rightarrow y = \frac{90}{x^2}$$

Sustituimos en la función coste para que dicha función sólo dependa de una variable.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Coste}(x, y) = 10\pi x^2 + 6\pi xy \\ y = \dfrac{90}{x^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Coste}(x) = 10\pi x^2 + 6\pi x \frac{90}{x^2} = 10\pi x^2 + \frac{540\pi}{x}$$

Derivamos esta función y la igualamos a cero, en busca de sus puntos críticos.

$$C(x)=10\pi x^2+\frac{540\pi}{x}\Rightarrow C'(x)=20\pi x-\frac{540\pi}{x^2}$$

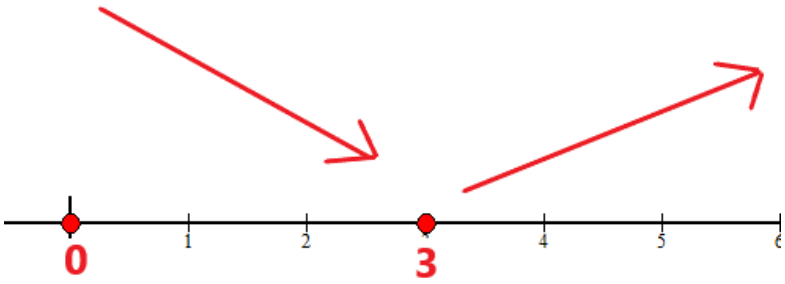
$$C'(x)=0\Rightarrow 20\pi x-\frac{540\pi}{x^2}=0\Rightarrow 20\pi x=\frac{540\pi}{x^2}\Leftarrow 20\pi x^3=540\pi\Rightarrow x^3=\frac{540\pi}{20\pi}=27\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{27}=3}$$

Comprobamos si este punto crítico es máximo o mínimo de la función coste.

- En (0, 3) tomamos $x = 2$ y la derivada vale $C'(2)=40\pi-\frac{540\pi}{2^2}=40\pi-160\pi=-120\pi<0$. La función decrece en (0, 3).
- En (3, +∞) tomamos $x = 4$ y la derivada vale $C'(4)=80\pi-\frac{540\pi}{4^2}=80\pi-40\pi=40\pi>0$. La función crece en (3, +∞).

La función coste sigue el esquema siguiente:



Mirando el esquema se deduce que la función coste presenta un mínimo valor en $x = 3$.

El cilindro de 90π cm^3 con dimensiones que minimizan el coste del bote es el que tiene como radio 3 cm y como altura $y=\frac{90}{x^2}=\frac{90}{3^2}=10$ cm.

4: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

a) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

b) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int x^2\ln(x)\,dx$. Determine la primitiva de la función $f(x)=x^2\ln(x)$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas (1, 0).

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\infty-\infty=$ Indeterminación (conjugado) $=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\infty+\infty}=\frac{1}{\infty}=\boxed{0}$$

b) Calculamos la integral indefinida.

$$\int x^2\ln(x)\,dx=\int\ln(x)\cdot x^2dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integracion por partes}\\ u=\ln x\to du=\dfrac{1}{x}dx\\ dv=x^2dx\to v=\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3}\end{array}\right\}=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}=\boxed{\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+K=F(x)}$$

La primitiva $F(x)$ que pasa por el punto de coordenadas (1, 0) debe cumplir que $F(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l}F(x)=\dfrac{x^3}{3}\ln x-\dfrac{x^3}{9}+K\\ F(1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1^3}{3}\ln 1-\frac{1^3}{9}+K=0\Rightarrow K=\frac{1}{9}$$

La primitiva buscada es $F(x)=\dfrac{x^3}{3}\ln x-\dfrac{x^3}{9}+\dfrac{1}{9}$

5: Considere los planos de ecuaciones $\pi_1 : x-y+z=0$ y $\pi_2 : x+y-z=2$.

a) **[1 p.]** Compruebe que los planos se cortan y calcule la ecuación de la recta *r* determinada por la intersección de ambos planos.

b) **[1,5 p.]** Compruebe que el punto A = (3, 2, 1) no está en π_1 ni en π_2 y calcule la ecuación del plano π_3 que contiene a la recta *r* y pasa por el punto *A*.

a) Para que los planos se corten sus vectores normales no deben ser paralelos, es decir, las coordenadas de sus vectores normales no deben ser proporcionales.

$$\left.\begin{matrix}\pi_1 : x-y+z=0\\ \pi_2 : x+y-z=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\vec{n_1}=(1,-1,1)\\ \vec{n_2}=(1,1,-1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow ¿\frac{1}{1}=\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}?$$ ¡NO ES CIERTO!

Por lo que los planos no son paralelos ni coincidentes y deben cortarse en una recta.

Resolviendo el sistema formado por los dos planos obtendremos la ecuación de la recta en paramétricas.

$$\left.\begin{matrix}\pi_1 : x-y+z=0\\ \pi_2 : x+y-z=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x-y+z=0\\ x=2-y+z\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2-y+z-y+z=0\Rightarrow -2y+2z=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-z=1\Rightarrow \boxed{y=1+z}\Rightarrow x=2-(1+z)+z=2-1-z+z=1\Rightarrow \boxed{r:\begin{cases}x=1\\ y=1+t\\ z=t\end{cases}}$$

También podríamos haber dado como ecuación de la recta su ecuación implícita:

$$r:\left.\begin{matrix}x-y+z=0\\ x+y-z=2\end{matrix}\right\}$$

b) Comprobamos si el punto A pertenece a alguno de los planos sustituyendo sus coordenadas en la ecuación del plano y viendo si satisface la igualdad.

$$¿A=(3,\ 2,\ 1)\in\pi_1?$$
$$\left.\begin{matrix}\pi_1 : x-y+z=0\\ A=(3,\ 2,\ 1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow ¿3-2+1=0?\ ¿2=0?$$ ¡No es cierto!

$$¿A=(3,\ 2,\ 1)\in\pi_2?$$
$$\left.\begin{matrix}\pi_2 : x+y-z=2\\ A=(3,\ 2,\ 1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow ¿3+2-1=2?\quad ¿4=2?$$ ¡No es cierto!

El punto A no pertenece al plano π_1 ni al π_2.

La ecuación del plano π_3 que contiene a la recta *r* y pasa por el punto *A* tendrá como vectores directores el vector director de la recta *r* y el vector que une un punto de la recta *r* con el punto *A*.

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \vec{v_r}=(0,1,1) \\ P_r=(1,1,0) \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} P_r=(1,1,0) \\ A=(3,2,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rA}=(3,2,1)-(1,1,0)=(2,1,1)$$

Obtenemos la ecuación del plano π_3.

$$\left.\begin{matrix} \vec{u}=\vec{v_r}=(0,1,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{P_rA}=(2,1,1) \\ A=(3,2,1)\in\pi_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \pi_3:\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-3+2(y-2)-2(z-1)-(x-3)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-3+2y-4-2z+2-x+3=0 \Rightarrow 2y-2z-2=0 \Rightarrow \boxed{\pi_3: y-z-1=0}$$

6: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

Considere los puntos $A = (a, 4, 3)$, $B = (0, 0, 5)$ y $C = (0, 3, -1)$.

a) **[1 p.]** Calcule los valores de a para los cuales el triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice A.

b) **[1,5 p.]** Tomando el valor de $a = 3$, determine la ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es paralelo a la recta dada por $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$.

a) Para que sea recto en el vértice A deben ser perpendiculares los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} A=(a,\ 4,\ 3) \\ B=(0,\ 0,\ 5) \\ C=(0,\ 3,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \overrightarrow{AB}=(0,\ 0,\ 5)-(a,\ 4,\ 3)=(-a,-4,2) \\ \overrightarrow{AC}=(0,\ 3,-1)-(a,\ 4,\ 3)=(-a,-1,-4) \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=90^{\circ} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-a,-4,2)(-a,-1,-4)=0 \Rightarrow a^2+4-8=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow \boxed{a=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Los valores de A que hacen que el triángulo ABC sea recto en el vértice A son **+2** y **–2.**

b) Para $a = 3$ el punto A tiene coordenadas $A = (3, 4, 3)$.

El plano π que pasa por A y B y es paralelo a la recta $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ tiene como vectores directores el vector $\overrightarrow{AB}$ y el vector director de la recta.

Determinamos el vector director de la recta.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y = 3 - 2x \end{cases} \Rightarrow x - (3 - 2x) + z = 0 \Rightarrow x + 2x - 3 + z = 0 \Rightarrow 3x + z = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 3 - 3x \Rightarrow \left.\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{v} = (1, -2, -3) \\ P = (0, 3, 3) \end{array}\right\}$$

Determinamos la ecuación del plano.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (1, -2, -3) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-3, -4, 2) \\ B = (0, 0, 5) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + 9y - 4(z - 5) - 6(z - 5) - 2y - 12x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + 9y - 4z + 20 - 6z + 30 - 2y - 12x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : -16x + 7y - 10z + 50 = 0}$$

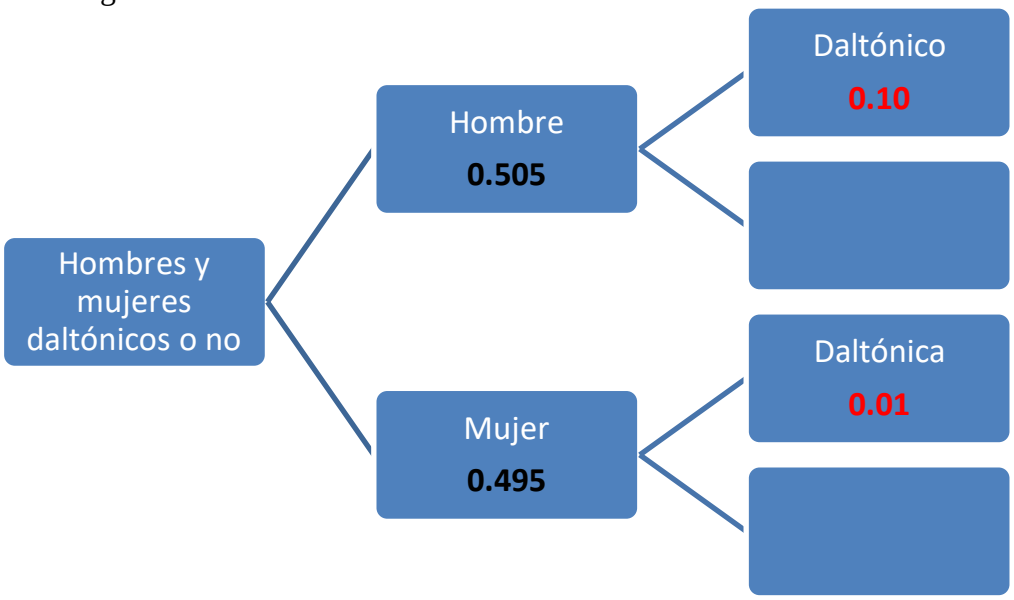
7: Un estudio revela que el 10 % de los hombres son daltónicos y que el 1 % de las mujeres son daltónicas. Según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5% de hombres y un 49,5 % de mujeres. Determine:

a) **[1 p.]** La probabilidad de que una persona elegida al azar sea daltónica.

b) **[1 p.]** Si una persona es daltónica, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) **[0,5 p.]** ¿Son independientes los sucesos "ser una persona daltónica" y "ser mujer"?

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos H = "Ser hombre" y D = "Ser daltónico".

Por lo que $\overline{H}$ = "Ser mujer" y $\overline{D}$ = "No ser daltónico".

a)

$$P(D)=P(H\cap D)+P(\overline{H}\cap D)=P(H)P(D/H)+P(\overline{H})P(D/\overline{H})=$$

$$=0.505\cdot 0.10+0.495\cdot 0.01=\boxed{0.05545}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{H}/D)=\frac{P(\overline{H}\cap D)}{P(D)}=\frac{P(\overline{H})P(D/\overline{H})}{P(D)}=\frac{0.495\cdot 0.01}{0.05545}=\boxed{\frac{99}{1109}=0.0893}$$

c) ¿Son independientes los sucesos D y $\overline{H}$?

¿ $P(D\cap\overline{H})=P(D)P(\overline{H})$? → ¿ $P(\overline{H})P(D/\overline{H})=P(D)P(\overline{H})$?

¿ $0.495\cdot 0.01=0.05545\cdot 0.495$?

¿0.00495 = 0.02744775?

No son iguales y por tanto no son independientes.

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La velocidad de los vehículos en una autopista con límite de velocidad de 120 Km/h sigue una distribución normal de media μ km/h y desviación típica σ = 10 km/h. Se sabe que el 69,15 % de los vehículos no sobrepasan la velocidad de 130 km/h.

a) **[0,75 p.]** Calcule la media de la distribución.

b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es el porcentaje de vehículos que no sobrepasan la velocidad máxima permitida?

c) **[1 p.]** La DGT establece una multa de 100 euros a los vehículos que viajan entre 120 y 150 km/h ¿Cuál es la probabilidad de ser sancionado con dicha multa?

X = Velocidad de un vehículo en una autopista. X = N(μ, 10)

a) Que el 69,15 % de los vehículos no sobrepasan la velocidad de 130 km/h significa que $P(X \le 130) = 0.6915$. Utilizamos este dato para obtener el valor de la media.

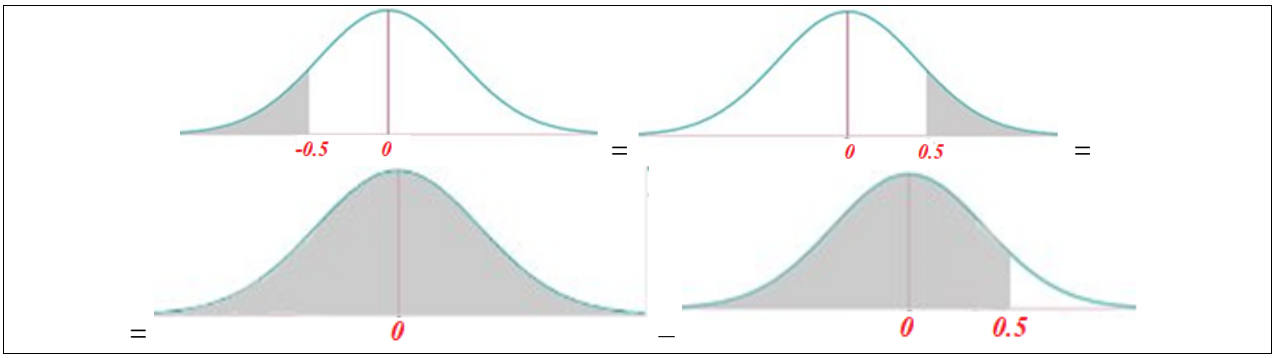
$$P(X \le 130) = 0.6915 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{130-\mu}{10}\right) = 0.6915 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{130-\mu}{10}\right) = 0.6915 \Rightarrow \{\text{Buscamos esta probabilidad en la tabla N(0,1)}\} \Rightarrow ...$$

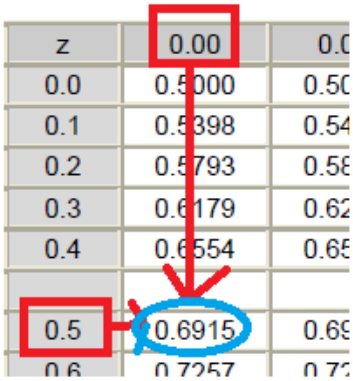
z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.504
0.1	0.5398	0.543
0.2	0.5793	0.583
0.3	0.6179	0.621
0.4	0.6554	0.659
0.5	0.6915	0.695
0.6	0.7257	0.729

$$...\Rightarrow \frac{130-\mu}{10} = 0.5 \Rightarrow 130-\mu = 5 \Rightarrow 130-5 = \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 125\ km/h}$$

b) $P(X \le 120) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{120-125}{10}\right) = P(Z \le -0.5) = ...$



$$...\Rightarrow P(Z \ge 0.5) = 1 - P(Z \le 0.5) = \{\text{Buscamos esta probabilidad en la tabla N(0,1)}\} = ...$$



z	0.00	0.0
0.0	0.5000	0.50
0.1	0.5398	0.54
0.2	0.5793	0.58
0.3	0.6179	0.62
0.4	0.6554	0.65
0.5	0.6915	0.69
0.6	0.7257	0.72

$$\ldots \Rightarrow 1-0.6915 = \boxed{0.3085}$$

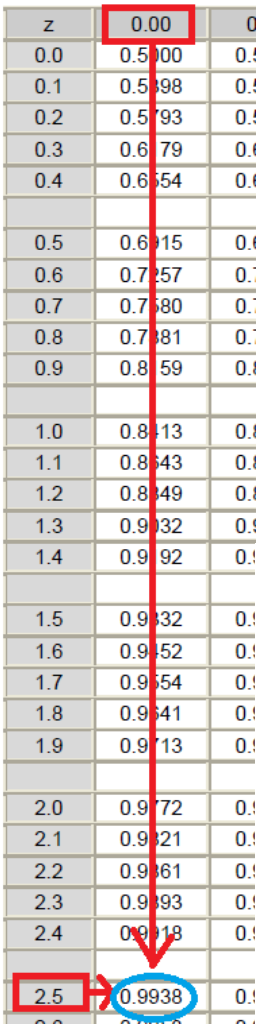
El porcentaje de vehículos que no sobrepasan la velocidad máxima permitida es del 30.85 %.

c)

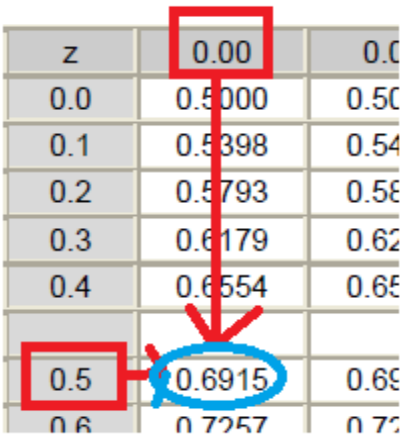
$$P(120 \le X \le 150) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{120-125}{10} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{150-125}{10}\right) =$$

$$= P(-0.5 \le Z \le 2.5) = P(Z \le 2.5) - P(Z \le -0.5) = P(Z \le 2.5) - P(Z \ge 0.5) =$$

$$= P(Z \le 2.5) - \left[1 - P(Z \le 0.5)\right] = \{\text{ Miramos en la tabla N(0,1)}\} = \ldots$$



z	0.00	0
0.0	0.5000	0.5
0.1	0.5398	0.5
0.2	0.5793	0.5
0.3	0.6179	0.6
0.4	0.6554	0.6
0.5	0.6915	0.6
0.6	0.7257	0.7
0.7	0.7580	0.7
0.8	0.7881	0.7
0.9	0.8159	0.8
1.0	0.8413	0.8
1.1	0.8643	0.8
1.2	0.8849	0.8
1.3	0.9032	0.9
1.4	0.9192	0.9
1.5	0.9332	0.9
1.6	0.9452	0.9
1.7	0.9554	0.9
1.8	0.9641	0.9
1.9	0.9713	0.9
2.0	0.9772	0.9
2.1	0.9821	0.9
2.2	0.9861	0.9
2.3	0.9893	0.9
2.4	0.9918	0.9
2.5	0.9938	0.9



z	0.00	0.0
0.0	0.5000	0.50
0.1	0.5398	0.54
0.2	0.5793	0.58
0.3	0.6179	0.62
0.4	0.6554	0.65
0.5	0.6915	0.69
0.6	0.7257	0.72

$$\ldots = 0.9938 - \left[1 - 0.6915\right] = \boxed{0.6853}$$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II.

EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - ay + a^2 z = -1 \\ -ax + a^2 y - a^3 z = 2 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Comprueba que el sistema nunca tiene solución única**.**
b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones.
c) **[0,5 p.]** Si es posible, resuélvalo para el valor de *a = 2*.

2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **.**

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5, A^6.
b) **[1 p.]** Calcule A^{2020}.
c) **[0,5 p.]** Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 p.]** $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(3+x) - \ln(3-x)}{2x}$

b) **[1,25 p.]** $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} \right)$

4: a) **[2 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \ln\left(1+x^2\right) dx$.

b) **[0,5 p.]** Calcule la integral definida $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx$.

El examen continúa por detrás

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II.

EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

5: Considere los puntos $P=(5,6,1)$ y $Q(-3,-2,5)$, y la recta

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{4}\ .$$

a) **[1,5 p.]** Determine el punto *R* de la recta *r* para el cual el área del triángulo PQR es $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

Observación: hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.

b) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos *P* y *Q* y compruebe que dicha recta corta perpendicularmente a la recta *r*.

6: Considere las rectas *r* y *s* dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r:\begin{cases}5x+3y=19\\ y-5z=3\end{cases}\qquad s:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{0}$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,25 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta *r* y es paralelo a la recta *s*.

7: El peso de los recién nacidos, medido en kilogramos (kg), sigue una distribución normal de media $\mu=2{,}8\ kg$ y desviación típica σ. Se sabe que solo el 20,05% de ellos pesa más de 3 kg.

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese más de 2,6 kg?

b) **[1 p.]** Calcule la desviación típica de esta distribución normal.

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,9 kg?

IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

8: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 4 negras y 3 rojas, y la urna B contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado que tiene 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que indica el dado.

a) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea verde?

b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?

c) **[1 p.]** Si la bola extraída es verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

SOLUCIONES

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - ay + a^2 z = -1 \\ -ax + a^2 y - a^3 z = 2 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Comprueba que el sistema nunca tiene solución única**.**
b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones.
c) **[0,5 p.]** Si es posible, resuélvalo para el valor de *a = 2*.

El sistema tiene asociadas las matrices:

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \\ -a & a^2 & -a^3 \end{pmatrix}$ y matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & a^2 & -1 \\ -a & a^2 & -a^3 & 2 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \\ -a & a^2 & -a^3 \end{vmatrix} = a^4 - a^3 + a^2 - a^2 + a^3 - a^4 = 0$$

El determinante es 0, independientemente del valor de *a*, por lo que el rango de la matriz A nunca va a ser 3.

a) El sistema nunca va a tener solución única pues el rango de A es menor que 3 (número de incógnitas).

b) Estudiamos el rango de A.

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna y fila 3ª → $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$, calculamos su determinante y vemos cuando se anula → $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$.

Si $a \neq -1$.
En este caso el rango de A es 2. Veamos el rango de A/ B y comparamos los rangos.
Tomamos un menor de orden 3 de A/B que resulta de quitar la columna 3ª con determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & -1 \\ -a & a^2 & 2 \end{vmatrix} = -2a + a + 2a^2 - 2a^2 - 2 + a^2 = a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = a \\ \frac{1-3}{2} = -1 = a \end{cases}$$

Este determinante que decide el rango de A/B se anula para los valores –1 y 2.

Establecemos los casos siguientes:

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 2$

En este caso el rango de A es 2 y el rango de A/B es 3 pues el menor anterior no se anula.
El sistema es incompatible.

CASO 2. $a = -1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+z=-1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

La 1ª y la 2ª ecuación tienen el primer miembro de la igualdad iguales ($x+y+z$) y el 2º miembro de la igualdad distinto (–1 y 2). ¡Imposible!
El sistema es incompatible.

CASO 3. $a = 2$

Sustituyendo el valor de *a* tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-2y+4z=-1 \\ -2x+4y-8z=2 \end{cases}$$ Lo resolvemos con el método de Gauss

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x \quad -2y \quad +4z \quad = -1 \\ \underline{-x \quad -y \quad -z \quad = -2} \\ \quad -3y \quad +3z \quad = -3 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ -2x \quad +4y \quad -8z \quad = 2 \\ \underline{2x \quad +2y \quad +2z \quad = 4} \\ \quad 6y \quad -6z \quad = 6 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ -3y+3z=-3 \\ 6y-6z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y+z=-1 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + \text{Ecuación 2ª} \\ \quad -y \quad +z \quad = \quad -1 \\ \underline{\quad y \quad -z \quad = \quad 1} \\ \quad 0 \quad = \quad 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y+z=-1 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ \boxed{y=z+1} \end{cases} \Rightarrow x+z+1+z=2 \Rightarrow \boxed{x=1-2z}$$

El sistema es compatible indeterminado. El sistema tiene infinitas soluciones para ***a = 2***.

c) Para *a = 2* está resuelto en el apartado b) y sus soluciones son $x=1-2t; \quad y=1+t; \quad z=t$.

2: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5, A^6.
b) **[1 p.]** Calcule A^{2020}.
c) **[0,5 p.]** Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

a)

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3 & 3-6\\ -1+2 & -3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3 & 6-6\\ -1+1 & -3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^5=A^4A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+3 & -3+6\\ 1-2 & 3-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^6=A^5A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+3 & -6+6\\ 1-1 & 3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

b) Como $A^6=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$ dividimos 2020 entre 6 y nos queda:

$$\begin{array}{r|l} 2020 & 6 \\ \hline 22 & 336 \\ \hline 40 & \\ \hline \boxed{4}\ \text{Resto} & \end{array} \quad \rightarrow \quad 2020 = 336 \cdot 6 + 4.$$

$$A^{2020}=A^{6\cdot 336+4}=A^{6\cdot 336}A^4=\left(A^6\right)^{336}A^4=\left(I_2\right)^{336}A^4=I_2\cdot A^4=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

c) Calculamos el determinante de A.

$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2+3=1\neq 0$, al ser su determinante distinto de cero existe su inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 p.]** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(3+x)-\ln(3-x)}{2x}$

b) **[1,25 p.]** $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)$

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3+x)-\ln(3-x)}{2x}=\frac{\ln 3-\ln 3}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{3+x}-\dfrac{-1}{3-x}}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{3+x}+\dfrac{1}{3-x}}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3\cancel{-x}+3\cancel{+x}}{(3+x)(3-x)}}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{(3+x)(3-x)}=\frac{3}{9}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)=\infty-\infty=\left\{\begin{matrix}\text{Multiplicamos y dividimos por el conjugado}\\ \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x+2}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)-(x+2)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=\frac{-1}{\infty}=\boxed{0}$$

4: a) **[2 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \ln\left(1+x^2\right) dx$.

b) **[0,5 p.]** Calcule la integral definida $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx$.

a)

$$\int \ln\left(1+x^2\right) dx = \left\{\begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = \ln\left(1+x^2\right) \rightarrow du = \dfrac{2x}{1+x^2} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array}\right\} = \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)(x) - \int x \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \ldots$$

Calculamos la integral y luego sustituimos.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = x - arctg(x)$$

$$\ldots = x\ln\left(1+x^2\right) - 2\left(x - arctg(x)\right) = \boxed{x\ln\left(1+x^2\right) - 2x + 2arctg(x) + \mathrm{K}}$$

b)

$$\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx = \left[x\ln\left(1+x^2\right) - 2x + 2arctg(x)\right]_0^1 =$$

$$= \left[\ln\left(1+1^2\right) - 2 + 2arctg(1)\right] - \left[0 - 0 + 2arctg(0)\right] = \ln 2 - 2 + 2\frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2} - 2 + \ln 2 = 0.264}$$

5: Considere los puntos $P=(5,6,1)$ y $Q(-3,-2,5)$, y la recta

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{4}\ .$$

a) **[1,5 p.]** Determine el punto *R* de la recta *r* para el cual el área del triángulo PQR es $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.
Observación: hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.
b) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos *P* y *Q* y compruebe que dicha recta corta perpendicularmente a la recta *r*.

a) Obtenemos las ecuaciones en paramétricas de la recta *r*.

$$r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=-1+4\lambda\end{cases}$$

Por lo que las coordenadas del punto R de la recta *r* son $R(\lambda,1+\lambda,-1+4\lambda)$.

El área del triángulo PQR es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QR}$.

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{PR}&=(\lambda,1+\lambda,-1+4\lambda)-(5,6,1)=(\lambda-5,\lambda-5,-2+4\lambda)\\ \overrightarrow{QR}&=(\lambda,1+\lambda,-1+4\lambda)-(-3,-2,5)=(\lambda+3,\lambda+3,-6+4\lambda)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{QR}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \lambda-5 & \lambda-5 & -2+4\lambda\\ \lambda+3 & \lambda+3 & -6+4\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=i(\lambda-5)(-6+4\lambda)+j(-2+4\lambda)(\lambda+3)+\cancel{k(\lambda-5)(\lambda+3)}-\cancel{k(\lambda-5)(\lambda+3)}-$$
$$-j(\lambda-5)(-6+4\lambda)-i(\lambda+3)(-2+4\lambda)=$$

$$=i\left(\left(-6\lambda-20\lambda+30+4\lambda^2\right)-\left(-2\lambda+12\lambda-6+4\lambda^2\right)\right)+$$
$$+j\left(\left(-2\lambda+12\lambda-6+4\lambda^2\right)-\left(-6\lambda-20\lambda+30+4\lambda^2\right)\right)=$$

$$=i(-36\lambda+36)+j(36\lambda-36)=(-36\lambda+36,36\lambda-36,0)$$

Una vez obtenido el producto vectorial lo aplicamos al cálculo del área del triángulo.

$$\text{Área}=18\sqrt{2}\Rightarrow\frac{\left|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{QR}\right|}{2}=18\sqrt{2}\Rightarrow\left|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{QR}\right|=36\sqrt{2}\Rightarrow\left|(-36\lambda+36,36\lambda-36,0)\right|=36\sqrt{2}$$

$$36\left|(-\lambda+1,\lambda-1,0)\right|=36\sqrt{2}\Rightarrow\left|(-\lambda+1,\lambda-1,0)\right|=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{(-\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2}=\sqrt{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(\lambda-1)^2=2\Rightarrow(\lambda-1)^2=1\Rightarrow\begin{cases}\lambda-1=-1\Rightarrow\lambda=0\\ \lambda-1=1\Rightarrow\lambda=2\end{cases}$$

Por lo que los dos puntos solución del problema son:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=0\\ R(\lambda,1+\lambda,-1+4\lambda)\end{array}\right\}\Rightarrow R_1(0,1,-1)$$

Y también

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=2\\ R(\lambda,1+\lambda,-1+4\lambda)\end{array}\right\}\Rightarrow R_2(2,3,7)$$

b) La recta *s* que pasa por $P=(5,6,1)$ y $Q(-3,-2,5)$ tiene como vector director $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ}=(-3,-2,5)-(5,6,1)=(-8,-8,4)$$

Tomamos como vector director el vector anterior dividido por –4 que tiene unas coordenadas que indican la misma dirección con valores más pequeños.

$$\left.\begin{array}{l}P=(5,6,1)\in s\\ s:\ \overrightarrow{v_s}=(2,2,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{s:\begin{cases}x=5+2t\\ y=6+2t\\ z=1-t\end{cases}}$$

Comprobemos que las rectas *r* y *s* se cortan resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l}r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=-1+4\lambda\end{cases}\\ s:\begin{cases}x=5+2t\\ y=6+2t\\ z=1-t\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}5+2t=\lambda\\ 6+2t=1+\lambda\\ 1-t=-1+4\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5+2t=\lambda\\ 5+2t=\lambda\\ 2-t=4\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5+2t=\lambda\\ 2-t=4\lambda\end{cases}\Rightarrow 2-t=4(5+2t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-t=20+8t\Rightarrow -9t=18\Rightarrow t=-2\Rightarrow\begin{cases}x=5-4=1\\ y=6-4=2\\ z=1+2=3\end{cases}$$

Las dos rectas se cortan en el punto A(1,2,3).
Para ver que lo hacen de forma perpendicular compruebo que el producto escalar de sus vectores directores es cero.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_s}=(2,2,-1)\\ \overrightarrow{v_r}=(1,1,4)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{v_s}\cdot\overrightarrow{v_r}=(2,2,-1)(1,1,4)=2+2-4=0$$

Comprobado que las dos rectas se cortan en A(1,2,3) de forma perpendicular.

