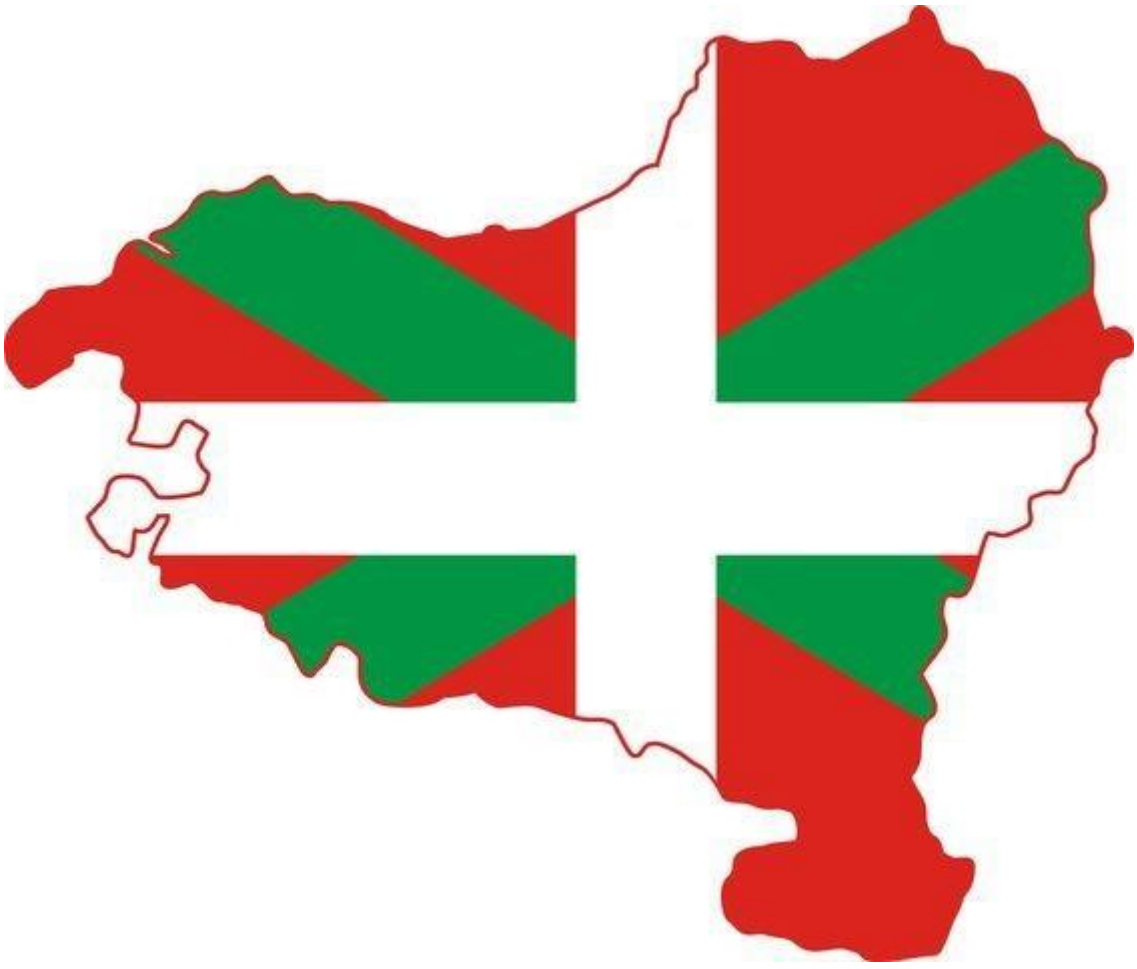
Matemáticas II

PAU en el País Vasco

Años 2017 a 2026



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM
WWW.MATEMATICASPAU.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad en el País Vasco del año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas de educación secundaria.
La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU extraordinaria 2026 3
PAU ordinaria 2026 17
PAU extraordinaria 2025 33
PAU ordinaria 2025 52
EAU extraordinaria 2024 71
EAU ordinaria 2024 92
EAU extraordinaria 2023 113
EAU ordinaria 2023 130
EAU extraordinaria 2022 146
EAU ordinaria 2022 162
EAU extraordinaria 2021 178
EAU ordinaria 2021 194
EAU extraordinaria 2020 214
EAU ordinaria 2020 228
EAU extraordinaria 2019 243
EAU ordinaria 2019 255
EAU extraordinaria 2018 268
EAU ordinaria 2018 286
EAU extraordinaria 2017 300
EAU ordinaria 2017 315

PAU extraordinaria 2026

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA
2026ko EZOHIKOA

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
EXTRAORDINARIA 2026

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

Este examen tiene CINCO ejercicios, de 2 puntos cada uno.
En los ejercicios CUARTO y QUINTO solo hay que responder a UNA de las dos opciones. Si se responde a las dos, se corregirá la que aparezca en primer lugar en las hojas del examen.
Las respuestas deben escribirse con bolígrafo azul o negro. No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color. Solo se pueden utilizar bolígrafos o rotuladores para hacer gráficos.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

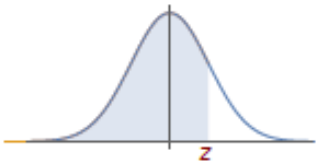
No olvides incluir el código en cada uno de los cuadernillos de hojas de examen.

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA
2026ko EZOHIKOA

MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
EXTRAORDINARIA 2026

MATEMÁTICAS II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak
Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

EHU

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA
2026ko OHIKOA

MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
ORDINARIA 2026

MATEMÁTICAS II

PRIMER EJERCICIO (2 puntos).
Una central lechera recoge leche de tres productores locales, A, B y C. El productor A lleva su leche en recipientes de 10 litros y se le paga a 5 € por cada recipiente. La productora B utiliza recipientes de 15 litros y recibe 9 € por cada recipiente. Por último, la productora C aporta recipientes de 12 litros y se le paga a 4 € por cada uno. En la última semana, se han recogido un total de 612 litros de leche, en 48 recipientes y se debe pagar en total 304 €, a repartir entre los tres ganaderos.
(a) **(1 punto)** Plantea el sistema de ecuaciones que modeliza la situación descrita.
(b) **(1 punto)** ¿Cuánto se debe pagar a cada productor por la leche que ha llevado a la central la última semana?

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos).
Sea $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$.
(a) (1.5 puntos) Encuentra los valores de A, B y C para que la tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$ sea la recta $y=3-3x$ y *f* tenga un extremo relativo en $x=1$.
(b) (0.5 puntos) El extremo relativo de *f* en el punto $x=1$, ¿es un máximo o un mínimo?

TERCER EJERCICIO (2 puntos).
Se ha realizado un estudio de la venta de coches del año 2025 en España. De un total de 1.148.650 unidades vendidas, el 10 % corresponde a coches totalmente eléctricos, siendo todos ellos de cambio automático; el 52 % de las unidades vendidas corresponde a coches híbridos, siendo de cambio manual el 6 % de ellos; del resto de unidades vendidas, tienen cambio automático el 53 % de ellos.
(a) (1 punto) Calcula la cantidad de coches con cambio automático vendidos en España en 2025.
(b) (1 punto) Elegido al azar un coche vendido en España en 2025 y sabiendo que tiene cambio automático, calcula la probabilidad de que sea híbrido.

CUARTO EJERCICIO (2 puntos). Responde solo a una de las opciones.

(4A) Sea P el punto de corte de las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x=1+t, \\ y=0, \\ z=-t; \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x=s, \\ y=-1+s, \\ z=0. \end{cases}$$

Calcula el punto P´ simétrico de P con respecto al plano de ecuación $2x+y-z=3$.

(4B) Sea *r* la recta que pasa por el punto $P(1,7,4)$ y cuyo vector director es $\vec{v}=(6,3,-5)$ y sea $\pi \equiv 2x+y-3z=-13$.
(a) (1 punto) Calcula el punto de corte de la recta *r* y el plano π.
(b) (1 punto) Calcula el ángulo mínimo formado por la recta y el plano.

QUINTO EJERCICIO (2 puntos). Responde solo a una de las opciones.

(5A) Calcula la integral

$$\int \frac{x^2-2x+3}{x^2-x-2}\,dx$$

explicando los pasos realizados.

(5B)

(a) **(1 punto)** Dibuja el recinto limitado por la parábola de ecuación $y=x^2-\pi^2$ y la gráfica de la función $f(x)=\cos(x/2)$.

(b) **(1 punto)** Calcula el área del recinto del apartado anterior, escribiendo el resultado en función del número π.

SOLUCIONES

PRIMER EJERCICIO (2 puntos).
Una central lechera recoge leche de tres productores locales, A, B y C. El productor A lleva su leche en recipientes de 10 litros y se le paga a 5 € por cada recipiente. La productora B utiliza recipientes de 15 litros y recibe 9 € por cada recipiente. Por último, la productora C aporta recipientes de 12 litros y se le paga a 4 € por cada uno. En la última semana, se han recogido un total de 612 litros de leche, en 48 recipientes y se debe pagar en total 304 €, a repartir entre los tres ganaderos.
(a) **(1 punto)** Plantea el sistema de ecuaciones que modeliza la situación descrita.
(b) **(1 punto)** ¿Cuánto se debe pagar a cada productor por la leche que ha llevado a la central la última semana?

(a) Llamamos *a*, *b* y *c* al número de recipientes de leche que aporta cada uno de los productores A, B y C, respectivamente.

"Se han recogido un total de 612 litros de leche" → $10a+15b+12c=612$.
"Se han recogido un total de 612 litros de leche, en 48 recipientes" → $a+b+c=48$.
"Se han recogido un total de 612 litros de leche, en 48 recipientes y se debe pagar en total 304 €, a repartir entre los tres ganaderos" → $5a+9b+4c=304$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l}10a+15b+12c=612\\ a+b+c=48\\ 5a+9b+4c=304\end{array}\right\}$$

(b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left.\begin{array}{l}10a+15b+12c=612\\ a+b+c=48\\ 5a+9b+4c=304\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}10a+15b+12c=612\\ a=48-b-c\\ 5a+9b+4c=304\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}10(48-b-c)+15b+12c=612\\ 5(48-b-c)+9b+4c=304\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}480-10b-10c+15b+12c=612\\ 240-5b-5c+9b+4c=304\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5b+2c=132\\ 4b-c=64\end{array}\right\}\Rightarrow\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5b+2c=132\\ 4b-64=c\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5b+2(4b-64)=132\Rightarrow 5b+8b-128=132\Rightarrow 13b=260\Rightarrow \boxed{b=\frac{260}{13}=20}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c=4\cdot 20-64=16}\Rightarrow \boxed{a=48-20-16=12}$$

El productor A aportó 12 recipientes que a 5 € cada uno le supuso unos ingresos de 12 · 5 = 60 €.
El productor B aportó 20 recipientes que a 9 € cada uno le supuso unos ingresos de 20 · 9 = 180 €.
El productor C aportó 16 recipientes que a 4 € cada uno le supuso unos ingresos de 16 · 4 = 64 €.

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos).

Sea $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$.

(a) (1.5 puntos) Encuentra los valores de A, B y C para que la tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$ sea la recta $y=3-3x$ y *f* tenga un extremo relativo en $x=1$.

(b) (0.5 puntos) El extremo relativo de *f* en el punto $x=1$, ¿es un máximo o un mínimo?

(a) La tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$ coincide con la función en dicho valor.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C \\ y=3-3x \end{array}\right\} \Rightarrow 3-3\cdot 0=0^3+A\cdot 0^2+B\cdot 0+C \Rightarrow \boxed{C=3}$$

La función queda $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+3$.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$ es el valor de la derivada de la función en dicho valor que debe coincidir con la pendiente de la recta $y=3-3x$ que vale $m=-3$.

$$f(x)=x^3+Ax^2+Bx+3 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2Ax+B$$

$$f'(0)=-3 \Rightarrow 3\cdot 0^2+2A\cdot 0+B=-3 \Rightarrow \boxed{B=-3}$$

La función queda $f(x)=x^3+Ax^2-3x+3$.

Si la función tiene un extremo relativo en $x=1$ significa que la derivada se anula para este valor.

$$f(x)=x^3+Ax^2-3x+3 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2Ax-3$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow 3\cdot 1^2+2A\cdot 1-3=0 \Rightarrow 2A=0 \Rightarrow \boxed{A=0}$$

Los valores buscados son A = 0, B = –3 y C = 3.

(b) La función tiene la expresión $f(x)=x^3-3x+3$. Hallamos su derivada segunda y obtenemos su signo para $x=1$.

$$f(x)=x^3-3x+3 \Rightarrow f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow f''(x)=6x \Rightarrow f''(1)=6\cdot 1=6>0$$

En $x=1$ se anula la primera derivada de la función y la segunda toma valor positivo. La función tiene un mínimo relativo en $x=1$.

TERCER EJERCICIO (2 puntos).
Se ha realizado un estudio de la venta de coches del año 2025 en España. De un total de 1.148.650 unidades vendidas, el 10 % corresponde a coches totalmente eléctricos, siendo todos ellos de cambio automático; el 52 % de las unidades vendidas corresponde a coches híbridos, siendo de cambio manual el 6 % de ellos; del resto de unidades vendidas, tienen cambio automático el 53 % de ellos.
(a) (1 punto) Calcula la cantidad de coches con cambio automático vendidos en España en 2025.
(b) (1 punto) Elegido al azar un coche vendido en España en 2025 y sabiendo que tiene cambio automático, calcula la probabilidad de que sea híbrido.

(a) El 10% de 1.148.650 son 114865 coches totalmente eléctricos, todos ellos de cambio automático.
El 52% de 1.148.650 son 597298 coches híbridos. De estos el 6 % con cambio manual, lo cual implica $0.06 \cdot 597298 = 35837.88$ coches híbridos con cambio manual. Hay $597298 - 35837.88 = 561460.12$ coches híbridos con cambio automático.
El resto de coches ($100 - 10 - 52 = 38\%$) son $1148650 \cdot 0.38 = 436487$ coches. De estos tienen cambio automático $0.53 \cdot 436487 = 231338.11$ coches que no son ni híbridos ni eléctricos con cambio automático.
El total de coches con cambio automático son:

$$114865 + 561460.12 + 231338.11 = 907663.23$$

Sale una cifra decimal que no es coherente salvo que aceptemos que los porcentajes son aproximados y el resultado obtenido se debe redondear para decir que el total de coches con cambio automático vendidos en España en el año 2025 son 907663.

(b) En el apartado anterior hemos obtenido que 907663.23 coches vendidos tienen cambio automático y de ellos 561460.12 son híbridos, aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que sea híbrido el coche con cambio automático vendido vale $\frac{561460.12}{907663.23} = \frac{2444}{3951} \simeq 0.6186$.

(4A) Sea P el punto de corte de las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+t, \\ y = 0, \\ z = -t; \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = s, \\ y = -1+s, \\ z = 0. \end{cases}$$

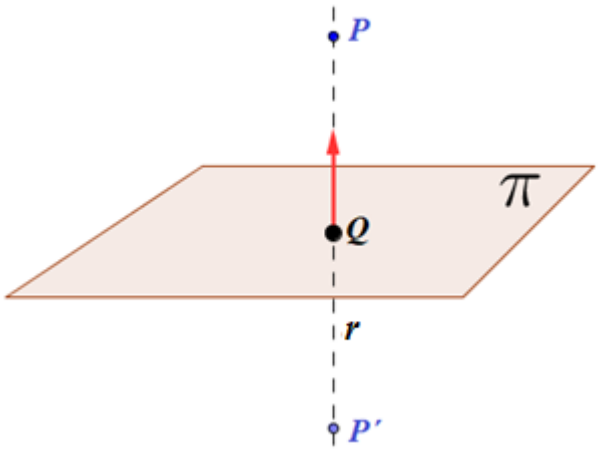
Calcula el punto P´ simétrico de P con respecto al plano de ecuación $2x+y-z=3$.

Hallamos el punto P de corte de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+t, \\ y = 0, \\ z = -t; \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x = s, \\ y = -1+s, \\ z = 0. \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} s = 1+t \\ -1+s = 0 \Rightarrow \\ 0 = -t \end{cases} \begin{cases} s = 1+t \\ s = 1 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 = 1+0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \Rightarrow \\ z = 0 \end{cases} \boxed{P(1,0,0)}$$

El punto de corte de las rectas es $P(1,0,0)$.

Hallamos el punto simétrico P´ del punto P respecto del plano determinando primero la recta r perpendicular al plano que pasa por P. Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.



$$\pi : 2x+y-z=3 \Rightarrow \vec{n} = (2,1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(1,0,0) \in r \\ \vec{v_r} = \vec{n} = (2,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta r y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} r : \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \\ \pi : 2x+y-z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1+2\lambda)+\lambda-(-\lambda)=3 \Rightarrow 2+4\lambda+\lambda+\lambda=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{6} \\ z = \frac{-1}{6} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right)}$$

El punto P´ es el resultado de sumarle al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = Q\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right) - (1,0,0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right)$$

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

El punto simétrico del punto P(1, 0, 0) respecto al plano tiene coordenadas $P'\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

(4B) Sea *r* la recta que pasa por el punto $P(1,7,4)$ y cuyo vector director es $\vec{v}=(6,3,-5)$ y sea $\pi \equiv 2x+y-3z=-13$.
(a) (1 punto) Calcula el punto de corte de la recta *r* y el plano π.
(b) (1 punto) Calcula el ángulo mínimo formado por la recta y el plano.

(a) Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l} P(1,7,4)\in r \\ \vec{v_r}=\vec{v}=(6,3,-5) \end{array}\right\} \Rightarrow r:\begin{cases} x=1+6\alpha \\ y=7+3\alpha\,;\ \alpha\in\mathbb{R} \\ z=4-5\alpha \end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=1+6\alpha \\ y=7+3\alpha \\ z=4-5\alpha \end{cases} \\ \pi \equiv 2x+y-3z=-13 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1+6\alpha)+7+3\alpha-3(4-5\alpha)=-13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+12\alpha+7+3\alpha-12+15\alpha=-13 \Rightarrow 30\alpha=-10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{-10}{30}=\frac{-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=1+6\dfrac{-1}{3}=-1 \\ y=7+3\dfrac{-1}{3}=6 \\ z=4-5\dfrac{-1}{3}=\dfrac{17}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q\left(-1.6,\frac{17}{3}\right)}$$

El punto de corte de la recta *r* y el plano π tiene coordenadas $Q\left(-1.6,\frac{17}{3}\right)$.

(b) Suponemos que recta y plano se cortan. De todas formas, al calcular el ángulo lo determinaremos. Hallamos el ángulo formado por el vector director de la recta y el vector normal del plano.

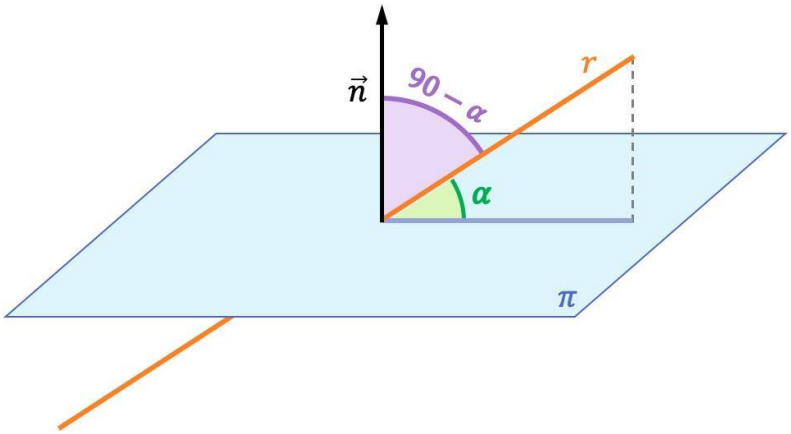
$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r}=(6,3,-5) \\ \pi \equiv 2x+y-3z=-13 \rightarrow \vec{n}=(2,1,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\vec{v_r},\vec{n}\right)=\frac{\vec{v_r}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{v_r}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\vec{v_r},\vec{n}\right)=\frac{(6,3,-5)(2,1,-3)}{\sqrt{6^2+3^2+(-5)^2}\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}}=\frac{12+3+15}{\sqrt{70}\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{5}}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\vec{v_r},\vec{n}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{5}}{7}\right)\simeq 16.6^{\circ}$$

El ángulo formado por el vector director de la recta y el vector normal del plano es de 16.6º.

El ángulo formado por recta y plano es de 90º – 16.6º = 73.4º.



(5A) Calcula la integral

$$\int \frac{x^2-2x+3}{x^2-x-2}dx$$

explicando los pasos realizados.

Para que la expresión racional de la integral sea más sencilla podemos hacer la división de polinomios o ajustar los valores. Hacemos un sencillo ajuste y luego aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{x^2-2x+3}{x^2-x-2}dx=\int \frac{x^2-x-2-x+5}{x^2-x-2}dx=\int \frac{x^2-x-2}{x^2-x-2}dx+\int \frac{-x+5}{x^2-x-2}dx=..$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^2-x-2=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2=x\\ \frac{1-3}{2}=-1=x\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

$$\frac{-x+5}{x^2-x-2}=\frac{-x+5}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$-x+5=A(x+1)+B(x-2)\Rightarrow\begin{cases}x=-1\to 6=-3B\to B=-2\\ x=2\to 3=3A\to A=1\end{cases}$$

$$\frac{-x+5}{x^2-x-2}=\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+1}$$

$$...=\int dx+\int \frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+1}dx=x+\int \frac{1}{x-2}dx-\int \frac{2}{x+1}dx=x+\ln|x-2|-2\ln|x+1|=$$

$$=x+\ln|x-2|-\ln(x+1)^2=\boxed{x+\ln\frac{|x-2|}{(x+1)^2}+K}$$

(5B)

(a) **(1 punto)** Dibuja el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = x^2 - \pi^2$ y la gráfica de la función $f(x) = \cos(x/2)$.

(b) **(1 punto)** Calcula el área del recinto del apartado anterior, escribiendo el resultado en función del número π.

(a) Hallamos los puntos de corte de las dos gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - \pi^2 \\ f(x) = \cos(x/2) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - \pi^2 = \cos(x/2) \Rightarrow (x-\pi)(x+\pi) = \cos(x/2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\pi \rightarrow \begin{cases} y = (-\pi)^2 - \pi^2 = 0 \\ f(-\pi) = \cos(-\pi/2) = 0 \end{cases} \\ x = \pi \rightarrow \begin{cases} y = \pi^2 - \pi^2 = 0 \\ f(\pi) = \cos(\pi/2) = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = -\pi} \\ \boxed{x = \pi} \end{cases}$$

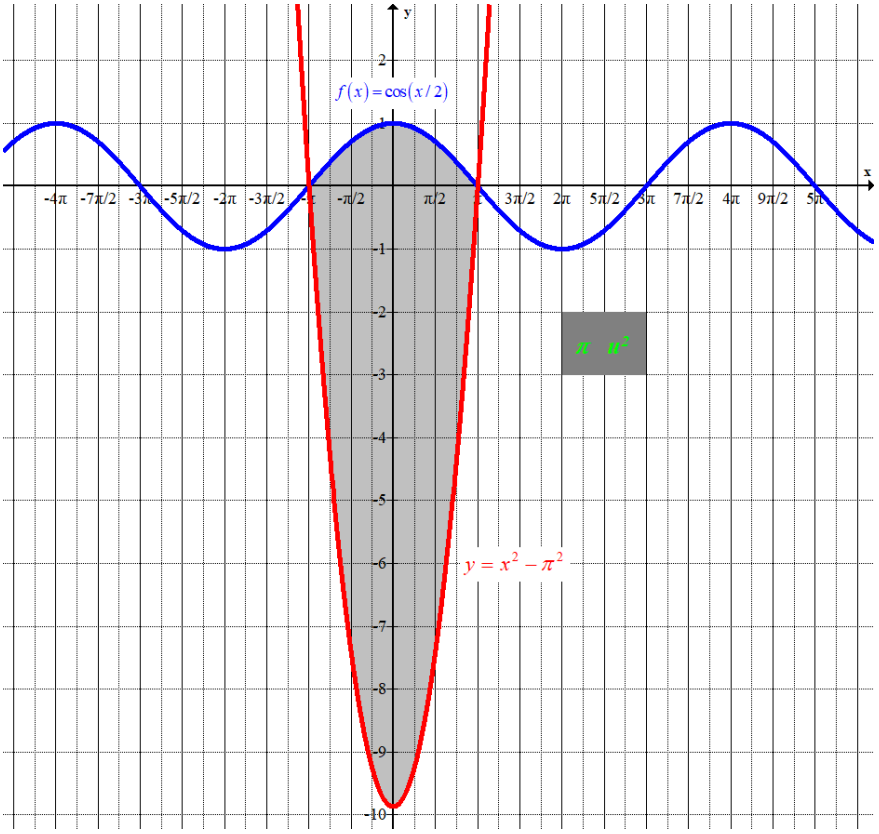
Hacemos una tabla de valores y dibujamos las dos gráficas y el recinto limitado por ellas.

$y = x^2 - \pi^2$

x	y
$-\pi$	0
0	$-\pi^2$
π	0

$f(x) = \cos(x/2)$

x	y
$-\pi$	0
0	1
π	0



(b) El área del recinto es el valor de la integral definida de –π a π de la diferencia de las dos funciones.

$$Área = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2) - (x^2 - \pi^2)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2) - x^2 + \pi^2 dx =$$

$$= \left[2sen\left(x/2\right) - \frac{x^3}{3} + \pi^2 x \right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \left[2sen\left(\pi/2\right) - \frac{\pi^3}{3} + \pi^2 \pi \right] - \left[2sen\left(-\pi/2\right) - \frac{\left(-\pi\right)^3}{3} + \pi^2 \left(-\pi\right) \right] =$$

$$= 2 - \frac{\pi^3}{3} + \pi^3 + 2 - \frac{\pi^3}{3} + \pi^3 = \boxed{4 + \frac{4\pi^3}{3} \simeq 45.34\ u^2}$$

PAU ordinaria 2026

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA 2026ko OHIKOA

MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD ORDINARIA 2026

MATEMÁTICAS II

Este examen tiene CINCO ejercicios, de 2 puntos cada uno.
En los ejercicios CUARTO y QUINTO solo hay que responder a UNA de las dos opciones. Si se responde a las dos, se corregirá la que aparezca en primer lugar en las hojas del examen.
Las respuestas deben escribirse con bolígrafo azul o negro. No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color. Solo se pueden utilizar bolígrafos o rotuladores para hacer gráficos.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

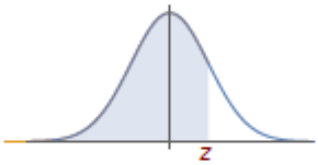
No olvides incluir el código en cada uno de los cuadernillos de hojas de examen.

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA 2026ko OHIKOA

MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD ORDINARIA 2026

MATEMÁTICAS II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

EHU

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA
2026ko OHIKOA

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
ORDINARIA 2026

MATEMATIKA II **MATEMÁTICAS II**

PRIMER EJERCICIO (2 puntos).

Se considera un gas ideal clásico en equilibrio térmico a temperatura T. El sistema viene descrito por la estadística de Maxwell-Boltzmann. A pesar de que el módulo de la velocidad de las moléculas del gas no es gaussiano, cada componente cartesiana de la velocidad sí lo es. Teniendo en cuenta la primera componente de la velocidad, su distribución normal es $N\left(0,\frac{k_B T}{m}\right)$, siendo k_B la constante de Boltzmann y m la masa de una molécula del gas considerado. En el caso del nitrógeno a T = 300 K, la desviación típica es $\frac{k_B T}{m} = 298\ m/s$.

(a) (0,75 puntos) Calcula la probabilidad de que el valor absoluto de la primera componente de la velocidad de una molécula de nitrógeno a una temperatura de 300 K sea inferior a 300 m/s.

(b) (0,75 puntos) Calcula la probabilidad de que la primera componente de la velocidad de una molécula de nitrógeno a una temperatura de 300 K esté comprendida entre -600 m/s y -300 m/s.

(c) (0,5 puntos) Un investigador estudia otro gas, argón, cuyas moléculas tienen mayor masa que las del nitrógeno y, por tanto, si se mantiene la temperatura T, la desviación típica correspondiente es menor. Sin realizar ningún cálculo numérico, responde razonadamente: ¿la probabilidad de que la primera componente de la velocidad de una molécula de argón tenga valor absoluto menor que 300 m/s será mayor, menor o igual que en el caso de una molécula de nitrógeno? Justifica tu respuesta utilizando la expresión de la desviación típica, $\sigma = \frac{k_B T}{m}$.

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos).

Dado $a \neq 0$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ay = 1, \\ x + ay + z = a, \\ (a-2)x + ay + (a-1)z = a + 2. \end{cases}.$$

(a) (1 punto) Encuentra un valor de *a* para el que el sistema dado tiene más de una solución.

(b) (1 punto) Encuentra todas las soluciones del sistema para el valor de *a* del apartado anterior.

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA
2026ko OHIKOA

MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
ORDINARIA 2026

MATEMÁTICAS II

TERCER EJERCICIO (2 puntos).

(a) (1 punto) Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y = x(2x-3)$ e $y = x(2-x)$.

(b) (1 punto) Calcula el área del recinto del apartado (a), y da el resultado como una fracción.

CUARTO EJERCICIO (2 puntos). Responde solo a una de las opciones.

(4A) Sean la recta $r \equiv x = y-1 = -z$, y el plano $\pi \equiv -x+2y+z+A=0$.

(a) (1,5 puntos) Discute la posición relativa de la recta *r* y el plano π en función de los valores del parámetro A.

(b) (0,5 puntos) Calcula la distancia de la recta *r* al plano π en función de los valores del parámetro A.

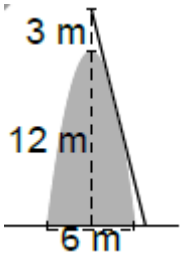
(4B) Sean los puntos A = (1, 1, 2) y B = (−1, 0, 3).

(a) (1,5 puntos) Encuentra la ecuación del plano π que cumple que A y B son simétricos con respecto a π.

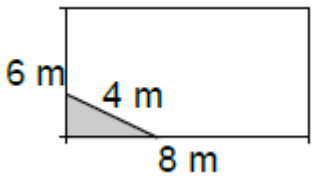
(b) (0,5 puntos) ¿Cuál es la distancia de A a π?

QUINTO EJERCICIO (2 puntos). Responde solo a una de las opciones.

(5A) Un montículo de hormigón tiene forma parabólica con una altura de 12 m y una base de 6 m, como se ve en la figura. Se quiere colocar una escalera apoyada en el montículo y de forma que su extremo superior quede 3 m por encima de la cúspide del montículo. ¿A qué distancia de la base del montículo debe colocarse el extremo inferior de la escalera?



(5B) En el suelo de una sala rectangular con paredes que miden 6 m y 8 m se quiere acotar una zona triangular colocando una barra recta de 4 m de longitud, como se ve en la figura. ¿Dónde debe colocarse la barra para que el área de la zona acotada sea máxima?



SOLUCIONES

PRIMER EJERCICIO (2 puntos).
Se considera un gas ideal clásico en equilibrio térmico a temperatura T. El sistema viene descrito por la estadística de Maxwell-Boltzmann. A pesar de que el módulo de la velocidad de las moléculas del gas no es gaussiano, cada componente cartesiana de la velocidad sí lo es. Teniendo en cuenta la primera componente de la velocidad, su distribución normal es $N\left(0,\frac{k_B T}{m}\right)$, siendo k_B la constante de Boltzmann y *m* la masa de una molécula del gas considerado. En el caso del nitrógeno a T = 300 K, la desviación típica es $\frac{k_B T}{m} = 298\ m/s$.

(a) (0,75 puntos) Calcula la probabilidad de que el valor absoluto de la primera componente de la velocidad de una molécula de nitrógeno a una temperatura de 300 K sea inferior a 300 m/s.

(b) (0,75 puntos) Calcula la probabilidad de que la primera componente de la velocidad de una molécula de nitrógeno a una temperatura de 300 K esté comprendida entre -600 m/s y -300 m/s.

(c) (0,5 puntos) Un investigador estudia otro gas, argón, cuyas moléculas tienen mayor masa que las del nitrógeno y, por tanto, si se mantiene la temperatura T, la desviación típica correspondiente es menor. Sin realizar ningún cálculo numérico, responde razonadamente: ¿la probabilidad de que la primera componente de la velocidad de una molécula de argón tenga valor absoluto menor que 300 m/s será mayor, menor o igual que en el caso de una molécula de nitrógeno? Justifica tu respuesta utilizando la expresión de la desviación típica, $\sigma = \frac{k_B T}{m}$.

Sea X = La primera componente de la velocidad de una molécula de nitrógeno a una temperatura de 300 K. X = N(0, 298).

(a) Debemos calcular $P(|X| < 300)$.

$$P(|X| < 300) = P(-300 < X < 300) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{-300-0}{298} < Z < \frac{300-0}{298}\right) =$$

$$= P(-1.01 < Z < 1.01) = P(Z < 1.01) - P(Z < -1.01) = P(Z < 1.01) - P(Z \geq 1.01) =$$

$$= P(Z < 1.01) - [1 - P(Z < 1.01)] = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 0.8438 - 1 + 0.8438 = \boxed{0.6876}$$

	0'00	0'01	
0'0	0'5000	0'5040	0'
0'1	0'5398	0'5438	0'
0'2	0'5793	0'5832	0'
0'3	0'6179	0'6217	0'
0'4	0'6554	0'6591	0'
0'5	0'6915	0'6950	0'
0'6	0'7257	0'7291	0'
0'7	0'7580	0'7611	0'
0'8	0'7881	0'7910	0'
0'9	0'8159	0'8186	0'
1'0	0'8413	0'8438	0'
1'1	0'8643	0'8665	0'

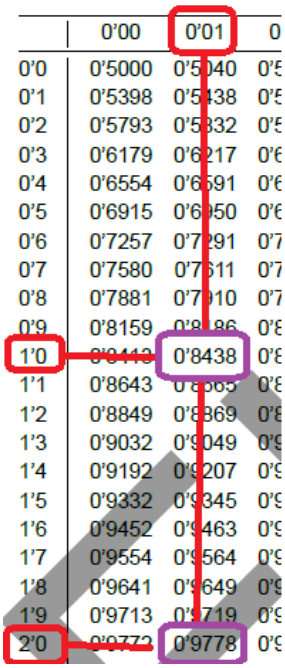
(b) Calculamos la probabilidad $P(-600 \leq X \leq -300)$.

$$P(-600 \le X \le -300) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{-600-0}{298} \le Z \le \frac{-300-0}{298}\right) =$$

$$= P(-2.01 \le Z \le -1.01) = P(Z \le -1.01) - P(Z \le -2.01) =$$

$$= P(Z \ge 1.01) - P(Z \ge 2.01) = 1 - P(Z \le 1.01) - \left[1 - P(Z \le 2.01)\right] =$$

$$= P(Z \le 2.01) - P(Z \le 1.01) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 0.9778 - 0.8438 = \boxed{0.134}$$



	0'00	0'01	0
0'0	0'5000	0'5040	0'5
0'1	0'5398	0'5438	0'5
0'2	0'5793	0'5832	0'5
0'3	0'6179	0'6217	0'6
0'4	0'6554	0'6591	0'6
0'5	0'6915	0'6950	0'6
0'6	0'7257	0'7291	0'7
0'7	0'7580	0'7611	0'7
0'8	0'7881	0'7910	0'7
0'9	0'8159	0'8186	0'8
1'0	0'8413	0'8438	0'8
1'1	0'8643	0'8665	0'8
1'2	0'8849	0'8869	0'8
1'3	0'9032	0'9049	0'9
1'4	0'9192	0'9207	0'9
1'5	0'9332	0'9345	0'9
1'6	0'9452	0'9463	0'9
1'7	0'9554	0'9564	0'9
1'8	0'9641	0'9649	0'9
1'9	0'9713	0'9719	0'9
2'0	0'9772	0'9778	0'9

(c) Las moléculas de argón tienen mayor masa que las del nitrógeno y, por tanto, si se mantiene la temperatura T, la desviación típica correspondiente es menor $\sigma = \frac{k_B T}{m}$. En el cálculo de $P(|X| < 300) = P(-300 < X < 300)$ al tipificar para la obtención de este valor dividimos 300 por la desviación típica $P\left(\frac{-300}{\sigma} < Z < \frac{300}{\sigma}\right)$. Al ser menor la desviación típica del argón el resultado de la división es mayor y el intervalo $\left(\frac{-300}{\sigma}, \frac{300}{\sigma}\right)$ tiene mayor amplitud y la probabilidad del argón será mayor que la de la molécula de nitrógeno.

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos).
Dado $a \neq 0$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ay = 1, \\ x + ay + z = a, \\ (a-2)x + ay + (a-1)z = a+2. \end{cases}$$

(a) (1 punto) Encuentra un valor de *a* para el que el sistema dado tiene más de una solución.
(b) (1 punto) Encuentra todas las soluciones del sistema para el valor de *a* del apartado anterior.

(a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & a & a-1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a-2 & a & a-1 & a+2 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & a & a-1 \end{vmatrix} = \cancel{a(a-1)} + a(a-2) - \cancel{a(a-1)} - a = a(a-2) - a =$$

$$= a(a-2-1) = a(a-3)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a(a-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ \boxed{a=3} \end{cases}$$

Como $a \neq 0$ nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $a \neq 3$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $a = 3$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila\,2^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,3ª + 2\cdot Fila\,1ª \\ \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 0 & -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3ª \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,3ª - 2\cdot Fila\,2ª \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3ª \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}}^{A/B} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \underbrace{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A} \quad 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: El sistema dado tiene más de una solución para $a = 3$.

(b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}}^{A/B} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \underbrace{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A} \quad 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 3y \quad = 1 \\ \boxed{z = 2} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 - 3y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = \lambda \quad ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}}$$

Las infinitas soluciones del sistema son $\begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$, para cualquier valor $\lambda \in \mathbb{R}$.

TERCER EJERCICIO (2 puntos).
(a) (1 punto) Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y=x(2x-3)$ e $y=x(2-x)$.
(b) (1 punto) Calcula el área del recinto del apartado (a), y da el resultado como una fracción.

(a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas.