6: Considere las rectas *r* y *s* dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r:\begin{cases}5x+3y=19\\ y-5z=3\end{cases} \qquad s:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{0}$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,25 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta *r* y es paralelo a la recta *s*.

a) Pasamos la ecuación de la recta *r* a paramétricas.

$$r:\begin{cases}5x+3y=19\\ y-5z=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x+3y=19\\ y=3+5z\end{cases}\Rightarrow 5x+3\left(3+5z\right)=19\Rightarrow 5x+9+15z=19\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x=10-15z\Rightarrow x=2-3z\Rightarrow r:\begin{cases}x=2-3t\\ y=3+5t\\ z=t\end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas son $\vec{v_r}=\left(-3,5,1\right)$ y $\vec{v_s}=\left(-1,1,0\right)$. No tienen coordenadas proporcionales, por lo que no son paralelas ni coincidentes.

¿Se cortan o se cruzan?

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases}5x+3y=19\\ y-5z=3\end{cases}\\ s:\begin{cases}x=1-t\\ y=t\\ z=5\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}5\left(1-t\right)+3t=19\\ t-25=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5-5t+3t=19\\ t=28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2t=14\\ t=28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=-7\\ t=28\end{cases}$$

Salen dos valores distintos, por lo que el sistema no tiene solución y las rectas no se cortan sino que se cruzan.

b) Como las rectas se cruzan, determinamos el plano π que contiene a la recta *r* y es paralelo a la recta *s*.

El plano π contiene el punto $P_r=\left(2,3,0\right)$ de la recta *r* y tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas (es paralelo a ellas).

$$\left.\begin{array}{l} P_r=\left(2,3,0\right)\in\pi\\ \vec{u}=\vec{v_r}=\left(-3,5,1\right)\\ \vec{v}=\vec{v_s}=\left(-1,1,0\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix}x-2 & y-3 & z\\ -3 & 5 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow -y+3-3z+5z-x+2=0$$

$$\boxed{\pi:-x-y+2z+5=0}$$

7: El peso de los recién nacidos, medido en kilogramos (kg), sigue una distribución normal de media $\mu = 2{,}8\ kg$ y desviación típica σ. Se sabe que solo el 20,05% de ellos pesa más de 3 kg.

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese más de 2,6 kg?

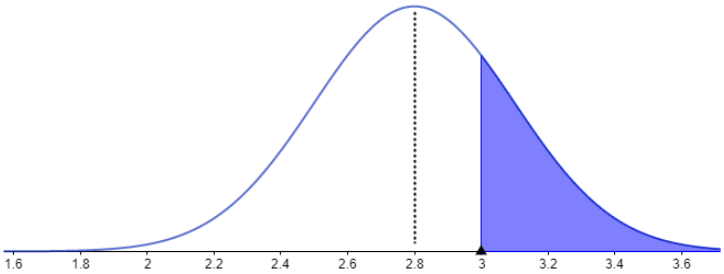
b) **[1 p.]** Calcule la desviación típica de esta distribución normal.

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,9 kg?

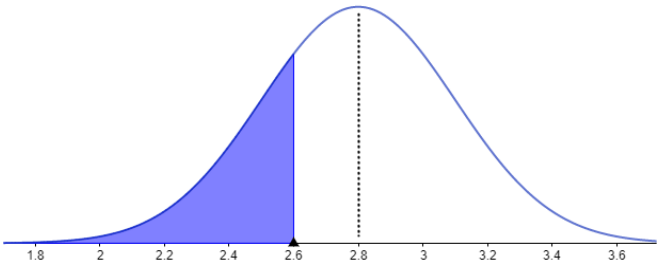
IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

X = Peso en kg de un recién nacido. X = N(2.8, σ)

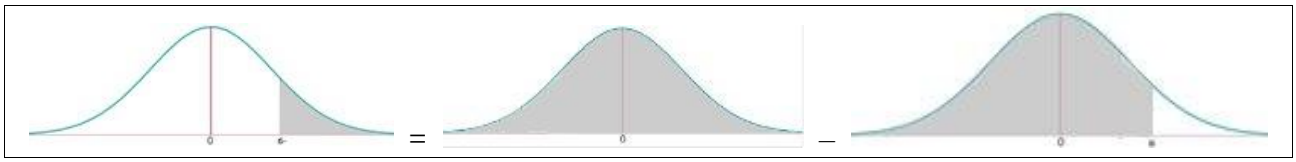
a) Por la simetría de la distribución normal tenemos que la $P(X \geq 3) = 0.2005$ y este área aparece en el dibujo inferior a 0.2 de distancia de la media:



Es igual que $P(X \leq 2.6)$ pues también está a distancia 0.2 de la media → $P(X \leq 2.6) = 0.2005$ Aparece en el dibujo.



Por lo que la probabilidad pedida vale $P(X \geq 2.6) = 1 - P(X \leq 2.6) = 1 - 0.2005 = \boxed{0.7995}$



b) $P(X \geq 3) = 0{,}2005 \Rightarrow P\left(\frac{X-2.8}{\sigma} \geq \frac{3-2.8}{\sigma}\right) = 0.2005 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{0.2}{\sigma}\right) = 0.2005 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{0.2}{\sigma}\right) = 0.2005 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{0.2}{\sigma}\right) = 1 - 0.2005 = 0.7995$

Buscamos en la tabla de la N(0, 1) obtenemos que $\frac{0.2}{\sigma} = 0.84 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{0.2}{0.84} = 0.2381}$

c) $P(X \leq 2.9) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{2.9-2.8}{0.2381}\right) = P(Z \leq 0.42) = \boxed{0.6628}$

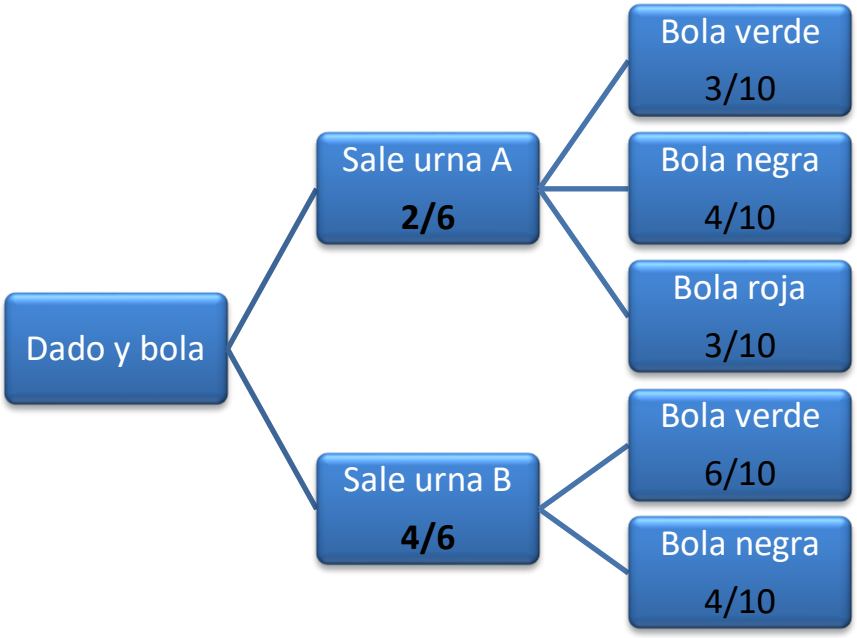
8: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 4 negras y 3 rojas, y la urna B contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado que tiene 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que indica el dado.

a) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea verde?

b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?

c) **[1 p.]** Si la bola extraída es verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Construimos el diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio planteado.
La probabilidad de sacar A en el dado es 2/6 y de sacar B es 4/6.



a) Sucede de dos formas distintas, la probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de cada rama del árbol.

$$P(\text{Sacar bola verde}) = P(\text{Elegir urna A})\,P(\text{Sacar bola verde / Elegir urna A}) +$$
$$+P(\text{Elegir urna B})\,P(\text{Sacar bola verde / Elegir urna B}) =$$
$$= \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10} + \frac{4}{6}\cdot\frac{6}{10} = \frac{30}{60} = \boxed{\frac{1}{2} = 0,5}$$

b) Sucede de una única forma, pues en la urna B no hay bolas rojas.

$$P(\text{Sacar bola roja}) = P(\text{Elegir urna A})\,P(\text{Sacar bola roja / Elegir urna A}) =$$
$$= \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10} = \frac{6}{60} = \boxed{\frac{1}{10} = 0,1}$$

c) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Proceda de urna B / Hemos sacado bola verde}) = \frac{P(\text{Elegir urna B} \cap \text{Sacar bola verde})}{P(\text{Sacar bola verde})} =$$
$$= \frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{10}}{0,5} = \frac{0,4}{0,5} = \boxed{\frac{4}{5} = 0,8}$$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II.

EBAU2020 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + a^2 y - z = 3 - a \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para ***a = 0.***

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) **[1 p.]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o inversibles) y calcule sus matrices inversas.

b) **[1,5 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

3: [2,5 p.] De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 4 metros, determine las dimensiones de aquel cuya área es máxima. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

4: a) **[2 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

b) **[0,5 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, la gráfica de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ y la recta vertical $x = 1$.

5: Se llama **mediana** de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

a) **[1,5 p.]** Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo de vértices $A(-1,2,3)$, $B(3,-4,1)$ y $C(1,-4,5)$.

b) **[1 p.]** Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

6: Considere la recta *r* y el plano π dados por las siguientes ecuaciones:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0} \qquad \pi: x-2y-z=4$$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

b) **[0,5 p.]** En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso contrario, calcule la distancia entre la recta y el plano.

c) **[1 p.]** Determine el plano que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano π.

7: Una urna tiene 2 bolas blancas y 3 bolas rojas. Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que se obtienen al repetir nueve veces el siguiente experimento: se saca una bola de la urna y, después de anotar el color, se devuelve la bola a la urna.

a) **[1 p.]** ¿Qué tipo de distribución sigue dicha variable aleatoria y cuáles son sus parámetros?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que el número de bolas anotado sea menor o igual que 4?

8: En una determinada población, el 40% de los individuos lee diariamente la prensa y el 75% ve diariamente las noticias en la televisión. Además, el 25% de los individuos lee la prensa y ve las noticias en la televisión diariamente.

a) **[0,5 p.]** ¿Son independientes los sucesos "leer diariamente la prensa" y "ver diariamente las noticias en la televisión?

b) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo lea la prensa diariamente pero no vea las noticias en la televisión?

c) **[1 p.]** Si un individuo lee la prensa diariamente, ¿cuál es la probabilidad de que también vea las noticias en la televisión?

SOLUCIONES

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + a^2 y - z = 3 - a \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para ***a = 0.***

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a^2 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ con determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a^2 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 1 + 1 + a^2 - a - 1 = a^3 + a^2 - a - 1$$

Lo igualamos a cero.

$|A| = 0 \Rightarrow a^3 + a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow$ *Aplicamos Ruffini*

	1	1	−1	−1
1		1	2	1
	1	2	1	0

$\rightarrow \boxed{a = 1 \text{ es raíz}}$

$a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1}$ es raíz

Existen dos valores que anulan la matriz de los coeficientes: $a = 1; a = -1$.

CASO 1. $a \neq 1$ *y* $a \neq -1$

En este caso el determinante de *A* es no nulo y su rango es 3. El rango de *A/B* es 3 y también el número de incógnitas. **El sistema tiene una solución única**. Es compatible determinado.

CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante de *A* es cero y su rango no es 3.

¿El rango de *A* es 2?

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Se observa que la fila 1ª y 2ª son iguales y la columna 2ª y 3ª son proporcionales, considero el menor de orden 2 que resulta de quitar la 1ª fila y la 3ª columna → $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ con determinante

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$. El rango de *A* es 2.

Comprobemos el rango de *A/B*.

$A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, vemos que la columna 2ª y 3ª son proporcionales, consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª → $\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ con determinante

$\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=1+2-4-4-1+2=-4\neq 0$. El rango de *A/B* es 3.

El rango de *A* es 2 y el de *A/B* es 3, son distintos y el sistema no tiene solución. **El sistema es incompatible**.

CASO 3. $a=-1$

En este caso el determinante de *A* es cero y su rango no es 3.
¿El rango de *A* es 2?

La matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

Se observa que la fila 1ª y 2ª son iguales y la columna 1ª y 3ª son proporcionales, considero el menor de orden 2 que resulta de quitar la 1ª fila y la 1ª columna → $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0$. El rango de *A* es 2.

Comprobemos el rango de *A/B*.

$A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, vemos que la columna 1ª y 3ª son proporcionales, consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª → $\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ con determinante

$\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=1+4-4-4-1+4=0$. El rango de *A/B* no es 3.

Como el rango de *A* es 2, el de *A/B* también es 2.

El rango de *A* y el de *A/B* es 2 menor que el número de incógnitas (3) el sistema tiene infinitas soluciones. **El sistema es compatible indeterminado**.

OTRA FORMA DE ESTUDIAR LOS DISTINTOS CASOS

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq -1$

En este caso el determinante de *A* es no nulo y su rango es 3. El rango de *A/B* es 3 y también el número de incógnitas. **El sistema tiene una solución única**. Es compatible determinado.

CASO 2. $a = 1$

El sistema queda

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Se observa que la ecuación 1ª y 2ª tienen el primer miembro de la igualdad igual ($x + y - z$) y el 2º miembro distinto (2 y 4). Este sistema no tiene solución. Es incompatible.

CASO 3. $a = -1$

El sistema queda

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + y - z = 4 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

Se observa que tiene dos ecuaciones iguales y el sistema se reduce a otro equivalente:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x - y = z + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x \quad -y \quad = z + 1 \\ -x \quad -y \quad = -z - 4 \\ \hline \quad -2y \quad = -3 \quad \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + y = z + 4 \\ -2y = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = z + 4 \\ \boxed{y = \frac{3}{2}} \end{cases} \Rightarrow x + \frac{3}{2} = z + 4 \Rightarrow \boxed{x = z + 4 - \frac{3}{2} = z + \frac{5}{2}}$$

El sistema tiene solución, pero tiene infinitas soluciones. Es compatible indeterminado.

a) Estudiado arriba es para $a \neq 1$ y $a \neq -1$. Para ***a = 0*** tiene solución única.

Las matrices asociadas al sistema quedan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Resolvemos por el método de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}}=\frac{-1+3-4}{-1+1-1}=\frac{-2}{-1}=2 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 4 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}}=\frac{-4-1+3+1}{-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}}=\frac{3-4-1+3}{-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

La solución es $x=2;\ y=1;\ z=-1$

b) Para $a=-1$ el sistema tiene infinitas soluciones. Estudiado al comienzo.
Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x+y-z=4\\ x+y-z=4\\ x-y-z=1\end{cases} \Rightarrow \{\text{Ecuación } 1^{\text{a}} = \text{Ecuación } 2^{\text{a}}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-z=4\\ x-y-z=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=z+4\\ x-y=z+1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - \text{ Ecuación } 1^{\text{a}}\\ x \quad -y \quad = z+1\\ -x \quad -y \quad = -z-4\\ \hline \quad -2y \quad = -3 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y=z+4\\ -2y=-3\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=z+4\\ \boxed{y=\frac{3}{2}}\end{cases} \Rightarrow x+\frac{3}{2}=z+4 \Rightarrow \boxed{x=z+4-\frac{3}{2}=z+\frac{5}{2}}$$

La solución es $\boxed{x=\frac{5}{2}+t; \quad y=\frac{3}{2}; \quad z=t}$

c) El sistema no tiene solución para $a=1$.

2: Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

a) **[1 p.]** Compruebe que las matrices *A* y *B* son regulares (o inversibles) y calcule sus matrices inversas.

b) **[1,5 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$, donde A^t denota la matriz traspuesta de *A*.

a) Para estudiar si existe su inversa o no considero el determinante de las matrices.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-4+3=-1\neq 0 \rightarrow \text{La matriz } A \text{ es regular.}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2+3=1\neq 0 \rightarrow \text{La matriz } B \text{ es regular.}$$

Calculamos sus inversas.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^t\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

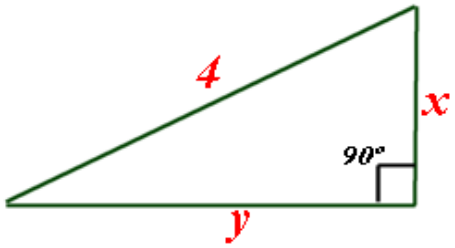
b) Como existen las inversas de las matrices A y B podemos despejar de la ecuación matricial.

$$AXB = A^t - 3B$$
$$A^{-1}\cdot AXB\cdot B^{-1} = A^{-1}\cdot\left(A^t-3B\right)\cdot B^{-1}$$
$$X = A^{-1}\cdot\left(A^t-3B\right)\cdot B^{-1}$$
$$X = A^{-1}\cdot A^t\cdot B^{-1} - A^{-1}\cdot 3B\cdot B^{-1}$$

$$X = A^{-1}\cdot A^t\cdot B^{-1} - 3A^{-1}$$
$$X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$
$$X=\begin{pmatrix}13 & -8\\ -8 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 9\\ -3 & -6\end{pmatrix}$$
$$X=\begin{pmatrix}34 & 47\\ -21 & -29\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 9\\ -3 & -6\end{pmatrix}$$
$$\boxed{X=\begin{pmatrix}28 & 38\\ -18 & -23\end{pmatrix}}$$

3: [2,5 p.] De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 4 metros, determine las dimensiones de aquel cuya área es máxima. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

La situación planteada se refleja en el dibujo.



Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que $4^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$

El área del triángulo es $A(x, y) = \frac{xy}{2}$

Sustituimos $y = \sqrt{16 - x^2}$ en el área y nos queda $A(x, y) = \frac{xy}{2} \Rightarrow A(x) = \frac{x\sqrt{16 - x^2}}{2} = \frac{1}{2} x\sqrt{16 - x^2}$

Como deseamos maximizar el área hallamos sus puntos críticos usando la derivada.

$$A(x) = \frac{1}{2} x\sqrt{16 - x^2} \Rightarrow A'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{16 - x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} \right)$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{16 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} \right)$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{16 - x^2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{16 - x^2}} \right)$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{16 - x^2 - x^2}{\sqrt{16 - x^2}} \right)$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{16 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} \right)$$

$$A'(x) = \frac{\cancel{2}\left(8 - x^2\right)}{\cancel{2}\sqrt{16 - x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{8 - x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$$

Si en la función antes de derivar introducimos "x" en la raíz es más fácil la derivada.

$$A(x) = \frac{1}{2} x\sqrt{16 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{16x^2 - x^4}$$

$$A'(x) = \frac{1}{2} \frac{32x - 4x^3}{2\sqrt{16x^2 - x^4}} = \frac{32x - 4x^3}{4\sqrt{16x^2 - x^4}} = \frac{\cancel{4x}\left(8 - x^2\right)}{\cancel{4x}\sqrt{16 - x^2}} = \frac{8 - x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$$

Igualamos a cero la derivada.

$$A'(x)=0 \Rightarrow \frac{8-x^2}{\sqrt{16-x^2}}=0 \Rightarrow 8-x^2=0 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{8}}$$

No tenemos en cuenta el valor negativo de la raíz y estudiamos el comportamiento de la función antes y después de $x=\sqrt{8}$.

- En $\left(0,\sqrt{8}\right)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $A'(1)=\frac{8-1^2}{\sqrt{16-1^2}}=\frac{7}{\sqrt{15}}>0$. La función crece en $\left(0,\sqrt{8}\right)$.
- En $\left(\sqrt{8},4\right)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $A'(3)=\frac{8-3^2}{\sqrt{16-3^2}}=\frac{-1}{\sqrt{7}}<0$. La función decrece en $\left(\sqrt{8},4\right)$.

La función Área tiene un máximo en $x=\sqrt{8}$ e $y=\sqrt{16-\left(\sqrt{8}\right)^2}=\sqrt{8}$.

Un triángulo rectángulo con área máxima tiene catetos iguales a $\sqrt{8}$ e hipotenusa 4.

Esa área máxima tiene un valor de $A\left(\sqrt{8}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{8}\sqrt{16-\left(\sqrt{8}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{8}\sqrt{8}=4\,u^2$

4: a) **[2 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

b) **[0,5 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, la gráfica de la función $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ y la recta vertical $x=1$.

a)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx=\left\{\begin{array}{c}\text{Cambio de variable}\\ \sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2\\ dx=2tdt\end{array}\right\}=\int \frac{t}{1+t}2tdt=2\int \frac{t^2}{1+t}dt=...$$

Realizamos la división de polinomios.

$$\begin{array}{llll} t^2 & & & \underline{|t+1} \\ \underline{-t^2} & \underline{-t} & & t-1 \\ & -t & & \\ & \underline{+t} & \underline{+1} & \\ & & \underline{|1|} & \end{array}$$

$$\frac{t^2}{1+t}=t-1+\frac{1}{1+t}$$

Utilizamos el resultado en el cálculo de la integral.

$$...=2\int t-1+\frac{1}{1+t}dt=2\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|\right)=t^2-2t+2\ln|1+t|=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ \sqrt{x}=t\end{array}\right\}=\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}+2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|=$$

$$=\boxed{x-2\sqrt{x}+\ln\left(1+\sqrt{x}\right)^2+C}$$

b) Veamos si la función corta el eje OX.

$$f(x)=0\Rightarrow\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=0\Rightarrow\sqrt{x}=0\Rightarrow x=0$$

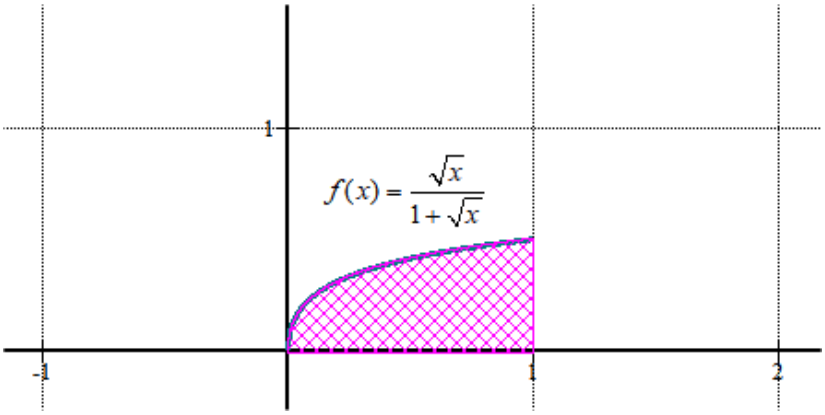
Como también está como límite de la región de la que queremos calcular el área la recta vertical $x=1$ el área es el valor absoluto de la integral definida desde 0 a 1 de $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

$$Área = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left[x - 2\sqrt{x} + \ln\left(1+\sqrt{x}\right)^2 \right]_0^1 =$$

$$= \left[1 - 2\sqrt{1} + \ln\left(1+\sqrt{1}\right)^2 \right] - \left[0 - 2\sqrt{0} + \ln\left(1+\sqrt{0}\right)^2 \right] =$$

$$= 1 - 2 + \ln 4 = -1 + \ln 4 = \boxed{0,38\,u^2}$$

No lo pide, pero dibujamos la gráfica para comprobar la bondad del resultado obtenido.



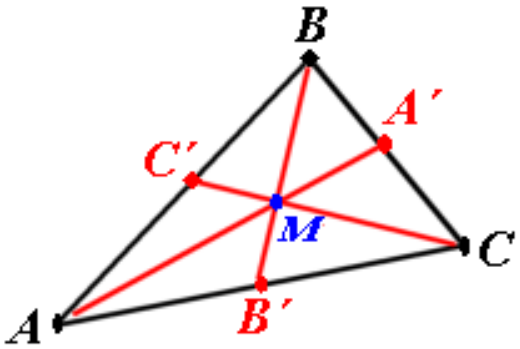
El área es menos que medio cuadradito. Aparentemente es correcto el resultado obtenido.

5: Se llama **mediana** de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

a) **[1,5 p.]** Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo de vértices $A(-1,2,3)$, $B(3,-4,1)$ y $C(1,-4,5)$.

b) **[1 p.]** Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

a) Dibujamos la situación planteada.



Determinemos los puntos intermedios que he llamado A´, B´ y C´.

$$A' = \frac{B+C}{2} = \frac{(3,-4,1)+(1,-4,5)}{2} = (2,-4,3)$$

$$B' = \frac{A+C}{2} = \frac{(-1,2,3)+(1,-4,5)}{2} = (0,-1,4)$$

$$C' = \frac{A+B}{2} = \frac{(-1,2,3)+(3,-4,1)}{2} = (1,-1,2)$$

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por A y A´.

$$\left.\begin{matrix} A(-1,2,3) \\ A'(2,-4,3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A(-1,2,3) \\ \overrightarrow{AA'} = (2,-4,3)-(-1,2,3) = (3,-6,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A(-1,2,3) \\ \vec{u} = (1,-2,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{matrix} x = -1+\alpha \\ r: y = 2-2\alpha \\ z = 3 \end{matrix}\right\}}$$

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por B y B´.

$$\left.\begin{matrix} B(3,-4,1) \\ B' = (0,-1,4) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} B(3,-4,1) \\ \overrightarrow{BB'} = (0,-1,4)-(3,-4,1) = (-3,3,3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} B(3,-4,1) \\ \vec{v} = (-1,1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{matrix} x = 3-\beta \\ s: y = -4+\beta \\ z = 1+\beta \end{matrix}\right\}}$$

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por C y C´.

$$\left.\begin{matrix} C(1,-4,5) \\ C' = (1,-1,2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} C(1,-4,5) \\ \overrightarrow{CC'} = (1,-1,2)-(1,-4,5) = (0,3,-3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} C(1,-4,5) \\ \vec{w} = (0,1,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{matrix} x = 1 \\ s': y = -4+t \\ z = 5-t \end{matrix}\right\}}$$

b) Resolvemos el sistema planteado con dos de las ecuaciones de las tres rectas, por ejemplo, *r* y *s*. Una vez obtenido el punto comprobamos que pertenece a la recta restante *s´*.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x=3-\beta \\ s: y=-4+\beta \\ z=1+\beta \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} x=-1+\alpha \\ r: y=2-2\alpha \\ z=3 \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3-\beta=-1+\alpha \\ -4+\beta=2-2\alpha \\ 1+\beta=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4-\beta=\alpha \\ -6+\beta=-2\alpha \\ \boxed{\beta=2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4-2=\alpha \\ -6+2=-2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2=\alpha \\ -4=-2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\alpha=2}$$

El punto de corte de *r* y *s* es el punto *M* que obtenemos sustituyendo en la ecuación de la recta *r* el valor de $\alpha=2$:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=2 \\ x=-1+\alpha \\ y=2-2\alpha \\ z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1+2=1 \\ y=2-4=-2 \\ z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow M(1,-2,3)$$

Compruebo que *M* pertenece a la recta *s´*:

$$¿M(1,-2,3)\in s´?$$

$$\left.\begin{array}{l} 1=1 \\ ¿-2=-4+t \\ 3=5-t \end{array}\right\}? \qquad \left.\begin{array}{l} 1=1 \\ ¿2=t \\ -2=-t \end{array}\right\}?$$

El punto M cumple las ecuaciones y pertenece a la recta *s´*, pues sale un valor de $t=2$.
Sustituyendo este valor de *t* en la ecuación de la recta obtendríamos el punto *M*.
Las tres medianas se cortan en el punto $M(1,-2,3)$.

6: Considere la recta *r* y el plano π dados por las siguientes ecuaciones:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0} \qquad \pi: x-2y-z=4$$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

b) **[0,5 p.]** En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso contrario, calcule la distancia entre la recta y el plano.

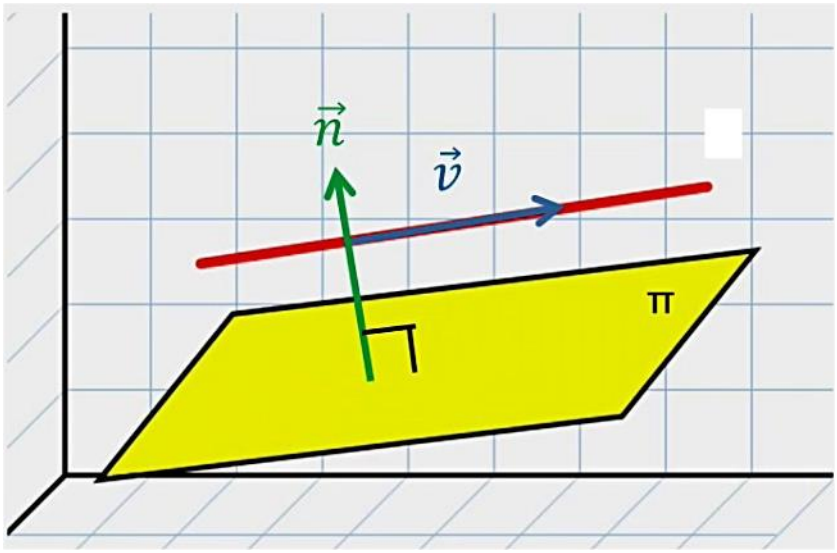
c) **[1 p.]** Determine el plano que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano π.

a) El vector director de la recta $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0}$ es $\vec{v} = (2,1,0)$ y el normal del plano $\pi: x-2y-z=4$ es $\vec{n} = (1,-2,-1)$.