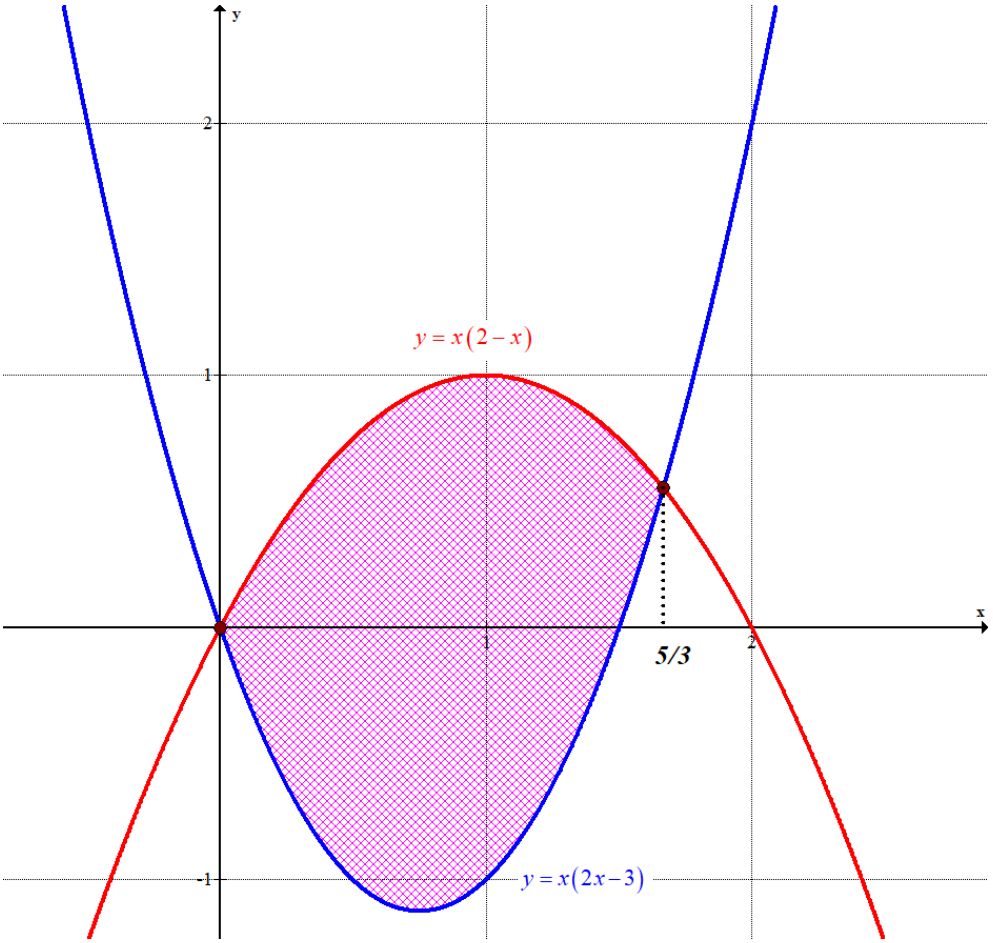
$$\left.\begin{matrix} y=x(2x-3) \\ y=x(2-x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x(2x-3)=x(2-x) \Rightarrow x(2x-3)-x(2-x)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(2x-3-2+x)=0 \Rightarrow x(3x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 3x-5=0 \rightarrow 3x=5 \rightarrow \boxed{x=\frac{5}{3}} \end{cases}$$

Obtenemos una tabla de valores de cada parábola y dibujamos el recinto limitado por ellas.

x	$y=x(2x-3)$
0	0
1	–1
5/3	5/9
2	2

x	$y=x(2-x)$
0	0
1	1
5/3	5/9
2	0



(b) Contando cuadrados de 1 unidad cuadrada el área del recinto dibujado debe tener un valor entre 2 y 3 unidades cuadradas. Hallamos su valor exacto como la integral definida de 0 a 5/3 de la diferencia de las dos funciones.

$$Área = \int_0^{5/3} 2x - x^2 - \left(2x^2 - 3x\right) dx = \int_0^{5/3} 2x - x^2 - 2x^2 + 3x dx = \int_0^{5/3} -3x^2 + 5x dx =$$

$$= \left[-x^3 + \frac{5x^2}{2} \right]_0^{5/3} = \left[-\left(\frac{5}{3}\right)^3 + \frac{5\left(\frac{5}{3}\right)^2}{2} \right] - \left[-0^3 + \frac{5 \cdot 0^2}{2} \right] = \frac{-125}{27} + \frac{125}{18} = \boxed{\frac{125}{54} \simeq 2.315\ u^2}$$

El área del recinto tiene un valor aproximado de 2.315 unidades cuadradas.

(4A) Sean la recta $r \equiv x = y-1 = -z$, y el plano $\pi \equiv -x+2y+z+A=0$.

(a) (1,5 puntos) Discute la posición relativa de la recta *r* y el plano π en función de los valores del parámetro A.

(b) (0,5 puntos) Calcula la distancia de la recta *r* al plano π en función de los valores del parámetro A.

(a) Determinamos un vector director y un punto de la recta, y un vector normal del plano.

$$\pi \equiv -x+2y+z+A=0 \Rightarrow \vec{n}=(-1,2,1)$$

$$r \equiv \frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-0}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,1,0) \\ \vec{v_r}=(1,1,-1) \end{cases}$$

Comprobamos si el vector director y el vector normal son perpendiculares.

$$\left.\begin{matrix} \vec{n}=(-1,2,1) \\ \vec{v_r}=(1,1,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{v_r}=(-1,2,1)(1,1,-1)=-1+2-1=0$$

Los vectores son perpendiculares y la recta es paralela o está contenida en el plano.
Para que la recta esté contenida en el plano el punto P_r de la recta debe pertenecer al plano.

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv -x+2y+z+A=0 \\ P_r(0,1,0) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow -0+2+0+A=0 \Rightarrow \boxed{A=-2}$$

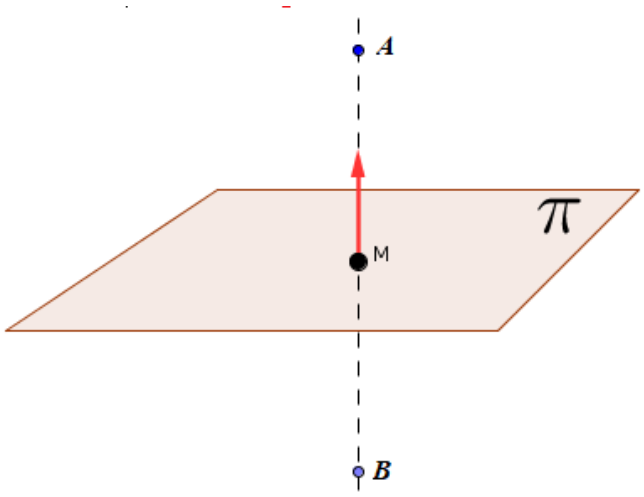
Para $A=-2$ la recta está contenida en el plano y para $A \neq -2$ la recta es paralela al plano.

(b) Para $A=-2$ la recta está contenida en el plano y la distancia de la recta al plano es 0.
Para $A \neq -2$ calculamos la distancia de la recta al plano como la distancia del punto P_r de la recta al plano.

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv -x+2y+z+A=0 \\ P_r(0,1,0) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|-0+2+0+A|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}=\boxed{\frac{|A+2|}{\sqrt{6}}}$$

(4B) Sean los puntos A = (1, 1, 2) y B = (−1, 0, 3).
(a) (1,5 puntos) Encuentra la ecuación del plano π que cumple que A y B son simétricos con respecto a π.
(b) (0,5 puntos) ¿Cuál es la distancia de A a π?

(a) Hacemos un dibujo de la situación planteada.



El punto medio M del segmento AB pertenece al plano.

$$M=\frac{(1,1,2)+(-1,0,3)}{2}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$$

El vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}=(-1,0,3)-(1,1,2)=(-2,-1,1)$$

El plano que buscamos contiene el punto M y tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(-2,-1,1)\\ M\left(0,\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi:-2x-y+z+D=0\\ M\left(0,\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow -2\cdot 0-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+D=0\Rightarrow$$

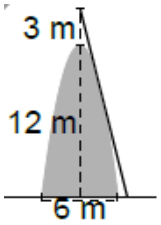
$$\Rightarrow D=-2\Rightarrow\pi:-2x-y+z-2=0\Rightarrow\boxed{\pi:2x+y-z+2=0}$$

El plano que cumple lo pedido tiene ecuación $\pi:2x+y-z+2=0$.

(b) La distancia del punto A al plano π es la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$d(A,\pi)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{2}=\frac{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}\simeq 1.22\ u}$$

(5A) Un montículo de hormigón tiene forma parabólica con una altura de 12 m y una base de 6 m, como se ve en la figura. Se quiere colocar una escalera apoyada en el montículo y de forma que su extremo superior quede 3 m por encima de la cúspide del montículo. ¿A qué distancia de la base del montículo debe colocarse el extremo inferior de la escalera?



Situamos el origen de coordenadas en el punto de encuentro de la altura con la base y hallamos la ecuación de la parábola del montículo.
El vértice de la parábola tiene coordenadas (0, 12) y los puntos de corte con el eje de abscisas son A(-3, 0) y B(3, 0).

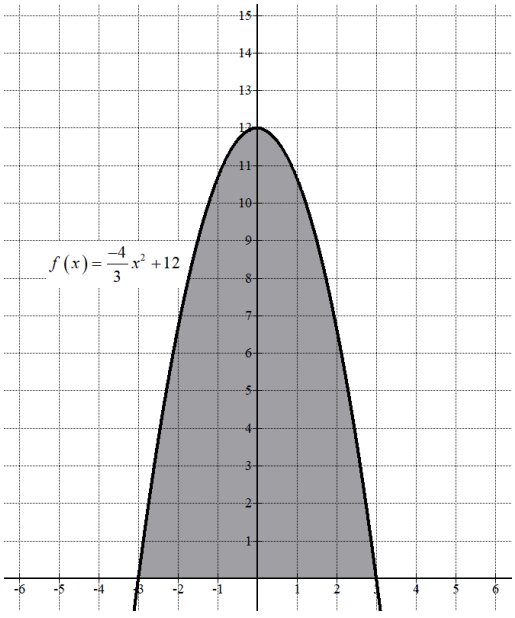
$$\left.\begin{matrix} f(x)=ax^2+bx+c \\ f(0)=12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0+c=12 \rightarrow c=12 \Rightarrow f(x)=ax^2+bx+12$$

$$\left.\begin{matrix} f(3)=0 \\ f(-3)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 9a+3b+12=0 \\ 9a-3b+12=0 \end{cases}$$

$$\overline{18a \quad +24=0} \Rightarrow \boxed{a=\frac{-24}{18}=\frac{-4}{3}} \Rightarrow 9\frac{-4}{3}+3b+12=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12+3b+12=0 \Rightarrow 3b=0 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

La parábola tiene ecuación $f(x)=\frac{-4}{3}x^2+12$.



La escalera debe ser tangente a la curva y pasar por el punto C(0, 15).
Hallamos la ecuación de la recta tangente a la parábola en $x=a$.

$$f(x)=\frac{-4}{3}x^2+12 \Rightarrow f'(x)=\frac{-8}{3}x$$

$$y-f(a)=f'(a)(x-a) \Rightarrow y-\left(\frac{-4}{3}a^2+12\right)=\frac{-8a}{3}(x-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+\frac{4}{3}a^2-12=\frac{-8a}{3}x+\frac{8a^2}{3} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-8a}{3}x+\frac{4}{3}a^2+12}$$

La recta tangente debe pasar por el punto C(0, 15).

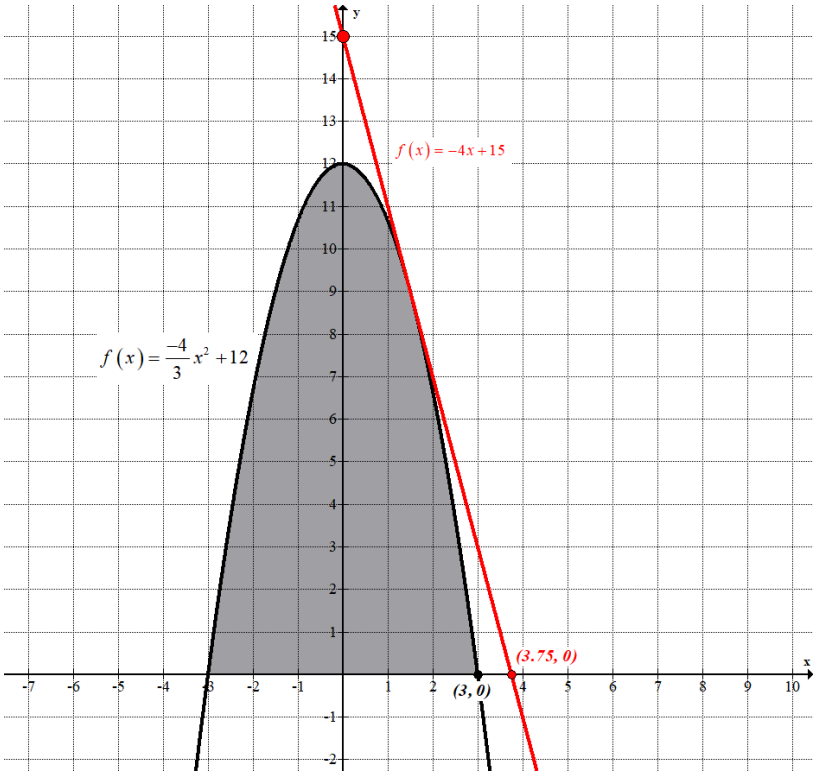
$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{-8a}{3}x+\frac{4}{3}a^2+12 \\ x=0 \rightarrow y=15 \end{array}\right\} \Rightarrow 15=\frac{-8a}{3}\cdot 0+\frac{4}{3}a^2+12 \Rightarrow 3=\frac{4}{3}a^2 \Rightarrow 9=4a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{9}{4} \Rightarrow a=\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm\frac{3}{2} \Rightarrow \{a>0\} \Rightarrow a=\frac{3}{2} \rightarrow \boxed{y=\frac{-8}{3}\cdot\frac{3}{2}x+\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2+12=-4x+15}$$

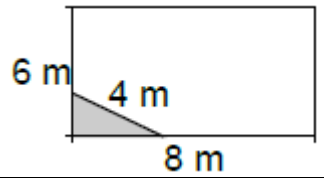
La ecuación de la recta tangente (escalera) es $y=-4x+15$.
Hallamos el punto de corte de la tangente con el eje X.

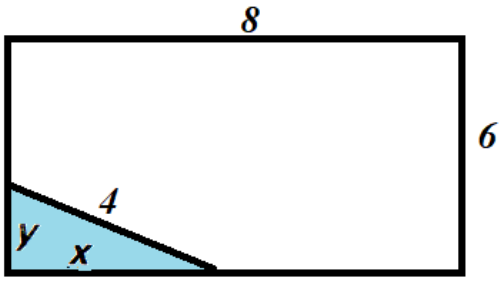
$$\left.\begin{array}{l} y=-4x+15 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -4x+15=0 \Rightarrow 4x=15 \Rightarrow \boxed{x=\frac{15}{4}=3.75}$$

La distancia del punto de apoyo de la escalera al extremo inferior del montículo es 3.75 – 3 = 0.75 metros.



(5B) En el suelo de una sala rectangular con paredes que miden 6 m y 8 m se quiere acotar una zona triangular colocando una barra recta de 4 m de longitud, como se ve en la figura. ¿Dónde debe colocarse la barra para que el área de la zona acotada sea máxima?





El recinto que delimita la barra de 4 metros es un triángulo rectángulo de catetos x e y, Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$x^2+y^2=4^2\rightarrow y^2=16-x^2\Rightarrow \boxed{y=\sqrt{16-x^2}}$$

Obtenemos la expresión del área delimitada por la barra.

$$\left.\begin{matrix}A(x,y)=\dfrac{xy}{2}\\ y=\sqrt{16-x^2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow A(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2};\ x\in[0,4]$$

Derivamos la función y averiguamos cuando se anula.

$$A(x)=\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}\Rightarrow A'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}=\frac{\sqrt{16-x^2}}{2}-\frac{x^2}{2\sqrt{16-x^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(x)=\frac{\left(\sqrt{16-x^2}\right)^2-x^2}{2\sqrt{16-x^2}}=\frac{16-x^2-x^2}{2\sqrt{16-x^2}}=\frac{16-2x^2}{2\sqrt{16-x^2}}=\frac{8-x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$A'(x)=0\Rightarrow\frac{8-x^2}{\sqrt{16-x^2}}=0\Rightarrow 8-x^2=0\Rightarrow x^2=8\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\simeq 2.83\in(0,4)}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=2\sqrt{2}\simeq 2.83$.

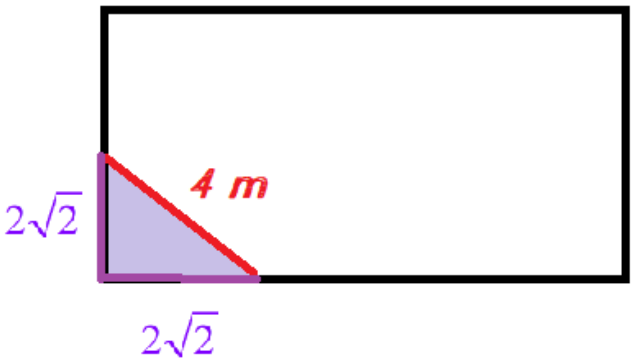
- En el intervalo $\left[0,2\sqrt{2}\right)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $A'(1)=\dfrac{8-1^2}{\sqrt{16-1^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{15}}>0$. La función crece en $\left[0,2\sqrt{2}\right)$.

- En el intervalo $\left(2\sqrt{2},4\right]$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $A'(3)=\dfrac{8-3^2}{\sqrt{16-3^2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{7}}<0$. La función decrece en $\left(2\sqrt{2},4\right]$.

La función área tiene un punto crítico en $x=2\sqrt{2}\simeq 2.83$, crece antes y decrece después de $x=2\sqrt{2}\simeq 2.83$. La función tiene un máximo relativo en dicho valor.

Para $x=2\sqrt{2}\simeq 2.83$ hallamos el valor de y: $y=\sqrt{16-\left(\sqrt{8}\right)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

La barra de 4 metros debe apoyarse a 2.83 metros de la esquina de la sala.



PAU extraordinaria 2025

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA — PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2025eko EZOHIKOA — EXTRAORDINARIA 2025

MATEMATIKA II — **MATEMÁTICAS II**

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

Este examen tiene CINCO ejercicios, de 2,5 puntos cada uno. EL PRIMER EJERCICIO ES OBLIGATORIO y de los otros cuatro debes elegir TRES.
En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
Las respuestas deben escribirse con bolígrafo azul o negro. No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA

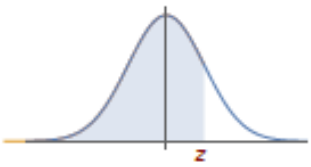
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2025eko OHIKOA

ORDINARIA 2025

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2025eko EZOHIKOA

EXTRAORDINARIA 2025

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos). Según estimación de cifras de cáncer en 2024, el número de cánceres diagnosticados en España durante el año 2024 alcanzará los 286.664 casos, lo que supone un ligero incremento del 2,65 % respecto a 2023 con 279.260 casos, según el informe "Las cifras del cáncer en España 2024", elaborado por la Sociedad Española de Oncología Médica (SEOM) y Red Española de Registros de Cáncer (REDECAN).
La estimación por edad y sexo es la siguiente: 5,56 % menores de 45 años, de los cuales el 62,86 % son mujeres; 59,77 % mayores de 65 años, de los cuales el 39,11 % son mujeres; del resto, el 42,25 % son mujeres.

(a) **(0,75 puntos)** Seleccionada al azar una persona que ha tenido cáncer en 2024, calcula la probabilidad de que sea mujer.
(b) **(0,75 puntos)** Calcula el número probable de mujeres que han tenido cáncer en 2024 que son mayores de 65 años.
(c) **(0,75 puntos)** Seleccionada al azar una mujer que ha tenido cáncer en 2024, calcula la probabilidad de que tenga 65 años o menos.
(d) **(0,25 puntos)** Seleccionada al azar una persona que ha tenido cáncer en 2024, ¿qué es más probable, que sea mujer o que no lo sea? Razona tu respuesta teniendo en cuenta únicamente los resultados anteriores.

SEGUNDO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a uno** de los dos apartados.

(2A) Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+3z=3+\alpha y \\ z+\alpha x+y-2=0 \\ x+2z-y=1 \end{cases}$$

(a) **(1,5 puntos)** Discute la existencia de solución según los valores del parámetro α.
(b) **(1 punto)** Si es posible, resuélvelo en el caso $\alpha=0$.

(2B) Sea α un número real y

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) **(0,5 puntos)** Encuentra los valores del parámetro α para los que existe la matriz inversa de A.
(b) **(2 puntos)** En el caso particular en que $\alpha=0$ calcula, si es posible, A^{-1} y A^{2025}.

TERCER EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a uno** de los dos apartados.

(3A) (2,5 puntos) Halla el punto P' simétrico de $P(4,-3,0)$ respecto de la recta *r* que pasa por los puntos $A(-2,0,1)$ y $B(-2,-1,0)$.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2025eko EZOHIKOA

EXTRAORDINARIA 2025

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

(3B) Sean **π** el plano que pasa por los puntos $A(2,3,4)$, $B(3,-1,-2)$, $C(5,-1,2)$ y *r* la recta que pasa por los puntos $D(6,-5,-4)$, $E(7,1,4)$.

(a) **(1,5 puntos)** Calcula el ángulo entre el plano π y la recta *r*, expresando el resultado en grados, minutos y segundos.

(b) **(1 punto)** En caso de que *r* y π se corten, calcula el punto de intersección. En caso contrario, calcula la distancia entre la recta *r* y el plano π.

CUARTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a uno** de los dos apartados.

(4A) Sea $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x-4}$.

(a) **(1 punto)** Encuentra las asíntotas de la función *f*.

(b) **(1 punto)** Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*.

(c) **(0.5 puntos)** Calcula la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=0$.

(4B) Nos han pedido que hagamos un estudio para la fabricación de tazas cilíndricas. Como condición han impuesto que deben tener una capacidad de 216π cm^3. La empresa quiere que la fabricación sea lo más económica posible.

(a) **(1,5 puntos)** Calcula las especificaciones de medidas que deben enviar a fabricación para lograr el objetivo.

(b) **(1 punto)** Las tazas irán coloreadas por el exterior con un material cuyo coste es de 3 €/m^2. Calcula el coste de imprimación de una taza.

QUINTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a uno** de los dos apartados.

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 puntos)** $\int (2x+5)e^{2x}dx$.

(b) **(1,25 puntos)** $\displaystyle\int \frac{x+7}{x^2+10x+25}dx$.

(5B) Se consideran la parábola de ecuación $y=x^2-3x$ y la recta $x+y=8$.

(a) **(1,25 puntos)** Dibuja el recinto limitado por esas dos curvas.

(b) **(1,25 puntos)** Calcula el área del trozo de ese recinto que queda en el primer cuadrante.

Soluciones

EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos). Según estimación de cifras de cáncer en 2024, el número de cánceres diagnosticados en España durante el año 2024 alcanzará los 286.664 casos, lo que supone un ligero incremento del 2,65 % respecto a 2023 con 279.260 casos, según el informe "Las cifras del cáncer en España 2024", elaborado por la Sociedad Española de Oncología Médica (SEOM) y Red Española de Registros de Cáncer (REDECAN).
La estimación por edad y sexo es la siguiente: 5,56 % menores de 45 años, de los cuales el 62,86 % son mujeres; 59,77 % mayores de 65 años, de los cuales el 39,11 % son mujeres; del resto, el 42,25 % son mujeres.

(a) **(0,75 puntos)** Seleccionada al azar una persona que ha tenido cáncer en 2024, calcula la probabilidad de que sea mujer.

(b) **(0,75 puntos)** Calcula el número probable de mujeres que han tenido cáncer en 2024 que son mayores de 65 años.

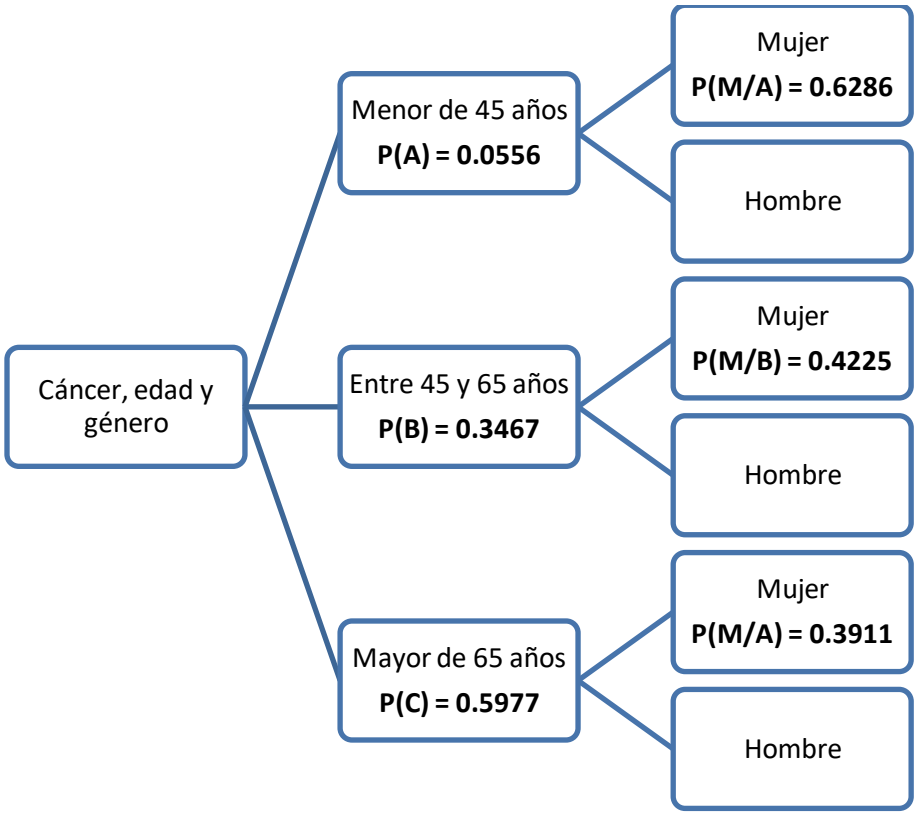
(c) **(0,75 puntos)** Seleccionada al azar una mujer que ha tenido cáncer en 2024, calcula la probabilidad de que tenga 65 años o menos.

(d) **(0,25 puntos)** Seleccionada al azar una persona que ha tenido cáncer en 2024, ¿qué es más probable, que sea mujer o que no lo sea? Razona tu respuesta teniendo en cuenta únicamente los resultados anteriores.

Llamamos A = "Ser menor de 45 años", B = "Edad entre 45 y 65 años", C = "Mayor de 65 años" y M = "Ser mujer".

Realizamos un diagrama de árbol.

Nos dicen que $P(A)=0.056$, $P(C)=0.5977$, $P(B)=1-0.0556-0.5977=0.3467$, $P(M/A)=0.6286$, $P(M/B)=0.4225$ y $P(M/C)=0.3911$.



(a) Debemos calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(A)P(M/A) + P(B)P(M/B) + P(C)P(M/C) =$$

$$= 0.0556 \cdot 0.6286 + 0.3467 \cdot 0.4225 + 0.5977 \cdot 0.3911 \simeq \boxed{0.4152}$$

(b) Calculamos $P(M \cap C)$.

$$P(M \cap C) = P(C)P(M/C) = 0.5977 \cdot 0.3911 = 0.23376047$$

El número de cánceres diagnosticados en España durante el año 2024 alcanzará los 286.664 casos. El Número esperado de mujeres mayores de 65 años será $0.23376047 \cdot 286.664 = 67010.71$ mujeres.
Aproximadamente serán 67011 las mujeres mayores de 65 años con cáncer en el año 2024.

(c) Calculamos la probabilidad de que elegida al azar una mujer que padece cáncer esta sea mayor de 65 años: $P(C/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{0.2338}{0.4152} \simeq \boxed{0.5631}$$

La probabilidad de que al elegir una mujer con cáncer esta tenga 65 años o menos vale $1 - 0.5631 = 0.4369$.

(d) En el apartado (a) hemos visto que la probabilidad de que una persona enferma de cáncer sea mujer tiene un valor de 0.4152, menor que 0.5, por lo que la probabilidad de que un hombre padezca cáncer es 1 – 0.4152 = 0.5848.
Como 0.4152 < 0.5848 podemos afirmar que es más probable que un hombre padezca cáncer.

(2A) Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+3z=3+\alpha y \\ z+\alpha x+y-2=0 \\ x+2z-y=1 \end{cases}$$

(a) **(1,5 puntos)** Discute la existencia de solución según los valores del parámetro α.
(b) **(1 punto)** Si es posible, resuélvelo en el caso $\alpha=0$.

(a) Ponemos orden en el sistema de ecuaciones planteado.

$$\begin{cases} x+3z=3+\alpha y \\ z+\alpha x+y-2=0 \\ x+2z-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-\alpha y+3z=3 \\ \alpha x+y+z=2 \\ x-y+2z=1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 3 & 3 \\ \alpha & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2-\alpha-3\alpha-3+2\alpha^2+1=2\alpha^2-4\alpha$$

$$|A|=0\Rightarrow 2\alpha^2-4\alpha=0\Rightarrow 2\alpha(\alpha-2)=0\Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha=0} \\ \alpha-2=0\rightarrow \boxed{\alpha=2} \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha\neq 0$ y $\alpha\neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha=0$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3^a-Fila\,1^a & & & \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & -3 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -2\rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3^a+Fila\,2^a & & & \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 & 0 & 3}^{A/B} & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, siendo menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $\alpha = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} Fila\,2^{a} - 2 \cdot Fila\,1^{a} \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -6 & -6 \\ \hline 0 & 5 & -5 & -4 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^{a} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} Fila\,3^{a} - Fila\,1^{a} \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -3 \\ \hline 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{a} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 5 \cdot Fila\,3^{a} - Fila\,2^{a} \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & 5 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{a} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 & -2 & 3}^{A} & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -4 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & -6 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2 y la matriz A/B tiene rango 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 2$ el sistema es compatible determinado, si $\alpha = 0$ el sistema es compatible indeterminado y si $\alpha = 2$ el sistema es incompatible.

(b) Para $\alpha = 0$ el sistema es compatible indeterminado (caso 2), tiene infinitas soluciones. Resolvemos el sistema partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1 & 0 & 3}^{A} & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3z = 3 \\ y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 3 - 3z \\ y = 2 - z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$, para cualquier valor $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2B) Sea α un número real y

$$A=\begin{pmatrix}1 & \alpha & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & \alpha & 1\end{pmatrix}.$$

(a) **(0,5 puntos)** Encuentra los valores del parámetro α para los que existe la matriz inversa de A.
(b) **(2 puntos)** En el caso particular en que $\alpha=0$ calcula, si es posible, A^{-1} y A^{2025}.

(a) Para que la matriz A tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & \alpha & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & \alpha & 1\end{vmatrix}=1-\alpha$$

$$|A|=0\Rightarrow 1-\alpha=0\Rightarrow \boxed{\alpha=1}$$

Cuando $\alpha\neq 1$ el determinante de A es distinto de cero y la matriz A tiene inversa.

(b) Si $\alpha=0$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Esta matriz tiene inversa. La calculamos.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

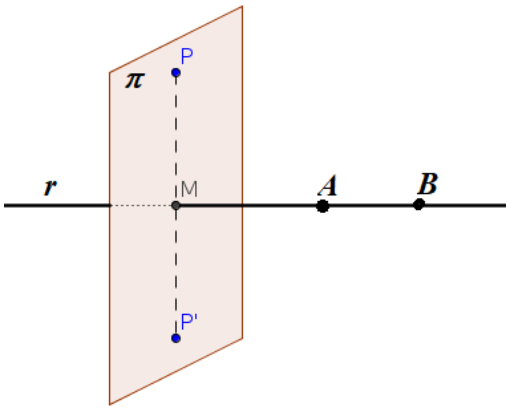
Calculamos las primeras potencias de la matriz A en busca de una regularidad.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1+1\\ 0 & 1 & 1+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1+2\\ 0 & 1 & 1+2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Observamos que $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & n\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, por lo que $A^{2025}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2025\\ 0 & 1 & 2025\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(3A) (2,5 puntos) Halla el punto P' simétrico de $P(4,-3,0)$ respecto de la recta r que pasa por los puntos $A(-2,0,1)$ y $B(-2,-1,0)$.



Hallamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

$$\left.\begin{matrix} A(-2,0,1) \\ B(-2,-1,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2,-1,0)-(-2,0,1) = (0,-1,-1)$$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{BA} = (0,1,1) \\ A(-2,0,1) \in r \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{r: \begin{cases} x=-2 \\ y=\lambda \quad ;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=1+\lambda \end{cases}}$$

Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta que pasa por el punto P. Al ser el plano perpendicular a la recta el vector director de la recta es el vector normal del plano.

$$\left.\begin{matrix} \vec{n} = \overrightarrow{v_r} = (0,1,1) \\ P(4,-3,0) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \pi: y+z+D=0 \\ P(4,-3,0) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow -3+0+D=0 \Rightarrow D=3 \Rightarrow \boxed{\pi: y+z+3=0}$$

Hallamos el punto M de intersección del plano $\pi: y+z+3=0$ y la recta r.

$$\left.\begin{matrix} r \equiv \begin{cases} x=-2 \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \\ \pi: y+z+3=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda+1+\lambda+3=0 \Rightarrow 2\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda=-2 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \\ z=1-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(-2,-2,-1)}$$

Obtenemos el punto P´ sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\left.\begin{matrix} M(-2,-2,-1) \\ P(4,-3,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PM} = (-2,-2,-1)-(4,-3,0) = (-6,1,-1)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = (-2,-2,-1)+(-6,1,-1) = (-8,-1,-2)$$

El punto P' simétrico de $P(4,-3,0)$ respecto de la recta r que pasa por los puntos $A(-2,0,1)$ y $B(-2,-1,0)$ tiene coordenadas $P'(-8,-1,-2)$.

(3B) Sean π el plano que pasa por los puntos $A(2,3,4)$, $B(3,-1,-2)$, $C(5,-1,2)$ y r la recta que pasa por los puntos $D(6,-5,-4)$, $E(7,1,4)$.

(a) (1,5 puntos) Calcula el ángulo entre el plano π y la recta r, expresando el resultado en grados, minutos y segundos.

(b) (1 punto) En caso de que r y π se corten, calcula el punto de intersección. En caso contrario, calcula la distancia entre la recta r y el plano π.

(a) Hallamos la ecuación del plano que contiene los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{l} A(2,3,4)\in\pi \\ B(3,-1,-2)\in\pi \\ C(5,-1,2)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3,-1,-2)-(2,3,4)=(1,-4,-6) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(5,-1,2)-(2,3,4)=(3,-4,-2) \\ C(5,-1,2)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-5 & y+1 & z-2 \\ 1 & -4 & -6 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x-40-18y-18-4z+8+12z-24+2y+2-24x+120=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16x-16y+8z+48=0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x+2y-z-6=0}$$

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos D y E.

$$\left.\begin{array}{l} D(6,-5,-4)\in r \\ E(7,1,4)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{v_r}=\overrightarrow{DE}=(7,1,4)-(6,-5,-4)=(1,6,8) \\ E(7,1,4)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x=7+\alpha \\ y=1+6\alpha \\ z=4+8\alpha \end{cases}$$

Determinamos el ángulo que forman el vector normal del plano con el vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 2x+2y-z-6=0 \rightarrow \vec{n}=(2,2,-1) \\ \vec{v_r}=(1,6,8) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\vec{n},\vec{v_r}\right)=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{v_r}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{v_r}\right|}=$$

$$=\frac{(2,2,-1)(1,6,8)}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+6^2+8^2}}=\frac{2+12-8}{\sqrt{9}\sqrt{101}}=\frac{6}{3\sqrt{101}}=\frac{2}{\sqrt{101}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\vec{n},\vec{v_r}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{101}}\right)=\boxed{78^o\ 31'\ 16''}$$

El ángulo que forma la recta con el plano es de 90º – 78º31´16´´ = 11º28´44´´.

(b) La recta y el plano forman un ángulo aproximado de 11º, por lo que no pueden ser paralelos. La recta debe cortar al plano en un punto Q. Determinamos las coordenadas de este punto resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=7+\alpha \\ y=1+6\alpha \\ z=4+8\alpha \end{cases} \\ \pi: 2x+2y-z-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(7+\alpha)+2(1+6\alpha)-4-8\alpha-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14+2\alpha+2+12\alpha-4-8\alpha-6=0 \Rightarrow 6+6\alpha=0 \Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=7-1=6 \\ y=1-6=-5 \\ z=4-8=-4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(6,-5,-4)}$$

El punto Q donde la recta corta al plano tiene coordenadas $Q(6,-5,-4)$.

(4A) Sea $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x-4}$.
(a) **(1 punto)** Encuentra las asíntotas de la función *f*.
(b) **(1 punto)** Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*.
(c) **(0.5 puntos)** Calcula la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=0$.

(a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(-4)}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+5}{2}=\boxed{4=x}\\ \dfrac{3-5}{2}=\boxed{-1=x}\end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,4\}$.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿$x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2-3x-4}=\frac{-1}{(-1)^2-3(-1)-4}=\frac{-1}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical.

¿$x=4$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x}{x^2-3x-4}=\frac{4}{4^2-3\cdot 4-4}=\frac{4}{0}=\infty$$

$x=4$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}==\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Como la función tiene asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.

(b) Buscamos los valores que anulan la derivada de la función (puntos críticos).

$$f(x)=\frac{x}{x^2-3x-4}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-3x-4)-(2x-3)x}{(x^2-3x-4)^2}=\frac{x^2-3x-4-2x^2+3x}{(x^2-3x-4)^2}=$$

$$=\frac{-x^2-4}{(x^2-3x-4)^2}=\frac{-(x^2+4)}{(x^2-3x-4)^2}$$

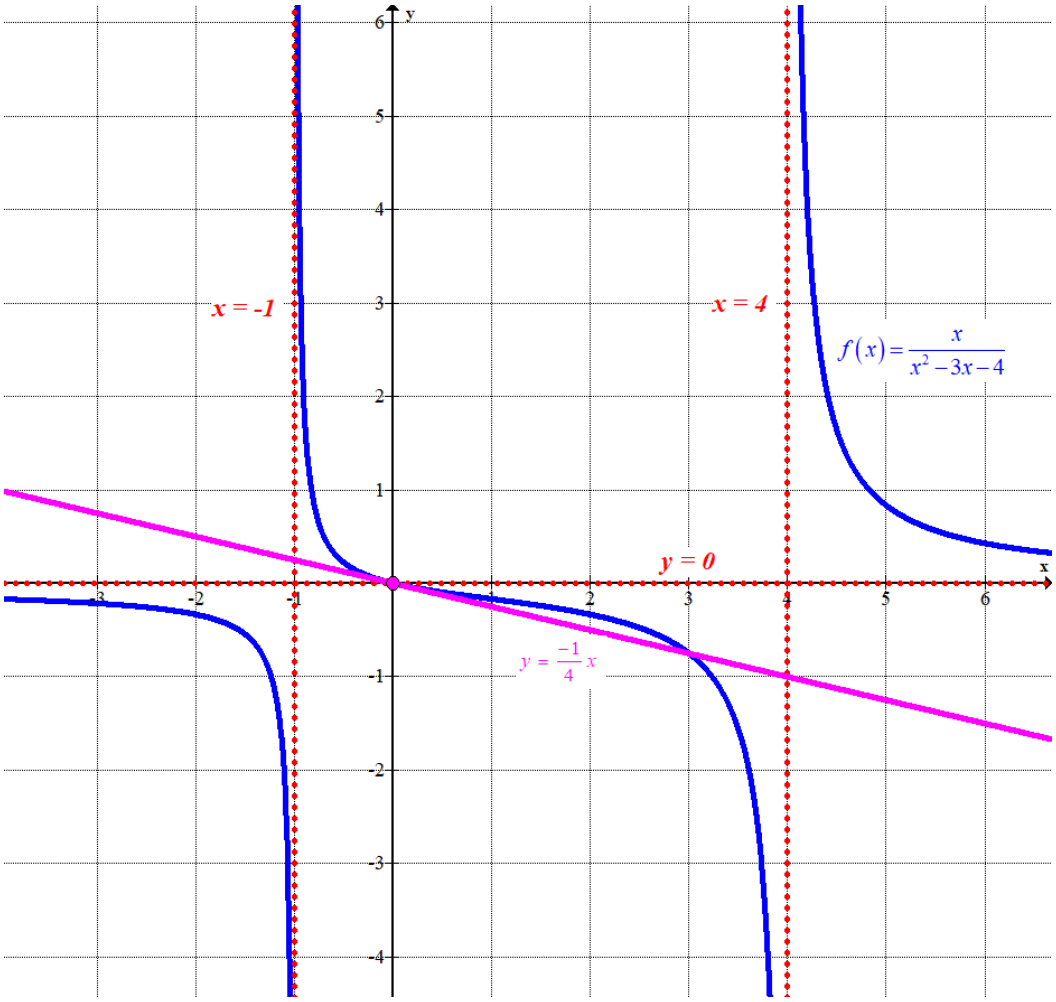
$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-(x^2+4)}{(x^2-3x-4)^2}=0\Rightarrow x^2+4=0\Rightarrow x=\sqrt{-4}=\text{No existe}$$

La derivada nunca se anula. Como $f'(x)=\dfrac{-\left(x^2+4\right)}{\left(x^2-3x-4\right)^2}$ vemos que el denominador siempre es positivo y el numerador siempre negativo, por lo que la derivada siempre es negativa y la función decrece en todo su dominio $\mathbb{R}-\{-1,4\}$.

c) La recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x=0$ tiene ecuación $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

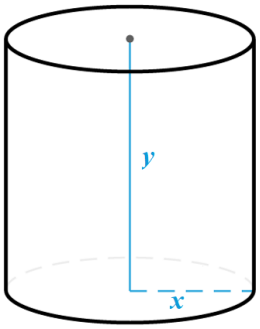
$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{0}{0^2-3\cdot 0-4}=0 \\ f'(0)=\dfrac{-\left(0^2+4\right)}{\left(0^2-3\cdot 0-4\right)^2}=-\dfrac{1}{4} \\ y-f(0)=f'(0)(x-0) \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=\frac{-1}{4}x \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{4}x}$$

La recta tangente tiene ecuación $y=\dfrac{-1}{4}x$.



(4B) Nos han pedido que hagamos un estudio para la fabricación de tazas cilíndricas. Como condición han impuesto que deben tener una capacidad de 216π cm^3. La empresa quiere que la fabricación sea lo más económica posible.
(a) **(1,5 puntos)** Calcula las especificaciones de medidas que deben enviar a fabricación para lograr el objetivo.
(b) **(1 punto)** Las tazas irán coloreadas por el exterior con un material cuyo coste es de 3 €/m^2. Calcula el coste de imprimación de una taza.

(a) Hacemos un dibujo de la situación planteada.



Sabemos que el volumen es de 216π cm^3 → $\pi x^2 \cdot y = 216\pi \to x^2 \cdot y = 216 \Rightarrow y = \dfrac{216}{x^2}$.

Determinamos la expresión de la superficie de la taza. Tiene una base (πx^2) y una superficie lateral que es un rectángulo de base $2\pi x$ y altura y.

$$\left.\begin{array}{l} S(x,y) = \pi x^2 + 2\pi xy \\ y = \dfrac{216}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow S(x) = \pi x^2 + 2\pi x \frac{216}{x^2} = \pi x^2 + \frac{432\pi}{x}$$

Buscamos los puntos críticos de la función superficie.

$$S(x) = \pi x^2 + \frac{432\pi}{x} \Rightarrow S'(x) = 2\pi x - \frac{432\pi}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2\pi x - \frac{432\pi}{x^2} = 0 \Rightarrow 2\pi x = \frac{432\pi}{x^2} \Rightarrow 2\pi x^3 = 432\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{432\pi}{2\pi} = 216 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{216} = 6}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$S'(x) = 2\pi x - \frac{432\pi}{x^2} = 2\pi x - 432\pi x^{-2} \Rightarrow S''(x) = 2\pi - (-2)432\pi x^{-3} = 2\pi + \frac{864\pi}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S''(6) = 2\pi + \frac{864\pi}{6^3} > 0$$

Como la segunda derivada es positiva la función superficie tiene un mínimo para $x=6$. Para este valor $y=\frac{216}{6^2}=6$.

Las dimensiones de la taza con superficie mínima son 6 cm de radio y 6 cm de altura.

(b) La superficie de la taza con 6 cm de radio y 6 cm de altura vale $S(6)=\pi\cdot 6^2+\frac{432\pi}{6}=108\pi$ cm^2.

Para obtener el coste multiplicamos por $3\ €/m^2=\frac{3}{10000}€/cm^2$ obteniendo $\frac{3}{10000}108\pi=0.10178€$ por taza. La imprimación de cada taza cuesta 10.2 céntimos.

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 puntos)** $\int (2x+5)e^{2x}dx$.

(b) **(1,25 puntos)** $\int \frac{x+7}{x^2+10x+25}dx$.

(a) Resolvemos la integral utilizando el método de integración por partes.

$$\int (2x+5)e^{2x}dx = \left\{\begin{array}{l} u = 2x+5 \to du = 2dx \\ dv = e^{2x}dx \to v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\} =$$

$$= (2x+5)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}2dx = \frac{(2x+5)e^{2x}}{2} - \int e^{2x}dx = \frac{(2x+5)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}e^{2x} =$$

$$= \frac{(2x+5-1)e^{2x}}{2} = \frac{(2x+4)e^{2x}}{2} = \boxed{(x+2)e^{2x}+K}$$

(b) Resolvemos la integral usando el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{x+7}{x^2+10x+25}dx = \ldots$$

$$x^2+10x+25 = 0 \Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2-4\cdot 25}}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$\frac{x+7}{x^2+10x+25} = \frac{x+7}{(x+5)^2} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{(x+5)^2} = \frac{A(x+5)+B}{(x+5)^2}$$

$$x+7 = A(x+5)+B \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -5 \to 2 = B \\ x = 0 \to 7 = 5A+B \to 7 = 5A+2 \to A = 1 \end{array}\right.$$

$$\frac{x+7}{x^2+10x+25} = \frac{1}{x+5} + \frac{2}{(x+5)^2}$$

$$\ldots = \int \frac{1}{x+5}dx + \int \frac{2}{(x+5)^2}dx = \int \frac{1}{x+5}dx + 2\int (x+5)^{-2}dx =$$

$$= \ln|x+5| + 2\frac{(x+5)^{-1}}{-1} = \boxed{\ln|x+5| - \frac{2}{x+5} + C}$$

(5B) Se consideran la parábola de ecuación $y = x^2 - 3x$ y la recta $x + y = 8$.
(a) **(1,25 puntos)** Dibuja el recinto limitado por esas dos curvas.
(b) **(1,25 puntos)** Calcula el área del trozo de ese recinto que queda en el primer cuadrante.

(a) Determinamos los puntos de corte entre la parábola y la recta.

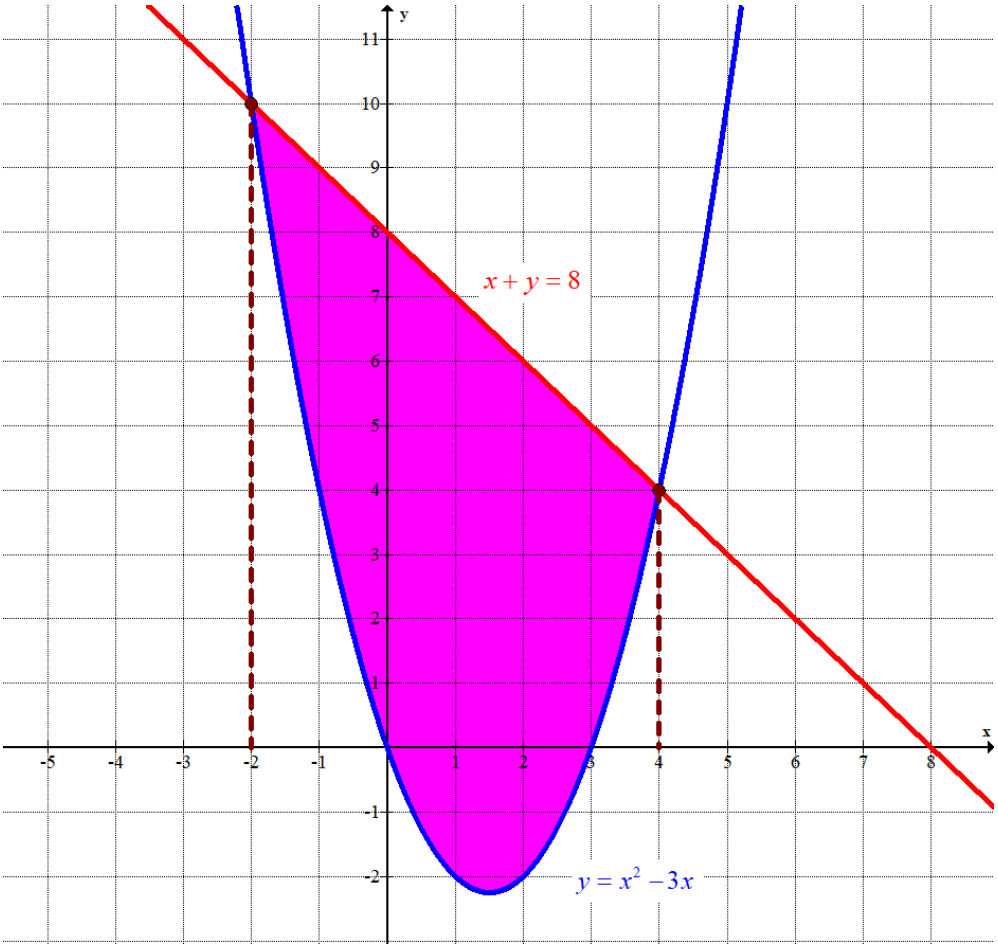
$$\left.\begin{matrix} y = x^2 - 3x \\ y = 8 - x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 - 3x = 8 - x \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-8)}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = \boxed{4 = x} \\ \frac{2-6}{2} = \boxed{-2 = x} \end{cases}$$

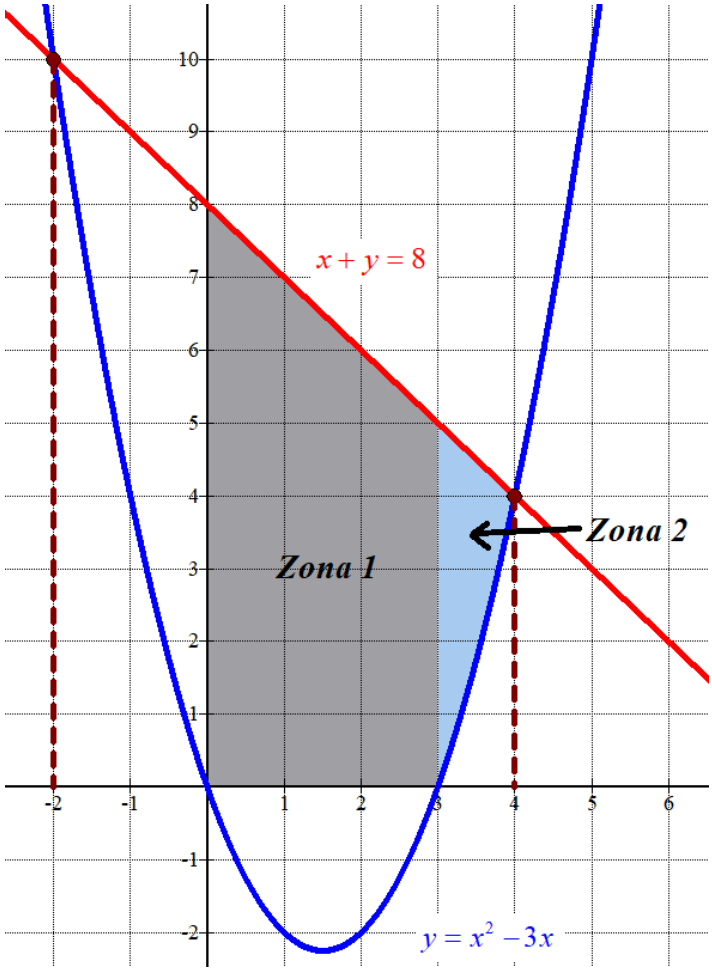
Hacemos unas tablas de valores y dibujamos las gráficas y el recinto del limitado por ellas.

x	$y = x^2 - 3x$
–2	10
0	0
1	–2
3	0
4	4

x	$y = 8 - x$
–2	10
0	8
1	7
4	4



(b) Debemos hallar el área del dibujo. La dividimos en dos partes. El área de cada zona la calculamos de forma distinta.



Podemos ver que la zona 1 está compuesta de 18 cuadraditos enteros (1 unidad cuadrada cada uno) y 3 medio cuadraditos, por lo que su área vale 18 + 1.5 = 19.5 unidades cuadradas.
Lo confirmamos usando el cálculo integral.

$$Área\ Zona\,1 = \int_0^3 8 - x\,dx = \left[8x - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \left[8\cdot 3 - \frac{3^2}{2}\right] - \left[8\cdot 0 - \frac{0^2}{2}\right] = 24 - \frac{9}{2} = \boxed{19.5u^2}$$

$$Área\ Zona\,2 = \int_3^4 8 - x - \left(x^2 - 3x\right)dx = \int_3^4 8 - x - x^2 + 3x\,dx = \int_3^4 8 - x^2 + 2x\,dx =$$

$$= \left[8x - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_3^4 = \left[8\cdot 4 - \frac{4^3}{3} + 4^2\right] - \left[8\cdot 3 - \frac{3^3}{3} + 3^2\right] = 32 - \frac{64}{3} + 16 - 24 + 9 - 9 = \boxed{\frac{8}{3}u^2}$$

El área total es la suma de las dos áreas obtenidas: $19.5 + \frac{8}{3} = \frac{133}{6} \simeq 22.1667$ unidades cuadradas.

PAU ordinaria 2025

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2025eko OHIKOA

ORDINARIA 2025

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

Este examen tiene CINCO ejercicios, de 2,5 puntos cada uno. EL PRIMER EJERCICIO ES OBLIGATORIO y de los otros cuatro debes elegir TRES.
En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
Las respuestas deben escribirse con bolígrafo azul o negro. No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA

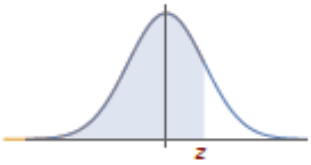
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2025eko OHIKOA

ORDINARIA 2025

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA
2025eko OHIKOA
MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
ORDINARIA 2025
MATEMÁTICAS II

EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos). Los estudios publicados en "Anales Españoles de Pediatría" respecto a las curvas de desarrollo fetal de los recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 revelan que el peso de los 9476 recién nacidos sigue una distribución normal con media 3372g y desviación típica de 405g.

(a) **(1 punto)** Elegido al azar un recién nacido en el Hospital de Cruces en 2024, calcula la probabilidad de que su peso haya sido superior a 3kg.

(b) **(1 punto)** Calcula el número probable de recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 cuyo peso esté en el rango comprendido entre 3kg y 3,5kg.

(c) **(0,5 puntos)** Utilizando únicamente los resultados de los apartados anteriores, razona si es correcto afirmar que la cantidad de recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 con un peso en el rango comprendido entre 3,1kg y 3,3kg debería estar entre 4500 y 4700.

SEGUNDO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(2A) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha x - 2y + z = \alpha \\ x - 2y + \alpha z = \alpha \\ -2x + y + \alpha z = -2 \end{cases}$$

(a) **(1 punto)** Encuentra los valores del parámetro α para los que el sistema tiene una única solución.

(b) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema no tiene solución? Razona tu respuesta.

(c) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema tiene más de una solución? Si la respuesta es afirmativa, calcula esos valores de α y, para cada uno de ellos, encuentra dos soluciones distintas del sistema.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA
2025eko OHIKOA
MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
ORDINARIA 2025
MATEMÁTICAS II

(2B) Sean a y b dos números reales y sea

$$A=\begin{pmatrix} a+b & 2a \\ 2b & a+b \end{pmatrix}.$$

(a) **(0,75 puntos)** Decide si existe la inversa de A en función de los valores de los parámetros a y b.

(b) **(1,75 puntos)** En el caso particular en que $a=1$ y $b=2$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial

$$AX-A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TERCER EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(3A) (2,5 puntos) Se consideran las siguientes rectas:

$$r_1\equiv\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+z=1 \end{cases} \qquad r_2\equiv\begin{cases} x=3t \\ y=1-2t \\ z=2+t \end{cases}$$

Calcula la ecuación del plano que contiene a r_1 y pasa por el punto de intersección del plano $\pi\equiv x-3y-2z+7=0$ y la recta r_2.

(3B) Se consideran la recta r que pasa por los puntos A(−4, 4, 1) y B(1, 0,−1) y la recta s que pasa por los puntos C(−2, 7,−1) y D(2, 3,−1).

(a) **(1,5 puntos)** Calcula la posición relativa de la recta r con respecto de la recta s.

(b) **(1 punto)** En caso de ser paralelas o cruzarse, calcula la distancia entre ambas. Si se cortan, calcula el punto de intersección.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATEAN SARTZEKO PROBA
2025eko OHIKOA
MATEMATIKA II

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
ORDINARIA 2025
MATEMÁTICAS II

CUARTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(4A) Se considera la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx$.

(a) **(1 punto)** Calcula los valores de los parámetros A y B para que las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$ sean horizontales.

(b) **(1,5 puntos)** Con los valores de A y B que has obtenido en el apartado anterior, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.

(4B) En la empresa "MARKOAK" fabrican marcos para cuadros. En esta ocasión les han solicitado marcos para 274 cuadros rectangulares. Todos los cuadros tienen las mismas dimensiones y una superficie de 0,3m^2. Para cada marco van a emplear dos tipos de material: las partes horizontales serán de un material cuyo coste es de 12€/m y para las verticales utilizarán un material cuyo coste es de 10€/m. La empresa que ha realizado el pedido quiere pagar lo mínimo posible. Calcula:

(a) **(2 puntos)** cuáles deben ser las medidas de los cuadros para pagar el mínimo posible;

(b) **(0,5 puntos)** a cuánto ascenderá la factura.

QUINTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 puntos)** $\int 2x\cos(2x+5)\,dx$.

(b) **(1,25 puntos)** $\int \frac{x+495}{x^2-2025}\,dx$.

(5B) Se consideran las curvas de ecuaciones $y = (x-1)^2$, $y = (x+1)^2$ e $y = 7-3x$.

(a) **(1,25 puntos)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.

(b) **(1,25 puntos)** Calcula el área del recinto del apartado anterior.

Soluciones

EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos). Los estudios publicados en "Anales Españoles de Pediatría" respecto a las curvas de desarrollo fetal de los recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 revelan que el peso de los 9476 recién nacidos sigue una distribución normal con media 3372g y desviación típica de 405g.

(a) **(1 punto)** Elegido al azar un recién nacido en el Hospital de Cruces en 2024, calcula la probabilidad de que su peso haya sido superior a 3kg.

(b) **(1 punto)** Calcula el número probable de recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 cuyo peso esté en el rango comprendido entre 3kg y 3,5kg.

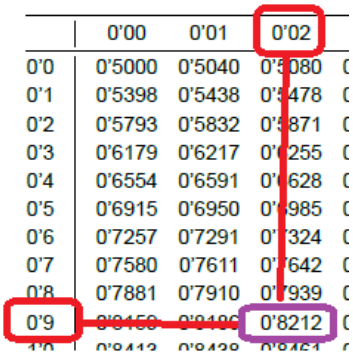
(c) **(0,5 puntos)** Utilizando únicamente los resultados de los apartados anteriores, razona si es correcto afirmar que la cantidad de recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 con un peso en el rango comprendido entre 3,1kg y 3,3kg debería estar entre 4500 y 4700.

Sea X = El peso de los recién nacidos en gramos. X = N(3372, 405).

(a) Debemos calcular $P(X > 3000)$.

$$P(X > 3000) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{3000 - 3372}{405}\right) =$$

$$= P(Z > -0.92) = P(Z \le 0.92) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = \boxed{0.8212}$$



	0'00	0'01	0'02
0'0	0'5000	0'5040	0'5080
0'1	0'5398	0'5438	0'5478
0'2	0'5793	0'5832	0'5871
0'3	0'6179	0'6217	0'6255
0'4	0'6554	0'6591	0'6628
0'5	0'6915	0'6950	0'6985
0'6	0'7257	0'7291	0'7324
0'7	0'7580	0'7611	0'7642
0'8	0'7881	0'7910	0'7939
0'9	0'8159	0'8186	0'8212

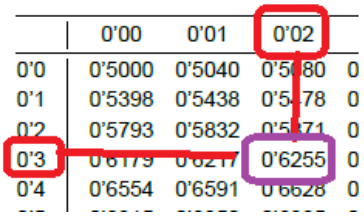
(b) Calculamos la probabilidad de que un recién nacido tenga un peso entre 3 kg y 3.5 kg: $P(3000 \le X \le 3500)$.

$$P(3000 \le X \le 3500) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{3000 - 3372}{405} \le Z \le \frac{3500 - 3372}{405}\right) =$$

$$= P(-0.92 \le Z \le 0.32) = P(Z \le 0.32) - P(Z \le -0.92) = P(Z \le 0.32) - P(Z \ge 0.92) =$$

$$= P(Z \le 0.32) - \left[1 - P(Z \le 0.92)\right] =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 0.6255 - 1 + 0.8212 = \boxed{0.4467}$$



	0'00	0'01	0'02
0'0	0'5000	0'5040	0'5080
0'1	0'5398	0'5438	0'5478
0'2	0'5793	0'5832	0'5871
0'3	0'6179	0'6217	0'6255
0'4	0'6554	0'6591	0'6628

La probabilidad de que un recién nacido pese entre 3 kg y 3.5 kg es de 0.4467.
Como hubieron 9476 recién nacidos en 2024, el número esperado de recién nacidos con un peso entre 3 kg y 3.5 kg es 9476 · 0.4467 = 4232.9. Se espera unos 4233 recién nacidos con peso entre 3 y 3.5 kg.

(c) Entre 3,1kg y 3,3kg es un rango menor que el contemplado en el apartado (b) donde hemos determinado que se esperan 4233 recién nacidos con peso entre 3 y 3.5 kg. Es absurdo afirmar que habrán entre 4500 y 4700 recién nacidos con peso entre 3,1kg y 3,3kg. Deberán haber menos de 4233 recién nacidos con peso entre 3.1 y 3.3 kg.

SEGUNDO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.
(2A) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha x - 2y + z = \alpha \\ x - 2y + \alpha z = \alpha \\ -2x + y + \alpha z = -2 \end{cases}$$

(a) **(1 punto)** Encuentra los valores del parámetro α para los que el sistema tiene una única solución.
(b) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema no tiene solución? Razona tu respuesta.
(c) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema tiene más de una solución? Si la respuesta es afirmativa, calcula esos valores de α y, para cada uno de ellos, encuentra dos soluciones distintas del sistema.

(a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 1 \\ 1 & -2 & \alpha \\ -2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 1 & \alpha \\ 1 & -2 & \alpha & \alpha \\ -2 & 1 & \alpha & -2 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & -2 & 1 \\ 1 & -2 & \alpha \\ -2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = -2\alpha^2 + 4\alpha + 1 - 4 + 2\alpha - \alpha^2 = -3\alpha^2 + 6\alpha - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3\alpha^2 + 6\alpha - 3 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha \neq 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila\,2ª - Fila\,1ª \\ \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} -1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2ª \end{array} \right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,3^{a}+2\cdot Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ \hline 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ Fila\,3^{a} \leftrightarrow Fila\ 2^{a} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 1 \end{matrix}}^{A/B} & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 1$ el sistema es compatible determinado y si $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

(b) El sistema siempre tiene solución (compatible determinado o compatible indeterminado).

(c) Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado (caso 2), tiene infinitas soluciones.
Resolvemos el sistema partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado (b) CASO 2.

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 1 \end{matrix}}^{A/B} & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2y+z=1 \\ -3y+3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2y+z=1 \\ -y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2y+z=1 \\ z=y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2y+y=1 \Rightarrow x-y=1 \Rightarrow x=1+y \Rightarrow \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} ;\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Si tomamos $\lambda = 0$ la solución es $\begin{cases} x=1+0=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Si tomamos $\lambda = 1$ la solución es $\begin{cases} x=1+1=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$.

(2B) Sean a y b dos números reales y sea

$$A=\begin{pmatrix} a+b & 2a \\ 2b & a+b \end{pmatrix}.$$

(a) **(0,75 puntos)** Decide si existe la inversa de A en función de los valores de los parámetros a y b.
(b) **(1,75 puntos)** En el caso particular en que $a=1$ y $b=2$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial

$$AX-A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculamos el determinante de la matriz A y averiguamos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} a+b & 2a \\ 2b & a+b \end{vmatrix}=(a+b)^2-4ab=a^2+b^2+2ab-4ab=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$$

$$|A|=0\Rightarrow (a-b)^2=0\Rightarrow a-b=0\Rightarrow \boxed{a=b}$$

Cuando $a=b$ el determinante de A es nulo y la matriz A no tiene inversa.
Cuando $a\neq b$ el determinante de A es distinto de cero y la matriz A tiene inversa.

(b) Si $a=1$ y $b=2$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix} 1+2 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 2 & 1+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene inversa. La calculamos.

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=9-8=1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX-A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow AX=A^3+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow X=A^{-1}A^3+A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A^2+A^{-1}$$

Terminamos de calcular la matriz X.

$$X=A^2+A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9+8 & 6+6 \\ 12+12 & 8+9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$$

TERCER EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.
(3A) (2,5 puntos) Se consideran las siguientes rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+z=1 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x=3t \\ y=1-2t \\ z=2+t \end{cases}$$

Calcula la ecuación del plano que contiene a r_1 y pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x-3y-2z+7=0$ y la recta r_2.

Buscamos el punto P de intersección del plano $\pi \equiv x-3y-2z+7=0$ y la recta r_2.

$$\left.\begin{array}{l} r_2 \equiv \begin{cases} x=3t \\ y=1-2t \\ z=2+t \end{cases} \\ \pi \equiv x-3y-2z+7=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3t-3(1-2t)-2(2+t)+7=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3t-3+6t-4-2t+7=0 \Rightarrow 7t=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3\cdot 0=0 \\ y=1-2\cdot 0=1 \\ z=2+0=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(0,1,2)}$$

Hallamos la la ecuación del plano π´ que contiene a r_1 y pasa por el punto $P(0,1,2)$. Este plano tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta, y otro vector director es el que une un punto cualquiera de la recta con el punto P.
Hallamos un punto y un vector director de la recta r_1.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ z=1-2x+3y \end{cases} \Rightarrow x+y-2(1-2x+3y)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y-2+4x-6y=0 \Rightarrow 5x-5y-2=0 \Rightarrow 5x=2+5y \Rightarrow x=\frac{2}{5}+y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=1-2\left(\frac{2}{5}+y\right)+3y=1-\frac{4}{5}-2y+3y=\frac{1}{5}+y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x=\frac{2}{5}+\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{1}{5}+\lambda \end{cases} : \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_1}=(1,1,1) \\ Q_1\left(\frac{2}{5},0,\frac{1}{5}\right) \end{cases}$$

Hallamos la ecuación del plano π´ que pasa por el punto P y que tiene como vectores directores $\vec{v_1}=(1,1,1)$ y el vector $\overrightarrow{PQ_1}$.

$$\overrightarrow{PQ_1}=\left(\frac{2}{5},0,\frac{1}{5}\right)-(0,1,2)=\left(\frac{2}{5},-1,\frac{-9}{5}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\vec{v_1}=(1,1,1)\\ \vec{v}=5\overrightarrow{PQ_1}=5\left(\frac{2}{5},-1,\frac{-9}{5}\right)=(2,-5,-9)\\ P(0,1,2)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow \pi':\begin{vmatrix}x & y-1 & z-2\\ 2 & -5 & -9\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x-9y+9+2z-4+5z-10-2y+2+9x=0\Rightarrow \boxed{\pi':4x-11y+7z-3=0}$$

El plano que contiene a r_1 y pasa por el punto de intersección del plano $\pi\equiv x-3y-2z+7=0$ y la recta r_2 tiene ecuación $\pi':4x-11y+7z-3=0$.

(3B) Se consideran la recta r que pasa por los puntos A(−4, 4, 1) y B(1, 0,−1) y la recta s que pasa por los puntos C(−2, 7,−1) y D(2, 3,−1).
(a) **(1,5 puntos)** Calcula la posición relativa de la recta r con respecto de la recta s.
(b) **(1 punto)** En caso de ser paralelas o cruzarse, calcula la distancia entre ambas. Si se cortan, calcula el punto de intersección.

(a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta, también sus ecuaciones paramétricas.

$$\left.\begin{matrix} A(-4,4,1)\in r \\ B(1,0,-1)\in r \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}=(1,0,-1)-(-4,4,1)=(5,-4,-2) \\ B(1,0,-1)\in r \end{matrix}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases} x=1+5\alpha \\ y=-4\alpha \\ z=-1-2\alpha \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} C(-2,7,-1)\in s \\ D(2,3,-1)\in s \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} \overrightarrow{CD}=(2,3,-1)-(-2,7,-1)=(4,-4,0) \\ D(2,3,-1)\in s \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \overrightarrow{u_s}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{4}(4,-4,0)=(1,-1,0) \\ D(2,3,-1)\in s \end{matrix}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=-1 \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son coincidentes ni paralelas.

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r}=(5,-4,-2) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,-1,0) \end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{5}{1}\neq\frac{-4}{-1}\neq\frac{-2}{0}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{BD}\right]$. Si es nulo se cortan y si es distinto de cero se cruzan.

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{BD}=(2,3,-1)-(1,0,-1)=(1,3,0) \\ \overrightarrow{v_r}=(5,-4,-2) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,-1,0) \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{BD}\right]=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0-6+0-0-0-2=-8\neq 0$$

Al ser el producto mixto distinto de cero las rectas se cruzan.

(b) Hallamos la distancia entre dos rectas que se cruzan con la fórmula:

$$d(r,s)=\frac{Volumen\ \ paralelepípedo}{Área\,base}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{BD}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{u_s}\right|}$$

Calculamos el producto vectorial y utilizamos la fórmula.

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r}=(5,-4,-2) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,-1,0) \end{matrix}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-2j-5k+4k-2i=-2i-2j-k=(-2,-2,-1)$$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{BD}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{u_s}\right|}=\frac{|-8|}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{8}{3}\ unidades$$

La distancia entre las rectas r y s es de 2.6667 unidades.

CUARTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(4A) Se considera la función $f(x)=x^4+Ax^3+x^2+Bx$.

(a) **(1 punto)** Calcula los valores de los parámetros A y B para que las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=1$ sean horizontales.

(b) **(1,5 puntos)** Con los valores de A y B que has obtenido en el apartado anterior, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.

(a) Para que las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=1$ sean horizontales la derivada para estos valores debe valer 0.

$$f(x)=x^4+Ax^3+x^2+Bx \Rightarrow f'(x)=4x^3+3Ax^2+2x+B$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=4x^3+3Ax^2+2x+B \\ f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0=4\cdot 0^3+3A\cdot 0^2+2\cdot 0+B \\ 0=4\cdot 1^3+3A\cdot 1^2+2\cdot 1+B \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{0=B} \\ 0=4+3A+2+B \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3A+6 \Rightarrow 3A=-6 \Rightarrow \boxed{A=-2}$$

Los valores buscados son $B=0$ y $A=-2$.

(b) Con $B=0$ y $A=-2$ la función queda $f(x)=x^4-2x^3+x^2$.

Buscamos los valores que anulan la derivada de la función (puntos críticos).

$$f(x)=x^4-2x^3+x^2 \Rightarrow f'(x)=4x^3-6x^2+2x$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 4x^3-6x^2+2x=0 \Rightarrow 2x\left(2x^2-3x+1\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 2x^2-3x+1=0 \rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-8}}{2\cdot 2}=\dfrac{3\pm 1}{4}=\begin{cases} \dfrac{3+1}{4}=\boxed{1=x} \\ \dfrac{3-1}{4}=\boxed{\dfrac{1}{2}=x} \end{cases} \end{cases}$$

La función presenta tres puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1)=4(-1)^3-6(-1)^2+2(-1)=-4-6-2=-12<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ tomamos $x=0.25$ y la derivada vale $f'(0.25)=4\cdot 0.25^3-6\cdot 0.25^2+2\cdot 0.25=0.1875>0$. La función crece en $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

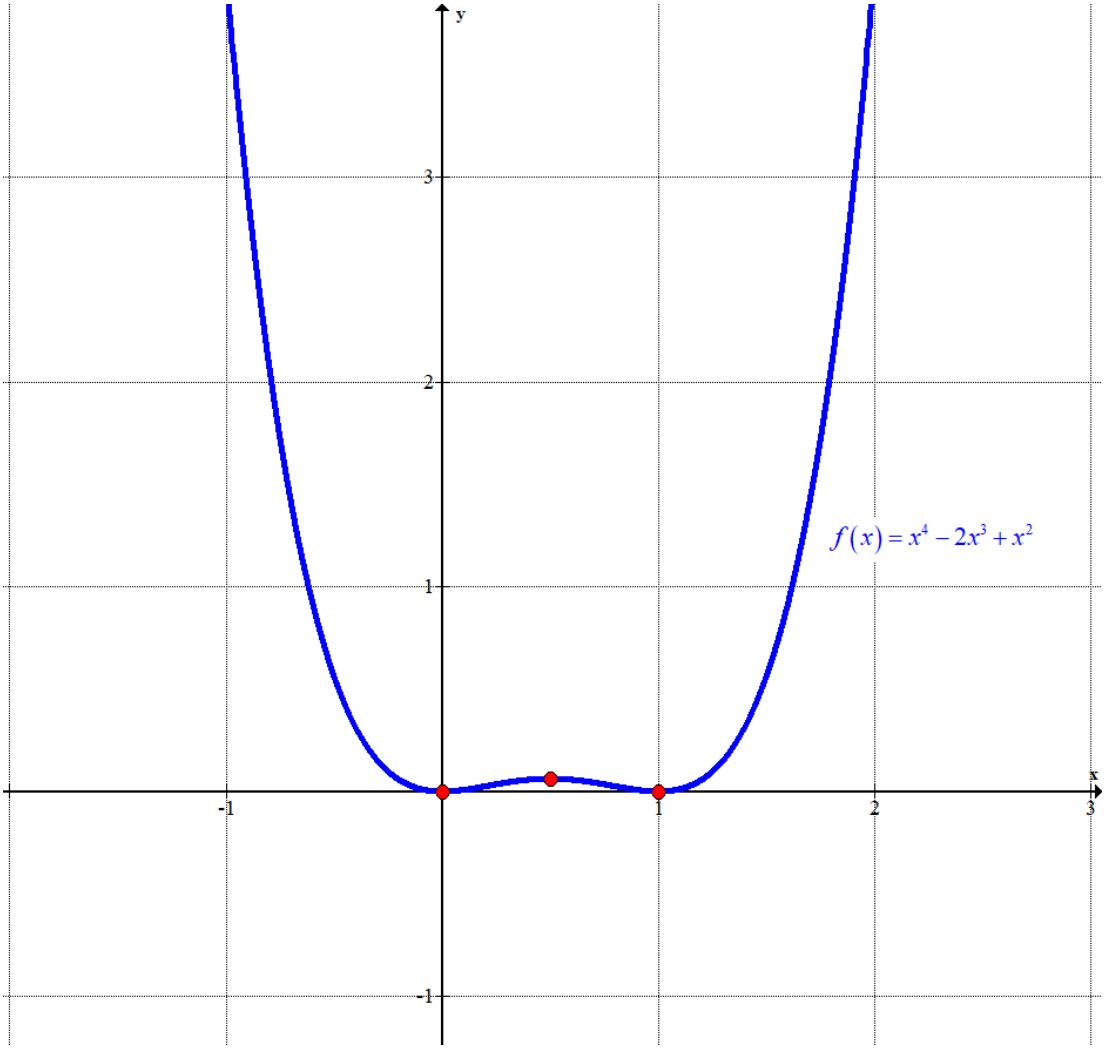
- En el intervalo $\left(\frac{1}{2},1\right)$ tomamos $x=0.75$ y la derivada vale

  $f'(0.75)=4\cdot 0.75^3-6\cdot 0.75^2+2\cdot 0.75=-0.1875<0$. La función decrece en $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale

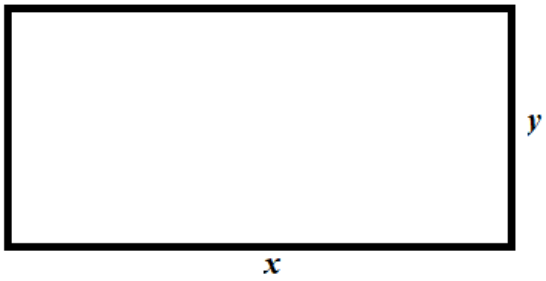
  $f'(2)=4\cdot 2^3-6\cdot 2^2+2\cdot 2=32-24+4=12>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$ y crece en $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.