Hacemos el producto escalar de los dos vectores.

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (2,1,0)(1,-2,-1) = 2-2 = 0$$

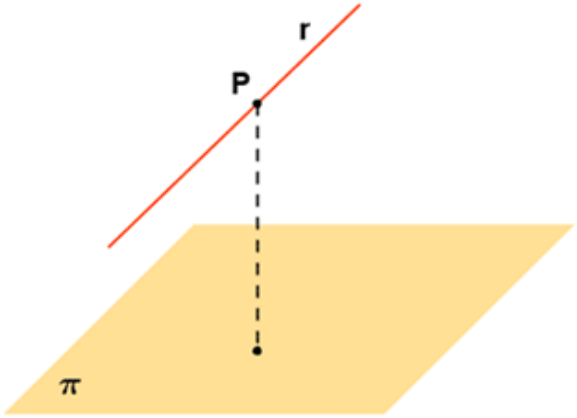
Como el producto escalar sale 0 entonces los vectores son perpendiculares y la recta y el plano son paralelos.



b) Como no se cortan determinamos la distancia entre recta y plano.

Tenemos en cuenta que al ser paralelos recta y plano la distancia entre ellos es la distancia de cualquier punto de *r* al plano.

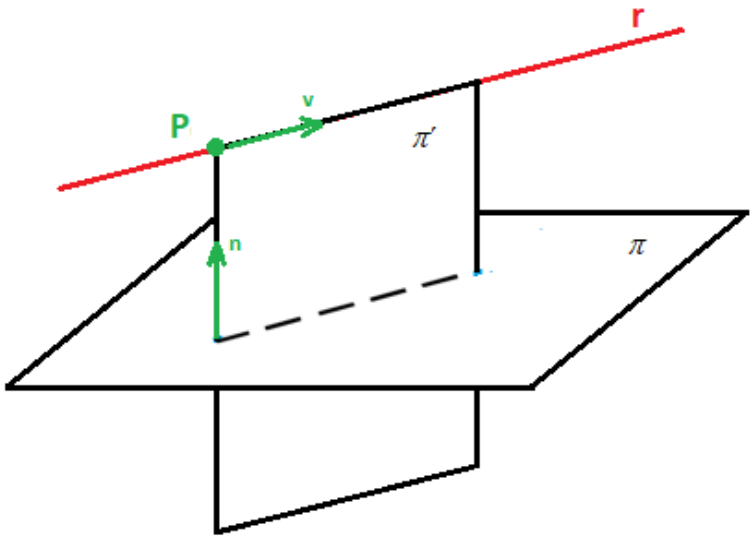
$$d(r,\pi) = d(P,\pi)$$



Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left.\begin{array}{l} P(-1,2,1)\in r \\ \pi: x-2y-z-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|-1-4-1-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{6}}=\boxed{4.08\,u}$$

c) Llamemos π´ al plano que buscamos.
Si el plano π´ contiene a la recta *r* entonces el punto P(–1, 2, 1) pertenece al plano. También el vector director $\vec{v}=(2,1,0)$ de la recta $r:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{0}$ es uno de los vectores directores del plano pedido.
Como es perpendicular el plano $\pi: x-2y-z=4$ su vector normal $\vec{n}=(1,-2,-1)$ es el otro vector director del plano π´.



$$\left.\begin{array}{l} P(-1,2,1)\in \pi' \\ \vec{v}=(2,1,0) \\ \vec{n}=(1,-2,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$\pi' \equiv -x-1-4z+4-z+1+2y-4=0$$

$$\boxed{\pi' \equiv -x+2y-5z=0}$$

7: Una urna tiene 2 bolas blancas y 3 bolas rojas. Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que se obtienen al repetir nueve veces el siguiente experimento: se saca una bola de la urna y, después de anotar el color, se devuelve la bola a la urna.

a) **[1 p.]** ¿Qué tipo de distribución sigue dicha variable aleatoria y cuáles son sus parámetros?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que el número de bolas anotado sea menor o igual que 4?

a) Si X = Número de bolas blancas obtenidas en 9 repeticiones de la extracción de una bola de la urna, esta distribución es binomial ya que la probabilidad de éxito es independiente de la repetición y solo existen dos posibilidades "sacar bola blanca" o "sacar bola no blanca".
Los parámetros son número de repeticiones = n = 9 y p = probabilidad de sacar bola blanca en una extracción de la urna = $\frac{2}{5}=0.4$.

X = B(9, 0.4)

b) Si X = B(9, 0.4) entonces la media es $\mu = n\cdot p = 9\cdot 0,4 = 3.6$

y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{9\cdot 0.4\cdot 0.6} = 1.4696$

c)

$$P(X\le 4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$$

$$=\binom{9}{0}\cdot 0.4^0\cdot 0.6^9+\binom{9}{1}\cdot 0.4^1\cdot 0.6^8+\binom{9}{2}\cdot 0.4^2\cdot 0.6^7+\binom{9}{3}\cdot 0.4^3\cdot 0.6^6+\binom{9}{4}\cdot 0.4^4\cdot 0.6^5=$$

$$=0.6^9+9\cdot 0.4\cdot 0.6^8+\frac{9\cdot 8}{2}\cdot 0.4^2\cdot 0.6^7+\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}\cdot 0.4^3\cdot 0.6^6+\frac{9\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot 6}{\cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2}}\cdot 0.4^4\cdot 0.6^5=$$

$$=0.6^9+9\cdot 0.4\cdot 0.6^8+36\cdot 0.4^2\cdot 0.6^7+84\cdot 0.4^3\cdot 0.6^6+126\cdot 0.4^4\cdot 0.6^5=\boxed{0.7334}$$

También se puede utilizar la tabla de la binomial

$$P(X\le 4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+$$
$$+P(X=3)+P(X=4)=0,0101+0,0605+$$
$$+0,1612+0,2508+0,2508=\boxed{0,7334}$$

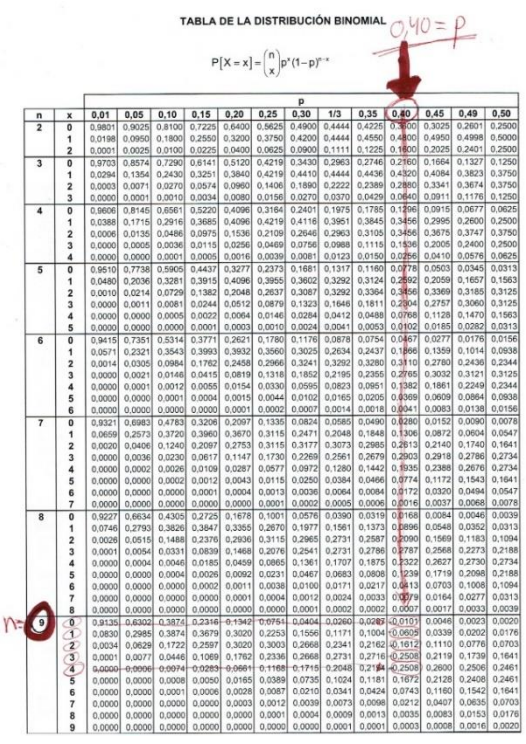


TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$P[X=x]=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$

0,40 = p

n	x	p = 0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2601	0,2500
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4444	0,4550	0,4800	0,4950	0,4998	0,5000
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1111	0,1225	0,1600	0,2025	0,2401	0,2500
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1327	0,1250
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4084	0,3823	0,3750
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2222	0,2389	0,2880	0,3341	0,3674	0,3750
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0370	0,0429	0,0640	0,0911	0,1176	0,1250
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0677	0,0625
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951	0,3845	0,3456	0,2995	0,2600	0,2500
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2963	0,3105	0,3456	0,3675	0,3747	0,3750
	3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0988	0,1115	0,1536	0,2005	0,2400	0,2500
	4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0123	0,0150	0,0256	0,0410	0,0576	0,0625
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0176	0,0156
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2437	0,1866	0,1359	0,1014	0,0938
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110	0,2780	0,2436	0,2344
	3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2195	0,2355	0,2765	0,3032	0,3121	0,3125
	4	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0823	0,0951	0,1382	0,1861	0,2249	0,2344
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0165	0,0205	0,0369	0,0609	0,0864	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0014	0,0018	0,0041	0,0083	0,0138	0,0156
7	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0090	0,0078
	1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1306	0,0872	0,0604	0,0547
	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,3073	0,2985	0,2613	0,2140	0,1740	0,1641
	3	0,0000	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2561	0,2679	0,2903	0,2918	0,2786	0,2734
	4	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1280	0,1442	0,1935	0,2388	0,2676	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0384	0,0466	0,0774	0,1172	0,1543	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0064	0,0084	0,0172	0,0320	0,0494	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0006	0,0016	0,0037	0,0068	0,0078
8	0	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0046	0,0039
	1	0,0746	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1561	0,1373	0,0896	0,0548	0,0352	0,0313
	2	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2731	0,2587	0,2090	0,1569	0,1183	0,1094
	3	0,0001	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2731	0,2786	0,2787	0,2568	0,2273	0,2188
	4	0,0000	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1707	0,1875	0,2322	0,2627	0,2730	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0683	0,0808	0,1239	0,1719	0,2098	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0171	0,0217	0,0413	0,0703	0,1008	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0024	0,0033	0,0079	0,0164	0,0277	0,0313
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0007	0,0017	0,0033	0,0039
9	0	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0023	0,0020
	1	0,0830	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
	3	0,0001	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2731	0,2716	0,2508	0,2119	0,1739	0,1641
	4	0,0000	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2048	0,2194	0,2508	0,2600	0,2506	0,2461
	5	0,0000	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1024	0,1181	0,1672	0,2128	0,2408	0,2461
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0341	0,0424	0,0743	0,1160	0,1542	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0073	0,0098	0,0212	0,0407	0,0635	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0009	0,0013	0,0035	0,0083	0,0153	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,0016	0,0020

8: En una determinada población, el 40% de los individuos lee diariamente la prensa y el 75% ve diariamente las noticias en la televisión. Además, el 25% de los individuos lee la prensa y ve las noticias en la televisión diariamente.

a) **[0,5 p.]** ¿Son independientes los sucesos "leer diariamente la prensa" y "ver diariamente las noticias en la televisión?

b) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo lea la prensa diariamente pero no vea las noticias en la televisión?

c) **[1 p.]** Si un individuo lee la prensa diariamente, ¿cuál es la probabilidad de que también vea las noticias en la televisión?

Realicemos una tabla de contingencia para obtener el resto de datos.

	Ve diariamente las noticias en la televisión	No ve diariamente las noticias en la televisión	
Lee diariamente la prensa	**25**		**40**
No lee diariamente la prensa			
	75		**100**

Completamos la tabla.

	Ve diariamente las noticias en la televisión	No ve diariamente las noticias en la televisión	
Lee diariamente la prensa	**25**	**15**	**40**
No lee diariamente la prensa	**50**	**10**	**60**
	75	**25**	**100**

a) Calculamos la probabilidad de la intersección de los dos sucesos:
P(Lea diariamente la prensa ∩ Vea diariamente las noticias en la televisión) = 0,25
Y ahora el producto de las probabilidades de los dos sucesos.
P(Lea diariamente la prensa) · P(Vea diariamente las noticias en la televisión) = 0,4 · 0,75 = 0,3
Dan resultados diferentes por lo que los sucesos **no** son independientes.

b) Como hay 15 individuos de los 100 de la población que lee la prensa y no ve las noticias aplico la regla de Laplace y obtenemos:

$$P(\text{Lea la prensa y no vea las noticias}) = \frac{15}{100} = \boxed{0,15}$$

c) Es una probabilidad condicionada pues se da por hecho que la persona lee diariamente la prensa. Sabemos que hay 40 personas leen diariamente la prensa y de ellas 25 también ven las noticas, aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Vea las noticias /Lee la prensa}) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8} = \boxed{0,625}$$

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO

206 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2019

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + z = a \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para ***a = 2.***
b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

A.2:

a) **[1,5 p.]** Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{e^x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$. Determine también los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$.

A.3: Considere la recta $r: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1}$ y el plano $\pi: x - 2y - z = -1$.

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta *r* y el plano π.
b) **[1,5 p.]** En el caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que la recta no corte al plano, calcule la distancia entre ambos.

A.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

La probabilidad de que una flecha dé en la diana es 0,40. Si se lanzan 9 flechas, determine:

a) **[1 p.]** Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de flechas que dan en la diana.
b) **[0,5 p.]** Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución.
c) **[1 p.]** Cuál es la probabilidad de que al menos 5 flechas den en la diana.

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

B.1: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de *a* la matriz *A* tiene inversa.
b) **[0,5 p.]** Para $a=1$, calcule la inversa de *A*.
c) **[1 p.]** Para $a=1$, resuelva la ecuación matricial $XA+2I=2A$, donde *I* es la matriz identidad 3x3.

B.2:

a) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.
b) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ que pasa por el punto (1,2).
c) **[1 p.]** Calcule el límite $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}$.

B.3: Los puntos $A=(0,-1,1)$ y $B=(1,1,1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice *C* está contenido en la recta *r* que pasa por el punto *B* y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+z=1$

a) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta *r* que pasa por el punto *B* y es perpendicular al plano π.
b) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice *C* sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

B.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
El 60% de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25% en Madrid, y el resto en Lisboa. El 1% de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa son del 0,5% y del 2%, respectivamente.

a) **[1 p.]** Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.
b) **[1,5 p.]** Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?

SOLUCIONES

OPCIÓN A:

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + z = a \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para ***a = 2.***

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Discutamos el sistema y luego respondemos a cada apartado.

La matriz de coeficientes asociado al sistema es

$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a - a - 2 + 2 - 1 + a^2 = a^2 - 1$

Igualamos a cero el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

Distinguimos tres casos distintos.

CASO 1. $a \neq -1$ *y* $a \neq 1$

El determinante de A es no nulo y el rango de A es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3 al igual que el número de incógnitas. El sistema tiene solución única.

CASO 2. $a = 1$

La matriz A queda

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tiene determinante nulo y su rango es menor de 3.

Su rango es 2, ya que el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 1ª es no nulo. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$.

¿El rango de la ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es 3?

Tomamos el menor que resulta de quitar la 1ª columna (igual que la 2ª columna).

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+2+2+1 = 4 \neq 0$. El rango de A/B es 3.

Como Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B el sistema no tiene solución.

CASO 3. $a = -1$

La matriz A queda

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tiene determinante nulo y su rango es menor de 3.

Su rango es 2, ya que el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y la columna 3ª es no nulo.

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$.

¿El rango de la ampliada $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ es 3?

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 3ª columna.

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$. El rango de A/B es menor de 3.

El rango es 2 ya que el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y la columna 3ª es no nulo.

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$.

Como rango de A es 2 igual que el rango de la ampliada y es menor que el número de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones.

a) Para $a \neq -1$ *y* $a \neq 1$ el sistema tiene una única solución.

Resolvemos el sistema para *a = 2* con el método de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ con $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2^2 - 1 = 3$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4+2+4+1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-2-4-2+8}{3}=0$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{4-1-2+2}{3}=\frac{3}{3}=1$$

La solución es $x=1;\ y=0;\ z=1$

b) Para $a=-1$ el sistema tiene infinitas soluciones.

El sistema queda $\begin{cases} -x+y-2z=0\\ x+y+z=-1\\ x+y+z=-1\end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} -x+y-2z=0\\ x+y+z=-1\\ x+y+z=-1\end{cases}\Rightarrow\{\text{Ecuación 2ª = Ecuación 3ª}\}\Rightarrow\begin{cases} -x+y-2z=0\\ x+y+z=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} -x+y=2z\\ x+y=-1-z\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\text{Sumo las ecuaciones}&&\\ -x+y&=&2z\\ x+y&=&-1-z\\ \hline 2y&=&-1+z\end{array}\right\}\Rightarrow 2y=-1+z\Rightarrow\boxed{y=\frac{-1+z}{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+\frac{-1+z}{2}=2z\Rightarrow -2x-1+z=4z\Rightarrow -2x=1+3z\Rightarrow\boxed{x=\frac{1+3z}{-2}}$$

La solución es $x=\frac{1+3t}{-2};\ y=\frac{-1+t}{2};\ z=t$

c) Para $a=1$ el sistema no tiene solución. Razonado en el caso 2 del inicio del ejercicio.

A.2:

a) **[1,5 p.]** Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{e^x}$, definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$. Determine también los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) **[1 p.]** Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

a) La derivada de la función es

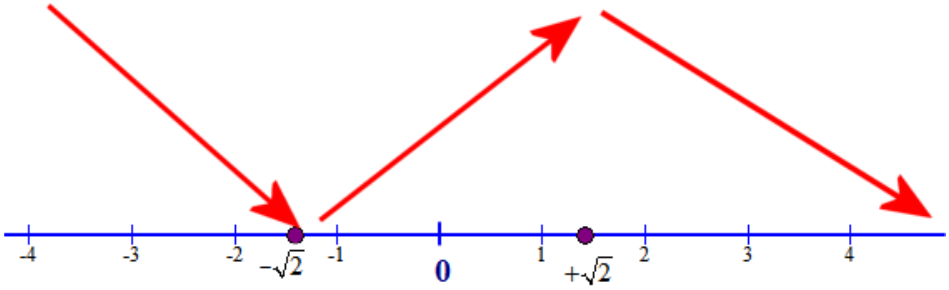
$$f(x)=\frac{x^2+2x}{e^x}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{(2x+2)e^x-(x^2+2x)e^x}{e^{2x}}=\frac{\cancel{e^x}\,(2x+2-x^2-2x)}{\cancel{e^x}\cdot e^x}=\frac{-x^2+2}{e^x}$$

Igualamos a cero la derivada

$$f\,'(x)=0\Rightarrow\frac{-x^2+2}{e^x}=0\Rightarrow -x^2+2=0\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

Estudiemos la variación del signo de la derivada en cada intervalo en que se divide la recta real con estos dos puntos de separación.

- En $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$ tomamos $x = -2$, la derivada vale $f\,'(-2)=\dfrac{-(-2)^2+2}{e^{-2}}=\dfrac{-4+2}{e^{-2}}=-2e^2<0$. La función decrece.
- En $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ tomamos $x = 0$, la derivada vale $f\,'(0)=\dfrac{-0^2+2}{e^0}=\dfrac{2}{1}=2>0$. La función crece.
- En $\left(+\sqrt{2},+\infty\right)$ tomamos $x = 2$, la derivada vale $f\,'(2)=\dfrac{-2^2+2}{e^2}=\dfrac{-2}{e^2}<0$. La función decrece.



La función tiene un mínimo relativo en $x=-\sqrt{2}$ y un máximo relativo en $x=+\sqrt{2}$.
La función decrece en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(+\sqrt{2},+\infty\right)$ y crece en $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

b)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{1-1}=\infty-\infty=\text{Indeterminación}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x}$$

$$=\frac{1-1-0}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}=\frac{1-1}{1+0-1}=$$

$$=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{1+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

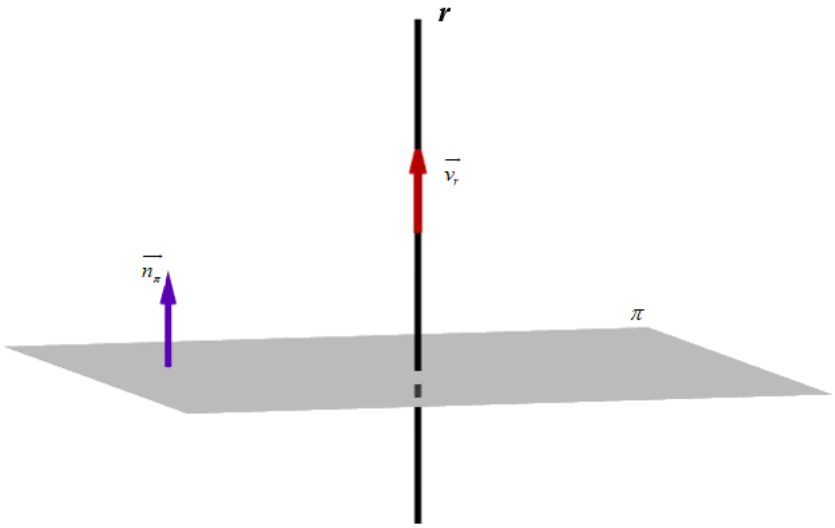
A.3: Considere la recta $r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi: x-2y-z=-1$.

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta *r* y el plano π.
b) **[1,5 p.]** En el caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que la recta no corte al plano, calcule la distancia entre ambos.

a) De $r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ tenemos su vector director $\vec{v_r} = (-1,2,1)$

De $\pi: x-2y-z=-1$ tenemos su vector normal $\vec{n_\pi} = (1,-2,-1)$

Si comparamos estos vectores vemos que el vector director de la recta y el normal del plano son de coordenadas proporcionales, por lo que están en la misma dirección. Recta y plano se cortan perpendicularmente.



b) Hallamos el punto de corte resolviendo el sistema formado por ecuación de recta y del plano. Antes pasamos la recta a ecuaciones paramétricas.

$$r: \left.\begin{array}{l} x=-1-t \\ y=-3+2t \\ z=t \end{array}\right\}$$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x-2y-z=-1 \\ x=-1-t \\ y=-3+2t \\ z=t \end{array}\right\} \Rightarrow -1-t-2(-3+2t)-t=-1 \Rightarrow -1-t+6-4t-t=-1$$

$$-6t=-6 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1-1=-2 \\ y=-3+2=-1 \\ z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P(-2,-1,1)}$$

El ángulo que forman recta y plano es de 90º. Ya hemos visto que se cortan perpendicularmente.

A.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
La probabilidad de que una flecha dé en la diana es 0,40. Si se lanzan 9 flechas, determine:
a) **[1 p.]** Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de flechas que dan en la diana.
b) **[0,5 p.]** Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución.
c) **[1 p.]** Cuál es la probabilidad de que al menos 5 flechas den en la diana.

a) p = Probabilidad de que una flecha dé en la diana = 0.4
n = Número de lanzamientos.
X = Número de dianas en 9 lanzamientos.
X es una distribución binomial de parámetros p = 0.4 y n = 9.

$$X = B(9, 0.4)$$

b)
Media = $n \cdot p = 9 \cdot 0.4 = 3.6$
Desviación típica = $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{9 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = 1.47$

c)
$$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) =$$
$$= \{\text{Mirando la tabla de la binomial}\} = 0,1672 + 0,0743 + 0,0212 + 0,0035 + 0,0003 = \boxed{0,2665}$$

OTRA FORMA DE HACERLO.

También se puede calcular estas probabilidades usando la fórmula:
$P(X = m) = \binom{9}{m} 0,4^m \cdot 0,6^{9-m}$; *siendo m* = número de dianas en 9 lanzamientos . Es un proceso más laborioso.

OPCIÓN B:

B.1: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de *a* la matriz *A* tiene inversa.
b) **[0,5 p.]** Para $a=1$, calcule la inversa de *A*.
c) **[1 p.]** Para $a=1$, resuelva la ecuación matricial $XA+2I=2A$, donde *I* es la matriz identidad 3x3.

a) La matriz A tiene inversa cuando su determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-1+a^2-a=a^2-a-1$$

Si igualamos a cero.

$$|A|=0\Rightarrow a^2-a-1=0\Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\begin{cases}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ =\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

La matriz A tiene inversa cuando *a* es distinto de $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) Para $a=1$ la matriz tiene inversa ya que $|A|=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=1-1-1=-1\neq 0$

Calculamos su inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

c) Para $a=1$, la matriz A tiene inversa. Calculada en el apartado anterior.
Despejamos X de la ecuación matricial.

$$XA+2I=2A \Rightarrow XA=2A-2I \Rightarrow XAA^{-1}=\left(2A-2I\right)A^{-1} \Rightarrow X=\left(2A-2I\right)A^{-1}$$
$$X=2AA^{-1}-2IA^{-1}=2I-2A^{-1}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X=2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-2&2\\2&-2&2\\-2&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}6&-2&2\\2&0&2\\-2&0&0\end{pmatrix}}$$

B.2:

a) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$.

b) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ que pasa por el punto (1,2).

c) **[1 p.]** Calcule el límite $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}$.

a)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \left\{ \begin{matrix} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{x} = t \to x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right\} = \int \frac{t}{1+t^2} 2tdt = 2\int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt =$$

$$= 2\left[\int \frac{1+t^2}{1+t^2} dt - \int \frac{1}{1+t^2} dt \right] = 2\left[\int dt - arctgt \right] = 2\left[t - arctgt \right] = \left\{ \begin{matrix} \text{Deshacemos el cambio} \\ \sqrt{x} = t \end{matrix} \right\} =$$

$$= \boxed{2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + C}$$

b) Como hemos visto la primitiva es $F(x) = 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + C$.

Al pasar por el punto (1,2) significa que $F(1) = 2$.

$$F(1) = 2 \Rightarrow 2 = 2\sqrt{1} - 2arctg(1) + C \Rightarrow 2 = 2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

La primitiva buscada es $\boxed{F(x) = 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + \frac{\pi}{2}}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x} = \boxed{0}$, ya que el grado del denominador es 1 y el del numerador es 1/2. Es mayor el grado del denominador y por tanto el límite vale 0.

OTRA FORMA DE HACERLO

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

B.3: Los puntos $A=(0,-1,1)$ y $B=(1,1,1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice *C* está contenido en la recta *r* que pasa por el punto *B* y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+z=1$

a) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta *r* que pasa por el punto *B* y es perpendicular al plano π.

b) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice *C* sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

a) Si la recta es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+z=1$ el vector director de la recta es el vector normal del plano, es decir, $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{n_\pi}=(2,-1,1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(2,-1,1)\\ \text{Pasa por } B=(1,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{r} x=1+2t\\ r: y=1-t\\ z=1+t\end{array}\right\}}$$

b) El punto C al pertenecer a la recta *r* tiene coordenadas $C(1+2t,1-t,1+t)$ para un valor de *t*, que debemos determinar.

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores que unen los vértices entre sí.

$$Área\ ABC=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|}{2}$$

Calculamos las coordenadas de los vectores, su producto vectorial y la expresión del área del triángulo.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,1)-(0,-1,1)=(1,2,0)\\ \overrightarrow{AC}=(1+2t,1-t,1+t)-(0,-1,1)=(1+2t,2-t,t)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & 0\\ 1+2t & 2-t & t\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2ti+(2-t)k-(2+4t)k-tj=2ti-tj+(2-t-2-4t)k=(2t,-t,-5t)$$

$$Área\ ABC=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|}{2}=\frac{\sqrt{4t^2+t^2+25t^2}}{2}=\frac{\sqrt{30t^2}}{2}=\frac{\sqrt{30}\cdot|t|}{2}$$

Como el área debe valer $3\sqrt{30}$ igualamos la expresión a este valor.

$$3\sqrt{30}=\frac{\sqrt{30}\cdot|t|}{2}\Rightarrow 6\sqrt{30}=\sqrt{30}\cdot|t|\Rightarrow|t|=6\Rightarrow\begin{cases}t=6\rightarrow C_1(1+12,1-6,1+6)\\ o\\ t=-6\rightarrow C_2(1-12,1+6,1-6)\end{cases}$$

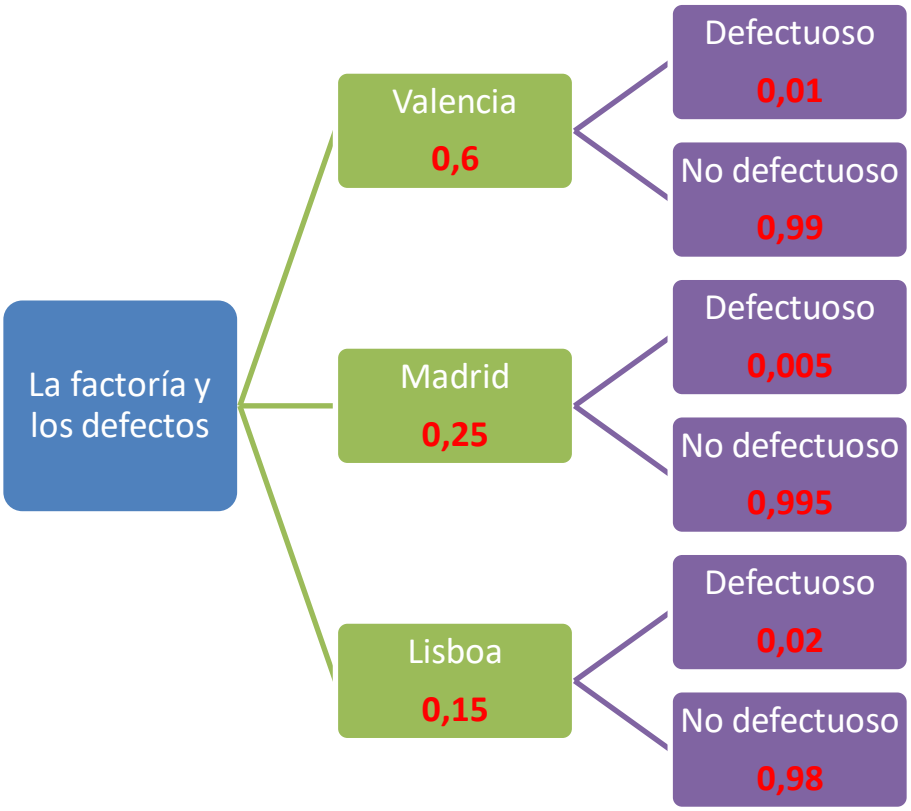
El tercer vértice del triángulo puede tener las coordenadas $C_1(13, -5, 7)$ o bien $C_2(-11, 7, -5)$.

B.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
El 60% de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25% en Madrid, y el resto en Lisboa. El 1% de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa son del 0,5% y del 2%, respectivamente.

a) **[1 p.]** Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

b) **[1,5 p.]** Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?

Construimos un diagrama de árbol



a)

$$P(No\ defectuoso) = P(Valencia)\cdot P(No\ defectuoso/Valencia) +$$
$$+P(Madrid)\cdot P(No\ defectuoso/Madrid) + P(Lisboa)\cdot P(No\ defectuoso/Lisboa) =$$
$$= 0,6\cdot 0,99 + 0,25\cdot 0,995 + 0,15\cdot 0,98 = \boxed{0,9897}$$

b)

$$P(Madrid/Defectuoso) = \frac{P(Madrid\ y\ defectuoso)}{P(Defectuoso)} =$$
$$= \frac{P(Madrid)\cdot P(Defectuoso/Madrid)}{1-0,9897} = \frac{0,25\cdot 0,005}{0,0103} = \boxed{0,1220}$$

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO

206 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2019

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a + 3 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para ***a = 0.***
b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

A.2:

a) **[1,5 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 \cos x \, dx$.
b) **[1 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cos x$.

A.3: Los puntos $A = (3,0,0)$, $B = (0,3,0)$ y $C = (0,0,3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice *D* está contenido en la recta ***r*** que pasa por el punto $P = (1,1,1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.

a) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación del plano que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.
b) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (1,1,1)$ y es perpendicular al plano π.
c) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice *D* sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

A.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se sabe que el 69,50% de las bombillas duran menos de 5061,2 horas, y que el 16,60 % de las bombillas duran más de 5116,4 horas.

a) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?
b) **[1,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

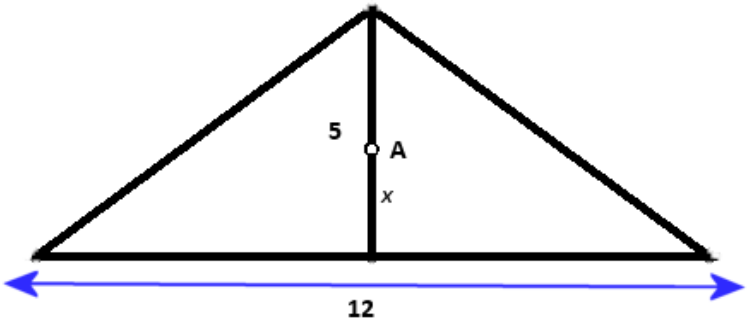
B.1: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) **[0,5 p.]** Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n\in\mathbb{N}$.

c) **[1 p.]** Determine si existe la inversa de A. En caso afirmativo, calcúlela.

B.2: Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



a) **[0,5 p.]** Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión: $f(x)=5-x+2\sqrt{x^2+36}$

b) **[1,5 p.]** Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.

c) **[0,5 p.]** Calcule dicha cantidad mínima.

B.3: Considere las siguientes rectas:

$r:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z+1}{1}$ $\qquad$ $s:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,5 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

B.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\dfrac{2}{3}$, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\dfrac{2}{5}$.

a) **[1 p.]** Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.

b) **[1,5 p.]** Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que jugara en casa?

SOLUCIONES

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a + 3 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para ***a = 0.***

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Discutimos el sistema y luego respondemos a las cuestiones planteadas.

Para ello consideremos su matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ con determinante } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + a - \left(a^3 + 1 + 1\right) = -a^3 + 3a - 2$$

Si igualamos a cero:

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^3 + 3a - 2 = 0$$

Resolvemos la ecuación de tercer grado aplicando Ruffini:

	-1	0	3	-2
1		-1	-1	2
	-1	-1	2	$\underline{\lfloor 0}$

$\Rightarrow a = 1$ es raiz

Resolvemos la ecuación de 2º grado restante:

$$-a^2 - a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)\cdot 2}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2}$$

$$a = \begin{cases} \frac{1+3}{-2} = -2 \\ \frac{1-3}{-2} = 1 \end{cases}$$

Hemos obtenido dos valores especiales para el parámetro ***a***. Consideramos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 1; a \neq -2$

En este caso el determinante es no nulo y el sistema es compatible determinado (solución única)

CASO 2. $a = 1$

El sistema queda $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

Este sistema no tiene solución, pues la ecuación 1ª y la ecuación 3ª no pueden cumplirse al mismo tiempo.

CASO 3. $a=-2$

El sistema queda $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ -2x+y+z=1 \end{cases}$

Aplicando Gauss y sumando a la ecuación 2ª la 1ª multiplicada por –1. Y a la 3ª le sumamos la 1ª multiplicada por 2:

$$\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +z & = & -2 \\ -x & -y & +2z & = & -1 \\ \hline & -3y & +3z & = & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcr} -2x & +y & +z & = & 1 \\ 2x & 2y & -4z & = & 2 \\ \hline & 3y & -3z & = & 3 \end{array}$$

El sistema queda $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ -3y+3z=-3 \\ 3y-3z=3 \end{cases}$

La 2ª y 3ª ecuación son iguales. Este sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

a) El sistema tiene solución única para $a\neq 1; a\neq -2$.

En particular, para *a = 0* el sistema es compatible determinado y queda

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=0 \\ y+z=3 \end{cases}$$

Que resolviéndolo sale:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=0 \\ y+z=3 \end{cases} \Rightarrow x=-z \Rightarrow \begin{cases} -z+y=1 \\ y+z=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y=1+z \Rightarrow 1+z+z=3 \Rightarrow 2z=2 \Rightarrow z=1$$

$$y=1+1=2 \Rightarrow x=-1$$

Para *a = 0* el sistema tiene la solución: $x=-1;\ y=2;\ z=1$.

b) El sistema tiene infinitas soluciones para $a = -2$. Lo resolvemos.
En el estudio previo hemos visto que

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases} \text{ es equivalente a } \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

Simplificamos y obtenemos las soluciones.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 3y - 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 1 + z} \Rightarrow$$

$$x + 1 + z - 2z = 1 \Rightarrow x - z = 0 \Rightarrow \boxed{x = z}$$

Las soluciones son $x = z;\ y = 1 + z;\ z = z$

c) El sistema no tiene solución para $a = 1$, como se ha visto en el estudio de la compatibilidad del sistema.

A.2:

a) **[1,5 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 \cos x \, dx$.

b) **[1 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cos x$.

a)

$$\int x^2 \cos x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = \cos xdx \Rightarrow v = \int \cos xdx = senx \end{array} \right\} = x^2 \cdot senx - \int senx \cdot 2xdx =$$

$$= x^2 \cdot senx - 2\int x \cdot senxdx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = senxdx \Rightarrow v = \int \text{sen } xdx = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= x^2 \cdot senx - 2\left(x \cdot \left(-\cos x \right) - \int -\cos xdx \right) = x^2 \cdot senx + 2x \cdot \cos x - 2\int \cos xdx =$$

$$= \boxed{x^2 \cdot senx + 2x \cdot \cos x - 2senx + K}$$

b) Antes de calcular el área usando la integral definida entre 0 y π, comprobemos donde corta la función el eje OX, por si estos posibles puntos de corte estuvieran entre 0 y π.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 \cos x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}; x = \dfrac{3\pi}{2}; ... \end{array} \right.$$

$\dfrac{\pi}{2} \in (0, \pi)$, por lo que el área debemos dividirla en dos integrales definidas, una de 0 a $\dfrac{\pi}{2}$ y otra de $\dfrac{\pi}{2}$ a π

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos xdx = \left[x^2 \cdot senx + 2x\cos x - 2senx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot sen\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 2sen\frac{\pi}{2} \right) - \left(0^2 \cdot sen0 + 2 \cdot 0 \cdot \cos 0 - 2sen0 \right) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - 2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 > 0$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos x dx = \left[x^2 \cdot sen x + 2x \cos x - 2sen x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \left(\pi^2 \cdot sen\pi + 2 \cdot \pi \cdot \cos \pi - 2sen\pi \right) - \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot sen \frac{\pi}{2} + 2 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 2sen \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= -2\pi - \frac{\pi^2}{4} + 2 < 0$$

Obtenemos el valor del área como la suma de los valores absolutos de las dos integrales definidas calculadas previamente.

$$Área = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos x dx \right| = \frac{\pi^2}{4} - 2 + \left| -2\pi - \frac{\pi^2}{4} + 2 \right| =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2 + 2\pi + \frac{\pi^2}{4} - 2 = \boxed{\frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4\, u^2}$$

A.3: Los puntos $A=(3,0,0)$, $B=(0,3,0)$ y $C=(0,0,3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice *D* está contenido en la recta ***r*** que pasa por el punto $P=(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.

a) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación del plano que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.

b) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación de la recta *r* que pasa por el punto $P=(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π.

c) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice *D* sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

a) Determinemos los vectores directores del plano $\overrightarrow{AB}=(0,3,0)-(3,0,0)=(-3,3,0)$ y $\overrightarrow{AC}=(0,0,3)-(3,0,0)=(-3,0,3)$ y elegimos el punto A(3,0,0) perteneciente al plano.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 9x-27-(-9z-9y)=0\Rightarrow 9x-27+9z+9y=0$$

Simplificando la ecuación del plano es $\boxed{\pi: x+y+z-3=0}$

b) Si la recta es perpendicular al plano su vector director es el normal al plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=\vec{n}=(1,1,1)\\ P(1,1,1)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\left.\begin{array}{r}x=1+t\\ y=1+t\\ z=1+t\end{array}\right\}$$

c) D pertenece a la recta, luego sus coordenadas son $D(1+t,1+t,1+t)$

Para aplicar la fórmula del volumen del tetraedro nos falta hallar las coordenadas del vector $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AD}=(1+t,1+t,1+t)-(3,0,0)=(t-2,t+1,t+1)$$

$$\textit{Volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D}=\frac{\left|Det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|}{6}=$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ t-2 & t+1 & t+1 \end{vmatrix}}{6}=\left|\frac{9t-18-(-9t-9-9t-9)}{6}\right|=\left|\frac{27t}{6}\right|$$

Como dicho volumen debe ser 18 lo igualamos y resolvemos la ecuación para determinar ***t*** y por tanto las coordenadas del punto D.

$$\left|\frac{27t}{6}\right|=18\Rightarrow|27t|=108\Rightarrow|t|=\frac{108}{27}=4\Rightarrow\begin{cases}t=4\Rightarrow D(1+t,1+t,1+t)=\boxed{D_1(5,5,5)}\\ t=-4\Rightarrow D(1+t,1+t,1+t)=\boxed{D_2(-3,-3,-3)}\end{cases}$$

A.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se sabe que el 69,50% de las bombillas duran menos de 5061,2 horas, y que el 16,60 % de las bombillas duran más de 5116,4 horas.
a) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?
b) **[1,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

a) X = Tiempo de duración en horas de una bombilla. X = N(μ, σ)
Los datos proporcionados en el problema son $P(X<5061,2)=0,6950$ y $P(X>5116,4)=0,1660$.
Nos piden calcular $P(5061,2<X<5116,4)$.

$$P(5061,2<X<5116,4)=P(X<5116,4)-P(X<5061,2)=$$
$$=(1-P(X>5116,4))-P(X<5061,2)=$$
$$=(1-0,1660)-0,6950=\boxed{0,1390}$$

b) Si tipificamos la distribución para poder usar la tabla de la N(0,1), tenemos que:

$$P(X<5061,2)=0,6950\Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{5061,2-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z<\frac{5061,2-\mu}{\sigma}\right)=0,6950$$

Buscando en la tabla de la N(0,1) se cumple $\frac{5061,2-\mu}{\sigma}=0,51$

Por el mismo procedimiento:

$$P(X>5116,4)=0,1660\Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{5116,4-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z>\frac{5116,4-\mu}{\sigma}\right)=0,1660$$
$$1-P\left(Z<\frac{5116,4-\mu}{\sigma}\right)=0,1660\Rightarrow P\left(Z<\frac{5116,4-\mu}{\sigma}\right)=0,834$$

Buscando en la tabla de la N(0,1) tenemos que $\frac{5116,4-\mu}{\sigma}=0,97$

Juntemos las dos igualdades y resolvamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{5061,2-\mu}{\sigma}=0,51\\ \frac{5116,4-\mu}{\sigma}=0,97\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5061,2-\mu=0,51\sigma\\ 5116,4-\mu=0,97\sigma\end{array}\right\}\Rightarrow\mu=5061,2-0,51\sigma$$
$$5116,4-(5061,2-0,51\sigma)=0,97\sigma\Rightarrow 5116,4-5061,2=0,97\sigma-0,51\sigma$$
$$55,2=0,46\sigma\Rightarrow\boxed{\sigma=\frac{55,2}{0,46}=120\ horas}$$

Y sustituyendo $\boxed{\mu=5061,2-0,51\sigma=5061,2-0,51\cdot 120=5000\ horas}$

B.1: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) **[0,5 p.]** Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n\in\mathbb{N}$.

c) **[1 p.]** Determine si existe la inversa de A. En caso afirmativo, calcúlela.

a)

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A\cdot A^3=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b) Observando lo obtenido en el apartado anterior tenemos que $A^n=\begin{pmatrix}1&n&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

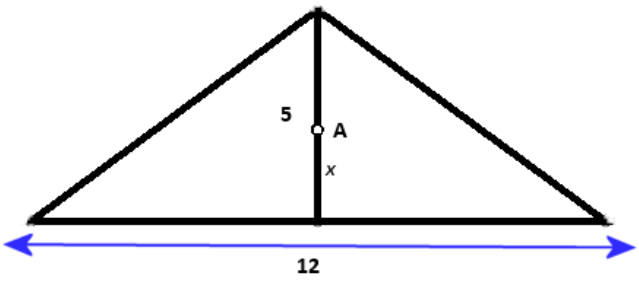
c) Para que exista la inversa debe cumplirse que su determinante no sea nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

Entonces existe la inversa de A. Determinamos su expresión.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

B.2: Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:

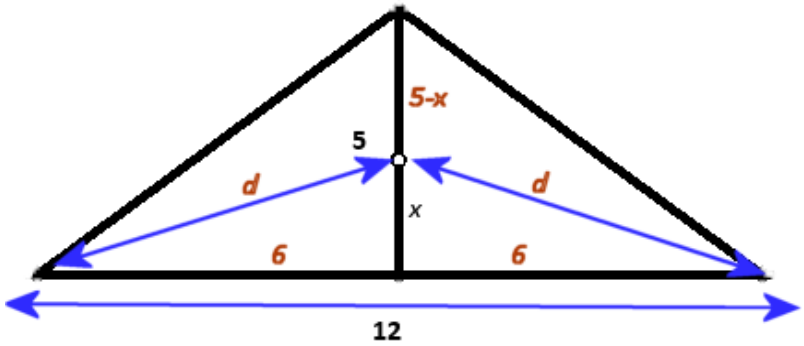


a) **[0,5 p.]** Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión: $f(x)=5-x+2\sqrt{x^2+36}$

b) **[1,5 p.]** Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.

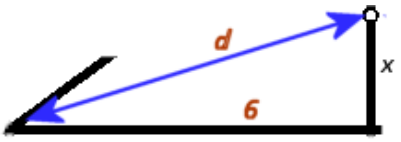
c) **[0,5 p.]** Calcule dicha cantidad mínima.

a) Observando el dibujo del enunciado y añadiendo datos al dibujo:



La suma de distancias del punto A a cada vértice es $f(x)=5-x+d+d=5-x+2d$

Resolvemos el triángulo rectángulo aplicando el teorema de Pitágoras.



$$d=\sqrt{x^2+6^2}=\sqrt{x^2+36}$$

La suma de distancias queda $\boxed{f(x)=5-x+2\sqrt{x^2+36}}$

b) Buscamos los mínimos de la función $f(x)=5-x+2\sqrt{x^2+36}$.
Calculamos su derivada e igualamos a cero.

$$f(x)=5-x+2\sqrt{x^2+36}\Rightarrow f'(x)=-1+\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+36}}\cdot(2x)=-1+\frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}$$

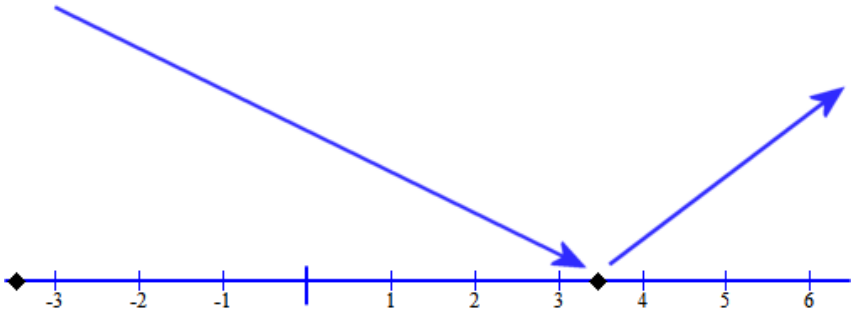
$$f'(x)=0\Rightarrow -1+\frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}=0\Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}=1\Rightarrow 2x=\sqrt{x^2+36}$$

Elevando al cuadrado:

$$(2x)^2 = \left(\sqrt{x^2+36}\right)^2 \Rightarrow 4x^2 = x^2+36 \Rightarrow 3x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} = 3,46$$

Comprobamos si es un mínimo estudiando el comportamiento de la derivada de la función en todo su dominio $[0,+\infty)$**.**

- En el intervalo $\left[0,+\sqrt{12}\right)$ tomo el punto $x=0 \Rightarrow f\,'(0) = -1+\dfrac{2\cdot 0}{\sqrt{0^2+36}} = -1 < 0$ la función decrece.
- En el intervalo $\left(\sqrt{12},+\infty\right)$ tomo el punto $x=5 \Rightarrow f\,'(5) = -1+\dfrac{2\cdot 5}{\sqrt{5^2+36}} = -1+\dfrac{10}{\sqrt{61}} > 0$ la función crece.



La función presenta un ***mínimo*** en $\boxed{x = \sqrt{12} = 3,46}$

O bien se comprueba que es mínimo con la segunda derivada

$$f\,'(x) = -1+\frac{2x}{\sqrt{x^2+36}} \Rightarrow f\,''(x) = 0+\frac{2\cdot\sqrt{x^2+36}-2x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+36}}}{\left(\sqrt{x^2+36}\right)^2} = \frac{2\cdot\sqrt{x^2+36}-\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+36}}}{x^2+36}$$

$$x=\sqrt{12} \Rightarrow f\,''(\sqrt{12}) = \frac{2\cdot\sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2+36}-\dfrac{2\left(\sqrt{12}\right)^2}{\sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2+36}}}{\left(\sqrt{12}\right)^2+36} = \frac{2\sqrt{48}-\dfrac{24}{\sqrt{48}}}{48} > 0$$

Para $x=\sqrt{12}$ la suma de las distancias es mínima.

c) Para el valor $x=\sqrt{12}=3,46$ la suma de distancias es:

$$f(x) = 5-\sqrt{12}+2\sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2+36} = 5-\sqrt{12}+2\sqrt{48} = 5-2\sqrt{3}+8\sqrt{3} = \boxed{5+6\sqrt{3}}$$

B.3: Considere las siguientes rectas:

$$r: \frac{x-5}{1}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+1}{1} \qquad s: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,5 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

a) Los vectores directores de ambas rectas no son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(1,1,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(1,1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-1}$$

Por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes. Solo pueden cortarse o cruzarse.

Para ver cuál de estos dos casos es, usemos los vectores directores y el vector formado por un punto de cada recta.

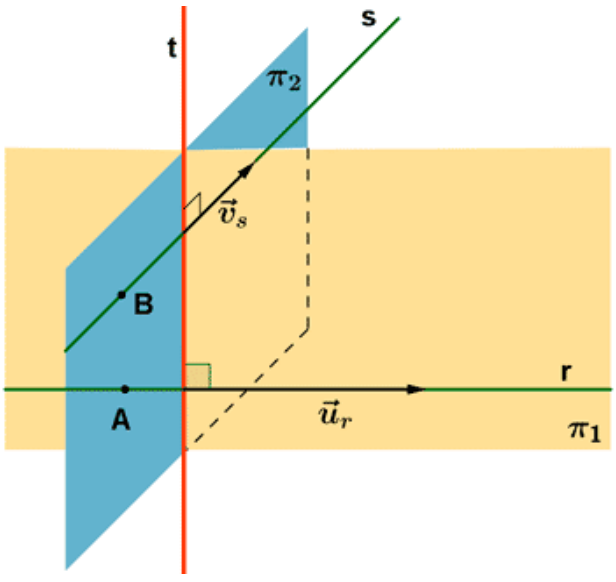
$$P_r(5,6,-1)\ y\ P_s(1,0,-1)\Rightarrow \overrightarrow{P_rP_s}=(1,0,-1)-(5,6,-1)=(-4,-6,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(1,1,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(1,1,-1)\\ \overrightarrow{P_rP_s}=(-4,-6,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -4 & -6 & 0\end{vmatrix}=0+4-6-(-4+0+6)=-4\neq 0$$

Los vectores son linealmente independientes y **las rectas se cruzan**.

b) **<u>Una forma de resolverlo</u>:**

Para hallar la recta *t* perpendicular a ambas rectas y que las corte a las dos, vamos a determinar los dos planos que contienen a cada una de las rectas y además tienen como vector director el perpendicular a ambas rectas.



El vector normal a ambas rectas es el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(1,1,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(1,1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-i+j+k-(k-j+i)=-2i+2j=(-2,2,0)$$

$$\overrightarrow{v_t}=(-1,1,0)$$

π_1 es el plano que contiene a la recta ***r*** con vectores directores $\overrightarrow{v_t}=(-1,1,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,1,1)$:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(1,1,1)\\ \pi_1:\overrightarrow{v_t}=(-1,1,0)\\ P_r(5,6,-1)\in\pi_1\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix} x-5 & y-6 & z+1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow -y+6+z+1-(-z-1+x-5)=0$$

$$-y+6+z+1+z+1-x+5=0$$

$$\pi_1:-x-y+2z+13=0$$

π_2 es el plano que contiene a la recta ***s*** con vectores directores $\overrightarrow{v_t}=(-1,1,0)$ y $\overrightarrow{v_s}=(1,1,-1)$:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_s}=(1,1,-1)\\ \pi_2:\overrightarrow{v_t}=(-1,1,0)\\ P_s(1,0,-1)\in\pi_2\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow y+z+1-(-z-1-x+1)=0$$

$$y+z+1+z+1+x-1=0$$

$$\pi_2:x+y+2z+1=0$$

La recta pedida tiene por ecuación (implícita):

$$\boxed{t:\left.\begin{array}{r}-x-y+2z+13=0\\ x+y+2z+1=0\end{array}\right\}}$$

<u>Otra forma de resolverlo:</u>

Hallo el vector normal a ambas rectas que es el vector director de la recta *t*: $\overrightarrow{v_t}=(-1,1,0)$

Determino el plano π_1 que contiene a la recta *r* con vectores directores $\overrightarrow{v_t}=(-1,1,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,1,1)$: $\pi_1:-x-y+2z+13=0$

Determino el punto de corte de este plano con la otra recta *s*.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1:-x-y+2z+13=0\\ \text{s}:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-x-y+2z+13=0\\ x=1+t\\ y=t\\ z=-1-t\end{array}\right\}\Rightarrow -1-t-t-2-2t+13=0$$

$$-4t+10=0\Rightarrow t=\frac{-10}{-4}=2,5\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=1+2,5\\ y=2,5\\ z=-1-2,5\end{array}\right\}\Rightarrow Q(3,5;\,2,5;\,-3,5)$$

La recta *t* pedida pasa por el punto Q y tiene como vector director $\vec{v_t} = (-1,1,0)$.

$$\left.\begin{array}{l} Q(3,5;\,2,5;\,-3,5) \in t \\ t: \vec{v_t} = (-1,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{r} x = 3,5 - t \\ t: y = 2,5 + t \\ z = -3,5 \end{array}\right\}}$$

Una tercera forma de hacerlo:

El vector perpendicular a ambas rectas es $\vec{v_t} = (-1,1,0)$.

Las rectas tienen ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x = 1 + \mu \\ s: y = \mu \\ z = -1 - \mu \end{array}\right\} \quad y \quad \left.\begin{array}{r} x = 5 + \lambda \\ r: y = 6 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array}\right\}$$

La recta ***t*** perpendicular a ambas rectas corta a ***r*** en un punto $A(5+\lambda, 6+\lambda, -1+\lambda)$ y a la recta ***s*** en otro punto $B(1+\mu, \mu, -1-\mu)$

El vector $\overrightarrow{AB} = (1+\mu, \mu, -1-\mu) - (5+\lambda, 6+\lambda, -1+\lambda) = (-4+\mu-\lambda, \mu-6-\lambda, -\mu-\lambda)$ y $\vec{v_t} = (-1,1,0)$ tienen la misma dirección, por lo que deben tener coordenadas proporcionales:

$$\frac{-4+\mu-\lambda}{-1} = \frac{\mu-6-\lambda}{1} = \frac{-\mu-\lambda}{0} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{-4+\mu-\lambda}{-1} = \dfrac{\mu-6-\lambda}{1} \\ \dfrac{\mu-6-\lambda}{1} = \dfrac{-\mu-\lambda}{0} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4+\mu-\lambda = -\mu+6+\lambda \\ 0 = -\mu-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \mu = -\lambda \Rightarrow -4-\lambda-\lambda = \lambda+6+\lambda \Rightarrow$$

$$-2\lambda - 2\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = \frac{10}{-4} = -2,5$$

El punto A de la recta ***r*** que está en la recta ***t*** tiene coordenadas

$A(5-2,5, 6-2,5, -1-2,5) = (2,5,\, 3,5,\, -3,5)$

La recta pedida pasa por el punto A y tiene como vector director $\vec{v_t} = (-1,1,0)$.

$$\left.\begin{array}{l} A(2,5;\,3,5;\,-3,5) \in t \\ t: \vec{v_t} = (-1,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{r} x = 2,5 - \lambda \\ t: y = 3,5 + \lambda \\ z = -3,5 \end{array}\right\}}$$

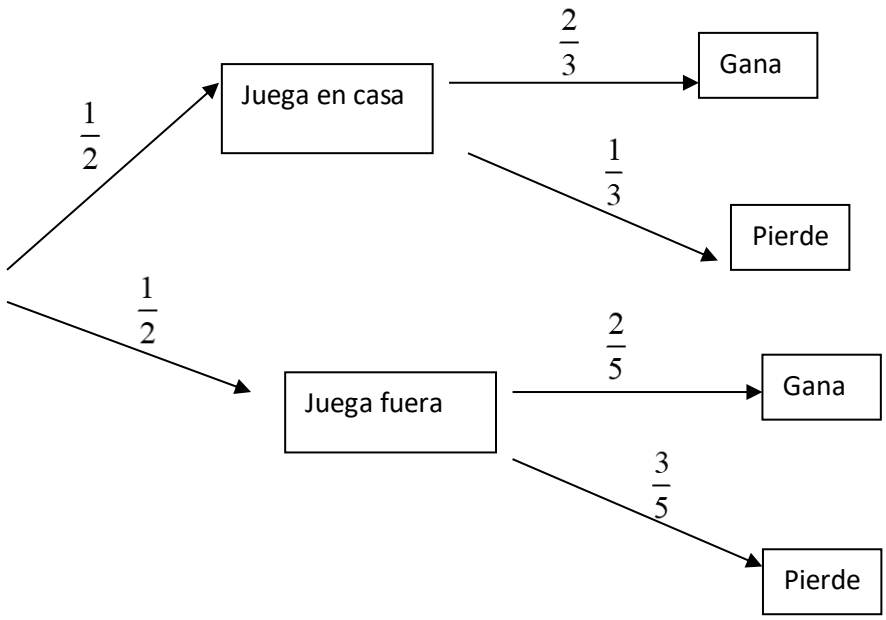
B.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\frac{2}{3}$, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\frac{2}{5}$.

a) **[1 p.]** Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.

b) **[1,5 p.]** Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que jugara en casa?

a) Construyamos el diagrama de árbol:



$$P(Gane) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

b)

$$P(\text{Jugara en casa sabiendo que ha ganado}) = P(\text{juegue en casa} / \textit{ganó}) =$$

$$= \frac{P(\text{juegue en casa y gane})}{P(gane)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{15}{24} = \boxed{\frac{5}{8}}$$

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO

206 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2018

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

a) **[1 p.]** Compruebe que la matriz ***A*** es regular (o invertible) y calcule su inversa.

b) **[1,5 p.]** Determine la matriz X que cumple la ecuación $AX = A + A^T$, donde A^T es la matriz traspuesta de ***A***.

CUESTIÓN A.2: Calcule los siguientes límites:

a) **[1 p.]** $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)$.

b) **[1 p.]** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos x + sen x\right)}{x}$.

CUESTIÓN A.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int sen x\, e^{\cos x}\, dx$

b) **[0,5 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi / 2$, y la gráfica de la función $f(x) = sen x\, e^{\cos x}$.

CUESTIÓN A.4:

Considere las rectas *r* y *s* dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r:\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x + 3y + 5z = 1 \end{cases} \text{ y } s: \frac{x-5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$$

a) **[1,25 p.]** Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) **[1,25 p.]** Determine la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que contiene a ambas rectas.

CUESTIÓN A.5: En una clase hay 40 estudiantes, de los cuales 25 son chicas y el resto son chicos. Además, 30 estudiantes han aprobado las matemáticas, de los cuales 10 son chicos.

a) Elegido un estudiante al azar, se pide:

a.1) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que no haya aprobado las matemáticas?

a.2) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica y haya aprobado las matemáticas?

b) **[0,5 p.]** Si se elige un estudiante que ha aprobado las matemáticas, ¿Cuál es la probabilidad de que sea una chica?

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} ax + y + az = 0 \\ x + y + az = 0 \\ 2x + (a-1)y + az = 0 \end{cases}$$

a) **[1,25 p.]** Determine los valores del parámetro ***a*** para los que el sistema tiene únicamente la solución trivial (0, 0, 0).
b) **[1,25 p.]** Si es posible, resuélvalo para el valor del parámetro $a = 2$.