(4B) En la empresa "MARKOAK" fabrican marcos para cuadros. En esta ocasión les han solicitado marcos para 274 cuadros rectangulares. Todos los cuadros tienen las mismas dimensiones y una superficie de 0,3m^2. Para cada marco van a emplear dos tipos de material: las partes horizontales serán de un material cuyo coste es de 12€/m y para las verticales utilizarán un material cuyo coste es de 10€/m. La empresa que ha realizado el pedido quiere pagar lo mínimo posible. Calcula:
(a) **(2 puntos)** cuáles deben ser las medidas de los cuadros para pagar el mínimo posible;
(b) **(0,5 puntos)** a cuánto ascenderá la factura.

(a) Hacemos un dibujo de la situación planteada.



Sabemos que la superficie es de 0.3 m^2 → $xy = 0.3 \to y = \dfrac{0.3}{x}$.

Determinamos la expresión del coste del material del marco.

$$\left.\begin{array}{l} C(x,y) = 12\cdot 2x + 10\cdot 2y \\ y = \dfrac{0.3}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow C(x) = 24x + 20\frac{0.3}{x} = 24x + \frac{6}{x}$$

Buscamos los puntos críticos de la función coste.

$$C(x) = 24x + \frac{6}{x} \Rightarrow C'(x) = 24 - \frac{6}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 24 - \frac{6}{x^2} = 0 \Rightarrow 24 = \frac{6}{x^2} \Rightarrow 24x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$C'(x) = 24 - \frac{6}{x^2} = 24 - 6x^{-2} \Rightarrow C''(x) = 12x^{-3} = \frac{12}{x^3} \Rightarrow C''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{12}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 96 > 0$$

La función coste tiene un valor mínimo para $x = \dfrac{1}{2}$. Para este valor $y = \dfrac{0.3}{0.5} = 0.6$.

El coste es mínimo para marcos con la base de 0.5 metros y de altura 0.6 metros.

(b) Para $x = \dfrac{1}{2}$ el coste es de $C(0.5) = 24\cdot 0.5 + \dfrac{6}{0.5} = 12 + 12 = 24$ €. El coste mínimo de cada cuadro es de 24 €. El coste de los 274 cuadros es de 24 · 274 = 6576 €.

QUINTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.
(5A) Calcula las dos integrales siguientes:
(a) **(1,25 puntos)** $\int 2x\cos(2x+5)\,dx$.
(b) **(1,25 puntos)** $\int \frac{x+495}{x^2-2025}\,dx$.

(a) Resolvemos la integral utilizando el método de integración por partes.

$$\int 2x\cos(2x+5)\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = 2x \to du = 2dx \\ dv = \cos(2x+5)\,dx \to v = \int \cos(2x+5)\,dx = \frac{1}{2}sen(2x+5) \end{array}\right\} =$$

$$= 2x\frac{1}{2}sen(2x+5) - \int \frac{1}{2}sen(2x+5)2dx = xsen(2x+5) - \int sen(2x+5)\,dx =$$

$$= xsen(2x+5) - \frac{-1}{2}\cos(2x+5) = \boxed{xsen(2x+5) + \frac{1}{2}\cos(2x+5) + K}$$

(b) Resolvemos la integral usando el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{x+495}{x^2-2025}\,dx = \ldots$$

$$x^2 - 2025 = 0 \Rightarrow x^2 = 2025 \Rightarrow x = \sqrt{2025} = \pm 45 \Rightarrow x^2 - 2025 = (x+45)(x-45)$$

$$\frac{x+495}{x^2-2025} = \frac{x+495}{(x-45)(x+45)} = \frac{A}{x-45} + \frac{B}{x+45} = \frac{A(x+45)+B(x-45)}{(x-45)(x+45)}$$

$$x+495 = A(x+45)+B(x-45) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 45 \to 540 = 90A \to A = \frac{540}{90} = 6 \\ x = -45 \to 450 = -90B \to B = \frac{-450}{90} = -5 \end{array}\right.$$

$$\frac{x+495}{x^2-2025} = \frac{6}{x-45} - \frac{5}{x+5}$$

$$\ldots = \int \frac{6}{x-45}\,dx - \int \frac{5}{x+45}\,dx = \boxed{6\ln|x-45| - 5\ln|x+45| + C}$$

(5B) Se consideran las curvas de ecuaciones $y=(x-1)^2$, $y=(x+1)^2$ e $y=7-3x$.
(a) **(1,25 puntos)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.
(b) **(1,25 puntos)** Calcula el área del recinto del apartado anterior.

(a) Tenemos que dibujar dos parábolas y una recta. Determinamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{matrix} y=(x-1)^2 \\ y=(x+1)^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x-1)^2=(x+1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x-1=x+1 \Rightarrow -1=1 \\ x-1=-x-1 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} y=(x+1)^2 \\ y=7-3x \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x+1)^2=7-3x \Rightarrow x^2+2x+1=7-3x \Rightarrow x^2+5x-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(-6)}}{2}=\frac{-5\pm 7}{2}=\begin{cases} \frac{-5+7}{2}=\boxed{1=x} \\ \frac{-5-7}{2}=\boxed{-6=x} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} y=(x-1)^2 \\ y=7-3x \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x-1)^2=7-3x \Rightarrow x^2-2x+1=7-3x \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow$$

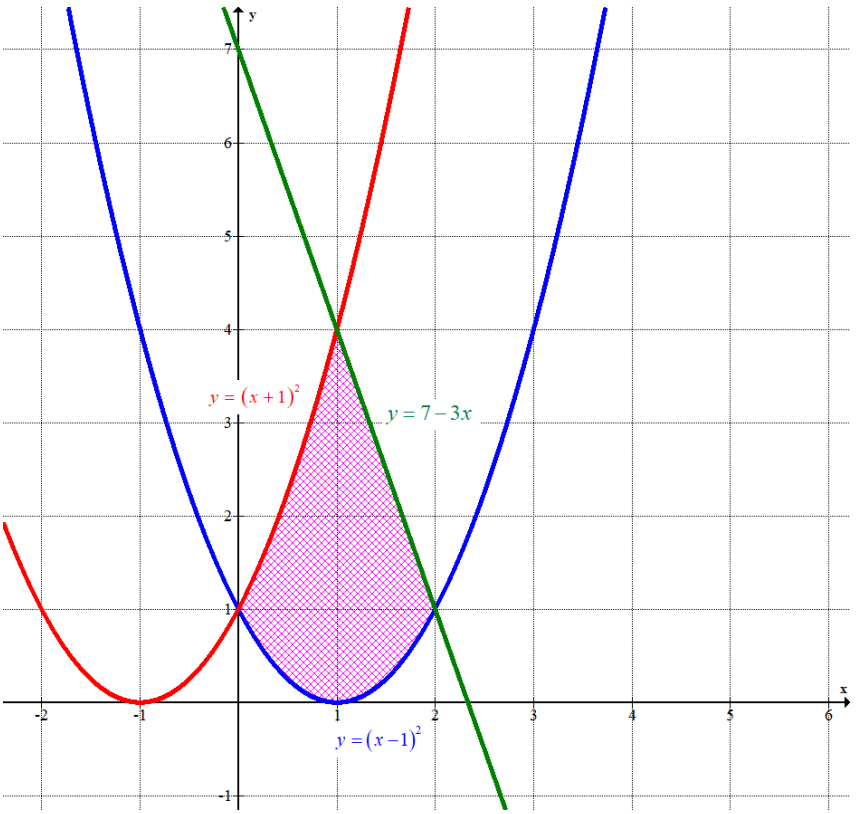
$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-6)}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases} \frac{-1+5}{2}=\boxed{2=x} \\ \frac{-1-5}{2}=\boxed{-3=x} \end{cases}$$

Hacemos unas tablas de valores y dibujamos las gráficas y el recinto del primer cuadrante limitado por ellas.

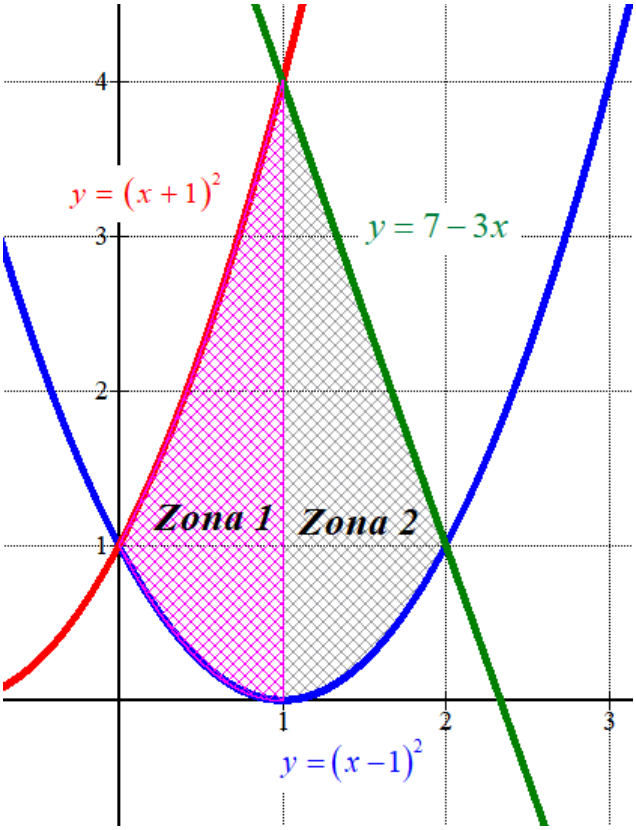
x	$y=(x-1)^2$
–3	16
0	1
2	1
3	4

x	$y=(x+1)^2$
–6	25
0	1
1	4
2	9

x	$y=7-3x$
–6	25
–3	16
1	4
2	1



(b) Dividimos el recinto en dos zonas, calculamos el área de cada zona y el área total será la suma de ambas.



$$Área = \int_0^1 (x+1)^2 - (x-1)^2\,dx + \int_1^2 7-3x-(x-1)^2\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^2+2x+1-(x^2-2x+1)\,dx + \int_1^2 7-3x-(x^2-2x+1)\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^2+2x+1-x^2+2x-1dx + \int_1^2 7-3x-x^2+2x-1dx =$$

$$= \int_0^1 4xdx + \int_1^2 -x^2-x+6dx = \left[2x^2\right]_0^1 + \left[\frac{-x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6x\right]_1^2 =$$

$$= 2\cdot 1^2 - 2\cdot 0^2 + \left[\frac{-2^3}{3}-\frac{2^2}{2}+6\cdot 2\right] - \left[\frac{-1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+6\cdot 1\right] =$$

$$= 2-\frac{8}{3}-2+12+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-6 = 6-\frac{7}{3}+\frac{1}{2} = \boxed{\frac{25}{6} \simeq 4.1667\ u^2}$$

El área del recinto tiene un valor de $\frac{25}{6} \simeq 4.1667$ unidades cuadradas.

EAU extraordinaria 2024

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2024ko EZOHIKOA

EXTRAORDINARIA 2024

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

(1 p) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + 4y + z = 3 \\ \alpha x - 5y + 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

Resuelve el sistema, si es posible,

(a) (0,75 p) cuando $\alpha = 0$.

(b) (0,75 p) cuando $\alpha = 1$.

Ejercicio B1

(2,5 p) Calcula el rango de la matriz A dependiendo de los valores del parámetro *m*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ m & 2-m & 2 & 1 \\ m & -2 & m-2 & 1 \end{pmatrix}$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Se consideran las siguientes rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \qquad s \equiv \begin{cases} x = \lambda, \\ y = -2 + 3\lambda, \\ z = -1 + \lambda. \end{cases}$$

(a) **(1 p)** Determina su posición relativa.

(b) **(1,5 p)** Si dichas rectas se cortan, calcula el ángulo mínimo formado entre ambas. En caso de que no se corten, calcula la distancia entre ambas rectas.

Ejercicio B2

Se consideran la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x - 3y + Az = 10$$

(a) **(0,75 p)** Calcula el valor del parámetro A para que la recta *r* y el plano π sean paralelos.

(b) **(0,75 p)** Si $A = 21$, calcula la intersección del plano π y la recta *r*.

(c) **(0,75 p)** Si $A = 1$, calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Las rectas tangentes a la gráfica de la función *f* en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 2$ son paralelas. Además, *f* tiene un extremo relativo cuando $x = 1$ y $f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$.

(a) **(1,5 p)** Encuentra los valores de los parámetros A, B y C.

(b) **(1 p)** Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = -1$ para los valores de los parámetros A = –3, B = 0 y C = 4.

Ejercicio B3

Sea $f(x) = 2xe^{-2x^2}$.

(a) **(1 p)** Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
(b) **(1 p)** Encuentra los extremos relativos de *f* y razona si son máximos o mínimos.
(c) **(0,5 p)** Calcula las asíntotas de *f*.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

(2,5 p) Calcula la siguiente integral, y explica el método empleado:

$$\int x \ln^2 x dx$$

Ejercicio B4

Se consideran las curvas de ecuaciones $y = \frac{x^2}{3}$, $y = x^2 + 2x$ e $y = 3$.

(a) **(1,25 p)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por dichas curvas.
(b) **(1,25 p)** Calcula el área de ese recinto.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Los resultados publicados en diciembre de 2019 sobre la aplicación de la vacuna M72 en Sudáfrica, Kenia y Zambia revelaron que la probabilidad de quedar protegido contra la tuberculosis pulmonar activa es de 0,54. Se aplica la vacuna a un grupo de 3289 adultos.

(a) **(0,5 p)** Identifica la distribución correspondiente al número de adultos que quedan protegidos, y determina sus parámetros.
(b) **(1 p)** Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en 1800 adultos.
(c) **(1 p)** Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en menos de 1700 adultos.

Ejercicio B5

Sean A y B sucesos aleatorios independientes, siendo sus probabilidades $P(A) = 0,7$ y $P(B) = 0,1$, y sean $\overline{A}$ y $\overline{B}$ los sucesos complementarios de A y B respectivamente. Calcula las siguientes probabilidades razonadamente, e indica claramente el proceso o ley aplicada:

(a) **(0,5 p)** $P(A \cup B)$,

(b) **(0,5 p)** $P(\overline{A} \cup \overline{B})$,

(c) **(0,5 p)** $P(\overline{A} \cap \overline{B})$,

(d) **(0,5 p)** $P(A \cap \overline{B})$,

(e) **(0,5 p)** $P(\overline{A} / \overline{B})$.

.

Soluciones

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1
(1 p) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + 4y + z = 3 \\ \alpha x - 5y + 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

Resuelve el sistema, si es posible,
(a) (0,75 p) cuando $\alpha = 0$.
(b) (0,75 p) cuando $\alpha = 1$.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 1 \\ \alpha & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 1 & 3 \\ \alpha & -5 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 4 & 1 \\ \alpha & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -15\alpha + 16 - \alpha + 10 - 12\alpha + 2\alpha = -26\alpha + 26$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -26\alpha + 26 = 0 \Rightarrow 26\alpha = 26 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{26}{26} = 1}$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha \neq 1$.
En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha = 1$
En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.
Transformamos la matriz ampliada A/B en otra matriz triangular equivalente para que sea más fácil estudiar el rango de A y A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} Fila\,2^a - Fila\,1^a & & & \\ 1 & -5 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \\ \hline 0 & -9 & 1 & -5 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} Fila\,3^a - 2 \cdot Fila\,1^a & & & \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -8 & -2 & -6 \\ \hline 0 & -9 & 1 & -5 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & 1 & -5 \\ 0 & -9 & 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} Fila\,3^a - Fila\,2^a \\ 0 \quad -9 \quad 1 \quad -5 \\ 0 \quad 9 \quad -1 \quad 5 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{matrix}\right\} \to \text{Nueva fila } 3^a \Rightarrow \left(\begin{matrix} \overbrace{1 \quad 4 \quad 1}^{A} \quad 2 \\ 0 \quad -9 \quad 1 \quad -5 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A/B} \quad 0 \end{matrix}\right)$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 1$ el sistema es compatible determinado, si $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

(a) Para $\alpha = 0$ el sistema es compatible determinado (caso 1). Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 4y + z = 3 \\ -5y + 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 - 4y \\ -5y + 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5y + 2(3 - 4y) = -2 \\ 2x - y + 3(3 - 4y) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5y + 6 - 8y = -2 \\ 2x - y + 9 - 12y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13y = -8 \to \boxed{y = \frac{8}{13}} \\ 2x - 13y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 13\frac{8}{13} = -8 \\ z = 3 - 4\frac{8}{13} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 8 = -8 \\ \boxed{z = \frac{7}{13}} \end{cases} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

La solución es $x = 0;\ y = \frac{8}{13};\ z = \frac{7}{13}$.

(b) Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado (caso 2). Resolvemos el sistema partiendo del sistema de ecuaciones triangular obtenido en el estudio de la compatibilidad.

$$\left(\begin{matrix} \overbrace{1 \quad 4 \quad 1}^{A} \quad 2 \\ 0 \quad -9 \quad 1 \quad -5 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A/B} \quad 0 \end{matrix}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + 4y + z = 3 \\ -9y + z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y + z = 3 \\ z = 9y - 5 \end{cases} \Rightarrow x + 4y + 9y - 5 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 13y = 8 \Rightarrow x = 8 - 13y \Rightarrow \begin{cases} x = 8 - 13\lambda \\ y = \lambda \qquad ;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 9\lambda - 5 \end{cases}$$

Las soluciones son $x = 8 - 13\lambda,\ y = \lambda,\ z = 9\lambda - 5$; para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio B1

(2,5 p) Calcula el rango de la matriz A dependiendo de los valores del parámetro *m*:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ m & 2-m & 2 & 1\\ m & -2 & m-2 & 1\end{pmatrix}$$

Utilizando el método de Gauss convertimos la matriz A en otra equivalente con la mayor cantidad de ceros y si es posible triangular.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ m & 2-m & 2 & 1\\ m & -2 & m-2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}Fila\,3^{a}-Fila\,2^{a}\\ m & -2 & m-2 & 1\\ -m & -2+m & -2 & -1\\ \hline 0 & m-4 & m-4 & 0\end{array}\right.\rightarrow \text{Nueva fila } 3^{a}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ m & 2-m & 2 & 1\\ 0 & m-4 & m-4 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}Fila\,2^{a}-Fila\,1^{a}\\ m & 2-m & 2 & 1\\ -1 & -3 & -4 & -1\\ \hline m-1 & -1-m & -2 & 0\end{array}\right.\rightarrow \text{Nueva fila } 2^{a}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ m-1 & -1-m & -2 & 0\\ 0 & m-4 & m-4 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccc|c}Columna\,2^{a}-Columna\,3^{a}\\ 3 & -4 & -1\\ -1-m & 2 & 1-m\rightarrow Nueva\,columna\,2^{a}\\ m-4 & -m+4 & 0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & 1\\ m-1 & 1-m & -2 & 0\\ 0 & 0 & m-4 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccc|c}Columna\,1^{a}+Columna\,2^{a}\\ 1 & -1 & 0\\ m-1 & 1-m & 0\rightarrow Nueva\,columna\,1^{a}\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & -1 & 4 & 1\\ 0 & 1-m & -2 & 0\\ 0 & 0 & m-4 & 0\end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante del menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna.

$$\begin{vmatrix}-1 & 4 & 1\\ 1-m & -2 & 0\\ 0 & m-4 & 0\end{vmatrix}=0+0+(1-m)(m-4)-0-0-0=(1-m)(m-4)$$

Este determinante se anula cuando $m=1$ o $m=4$.

Distinguimos tres casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq 1$ o $m \neq 4$.

El menor de orden 3 tiene determinante no nulo y el rango de la matriz A es 3.

CASO 2. $m = 1$.

En este caso el menor de orden 3 tiene determinante nulo y el rango de la matriz A es menor de 3.

La matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera y segunda columna y la tercera fila $\rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0$. El rango de la matriz A es 2.

CASO 3. $m = 4$.

En este caso el menor de orden 3 tiene determinante nulo y el rango de la matriz A es menor de 3.

La matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera y segunda columna y la tercera fila $\rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0$. El rango de la matriz A es 2.

Resumiendo: Si $m \neq 1$ o $m \neq 4$ el rango de A es 3 y si $m = 1$ o $m = 4$ el rango de A es 2.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2
Se consideran las siguientes rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \qquad s \equiv \begin{cases} x = \lambda, \\ y = -2+3\lambda, \\ z = -1+\lambda. \end{cases}$$

(a) **(1 p)** Determina su posición relativa.
(b) **(1,5 p)** Si dichas rectas se cortan, calcula el ángulo mínimo formado entre ambas. En caso de que no se corten, calcula la distancia entre ambas rectas.

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,2,-1) \\ P_r(1,-1,0) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = \lambda, \\ y = -2+3\lambda \\ z = -1+\lambda. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (1,3,1) \\ Q_s(0,-2,-1) \end{cases}$$

Comprobamos si los vectores directores tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{u_r} = (1,2,-1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,3,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{2}{3} \neq \frac{-1}{1}$$

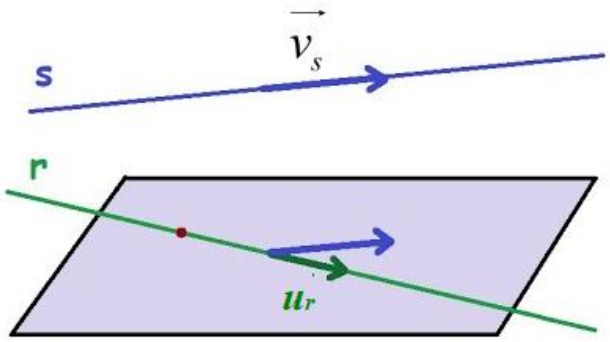
No tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.
Las rectas se cortan o cruzan.
Hallamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (0,-2,-1) - (1,-1,0) = (-1,-1,-1)$$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{u_r} = (1,2,-1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,3,1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (-1,-1,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3-2+1-3+2+1 = -4 \neq 0$$

Como el producto mixto no es nulo las rectas se cruzan. Las rectas tienen distinta dirección, pero están en planos paralelos.

b) Hallamos la distancia entre las rectas. Para ello hallamos el plano π que contiene a la recta *r* y es paralelo a la recta *s*.



$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{u_r}=(1,2,-1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(1,3,1)\\ P_r(1,-1,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-1)-(y+1)+3z-2z-(y+1)+3(x-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-2-y-1+3z-2z-y-1+3x-3=0\Rightarrow \boxed{\pi:5x-2y+z-7=0}$$

La distancia entre las rectas es la distancia del punto $Q_s(0,-2,-1)$ al plano π.

$$\left.\begin{array}{l}Q_s(0,-2,-1)\\ \pi:5x-2y+z-7=0\end{array}\right\}\Rightarrow d(Q_s,\pi)=\frac{|5\cdot 0-2(-2)-1-7|}{\sqrt{5^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{30}}=\frac{2\sqrt{30}}{15}\simeq 0.73$$

La distancia entre las rectas *r* y *s* tiene un valor de $\frac{2\sqrt{30}}{15}\simeq 0.73$ unidades.

Ejercicio B2

Se consideran la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x - 3y + Az = 10$$

(a) **(0,75 p)** Calcula el valor del parámetro A para que la recta *r* y el plano π sean paralelos.
(b) **(0,75 p)** Si $A = 21$, calcula la intersección del plano π y la recta *r*.
(c) **(0,75 p)** Si $A = 1$, calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

a) Para que la recta y el plano π sean paralelos el vector director de la recta y el normal del plano deben ser perpendiculares, por lo que su producto escalar debe ser nulo.
Hallamos ambos vectores y le aplicamos esta condición.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 4z - 1 = y \end{cases} \Rightarrow 2x - x - 4x + 1 + z = 0 \Rightarrow z = -1 + 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x + 4(-1 + 3x) - 1 = x - 4 + 12x - 1 = 13x - 5 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -5 + 13\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u_r} = (1,13,3) \\ P_r(0,-5,-1) \end{cases}$$

$$\pi \equiv 2x - 3y + Az = 10 \Rightarrow \vec{n} = (2,-3,A)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = (2,-3,A) \\ \vec{u_r} = (1,13,3) \\ \vec{n} \perp \vec{u_r} \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u_r} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (2,-3,A)(1,13,3) = 0 \Rightarrow 2 - 39 + 3A = 0 \Rightarrow 3A = 37 \Rightarrow \boxed{A = \frac{37}{3}}$$

Falta comprobar que la recta no está contenida en el plano. Para ello comprobamos que el punto $P_r(0,-5,-1)$ de la recta no pertenece al plano.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(0,-5,-1) \\ \pi \equiv 2x - 3y + \frac{37}{3}z = 10 \\ ¿P_r \in \pi? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿2 \cdot 0 - 3(-5) + \frac{37}{3}(-1) = 0? \Rightarrow ¿15 - \frac{37}{3} = 0?$$

No se cumple la igualdad, por lo que el punto no pertenece al plano. La recta y el plano son paralelos para $A = \frac{37}{3}$.

b) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases} \\ \pi \equiv 2x - 3y + 21z = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \\ 2x - 3y + 21z = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ x = 1 + y - 4z \\ 2x - 3y + 21z = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

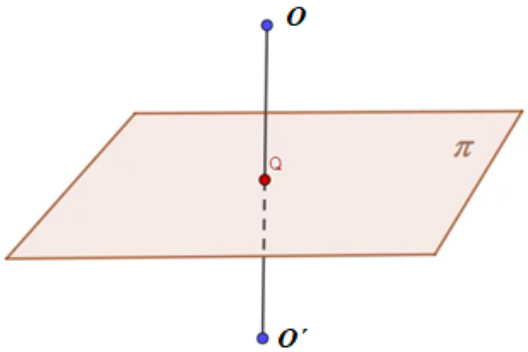
$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2(1+y-4z)-y+z=0 \\ 2(1+y-4z)-3y+21z=10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2+2y-8z-y+z=0 \\ 2+2y-8z-3y+21z=10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} y-7z=-2 \\ -y+13z=8 \end{matrix}\right\}$$

$$6z=6 \Rightarrow \boxed{z=1} \Rightarrow y-7=-2 \Rightarrow \boxed{y=5} \Rightarrow \boxed{x=1+5-4=2}$$

El punto de intersección de recta y plano es A(2, 5. 1).

c) Nos piden hallar el punto O´ del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por O(0, 0, 0), después hallamos el punto Q de corte de recta y plano. El punto Q es el punto medio del segmento $\overline{OO'}$.
La recta perpendicular al plano tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: 2x-3y+z=10 \Rightarrow \vec{n}=(2,-3,1)$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{v}=\vec{n}=(2,-3,1) \\ O(0,0,0)\in r \end{matrix}\right\} \Rightarrow r:\begin{cases} x=2\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto Q de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{matrix} \pi: 2x-3y+z=10 \\ r:\begin{cases} x=2\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4\lambda+9\lambda+\lambda=10 \Rightarrow 14\lambda=10 \Rightarrow \lambda=\frac{5}{7} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{7} \\ y=\frac{-15}{7} \Rightarrow Q\left(\frac{10}{7},\frac{-15}{7},\frac{5}{7}\right) \\ z=\frac{5}{7} \end{cases}$$

Para obtener el punto O´ simétrico de O respecto del plano π le sumamos al punto Q el vector $\overrightarrow{OQ}$.

$$\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{10}{7},\frac{-15}{7},\frac{5}{7}\right)-(0,0,0)=\left(\frac{10}{7},\frac{-15}{7},\frac{5}{7}\right)$$

$$O'=Q+\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{10}{7},\frac{-15}{7},\frac{5}{7}\right)+\left(\frac{10}{7},\frac{-15}{7},\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{20}{7},\frac{-30}{7},\frac{10}{7}\right)$$

El punto simétrico de O respecto del plano π tiene coordenadas $O'\left(\frac{20}{7},\frac{-30}{7},\frac{10}{7}\right)$.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$. Las rectas tangentes a la gráfica de la función f en los puntos de abscisa $x=-1$ y $x=2$ son paralelas. Además, f tiene un extremo relativo cuando $x=1$ y $f(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$.

(a) **(1,5 p)** Encuentra los valores de los parámetros A, B y C.

(b) **(1 p)** Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$ para los valores de los parámetros A = –3, B = 0 y C = 4.

(a) Si las rectas tangentes a la gráfica de la función f en los puntos de abscisa $x=-1$ y $x=2$ son paralelas implica que la pendiente es la misma → $f'(-1)=f'(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+2Ax+B \\ f'(-1)=f'(2) \end{array}\right\} \Rightarrow 3(-1)^2+2A(-1)+B=3\cdot 2^2+2A\cdot 2+B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3-2A+B=12+4A \Rightarrow \boxed{B-6A=9}$$

Si f tiene un extremo relativo cuando $x=1$ la derivada debe anularse para ese valor → $f'(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+2Ax+B \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3+2A+B=0 \Rightarrow \boxed{B+2A=-3}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y determinamos el valor de los parámetros A y B.

$$\left.\begin{array}{l} B-6A=9 \\ B+2A=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B-6A=9 \\ B=-2A-3 \end{array}\right\} \Rightarrow -2A-3-6A=9 \Rightarrow -8A=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{12}{-8}=\frac{-3}{2}} \Rightarrow \boxed{B=-2\frac{-3}{2}-3=0}$$

Nos falta por determinar el valor de C.

Sabemos que $f(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$. Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=2$$

Lo usamos para hallar el valor de C.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2 \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow 0^3+A\cdot 0^2+B\cdot 0+C=2 \Rightarrow \boxed{C=2}$$

Los parámetros son $A=\dfrac{-3}{2}$, $B=0$ y $C=2$.

(b)Para los valores de los parámetros A = –3, B = 0 y C = 4 la función queda $f(x)=x^3-3x^2+4$.

La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-1$ tiene la ecuación $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$. Hallamos el valor de la función y de su derivada en $x=-1$ y determinamos la ecuación de la recta tangente.

$$f(x)=x^3-3x^2+4 \Rightarrow f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+4=-1-3+4=0$$

$$f'(x)=3x^2-6x \Rightarrow f'(-1)=3(-1)^2-6(-1)=3+6=9$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=0 \\ f'(-1)=9 \\ y-f(-1)=f'(-1)(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=9(x+1) \Rightarrow \boxed{y=9x+9}$$

La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-1$ tiene la ecuación $y=9x+9$.

Ejercicio B3

Sea $f(x)=2xe^{-2x^2}$.

(a) **(1 p)** Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
(b) **(1 p)** Encuentra los extremos relativos de *f* y razona si son máximos o mínimos.
(c) **(0,5 p)** Calcula las asíntotas de *f*.

(a) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x)=2xe^{-2x^2} \Rightarrow f'(x)=2e^{-2x^2}+2x\cdot(-4x)e^{-2x^2}=2e^{-2x^2}-8x^2e^{-2x^2}=\left(2-8x^2\right)e^{-2x^2}$$

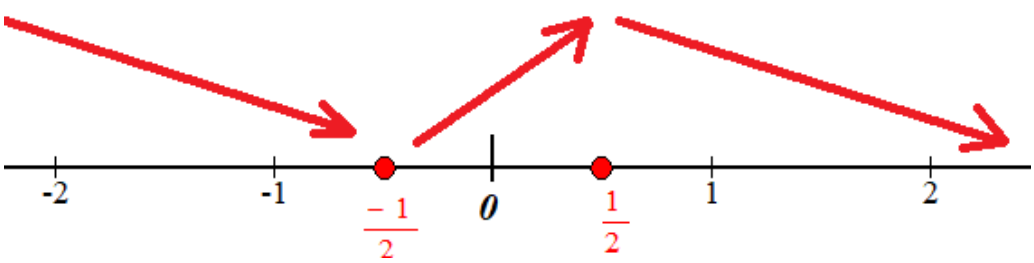
$$f'(x)=0\Rightarrow\left(2-8x^2\right)e^{-2x^2}=0\Rightarrow\left\{e^{-2x^2}\neq 0\right\}\Rightarrow 2-8x^2=0\Rightarrow 1-4x^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}}$$

Tenemos dos puntos críticos: $x=\frac{-1}{2}$ y $x=\frac{1}{2}$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale
  $f'(-1)=\left(2-8(-1)^2\right)e^{-2(-1)^2}=-6e^{-2}=\frac{-6}{e^2}<0$. La función decrece en $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\left(2-8\cdot 0^2\right)e^{-2\cdot 0^2}=2>0$.
  La función crece en $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale
  $f'(1)=\left(2-8\cdot 1^2\right)e^{-2\cdot 1^2}=-6e^{-2}=\frac{-6}{e^2}<0$. La función decrece en $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ y crece en $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

(b) Por lo visto en el apartado anterior la función tiene un mínimo relativo en $x=\frac{-1}{2}$ y un máximo relativo en $x=\frac{1}{2}$. Como $f\left(\frac{-1}{2}\right)=2\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2}=-e^{-1/2}=\frac{-1}{\sqrt{e}}$ y $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)^2}=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}$ el mínimo relativo tiene coordenadas $\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{\sqrt{e}}\right)$ y el máximo relativo es $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

(c) **Asíntota vertical**. $x=a$

El dominio de la función $f(x)=2xe^{-2x^2}$ es todo $\mathbb{R}$. No tiene asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2xe^{-2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{2x^2}}=\frac{+\infty}{+\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{4xe^{2x^2}}=\frac{2}{+\infty}=0$$

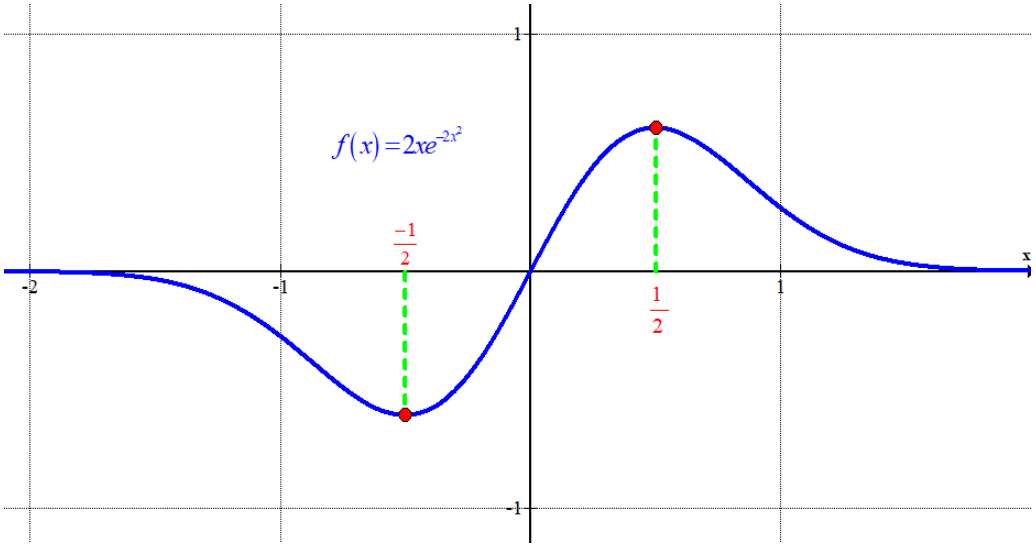
$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2xe^{-2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{2x^2}}=\frac{-\infty}{+\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{4xe^{2x^2}}=\frac{2}{-\infty}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.



CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4
(2,5 p) Calcula la siguiente integral, y explica el método empleado:

$$\int x\ln^2 x dx$$

Resolvemos la integral usando del método de integración por partes.

$$\int x\ln^2 x dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln^2 x \to du = 2\dfrac{1}{x}\ln x dx\\ dv = xdx \to v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2}\end{array}\right\} = \frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \int \frac{x^2}{2}2\frac{1}{x}\ln x dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \int x\ln x dx = ...$$

$$\int x\ln x dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln x \to du = \dfrac{1}{x}dx\\ dv = xdx \to v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2}\end{array}\right\} = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{x^2}{4}$$

$$... = \frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{x^2}{4}\right) = \boxed{\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\cdot\ln x + \frac{x^2}{4} + K}$$

Aplicando dos veces el método de integración por partes hemos obtenido que $\int x\ln^2 x dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\cdot\ln x + \frac{x^2}{4} + K$.

Ejercicio B4

Se consideran las curvas de ecuaciones $y=\frac{x^2}{3}$, $y=x^2+2x$ e $y=3$.

(a) **(1,25 p)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por dichas curvas.
(b) **(1,25 p)** Calcula el área de ese recinto.

(a) Averiguamos donde se cortan sus gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x^2}{3} \\ y=x^2+2x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{3}=x^2+2x \Rightarrow x^2=3x^2+6x \Rightarrow 2x^2+6x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x+3=0 \rightarrow \boxed{x=-3} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x^2}{3} \\ y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{3}=3 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=-3} \\ \boxed{x=3} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2+2x \\ y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+2x=3 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(-3)}}{2}=$$

$$=\frac{-2\pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-2+4}{2}=\boxed{1=x} \\ x=\frac{-2-4}{2}=\boxed{-3=x} \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos las gráficas y el recinto limitado por ellas en el primer cuadrante.