CUESTIÓN B.2: [2 p.] Considere la función $f(x) = x\sqrt{18 - x^2}$ con $-4 < x < 4$.

a) **[1 p.]** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus puntos críticos.
b) **[1 p.]** Justifique si la función $f(x)$ tiene algún máximo o mínimo.

CUESTIÓN B.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x \ln x \, dx$
b) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función $f(x) = x \ln x$ que pasa por el punto de coordenadas (1, 0).

CUESTIÓN B.4:

Considere los puntos $P = (1,\ 1,\ 3)$ y $Q = (1,\ 5,\ 0)$ y la recta ***r*** dada por la ecuación:

$$r: \begin{cases} 2x - y - 2z = -3 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

a) **[0,5 p.]** Compruebe que el punto ***P*** no está en la recta ***r*** y que el punto ***Q*** si lo está.
b) **[1,25 p.]** Determine el punto ***R*** de la recta ***r*** tal que el triángulo ***PQR*** sea un triángulo rectángulo en ***P*** (es decir, con ángulo recto en el vértice ***P***).
c) **[0,75 p.]** Calcule el área de dicho triángulo ***PQR.***

CUESTIÓN B.5: Realizada una encuesta entre los habitantes de una ciudad, se ha llegado a la conclusión de que el 40% de sus habitantes lee habitualmente el periódico local, el 30% lee revistas del corazón y el 20% lee ambos tipos de publicaciones. Elegido un habitante al azar se pide:

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que lea al menos alguno de los dos tipos de publicaciones?
b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que no lea ninguno de los dos tipos de publicaciones?
c) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que lea solo revistas del corazón?

SOLUCIONES

CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

a) **[1 p.]** Compruebe que la matriz ***A*** es regular (o invertible) y calcule su inversa.

b) **[1,5 p.]** Determine la matriz X que cumple la ecuación $AX = A + A^T$, donde A^T es la matriz traspuesta de ***A***.

a) Para que sea regular una matriz debe tener determinante no nulo:

$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=4-3=1\neq 0$. La matriz A es regular.

Calculamos la matriz inversa A^{-1}.

- **Método 1 (Fórmula)**

Para calcular su inversa aplicamos la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{Adj(A^T)}{|A|}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(A^T)=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj(A^T)}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}}{1}=\boxed{\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}}$$

- **Método 2 (Sistema)**

Otra forma de hallar la inversa es $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ cumpliendo $A\cdot A^{-1}=Id$.

$$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2a+c & -2b+d\\ 3a-2c & 3b-2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}-2a+c&=1\\ -2b+d&=0\\ 3a-2c&=0\\ 3b-2d&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\left.\begin{aligned}-2a+c&=1\\ 3a-2c&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}-4a+2c&=2\\ \underline{3a-2c}&=\underline{0}\end{aligned}\right\}\\ \qquad -a\quad\ =2\Rightarrow\boxed{a=-2}\Rightarrow -6-2c=0\Rightarrow -2c=6\Rightarrow\boxed{c=-3}\\ \left.\begin{aligned}-2b+d&=0\\ 3b-2d&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}-4b+2d&=0\\ \underline{3b-2d}&=\underline{1}\end{aligned}\right\}\\ \qquad -b\quad\ =1\Rightarrow\boxed{b=-1}\Rightarrow -3-2d=1\Rightarrow -2d=4\Rightarrow\boxed{d=-2}\end{cases}$$

La matriz inversa es $\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}}$

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX = A + A^T \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}\left(A + A^T\right) \Rightarrow X = A^{-1}\left(A + A^T\right)$$

Calculemos la expresión de la matriz X.

$$X = A^{-1}\left(A + A^T\right) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-4 & -8+4 \\ 12-8 & -12+8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}}$$

CUESTIÓN A.2: Calcule los siguientes límites:

a) **[1 p.]** $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)$.

b) **[1 p.]** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x+senx)}{x}$.

a)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)=\infty-\infty=\text{Indeterminación (Conjugado)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2-\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+2-\cancel{x^2}+2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=\frac{4}{+\infty}=\boxed{0}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+senx)}{x}=\frac{\ln(1+0)}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L'Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-senx+\cos x}{\cos x+senx}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{-senx+\cos x}{\cos x+senx}=\frac{0+1}{1+0}=\boxed{1}$$

CUESTIÓN A.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int senx\, e^{\cos x} dx$

b) **[0,5 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi / 2$, y la gráfica de la función $f(x) = senx\, e^{\cos x}$.

a)

$$\int senx\, e^{\cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos con cambio de variable} \\ \cos x = t \Rightarrow -senx dx = dt \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{-senx} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \cancel{senx}\ e^t \frac{dt}{-\cancel{senx}} = -\int e^t dt = -e^t =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshaciendo el cambio de variable} \\ \cos x = t \end{array} \right\} = \boxed{-e^{\cos x} + K}$$

b) El área del recinto se calcula con una integral definida, necesitando calcular los límites de integración. Estos límites son los indicados por las rectas verticales (0 y $\pi/2$) siempre que la función no cruce el eje OX.

Comprobémoslo igualando la función a 0:

$$senx\, e^{\cos x} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} senx = 0 \Rightarrow x = 0 + 2\pi k;\ x = \pi + 2\pi k \\ e^{\cos x} = 0 \Rightarrow \text{Imposible} \end{array} \right.$$

No existe ningún valor ya que el recinto está entre 0 y $\pi / 2$

$$Área = \left| \int_0^{\pi/2} senx\, e^{\cos x} dx \right| = \left| \left[-e^{\cos x} \right]_0^{\pi/2} \right| = \left| \left(-e^{\cos \pi/2} \right) - \left(-e^{\cos 0} \right) \right| = \left| -1 + e \right|$$

$$Área = \boxed{1'71\, u^2}$$

CUESTIÓN A.4:
Considere las rectas *r* y *s* dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r:\begin{cases}2x-y+3z=3\\x+3y+5z=1\end{cases} \quad \text{y} \quad s:\frac{x-5}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}.$$

a) **[1,25 p.]** Compruebe que ambas rectas son paralelas.
b) **[1,25 p.]** Determine la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que contiene a ambas rectas.

a) Averigüemos el vector director de cada una de las rectas y veamos si son proporcionales, en cuyo caso serán paralelas o coincidentes.
El vector director de la recta *r* se determina con el producto vectorial de los vectores normales a cada uno de los planos que aparecen en su ecuación implícita.

$$r:\begin{cases}2x-y+3z=3\\x+3y+5z=1\end{cases}\Rightarrow \vec{v_r}=\begin{vmatrix}i & j & k\\2 & -1 & 3\\1 & 3 & 5\end{vmatrix}=-5i+3j+6k-\left(-k+10j+9i\right)$$

$$\vec{v_r}=-14i-7j+7k=\left(-14,-7,7\right)$$

El vector director de la recta *s* aparece en la expresión de su ecuación.

$$\text{s}:\frac{x-5}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}\Rightarrow \vec{v_s}=\left(2,1,-1\right)$$

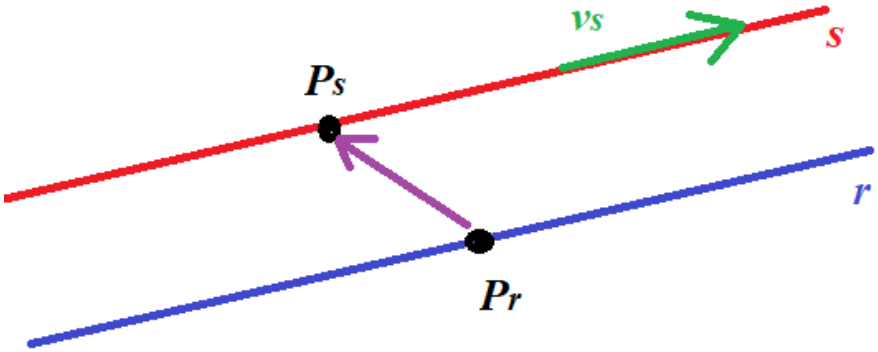
Se observa que $\frac{-14}{2}=\frac{-7}{1}=\frac{7}{-1}$. Podrían ser paralelas o coincidentes.

Comprobamos si el punto $P_s\left(5,0,0\right)$ que pertenece a la recta *s* no pertenece a la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l}r:\begin{cases}2x-y+3z=3\\x+3y+5z=1\end{cases}\\ ¿P_s\left(5,0,0\right)\in r\,?\end{array}\right\}\Rightarrow ¿\begin{cases}10-0+0=3\\5+0+0=1\end{cases}?$$

Como no se cumplen las igualdades el punto no pertenece a la recta y l**as rectas *r* y *s* son paralelas.**

b) Necesitamos dos vectores directores del plano y un punto. Tenemos un vector (el director de cualquiera de las dos rectas) y un punto (el de la recta *s*). Obtengamos un punto de *r*, dando a $z=0$, resolvemos el sistema de ecuaciones que nos queda para hallar las otras dos coordenadas del punto buscado.



$$r:\left.\begin{cases}2x-y+3z=3\\x+3y+5z=1\\z=0\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2x-y=3\\x+3y=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=1-3y\Rightarrow 2(1-3y)-y=3\Rightarrow 2-6y-y=3$$

$$-7y=1\Rightarrow y=\frac{-1}{7}$$

$$x=1-3\cdot\frac{-1}{7}=1+\frac{3}{7}=\frac{10}{7}$$

El punto es $P_r\left(\frac{10}{7},\frac{-1}{7},0\right)$

Tenemos $P_s(5,0,0)$ y $P_r\left(\frac{10}{7},\frac{-1}{7},0\right)$, con lo que formamos otro vector director del plano:

$$\overrightarrow{u_\pi}=P_r\left(\frac{10}{7},\frac{-1}{7},0\right)-P_s(5,0,0)=\left(\frac{-25}{7},\frac{-1}{7},0\right)$$

El plano que pasa por $P_s(5,0,0)$ y tiene como vectores directores $\overrightarrow{v_s}=(2,1,-1)$ y $\overrightarrow{u_\pi}=\left(\frac{-25}{7},\frac{-1}{7},0\right)$ tiene las ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{matrix}x=5+2\lambda-\frac{25}{7}\alpha\\y=0+\lambda-\frac{1}{7}\alpha\\z=0-\lambda\end{matrix}\right\}$$

CUESTIÓN A.5: En una clase hay 40 estudiantes, de los cuales 25 son chicas y el resto son chicos. Además, 30 estudiantes han aprobado las matemáticas, de los cuales 10 son chicos.

a) Elegido un estudiante al azar, se pide:

a.1) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que no haya aprobado las matemáticas?

a.2) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica y haya aprobado las matemáticas?

b) **[0,5 p.]** Si se elige un estudiante que ha aprobado las matemáticas, ¿Cuál es la probabilidad de que sea una chica?

a) Construyamos una tabla reuniendo los datos proporcionados:

	Aprueban matemáticas	No aprueban matemáticas	
Chicos	10		
Chicas			25
	30		40

Completamos el resto de datos de la tabla.

	Aprueban matemáticas	No aprueban matemáticas	
Chicos	10	**5**	**15**
Chicas	**20**	**5**	25
	30	**10**	40

a.1) Probabilidad de no aprobar las matemáticas $= \frac{10}{40} = 0,25 = 25\%$

a.2) Probabilidad de que sea chica y apruebe las matemáticas $= \frac{20}{40} = 0,5 = 50\%$

b)

Probabilidad de que sea chica condicionado a que ha aprobado las matemáticas =

$$= \frac{\text{Probabilidad de que apruebe las matemáticas y sea chica}}{\text{Probabilidad de que apruebe las matemáticas}} = \frac{20}{30} = 0,66 = 66\%$$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} ax + y + az = 0 \\ x + y + az = 0 \\ 2x + (a-1)y + az = 0 \end{cases}$$

a) **[1,25 p.]** Determine los valores del parámetro ***a*** para los que el sistema tiene únicamente la solución trivial (0, 0, 0).
b) **[1,25 p.]** Si es posible, resuélvalo para el valor del parámetro $a = 2$.

a) Estudiemos cuando se anula el determinante de la matriz A de los coeficientes del sistema.

$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 2 & a-1 & a \end{pmatrix}$ Su determinante es:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 2 & a-1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 2a + a(a-1) - \left(2a + a + a^2(a-1)\right) =$$

$$= a^2 + 2a + a^2 - \text{a} - 2a - a - a^3 + a^2 = -a^3 + 3a^2 - 2a$$

Igualándolo a cero:

$$-a^3 + 3a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a\left(-a^2 + 3a - 2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-1)(-2)}}{-2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \begin{cases} a = \dfrac{-3+1}{-2} = \dfrac{-2}{-2} = 1 \\ a = \dfrac{-3-1}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Para un valor de a distinto de 0, 1 y 2 el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y por tanto el rango de A es 3, al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

El sistema tiene una única solución (0,0,0) **cuando a es distinto de 0, 1 y 2**.

b) Para *a = 2* el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. Sustituyendo el valor en el sistema nos queda:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene la primera y la tercera ecuación iguales, podemos eliminar una de las ecuaciones y nos queda el sistema equivalente siguiente:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Dejemos **z** como parámetro y resolvámoslo.

$$\begin{cases} 2x + y = -2z \\ x + y = -2z \end{cases} \Rightarrow x = -2z - y \text{ (sustituimos en la 1ª ecuación)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(-2z - y) + y = -2z \Rightarrow -4z - 2y + y = -2z \Rightarrow -y = 2z \Rightarrow y = -2z$$

Volviendo atrás y sustituyendo: $x = -2z - (-2z) = 0$

La solución es $x = 0;\ y = -2z;\ z = z$

CUESTIÓN B.2: [2 p.] Considere la función $f(x)=x\sqrt{18-x^2}$ con $-4<x<4$.

a) **[1 p.]** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus puntos críticos.

b) **[1 p.]** Justifique si la función $f(x)$ tiene algún máximo o mínimo.

a)

$$f(x)=x\sqrt{18-x^2} \Rightarrow f'(x)=1\cdot\sqrt{18-x^2}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{18-x^2}}\cdot(-2x)=$$

$$f'(x)=\sqrt{18-x^2}+\frac{-2x^2}{2\sqrt{18-x^2}}=\boxed{\sqrt{18-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{18-x^2}}}$$

Podemos simplificar.

$$f'(x)=\sqrt{18-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{18-x^2}}=\frac{\left(\sqrt{18-x^2}\right)^2-x^2}{\sqrt{18-x^2}}=\frac{18-x^2-x^2}{\sqrt{18-x^2}}=\boxed{\frac{18-2x^2}{\sqrt{18-x^2}}}$$

Si igualamos a cero la derivada:

$$\frac{18-2x^2}{\sqrt{18-x^2}}=0\Rightarrow 18-2x^2=0\Rightarrow 18=2x^2\Rightarrow 9=x^2\Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$$

Los puntos críticos de la función son $x=-3$ y $x=3$.

b) Estos dos posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión están dentro del dominio de la función (-4, 4), pero comprobemos como cambia el signo de la derivada primera para ver cuál de estas tres posibilidades corresponde a cada uno de los dos valores.

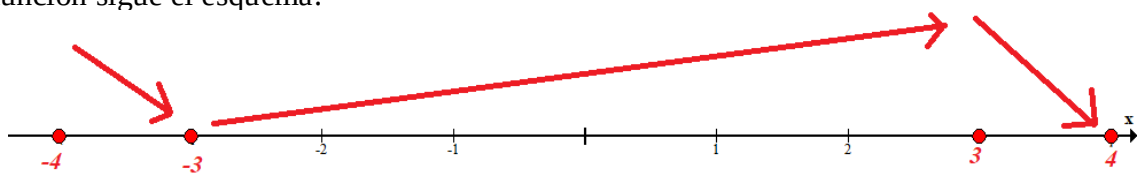
- Tomemos un valor menor que –3, por ejemplo –3.5 → $f'(-3.5)=\frac{18-2\cdot(-3.5)^2}{\sqrt{18-(-3.5)^2}}=-2.71<0$.

  La función crece en el intervalo $(-4,-3)$

- Tomemos un valor entre –3 y 3, por ejemplo 0 → $f'(0)=\frac{18-2\cdot 0}{\sqrt{18-0}}=\frac{18}{\sqrt{18}}>0$. La función crece en el intervalo $(-4,-3)$

- Tomemos un valor mayor que 3, por ejemplo 3.5 → $f'(3.5)=\frac{18-2\cdot 3.5^2}{\sqrt{18-3.5^2}}=-2.71<0$. La función crece en el intervalo $(3,4)$

La función sigue el esquema:



En $x=-3$ hay un mínimo y $x=3$ hay un máximo.

CUESTIÓN B.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x \ln x \, dx$

b) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función $f(x) = x \ln x$ que pasa por el punto de coordenadas $(1,0)$.

a) Utilicemos el método de integración por partes:

$$\int x \ln x \, dx = \int u dv = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \to du = \dfrac{1}{x} dx \\ \\ dv = x dx \to v = \int x dx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= u \cdot v - \int v du = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^{\not 2}}{2} \cdot \frac{1}{\not x} dx =$$

$$= \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + K}$$

b) La primitiva de $f(x) = x \ln x$ es $F(x) = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + K$, para averiguar el valor de K para que pase por (1, 0) hay que aplicar la igualdad *F(1) = 0*:

$$F(1) = \frac{1^2 \cdot \ln(1)}{2} - \frac{1^2}{4} + K = 0 \Rightarrow 0 - \frac{1}{4} + K = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{4}$$

La primitiva pedida es $\boxed{F(x) = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}}$

CUESTIÓN B.4:

Considere los puntos $P=(1,\ 1,\ 3)$ y $Q=(1,\ 5,\ 0)$, y la recta ***r*** dada por la ecuación:

$$r:\begin{cases}2x-y-2z=-3\\-x+y\ \ \ \ \ \ =4\end{cases}$$

a) **[0,5 p.]** Compruebe que el punto ***P*** no está en la recta ***r*** y que el punto ***Q*** si lo está.

b) **[1,25 p.]** Determine el punto ***R*** de la recta ***r*** tal que el triángulo ***PQR*** sea un triángulo rectángulo en ***P*** (es decir, con ángulo recto en el vértice ***P***).

c) **[0,75 p.]** Calcule el área de dicho triángulo ***PQR.***

a) Para que el punto *P* esté en la recta debe cumplir las dos ecuaciones al sustituir en ella sus coordenadas:

$$\left.\begin{matrix}\\r:\begin{cases}2x-y-2z=-3\\-x+y\ \ \ \ \ \ =4\end{cases}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}P(1,1,3)\\\Rightarrow\end{matrix}\begin{cases}2-1-2\cdot3=-3\\-1+1\ \ \ \ \ \ =4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-5=-3\\0=4\end{cases}$$

No es cierta ninguna de las igualdades, el punto *P* no pertenece a la recta ***r.***

Hacemos lo mismo con el punto *Q*:

$$\begin{matrix}P(1,5,0)\\r:\end{matrix}\left.\begin{cases}2x-y-2z=-3\\-x+y\ \ \ \ \ \ =4\end{cases}\right\}\Rightarrow\begin{cases}2-5-2\cdot0=-3\\-1+5\ \ \ \ \ \ =4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3=-3\\4=4\end{cases}$$

Ahora si son ciertas las dos igualdades, el punto *Q* si pertenece a la recta ***r***.

b) Debemos encontrar un punto R de la recta ***r*** tal que el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ sea cero.

Hallemos otro punto S cualquiera de la recta ***r*** y así determinaremos el vector director $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{QS}$.

También podemos hallar el vector director de la recta con el producto vectorial de los vectores normales a cada uno de los planos que la definen.
$\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix}i & j & k\\2 & -1 & -2\\-1 & 1 & 0\end{vmatrix}=2j+2k-(k-2i)=2i+2j+k=(2,2,1)$

En la ecuación de la recta $r:\begin{cases}2x-y-2z=-3\\-x+y\ \ \ \ \ \ =4\end{cases}$

Demos el valor $x=0$ y en la segunda ecuación obtendremos $y=4$. Sustituyendo en la primera ecuación: $0-4-2z=-3\Rightarrow-2z=1\Rightarrow z=-\frac{1}{2}$

El punto $S(0,4,-1/2)$

$\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{QS}=S-Q=(0,4,-1/2)-(1,5,0)=(-1,-1,-0'5)$ que multiplicándolo por –2 nos queda el vector director de la recta $\overrightarrow{u_r}=(2,2,1)$

Así cualquier punto de la recta ***r*** sigue las ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,2,1)\\ \mathrm{Q}(1,5,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=5+2\lambda\\ z=0+\lambda\end{cases}$$

El punto R pedido tiene las coordenadas $(1+2\lambda, 5+2\lambda, \lambda)$.

$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(1,5,0)-(1,1,3)=(0,4,-3)$$
$$\overrightarrow{PR}=R-P=(1+2\lambda, 5+2\lambda, \lambda)-(1,1,3)=(2\lambda, 4+2\lambda, \lambda-3)$$

Obtenemos el producto escalar de ambos vectores.

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=(0,4,-3)(2\lambda, 4+2\lambda, \lambda-3)=0+4(4+2\lambda)-3(\lambda-3)=16+8\lambda-3\lambda+9=25+5\lambda$$

Igualándolo a cero

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=0\Rightarrow 25+5\lambda=0\Rightarrow 5\lambda=-25\Rightarrow\lambda=-5$$

El punto R pedido es

$$(1+2\lambda, 5+2\lambda, \lambda)=(1-10,5-10,-5)=(-9,-5,-5)$$
$$\boxed{R=(-9,-5,-5)}$$

c) El área del triángulo PQR al ser rectángulo en P es igual a la longitud de la base (módulo del vector $\overrightarrow{PR}$ por la longitud de la altura (módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$) partido por 2.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PR}=(-10,-6,-8)\\ \overrightarrow{PR}=R-P=(-9,-5,-5)-(1,1,3)=(-10,-6,-8)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$Área=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PR}\right|}{2}=\frac{\sqrt{0^2+4^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{10^2+6^2+8^2}}{2}=\frac{\sqrt{25}\cdot\sqrt{200}}{2}=\boxed{25\sqrt{2}\,u^2}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

También se puede realizar por la fórmula:
Área del triángulo definido por dos vectores es igual al módulo del producto vectorial de los vectores partido por 2.

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 4 & -3\\ -10 & -6 & -8\end{vmatrix}=-32i+30j-(-40k+18i)=-50i+30j+40k=(-50,30,40)$$

$$\text{Área del triángulo PQR}=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|}{2}=\frac{\sqrt{50^2+30^2+40^2}}{2}=\frac{\sqrt{5000}}{2}=\boxed{25\sqrt{2}\,u^2}$$

CUESTIÓN B.5: Realizada una encuesta entre los habitantes de una ciudad, se ha llegado a la conclusión de que el 40% de sus habitantes lee habitualmente el periódico local, el 30% lee revistas del corazón y el 20% lee ambos tipos de publicaciones. Elegido un habitante al azar se pide:

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que lea al menos alguno de los dos tipos de publicaciones?
b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que no lea ninguno de los dos tipos de publicaciones?
c) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que lea solo revistas del corazón?

a) Construyamos una tabla reuniendo los datos proporcionados:

	Lee revistas del corazón	No lee revistas del corazón	
Lee periódico	20		40
No lee periódico			
	30		100

Completamos el resto de datos que faltan en la tabla.

	Lee revistas del corazón	No lee revistas del corazón	
Lee periódico	20	**20**	40
No lee periódico	**10**	**50**	**60**
	30	**70**	100

Probabilidad de que lea al menos alguno de los dos tipos de publicaciones =
= Lee el periódico y no revistas + Lee revistas y no el periódico + Lee ambos tipos de publicaciones = 20 + 10 + 20 = 50 = 50% = **0'5**

b) Probabilidad de que no lea ninguno de los dos tipos de publicación (en el cruce de no leer corazón y no leer periódico) = 50% = **0'5**

c) Probabilidad solo lea revistas del corazón = Probabilidad de que lea revistas del corazón y no lea periódicos = 10 % = **0'1**

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO

206 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2018

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) **[1,5 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) **[1 p.]** ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de $n\in\mathbb{N}$?

CUESTIÓN A.2:

a) **[1,5 p.]** Descomponga el número 10 en dos sumandos positivos de manera que la suma de uno de ellos más el doble del logaritmo (neperiano) del otro sea máxima.

b) **[0,5 p.]** Calcule dicha suma máxima.

CUESTIÓN A.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$

b) **[0,5 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, y la gráfica de la función $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

CUESTIÓN A.4:

Considere el plano π dado por la ecuación $3x-2y+z=3$.

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta ***r*** dada por

$$r:\begin{cases}x+3y+3z=0\\ y+2z=1\end{cases}$$

b) **[1,25 p.]** En caso de que la recta ***r*** sea paralela al plano, calcule la distancia entre ambos. En caso de que la recta ***r*** corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo de corte entre ambos.

CUESTIÓN A.5: Una máquina funciona en modo automático el 70% de los días y el resto de los días funciona en modo manual. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo automático es 0'15. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo manual es 0'05.

a) **[0,75 p.]** Calcule la probabilidad de que no tenga ningún fallo.

b) **[0,75 p.]** Si un día tiene un fallo, ¿Cuál es la probabilidad de que haya funcionado en modo manual?

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ x + 2z = a^2 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Justifique que el sistema nunca es compatible determinado.
b) **[1,5 p.]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

CUESTIÓN B.2: [2 p.] Considere la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & si \quad x < 0 \\ a + bsenx & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros ***a*** y ***b*** para los cuales la función ***f(x)*** es continua y derivable en ***x = 0***.

CUESTIÓN B.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int xe^x dx$

b) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función $f(x) = xe^x$ que pasa por el punto de coordenadas (0, 1).

CUESTIÓN B.4:
Considere el punto $P = (0,\ 1,\ 2)$ y la recta ***r*** dada por la ecuación:

$$r: \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

a) **[1,25 p.]** Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que es perpendicular a la recta ***r*** y pasa por el punto ***P***.
b) **[1,25 p.]** Calcule la distancia del punto ***P*** al plano $x + y + z = 5$.

CUESTIÓN B.5: En una peña del Atlético de Madrid, el 70% de sus miembros prefiere que Antoine Griezmann continúe jugando en el equipo durante la próxima temporada, el 50% prefiere que Fernando Torres continúe jugando en el equipo la próxima temporada y el 30% prefiere que ambos jugadores sigan jugando en el equipo en la próxima temporada. Elegido al azar un miembro de la peña, se pide:

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que al menos alguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que ninguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?

c) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que solo Fernando Torres siga jugando en el equipo la próxima temporada?

SOLUCIONES

CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

a) **[1,5 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) **[1 p.]** ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de $n\in\mathbb{N}$?

a) Calculemos la expresión de las potencias sucesivas

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0+2\cdot0&1\cdot0+0\cdot1+2\cdot0&1\cdot2+0\cdot0+2\cdot1\\0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0&0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0&0\cdot2+1\cdot0+0\cdot1\\0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0&0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0&0\cdot2+0\cdot0+1\cdot1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0+4\cdot0&1\cdot0+0\cdot1+4\cdot0&1\cdot2+0\cdot0+4\cdot1\\0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0&0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0&0\cdot2+1\cdot0+0\cdot1\\0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0&0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0&0\cdot2+0\cdot0+1\cdot1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&0&6\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&6\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0+6\cdot0&1\cdot0+0\cdot1+6\cdot0&1\cdot2+0\cdot0+6\cdot1\\0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0&0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0&0\cdot2+1\cdot0+0\cdot1\\0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0&0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0&0\cdot2+0\cdot0+1\cdot1\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}1&0&8\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b) Se puede observar que:

$$A^1=\begin{pmatrix}1&0&2\cdot1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A^2=\begin{pmatrix}1&0&2\cdot2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A^3=\begin{pmatrix}1&0&2\cdot3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A^4=\begin{pmatrix}1&0&2\cdot4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Por lo que $\boxed{A^n=\begin{pmatrix}1&0&2\cdot n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$

CUESTIÓN A.2:

a) **[1,5 p.]** Descomponga el número 10 en dos sumandos positivos de manera que la suma de uno de ellos más el doble del logaritmo (neperiano) del otro sea máxima.

b) **[0,5 p.]** Calcule dicha suma máxima.

a) Descompongamos 10 en suma de 2 números ***x*** e ***y***: $10 = x + y$

Si un número es x, el otro es $y = 10 - x$

La función que debemos maximizar es:

$$S(x, y) = x + 2\ln y = x + 2\ln(10 - x)$$

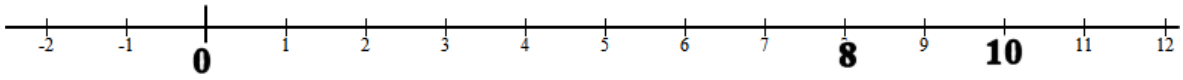
$$f(x) = x + 2\ln(10 - x)$$

Para averiguar su máximo valor derivo la función y la igualo a 0 en busca de sus puntos críticos.

$$f'(x) = 1 + 2\frac{1}{10-x}\cdot(-1) = 1 - \frac{2}{10-x}$$

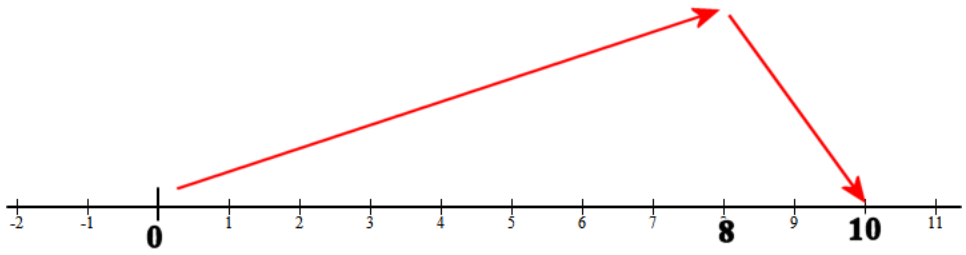
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{10-x} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{2}{10-x} \Rightarrow 10 - x = 2 \Rightarrow 10 - 2 = x \Rightarrow \boxed{x = 8}$$

El dominio de la función $f(x) = x + 2\ln(10 - x)$ es $(0,10)$. Estudiamos el signo de la derivada.



Sustituimos $x = 7$ en la derivada → $f'(7) = 1 - \frac{2}{10-7} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} > 0$. La función es creciente en el intervalo (0, 8)

Sustituimos $x = 9$ en la derivada → $f'(9) = 1 - \frac{2}{10-9} = 1 - \frac{2}{1} = 1 - 2 = -1 < 0$ Es decreciente en el intervalo (8, 10)



La función presenta un máximo en $x = 8$.

Los números buscados son 8 y 2. Con ellos se obtiene una suma máxima.

b) La suma máxima es $f(8) = 8 + 2\ln(10 - 8) = 8 + 2\ln 2 = \boxed{9,386}$.

CUESTIÓN A.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$

b) **[0,5 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x=0$ y $x=2$, y la gráfica de la función $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

a) Realicemos un cambio de variable para el cálculo de $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx=\left\{\begin{array}{l}2x^2+1=t\\4xdx=dt\\dx=\frac{dt}{4x}\end{array}\right\}=\int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{t}}\frac{dt}{4\cancel{x}}=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{4}\int t^{-1/2}dt=\frac{1}{4}\frac{2}{1}t^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{t}=\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}+C}$$

Otra forma de calcularlo:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx=\left\{\begin{array}{l}2x^2+1=t\\4xdx=dt\\dx=\frac{dt}{4x}\end{array}\right\}=\int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{t}}\frac{dt}{4\cancel{x}}=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\sqrt{t}=\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}+C}$$

Otra forma de calcularlo:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+1}=t\\2x^2+1=t^2\\4xdx=2tdt\\dx=\frac{tdt}{2x}\end{array}\right\}=\int \frac{\cancel{x}}{\cancel{t}}\frac{\cancel{t}dt}{2\cancel{x}}=\frac{1}{2}\int dt=\frac{1}{2}t=\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}+C}$$

b) Para determinar el área debo calcular el valor de la integral definida de la función entre 0 y 2, salvo que exista algún punto de corte con el eje OX entre estos valores. Comprobémoslo

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}=0\Rightarrow x=0\cdot\sqrt{2x^2+1}\Rightarrow x=0$$

Como este valor está situado en el borde del intervalo el área pedida es:

$$Área=\left|\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx\right|=\left[\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}\right]_0^2=\left[\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 2^2+1}\right]-\left[\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 0^2+1}\right]=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1\,u^2$$

CUESTIÓN A.4:

Considere el plano π dado por la ecuación $3x-2y+z=3$.

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta ***r*** dada por

$$r:\begin{cases}x+3y+3z=0\\y+2z=1\end{cases}$$

b) **[1,25 p.]** En caso de que la recta ***r*** sea paralela al plano, calcule la distancia entre ambos. En caso de que la recta ***r*** corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo de corte entre ambos.

a) Su posición la determina la relación entre el vector director de la recta y el vector normal del plano. Determinemos estos vectores:

$$\pi: 3x-2y+z=3 \Rightarrow \overrightarrow{n_\pi}=(3,-2,1)$$

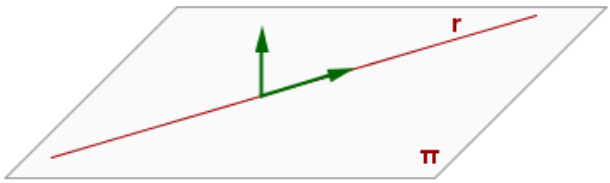
El vector director de la recta es el producto vectorial de los vectores normales de cada uno de los planos que la definen.

$$r:\begin{cases}x+3y+3z=0\\y+2z=1\end{cases}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\vec{n}=(1,3,3)\\\vec{n'}=(0,1,2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & 3 & 3\\0 & 1 & 2\end{vmatrix}=6i+k-(2j+3i)=3i-2j+k=(3,-2,1)$$

Los dos vectores son iguales. La recta es perpendicular al plano.

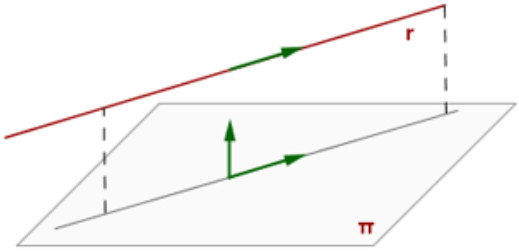
OTRA FORMA DE RAZONARLO:

Posibilidad 1 ¿Está la recta contenida en el plano?



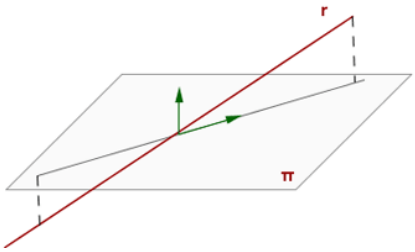
Deberían ser perpendiculares los vectores normal del plano y director de la recta y no lo son (son iguales)

Posibilidad 2 ¿Es la recta paralela al plano?



Deberían ser perpendiculares los vectores normal del plano y director de la recta y no lo son (son iguales)

Posibilidad 3 ¿Es la recta secante al plano?



Si, ya que los vectores normal y director son iguales y la recta es secante

b) Forman 90º ya que son iguales el vector normal del plano y el director de la recta.
El punto de corte se obtiene del sistema formado por la ecuación del plano y la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 3x-2y+z=3\\ r:\left\{\begin{array}{l}x+3y+3z=0\\ y+2z=1\end{array}\right.\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{r}3x-2y+z=3\\ x+3y+3z=0\\ y+2z=1\end{array}\right\}$$

Aplicando el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{l}3x-2y+z=3\\ x+3y+3z=0\\ y+2z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{l}\text{Fila } 1^{\text{a}} - 3\cdot\text{Fila } 2^{\text{a}}\rightarrow\text{Fila } 2^{\text{a}}\\ 3x-2y+z=3\\ \underline{-3x-9y-9z=0}\\ -11y-8z=3\end{array}\right)\Rightarrow\left.\begin{array}{r}3x-2y+z=3\\ -11y-8z=3\\ y+2z=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{\text{a}} + 11\cdot\text{Fila } 3^{\text{a}}\rightarrow\text{Fila } 3^{\text{a}}\\ -11y-8z=3\\ \underline{11y+22z=11}\\ 14z=14\end{array}\right)\Rightarrow\left.\begin{array}{r}3x-2y+z=3\\ -11y-8z=3\\ 14z=14\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}3x-2y+1=3\\ -11y-8z=3\\ \boxed{z=1}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

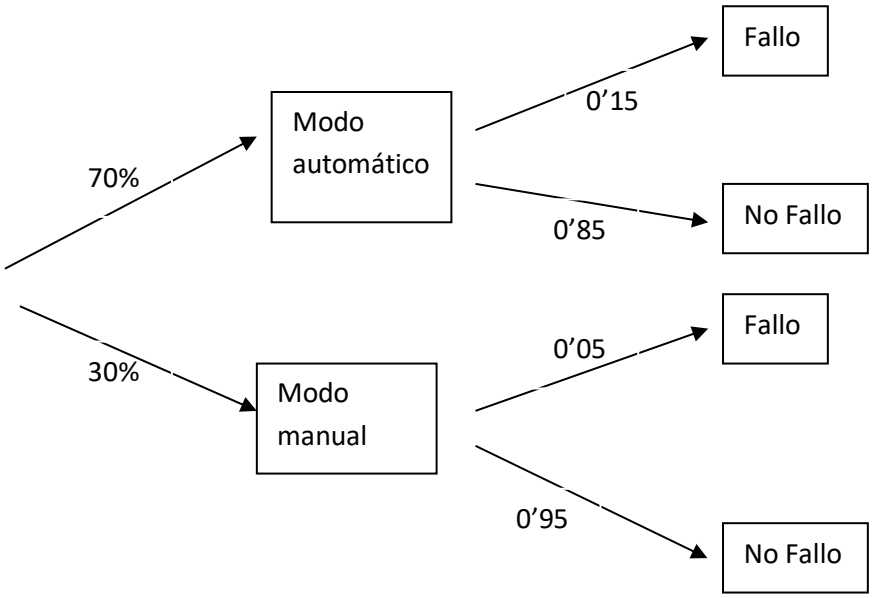
$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x-2y=2\\ -11y-8\cdot 1=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x-2y=2\\ -11y-8=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x-2y=2\\ -11y=11\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}3x-2y=2\\ \boxed{y=-1}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+2=2\Rightarrow 3x=0\Rightarrow\boxed{x=0}$$

El punto de corte es A(0, -1, 1)

CUESTIÓN A.5: Una máquina funciona en modo automático el 70% de los días y el resto de los días funciona en modo manual. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo automático es 0'15. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo manual es 0'05.
a) **[0,75 p.]** Calcule la probabilidad de que no tenga ningún fallo.
b) **[0,75 p.]** Si un día tiene un fallo, ¿Cuál es la probabilidad de que haya funcionado en modo manual?

Realicemos un árbol para aclarar las probabilidades de los posibles resultados de este experimento aleatorio.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{No falla}) = P(\text{Modo automático y no falla}) + P(\text{Modo manual y no falla}) =$$

$$= 0'7 \cdot 0'85 + 0'3 \cdot 0'95 = \boxed{0'88}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Modo manual /Fallo}) = \frac{P(\text{Modo manual} \cap \text{Fallo})}{P(Fallo)} = \frac{0'3 \cdot 0'05}{1 - P(\text{No falla})} = \frac{0'015}{0'12} = \boxed{0'125}$$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ x + 2z = a^2 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Justifique que el sistema nunca es compatible determinado.

b) **[1,5 p.]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

a) **Por rangos.**

Calculemos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 0 - (1 + 0 + 0) = 0$$

Al ser el determinante nulo el rango de la matriz de coeficientes es menor de 3 y el sistema no puede ser compatible determinado pues el rango de la matriz de los coeficientes es menor que el número de incógnitas (3).

Por Gauss.

$$\begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ x + 2z = a^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} x - y + z = 4a \\ \underline{-x - 2z = -a^2} \\ -y - z = 4a - a^2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ -y - z = 4a - a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} y + z = -4 \\ \underline{-y - z = 4a - a^2} \\ 0 = -4 + 4a - a^2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ 0 = -4 + 4a - a^2 \end{cases}$$

Este sistema triangular equivalente al inicial no es compatible determinado, sea cual sea el valor de ***a***. O no tiene solución o las soluciones son infinitas.

b) **Por Gauss.** Hecho en el apartado anterior.

$$\begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ x + 2z = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ 0 = -4 + 4a - a^2 \end{cases}$$

Si resolvemos la igualdad:

$$0 = -4 + 4a - a^2 \Rightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1)(-4)}}{2(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Distinguimos dos casos diferentes:

Primer caso. a = 2

$$\begin{cases} x-y+z=8 \\ y+z=-4 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=8 \\ \boxed{y=-z-4} \end{cases} \Rightarrow x+z+4+z=8 \Rightarrow x+2z=4 \Rightarrow \boxed{x=4-2z}$$

El sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones) y son:

$$\left.\begin{array}{l} x=4-2z \\ y=-z-4 \\ z=z \end{array}\right\}$$

Segundo caso. $a \neq 2$

$$\begin{cases} x-y+z=4a \\ y+z=-4 \\ x+2z=a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=4a \\ y+z=-4 \\ 0=-4+4a-a^2 \end{cases}$$

La igualdad de la ecuación tercera es imposible y el sistema no tiene solución. El sistema es incompatible.

CUESTIÓN B.2: [2 p.] Considere la función dada por:

$$f(x)=\begin{cases} e^{ax} & si \quad x<0 \\ a+bsenx & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros ***a*** y ***b*** para los cuales la función ***f(x)*** es continua y derivable en $x=0$.

Para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & si \quad x<0 \\ a+bsenx & si \quad x\geq 0 \end{cases}$ sea continua debe de serlo en $x=0$. Deben cumplirse:

1º Exista la función en $x=0$. $f(0)=\text{a}+\text{bsen}\,0=\text{a}+\text{b}\cdot 0=\text{a}$. Lo cumple.

2º Debe existir el $\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} e^{ax}=e^0=1 \\ \lim_{x\to 0^+}(a+bsenx)=a+b\cdot 0=a \end{cases}$

Para que exista el límite debe ser **a = 1.**

3º Deben ser iguales $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$ Se cumple (al ser *a = 1*)

La función queda:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x} & si \quad x<0 \\ 1+bsenx & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{x} & si \quad x<0 \\ 1+bsenx & si \quad x\geq 0 \end{cases}$ sea derivable debe de serlo en $x=0$

.

Debe de cumplirse que $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)$

La derivada de la función en $\mathbb{R}-\{0\}$ es $f'(x)=\begin{cases} e^{x} & si \quad x<0 \\ bcosx & si \quad x>0 \end{cases}$

Calculemos dichos límites:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(0+b\cos x)=b$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{x}=1$$

Para que las derivadas laterales sean iguales debe ser **b = 1.**

Los valores buscados son $a=b=1$.

CUESTIÓN B.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int xe^x dx$

b) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función $f(x) = xe^x$ que pasa por el punto de coordenadas $(0,1)$.

a)

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} Integramos\ por\ partes \\ u = x \to du = dx \\ dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = x \cdot e^x - \int e^x dx = \boxed{x \cdot e^x - e^x + C}$$

b) La primitiva se ha calculado en el apartado anterior: $F(x) = x \cdot e^x - e^x + C$.

Para que la función pase por el punto $(0,1)$ debe cumplirse $F(0) = 1$.

$$\left. \begin{array}{r} F(0) = 1 \\ F(x) = x \cdot e^x - e^x + C \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \cdot e^0 - e^0 + C = 1 \Rightarrow -1 + C = 1 \Rightarrow C = 2$$

La primitiva pedida es $F(x) = x \cdot e^x - e^x + 2$

CUESTIÓN B.4: [2 puntos] Considere el punto $P=(0,\ 1,\ 2)$ y la recta ***r*** dada por la ecuación:

$$r:\begin{cases}2x+y-z=-1\\x-y+z=3\end{cases}$$

a) **[1,25 p.]** Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que es perpendicular a la recta ***r*** y pasa por el punto ***P***.
b) **[1,25 p.]** Calcule la distancia del punto ***P*** al plano $x+y+z=5$.

a) Si el plano debe ser perpendicular a la recta, entonces su vector normal debe ser el vector director de la recta. Para determinar este vector director multipliquemos los vectores normales de cada uno de los 2 planos que definen la recta.

$$r:\begin{cases}2x+y-z=-1\\x-y+z=3\end{cases}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\overrightarrow{n_1}=(2,1,-1)\\\overrightarrow{n_2}=(1,-1,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}i & j & k\\2 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=i-j-2k-(k+2j+i)=-3j-3k$$

$$\overrightarrow{v_r}=(0,-3,-3)$$

Simplificando el vector obtenido nos sirve como vector director de la recta ***r*** : $\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)$

El plano pedido es $y+z+D=0$.

Como debe pasar por el punto $P=(0,\ 1,\ 2)$ entonces:

$$\left.\begin{matrix}y+z+D=0\\P=(0,\ 1,\ 2)\in plano\end{matrix}\right\}\Rightarrow 1+2+D=0\Rightarrow D=-3$$

El plano buscado tiene ecuación $y+z-3=0$

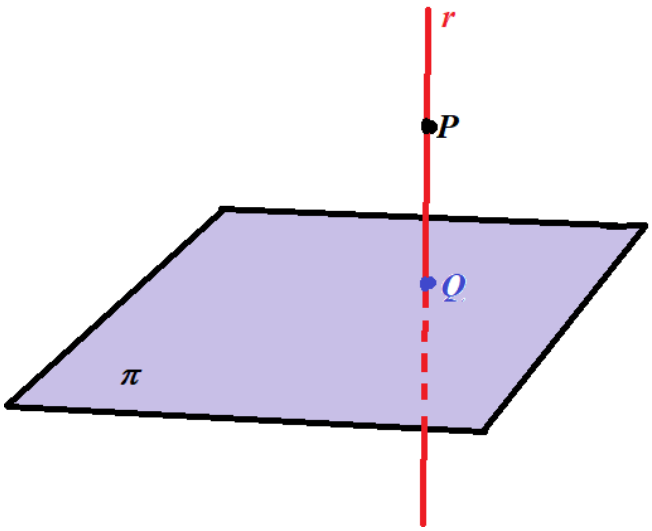
b) **Con fórmula directa.**

Utilizando la fórmula de distancia del punto P (0,1,2) al plano $x+y+z-5=0$.

$$\left.\begin{matrix}x+y+z-5=0\\P=(0,\ 1,\ 2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \text{Distancia}(P,\text{Plano})=\left|\frac{0+1+2-5}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}=\boxed{1'15\,u^2}$$

Sin utilizar fórmula directa.

Calculemos la recta perpendicular al plano que pasa por P y después el punto Q de corte de la recta con el plano. La distancia del punto al plano es la distancia del punto P al punto Q.



El plano $x+y+z-5=0$ tiene como vector normal $\vec{n}=(1,1,1)$.

La recta perpendicular al plano tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=\vec{n}=(1,1,1)\\ P=(0,\ 1,\ 2)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\left\{\begin{array}{r}x=0+\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=2+\lambda\end{array}\right\}$$

El punto Q de corte entre recta y plano se obtiene al resolver el sistema formado por sus ecuaciones.

$$r:\left.\begin{cases}x=0+\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=2+\lambda\end{cases}\right\}\Rightarrow \lambda+1+\lambda+2+\lambda=5\Rightarrow 3\lambda=2\Rightarrow\lambda=\frac{2}{3}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{3}\\ \Rightarrow y=1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}\\ z=2+\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow Q=\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$$

Calculamos la distancia del punto P al plano como la distancia entre los puntos P y Q.

$$\text{Distancia(P, Plano)=Distancia(P,Q)}=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=$$

$$=\left|\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)-(0,1,2)\right|=\left|\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{12}{9}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\boxed{1'15\,u^2}$$

CUESTIÓN B.5: En una peña del Atlético de Madrid, el 70% de sus miembros prefiere que Antoine Griezmann continúe jugando en el equipo durante la próxima temporada, el 50% prefiere que Fernando Torres continúe jugando en el equipo la próxima temporada y el 30% prefiere que ambos jugadores sigan jugando en el equipo en la próxima temporada. Elegido al azar un miembro de la peña, se pide:

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que al menos alguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?
b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que ninguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?
c) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que solo Fernando Torres siga jugando en el equipo la próxima temporada?

Construyamos una tabla de contingencia con los porcentajes proporcionados en el ejercicio.

	Torres se va	Torres se queda	
Griezmann se va			
Griezmann se queda		**30**	**70**
		50	**100**

Completamos la tabla.

	Torres se va	Torres se queda	
Griezmann se va	**10**	**20**	**30**
Griezmann se queda	**40**	**30**	**70**
	50	**50**	**100**

a) Observando los datos de la tabla.

$$P\left(al\ menos\ alguno\ de\ los\ dos\ jugadores\ siga\ jugando\ en\ el\ equipo\right)=$$
$$=1\ -\ P\left(Ninguno\ juega\ en\ el\ equipo\right)=1\ -\frac{10}{100}=90\%$$

b) Observando los datos de la tabla.

$$P\left(Ninguno\ juega\ en\ el\ equipo\right)=10\%$$

c) Observando los datos de la tabla.

$$P\left(Solo\ juega\ en\ el\ equipo\ Fernando\ Torres\right)=P(Juega\ Torres\cap No\ \ juega\ Griezmann)=20\%$$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2017

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

a) **[1,5 puntos]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

b) **[1 punto]** Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB = A + B$.

CUESTIÓN A.2: Considere la recta *r* que pasa por los puntos A = (1, 1, 1) y B = (3, 3, 4) y la recta *s* cuyo vector director es $\vec{v}=(-1,3,1)$ y pasa por el punto C = (4, 0, 3).

a) **[1 punto]** Determine las ecuaciones continuas de las rectas *r* y *s*.

b) **[1,5 puntos]** Estudie la posición relativa de *r* y *s*.

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1 punto]** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x}$.

b) **[1 punto]** $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

CUESTIÓN A.4:

a) **[1,5 puntos]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int\frac{\cos x\, sen^2 x}{1+sen^2 x}dx$.

b) **[0'5 puntos]** Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $\frac{\cos x\, sen^2 x}{1+sen^2 x}$ que cumpla la condición $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

CUESTIÓN A.5: [1 punto]

En un colegio se imparten, como primer idioma, inglés, alemán y francés. El 65% de los alumnos estudian inglés, el 20% alemán y el resto francés. La asignatura de robótica es optativa y la elige el 30% de los alumnos de inglés, el 50% de los que estudian alemán y el 70% de los que cursan francés. Se elige un alumno al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que estudie robótica?

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ x + 2ay + z = 2 \\ x + 2y + az = -3 \end{cases}$$

a) **[0,75 puntos]** Determine para qué valores del parámetro ***a*** el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.

b) **[1,25 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,5 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema no tiene solución.

CUESTIÓN B.2: Considere los puntos A = (1, 1, 1), B = (1, –1, 0) y C = (0, –2, 1).

a) **[1,25 puntos]** Calcule el área del triángulo *ABC*.

b) **[1,25 puntos]** Calcule la ecuación de la recta (en cualquiera de sus formas) contenida en el plano que forman *A*, *B* y *C* que, pasando por *A*, es perpendicular al lado *BC*.

CUESTIÓN B.3: Dada la función $f(x) = xe^{-x^2}$ se pide:

a) **[0,5 puntos]** Calcular $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

b) **[1,5 puntos]** Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

CUESTIÓN B.4: [2 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} dx$.

CUESTIÓN B.5: [1 punto] Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{7}{10}$, $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \frac{1}{10}$. Calcule: $P(A \cup B), P(A \cap B), P\left(\overline{B} / A\right)$. (Donde, si C y D son sucesos $\overline{C}$ denota el suceso complementario de *C* y *P(C/D)* denota la probabilidad del suceso C condicionada al suceso D).

SOLUCIONES

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

a) **[1,5 puntos]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

b) **[1 punto]** Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB = A + B$.

a) Para que una matriz sea regular su determinante debe ser no nulo.

$|A|=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-4=2\neq 0$, por lo que la matriz A es invertible.

$|B|=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix}=0+2=2\neq 0$, por lo que la matriz B es invertible.

Una forma de hallar las inversas:

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -4\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2 & -2\\ -1/2 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Otra forma de hallar las inversas con el método de Gauss-Jordan:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 4 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{2\cdot\text{Fila } 2^a-\text{Fila } 1^a\rightarrow\text{Fila } 2^a}\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{Fila } 1^a-2\cdot\text{Fila } 2^a\rightarrow\text{Fila } 1^a}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 3 & -4\\ 0 & 2 & -1 & 2\end{array}\right)\xrightarrow[\frac{\text{Fila } 2^a}{2}]{\frac{\text{Fila } 1^a}{2}}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 3/2 & -2\\ 0 & 1 & -1/2 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}3/2 & -2\\ -1/2 & 1\end{pmatrix}}$$

$$B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}-2 & 1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{Fila } 2^a-\text{Fila } 1^a\rightarrow\text{Fila } 2^a}\left(\begin{array}{cc|cc}-2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{Fila } 1^a+\text{Fila } 2^a\rightarrow\text{Fila } 1^a}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}-2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[-\text{Fila } 2^a]{\frac{\text{Fila } 1^a}{-2}}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{array}\right)\Rightarrow\boxed{B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ 1 & -1\end{pmatrix}}$$

b)

Una forma de resolverlo es:

$$AXB = A + B \Rightarrow X = A^{-1}(A+B)B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3/2 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 15/2-6 \\ -1 & -5/2+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -5/2 \\ 1/2 & 1/2-1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -5/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión: $X = \begin{pmatrix} 3/2 & -5/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Otra forma de resolverlo es:

$$AXB = A + B \Rightarrow X = A^{-1}(A+B)B^{-1} \Rightarrow X = \left(A^{-1}A + A^{-1}B\right)B^{-1} =$$

$$= \left(Id + A^{-1}B\right)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}BB^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$$

Así el cálculo de la matriz X es tan sencillo como sumar ambas matrices inversas.

$$X = \begin{pmatrix} 3/2 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -5/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión: $X = \begin{pmatrix} 3/2 & -5/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

CUESTIÓN A.2: Considere la recta *r* que pasa por los puntos A = (1, 1, 1) y B = (3, 3, 4) y la recta *s* cuyo vector director es $\vec{v}=(-1,3,1)$ y pasa por el punto C = (4, 0, 3).

a) **[1 punto]** Determine las ecuaciones continuas de las rectas *r* y *s*.

b) **[1,5 puntos]** Estudie la posición relativa de *r* y *s*.

a) Obtenemos la ecuación de la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l} A=(1,\ 1,\ 1) \\ B=(3,\ 3,\ 4) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=(1,\ 1,\ 1) \\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(2,\ 2,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

Obtenemos la ecuación de la recta *s*.

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{C}=(4,\ 0,\ 3) \\ \vec{v}=(-1,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow s:\frac{x-4}{-1}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-3}{1}$$

b)

Una forma de hacerlo

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales:

$$\left.\begin{array}{l} r\rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(2,\ 2,\ 3) \\ s\rightarrow \vec{v}=(-1,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{-1}\neq\frac{2}{3}\neq\frac{3}{1}$$

Por lo tanto, las rectas no son ni coincidentes ni paralelas.
Para ver si se cortan o se cruzan, consideremos los vectores directores de cada una de las rectas y el vector que va de un punto de *r* a otro de *s*. Estudiemos si son independientes o dependientes entre sí.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=(2,\ 2,\ 3) \\ \vec{v}=(-1,3,1) \\ \vec{w}=\overrightarrow{AC}=(4,0,3)-(1,1,1)=(3,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12+6+3-(27-4-2)=0$$

Los vectores son dependientes entre sí, y por tanto son coplanarios. Es decir, las rectas se cortan.

Otra forma de hacerlo

Las rectas no son paralelas, ya que los vectores directores de las rectas no son proporcionales:

$$\frac{2}{-1}\neq\frac{2}{3}\neq\frac{3}{1}$$

Luego solo pueden cortarse o cruzarse.
¿Se cruzan o se cortan? Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas y averigüemos si tienen o no punto de corte.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}\\ \dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-0}{3}=\dfrac{z-3}{1}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=1+2\lambda\\ z=1+3\lambda\\ \\ x=4-\alpha\\ y=3\alpha\\ z=3+\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4-\alpha=1+2\lambda\\ 3\alpha=1+2\lambda\\ 3+\alpha=1+3\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=3-2\lambda\\ \alpha=\dfrac{1+2\lambda}{3}\\ \alpha=-2+3\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-2+3\lambda=3-2\lambda\\ \alpha=\dfrac{1+2\lambda}{3}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}5\lambda=5\\ \alpha=\dfrac{1+2\lambda}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\lambda=1\\ \alpha=\dfrac{1+2\lambda}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\lambda=1\\ \alpha=\dfrac{1+2}{3}=1\end{array}\right\}$$

Por lo tanto, existe un punto de corte entre ambas rectas. Este punto P tiene coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l}x=1+2=3\\ y=1+2=3\\ z=1+3=4\\ \\ x=4-1=3\\ y=3\cdot1=3\\ z=3+1=4\end{array}\right\}\boxed{P=(3,3,4)}$$

Las rectas se cortan.

Una tercera forma de resolverlo

Estudiamos los rangos de las ecuaciones de las rectas como intersección de 2 planos.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}\\ \dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-0}{3}=\dfrac{z-3}{1}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}\\ \dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}\\ \dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-0}{3}\\ \dfrac{y-0}{3}=\dfrac{z-3}{1}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x-1=y-1\\ 3y-3=2z-2\\ 3x-12=-y\\ y=3z-9\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x-y=0\\ 3y-2z=1\\ 3x+y=12\\ y-3z=-9\end{array}\right\}$$

Con estas 4 ecuaciones formamos un sistema cuya matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&-2\\3&1&0\\0&1&-3\end{pmatrix}$

y la matriz ampliada es $\mathrm{M}'=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&3&-2&1\\3&1&0&12\\0&1&-3&-9\end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de dichas matrices y los comparamos.

Dado que $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+6+0-(0+0-2) = 8 \neq 0$ tenemos que el rango de *M* es 3.

Para hallar el rango de M´ calculamos el valor de su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 12 \\ 1 & -3 & -9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 12 \\ 0 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -24-3+108-18+(-9-54) = 0$$

Por tanto, el rango de M´ es 3 igual que el rango de M. Las rectas son secantes (siendo su intersección un único punto).

Las rectas se cortan

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1 punto]** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x$.

b) **[1 punto]** $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

a)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x = 1^{+\infty} = e^{\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{x-1}{x+3}-1\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{x-1-x-3}{x+3}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{-4}{x+3}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{x+3}} = \boxed{e^{-4}}$$

b) **Una forma de hacerlo**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) = \infty-\infty = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right) = \frac{0}{0}\{\text{Aplico L'Hopital}\} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1-0-\frac{1}{x}}{(1)\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{x-1}{\cancel{x}}}{\frac{x\ln x+x-1}{\cancel{x}}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\right) = \frac{0}{0}\{\text{Aplico L'Hopital}\} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x+1+1}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Otra forma de hacerlo

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) = \infty-\infty = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right) = \frac{0}{0}\{\text{Aplico L'Hopital}\} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1-0-\frac{1}{x}}{(1)\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}\right) = \frac{0}{0}\{\text{Aplico L'Hopital}\} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+1\cdot\frac{1}{x}+(x-1)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}\right) = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}+1\cdot\frac{1}{1}+(1-1)\cdot\left(-\frac{1}{1}\right)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

CUESTIÓN A.4:

a) **[1,5 puntos]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{\cos x\ sen^2 x}{1+sen^2 x}dx$.

b) **[0'5 puntos]** Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $\frac{\cos x\ sen^2 x}{1+sen^2 x}$ que cumpla la condición $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

a) Realizamos el cambio de variable $senx = t$.

$$\left.\begin{array}{l} senx = t \\ \cos x dx = dt \rightarrow dx = \dfrac{dt}{\cos x} \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{\cos x\ sen^2 x}{1+sen^2 x}dx = \int \frac{\cancel{\cos x}\ t^2}{1+t^2}\frac{dt}{\cancel{\cos x}} = \int \frac{t^2}{1+t^2}dt =$$

$$= \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt = \int \frac{1+t^2}{1+t^2}dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt = \int dt - arctgt = t - arctgt =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ senx = t \end{array}\right\} = \boxed{senx - arctg(senx) + \mathrm{C}}$$

b) Siendo $F(x) = senx - arctg(senx) + \mathrm{C}$, como $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = senx - arctg(senx) + \mathrm{C} \\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow sen\frac{\pi}{2} - arctg(sen\frac{\pi}{2}) + \mathrm{C} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - arctg(1) + C = 1 \Rightarrow 1 - \frac{\pi}{4} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$$

Y por tanto la primitiva buscada es $F(x) = senx - arctg(senx) + \frac{\pi}{4}$.