$y=x^2+2x$

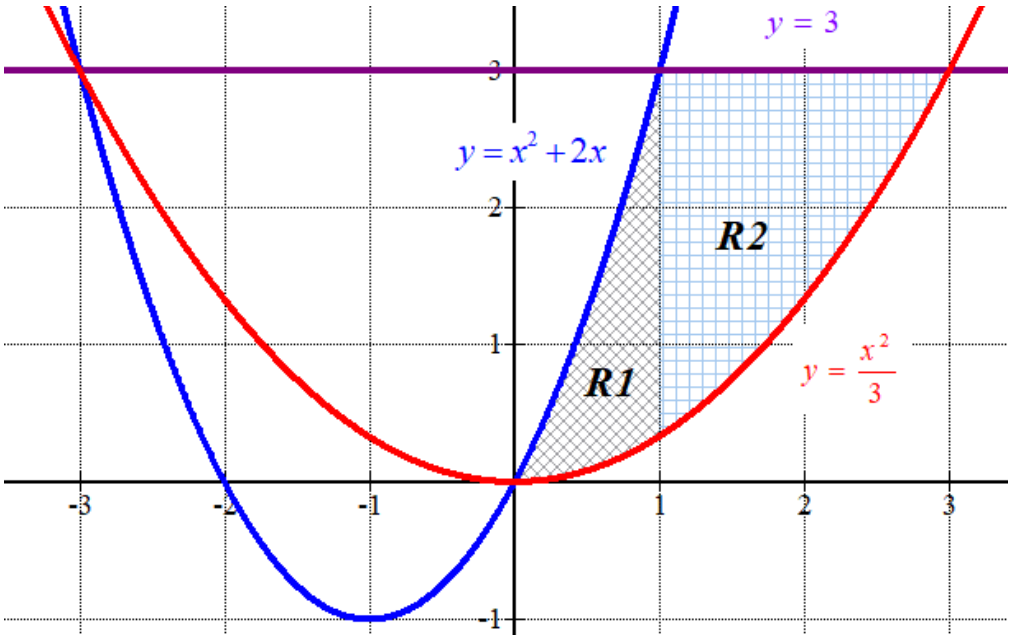
x	$y=x^2+2x$
-3	3
0	0
1	3
2	8
3	18

$y=\frac{x^2}{3}$

x	$y=x^2/3$
-3	3
0	0
1	1/3
2	4/3
3	3

$y=3$

x	$y=3$
-3	3
0	3
1	3
2	3
3	3



(b) El recinto limitado por las curvas lo dividimos en dos partes.
Hallamos el valor del área de R1.

$$Área\ R1 = \int_0^1 x^2 + 2x - \frac{x^2}{3}\,dx = \int_0^1 \frac{2x^2}{3} + 2x\,dx = \left[\frac{2x^3}{9} + x^2\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{2\cdot 1^3}{9} + 1^2\right] - \left[\frac{2\cdot 0^3}{9} + 0^2\right] = \frac{2}{9} + 1 = \boxed{\frac{11}{9} \simeq 1.22\ u^2}$$

Hallamos el valor del área de R2.

$$Área\ R2 = \int_1^3 3 - \frac{x^2}{3}\,dx = \left[3x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left[3x - \frac{x^3}{9}\right]_1^3 =$$

$$= \left[3\cdot 3 - \frac{3^3}{9}\right] - \left[3\cdot 1 - \frac{1^3}{9}\right] = 9 - 3 - 3 + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{28}{9} \simeq 3.111\ u^2}$$

El área total es la suma de las áreas obtenidas → $\frac{11}{9} + \frac{28}{9} = \frac{39}{9} = \frac{13}{3} \simeq 4.33 u^2$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5
Los resultados publicados en diciembre de 2019 sobre la aplicación de la vacuna M72 en Sudáfrica, Kenia y Zambia revelaron que la probabilidad de quedar protegido contra la tuberculosis pulmonar activa es de 0,54. Se aplica la vacuna a un grupo de 3289 adultos.
(a) **(0,5 p)** Identifica la distribución correspondiente al número de adultos que quedan protegidos, y determina sus parámetros.
(b) **(1 p)** Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en 1800 adultos.
(c) **(1 p)** Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en menos de 1700 adultos.

(a) Llamamos X = "Número de adultos protegidos contra la tuberculosis pulmonar activa de un grupo de 3289 adultos"
X es una variable binomial donde el número de repeticiones es n = 3289 y la probabilidad de éxito es p = 0.54. X = B(3289, 0.54)
Como el número de repeticiones es muy alto esta variable binomial se puede aproximar con una distribución normal de media $\mu = np = 3289 \cdot 0.54 = 1776.06$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{3289 \cdot 0.54 \cdot 0.46} \simeq 28.58$. Y = N(1776.06, 28.58).
Esta aproximación es buena pues $np = 1776.06 > 5$ y $nq = 3289 \cdot 0.46 = 1512.94 > 5$.

(b) Nos piden calcular $P(X = 1800)$.

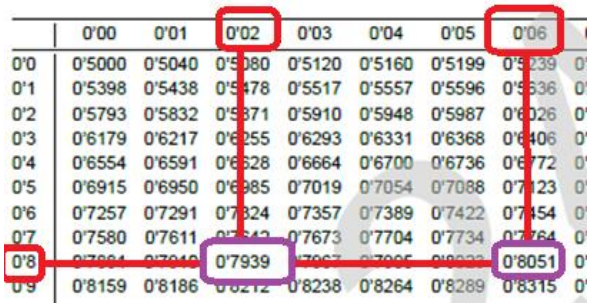
$$P(X = 1800) = \binom{3289}{1800} 0.54^{1800} \cdot 0.46^{1489} = \text{¡}\textit{Error en calculadora}\text{!}$$

Usamos la aproximación a la normal para calcular la probabilidad pedida.

$$P(X = 1800) = P(1799.5 \le Y \le 1800.5) = \{\textit{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(\frac{1799.5 - 1776.06}{28.58} \le Z \le \frac{1800.5 - 1776.06}{28.58}\right) = P(0.82 \le Z \le 0.86)$$

$$= P(Z \le 0.86) - P(Z \le 0.82) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 0.8051 - 0.7939 = \boxed{0.0112}$$



	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315

La probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en 1800 adultos es de 0.0112.

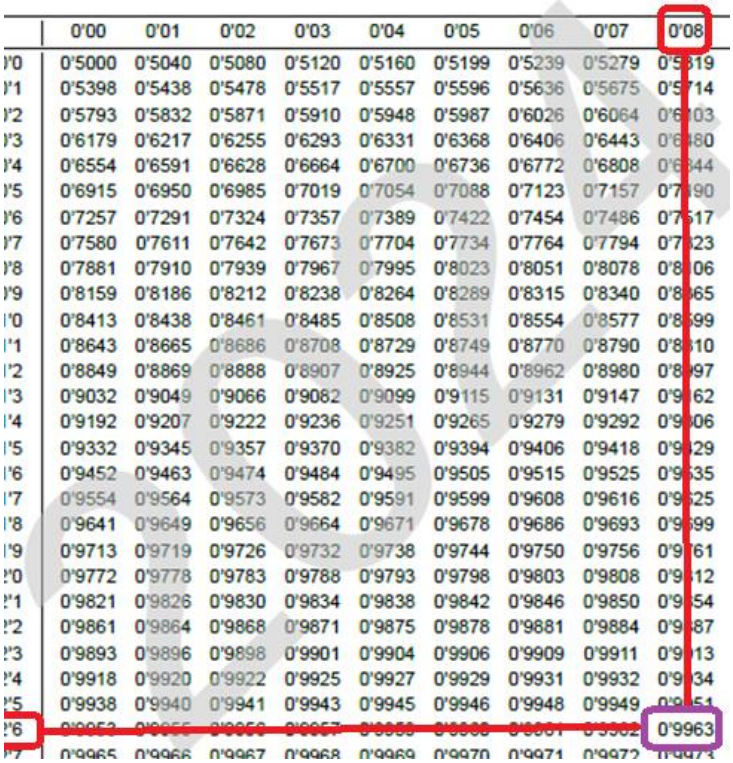
(c) Nos piden calcular $P(X < 1700)$. Utilizamos la aproximación a la normal Y.

$$P(X<1700)=P(Y\le 1699.5)=\{Tipificamos\}=$$

$$=P\left(Z\le\frac{1699.5-1776.06}{28.58}\right)=P(Z\le -2.68)=P(Z\ge 2.68)=$$

$$=1-P(Z\le 2.68)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=1-0.9963=\boxed{0.0037}$$

La probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en menos de 1700 adultos es de 0.0037.



	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08
'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319
'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714
'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103
'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480
'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844
'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190
'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517
'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823
'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106
'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365
'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599
'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810
'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997
'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162
'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306
'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429
'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535
'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625
'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699
'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761
'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812
'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854
'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887
'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913
'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934
'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951
'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963
'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973

Ejercicio B5

Sean A y B sucesos aleatorios independientes, siendo sus probabilidades $P(A)=0,7$ y $P(B)=0,1$, y sean $\overline{A}$ y $\overline{B}$ los sucesos complementarios de A y B respectivamente. Calcula las siguientes probabilidades razonadamente, e indica claramente el proceso o ley aplicada:

(a) **(0,5 p)** $P(A\cup B)$**,**

(b) **(0,5 p)** $P(\overline{A}\cup\overline{B})$**,**

(c) **(0,5 p)** $P(\overline{A}\cap\overline{B})$**,**

(d) **(0,5 p)** $P(A\cap\overline{B})$**,**

(e) **(0,5 p)** $P(\overline{A}/\overline{B})$.

Si los sucesos A y B son independientes se cumple que $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.7\cdot 0.1=0.07$.

También sabemos que $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.7=0.3$ y $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.1=0.9$.

(a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.7+0.1-0.07=\boxed{0.73}$$

(b) Utilizamos las leyes de Morgan.

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-0.07=\boxed{0.93}$$

(c) Utilizamos las leyes de Morgan.

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.73=\boxed{0.27}$$

(d) Utilizamos que $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$.

$$\left.\begin{array}{l}P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})\\P(A)=0,7\\P(A\cap B)=0.07\end{array}\right\}\Rightarrow 0.7=0.07+P(A\cap\overline{B})\Rightarrow P(A\cap\overline{B})=0.7-0.07=\boxed{0.63}$$

(e) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0.27}{0.9}=\boxed{0.3}$$

EAU ordinaria 2024

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2024ko OHIKOA

ORDINARIA 2024

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

(2 p) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 2 \\ x + 2y + (\alpha - 1)z = -1 \\ 2x + y + (\alpha - 2)z = 1 \end{cases}$$

(0,5 p) Resuelve el sistema, si es posible, en el caso $\alpha = 1$.

Ejercicio B1

Se sabe que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 .$$

Calcula, explicando las propiedades aplicadas,

(a) **(1,5 p)** $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$ (b) **(1 p)** $\begin{vmatrix} a & x & 2p \\ b & y & 2q \\ c & z & 2r \end{vmatrix}$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Se consideran las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = -1 + 4\lambda, \\ z = 2 - \lambda; \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x - y = 1, \\ z = 3. \end{cases},$$

(a) **(1 p)** Calcula la posición relativa de las rectas *r* y *s*.
(b) **(0,75 p)** Calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
(c) **(0,75 p)** Dado el punto *P*(−8,−8, 0), calcula el punto *Q* de la recta *r* de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a la recta *r*.

Ejercicio B2

Dados los puntos $P_1(1, 4, 5)$, $P_2(1, 2, -1)$, $P_3(0, -2, 3)$ y $P_4(-2, 0, 1)$, calcula:
(a) **(1 p)** la ecuación del plano π que contiene a los puntos P_2, P_3 y P_4.
(b) **(1,5 p)** el punto simétrico de P_1 respecto del plano π.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1}$.

(a) **(0,5 p)** Encuentra las asíntotas de *f*.
(b) **(1 p)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
(c) **(0,5 p)** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 0$.
(d) **(0,5 p)** Haz una representación aproximada de la gráfica de la función *f*.

Ejercicio B3

Se sabe que la función $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$ tiene un extremo relativo cuando $x = 1/2$ y la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 6x - 2$.

(a) **(1,5 p)** Encuentra los valores de los parámetros A, B y C.

(b) **(1 p)** Encuentra todos los extremos relativos de la función f y razona si son máximos o mínimos.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 p)** $\int \frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1}dx$ (b) **(1,25 p)** $\int \frac{2-3x}{x^2+2x+1}dx$

Ejercicio B4

Se consideran las curvas de ecuaciones $y = x^2$ e $y = \frac{x^2}{3}$ y la recta de ecuación $y = x$.

(a) **(1,25 p)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.

(b) **(1,25 p)** Calcula el área de ese recinto.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Tenemos dos urnas con bolas de colores, La urna A contiene 3 bolas verdes, 5 bolas rojas y 4 bolas azules. La urna B contiene 2 bolas verdes, 2 bolas rojas y 3 bolas azules. Se saca, al azar, una bola de la urna A y se mete en la urna B. Posteriormente se saca una bola de la urna B.

(a) **(0,5 p)** Realiza el correspondiente diagrama de árbol.

(b) **(0,75 p)** Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea verde.

(c) **(0,5 p)** Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea verde sabiendo que la bola extraída de la urna A ha sido roja.

(d) **(0.75 p)** Sabiendo que la bola extraída de la urna B es verde, calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna A haya sido roja.

Ejercicio B5

Tras la realización de un estudio, se ha llegado a la conclusión de que el tiempo medio que un adulto aguanta bajo el agua sin respirar es de 45 segundos, con una desviación típica de 7,3 segundos, ajustándose los datos a una distribución normal.

(a) **(1 p)** Calcula el porcentaje de adultos que aguanta más de 57 segundos.

(b) **(1,5 p)** Calcula el porcentaje de adultos que aguanta entre 39 y 57 segundos.

Soluciones

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

(2 p) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 2 \\ x + 2y + (\alpha - 1)z = -1 \\ 2x + y + (\alpha - 2)z = 1 \end{cases}$$

(0,5 p) Resuelve el sistema, si es posible, en el caso $\alpha = 1$.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha - 1 \\ 2 & 1 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \alpha - 1 & -1 \\ 2 & 1 & \alpha - 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha - 1 \\ 2 & 1 & \alpha - 2 \end{vmatrix} = 2\alpha(\alpha - 2) + 2(\alpha - 1) + 1 - 4 - (\alpha - 2) - \alpha(\alpha - 1) =$$

$$= 2\alpha^2 - 4\alpha + 2\alpha - \cancel{2} + 1 - 4 - \cancel{\alpha} + \cancel{2} - \alpha^2 + \cancel{\alpha} = \alpha^2 - 2\alpha - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = \boxed{3 = \alpha} \\ \frac{2-4}{2} = \boxed{-1 = \alpha} \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha \neq 3$ y $\alpha \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -2 & -1\\ 2 & 1 & -3 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,2^a+Fila\,1^a & & & \\ 1 & 2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 2\\ \hline 0 & 3 & -1 & 1\end{array}\right\}\rightarrow \text{Nueva fila } 2^a$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3^a+2\cdot Fila\,1^a & & & \\ 2 & 1 & -3 & 1\\ -2 & 2 & 2 & 4\\ \hline 0 & 3 & -1 & 5\end{array}\right\}\rightarrow \text{Nueva fila } 3^a\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3^a-Fila\,2^a & & & \\ 0 & 3 & -1 & 5\\ 0 & -3 & 1 & -1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right\}\rightarrow \text{Nueva fila } 3^a\Rightarrow\left(\begin{array}{\overbrace{ccc}^{A/B}c} -1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -1 & 1\\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 4\end{array}\right)$$

La matriz A tiene rango 2 y la matriz ampliada A/B tiene rango 3. Las matrices tienen rangos distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. Si $\alpha=3$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc} 2\cdot Fila\,2^a-Fila\,3^a & & & \\ 2 & 4 & 4 & -2\\ -2 & -1 & -1 & -1\\ \hline 0 & 3 & 3 & -3\end{array}\right\}\rightarrow \text{Nueva fila } 3^a$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} 3\cdot Fila\,2^a-Fila\,1^a & & & \\ 3 & 6 & 6 & -3\\ -3 & -1 & -1 & -2\\ \hline 0 & 5 & 5 & -5\end{array}\right\}\rightarrow \text{Nueva fila } 2^a\Rightarrow\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 5 & 5 & -5\\ 0 & 3 & 3 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} 3\cdot Fila\,2^a-5\cdot Fila\,3^a & & & \\ 0 & 15 & 15 & -15\\ 0 & -15 & -15 & 15\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Nueva fila } 3^a\Rightarrow\left(\begin{array}{\overbrace{ccc}^{A/B}c} 3 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 5 & 5 & -5\\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0\end{array}\right)$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 3$ y $\alpha \neq -1$ el sistema es compatible determinado, si $\alpha = -1$ el sistema es incompatible y si $\alpha = 3$ el sistema es compatible indeterminado.

Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible determinado (caso 1). Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y=-1 \\ 2x+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ x=-1-2y \\ 2x+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1-2y+y+z=2 \\ 2(-1-2y)+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y+z=3 \\ -2-4y+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3+y \\ -3y-z=3 \end{cases} \Rightarrow -3y-3-y=3 \Rightarrow -4y=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}} \\ \boxed{x=-1-2\frac{-3}{2}=2} \end{cases}$$

La solución es $x=2;\ y=\frac{-3}{2};\ z=\frac{3}{2}$.

Ejercicio B1

Se sabe que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 .$$

Calcula, explicando las propiedades aplicadas,

(a) **(1,5 p)** $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$ (b) **(1 p)** $\begin{vmatrix} a & x & 2p \\ b & y & 2q \\ c & z & 2r \end{vmatrix}$

a) Si se multiplican todos los elementos de una fila por una misma contante, el determinante también queda multiplicado por esa constante.

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$$

Si a una fila se le suma un múltiplo de otra fila, el valor del determinante no cambia. Sumamos a la fila 3ª la fila 1ª y a la fila 2ª le restamos la fila 1ª.

$$3\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ -p & -q & -r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

Por la primera propiedad utilizada podemos extraer (–1) de la fila 2ª y 2 de la fila 3ª.

$$3\begin{vmatrix} a & b & c \\ -p & -q & -r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 3(-1)2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -6(2) = \boxed{-12}$$

b) El determinante de una matriz y el de su traspuesta valen lo mismo.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = 2$$

Si intercambiamos la columna 2ª y 3ª el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = -2$$

Y por la primera propiedad enunciada en el ejercicio podemos multiplicar la columna 3ª por 2 y multiplicar por 2 el determinante.

$$\begin{vmatrix} a & x & 2p \\ b & y & 2q \\ c & z & 2r \end{vmatrix} = -2(2) = \boxed{-4}$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Se consideran las siguientes rectas:

$$r\equiv\begin{cases}x=2\lambda,\\ y=-1+4\lambda,\\ z=2-\lambda;\end{cases}\qquad s\equiv\begin{cases}2x-y=1,\\ z=3.\end{cases},$$

(a) **(1 p)** Calcula la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

(b) **(0,75 p)** Calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

(c) **(0,75 p)** Dado el punto *P*(−8,−8, 0), calcula el punto *Q* de la recta *r* de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a la recta *r*.

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r\equiv\begin{cases}x=2\lambda,\\ y=-1+4\lambda,\\ z=2-\lambda;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(2,4,-1)\\ P_r(0,-1,2)\end{cases}$$

$$s\equiv\begin{cases}2x-y=1,\\ z=3.\end{cases}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}y=-1+2x,\\ z=3.\end{cases}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=\alpha\\ y=-1+2\alpha,\\ z=3.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_s}=(1,2,0)\\ Q_s(0,-1,3)\end{cases}$$

Comprobamos si los vectores directores tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{u_r}=(2,4,-1)\\ \overrightarrow{v_s}=(1,2,0)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{2}{1}=\frac{4}{2}\neq\frac{-1}{0}$$

No tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.
Las rectas se cortan o cruzan.
Hallamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\overrightarrow{P_rQ_s}=(0,-1,3)-(0,-1,2)=(0,0,1)$$

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{u_r}=(2,4,-1)\\ \overrightarrow{v_s}=(1,2,0)\\ \overrightarrow{P_rQ_s}=(0,0,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix}2&4&-1\\1&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=4-4=0$$

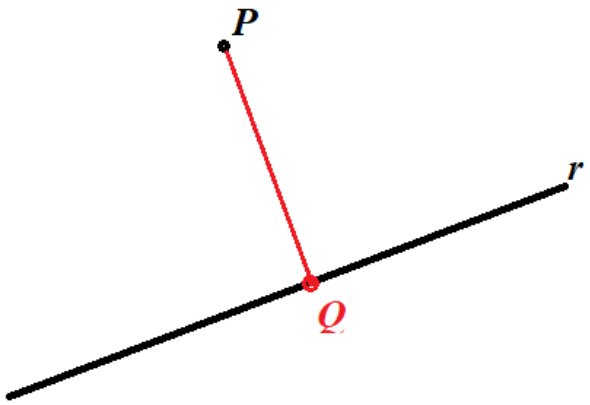
Como el producto mixto es nulo las rectas se cortan. Están en un mismo plano y coinciden en un único punto.

b) El plano que contiene ambas rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y pasa por el punto $P_r(0,-1,2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{u_r}=(2,4,-1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(1,2,0)\\ P_r(0,-1,2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x & y+1 & z-2\\ 2 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y-1+4z-8-4z+8+2x=0\Rightarrow \boxed{\pi: 2x-y-1=0}$$

c) Nos piden hallar el punto Q del dibujo.



Hallamos el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto P. Luego hallamos el punto de corte del plano y la recta que será el punto Q.
El plano π´ perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}P(-8,-8,0)\in\pi'\\ \overrightarrow{n'}=\overrightarrow{u_r}=(2,4,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}P(-8,-8,0)\in\pi'\\ \pi': 2x+4y-z+D=0\end{array}\right\}\Rightarrow -16-32+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=48\Rightarrow \pi': 2x+4y-z+48=0$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta *r* y el plano π´.

$$\left.\begin{array}{l}r\equiv\begin{cases}x=2\lambda,\\ y=-1+4\lambda,\\ z=2-\lambda;\end{cases}\\ \pi': 2x+4y-z+48=0\end{array}\right\}\Rightarrow 4\lambda+4(-1+4\lambda)-2+\lambda+48=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\lambda-4+16\lambda-2+\lambda+48=0\Rightarrow 21\lambda=-42\Rightarrow \lambda=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2(-2)=-4\\ y=-1+4(-2)=-9\Rightarrow \boxed{Q(-4,-9,4)}\\ z=2+2=4\end{cases}$$

El punto buscado es $Q(-4,-9,4)$.

Ejercicio B2
Dados los puntos $P_1(1, 4, 5)$, $P_2(1, 2,-1)$, $P_3(0,-2, 3)$ y $P_4(-2, 0, 1)$, calcula:
(a) **(1 p)** la ecuación del plano π que contiene a los puntos P_2, P_3 y P_4.
(b) **(1,5 p)** el punto simétrico de P_1 respecto del plano π.

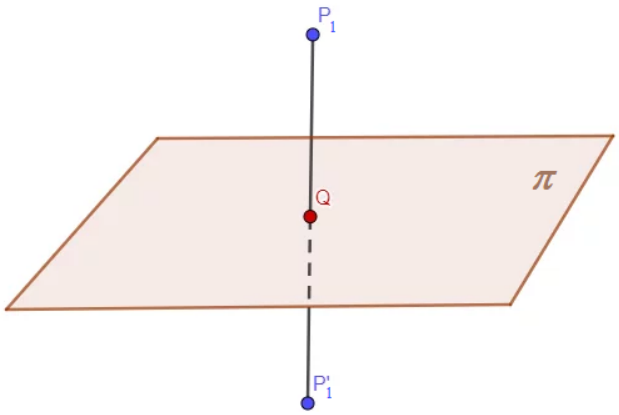
a) Hallamos la ecuación del plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{P_2P_3}=(0,-2,3)-(1,2,-1)=(-1,-4,4)\\ \vec{v}=\overrightarrow{P_2P_4}=(-2,0,1)-(1,2,-1)=(-3,-2,2)\\ P_4(-2,0,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x+2 & y & z-1\\ -1 & -4 & 4\\ -3 & -2 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8\cancel{(x+2)}-12y+2(z-1)-12(z-1)+2y+8\cancel{(x+2)}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12y+2z-2-12z+12+2y=0\Rightarrow -10y-10z+10=0\Rightarrow \boxed{\pi: y+z-1=0}$$

b) Nos piden hallar el punto P_1' del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por P_1, después hallamos el punto Q de corte de recta y plano. El punto Q es el punto medio del segmento $\overline{P_1P_1'}$.
La recta perpendicular al plano tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: y+z-1=0\Rightarrow \vec{n}=(0,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=\vec{n}=(0,1,1)\\ P_1(1,4,5)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=1\\ y=4+\alpha\\ z=5+\alpha\end{cases}$$

Hallamos el punto Q de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: y+z-1=0\\ r:\begin{cases}x=1\\ y=4+\alpha\\ z=5+\alpha\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 4+\alpha+5+\alpha-1=0\Rightarrow 2\alpha=-8\Rightarrow\alpha=-4\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=4-4=0\\ z=5-4=1\end{cases}\Rightarrow Q(1,0,1)$$

Para obtener el punto P_1' simétrico de P_1 respecto del plano π le sumamos al punto Q el vector $\overrightarrow{P_1Q}$.

$$\overrightarrow{P_1Q} = (1,0,1) - (1,4,5) = (0,-4,-4)$$

$$P_1' = Q + \overrightarrow{P_1Q} = (1,0,1) + (0,-4,-4) = (1,-4,-3)$$

El punto simétrico de P_1 respecto del plano π tiene coordenadas $P_1'(1,-4,-3)$.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+1}$.

(a) **(0,5 p)** Encuentra las asíntotas de *f*.

(b) **(1 p)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.

(c) **(0,5 p)** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$

(d) **(0,5 p)** Haz una representación aproximada de la gráfica de la función *f*.

a) Hallamos el dominio de la función.

$$x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{1\}$.

Asíntota vertical. $x=a$.

¿$x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-2x+1}=\frac{1}{1^2-2+1}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-2\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1-2\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}=\frac{0}{1}=\boxed{0}$$

La recta $y=0$ es una asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

Al existir asíntota horizontal no puede existir asíntota oblicua.

b) Hallamos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f'(x)=\frac{1(x^2-2x+1)-(2x-2)x}{(x^2-2x+1)^2}=\frac{x^2-\cancel{2x}+1-2x^2+\cancel{2x}}{(x^2-2x+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2-2x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-x^2+1}{(x^2-2x+1)^2}=0\Rightarrow -x^2+1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow\boxed{x=\sqrt{1}=\pm 1}$$

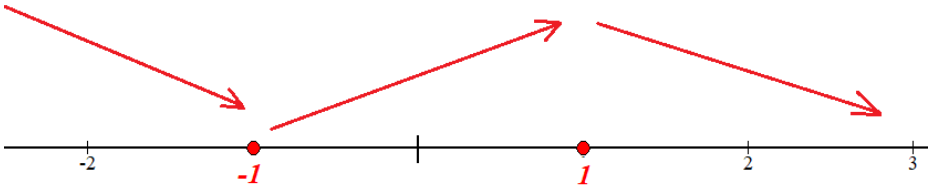
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$f'(-2)=\dfrac{-(-2)^2+1}{((-2)^2-2(-2)+1)^2}=\dfrac{-3}{81}<0$. La función decrece en $(-\infty,-1)$.

- En el intervalo $(-1,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{-0^2+1}{\left(0^2-2\cdot 0+1\right)^2}=1>0$. La función crece en $(-1,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{-2^2+1}{\left(2^2-2\cdot 2+1\right)^2}=-3<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:

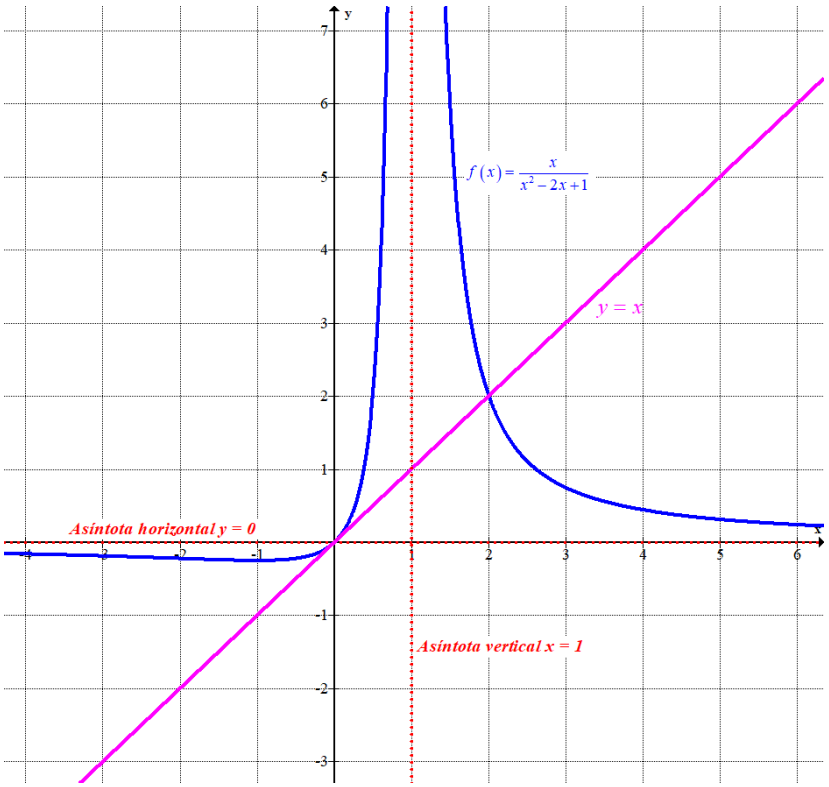


La función decrece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(-1,1)$.

c) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ tiene ecuación $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+1}\Rightarrow f(0)=\dfrac{0}{0^2-2\cdot 0+1}=0 \\ f'(x)=\dfrac{-x^2+1}{\left(x^2-2x+1\right)^2}\Rightarrow f'(0)=\dfrac{-0^2+1}{\left(0^2-2\cdot 0+1\right)^2}=1 \\ y-f(0)=f'(0)(x-0) \end{array}\right\}\Rightarrow y-0=1(x-0)\Rightarrow \boxed{y=x}$$

d) Dibujamos la gráfica de la función.



Ejercicio B3

Se sabe que la función $f(x)=Ax^4+Bx^2+C$ tiene un extremo relativo cuando $x = 1/2$ y la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 6x - 2$.

(a) **(1,5 p)** Encuentra los valores de los parámetros A, B y C.

(b) **(1 p)** Encuentra todos los extremos relativos de la función f y razona si son máximos o mínimos.

a) Si la función tiene un extremo relativo cuando $x = 1/2$ entonces la derivada se anula para este valor → $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=4Ax^3+2Bx \\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4A\left(\frac{1}{2}\right)^3+2B\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \frac{A}{2}+B=0 \Rightarrow A+2B=0 \Rightarrow \boxed{A=-2B}$$

Si la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 6x – 2$ significa que recta tangente y la función coinciden en $x = 1$ y que la derivada de la función para $x = 1$ vale 6 (pendiente de la recta tangente).

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=Ax^4+Bx^2+C \\ \text{Tan } gente \rightarrow x=1 \rightarrow y=6-2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4=A\cdot 1^4+B\cdot 1^2+C \Rightarrow \boxed{4=A+B+C}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=4Ax^3+2Bx \\ f'(1)=6 \end{array}\right\} \Rightarrow 4A\cdot 1^3+2B=6 \Rightarrow 4A+2B=6 \Rightarrow \boxed{2A+B=3}$$

Juntamos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} A=-2B \\ 4=A+B+C \\ 2A+B=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4=-2B+B+C \\ 2(-2B)+B=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4=-B+C \\ -4B+B=3 \rightarrow -3B=3 \rightarrow \boxed{B=-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4=1+C \Rightarrow \begin{cases} \boxed{C=3} \\ \boxed{A=-2(-1)=2} \end{cases}$$

Los valores buscados son A = 2, B = –1 y C = 3.

b) La función queda $f(x)=2x^4-x^2+3$. Buscamos el resto de puntos críticos de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=8x^3-2x \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 8x^3-2x=0 \Rightarrow 2x\left(4x^2-1\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 4x^2-1=0 \rightarrow 4x^2=1 \rightarrow x^2=\frac{1}{4} \rightarrow \boxed{x=\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en estos tres puntos críticos.

$$f''(x)=16x^2-2 \Rightarrow \begin{cases} f''(-1/2)=16(-1/2)^2-2=2>0 \rightarrow \textit{Mínimo} \\ f''(0)=16\cdot 0^2-2=-2<0 \rightarrow \textit{Máximo} \\ f''(1/2)=16(1/2)^2-2=2>0 \rightarrow \textit{Mínimo} \end{cases}$$

La función tiene dos mínimos relativos: en $x=\frac{-1}{2}$ y en $x=\frac{1}{2}$.

La función tiene un máximo relativo en $x = 0$.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4
Calcula las dos integrales siguientes:
(a) **(1,25 p)** $\int \frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1}dx$ (b) **(1,25 p)** $\int \frac{2-3x}{x^2+2x+1}dx$

a) Resolvemos la primera integral.

$$\int \frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1}dx = \ldots$$

$$\begin{array}{rl|l} x^3 & -3x+2 & x^2+2x+1 \\ \cline{3-3} -x^3-2x^2-x & & x-2 \\ \cline{1-1} & -2x^2-4x+2 & \\ & 2x^2+4x+2 & \Rightarrow \frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1} = x-2+\frac{4}{x^2+2x+1} \\ \cline{2-2} & 4 & \end{array}$$

$$\ldots = \int x-2+\frac{4}{x^2+2x+1}dx = \frac{x^2}{2}-2x+\int \frac{4}{x^2+2x+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}-2x+\int \frac{4}{(x+1)^2}dx = \frac{x^2}{2}-2x+4\int (x+1)^{-2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}-2x+4\frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \boxed{\frac{x^2}{2}-2x-\frac{4}{x+1}+K}$$

b) Resolvemos la segunda integral descomponiendo la fracción del integrando en fracciones simples.

$$\frac{2-3x}{x^2+2x+1} = \frac{2-3x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{2-3x}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)}{(x+1)^2}+\frac{B}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$2-3x = A(x+1)+B \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \rightarrow 2+3=B \rightarrow B=5 \\ x=0 \rightarrow 2=A+B \rightarrow 2=A+5 \rightarrow A=-3 \end{cases}$$

$$\frac{2-3x}{x^2+2x+1} = \frac{-3}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}$$

Calculamos la integral pedida.

$$\int \frac{2-3x}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{-3}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}dx = \int \frac{-3}{x+1}dx+\int \frac{5}{(x+1)^2}dx =$$

$$= -3\int \frac{1}{x+1}dx+5\int (x+1)^{-2}dx = -3\ln|x+1|+5\frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \boxed{-3\ln|x+1|-\frac{5}{x+1}+K}$$

Ejercicio B4

Se consideran las curvas de ecuaciones $y = x^2$ e $y = \dfrac{x^2}{3}$ y la recta de ecuación $y = x$.

(a) **(1,25 p)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.
(b) **(1,25 p)** Calcula el área de ese recinto.

a) Averiguamos donde se cortan sus gráficas.

$$\left.\begin{matrix} y = \dfrac{x^2}{3} \\ y = x^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{3} = x^2 \Rightarrow x^2 = 3x^2 \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$\left.\begin{matrix} y = \dfrac{x^2}{3} \\ y = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{3} = x \Rightarrow x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ \boxed{x = 3} \end{cases}$$

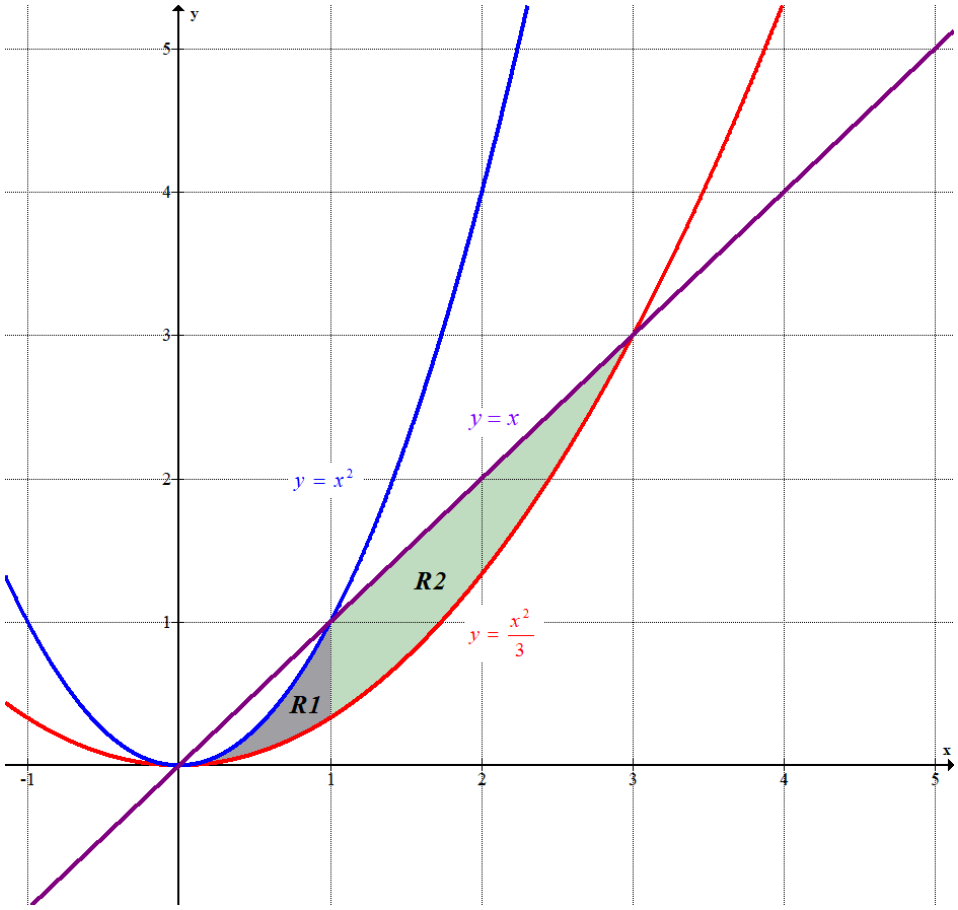
$$\left.\begin{matrix} y = x^2 \\ y = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ \boxed{x = 1} \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos las gráficas y el recinto limitado por ellas.

x	$y = x^2$
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

x	$y = \dfrac{x^2}{3}$
-1	$1/3$
0	0
1	$1/3$
2	$4/3$
3	3

x	$y = x$
0	0
1	1



b) El recinto limitado por las curvas lo dividimos en dos partes para hallar su área.
Hallamos el valor del área de R1.

$$Área\,1 = \int_0^1 x^2 - \frac{x^2}{3}\,dx = \int_0^1 \frac{2x^2}{3}\,dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = \boxed{\frac{2}{9}\,u^2}$$

Hallamos el valor del área de R2.

$$Área\,2 = \int_1^3 x - \frac{x^2}{3}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{9}\right]_1^3 =$$

$$= \left[\frac{3^2}{2} - \frac{3^3}{9}\right] - \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{9}\right] = \frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{10}{9} \simeq 1.111\,u^2}$$

El área total es la suma de las áreas obtenidas → $\frac{2}{9} + \frac{10}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \simeq 1.33u^2$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Tenemos dos urnas con bolas de colores, La urna A contiene 3 bolas verdes, 5 bolas rojas y 4 bolas azules. La urna B contiene 2 bolas verdes, 2 bolas rojas y 3 bolas azules. Se saca, al azar, una bola de la urna A y se mete en la urna B. Posteriormente se saca una bola de la urna B.

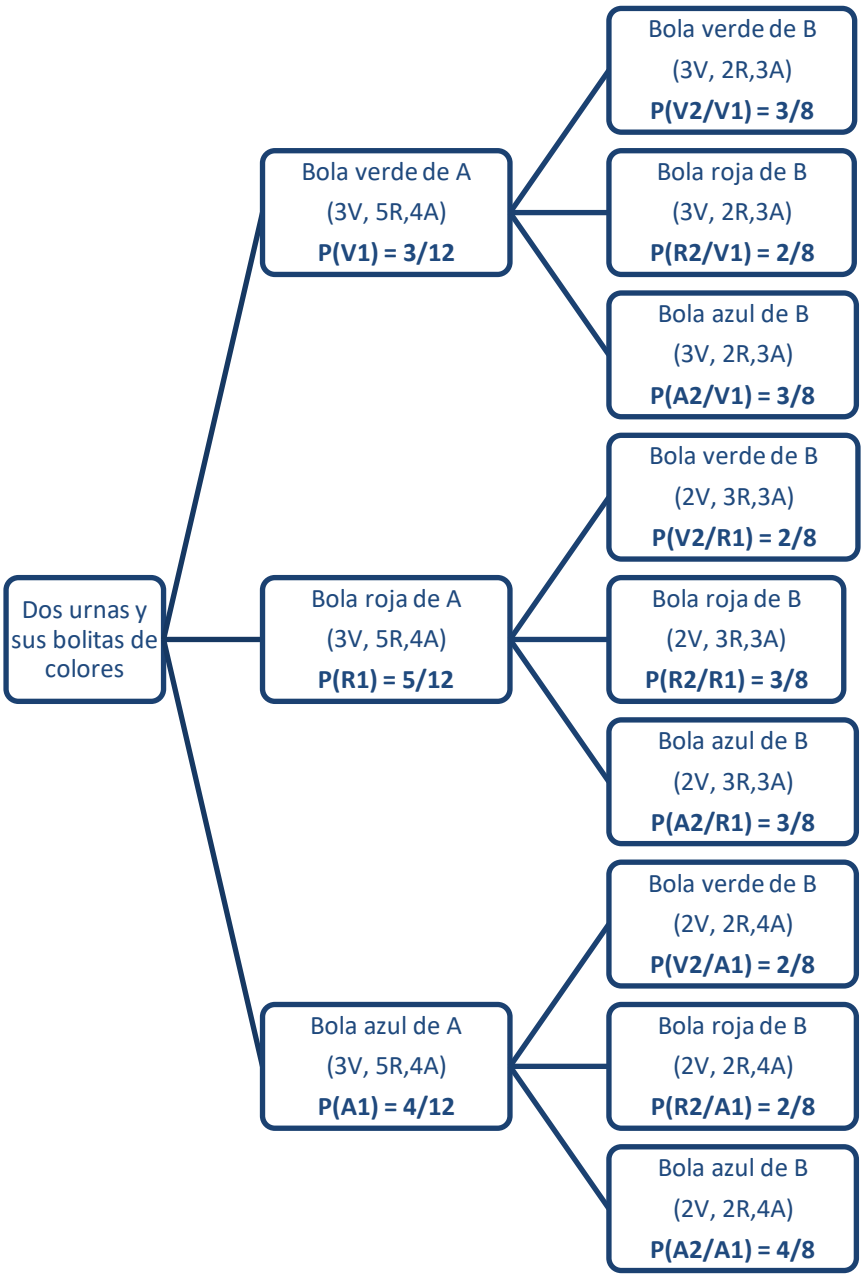
(a) **(0,5 p)** Realiza el correspondiente diagrama de árbol.

(b) **(0,75 p)** Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea verde.

(c) **(0,5 p)** Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea verde sabiendo que la bola extraída de la urna A ha sido roja.

(d) **(0.75 p)** Sabiendo que la bola extraída de la urna B es verde, calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna A haya sido roja.

a) Llamamos A1 y A2 al suceso "sacar bola azul de la urna A o B respectivamente", V2 y V2 al suceso "sacar bola verde de la urna A o B respectivamente" y R1 y R2 al suceso "sacar bola roja de la urna A o B respectivamente".



b) Nos piden calcular $P(V2)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V2)=P(V1)P(V2/V1)+P(R1)P(V2/R1)+P(A1)P(V2/A1)=$$

$$=\frac{3}{12}\cdot\frac{3}{8}+\frac{5}{12}\cdot\frac{2}{8}+\frac{4}{12}\cdot\frac{2}{8}=\frac{27}{96}=\boxed{\frac{9}{32}=0.28125}$$

c) Nos piden calcular $P(V2/R1)$. Esta probabilidad aparece reflejada en el diagrama de árbol y vale $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0.25$.Como se ha pasado una bola roja de la urna A a la urna B tenemos 2 bolas verdes, 3 rojas y 3 azules, por lo que aplicando la regla de Laplace la probabilidad de sacar una bola verde (2 bolas verdes) de la urna B (un total de 8 bolas) vale 2/8.

d) Nos piden calcular $P(R1/V2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R1/V2)=\frac{P(R1\cap V2)}{P(V2)}=\frac{P(R1)P(V2/R1)}{P(V2)}=\frac{\frac{5}{12}\cdot\frac{2}{8}}{\frac{9}{32}}=\boxed{\frac{10}{27}\simeq 0.37}$$

Ejercicio B5
Tras la realización de un estudio, se ha llegado a la conclusión de que el tiempo medio que un adulto aguanta bajo el agua sin respirar es de 45 segundos, con una desviación típica de 7,3 segundos, ajustándose los datos a una distribución normal.
(a) **(1 p)** Calcula el porcentaje de adultos que aguanta más de 57 segundos.
(b) **(1,5 p)** Calcula el porcentaje de adultos que aguanta entre 39 y 57 segundos.

X = segundos que un adulto aguanta bajo el agua sin respirar. X = N(45, 7.3)

a) Nos piden calcular $P(X>57)$.

$$P(X>57)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{57-45}{7.3}\right)=P(Z>1.64)=1-P(Z\le 1.64)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en}\\ \text{la tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}=1-0.9495=\boxed{0.0505}$$

El porcentaje de adultos que aguantan debajo del agua sin respirar más de 57 segundos es de 5.05 %.

b) Nos piden calcular $P(39<X<57)$.

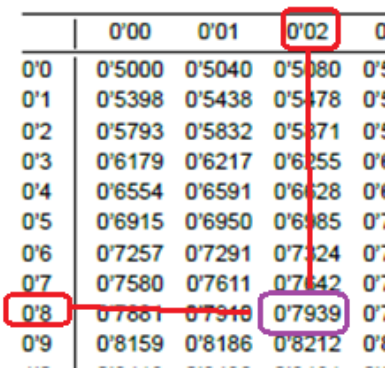
$$P(39<X<57)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{39-45}{7.3}<Z<\frac{57-45}{7.3}\right)=$$

$$=P(-0.82<Z<1.64)=P(Z<1.64)-P(Z<-0.82)=$$

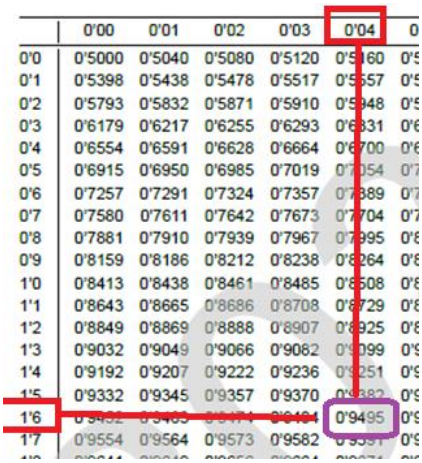
$$=P(Z<1.64)-P(Z>0.82)=P(Z<1.64)-\left[1-P(Z<0.82)\right]=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en}\\ \text{la tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}=0.9495-\left[1-0.7939\right]=\boxed{0.7434}$$

El porcentaje de adultos que aguanta entre 39 y 57 segundos es del 74.34 %.



	0'00	0'01	0'02	0
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8



	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9

EAU extraordinaria 2023

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2023ko EZOHIKOA	EXTRAORDINARIA 2023
MATEMATIKA II	**MATEMÁTICAS II**

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1
Se considera el sistema de ecuaciones lineales que sigue:

$$\begin{cases} 3x+y+\alpha z=0 \\ 2x+\alpha y+z=1 \\ 3x+\alpha y+z=\alpha-1 \end{cases}$$

Discute su compatibilidad en función de los valores del parámetro α.
Resuelve el sistema para $\alpha=0$, si es posible.

Ejercicio B1
Calcula las dos matrices A y B que satisfacen las siguientes igualdades:

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$3A-2B=\begin{pmatrix} 6 & -16 & 6 & -3 \\ -4 & 18 & -4 & 18 \end{pmatrix}.$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2
Sea la recta *r* y el plano π, que se cortan perpendicularmente en el punto $P(1,-1,2)$. Si el plano π pasa por el punto $Q(1,2,3)$ y contiene al vector $(0,0,2)$, calcula las ecuaciones de la recta *r* y del plano π.

,

Ejercicio B2
Se consideran tres planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 4x+2y-4z=2,\ \pi_2 \equiv x-y-z=2 \text{ y } \pi_3 \equiv x+ay+z=b.$$

¿Existen valores de los parámetros *a* y *b* para los cuales los tres planos se cortan en una recta? En caso de que la respuesta sea negativa, razónala.
En el caso de que la respuesta sea positiva, calcula dichos valores.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3
Sea $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, calcula sus asíntotas, y encuentra la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 0. Haz una representación aproximada de la gráfica de la función *f*.

Ejercicio B3
Sea $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ Encuentra los valores de los parámetros *A*, *B* y *C* para que *f*(0) = 2, las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa *x* = 1 y *x* = 3 sean paralelas y *f* tenga un extremo relativo en el punto *x* = −1. Ese extremo relativo, ¿es un máximo o un mínimo? Estudia si *f* tiene algún otro extremo relativo y determina si son máximos o mínimos.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4
Calcula $\int \left(x^2+1\right)e^{x+1}dx$ explicando el método utilizado.

Ejercicio B4
Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y=2x^2-4x+3$ e $y=x^2-2x+3$ y calcula el área de ese recinto.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5
Tenemos dos dados, uno normal y otro trucado. En el trucado hay 4 unos y 2 doses. Se elige un dado al azar y se tira dos veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 en la primera tirada y un 2 en la segunda?
b) Sabiendo que el resultado de la primera tirada ha sido un 1 y el de la segunda ha sido un 2, calcula la probabilidad de que se haya escogido el dado trucado.

Ejercicio B5
Una caja que contiene 500 monedas es vaciada sobre una mesa. Halla

a) la probabilidad de que el número de caras sea mayor que 240;
b) la probabilidad de que el número de caras sea menor que 230;
c) la probabilidad de que el número de caras esté comprendido entre 230 y 240, ambos incluidos.

Soluciones

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1
Se considera el sistema de ecuaciones lineales que sigue:

$$\begin{cases} 3x+y+\alpha z=0 \\ 2x+\alpha y+z=1 \\ 3x+\alpha y+z=\alpha-1 \end{cases}$$

Discute su compatibilidad en función de los valores del parámetro α.
Resuelve el sistema para $\alpha=0$, si es posible.

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & 1 \\ 3 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ y

$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & \alpha & 0 \\ 2 & \alpha & 1 & 1 \\ 3 & \alpha & 1 & \alpha-1 \end{array}\right)$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & 1 \\ 3 & \alpha & 1 \end{vmatrix}=3\alpha+3+2\alpha^2-3\alpha^2-2-3\alpha=-\alpha^2+1$$

$$|A|=0\Rightarrow -\alpha^2+1=0\Rightarrow \alpha^2=1\Rightarrow \boxed{\alpha=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha\neq -1$ y $\alpha\neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.
Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar utilizando el método de Gauss.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)\Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3^a-Fila\,1^a & & & \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right\}\rightarrow \text{Nueva fila } 3^a$$

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot Fila\,2ª-2\cdot Fila\,1ª \\ \begin{array}{cccc} 6 & -3 & 3 & 3 \\ -6 & -2 & 2 & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & -5 & 5 & 3 \end{array}\rightarrow \text{Nueva fila } 2ª \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 5\cdot Fila\,3ª-2\cdot Fila\,2ª \\ \begin{array}{cccc} 0 & -10 & 10 & -10 \\ 0 & 10 & -10 & -6 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -16 \end{array}\rightarrow \text{Nueva fila } 3ª \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{array}{ccc} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{array}}^{A/B} & \begin{array}{c} 0 \\ 3 \end{array} \\ \underbrace{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A} & -16 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, pero la matriz A/B tiene rango 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. Si $\alpha = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,3ª-Fila\,1ª \\ \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\rightarrow \text{Nueva fila } 3ª \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot Fila\,2ª-2\cdot Fila\,1ª \\ \begin{array}{cccc} 6 & 3 & 3 & 3 \\ -6 & -2 & -2 & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\rightarrow \text{Nueva fila } 2ª \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}}^{A/B} & \begin{array}{c} 0 \\ 3 \end{array} \\ \underbrace{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $\alpha \neq -1$ y $\alpha \neq 1$ el sistema es compatible determinado, si $\alpha = -1$ el sistema es incompatible y si $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

Para $\alpha = 0$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y=0 \\ 2x+z=1 \\ 3x+z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-3x \\ z=1-2x \\ 3x+z=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-3x \\ 3x+1-2x=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-3x \\ \boxed{x=-2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{y=-3(-2)=6} \\ \boxed{z=1-2(-2)=5} \end{array}\right.$$

La solución del sistema es $x=-2;\ y=6;\ z=5$.

Ejercicio B1

Calcula las dos matrices A y B que satisfacen las siguientes igualdades:

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 2 & 9\\ 2 & 6 & 2 & 11\end{pmatrix},$$

$$3A-2B=\begin{pmatrix}6 & -16 & 6 & -3\\ -4 & 18 & -4 & 18\end{pmatrix}.$$

La matriz A y B son de dimensiones 2×4.

$$\left.\begin{array}{l}A+B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 2 & 9\\ 2 & 6 & 2 & 11\end{pmatrix},\\ 3A-2B=\begin{pmatrix}6 & -16 & 6 & -3\\ -4 & 18 & -4 & 18\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}A=\begin{pmatrix}2 & 8 & 2 & 9\\ 2 & 6 & 2 & 11\end{pmatrix}-B\\ 3A-2B=\begin{pmatrix}6 & -16 & 6 & -3\\ -4 & 18 & -4 & 18\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\left[\begin{pmatrix}2 & 8 & 2 & 9\\ 2 & 6 & 2 & 11\end{pmatrix}-B\right]-2B=\begin{pmatrix}6 & -16 & 6 & -3\\ -4 & 18 & -4 & 18\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\begin{pmatrix}2 & 8 & 2 & 9\\ 2 & 6 & 2 & 11\end{pmatrix}-3B-2B=\begin{pmatrix}6 & -16 & 6 & -3\\ -4 & 18 & -4 & 18\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}6 & 24 & 6 & 27\\ 6 & 18 & 6 & 33\end{pmatrix}-5B=\begin{pmatrix}6 & -16 & 6 & -3\\ -4 & 18 & -4 & 18\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}6 & 24 & 6 & 27\\ 6 & 18 & 6 & 33\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & -16 & 6 & -3\\ -4 & 18 & -4 & 18\end{pmatrix}=5B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 40 & 0 & 30\\ 10 & 0 & 10 & 15\end{pmatrix}=5B\Rightarrow B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0 & 40 & 0 & 30\\ 10 & 0 & 10 & 15\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{B=\begin{pmatrix}0 & 8 & 0 & 6\\ 2 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}2 & 8 & 2 & 9\\ 2 & 6 & 2 & 11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 8 & 0 & 6\\ 2 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 0 & 8\end{pmatrix}}$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea la recta *r* y el plano π, que se cortan perpendicularmente en el punto $P(1,-1,2)$. Si el plano π pasa por el punto $Q(1,2,3)$ y contiene al vector $(0,0,2)$, calcula las ecuaciones de la recta *r* y del plano π.

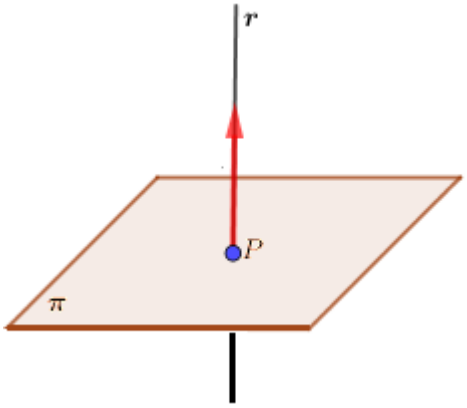
Hallamos la ecuación del plano.

El plano π pasa por el punto $Q(1,-1,2)$, por el punto $P(1,-1,2)$ y contiene al vector $(0,0,2)$.

$$\left.\begin{array}{l} Q(1,2,3)\in\pi \\ P(1,-1,2)\in\pi \\ \vec{v}=(0,0,2) \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} P(1,-1,2)\in\pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{QP}=(1,-1,2)-(1,2,3)=(0,-3,-1) \\ \vec{v}=(0,0,2) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow -6(x-1)=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv x-1=0}$$

Hallamos la ecuación de la recta.



La recta *r* contiene el punto $P(1,-1,2)$ y tiene como vector director el vector normal del plano π.

$$\pi\equiv x-1=0\Rightarrow \vec{n}=(1,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(1,-1,2)\in r \\ \vec{v_r}=\vec{n}=(1,0,0) \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{r\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

Ejercicio B2

Se consideran tres planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 4x+2y-4z=2,\ \pi_2 \equiv x-y-z=2 \text{ y } \pi_3 \equiv x+ay+z=b.$$

¿Existen valores de los parámetros *a* y *b* para los cuales los tres planos se cortan en una recta? En caso de que la respuesta sea negativa, razónala.

En el caso de que la respuesta sea positiva, calcula dichos valores.

Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos que nos permite hallar los puntos de corte de los tres planos.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv 4x+2y-4z=2\\ \pi_2 \equiv x-y-z=2\\ \pi_3 \equiv x+ay+z=b\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv 2x+y-2z=1\\ \pi_2 \equiv x-y-z=2\\ \pi_3 \equiv x+ay+z=b\end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociada al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & a & 1\end{pmatrix} \qquad A/B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 2\\ 1 & a & 1 & b\end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & a & 1\end{vmatrix}=-2-1-2a-2-1+2a=-6\neq 0$$

Al no anularse el determinante de A el rango de A es 3, así como el de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución) por lo que los planos se cortan en un punto (la solución del sistema) sean cuáles sean los valores de *a* y *b*.

No existen valores de *a* y *b* para los que los planos se corten en una recta.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, calcula sus asíntotas, y encuentra la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 0. Haz una representación aproximada de la gráfica de la función *f*.

El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$, pues el denominador no se anula para ningún valor de *x*.

$$x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow x=\sqrt{-1}=No\,existe$$

Hallamos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

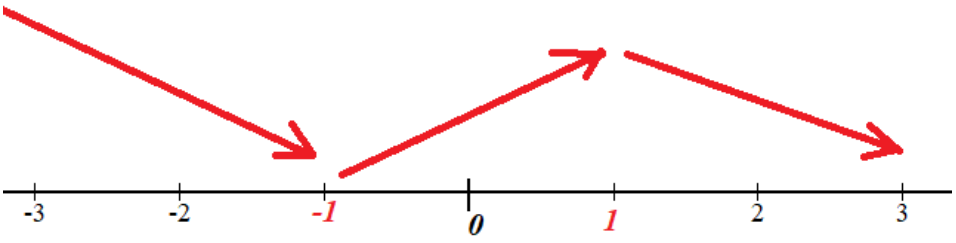
$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-2x(x)}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos *x* = *–2* y la derivada vale $f'(-2)=\dfrac{1-(-2)^2}{((-2)^2+1)^2}=\dfrac{-3}{25}<0$. La función decrece en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,1)$ tomamos *x* = *0* y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{1-0^2}{(0^2+1)^2}=1>0$. La función crece en $(-1,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x* = *2* y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{1-2^2}{(2^2+1)^2}=\dfrac{-3}{25}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(-1,1)$.

El dominio de la función es $\mathbb{R}$, por lo que no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty^2}}=\frac{0}{1+0}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

No tiene pues tiene asíntota horizontal.

La función solo tiene una asíntota horizontal: $y=0$.

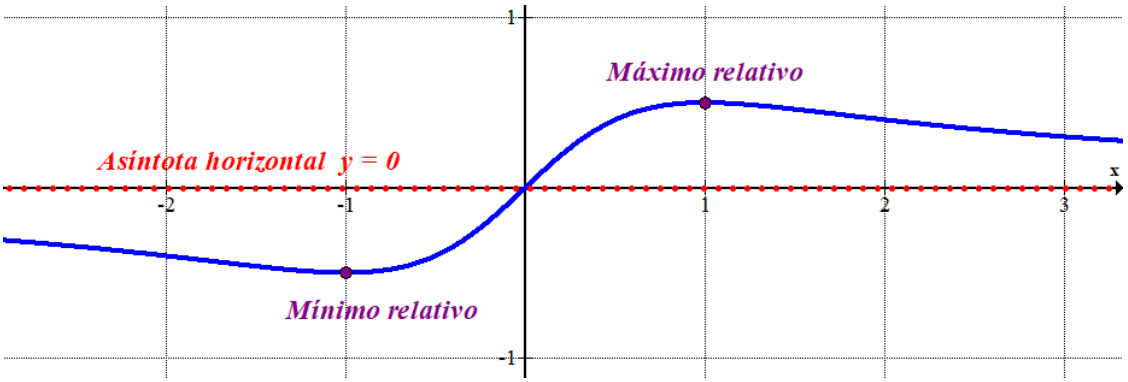
La recta tangente a la gráfica de *f* en *x* = 0 tiene ecuación $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{0}{0^2+1}=0 \\ f'(0)=\dfrac{1-0^2}{\left(0^2+1\right)^2}=1 \\ y-f(0)=f'(0)(x-0)\end{array}\right\}\Rightarrow y-0=1(x-0)\Rightarrow \boxed{y=x}$$

La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 0 tiene ecuación $y=x$.

Hacemos una tabla de valores de la función y la representamos.

x	$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$
–3	–0.3
–1	–1/2
0	0
1	1/2
3	0.3



Ejercicio B3

Sea $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ Encuentra los valores de los parámetros *A*, *B* y *C* para que *f*(0) = 2, las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa *x* = 1 y *x* = 3 sean paralelas y *f* tenga un extremo relativo en el punto *x* = −1. Ese extremo relativo, ¿es un máximo o un mínimo? Estudia si *f* tiene algún otro extremo relativo y determina si son máximos o mínimos.

Sabemos que *f*(0) = 2 → $\left.\begin{matrix} f(0)=0^3+A\cdot 0^2+B\cdot 0+C=C \\ f(0)=2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \boxed{C=2}$

La función queda $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+2$.

Si las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa *x* = 1 y *x* = 3 son paralelas entonces los valores de las derivadas en dichos puntos son iguales → $f'(1)=f'(3)$.

$$\left.\begin{matrix} f'(x)=3x^2+2Ax+B \\ f'(1)=f'(3) \end{matrix}\right\}\Rightarrow 3\cdot 1^2+2A\cdot 1+B=3\cdot 3^2+2A\cdot 3+B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3+2A+\cancel{B}=27+6A+\cancel{B}\Rightarrow -4A=24\Rightarrow \boxed{A=\frac{24}{-4}=-6}$$

La función queda $f(x)=x^3-6x^2+Bx+2$.

Si *f* tiene un extremo relativo en el punto *x* = −1 implica que $f'(-1)=0$.

$$\left.\begin{matrix} f'(x)=3x^2-12x+B \\ f'(-1)=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow 3(-1)^2-12(-1)+B=0\Rightarrow 3+12+B=0\Rightarrow \boxed{B=-15}$$

La función queda $f(x)=x^3-6x^2-15x+2$.

Los valores buscados son $A=-6,\ B=-15,\ C=2$.

Ese extremo relativo, ¿es un máximo o un mínimo?

Usamos la segunda derivada para averiguarlo.

$$f''(x)=6x-12\Rightarrow f''(-1)=6(-1)-12=-18<0\rightarrow \boxed{x=-1\text{es máximo relativo}}$$

Buscamos más puntos críticos de la función usando la derivada.

$$\left.\begin{matrix} f'(x)=3x^2-12x-15 \\ f'(x)=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow 3x^2-12x-15=0\Rightarrow x^2-4x-5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-5)}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=\begin{cases}\dfrac{4+6}{2}=\boxed{5=x}\\ \dfrac{4-6}{2}=\boxed{-1=x}\end{cases}$$

La función tiene otro extremo relativo en $x=5$. Comprobamos si es máximo o mínimo usando la segunda derivada: $f''(5)=6\cdot 5-12=18>0$. En $x=5$ hay un mínimo relativo.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4
Calcula $\int \left(x^2+1\right)e^{x+1}dx$ explicando el método utilizado.

Aplicamos el método de integración por partes.

$$\int \left(x^2+1\right)e^{x+1}dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u = x^2+1 \to du = 2xdx\\ dv = e^{x+1}dx \to v = \int e^{x+1}dx = e^{x+1}\end{array}\right\} =$$

$$= \left(x^2+1\right)e^{x+1} - \int 2xe^{x+1}dx = \left(x^2+1\right)e^{x+1} - 2\int xe^{x+1}dx = \ldots$$

$$\int xe^{x+1}dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u = x \to du = dx\\ dv = e^{x+1}dx \to v = \int e^{x+1}dx = e^{x+1}\end{array}\right\} = xe^{x+1} - \int e^{x+1}dx = xe^{x+1} - e^{x+1}$$

$$\ldots = \left(x^2+1\right)e^{x+1} - 2\left(xe^{x+1} - e^{x+1}\right) = x^2e^{x+1} + e^{x+1} - 2xe^{x+1} + 2e^{x+1} = \boxed{\left(x^2-2x+3\right)e^{x+1} + K}$$

Ejercicio B4

Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y=2x^2-4x+3$ e $y=x^2-2x+3$ y calcula el área de ese recinto.

Averiguamos donde se cortan sus gráficas.

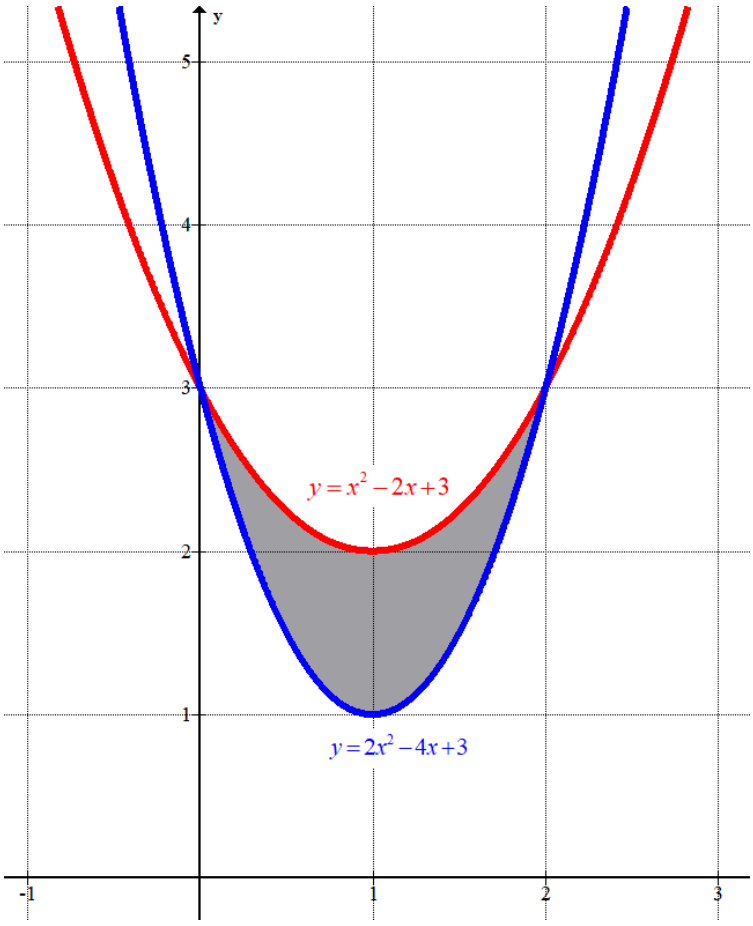
$$\left.\begin{matrix} y=2x^2-4x+3 \\ y=x^2-2x+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x^2-4x+\cancel{3}=x^2-2x+\cancel{3} \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x-2=0 \rightarrow \boxed{x=2} \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores, dibujamos las gráficas de las funciones y el recinto limitado por sus gráficas.

x	$y=2x^2-4x+3$
–1	9
0	3
1	1
2	3
3	9

x	$y=x^2-2x+3$
–1	6
0	3
1	2
2	3
3	6



El área del recinto (pintado de gris en el dibujo superior) es el valor de la integral definida entre 0 y 2 de $y=x^2-2x+3$ menos $y=2x^2-4x+3$

$$Área=\int_0^2 \left(x^2-2x+3\right)-\left(2x^2-4x+3\right)dx=\int_0^2 x^2-2x+3-2x^2+4x-3dx=$$

$$=\int_0^2 -x^2+2xdx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2=\left[-\frac{2^3}{3}+2^2\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+0^2\right]=-\frac{8}{3}+4=\boxed{\frac{4}{3}\simeq 1.333\ u^2}$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

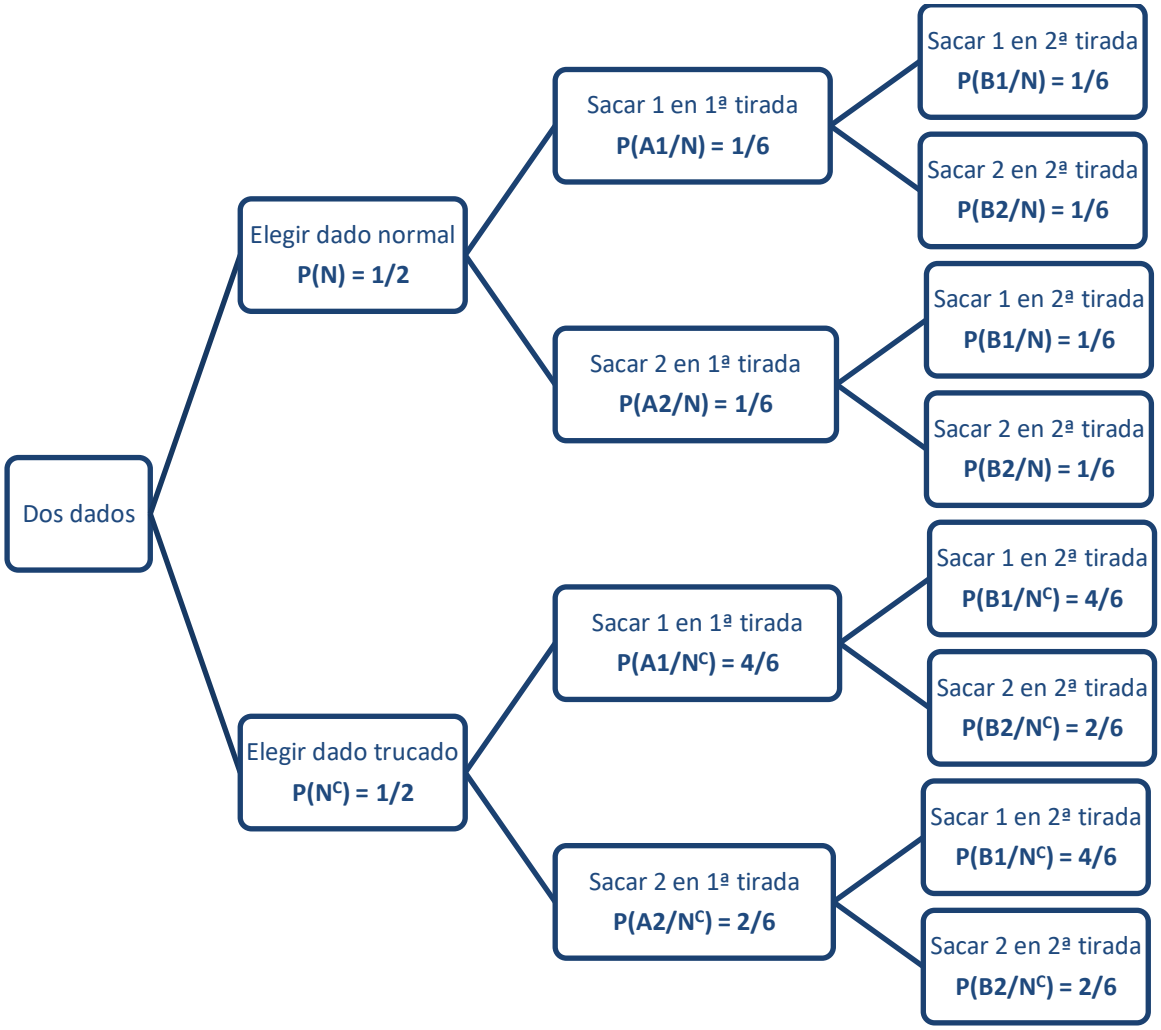
Tenemos dos dados, uno normal y otro trucado. En el trucado hay 4 unos y 2 doses. Se elige un dado al azar y se tira dos veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 en la primera tirada y un 2 en la segunda?

b) Sabiendo que el resultado de la primera tirada ha sido un 1 y el de la segunda ha sido un 2, calcula la probabilidad de que se haya escogido el dado trucado.

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar cómo funciona el experimento aleatorio.
Llamamos N al suceso "elegir dado normal" y N^C al suceso "elegir dado trucado".
Llamamos A1 al suceso "sacar 1 en la primera tirada", B1 al suceso "sacar 1 en la segunda tirada", A2 al suceso "sacar 2 en la primera tirada" y B2 a "sacar 2 en la 2ª tirada".
La primera tirada y la segunda son experimentos independientes.

$P(N) = 1/2$; $P(N^C) = 1/2$
$P(A1/N) = P(B1/N) = 1/6$; $P(A2/N) = P(B2/N) = 1/6$;
$P(A1/N^C) = P(B1/N^C) = 4/6$; $P(A2/N^C) = P(B2/N^C) = 2/6$.



a) Nos piden calcular $P(1\text{en } 1^a \text{ y } 2\text{en} 2^a)$. Este suceso puede ocurrir lanzando la moneda normal o la moneda trucada.

$$P(\text{1en 1ª y 2en2ª}) = P(N \cap A1 \cap B2) + P(N^C \cap A1 \cap B2) =$$

$$= P(N)P(A1/N)P(B2/N) + P(N^C)P(A1/N^C)P(B2/N^C) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{72} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{1}{8} = 0.125}$$

b) Nos piden calcular $P(N^C/(\text{1en 1ª y 2en2ª}))$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(N^C/(\text{1en 1ª y 2en2ª})) = \frac{P(N^C \cap (\text{1en 1ª y 2en2ª}))}{P((\text{1en 1ª y 2en2ª}))} =$$

$$= \frac{P(N^C \cap A1 \cap B2)}{P(N \cap A1 \cap B2) + P(N^C \cap A1 \cap B2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{8}} = \boxed{\frac{8}{9} \simeq 0.888}$$

Ejercicio B5
Una caja que contiene 500 monedas es vaciada sobre una mesa. Halla
a) la probabilidad de que el número de caras sea mayor que 240;
b) la probabilidad de que el número de caras sea menor que 230;
c) la probabilidad de que el número de caras esté comprendido entre 230 y 240, ambos incluidos.