CUESTIÓN A.5: [1 punto]
En un colegio se imparten, como primer idioma, inglés, alemán y francés. El 65% de los alumnos estudian inglés, el 20% alemán y el resto francés. La asignatura de robótica es optativa y la elige el 30% de los alumnos de inglés, el 50% de los que estudian alemán y el 70% de los que cursan francés. Se elige un alumno al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que estudie robótica?

Una forma de hacerlo

De 100 alumnos 65 estudian inglés, 20 estudian alemán y 100-65-20=15 estudian francés.

Robótica estudian el 30% de 65 alumnos (estudian inglés) $\rightarrow \frac{30 \cdot 65}{100} = 19'5$ alumnos de los 100 estudian robótica e inglés.

Robótica estudian el 50% de 20 alumnos (estudian alemán) $\rightarrow \frac{50 \cdot 20}{100} = 10$ alumnos de los 100 estudian robótica y alemán.

Robótica estudian el 70% de 15 alumnos (estudian francés) $\rightarrow \frac{70 \cdot 15}{100} = 10'5$ alumnos de los 100 estudian robótica y francés.

Por lo tanto, estudian robótica 19’5 + 10 + 10’5 = 40 alumnos de los 100.

La probabilidad de elegir un alumno de robótica al elegir un alumno al azar es del 40%.

Otra forma de hacerlo

Llamemos I, A y F a los sucesos estudiar inglés, alemán y francés, respectivamente. Llamaremos R al suceso “estudiar robótica”.
De los datos del enunciado obtenemos

$$P(I) = 0’65$$
$$P(A) = 0’2$$
$$P(F) = 0’15$$

Y además

$$P(R/I) = 0’3$$
$$P(R/A) = 0’5$$
$$P(R/F) = 0’7$$

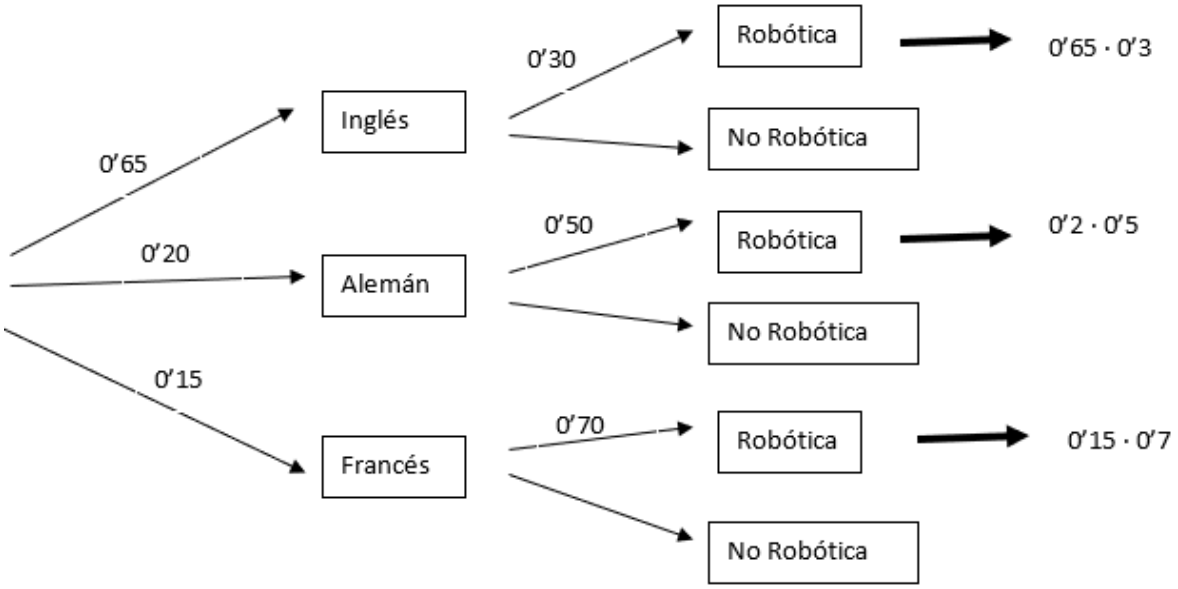
Gracias al teorema de la probabilidad total, dado que los sucesos I, A y F son independientes, tenemos:

$$P(R) = P(R/I) \cdot P(I) + P(R/A) \cdot P(A) + P(R/F) \cdot P(F)$$
$$P(R) = 0’3 \cdot 0’65 + 0’2 \cdot 0’5 + 0’15 \cdot 0’7$$
$$P(R) = 0’195 + 0’1 + 0’105$$
$$P(R) = 0’4$$

La probabilidad de elegir un alumno de robótica al elegir un alumno al azar es del 40%.

Otra forma de hacerlo

Con diagrama de árbol:



La probabilidad pedida es la suma de las tres probabilidades que favorecen que se elija un alumno de robótica: $0'65 \cdot 0'3 + 0'2 \cdot 0'5 + 0'15 \cdot 0'7 = 0'4$

La probabilidad de elegir un alumno de robótica al elegir un alumno al azar es del 40%.

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ x + 2ay + z = 2 \\ x + 2y + az = -3 \end{cases}$$

a) **[0,75 puntos]** Determine para qué valores del parámetro ***a*** el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.
b) **[1,25 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,5 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema no tiene solución.

Vamos a discutir el sistema y luego respondemos a cada apartado del ejercicio.

El sistema $\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ x + 2ay + z = 2 \\ x + 2y + az = -3 \end{cases}$ tiene asociado la matriz de los coeficientes $M = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ con determinante $|M| = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 2a^3 + 2 + 2 - (2a + 2a + 2a) = 2a^3 - 6a + 4$.

Averiguamos cuando se anula este determinante.

$$|M| = 0 \Rightarrow 2a^3 - 6a + 4 = 0$$

Como es una ecuación de tercer grado, la resolvemos usando el método de Ruffini.

	2	0	−6	4
1		2	2	−4
	2	2	−4	|0

El polinomio que resulta de la división de Ruffini se resuelve como ecuación de segundo grado.

$$2a^2 + 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm 6}{4} = \begin{cases} a = \frac{-2+6}{4} = 1 \\ a = \frac{-2-6}{4} = -2 \end{cases}$$

A partir de esta información surgen los siguientes casos:

Caso 1º $a \neq 1, a \neq -2$.

El sistema es compatible determinado (tiene solución única) ya que el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el rango de la matriz ampliada.

Caso 2º $a = 1$.

La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene rango 1, ya que las 3 filas son iguales.

El rango de la matriz ampliada $\mathrm{M}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right)$ es 2 ya que el determinante del menor de orden 2 que resulta de quitar las columnas 1ª y 2ª y la fila 3ª es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0$$

Rango M ≠ Rango M^* → el sistema es incompatible (sin solución)

Caso 3º $a = -2$

La matriz de los coeficientes queda $M = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y tiene rango 2.

El rango no es 3 ya que determinante de la matriz es nulo.

$$|M| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -16+2+2+4+4+4 = 0$$

El determinante del menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª es no nulo.

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8-2 = 6 \neq 0$$

La matriz ampliada $\mathrm{M}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \end{array}\right)$ tiene rango 2.

Si consideramos el menor que resulta de quitar la columna 3ª su determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -24+4+2-(-4-6-8) = -18+18 = 0$$

Por tanto, Rango de M es 2 al igual que el rango de M* y menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

a) Para $a \neq 1, a \neq -2$ el sistema tiene una única solución

b) Para $a = -2$ el sistema tiene infinitas soluciones. Resolvemos el sistema para este caso.

Una forma de resolverlo

Utilizamos el método de Gauss

$$\begin{cases} -2x + 2y + z = 1 \\ x - 4y + z = 2 \\ x + 2y - 2z = -3 \end{cases} \xrightarrow{Ecuación\,3^a - Ecuación\,2^a} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y + z = 1 \\ x - 4y + z = 2 \\ 6y - 3z = -5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{2\cdot Ecuación\,2^a + Ecuación\,1^a} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y + z = 1 \\ -6y + 3z = 5 \\ 6y - 3z = -5 \end{cases} \xrightarrow{Ecuación\,3^a + Ecuación\,2^a} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y + z = 1 \\ -6y + 3z = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Despejando de la 2ª ecuación tenemos que $z = \frac{5+6y}{3}$. Sustituimos en la 1ª ecuación.

$$-2x + 2y + \frac{5+6y}{3} = 1 \Rightarrow -6x + 6y + 5 + 6y = 3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-2-12y}{-6} = \frac{1+6y}{3}}$$

Las soluciones son $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1+6y}{3} \\ y = y \\ z = \frac{5+6y}{3} \end{array}\right\}$

Otra forma de resolverlo

Utilicemos el método de Cramer.

Como sumando la 2ª y la 3ª ecuación nos da la 1ª ecuación cambiada de signo podemos obtener un sistema equivalente quitando la tercera ecuación.

$$\begin{cases} -2x + 2y + z = 1 \\ x - 4y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + z = 1 - 2y \\ x + z = 2 + 4y \end{cases}$$

La matriz asociada al sistema es $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1-2y \\ 1 & 1 & 2+4y \end{array}\right)$ cuya matriz de coeficientes tiene determinante no nulo $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$ y podemos aplicar el método de Cramer para hallar las soluciones del sistema.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-2y & 1 \\ 2+4y & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1-2y-2-4y}{-3} = \frac{-1-6y}{-3} = \frac{1+6y}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1-2y \\ 1 & 2+4y \end{vmatrix}}{6} = \frac{-4-8y-1+2y}{-3} = \frac{-5-6y}{-3} = \frac{5+6y}{3}$$

Las soluciones son $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1+6y}{3} \\ y = y \\ z = \frac{5+6y}{3} \end{array}\right\}$

c) Para *a = 1* el sistema no tiene solución. Comprobado con anterioridad.

CUESTIÓN B.2: Considere los puntos A = (1, 1, 1), B = (1, –1, 0) y C = (0, –2, 1).

a) **[1,25 puntos]** Calcule el área del triángulo *ABC*.
b) **[1,25 puntos]** Calcule la ecuación de la recta (en cualquiera de sus formas) contenida en el plano que forman *A*, *B* y *C* que, pasando por *A*, es perpendicular al lado *BC*.

a) El área del triángulo de vértices A = (1, 1, 1), B = (1, –1, 0) y C = (0, –2, 1) se obtiene con la fórmula $Área = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}$.

Calculemos el valor de los vectores y de su producto vectorial.

$$\left.\begin{array}{l} A=\ (1,\ 1,\ 1) \\ B=\ (1,\ -1,\ 0) \\ C=\ (0,\ -2,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(0,-2,-1) \\ \overrightarrow{AC}=(-1,-3,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=j-(2k+3i)=-3i+j-2k=(-3,1,-2)$$

Aplicamos la fórmula y hallamos el valor del área.

$$Área=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{9+1+4}}{2}=\frac{\sqrt{14}}{2}\ u^2$$

b) **Una forma de hacerlo**

La recta pedida tiene una ecuación definida por dos planos: el plano π_1 que contiene a los puntos A, B y C, y el plano π_2 que pasa por A y tiene como vector normal al vector $\overrightarrow{BC}$.

Ecuación del plano π_1.

$$\left.\begin{array}{l} A=\ (1,\ 1,\ 1) \\ \overrightarrow{n_{\pi_1}}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-3,\ 1,\ -2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3x+y-2z+D=0 \\ \text{Pasa por } A=\ (1,\ 1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow -3+1-2+D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4+D=0 \Rightarrow D=4 \Rightarrow \boxed{\pi_1:-3x+y-2z+4=0}$$

Ecuación del plano π_2.

$$\left.\begin{array}{l} A=\ (1,\ 1,\ 1) \\ \overrightarrow{n_{\pi_2}}=\overrightarrow{BC}=(0,-2,1)-(1,-1,\ 0)=(-1,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x-y+z+D=0 \\ \text{Pasa por } A=\ (1,\ 1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1-1+1+D=0 \Rightarrow -1+D=0 \Rightarrow D=1 \Rightarrow \boxed{\pi_2:-x-y+z+1=0}$$

La recta pedida es la intersección de los dos planos.

$$\boxed{r:\begin{cases}-3x+y-2z+4=0\\-x-y+z+1=0\end{cases}}$$

Otra forma de hacerlo

Como la recta pedida está contenida en el plano ABC, debe ser perpendicular a su vector normal y además es perpendicular al vector $\overrightarrow{BC}$. El vector director de la recta se puede obtener haciendo el producto vectorial de ambos vectores ($\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{n_\pi}$).

El vector normal al plano ABC es el vector $\overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-3,1,-2)$ y el vector

$\overrightarrow{BC}=(0,-2,1)-(1,-1,0)=(-1,-1,1)$

$$\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{n_\pi}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}i & j & k\\-3 & 1 & -2\\-1 & -1 & 1\end{vmatrix}=i+2j+3k-(-k-3j+2i)=-i+5j+4k$$

$$\overrightarrow{v_r}=(-1,5,4)$$

Obtenemos la ecuación de la recta.

$$\left.\begin{matrix}A=(1,1,1)\\\overrightarrow{v_r}=(-1,5,4)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-1}{4}}$$

Otra forma de hacerlo

Para hallar la ecuación de la recta pedida necesitamos el vector director de la misma ($\vec{u}$), que nos dicen está en el plano (es por tanto perpendicular al vector normal del plano) y es perpendicular al vector $\overrightarrow{BC}$.

Como el producto vectorial hallado antes es un vector normal al plano

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-3,1,-2)=\overrightarrow{n_\pi}$

Se debe cumplir:

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{n_\pi}=0\Rightarrow(a,b,c)\cdot(-3,1,-2)=-3a+b-2c=0$$

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow(a,b,c)\cdot(-1,-1,1)=-a-b+c=0$$

Despejando *c* en la segunda ecuación queda $c=a+b$. Sustituimos en la primera ecuación.

$$-3a+b-2(a+b)=-3a+b-2a-2b=0$$

$$\Rightarrow-5a-b=0\Rightarrow b=-5a\Rightarrow\begin{cases}a=a\\b=-5a\\c=a+b=a-5a=-4a\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=(a,-5a,-4a)$$

Asignemos el valor 1 al parámetro y obtenemos el vector director $\vec{u}=(1,-5,-4)$

Por lo tanto, la recta pedida tiene como ecuación:

$$\left.\begin{matrix}A=(1,1,1)\\\vec{u}=(1,-5,-4)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{r:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z-1}{-4}}$$

CUESTIÓN B.3: Dada la función $f(x)=xe^{-x^2}$ se pide:

a) **[0,5 puntos]** Calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) **[1,5 puntos]** Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

a) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2}=\infty\cdot 0=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\{L'Hopital\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x^2}\cdot 2x}=\frac{1}{\infty}=0$$

b) Calculemos la derivada de *f(x)* e igualemos a 0.

$$f(x)=xe^{-x^2}\Rightarrow f'(x)=e^{-x^2}+xe^{-x^2}\cdot(-2x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

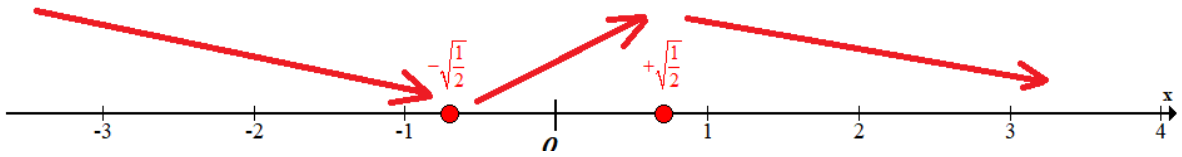
$$f'(x)=0\Rightarrow e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)=0\Rightarrow\begin{cases}e^{-x^2}=0\text{ , No tiene solución}\\ 1-2x^2=0\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\end{cases}$$

Veamos que ocurre en cada intervalo de la recta real antes, entre y después de los dos valores obtenidos.

- Si $x<-\sqrt{\frac{1}{2}}$ entonces sustituyendo por ejemplo $x=-2$ se obtiene $f'(-2)=e^{-4}(1-8)<0$. La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.
- Si $-\sqrt{\frac{1}{2}}<x<+\sqrt{\frac{1}{2}}$ entonces sustituyendo por ejemplo $x=0$ se obtiene $f'(0)=e^{0}(1-0)>0$. La función es creciente en el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.
- Si $+\sqrt{\frac{1}{2}}<x$ entonces sustituyendo por ejemplo $x=2$ se obtiene $f'(2)=e^{-4}(1-8)<0$. La función es decreciente en el intervalo $\left(+\sqrt{\frac{1}{2}},+\infty\right)$.

La función *f(x)* es decreciente en $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\cup\left(+\sqrt{\frac{1}{2}},+\infty\right)$ y creciente en $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

La función sigue el esquema siguiente.



Se deduce que *f(x)* presenta un mínimo relativo en $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}$ y un máximo relativo en $x=+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

CUESTIÓN B.4: [2 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}\,dx$.

Calcularemos la primitiva usando integración por partes.

$$\left.\begin{array}{l} u=\ln(1+x^2)\Rightarrow du=\dfrac{2x}{1+x^2}\,dx \\ dv=x^{-2}dx\Rightarrow v=\displaystyle\int x^{-2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x} \end{array}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Aplicando la fórmula}\\ \displaystyle\int udv=uv-\int vdu\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}\,dx=\ln(1+x^2)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx=$$

$$=\frac{-\ln(1+x^2)}{x}+2\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=\boxed{\frac{-\ln(1+x^2)}{x}+2arctgx+C}$$

CUESTIÓN B.5: [1 punto] Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A)=\frac{3}{5}$, $P(B)=\frac{7}{10}$, $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{10}$. Calcule: $P(A\cup B), P(A\cap B), P(\overline{B}/A)$. (Donde, si C y D son sucesos $\overline{C}$ denota el suceso complementario de *C* y *P(C/D)* denota la probabilidad del suceso C condicionada al suceso D).

Una forma de hacerlo

Obtenemos $P(A\cup B)$.

Como $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$ entonces $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=\frac{1}{10}$

Como $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-\frac{1}{10}=\boxed{\frac{9}{10}}$.

Para obtener $P(A\cap B)$ aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow \frac{9}{10}=\frac{3}{5}+\frac{7}{10}-P(A\cap B)$$

Y despejando tenemos que $P(A\cap B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

Para obtener $P(\overline{B}/A)$ utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{B}/A)=1-P(B/A)=1-\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=1-\frac{2/5}{3/5}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Otra forma de hacerlo

Construyamos la tabla con los datos proporcionados $P(A)=\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$, $P(B)=\frac{7}{10}$, $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{10}$

	A	$\overline{A}$	
B			$\frac{7}{10}$
$\overline{B}$		$\frac{1}{10}$	
	$\frac{6}{10}$		$\frac{10}{10}$

Completamos la tabla.

	A	$\overline{A}$	
B	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$
$\overline{B}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{10}{10}$

Observando los datos obtenidos en la tabla tenemos que $P(A\cap B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

Además $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{6}{10}+\frac{7}{10}-\frac{4}{10}=\frac{9}{10}$.

Y aplicando la fórmula de Bayes $P\left(\overline{B}/A\right)=\frac{P\left(\overline{B}\cap A\right)}{P(A)}$ y con los datos de la tabla tenemos que

$P\left(\overline{B}/A\right)=\frac{2/10}{6/10}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Una tercera forma de hacerlo

Como $P(A)=\frac{3}{5}=\frac{6}{10}\Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=\frac{4}{10}$. Es decir, que si el TODO tiene 10 elementos 4 pertenecen al conjunto $\overline{A}$.

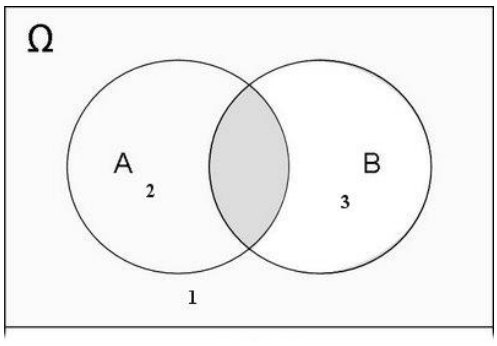
Como $P(B)=\frac{7}{10}\Rightarrow P\left(\overline{B}\right)=\frac{3}{10}$ Es decir, que si el TODO tiene 10 elementos 3 pertenecen al conjunto $\overline{B}$.

Como $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\frac{1}{10}$. Entonces la parte común a $\overline{A}$ y $\overline{B}$ es 1 elemento.

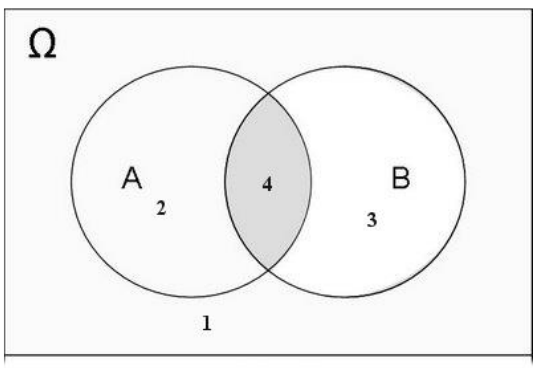
Entonces hay 1 elemento que no está ni en A ni en B.

Entonces quedan 3 elementos en $\overline{A}$ que no están en $\overline{B}$ y que por tanto están en B. Es decir, hay 3 elementos que están en B y no en A.

Hay 2 elementos de $\overline{B}$ que no están en $\overline{A}$ y que por tanto están en A. Es decir, hay 2 elementos que están en A y no en B.



Como el TODO es 10, debe de haber 4 elementos en la intersección de A y B (la parte sombreada).



Por tanto $P(A \cup B) = \frac{9}{10}$ y $P(A \cap B) = \frac{4}{10}$

Para calcular la probabilidad condicionada, reducimos nuestro TODO a solamente A (damos por realizado el suceso A), es decir solo contamos con 4 + 2 = 6 elementos, de los cuales son favorables a que ocurra el contrario de B solamente los que están en la parte de A que no está sombreado (2).

Por lo tanto $P(\overline{B} / A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2017

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

a) **[1,5 puntos]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.
b) **[1 punto]** Determine la matriz X que cumple la ecuación AXB = C.

CUESTIÓN A.2: Considere el plano π que pasa por el punto P = (1, 2, 3) y tiene como vectores directores a $\vec{u}=(1,-1,0)$ y $\vec{v}=(1,0,2)$. Considere la recta ***r*** que pasa por los puntos $A=(1,0,4)$ y $B=(3,2,2)$.

a) **[0'75 puntos]** Determine la ecuación de π.
b) **[0,75 puntos]** Determine la ecuación de ***r***.
c) **[1 punto]** Estudie la posición relativa de π y ***r***.

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1 punto]** $\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)$.

b) **[1 punto]** $\lim_{x\to 0}\frac{senx-x\cos x}{x-senx}$.

CUESTIÓN A.4:

a) **[1,5 puntos]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int xsen\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$.

b) **[0'5 puntos]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=0$ y $x=1$, y la gráfica de la función $f(x)=xsen\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

CUESTIÓN A.5: Según un estudio reciente, el 68% de los encuestados poseen un s*martphone*, el 38% tienen una *tablet* y el 16% disponen de ambos dispositivos.

a) **[0'5 puntos]** Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no disponga de ninguno de los dos dispositivos.

b) **[0'5 puntos]** Resulta que la persona elegida posee un *smartphone*, ¿qué probabilidad hay de que tenga una *tablet*?

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x - y + a^2 z = a - 1 \end{cases}$$

a) **[0,75 puntos]** Determine para qué valores del parámetro ***a*** el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.

b) **[1,25 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,5 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema no tiene solución.

CUESTIÓN B.2: Los vértices del triángulo ABC son $A=(-a,1,1)$, $B=(2,-1,2)$ y $C=(1,-2a,3)$.

a) **[1,5 puntos]** ¿Cuánto ha de valer *a* para el triángulo sea rectángulo en *B*?

b) **[1 punto]** Calcula el área del triángulo ABC para el caso $a = -1$.

CUESTIÓN B.3: [2 puntos] La producción mensual de una fábrica de bombillas viene dada por $P=2LK^2$ (en millones), donde L es el coste de la mano de obra y K es el coste del equipamiento (en millones de euros). La fábrica pretende producir 8 millones de unidades al mes. ¿Qué valores de L y K minimizarían el coste total L+ K?

CUESTIÓN B.4: [2 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x}{x^2+x-6}\,dx$.

CUESTIÓN B.5: [1 punto] Dos aulas de 2º de Bachillerato hacen conjuntamente un examen de Matemáticas. En el primer grupo hay 25 alumnos de los cuales aprueba el 64%, mientras que en el segundo grupo, de 30 alumnos, lo hace el 70%. De entre todos los exámenes se elige uno al azar y resulta que está aprobado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de un alumno del primer grupo?

SOLUCIONES

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

a) **[1,5 puntos]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

b) **[1 punto]** Determine la matriz X que cumple la ecuación AXB = C.

a) Para que una matriz sea regular (o invertible) debe tener determinante no nulo. Calculemos los determinantes de A y B:

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4\neq 0$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2-6=-4\neq 0$$

Por lo tanto, las matrices A y B son invertibles y se puede calcular sus inversas

Método 1

$$A^{-1}=\frac{Adj(A^T)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}}{-4}=\frac{\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}}{-4}=\begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ 1/4 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{Adj(B^T)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}}{-4}=\frac{\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}}{-4}=\begin{pmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1/2 & -1/4\end{pmatrix}$$

Método 2

También se puede calcular la inversa por ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix}A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\\ A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2a & -2b\\ a+2c & b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-2a=1\\ -2b=0\\ a+2c=0\\ b+2d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{-1}{2}\\ b=0\\ \frac{-1}{2}+2c=0\\ 0+2d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{-1}{2}\\ b=0\\ 2c=\frac{1}{2}\\ 2d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{-1}{2}\\ b=0\\ c=\frac{1}{4}\\ d=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ 1/4 & 1/2\end{pmatrix}}$$

$$\left.\begin{array}{l} B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix} \\ B^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a+3c & b+3d\\ 2a+2c & 2b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+3c=1\\ b+3d=0\\ 2a+2c=0\\ 2b+2d=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-3c\\ b=-3d\\ 2(1-3c)+2c=0\\ 2(-3d)+2d=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-3c\\ b=-3d\\ 2-6c+2c=0\\ -6d+2d=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-3c\\ b=-3d\\ -4c=-2\\ -4d=1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1-3c\\ b=-3d\\ c=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}\\ d=\dfrac{1}{-4}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-\dfrac{3}{2}=\dfrac{-1}{2}\\ b=\dfrac{3}{4}\\ c=\dfrac{1}{2}\\ d=\dfrac{1}{-4}\end{cases} \Rightarrow \boxed{B^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1/2 & -1/4\end{pmatrix}}$$

Método 3

También se pueden calcular por el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}-2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{2\,Fila\,2^a+Fila\,1^a} \left(\begin{array}{cc|cc}-2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 2\end{array}\right) \xrightarrow{Fila\,1^a/(-2)\ y\ Fila\,2^a/4} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2\end{array}\right)$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ 1/4 & 1/2\end{pmatrix}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{2\,Fila\,1^a-Fila\,2^a} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 2 & -1\end{array}\right) \xrightarrow{Fila\,2^a/4} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & -1/4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Fila\,1^a-3\,Fila\,2^a} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1/2 & 3/4\\ 0 & 1 & 1/2 & -1/4\end{array}\right)$$

$$\boxed{B^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1/2 & -1/4\end{pmatrix}}$$

b) **Método 1**

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AXB=C \Rightarrow A^{-1}\cdot AXB\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1} \Rightarrow Id\cdot X\cdot Id=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1} \Rightarrow X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X pedida:

$$X = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1 & -3/4 \end{pmatrix}}$$

Método 2

También se puede hallar X usando ecuaciones. Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se debe cumplir:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2a & -2b \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2a-4b & -6a-4b \\ a+2c+2b+4d & 3a+6c+2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2a-4b=0 \\ -6a-4b=2 \\ a+2c+2b+4d=-1 \\ 3a+6c+2b+4d=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-2b \\ 3a+2b=-1 \\ a+2c+2b+4d=-1 \\ 3a+6c+2b+4d=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2b \\ -6b+2b=-1 \rightarrow -4b=-1 \rightarrow \boxed{b=1/4} \\ -2b+2c+2b+4d=-1 \rightarrow 2c+4d=-1 \\ -6b+6c+2b+4d=2 \rightarrow -4b+6c+4d=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=-2\cdot\frac{1}{4}=-1/2} \\ 2c+4d=-1 \\ -1+6c+4d=2 \rightarrow 6c+4d=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c+4d=-1 \\ 6c+4d=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Ecuación1}^{\text{a}} - \text{Ecuación2}^{\text{a}}\} = \begin{cases} 2c+4d=-1 \\ -6c-4d=-3 \end{cases} \Rightarrow -4c=-4 \Rightarrow \boxed{c=\frac{-4}{-4}=1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2c+4d=-1 \Rightarrow 2+4d=-1 \Rightarrow 4d=-3 \Rightarrow \boxed{d=-3/4}$$

La matriz pedida es $\boxed{X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1 & -3/4 \end{pmatrix}}$

CUESTIÓN A.2: Considere el plano π que pasa por el punto P = (1, 2, 3) y tiene como vectores directores a $\vec{u}=(1,-1,0)$ y $\vec{v}=(1,0,2)$. Considere la recta ***r*** que pasa por los puntos A = (1, 0, 4) y B = (3, 2, 2).

a) **[0'75 puntos]** Determine la ecuación de π.
b) **[0,75 puntos]** Determine la ecuación de ***r***.
c) **[1 punto]** Estudie la posición relativa de π y ***r***.

a) La ecuación del plano se puede obtener de distintas maneras:

Método 1:

Resolviendo el determinante $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(-2x+2)+0+0-\big((-z+3)+(2y-4)+0\big)=-2x+2+z-3-2y+4=$$

$$=-2x-2y+z+3$$

La ecuación del plano es $\boxed{\pi:-2x-2y+z+3=0}$

Método 2:

La ecuación en paramétricas del plano es $\pi:\begin{cases} x=1+\lambda\cdot 1+\gamma\cdot 1 \\ y=2-\lambda\cdot 1+\gamma\cdot 0 \\ z=3+\lambda\cdot 0+\gamma\cdot 2 \end{cases}$

El plano tiene ecuación $\boxed{\pi:\begin{cases} x=1+\lambda+\gamma \\ y=2-\lambda \\ z=3+2\gamma \end{cases}}$

Método 3:

Determino el vector normal al plano que resulta del producto vectorial de los vectores directores:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-2i+0+0-(-k+2j+0)=-2i-2j+k\Rightarrow\vec{n}=(-2,-2,1)$$

El plano tiene ecuación $\pi:-2x-2y+z+D=0$

Determinemos el valor de D para que pase por el punto P(1, 2, 3). Para ello sustituimos x, y, z de la ecuación del plano por las coordenadas del punto.

$$\left.\begin{matrix} \pi:-2x-2y+z+D=0 \\ P(1,2,3)\in\pi \end{matrix}\right\}\Rightarrow -2\cdot 1-2\cdot 2+3+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2-4+3+D=0\Rightarrow -3+D=0\Rightarrow D=3$$

El plano tiene ecuación $\boxed{\pi: \quad -2x-2y+z+3=0}$

b) Para obtener la ecuación de la recta ***r*** que pasa por los puntos A = (1, 0, 4) y B = (3, 2, 2) necesitamos conocer las componentes del vector director:

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = B - A = A = (3, 2, 2) - (1, 0, 4) = (2, 2, -2)$$

Como son todas las componentes del vector proporcionales nos sirve como vector director el que se obtiene dividiendo todas las componentes entre 2 → $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, -1)$

En paramétricas sería:

$$r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 0+\lambda \\ z = 4-\lambda \end{cases} \text{ O bien en continua } r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-4}{-1}$$

c) Se puede hacer de varias formas, damos dos.

Método 1:

Comparemos las componentes de los vectores directores del plano π y el vector director de la recta ***r***:

$\vec{u} = (1, -1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 2)$ $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, -1)$

Con ellos formamos una matriz de la cual calculamos su determinante y decidiremos si son coplanarios o no.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 0 - (0 + 1 + 2) = -5 \neq 0$$

Al ser no nulo significa que no son coplanarios los vectores y por tanto, la recta corta al plano en un punto. El plano π y la recta *r* son secantes.

Método 2:

Sustituyamos las coordenadas de los puntos de la recta en el plano y comprobemos si existe un único punto de corte (serian secantes), infinitos puntos de corte (la recta está en el plano) o no tiene solución (la recta es paralela al plano)

$$\left.\begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 4-\lambda \end{cases} \\ \pi: \quad -2x-2y+z+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2(1+\lambda) - 2(\lambda) + (4-\lambda) + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 - 2\lambda - 2\lambda + 4 - \lambda + 3 = 0 \Rightarrow 5 - 5\lambda = 0 \Rightarrow -5\lambda = -5 \Rightarrow \lambda = 1$$

El punto de corte de punto y plano es único y por tanto son secantes.

Dicho punto de corte es $\begin{cases} x = 1+1 = 2 \\ y = 1 \\ z = 4-1 = 3 \end{cases}$ → P(2, 1, 3)

Método 3:

Mediante el producto escalar del vector normal al plano y el vector director de la recta. Si dicho producto es 0 recta y plano o son paralelos o la recta está en el plano. Si es distinto de cero la recta corta al plano en un punto.
Obtenemos el vector director de la recta.

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = B - A = A = (3, 2, 2) - (1, 0, 4) = (2, 2, -2)$$

Obtenemos el vector normal del plano.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 0 + 0 - (-k + 2j + 0) = -2i - 2j + k \Rightarrow \vec{n} = (-2, -2, 1)$$

Comprobamos si los vectores obtenidos son ortogonales o no (producto escalar nulo o no).

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (2, 2, -2) \cdot (-2, -2, 1) = -4 - 4 - 2 = -10 \neq 0$$

Al ser el producto escalar no nulo los vectores no son perpendiculares y el plano π y la recta *r* son secantes.

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1 punto]** $\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)$.

b) **[1 punto]** $\lim_{x\to 0}\frac{sen x - x\cos x}{x - sen x}$.

a) **Método 1:**

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=\text{Indeterminación}\ \{\text{Racionalizamos la primera fracción}\}=$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{x}-2}=\frac{1}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2}=\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}}$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}-\frac{4}{x-4}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+2-4}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{0}{0}=\{\text{Regla de L'Hôpital}\}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\cdot 2}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

Método 2:

$$\lim_{x\to 4}(\ )=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=\text{Indeterminación}\ \{\text{Factorizamos } x-4\}=...$$

$$\boxed{x-4=\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$...=\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}-\frac{4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}+2-4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\cancel{\sqrt{x}-2}}{\left(\cancel{\sqrt{x}-2}\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right)=\frac{1}{2+2}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

Método 3:

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=\text{Indeterminación}\ \{\text{Sumamos las fracciones}\}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}=\frac{x-4-4\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-4)}=\frac{x-4-4\sqrt{x}+8}{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-4)}=\frac{x-4\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-4)}=\frac{x-4\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-4\sqrt{x}-2x+8}$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{x-4\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-4\sqrt{x}-2x+8}\right)=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}\ \{\text{Aplicamos L'Hôpital}\}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{1-4\frac{1}{2\sqrt{x}}+0}{\sqrt{x}+x\frac{1}{2\sqrt{x}}-4\frac{1}{2\sqrt{x}}-2+0}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{1-\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}-2}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}}{\frac{2x+x-4-4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{2\left(\sqrt{x}-2\right)}{2x+x-4-4\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{2\sqrt{x}-4}{3x-4-4\sqrt{x}}\right)=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}\ \{\text{Aplicamos L'Hôpital}\}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{3-4\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{3-\frac{2}{\sqrt{x}}}\right)=\frac{\frac{1}{\sqrt{4}}}{3-\frac{2}{\sqrt{4}}}=\frac{\frac{1}{2}}{3-1}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx-x\cos x}{x-senx}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}=\{\text{Aplico regla de L'Hôpital}\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\left(\cos x+x\left(-senx\right)\right)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+xsenx}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xsenx}{1-\cos x}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}\{\text{Aplico regla de L'Hôpital}\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{senx+x\cos x}{senx}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}=\{\text{Aplico regla de L'Hôpital}\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\left(\cos x+x\left(-senx\right)\right)}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-xsenx}{\cos x}=\frac{2}{1}=\boxed{2}$$

CUESTIÓN A.4:

a) **[1,5 puntos]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int xsen\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$.

b) **[0'5 puntos]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=0$ y $x=1$, y la gráfica de la función $f(x)=xsen\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

a)

$$\int xsen\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x\rightarrow du=dx\\ dv=sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\rightarrow v=\int sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\\ \int udv=u\cdot v-\int vdu\end{array}\right\}=$$

$$=x\cdot\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)-\int-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=-\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{2}{\pi}\int\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=$$

$$=-\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)=\boxed{-\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2}sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)+C}$$

La dificultad de este ejercicio radica en que te sea fácil o no el cálculo de las integrales:

$$\int sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

y

$$\int\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{2}{\pi}sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Para su cálculo puedes hacer un cambio de variable $\frac{\pi x}{2}=t$ o aprenderte que al ser $\int senxdx=-\cos x$ y también $\int\cos xdx=senx$ y la derivada de $\frac{\pi x}{2}$ es $\frac{\pi}{2}$ se debe ajustar con la inversa de $\frac{\pi}{2}$ que es $\frac{2}{\pi}$.

b) Comprobemos si la función corta al eje X en algún punto comprendido entre 0 y 1.

$$f(x)=0\rightarrow xsen\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\ sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{\pi x}{2}=0\rightarrow x=0\\ \frac{\pi x}{2}=\pi\rightarrow x=2\\ \frac{\pi x}{2}=2\pi\rightarrow x=4\\ .....\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Los puntos de corte con el eje X de la función son $x=0$, $x=2$, $x=4$,….

Ninguno está en el intervalo (0, 1)

Además, la función es positiva $f(x)>0$ ya que $xsen\left(\frac{\pi x}{2}\right)>0$ entre 0 y 1

Así el área pedida se obtiene con el valor de la integral definida siguiente.

$$\int_0^1 xsen\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\left[-\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2}sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1=$$

$$=\left(-\frac{2\cdot 1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2}sen\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}\right)\right)-\left(-\frac{2\cdot 0}{\pi}\cos\left(\frac{\pi\cdot 0}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2}sen\left(\frac{\pi\cdot 0}{2}\right)\right)=$$

$$=\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-(0+0)=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\cdot 0+\frac{4}{\pi^2}\cdot 1=\boxed{\frac{4}{\pi^2}\ u^2}=\boxed{0'405\,u^2}$$

El área de la región tiene un valor de $\frac{4}{\pi^2}$ unidades cuadradas.

CUESTIÓN A.5: Según un estudio reciente, el 68% de los encuestados poseen un s*martphone*, el 38% tienen una *tablet* y el 16% disponen de ambos dispositivos.
a) **[0'5 puntos]** Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no disponga de ninguno de los dos dispositivos.
b) **[0'5 puntos]** Resulta que la persona elegida posee un *smartphone*, ¿qué probabilidad hay de que tenga una *tablet*?

Método 1

a) Construyamos la tabla de contingencia asociada con esta situación planteada.

	Tablet	No tablet	
Smartphone	**16**		**68**
No smartphone			
	38		**100**

Completamos la tabla.

	Tablet	No tablet	
Smartphone	**16**	**52**	**68**
No smartphone	**22**	**10**	**32**
	38	**62**	**100**

A partir de los datos de la tabla, esta probabilidad es del $\boxed{10\%}$, aparece en la celda donde se cruzan la fila de "No Smartphone" y la columna de "No Tablet".

b) A partir de los datos que aparecen en fila de "Smartphone" de la tabla superior.

$$\textit{Probabilidad de que tenga Tablet sabiendo que tiene Smartphone} =$$

$$= P(\textit{Tablet} / \textit{Smartphone}) = \frac{16}{68} = 0'235 = \boxed{23'5\%}$$

Método 2

Llamemos S = Tener Smartphone, T = Tener Tablet. Siendo P(S) = 0'68, P(T) = 0'38 y $P(S \cap T) = 0'16$.

Así $\overline{S}$ = No tener Smartphone y $\overline{T}$ = No tener Tablet. Siendo P($\overline{S}$) = 1 – 0'68 = 0'32 y P($\overline{T}$) = 1 – 0'38 = 0'62.

a)

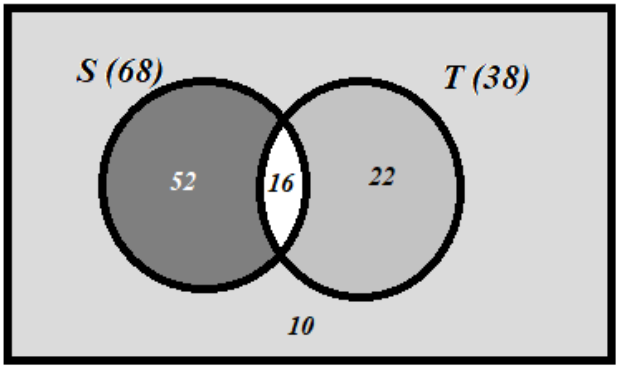
$$P(\overline{S} \cap \overline{T}) = P(\overline{S \cup T}) = 1 - P(S \cup T) = 1 - (P(S) + P(T) - P(S \cap T)) =$$

$$= 1 - (0'68 + 0'38 - 0'16) = 1 - 0'9 = \boxed{0'1}$$

b) Aplicando el teorema de Bayes: $P(T / S) = \dfrac{P(T \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0'16}{0'68} = \boxed{0'235}$

Método 3

Mediante un diagrama de Venn, llamando S a los que tienen Smartphone (izquierda), separando a los que los que tienen Smartphone y Tablet (16) de los que solo tienen Smartphone (52) y llamando T a los que tienen Tablet (derecha) separando a los que los que tienen tablet y Smartphone (16) de los que tienen solo Tablet (22). Como el total son 100 % y en los círculos hay 52 + 16 + 22 = 90 en el exterior de los círculos y dentro del rectángulo que representa el total quedan 10.



a) P(No tenga ningún dispositivo) = $\frac{10}{100}$ = $\boxed{0'1}$

b) P(Tenga una Tablet sabiendo que tiene un Smartphone) = Solo puedo tener en cuenta a los 68 que tienen smartphone (resultados posibles en la elección) y de entre ellos los que tienen Tablet (favorables al suceso) = $\frac{16}{68}$ = $\boxed{0'235}$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x - y + a^2 z = a - 1 \end{cases}$$

a) **[0,75 puntos]** Determine para qué valores del parámetro ***a*** el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.
b) **[1,25 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,5 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema no tiene solución.

Método 1

Utilizando el método de Gauss obtenemos un sistema triangular equivalente.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x - y + a^2 z = a - 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2ª \text{ ecuación - } 1ª \text{ ecuación} \rightarrow 2ª \text{ ecuación} \\ \quad 2x + 3y + 2z = 0 \\ \underline{-\ 2x + y + 2z = 0} \\ \quad 0 + 2y + 0 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 3ª \text{ ecuación - } 1ª \text{ Ecuación} \rightarrow 3ª \text{ ecuación} \\ \quad 2x - 2y + 2a^2 z = 2a - 2 \\ \underline{-\ 2x + y + 2z \quad = 0} \\ \quad 0 - 3y + \left(2a^2 - 2\right) z = 2a - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2y = 0 \\ -3y + \left(2a^2 - 2\right) z = 2a - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ y = 0 \\ \left(2a^2 - 2\right) z = 2a - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ y = 0 \\ \left(2a^2 - 2\right) z = 2a - 2 \end{cases}$$

Nos planteamos distintas situaciones dependiendo de cuando se anule la expresión $2a^2 - 2$.

$$2a^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2\left(a^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

Primer caso. a = 1

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2ª \text{ ecuación - } 1ª \text{ ecuación} \rightarrow 2ª \text{ ecuación} \\ \quad 2x + 3y + 2z = 0 \\ \underline{-\ 2x + y + 2z = 0} \\ \quad 2y \quad = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 3ª \text{ ecuación - } 1ª \text{ Ecuación} \rightarrow 3ª \text{ ecuación} \\ \quad 2x - 2y + 2z = 0 \\ \underline{-\ 2x + y + 2z \ = 0} \\ \quad -3y \quad = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$$

La segunda ecuación y la tercera son iguales. El sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones)

Segundo caso. a = –1

$$\left\{\begin{array}{l}2x+\ y+2z=0\\2x+3y+2z=0\\\ x-y+z=-2\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2ª\text{ ecuación - }1ª\text{ ecuación}\rightarrow 2ª\text{ ecuación}\\\ 2x+3y+2z=0\\-\ 2x+y+2z=0\\\hline\ 2y\ \ =0\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}2\cdot 3ª\text{ ecuación - }1ª\text{ Ecuación}\rightarrow 3ª\text{ ecuación}\\\ 2x-2y+2z=-4\\-\ 2x+y+2z=0\\\hline\ -3y\ \ =-4\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+\ y+2z=0\\2y=0\\\ -3y=-4\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+\ y+2z=0\\y=0\\y=\frac{4}{3}\end{array}\right.$$

Salen dos valores distintos para la incógnita "y". El sistema es incompatible (No tiene solución)

Tercer caso. a ≠ 1, a ≠ –1

$$\left\{\begin{array}{l}2x+\ y+2z=0\\2x+3y+2z=0\\\ x-y+a^2z=a-1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+\ y+2z\ \ \ \ =0\\\ \ \ y\ \ \ \ =0\\\ \ \ \left(2a^2-2\right)z=2a-2\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+\ y+2z\ \ \ \ =0\\\ \ \ y\ \ \ \ =0\\\ \ \ z=\frac{2a-2}{2a^2-2}\end{array}\right.$$

El sistema es compatible determinado (solución única).

Método 2

Comparando los rangos de las matrices asociadas al sistema

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\2&3&2\\1&-1&a^2\end{pmatrix}\text{ y }Am=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&2&0\\2&3&2&0\\1&-1&a^2&a-1\end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&2\\2&3&2\\1&-1&a^2\end{vmatrix}=6a^2+2-4-\left(6+2a^2-4\right)=6a^2+2-4-6-2a^2+4=4a^2-4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a^2-4=0\Rightarrow 4a^2=4\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\sqrt{1}=\pm 1$$

Primer caso. a = 1

$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\2&3&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$ tiene rango = 2 ya que el determinante del siguiente menor de orden 2 es no nulo:

$$\begin{vmatrix}2&1\\2&3\end{vmatrix}=6-2=4\neq 0$$

y $Am=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&2&0\\2&3&2&0\\1&-1&1&0\end{array}\right)$ tiene también rango = 2 ya que la última columna es todo ceros.

Rango A = rango Am = 2 < nº incógnitas (3), por lo que el sistema tiene infinitas soluciones (Sistema Compatible Indeterminado)

Segundo caso. a = –1

$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ tiene rango = 2 ya que el siguiente menor de orden 2 es no nulo:

$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=6-2=4\neq 0$

y $Am=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -2\end{array}\right)$ tiene rango = 3 ya que el menor de orden 3 siguiente es no nulo:

$\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}=-12-6+0+0-\left(0-4-2+0\right)=-12\neq 0$

Rango A ≠ rango Am, por lo que el sistema no tiene solución (Sistema Incompatible)

Tercer caso. a ≠ 1, a ≠ –1

$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & -1 & a^2\end{pmatrix}$ tiene rango 3 ya que $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & -1 & a^2\end{vmatrix}=4a^2-4\neq 0$ al ser a ≠ 1 y a ≠ –1

y $Am=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 0\\ 1 & -1 & a^2 & a-1\end{array}\right)$ tiene también rango =3

Rango A = rango Am = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema tiene una única solución (Sistema Compatible Determinado)

a) Para cualquier valor de a ≠ 1 y a ≠ –1

b) Para *a = 1* y el sistema queda: $\begin{cases}2x+\ y+2z=0\\ 2x+3y+2z=0\\ \ x-y+z=0\end{cases}\Rightarrow$ Lo resolvemos por el método de Gauss

$$\left\{\begin{array}{l}2^{\text{a}}\text{ ecuación - }1^{\text{a}}\text{ ecuación}\rightarrow 2^{\text{a}}\text{ ecuación}\\ \begin{array}{r}2x+3y+2z=0\\ -2x-y-2z=0\\ \hline 2y\quad\ =0\end{array}\end{array}\right\}\quad\left\{\begin{array}{l}2\cdot 3^{\text{a}}\text{ ecuación - }1^{\text{a}}\text{ Ecuación}\rightarrow 3^{\text{a}}\text{ ecuación}\\ \begin{array}{r}2x-2y+2z=0\\ -2x-y-2z\ =0\\ \hline -3y\quad\ =0\end{array}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x+\ y+2z=0\\ 2y=0\\ -3y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+\ y+2z=0\\ \boxed{y=0}\end{cases}\Rightarrow 2x+2z=0\Rightarrow x+z=0\Rightarrow\boxed{x=-z}$$

Las soluciones son: $x=-z;\ y=0;\ z=z$

c) Para *a = –1* el sistema es incompatible.

CUESTIÓN B.2: Los vértices del triángulo ABC son $A=(-a,1,1)$, $B=(2,-1,2)$ *y* $C=(1,-2a,3)$.

a) **[1,5 puntos]** ¿Cuánto ha de valer *a* para el triángulo sea rectángulo en B?
b) **[1 punto]** Calcula el área del triángulo ABC para el caso a = –1.

a) Consideremos los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BA}=A-B=(-a,1,1)-(2,-1,2)=(-a-2,\,2,\,-1)$$
$$\overrightarrow{BC}=C-B=(1,-2\,\mathrm{a},3)-(2,-1,2)=(-1,\,-2a+1,1)$$

Para que sea rectángulo en B deben ser ortogonales los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, y por tanto su producto escalar debe ser nulo.

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-a-2,\,2,\,-1)\cdot(-1,\,-2a+1,1)=a+2-4a+2-1=-3a+3$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0\rightarrow -3a+3=0\rightarrow -3a=-3\rightarrow a=1$$

La solución es **a = 1**

b) Para a = –1 los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ que delimitan el triángulo quedan

$$\overrightarrow{BA}=(-a-2,\,2,\,-1)=(-1,2,-1)$$
$$\overrightarrow{BC}=(-1,\,-2a+1,1)=(-1,3,1)$$

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.

$$\textit{Área triángulo ABC}=\frac{\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|}{2}=\frac{\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}}{2}=$$
$$=\frac{\left|2i+j-3k-(-2k-j-3i)\right|}{2}=\frac{\left|2i+j-3k+2k+j+3i\right|}{2}=\frac{\left|5i+2j-k\right|}{2}=\frac{\left|(5,\,2,\,-1)\right|}{2}=$$
$$=\frac{\sqrt{5^2+2^2+(-1)^2}}{2}=\frac{\sqrt{25+4+1}}{2}=\frac{\sqrt{30}}{2}=\boxed{2'73\,u^2}$$

CUESTIÓN B.3: [2 puntos] La producción mensual de una fábrica de bombillas viene dada por $P=2LK^2$ (en millones), donde L es el coste de la mano de obra y K es el coste del equipamiento (en millones de euros). La fábrica pretende producir 8 millones de unidades al mes. ¿Qué valores de L y K minimizarían el coste total L+ K?

La función a minimizar es la función coste L+ K.
Se deben producir 8 millones de unidades, es decir, P = 8, siendo $P = 2LK^2$
Por lo tanto $8 = 2LK^2 \Rightarrow 4 = LK^2 \Rightarrow L = \frac{4}{K^2}$
La función coste que depende de K quedaría:

$$f(K) = L + K = \frac{4}{K^2} + K$$

Esta es la función a minimizar.
Calculamos la derivada primera de $f(\mathrm{K}) = \frac{4}{K^2} + K$

$$f'(\mathrm{K}) = \left(\frac{4}{K^2} + K\right)' = \left(4\cdot \mathrm{K}^{-2} + K\right)' = -8K^{-3} + 1 = \frac{-8}{K^3} + 1$$

Igualando a cero la $f'(\mathrm{K})$.

$$f'(\mathrm{K}) = 0 \Rightarrow \frac{-8}{K^3} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{-8}{K^3} = -1 \Rightarrow \frac{8}{K^3} = 1 \Rightarrow 8 = K^3 \Rightarrow K = \sqrt[3]{8} = 2$$

El posible mínimo seria para K = 2 millones de euros de gasto en equipamiento
Lo comprobamos con la segunda derivada

$$f'(\mathrm{K}) = -8K^{-3} + 1 \Rightarrow f''(\mathrm{K}) = 24K^{-4} = \frac{24}{K^4}$$

Como $f''(2) = \frac{24}{2^4} = \frac{24}{16} = 1'5 > 0$ la función presenta un mínimo en K = 2.
Para el valor de K = 2 se consigue un mínimo coste

$$K = 2 \Rightarrow L = \frac{4}{2^2} = 1$$

Los valores para los que se minimiza el coste son K = 2 millones de euros y L = 1 millón de euros.

CUESTIÓN B.4: [2 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x}{x^2+x-6}\,dx$.

Resolvemos la integral mediante descomposición en fracciones simples.
Averiguamos las raíces del denominador.

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}=\begin{cases}x=\dfrac{-1+5}{2}=\dfrac{4}{2}=2\\ x=\dfrac{-1-5}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3\end{cases}$$

Descomponemos la fracción de la integral en suma de fracciones simples.

$$\frac{x}{x^2+x-6}=\frac{x}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$
$$\frac{x}{(x-2)(x+3)}=\frac{A\cdot(x+3)}{(x-2)(x+3)}+\frac{B\cdot(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$
$$\frac{x}{(x-2)(x+3)}=\frac{A\cdot(x+3)+B\cdot(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$
$$x=A\cdot(x+3)+B\cdot(x-2)$$

Dando a x el valor -3 queda $-3=A\cdot(-3+3)+B\cdot(-3-2)\Rightarrow -3=-5B\Rightarrow B=\frac{3}{5}$

Dando a x el valor 2 queda $2=A\cdot(2+3)+B\cdot(2-2)\Rightarrow 2=5A\Rightarrow A=\frac{2}{5}$

Terminamos de resolver la integral.

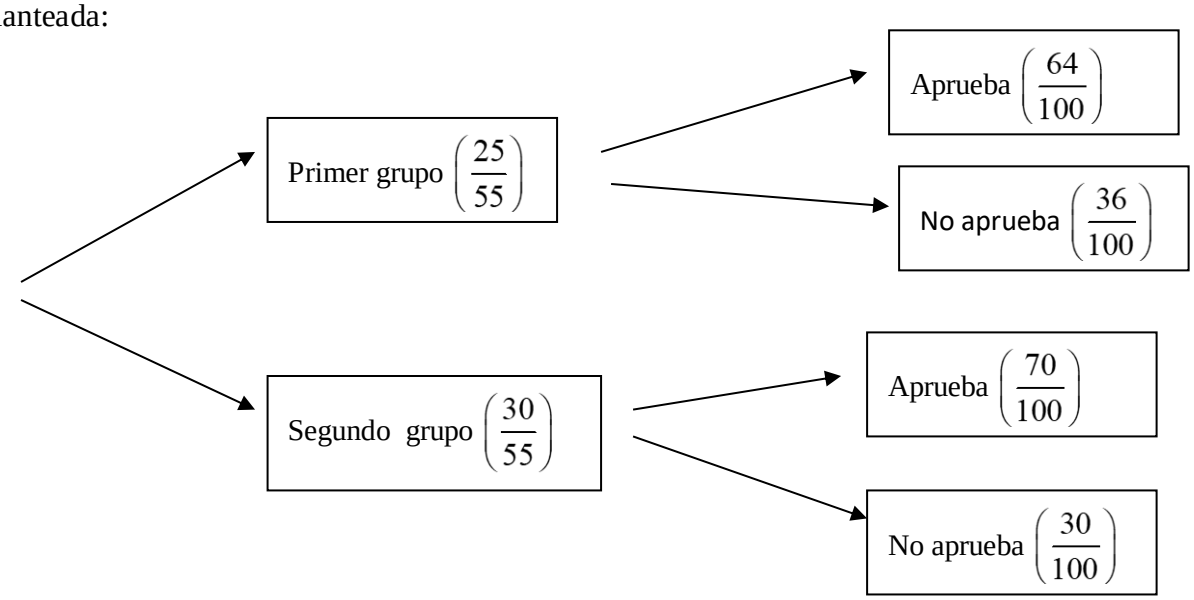
$$\int\frac{x}{x^2+x-6}\,dx=\int\frac{2/5}{x-2}\,dx+\int\frac{3/5}{x+3}dx=$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{1}{x-2}\,dx+\frac{3}{5}\int\frac{1}{x+3}\,dx=\boxed{\frac{2}{5}\ln|x-2|+\frac{3}{5}\ln|x+3|+C}$$

CUESTIÓN B.5: [1 punto] Dos aulas de 2º de Bachillerato hacen conjuntamente un examen de Matemáticas. En el primer grupo hay 25 alumnos de los cuales aprueba el 64%, mientras que en el segundo grupo, de 30 alumnos, lo hace el 70%. De entre todos los exámenes se elige uno al azar y resulta que está aprobado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de un alumno del primer grupo?

Método 1

En total hay 30+25 = 55 alumnos entre los cuales se elige uno al azar. Realicemos el árbol que describa la elección del alumno, primero si es del primer o segundo grupo y después si aprueba o no. Este árbol nos debe ayudar a entender mejor el ejercicio y responder con facilidad a la pregunta planteada:



La probabilidad de que un alumno apruebe es $P(\text{Apruebe}) = \frac{25}{55}\cdot\frac{64}{100} + \frac{30}{55}\cdot\frac{70}{100} = 0'67$.

La probabilidad de que un alumno sea del primer grupo, sabiendo que ha aprobado sería:

$$P(\text{Primer grupo / Aprueba}) = \frac{\frac{25}{55}\cdot\frac{64}{100}}{\frac{25}{55}\cdot\frac{64}{100} + \frac{30}{55}\cdot\frac{70}{100}} = \frac{25\cdot 64}{25\cdot 64 + 30\cdot 70} = \frac{1600}{3700} = \frac{16}{37} = \boxed{0'43}$$

Método 2

Obtengamos el número de alumnos que aprueban y luego aplicamos la regla de Laplace para obtener cada una de las probabilidades pedidas.

Hay un total de 25 + 30 = 55 alumnos de los cuales aprueban:

- 64% de 25 en el primer grupo, es decir, $\frac{64\cdot 25}{100} = 16$ alumnos
- 70% de 30 en el segundo grupo, es decir, $\frac{70\cdot 30}{100} = 21$ alumnos

En total aprueban 16 + 21 = 37 alumnos.

Hagamos una tabla de contingencia con los datos del ejercicio.

	Aprueba	No aprueba	
Primer grupo	**16**		**25**
Segundo grupo	**21**		**30**
			55

Completamos la tabla.

	Aprueba	No aprueba	
Primer grupo	**16**	**9**	**25**
Segundo grupo	**21**	**9**	**30**
	37	**18**	**55**

La probabilidad de que un alumno elegido al azar sea del primer grupo sabiendo que ha aprobado sería:

$$P(\text{Primer grupo} / \text{Aprueba}) = \frac{16}{37} = \boxed{0'43}$$