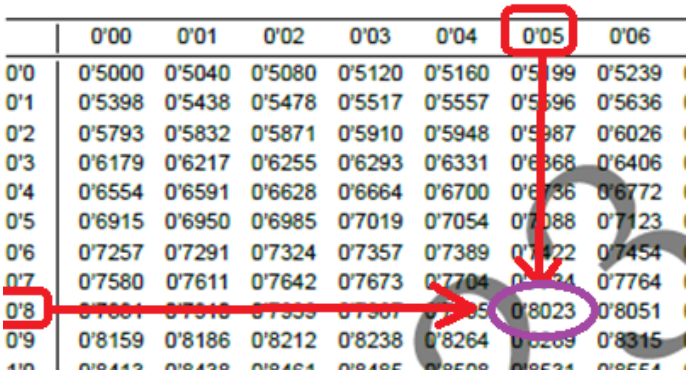
X = Número de caras en 500 lanzamientos de una moneda.
Esta es una variable binomial siendo sus parámetros n = Número de repeticiones = 500 y p = probabilidad de éxito = probabilidad de sacar cara al lanzar una moneda = 0.5. X = B(500, 0.5)

Como el número de repeticiones es muy alto y además $n \cdot p = 500 \cdot 0.5 = 250 > 5$ podemos aproximar la variable binomial X por una variable normal Y de parámetros media = $\mu = n \cdot p = 250$ y desviación típica = $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 5\sqrt{5} \simeq 11.18$. Y = N(250,11.18).

a) Nos piden calcular $P(X > 240)$.

$$P(X > 240) = \left\{ \begin{matrix} Corrección \\ de\,Yates \end{matrix} \right\} = P(Y \geq 240.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{240.5 - 250}{5\sqrt{5}} \right) = P(Z \geq -0.85) = P(Z \leq 0.85) = \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} = \boxed{0.8023}$$



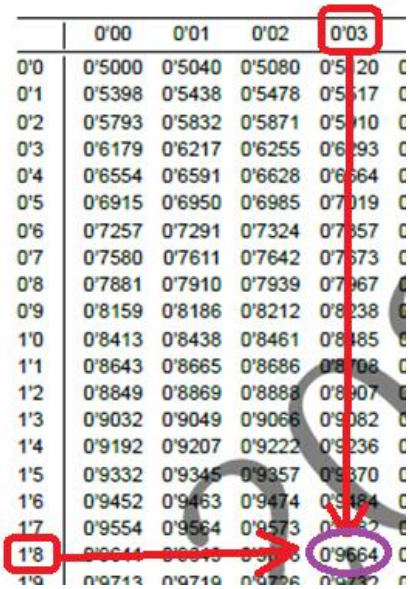
	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315

b) Nos piden calcular $P(X < 230)$

$$P(X < 230) = \left\{ \begin{matrix} Corrección \\ de\,Yates \end{matrix} \right\} = P(Y \leq 229.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{229.5 - 250}{5\sqrt{5}} \right) = P(Z \leq -1.83) = P(Z \geq 1.83) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.83) = \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} = 1 - 0.9664 = \boxed{0.0336}$$



	0'00	0'01	0'02	0'03
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732

c) Nos piden calcular $P(230 \leq X \leq 240)$

$$P(230 \leq X \leq 240) = \left\{ \begin{matrix} Corrección \\ de\,Yates \end{matrix} \right\} = P(229.5 \leq Y \leq 240.5) =$$

$$= P(Y \leq 240.5) - P(Y \leq 229.5) = 1 - P(Y > 240.5) - P(Y \leq 229.5) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Calculados en los} \\ \text{apartados a) y b)} \end{matrix} \right\} = 1 - 0.8023 - 0.0336 = \boxed{0.1641}$$

EAU ordinaria 2023

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

202o OHIKOA — ORDINARIA 2023

MATEMATIKA II — **MATEMÁTICAS II**

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función del parámetro α:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases}$$

Resuelve el sistema en los casos $\alpha=1$ y $\alpha=2$.

Ejercicio B1

Calcula el rango de la matriz *A* según los valores del parámetro α, siendo

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea *r* la recta cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$r\equiv\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases},$$

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta *r*.
b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a *r* y pasa por el punto *P*(2, 1, 0), que es exterior a *r*.

Ejercicio B2

Sean *r* la recta cuya ecuación continua es: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, los planos de ecuaciones $\pi_1\equiv x+y+z=1$ y $\pi_2\equiv x+y-z=1$. P_1 el punto de corte de la recta *r* con el plano π_1 y P_2 el punto de corte de la recta *r* con el plano π_2. Calcula:

a) las coordenadas de los puntos P_1 y P_2;
b) la distancia entre los puntos P_1 y P_2;
c) la distancia del punto P_1 al plano π_2.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea la función $f(x)=x^4-2x^3+x^2$. Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y encuentra sus máximos y mínimos relativos. Calcula la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 2.

Ejercicio B3

La función $f(x)=Ax^2+Bx+C$ es creciente en el intervalo $(-\infty,1)$ y decreciente en el intervalo $(1,+\infty)$. Además, la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa *x* = 2 es perpendicular a la recta de ecuación *y* = *x* + 2 y $f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Calcula los valores de los parámetros *A*, *B* y *C*.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado inferiormente por la curva de ecuación $y = \frac{x^2}{4}$ y superiormente por las curvas de ecuaciones $y = \frac{4}{x^2}$ e $y = 4$. Calcula el área de ese recinto.

Ejercicio B4

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}\,dx, \quad \int (x+2)\sin(3x)\,dx$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

La producción de una empresa la realizan, a partes iguales, cuatro turnos, de los que tres son diurnos y uno nocturno. El porcentaje de piezas defectuosas producidas en cada turno diurno es el 2 % y en el nocturno es del 10 %. Si se toma una pieza al azar de un turno al azar,

a) calcula la probabilidad de que la pieza sea defectuosa;
b) si la pieza tomada es defectuosa, calcula la probabilidad de que se haya producido en un turno diurno.

Ejercicio B5

Los resultados obtenidos en una prueba de matemáticas siguen una distribución normal con media 65 puntos y desviación típica 18 puntos. El 15 % del alumnado está en el nivel avanzado, el 65 % en el nivel medio y el 20 % restante en el nivel inicial. Decide, razonando tus respuestas, en qué nivel situaremos a los alumnos o alumnas que han obtenido las siguientes notas:

a) 85,5 puntos,
b) 48 puntos.

Soluciones

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función del parámetro α:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases}$$

Resuelve el sistema en los casos $\alpha=1$ y $\alpha=2$.

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=4\alpha+4+9-6\alpha-8-3=-2\alpha+2$$

$$|A|=0\Rightarrow -2\alpha+2=0\Rightarrow 2\alpha=2\Rightarrow \boxed{\alpha=1}$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha\neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha=1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,2^a-Fila\,1^a & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ \hline 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right\}\rightarrow \text{Nueva fila } 2^a$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3^a-2\cdot Fila\,1^a & & & \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & -6 & -2 \\ \hline 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right\}\rightarrow \text{Nueva fila } 3^a\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} Fila\,3ª - Fila\,2ª \\ 0 \quad -1 \quad -2 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3ª \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{matrix} \overbrace{1 \quad 2 \quad 3}^{A} & \overbrace{1}^{B} \\ 0 \quad -1 \quad -2 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & 0 \end{matrix}\right)$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 1$ el sistema es compatible determinado y si $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos a partir de la matriz triangular equivalente obtenida en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y+3z=1 \\ -y-2z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y+3z=1 \\ \boxed{y=-2z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x-4z+3z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=1+z} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2\lambda\,,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Las soluciones son $x=1+\lambda;\ y=-2\lambda;\ z=\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Para $\alpha = 2$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y-3z+1 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y-3z+1+2y+z=1 \\ -4y-6z+2+3y+4z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2z=0 \Rightarrow \boxed{z=0} \\ -y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow -y-0=0 \Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow \boxed{x=-0-0+1=1}$$

La solución es $x = 1; y = 0; z = 0$.

Ejercicio B1

Calcula el rango de la matriz *A* según los valores del parámetro α, siendo

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & \alpha & 0\\ 3 & \alpha & 0 & \alpha\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

La matriz A es de dimensiones 3×4, por lo que el rango de la matriz es 3, 2 o 1.
Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 4ª columna. Hallamos su determinante y vemos cuando se anula

$$\begin{vmatrix}\alpha & 0 & \alpha\\ 3 & \alpha & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-\alpha^2+0+3\alpha-0-0-0=-\alpha^2+3\alpha$$

$$-\alpha^2+3\alpha=0\Rightarrow -\alpha(\alpha-3)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{\alpha=0}\\ o\\ \boxed{\alpha=3}\end{cases}$$

Consideramos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $\alpha\neq 0$ y $\alpha\neq 3$

En este caso el determinante del menor es no nulo y el rango de la matriz A es 3.

CASO 2. $\alpha=0$

En este caso el determinante del menor es nulo y estudiamos el rango de A.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

Observamos que la primera fila es nula y por tanto el rango de A no es 3.
Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 1ª y las columnas 3ª y 4ª.
Calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$$

El rango de A es 2.

CASO 3. $\alpha=3$

En este caso el determinante del menor tomado anteriormente es nulo y estudiamos el rango de A buscando otro menor de orden 3 con determinante no nulo.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 3 & 0\\ 3 & 3 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna. Calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix}0 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0+9+0-0-18-0=-9\neq 0$$

El rango de A es 3.

Resumiendo: Si $\alpha\neq 0$ el rango de A es 3 y si $\alpha=0$ el rango de A es 2.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea *r* la recta cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases},$$

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta *r*.

b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a *r* y pasa por el punto *P*(2, 1, 0), que es exterior a *r*.

a)

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y+z+1 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow -2y+2z+2+2y+z=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z=0 \Rightarrow \boxed{z=0} \Rightarrow \boxed{x=1-y} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

b) Hallamos la recta *s* que corta perpendicularmente a *r* y pasa por el punto *P*(2, 1, 0), que es exterior a *r* .

Llamamos Q al punto donde *r* y *s* se cortan. Dicho punto pertenece a la recta *r* y por tanto tiene coordenadas $Q(1-\lambda,\lambda,0)$.

Las rectas *r* y *s* se cortan perpendicularmente, por lo que el vector director de la recta *r* y el vector $\overrightarrow{PQ}$ deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar es 0.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(-1,1,0) \\ \\ \overrightarrow{PQ}=(1-\lambda,\lambda,0)-(2,1,0)=(-1-\lambda,\lambda-1,0) \\ \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{PQ} \rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{PQ}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1,1,0)(-1-\lambda,\lambda-1,0)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\lambda+\lambda-1=0 \Rightarrow 2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(1,0,0)}$$

La recta *s* que corta perpendicularmente a *r* y pasa por el punto *P*(2, 1, 0), que es exterior a *r* es la recta que pasa por el punto P(2, 1, 0) y Q(1, 0, 0).

$$\left.\begin{array}{l} P(2,1,0) \in s \\ Q(1,0,0) \in s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{QP}=(2,1,0)-(1,0,0)=(1,1,0) \\ Q(1,0,0) \in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio B2

Sean r la recta cuya ecuación continua es: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv x+y+z=1$ y $\pi_2 \equiv x+y-z=1$. P_1 el punto de corte de la recta r con el plano π_1 y P_2 el punto de corte de la recta r con el plano π_2. Calcula:

a) las coordenadas de los puntos P_1 y P_2;
b) la distancia entre los puntos P_1 y P_2;
c) la distancia del punto P_1 al plano π_2.

a) Hallamos la ecuación de la recta r en paramétricas.

$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,-1,2) \\ P_r(1,1,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto P_1.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x+y+z=1 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda+1-\lambda+1+2\lambda=1 \Rightarrow 2\lambda=-2 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1-1=0 \\ y=1+1=2 \\ z=1-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P_1(0,2,-1)}$$

Hallamos el punto P_2.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 \equiv x+y-z=1 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda+1-\lambda-1-2\lambda=1 \Rightarrow -2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \boxed{P_2(1,1,1)}$$

b) La distancia entre los puntos P_1 y P_2 es el módulo del vector que los une.

$$\left.\begin{array}{l} P_1(0,2,-1) \\ P_2(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}=(1,1,1)-(0,2,-1)=(1,-1,2)$$

$$d(P_1,P_2)=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\boxed{\sqrt{6}\ unidades}$$

c) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 \equiv x+y-z-1=0 \\ P_1(0,2,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow d(P_1,\pi_2)=\frac{|0+2+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}\ unidades}$$

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea la función $f(x)=x^4-2x^3+x^2$. Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y encuentra sus máximos y mínimos relativos. Calcula la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 2.

Hallamos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

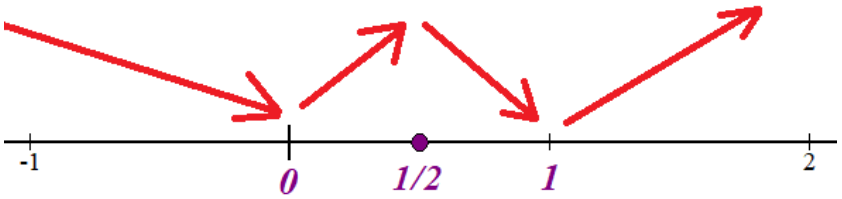
$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=4x^3-6x^2+2x \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x^3-6x^2+2x=0 \Rightarrow 2x\left(2x^2-3x+1\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 2x^2-3x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(2)(1)}}{4}=\dfrac{3\pm1}{4}= \begin{cases} \dfrac{3+1}{4}=\boxed{1=x} \\ \dfrac{3-1}{4}=\boxed{\dfrac{1}{2}=x} \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos tres valores obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale
  $f'(-1)=4(-1)^3-6(-1)^2+2(-1)=-12<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ tomamos *x = 0.25* y la derivada vale
  $f'(0.25)=4(0.25)^3-6(0.25)^2+2(0.25)=0.1875>0$. La función crece en $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ tomamos *x = 0.75* y la derivada vale
  $f'(0.75)=4(0.75)^3-6(0.75)^2+2(0.75)=-0.1875<0$. La función decrece en $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale
  $f'(2)=4(2)^3-6(2)^2+2(2)=32-24+4=12>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ y crece en $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 1/2$ y dos mínimos relativos: uno en $x = 0$ y otro en $x = 1$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene ecuación $y - f(2) = f'(2)(x-2)$.

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 \Rightarrow f(2) = 2^4 - 2\cdot 2^3 + 2^2 = 4$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x \Rightarrow f'(2) = 4\cdot 2^3 - 6\cdot 2^2 + 2\cdot 2 = 32 - 24 + 4 = 12$$

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - 4 = 12(x-2) \Rightarrow y - 4 = 12x - 24 \Rightarrow \boxed{y = 12x - 20}$$

Ejercicio B3

La función $f(x)=Ax^2+Bx+C$ es creciente en el intervalo $(-\infty,1)$ y decreciente en el intervalo $(1,+\infty)$. Además, la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 2$ es perpendicular a la recta de ecuación $y = x + 2$ y $f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Calcula los valores de los parámetros *A*, *B* y *C*.

Si la función crece antes de $x = 1$ y decrece después de dicho valor hay un máximo relativo en $x=1$, por lo que se anula la derivada en $x = 1 \rightarrow f'(1) = 0$.

$$\left.\begin{matrix} f'(x)=2Ax+B \\ f'(1)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2A+B=0 \Rightarrow \boxed{B=-2A}$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 2$ es $f'(2)$ y como es perpendicular a la recta de ecuación $y = x + 2$, que tiene pendiente $m = 1$ entonces la pendiente de la recta tangente es $\frac{-1}{1}=-1 \rightarrow f'(2)=-1$.

$$\left.\begin{matrix} f'(x)=2Ax+B \\ f'(2)=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4A+B=-1 \Rightarrow \boxed{B=-1-4A}$$

Y por último tenemos que $f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L'Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos 0}{1}=1$$

Por lo tanto, tenemos que $f(0) = 1$.

$$\left.\begin{matrix} f(x)=Ax^2+Bx+C \\ f(0)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\cdot 0^2+B\cdot 0+C=1 \Rightarrow \boxed{C=1}$$

Reunimos las dos primeras ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix} B=-2A \\ B=-1-4A \end{matrix}\right\} \Rightarrow -2A=-1-4A \Rightarrow 2A=-1 \Rightarrow \boxed{A=\frac{-1}{2}} \Rightarrow \boxed{B=-2\frac{-1}{2}=1}$$

Los valores buscados son $A=\frac{-1}{2}$, $B=1$, $C=1$.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado inferiormente por la curva de ecuación $y=\frac{x^2}{4}$ y superiormente por las curvas de ecuaciones $y=\frac{4}{x^2}$ e $y = 4$. Calcula el área de ese recinto.

Averiguamos donde se cortan sus gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x^2}{4} \\ y=\frac{4}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{4}=\frac{4}{x^2} \Rightarrow x^4=16 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[4]{16}=\pm 2}$$

Como es la región del primer cuadrante solo tomamos $x = 2$.

La función $y=\frac{x^2}{4}$ es una parábola.

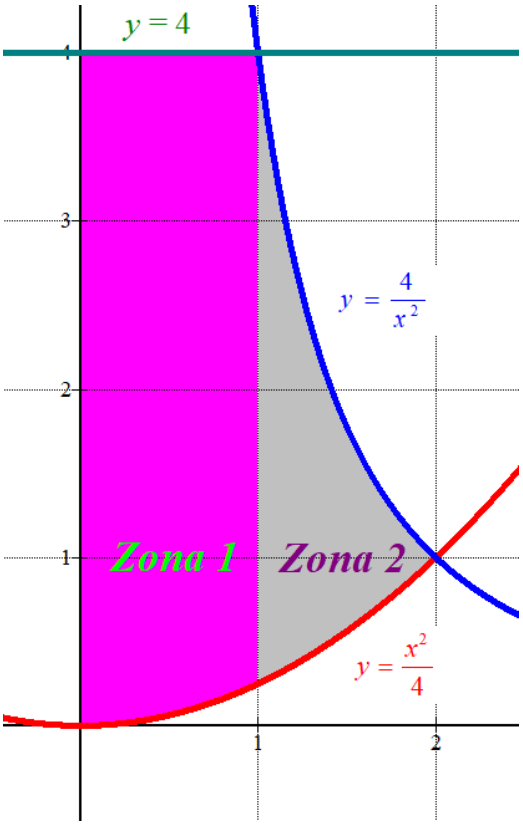
La función $y=\frac{4}{x^2}$ tiene dominio $\mathbb{R}-\{0\}$, presenta una asíntota vertical en $x = 0$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas de las funciones.

x	$y=\frac{x^2}{4}$
0	0
1	0.25
2	1
3	9 / 4

x	$y=\frac{4}{x^2}$
1	4
2	1
3	4 / 9

x	$y=4$
0	4
1	4



Hallamos el valor del área de la zona 1.

$$Área 1=\int_0^1 4-\frac{x^2}{4}\,dx=\left[4x-\frac{x^3}{12}\right]_0^1=\left[4(1)-\frac{1^3}{12}\right]-\left[4(0)-\frac{0^3}{12}\right]=4-\frac{1}{12}=\boxed{\frac{47}{12}\simeq 3.916\ u^2}$$

Hallamos el valor del área de la zona 2.

$$Área\ 2 = \int_1^2 \frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{4}\,dx = \int_1^2 4x^{-2} - \frac{1}{4}x^2 dx = \left[4\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{4}\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left[-\frac{4}{x} - \frac{x^3}{12}\right]_1^2 =$$

$$= \left[-\frac{4}{2} - \frac{2^3}{12}\right] - \left[-\frac{4}{1} - \frac{1^3}{12}\right] = -2 - \frac{8}{12} + 4 + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{17}{12} \simeq 1.416\ u^2}$$

El área total es la suma de las áreas obtenidas → $\frac{47}{12} + \frac{17}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3} \simeq 5.33 u^2$

Ejercicio B4

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}\,dx, \quad \int (x+2)\sin(3x)\,dx$$

Resolvemos la primera integral.

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}\,dx = \int \frac{x^2+4}{x^2+4+4x}\,dx = \int \frac{x^2+4+4x-4x}{x^2+4+4x}\,dx =$$

$$= \int \frac{x^2+4+4x}{x^2+4+4x}\,dx - \int \frac{4x}{x^2+4+4x}\,dx = \int dx - \int \frac{4x}{x^2+4+4x}\,dx = x - \int \frac{4x}{x^2+4+4x}\,dx = \ldots$$

$$\frac{4x}{x^2+4+4x} = \frac{4x}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}$$

$$4x = A(x+2)+B \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \to -8 = B \\ x=0 \to 0 = 2A+B \to 0 = 2A-8 \to 2A = 8 \to A = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4x}{x^2+4+4x} = \frac{4x}{(x+2)^2} = \frac{4}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2}$$

$$\ldots = x - \int \frac{4}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2}\,dx = x - \int \frac{4}{x+2}\,dx + \int \frac{8}{(x+2)^2}\,dx =$$

$$= x - 4\int \frac{1}{x+2}\,dx + 8\int (x+2)^{-2}\,dx = x - 4\ln(x+2) + 8\frac{(x+2)^{-1}}{-1} = \boxed{x - \ln(x+2)^4 - \frac{8}{x+2} + K}$$

Resolvemos la segunda integral

$$\int (x+2)\sin(3x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x+2 \to du = dx \\ dv = \sin(3x) \to v = \int \sin(3x)\,dx = \frac{-1}{3}\cos(3x) \end{array} \right\} =$$

$$= (x+2)\frac{-1}{3}\cos(3x) - \int \frac{-1}{3}\cos(3x)\,dx = \frac{-x-2}{3}\cos(3x) + \frac{1}{3}\int \cos(3x)\,dx =$$

$$= \frac{-x-2}{3}\cos(3x) + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin(3x) = \boxed{\frac{-x-2}{3}\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x) + K}$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

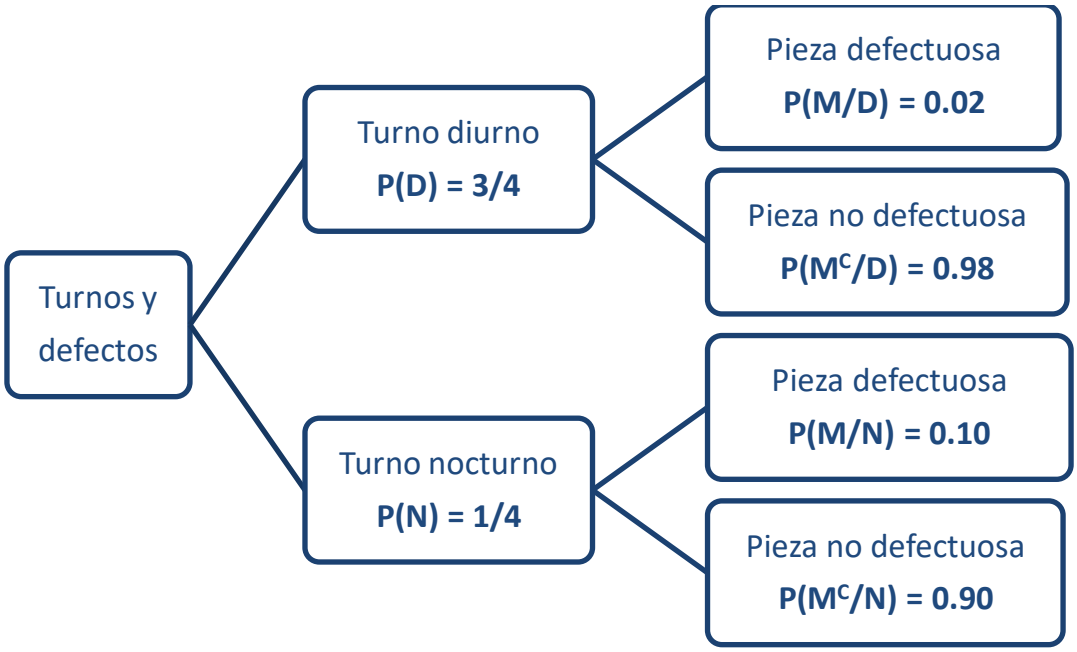
Ejercicio A5

La producción de una empresa la realizan, a partes iguales, cuatro turnos, de los que tres son diurnos y uno nocturno. El porcentaje de piezas defectuosas producidas en cada turno diurno es el 2 % y en el nocturno es del 10 %. Si se toma una pieza al azar de un turno al azar,

a) calcula la probabilidad de que la pieza sea defectuosa;

b) si la pieza tomada es defectuosa, calcula la probabilidad de que se haya producido en un turno diurno.

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar cómo funciona el experimento aleatorio.
Llamamos D al suceso "La pieza se produce en un turno Diurno", N al suceso "La pieza se produce en un turno Nocturno" y M al suceso "La pieza es defectuosa".



a) Nos piden calcular $P(M)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M)=P(D)P(M/D)+P(N)P(M/N)=\frac{3}{4}\cdot 0.02+\frac{1}{4}\cdot 0.10=\boxed{\frac{1}{25}=0.04}$$

b) Nos piden calcular $P(D/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(D/M)=\frac{P(D\cap M)}{P(M)}=\frac{P(D)P(M/D)}{P(M)}=\frac{\frac{3}{4}\cdot 0.02}{0.04}=\boxed{\frac{3}{8}=0.375}$$

Ejercicio B5

Los resultados obtenidos en una prueba de matemáticas siguen una distribución normal con media 65 puntos y desviación típica 18 puntos. El 15 % del alumnado está en el nivel avanzado, el 65 % en el nivel medio y el 20 % restante en el nivel inicial. Decide, razonando tus respuestas, en qué nivel situaremos a los alumnos o alumnas que han obtenido las siguientes notas:

a) 85,5 puntos,

b) 48 puntos.

X = Resultados obtenidos en una prueba de matemáticas. X = N(65, 18)

El 20 % del alumnado en el nivel inicial → Hallamos "a" tal que $P(X \le a) = 0.2$.

$$P(X \le a) = 0.2 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \le \frac{a-65}{18}\right) = 0.2 \Rightarrow \left\{\frac{a-65}{18} < 0\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \ge -\frac{a-65}{18}\right) = 0.2 \Rightarrow 1 - P\left(Z \le -\frac{a-65}{18}\right) = 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le -\frac{a-65}{18}\right) = 0.8 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow -\frac{a-65}{18} = 0.84 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a + 65 = 18 \cdot 0.84 \Rightarrow 65 - 18 \cdot 0.84 = a \Rightarrow \boxed{a = 49.88 \text{ puntos}}$$

El 15 % del alumnado está en el nivel avanzado →Hallamos "b" tal que $P(X \ge b) = 0.15$.

$$P(X \ge b) = 0.15 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \ge \frac{b-65}{18}\right) = 0.15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{b-65}{18}\right) = 1 - 0.15 = 0.85 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b-65}{18} = 1.04 \Rightarrow b = 1.04 \cdot 18 + 65 \Rightarrow \boxed{b = 83.72 \text{ puntos}}$$

El nivel inicial es por debajo de 49.88 puntos, el nivel medio entre 49.88 y 83.72 y el nivel avanzado por encima de 83.72.

a) Un alumno con 85.5 puntos se debe situar en nivel avanzado.

b) Un alumno con 48 puntos se debe situar en nivel inicial.

EAU extraordinaria 2022

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2022ko EZOHIKOA

EXTRAORDINARIA 2022

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1
Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = \alpha \\ \alpha x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 1$, si es posible.

Ejercicio B1
Calcula de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

sabiendo que

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2
Sea la recta de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + \alpha y + z = 1 \\ 2x + 6y - 2z = 6 \end{cases},$$

¿Existe algún valor de α para el cual el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ contenga a la recta dada? Razona la respuesta.

Ejercicio B2
Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

¿Existe algún valor de *s* tal que el punto *(−3, s, s)* pertenezca a la recta? Razona la respuesta.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3
Calcula las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ que son paralelas a la recta $y = 3x - 2$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.

Ejercicio B3
Sea

$$f(x)=\begin{cases} x^2+Ax, & si\ x\le 1 \\ Bx-A, & si\ x>1 \end{cases}$$

(a) Encuentra los valores de *A* y *B* para que *f* sea derivable en toda la recta real.
(b) Haz la representación gráfica de la función *f* con los valores de *A* y *B* obtenidos en el apartado (a).

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4
Calcula $\int \ln\left(x^2-1\right)dx$.

Ejercicio B4
Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=x$, $g(x)=x/8$ y $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$ y calcula el área de ese recinto.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5
Una urna S contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna T, 6 blancas y 4 negras.
Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras?
(b) Si las dos bolas extraídas son negras, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la T?

Ejercicio B5
Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60% de los hogares tienen al menos dos coches. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos coches?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que, entre 30 y 40 hogares, ambos incluidos, tengan al menos dos coches?

Soluciones

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = \alpha \\ \alpha x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 1$, si es posible.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ \alpha & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & \alpha \\ \alpha & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ \alpha & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\alpha - \cancel{4\alpha} - 8 + \cancel{4\alpha} + 4 + 4\alpha = 2\alpha - 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow 2\alpha = 4 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente triangular más fácil de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} Fila\,2^a - Fila\,1^a \\ 2 \quad 2 \quad -2 \quad 2 \\ \hline -2 \quad -2 \quad 2 \quad -2 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} Fila\,3^a - Fila\,1^a \\ 2 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \\ \hline -2 \quad -2 \quad 2 \quad -2 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow A \longrightarrow \\ \longleftarrow A/B \longrightarrow \end{array}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 2$ el sistema es compatible determinado y si $\alpha = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible determinado.

$$\left.\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 2x+2y-2z=1 \\ x+2y-z=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ 2x \quad +2y \quad -2z \quad =1 \\ \underline{-2x \quad -4y \quad +4z \quad =-4} \\ \qquad -2y \quad +2z \quad =-3 \rightarrow \textit{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{ Ecuación } 1^{\text{a}} \\ x \quad +2y \quad -z \quad =1 \\ \underline{-x \quad -2y \quad +2z \quad =-2} \\ \qquad z \quad =-1 \rightarrow \textit{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y-2z=2 \\ -2y+2z=-3 \Rightarrow \\ \boxed{z=-1} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+2=2 \\ -2y-2=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ -2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y=0 \\ \boxed{y=\dfrac{1}{2}} \end{array}\right. \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

Para $\alpha = 1$ la solución del sistema es $x=-1;\ y=\dfrac{1}{2};\ z=-1$.

Ejercicio B1

Calcula de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

sabiendo que

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6$$

$$6 = \begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = \{\text{Saco factor común 2 en la 2ª fila}\} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l}\text{Separo los elementos de la 1ª fila} \\ \text{en suma de dos determinantes}\end{array}\right\} =$$

$$= 2\left[\begin{vmatrix} p & q & r \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix}\right] = \left\{\begin{array}{l}\text{El primer determinante es 0,} \\ \text{pues la fila 3ª es la suma de las filas 1ª y 2ª.} \\ \text{En el segundo determinante separo} \\ \text{los elementos de la 3ª fila} \\ \text{en suma de dos determinantes}\end{array}\right\} =$$

$$= 2\left[0 + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix}\right] = \left\{\begin{array}{l}\text{El segundo determinante es 0,} \\ \text{pues la fila 3ª es igual que la fila 2ª.}\end{array}\right\} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l}\text{Intercambio las filas 2ª y 3ª} \\ \text{y el determinante cambia de signo}\end{array}\right\} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Hemos obtenido que $6 = \begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$, por lo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{6}{-2} = -3$

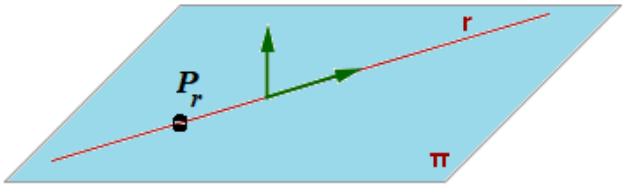
SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea la recta de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} 3x+\alpha y+z=1 \\ 2x+6y-2z=6 \end{cases},$$

¿Existe algún valor de α para el cual el plano $\pi \equiv x+y+z=1$ contenga a la recta dada? Razona la respuesta.



Para que la recta este contenida en el plano su vector director debe formar 90º con el vector normal del plano, es decir, su producto escalar debe ser 0 y además cualquier punto de la recta debe pertenecer al plano.

Obtenemos un vector director de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} 3x+\alpha y+z=1 \\ 2x+6y-2z=6 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & \alpha & 1 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -2\alpha i+2j+18k-2\alpha k+6j-6i = (-2\alpha-6, 8, 18-2\alpha)$$

El vector normal del plano $\pi \equiv x+y+z=1$ es $\vec{n}=(1,1,1)$

Comprobamos si el producto escalar $\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}$ puede ser 0.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(-2\alpha-6,8,18-2\alpha) \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,1,1)(-2\alpha-6,8,18-2\alpha)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\alpha-6+8+18-2\alpha=0 \Rightarrow -4\alpha+20=0 \Rightarrow 4\alpha=20 \Rightarrow \boxed{\alpha=5}$$

Para $\alpha=5$ la recta es paralela al plano o está contenida en el plano.

Obtenemos un punto de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x+5y+z=1 \\ 2x+6y-2z=6 \end{cases}$.

$$r \equiv \begin{cases} 3x+5y+z=1 \\ 2x+6y-2z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+5y+z=1 \\ x+3y-z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+5y+z=1 \\ x=3-3y+z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(3-3y+z)+5y+z=1 \Rightarrow 9-9y+3z+5y+z=1 \Rightarrow -4y+4z+8=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y+z+2=0 \Rightarrow z=y-2 \Rightarrow x=3-3y+y-2=-2y+1 \Rightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ z=-2+y \end{cases}$$

Si tomamos $y=0$ obtenemos el punto $P_r(1,0,-2)$. Comprobamos si el punto pertenece al plano.

$$\left.\begin{array}{l} P_r\,(1,0,-2) \\ \pi \equiv x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿1+0-2=1?\text{¡No es cierto!}$$

Para $\alpha = 5$ plano y recta son paralelos. La recta no está contenida en el plano.
No existe ningún valor de α para el cual la recta esté contenida en el plano.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

El sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano debe tener infinitas soluciones (todos los puntos de la recta), por lo que rango de la matriz A de coeficientes y el rango de la matriz ampliada A/B debe ser 2.
El determinante de la matriz de coeficientes debe ser 0.

$$r \equiv \left.\begin{array}{l} 3x+\alpha y+z=1 \\ 2x+6y-2z=6 \\ \pi \equiv x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & \alpha & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 18-2\alpha+2-\cancel{6}-2\alpha+\cancel{6}=0 \Rightarrow -4\alpha+20=0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 5}$$

Para $\alpha = 5$ estudiamos el rango de A/B.

$$r \equiv \left.\begin{array}{l} 3x+5y+z=1 \\ x+3y-z=3 \\ \pi \equiv x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A/B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 1^{\text{a}} - 3 \cdot \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ 3 \quad 5 \quad 1 \quad 1 \\ -3 \quad -9 \quad 3 \quad -9 \\ \hline 0 \quad -4 \quad 4 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 1^{\text{a}} - 3 \cdot \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \\ 3 \quad 5 \quad 1 \quad 1 \\ -3 \quad -3 \quad -3 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 2 \quad -2 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} + 2 \cdot \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \\ 0 \quad -4 \quad 4 \quad -8 \\ 0 \quad 4 \quad -4 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -12 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

El rango de A/B es 3 distinto del rango de A, por lo que el sistema es incompatible y no tienen ningún punto común recta y plano. La recta es paralela al plano y no está contenida en él.
No existe ningún valor de α para el cual la recta esté contenida en el plano.

Ejercicio B2

Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

¿Existe algún valor de *s* tal que el punto *(−3, s, s)* pertenezca a la recta? Razona la respuesta.

Hallamos las ecuaciones paramétricas resolviendo el sistema formado por las ecuaciones implícitas de la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x + 2z = y \end{cases} \Rightarrow 3x + x + 2z + z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 3z = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}z \Rightarrow y = -\frac{3}{4}z + 2z = \frac{5}{4}z \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x = -\frac{3}{4}t \\ y = \frac{5}{4}t \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}}$$

Para que el punto *(−3, s, s)* pertenezca a la recta debe de satisfacer sus ecuaciones.

$$r \equiv \left.\begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ (-3,\ s,\ s) \in r \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 3(-3) + s + s = 0 \\ -3 - s + 2s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9 + 2s = 0 \rightarrow s = \frac{9}{2} \\ -3 + s = 0 \rightarrow s = 3 \end{cases}$$

Al resolver el sistema obtenemos valores distintos de *s* en cada una de las ecuaciones que definen la recta. El punto no pertenece a la recta.

No existe ningún valor de *s* tal que el punto *(−3, s, s)* pertenezca a la recta

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Calcula las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)=2x^3-3x+1$ que son paralelas a la recta $y=3x-2$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.

Si la recta tangente en $x = a$ es paralela a $y=3x-2$ debe tener pendiente 3, es decir, $f\,'(a)=3$

$$\left.\begin{matrix} f(x)=2x^3-3x+1 \Rightarrow f\,'(x)=6x^2-3 \\ f\,'(a)=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3=6a^2-3 \Rightarrow 6a^2=6 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow \boxed{a=\pm 1}$$

Las rectas tangentes son en $x = -1$ y en $x = 1$.

Calculamos la ecuación de la recta tangente en $x = -1$.

$$\left.\begin{matrix} f(-1)=2(-1)^3-3(-1)+1=-2+3+1=2 \\ f\,'(-1)=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y-2=3(x+1) \Rightarrow \boxed{y=3x+5}$$

Calculamos la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

$$\left.\begin{matrix} f(1)=2\cdot 1^3-3+1=0 \\ f\,'(1)=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y-0=3(x-1) \Rightarrow \boxed{y=3x-3}$$

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f* igualo la derivada a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow 6x^2-3=0 \Rightarrow 2x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f\,'(-2)=6(-2)^2-3=21>0$.

  La función crece en $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f\,'(0)=-3<0$. La función decrece en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f\,'(2)=6\cdot 2^2-3=21>0$. La función crece en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

Resumiendo: La función crece en $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ y decrece en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ejercicio B3

Sea

$$f(x)=\begin{cases} x^2+Ax, & si\ x\le 1 \\ Bx-A, & si\ x>1 \end{cases}$$

(a) Encuentra los valores de *A* y *B* para que *f* sea derivable en toda la recta real.

(b) Haz la representación gráfica de la función *f* con los valores de *A* y *B* obtenidos en el apartado (a).

(a) Para ser derivable primero ha de ser continua.

Si *f* es continua en *x = 1* debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2+Ax=1+A \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} Bx-A=B-A \\ f(1)=1+A \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1+A=B-A \Rightarrow \boxed{2A=B-1}$$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$ y su derivada es $f\,'(x)=\begin{cases} 2x+A, & si\ x<1 \\ B, & si\ x>1 \end{cases}$.

La función debe ser derivable en *x = 1* y por tanto las derivadas laterales deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x+A=2+A \\ f\,'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} B=B \\ f\,'(1^-)=f\,'(1^+) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{B=2+A}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 2A=B-1 \\ B=2+A \end{array}\right\} \Rightarrow 2A=2+A-1 \Rightarrow 2A-A=2-1 \Rightarrow \boxed{A=1} \Rightarrow \boxed{B=2+1=3}$$

Los valores que buscamos son $A=1,\ B=3$.

(b) La función $f(x)=\begin{cases} x^2+x, & si\ x\le 1 \\ 3x-1, & si\ x>1 \end{cases}$ en el intervalo $(-\infty,1]$ la gráfica es una parábola.

Hallamos las coordenadas de su vértice.

$$f(x)=x^2+x \Rightarrow f\,'(x)=2x+1$$

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

$$Vértice \rightarrow \left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{4}\right)$$

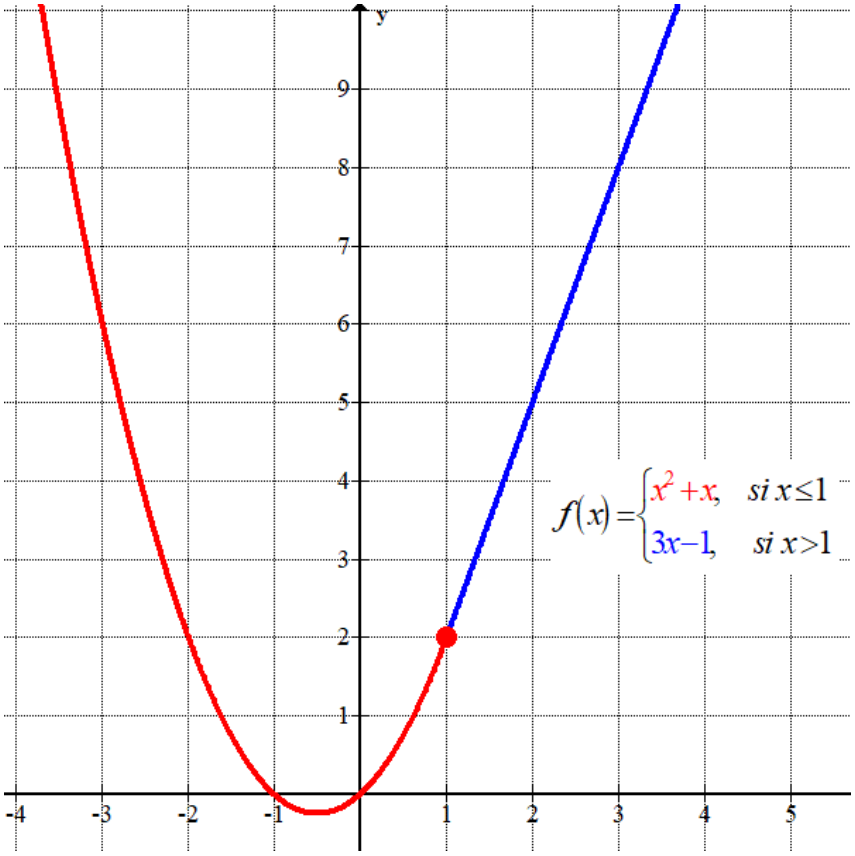
Hallamos una tabla de valores de la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x, & si\ x\le 1 \\ 3x-1, & si\ x>1 \end{cases}$ y representamos su gráfica.

$si\ x\le 1$

x	$y=x^2+x$
-1	0
$-1/2$	$-1/4$
0	0
1	2

$si\ x>1$

x	$y=3x-1$
2	5
3	8



CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula $\int \ln\left(x^2-1\right)dx$.

$$\int \ln\left(x^2-1\right)dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln\left(x^2-1\right)\to du=\dfrac{2x}{x^2-1}dx\\ dv=dx\to v=\int dx=x\end{array}\right\} = x\ln\left(x^2-1\right)-\int x\frac{2x}{x^2-1}dx =$$

$$= x\ln\left(x^2-1\right)-\int\frac{2x^2}{x^2-1}dx = x\ln\left(x^2-1\right)-2\int\frac{x^2}{x^2-1}dx = x\ln\left(x^2-1\right)-2\int\frac{x^2-1+1}{x^2-1}dx =$$

$$= x\ln\left(x^2-1\right)-2\left[\int\frac{x^2-1}{x^2-1}dx+\int\frac{1}{x^2-1}dx\right] = x\ln\left(x^2-1\right)-2\left[\int 1dx+\int\frac{1}{x^2-1}dx\right] =$$

$$= x\ln\left(x^2-1\right)-2\left[x+\int\frac{1}{x^2-1}dx\right] = x\ln\left(x^2-1\right)-2x-2\int\frac{1}{x^2-1}dx = \ldots$$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\Rightarrow\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=A(x+1)+B(x-1)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-1\to 1=-2B\to B=\dfrac{-1}{2}\\ x=1\to 1=2A\to A=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x^2-1}=\frac{1/2}{x-1}-\frac{1/2}{x+1}$$

$$\ldots = x\ln\left(x^2-1\right)-2x-2\int\frac{1/2}{x-1}-\frac{1/2}{x+1}dx = x\ln\left(x^2-1\right)-2x-2\int\frac{1/2}{x-1}dx+2\int\frac{1/2}{x+1}dx =$$

$$= x\ln\left(x^2-1\right)-2x-\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{x+1}dx = \boxed{x\ln\left(x^2-1\right)-2x-\ln|x-1|+\ln|x+1|+K}$$

Ejercicio B4

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=x$, $g(x)=x/8$ y $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$ y calcula el área de ese recinto.

Hallamos los puntos de corte entre cada par de funciones.

$$\left.\begin{matrix} f(x)=x \\ g(x)=x/8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=\frac{x}{8} \Rightarrow 8x=x \Rightarrow 7x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$\left.\begin{matrix} f(x)=x \\ h(x)=\dfrac{1}{x^2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{1}=1}$$

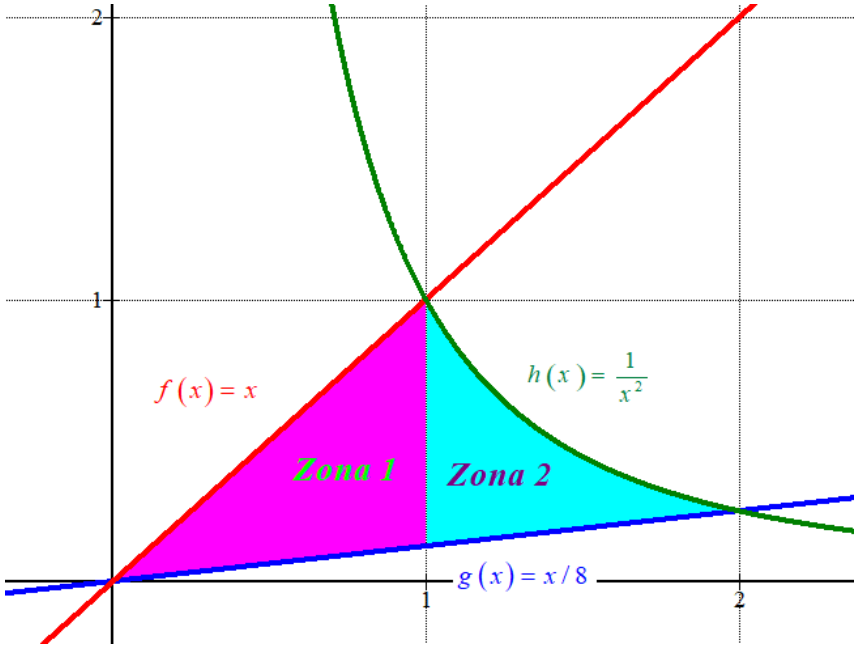
$$\left.\begin{matrix} g(x)=x/8 \\ h(x)=\dfrac{1}{x^2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x}{8}=\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{8}=2}$$

Hacemos una tabla de valores para cada función y las dibujamos.

x	$f(x)=x$
0	0
1	1
2	2

x	$g(x)=x/8$
0	0
1	1/8
2	1/4

x	$h(x)=\dfrac{1}{x^2}$
1	1
2	1/4
3	1/9



La región de la cual queremos hallar el área la dividimos en dos zonas cuyas áreas calculamos con dos integrales definidas.

$$Área\ Zona\ 1=\int_0^1 x-\frac{x}{8}dx=\int_0^1 \frac{7}{8}xdx=\left[\frac{7}{8}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\left[\frac{7}{16}x^2\right]_0^1=\left[\frac{7}{16}\cdot 1^2\right]-\left[\frac{7}{16}\cdot 0^2\right]=\boxed{\frac{7}{16}\,u^2}$$

$$Área\ Zona\ 2=\int_1^2 \frac{1}{x^2}-\frac{x}{8}dx=\int_1^2 x^{-2}-\frac{1}{8}xdx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{8}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\left[-\frac{1}{x}-\frac{x^2}{16}\right]_1^2=$$

$$=\left[-\frac{1}{2}-\frac{2^2}{16}\right]-\left[-\frac{1}{1}-\frac{1^2}{16}\right]=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{16}=\boxed{\frac{5}{16}\,u^2}$$

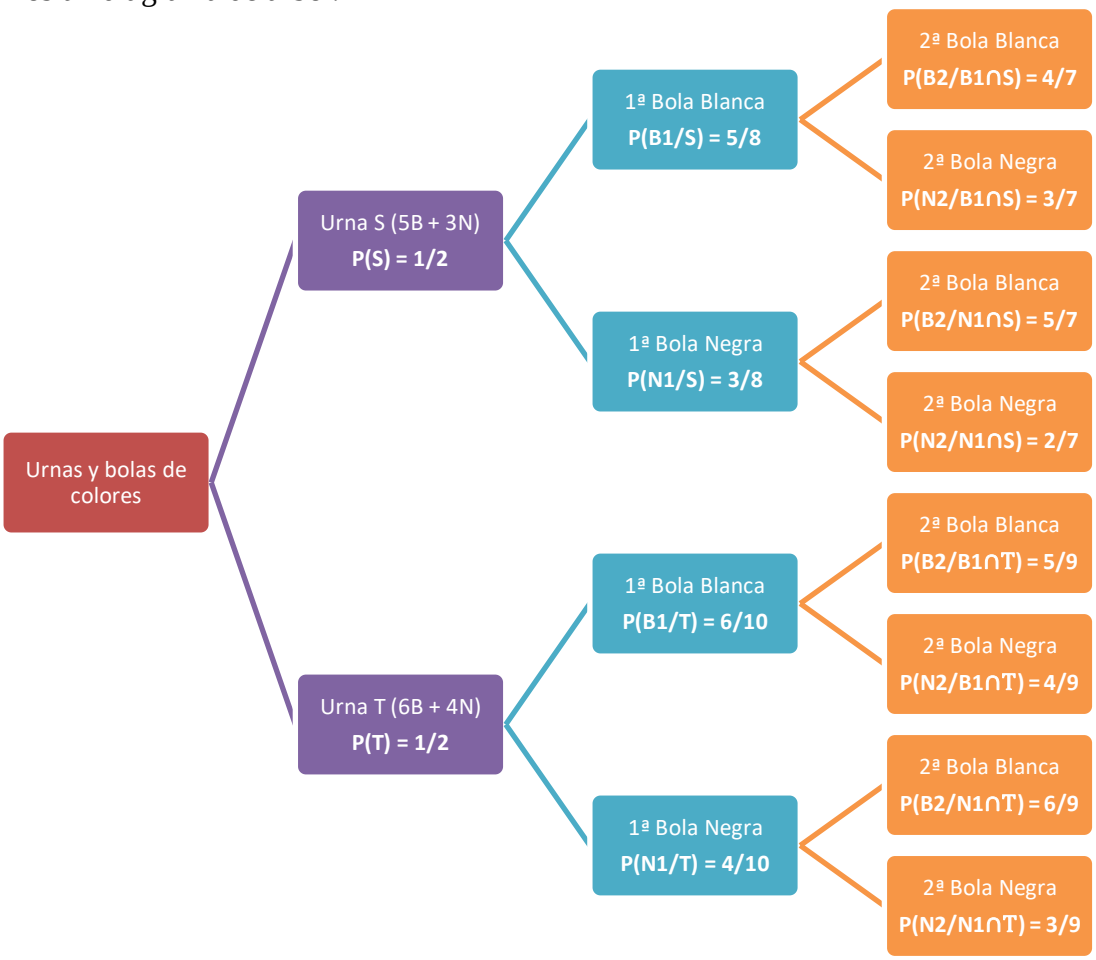
El área de la región encerrada entre las gráficas de las tres funciones es la suma de las dos áreas obtenidas:

$$\text{Área}=\frac{7}{16}+\frac{5}{16}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}=\boxed{0.75\,u^2}$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5
Una urna S contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna T, 6 blancas y 4 negras.
Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras?
(b) Si las dos bolas extraídas son negras, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la T?

Realizamos un diagrama de árbol.



(a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(N1\cap N2)=P(S\cap N1\cap N2)+P(T\cap N1\cap N2)=$$

$$=P(S)P(N1/S)P(N2/N1\cap S)+P(T)P(N1/T)P(N2/N1\cap T)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\boxed{\frac{101}{840}\simeq 0.1202}$$

(b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T/N1\cap N2)=\frac{P(T\cap N1\cap N2)}{P(N1\cap N2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}}{\frac{101}{840}}=\boxed{\frac{56}{101}\simeq 0.554}$$

Ejercicio B5

Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60% de los hogares tienen al menos dos coches. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos coches?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 30 y 40 hogares, ambos incluidos, tengan al menos dos coches?

X = El número de hogares de un grupo de 50 que tienen al menos dos coches.

Se trata de una distribución binomial, B(50, 0.6).

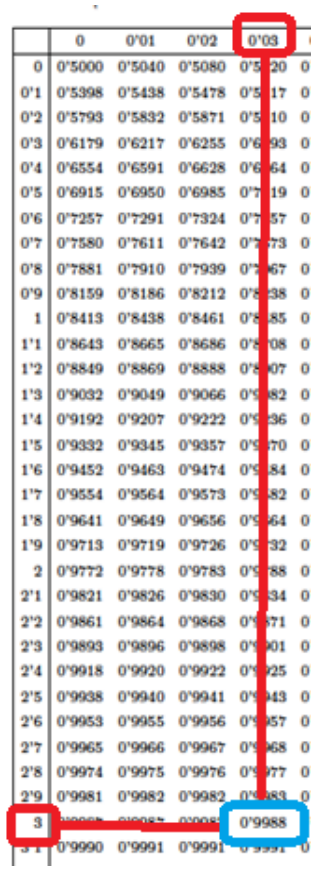
Como el número de repeticiones es muy alto y se cumple que $n\cdot p = 50\cdot 0.6 = 30 \geq 5$ y $n\cdot q = 50\cdot 0.4 = 20 \geq 5$, se puede aproximar mediante una distribución normal Y de media $np = 50\cdot 0.6 = 30$ y desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{50\cdot 0.6\cdot 0.4} = 2\sqrt{3} \simeq 3.46$ → Y = N(30, $2\sqrt{3}$).

(a) Nos piden calcular $P(X \geq 20)$

$$P(X \geq 20) = \{Corrección\ de\ Yates\} = P(Y \geq 19.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(\frac{Y-30}{2\sqrt{3}} \geq \frac{19.5-30}{2\sqrt{3}}\right) = P(Z \geq -3.03) = P(Z \leq 3.03) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = \boxed{0.9988}$$



	0	0'01	0'02	0'03	
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5 20	0
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5 17	0
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5 10	0
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6 93	0
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6 64	0
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7 19	0
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7 57	0
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7 73	0
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7 67	0
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8 38	0
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8 85	0
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8 08	0
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8 07	0
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9 82	0
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9 36	0
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9 70	0
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9 84	0
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9 82	0
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9 64	0
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9 32	0
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9 88	0
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9 34	0
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9 71	0
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9 01	0
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9 25	0
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9 43	0
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9 57	0
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9 68	0
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9 77	0
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9 83	0
3				0'9988	
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9 91	0

(b)Nos piden hallar $P(30 \leq X \leq 40)$.

$$P(30 \leq X \leq 40) = \{Corrección\ de\ Yates\} = P(29.5 \leq Y \leq 40.5)$$

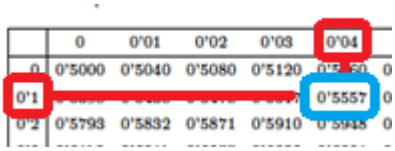
$$= P(Y \leq 40.5) - P(Y \leq 29.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{40.5-30}{2\sqrt{3}}\right) - P\left(Z \leq \frac{29.5-30}{2\sqrt{3}}\right) =$$

$$= P(Z \leq 3.03) - P(Z \leq -0.14) =$$

$$= P(Z \leq 3.03) - P(Z \geq 0.14) = P(Z \leq 3.03) - \left[1 - P(Z \leq 0.14)\right] =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = 0.9988 - [1 - 0.5557] = \boxed{0.5545}$$



	0	0'01	0'02	0'03	0'04
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5 60
0'1					0'5557
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

EAU ordinaria 2022

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2022ko OHIKOA — ORDINARIA 2022

MATEMATIKA II — **MATEMÁTICAS II**

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1
Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} x+y+\alpha z=\alpha \\ 2x+\alpha y+\alpha z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha=-1$ y $\alpha=1$, si es posible.

Ejercicio B1
Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinar para qué valores del parámetro *m* la matriz A no tiene inversa.

(b) Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $m=0$.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2
Se consideran la recta *r* cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r\equiv\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=0 \end{cases},$$

y el plano $\pi\equiv x+y+z-2=0$. Calcula las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta *r* tal que la distancia de P al plano π sea igual que la distancia de P al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto? Contesta razonadamente.

Ejercicio B2
Sean el punto $P=(1,2,a)$, donde $a\neq 0$, y el plano $\pi\equiv x+y+2z=3$. Halla las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto al plano π.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3
Dada la función $f(x)=(x-1)^2 e^{-2x}$, estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus máximos y mínimos.

Ejercicio B3
Sea $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$. Encuentra los valores de los parámetros *A*, *B* y *C* para que *f* se anule en el punto de abscisa *x* = 1 y las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa $x=-1$ y $x=3$ sean paralelas a la recta $y=2x+1$.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula $\int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)}dx$.

Ejercicio B4

Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$ y la recta horizontal $y = e$, y calcula el área de ese recinto.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Tenemos dos urnas con el siguiente número de bolas blancas y negras:
T: 4 bolas negras y 6 blancas,
R: 7 bolas negras y 3 blancas.
Se selecciona al azar una urna, se extrae una bola y se coloca en la otra urna. A continuación, se extrae una bola de esta última urna. Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas:

(a) sean negras,
(b) sean blancas,
(c) sean de distinto color.

Ejercicio B5

El peso (en gramos) de una pieza fabricada en serie sigue una distribución normal de media 52 y desviación típica 6,5.

(a) Calcula la probabilidad de que el peso de una pieza fabricada esté comprendido entre 50 y 68 gramos.
(b) Si el 30% de las piezas fabricadas pesa más que una pieza dada, ¿cuánto pesa esta última?

Soluciones

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} x+y+\alpha z=\alpha \\ 2x+\alpha y+\alpha z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha=-1$ y $\alpha=1$, si es posible.

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix}=\alpha+\alpha+2\alpha^2-\alpha^2-2-\alpha^2=2\alpha-2$$

$$|A|=0\Rightarrow 2\alpha-2=0\Rightarrow 2\alpha=2\Rightarrow \boxed{\alpha=1}$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha\neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha=1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,2^a-2\cdot Fila\,1^a & & & \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right\}\rightarrow \text{Nueva fila } 2^a$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3^a-Fila\,1^a & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\}\rightarrow \text{Nueva fila } 3^a\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overleftarrow{\quad A \quad}\rightarrow$

$\overleftarrow{\quad A/B \quad}\rightarrow$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 1$ el sistema es compatible determinado y si $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos a partir de la matriz equivalente obtenida en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ -y-z=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ \boxed{y=1-z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+1-z+z=1 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

La solución es $x=0;\ y=1-t;\ z=t;\ t\in\mathbb{R}$.

Para $\alpha = -1$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 2x-y-z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-y+z \\ 2x-y-z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(-1-y+z)-y-z=1 \\ -1-y+z-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2-2y+2z-y-z=1 \\ -2y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y+z=3 \\ -y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3+3y \\ -y+z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y+3+3y=1 \Rightarrow 2y=-2 \Rightarrow \boxed{y=-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=3-3=0} \Rightarrow \boxed{x=-1+1+0=0}$$

La solución es $x = 0$; $y = -1$; $z = 0$.

Ejercicio B1

Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinar para qué valores del parámetro m la matriz A no tiene inversa.

(b) Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $m=0$.

a) La matriz no tiene inversa cuando su determinante es nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=2m^2-4m+4-2m=2m^2-6m+4$$

$$|A|=0\Rightarrow 2m^2-6m+4=0\Rightarrow m^2-3m+2=0\Rightarrow m=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=\boxed{2=m}\\ \frac{3-1}{2}=\boxed{1=m}\end{cases}$$

La matriz A no tiene inversa cuando $m=1$ o $m=2$.

b) Para $m = 0$ el determinante de A es no nulo y tiene inversa.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=4\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{4}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Se consideran la recta *r* cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases},$$

y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$. Calcula las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta *r* tal que la distancia de P al plano π sea igual que la distancia de P al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto? Contesta razonadamente.

Estudiemos la posición relativa de recta y plano.

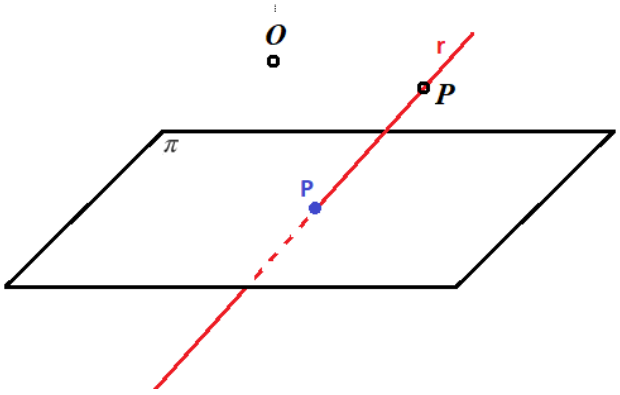
$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(0,0,0) \\ \vec{v_r} = (1,2,0) \end{cases}$$

$$\pi \equiv x + y + z - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1,1,1)$$

Comprobamos si el vector director de la recta y el normal del plano forman 90º. Para ello calculamos el producto escalar $\vec{v_r} \cdot \vec{n}$.

$$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = (1,2,0)(1,1,1) = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

Al ser no nulo no forman 901 y la recta y el plano son secantes.



El punto P que buscamos pertenece a la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow P(t, 2t, 0)$$

El punto o puntos $P(t,2t,0)$ cumplen: $d(O,P) = d(P,\pi)$.

$$\left.\begin{array}{r} d(O,P)=\left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{t^2+4t^2+0}=\sqrt{5t^2}=\sqrt{5}\cdot|t| \\ d(P,\pi)=\dfrac{|t+2t+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{|3t-2|}{\sqrt{3}} \\ d(O,P)=d(P,\pi) \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{5}\cdot|t|=\frac{|3t-2|}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{15}\cdot|t|=|3t-2|$$

Resolvemos la ecuación $\sqrt{15}\cdot|t|=|3t-2|$ teniendo en cuenta las distintas posibilidades.

Primera posibilidad:

$$Si\, 3t-2>0 \Rightarrow t>\frac{2}{3}>0 \Rightarrow \sqrt{15}\cdot t=3t-2 \Rightarrow \left(\sqrt{15}-3\right)t=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{-2}{\sqrt{15}-3}\simeq -2.29<0 \text{ ¡No válido!}$$

Segunda posibilidad:

$$Si\begin{cases} 3t-2<0 \Rightarrow t<\dfrac{2}{3}\simeq 0.67 \\ t>0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{15}\cdot t=-3t+2 \Rightarrow \left(\sqrt{15}+3\right)t=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{2}{3+\sqrt{15}}=\frac{-3+\sqrt{15}}{3}\simeq 0.291 \quad \text{¡Válido!} \Rightarrow P\left(\frac{-3+\sqrt{15}}{3},\frac{-6+2\sqrt{15}}{3},0\right)$$

Tercera posibilidad:

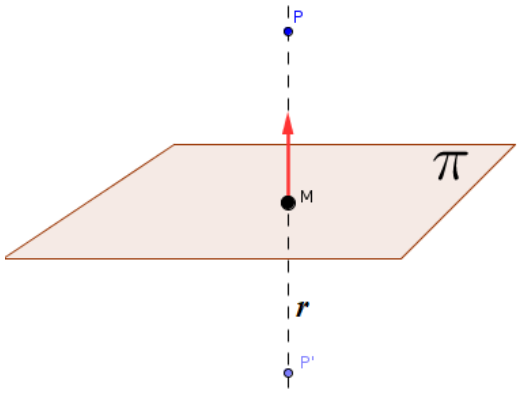
$$Si\begin{cases} 3t-2<0 \Rightarrow t<\dfrac{2}{3} \\ t<0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{15}\cdot(-t)=-3t+2 \Rightarrow \left(3-\sqrt{15}\right)t=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{2}{3-\sqrt{15}}=\frac{-3-\sqrt{15}}{3}\simeq -2.291 \quad \text{¡Válido!} \Rightarrow P\left(\frac{-3-\sqrt{15}}{3},\frac{-6-2\sqrt{15}}{3},0\right)$$

Los puntos que cumplen lo planteado son dos: $P\left(\frac{-3+\sqrt{15}}{3},\frac{-6+2\sqrt{15}}{3},0\right)$ y $P\left(\frac{-3-\sqrt{15}}{3},\frac{-6-2\sqrt{15}}{3},0\right)$

Ejercicio B2

Sean el punto $P=(1,2,a)$, donde $a\neq 0$, y el plano $\pi\equiv x+y+2z=3$. Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto al plano π.



Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P.

$$\pi\equiv x+y+2z=3\Rightarrow \vec{n}=(1,1,2)$$

$$\left.\begin{array}{l}P=(1,2,a)\in r\\ \vec{v_r}=\vec{n}=(1,1,2)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=a+2\lambda\end{cases}}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv x+y+2z=3\\ r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=a+2\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 1+\lambda+2+\lambda+2a+4\lambda=3\Rightarrow 6\lambda=-2a\Rightarrow\lambda=\frac{-2a}{6}=-\frac{a}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=1-\dfrac{a}{3}\\ y=2-\dfrac{a}{3}\\ z=a-\dfrac{2a}{3}=\dfrac{a}{3}\end{cases}\Rightarrow\boxed{M\left(1-\frac{a}{3},2-\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)}$$

El punto P´ simétrico de P respecto del plano π se obtiene sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM}=\left(1-\frac{a}{3},2-\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)-(1,2,a)=\left(-\frac{a}{3},-\frac{a}{3},-\frac{2a}{3}\right)$$

$$P'=\left(1-\frac{a}{3},2-\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)+\left(-\frac{a}{3},-\frac{a}{3},-\frac{2a}{3}\right)=\left(1-\frac{2a}{3},2-\frac{2a}{3},-\frac{a}{3}\right)$$

El punto P´ buscado es $P'=\left(1-\frac{2a}{3},2-\frac{2a}{3},-\frac{a}{3}\right)$

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x)=(x-1)^2 e^{-2x}$, estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus máximos y mínimos.

Hallamos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

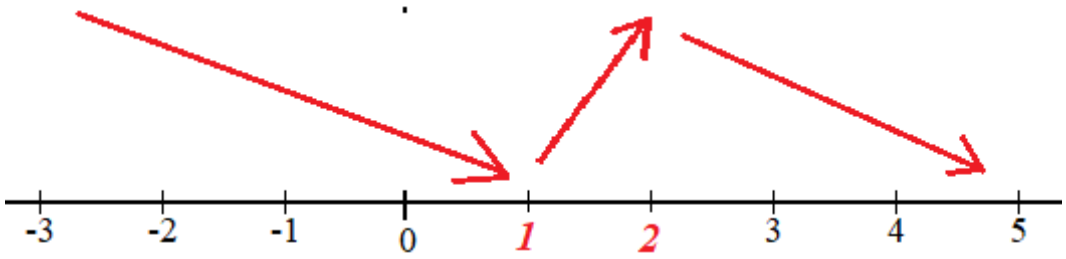
$$f'(x)=2(x-1)e^{-2x}+(x-1)^2(-2)e^{-2x}=2(1-(x-1))(x-1)e^{-2x}=2(2-x)(x-1)e^{-2x}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 2(2-x)(x-1)e^{-2x}=0\Rightarrow\begin{cases}2-x=0\rightarrow \boxed{x=2}\\ x-1=0\rightarrow \boxed{x=1}\\ e^{-2x}=0 \text{ ¡Imposible!}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=2(2-0)(0-1)e^{0}=-5<0$. La función decrece en $(-\infty,1)$.
- En el intervalo $(1,2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5)=2(2-1.5)(1.5-1)e^{-3}=\frac{1}{2e}>0$. La función crece en $(1,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=2(2-3)(3-1)e^{-6}=\frac{-4}{e^6}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ y crece en $(1,2)$.
La función presenta un máximo en $x = 2$ y un mínimo en $x = 1$.

Ejercicio B3

Sea $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$. Encuentra los valores de los parámetros *A*, *B* y *C* para que *f* se anule en el punto de abscisa $x = 1$ y las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 3$ sean paralelas a la recta $y=2x+1$.

La función se anula en $x = 1 \rightarrow f(1) = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C \\ f(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1^3+A\cdot 1^2+B\cdot 1+C=0 \Rightarrow \boxed{A+B+C+1=0}$$

Si las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 3$ son paralelas a la recta $y=2x+1$ significa que tienen el mismo valor de la pendiente, es decir, la derivada en dichos valores (pendiente de la recta tangente) vale 2 (pendiente de la recta) $\rightarrow$ $f'(-1)=2$ y $f'(3)=2$.

$$f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C \Rightarrow f'(x)=3x^2+2Ax+B$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=3x^2+2Ax+B \\ f'(-1)=2 \\ f'(3)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3(-1)^2+2A(-1)+B=2 \\ 3\cdot 3^2+2A\cdot 3+B=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3-2A+B=2 \\ 27+6A+B=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} B=2A-1 \\ 25+6A+B=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 25+6A+2A-1=0 \Rightarrow 8A=-24 \Rightarrow \boxed{A=-3} \Rightarrow \boxed{B=-6-1=-7}$$

Sustituimos estos dos valores obtenidos en la ecuación inicial.

$$\left.\begin{array}{r} B=-7 \\ A=-3 \\ A+B+C+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -3-7+C+1=0 \Rightarrow \boxed{C=9}$$

Los valores buscados son $A = -3$, $B = -7$ y $C = 9$.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula $\int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)}dx$.

$$\int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)}dx = \ldots$$

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2=x\\ \frac{1-3}{2}=-1=x\end{cases} \Rightarrow x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

$$\frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)}=\frac{7x+13}{(x+1)(x-2)(x+1)}=\frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2}$$

$$\frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x-2)(x+1)+C(x-2)}{(x-2)(x+1)^2}\Rightarrow$$

$$7x+13=A(x+1)^2+B(x-2)(x+1)+C(x-2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-1\rightarrow -7+13=-3C\rightarrow C=\frac{-6}{3}=-2\\ x=2\rightarrow 14+13=9A\rightarrow A=\frac{27}{9}=3\\ x=0\rightarrow 13=A-2B-2C\Rightarrow 13=3-2B+4\rightarrow 6=-2B\rightarrow B=-3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{3}{x-2}-\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\ldots=\int\frac{3}{x-2}-\frac{5}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}dx=\int\frac{3}{x-2}dx-\int\frac{3}{x+1}dx-\int\frac{2}{(x+1)^2}dx=$$

$$=\int\frac{3}{x-2}dx-\int\frac{3}{x+1}dx-2\int(x+1)^{-2}dx=3\ln|x-2|-3\ln|x+1|-2\frac{1}{-1}(x+1)^{-1}=$$

$$=\boxed{3\ln|x-2|-3\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}+K}$$

Ejercicio B4

Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$ y la recta horizontal $y = e$, y calcula el área de ese recinto.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las funciones.

x	$y=e^x$
–2	0.14
–1	0.37
0	1
1	2.7
2	7.4

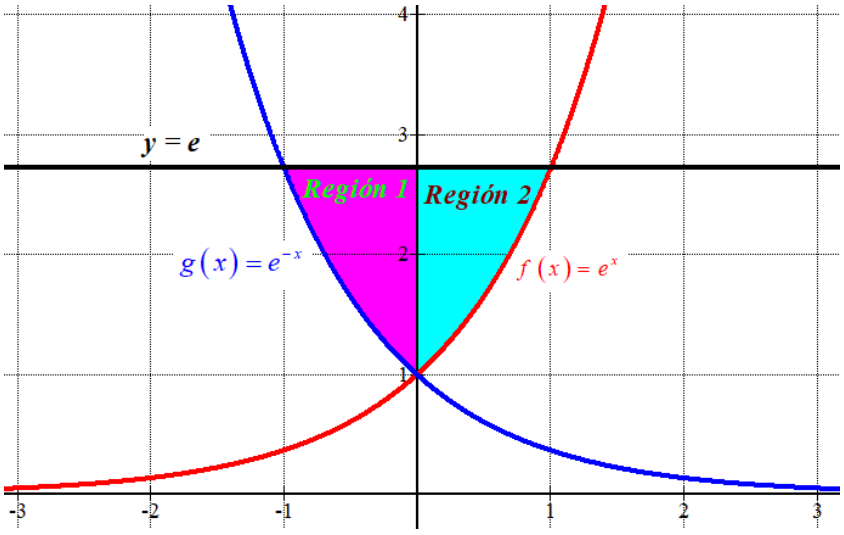
x	$y=e^{-x}$
–2	7.4
–1	2.7
0	1
1	0.37
2	0.14

Averiguamos donde se cortan sus gráficas, aunque lo tenemos en la tabla.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow e^x=e^{-x}\Rightarrow e^x=\frac{1}{e^x}\Rightarrow e^x\cdot e^x=1\Rightarrow e^{2x}=1\Rightarrow 2x=0\Rightarrow \boxed{x=0\in(-1,1)}$$

$$\left.\begin{matrix} f(x)=e^x \\ y=e \end{matrix}\right\}\Rightarrow e^x=e\Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$\left.\begin{matrix} g(x)=e^{-x} \\ y=e \end{matrix}\right\}\Rightarrow e^{-x}=e\Rightarrow -x=1\Rightarrow \boxed{x=-1}$$



El área de la región se calcula mediante dos integrales definidas.

$$Área\,1=\int_{-1}^{0} e-e^{-x}dx=\left[ex+e^{-x}\right]_{-1}^{0}=\left[0+e^{-0}\right]-\left[-e+e^{1}\right]=1+e-e=1u^2$$

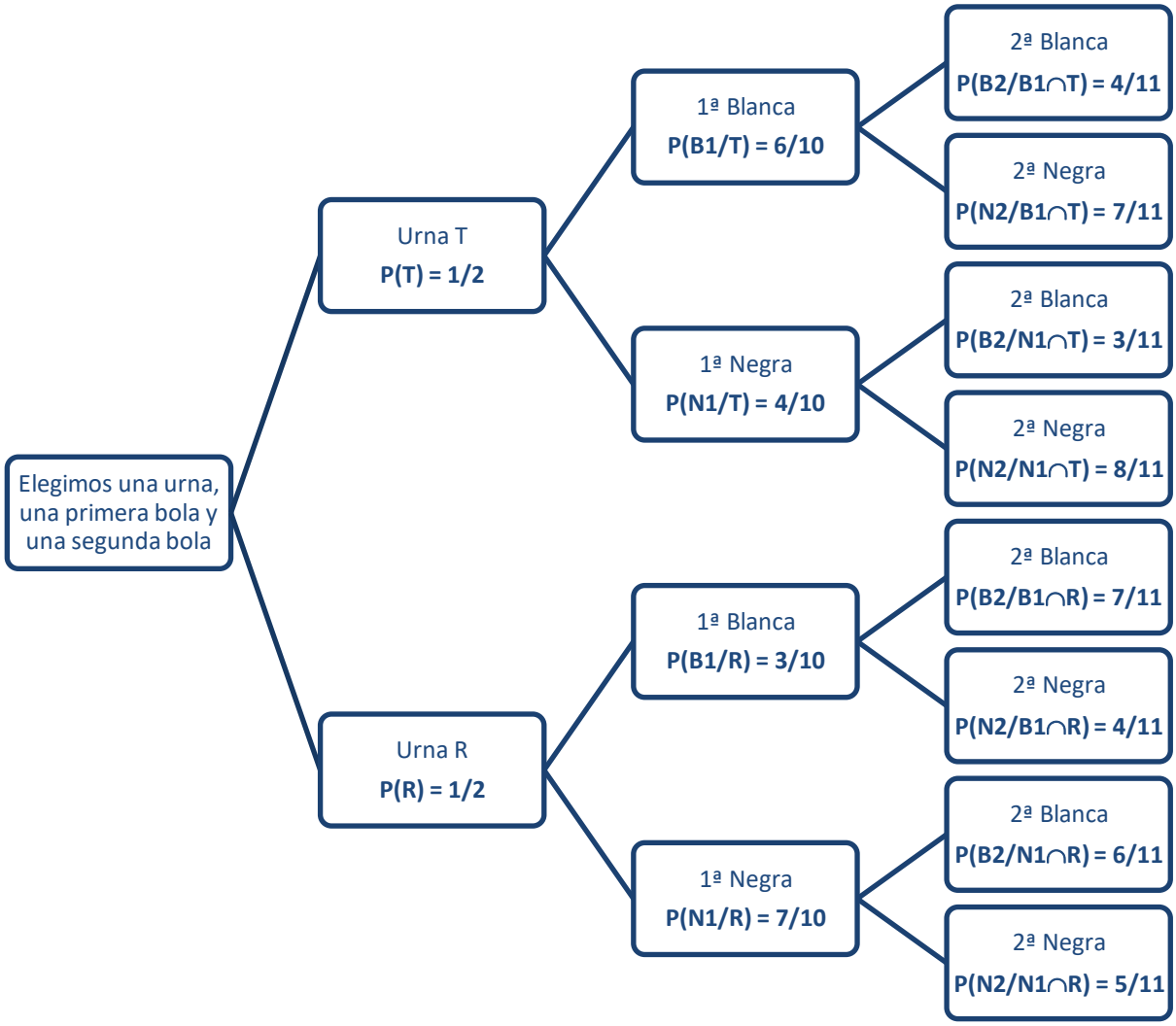
$$Área\,2=\int_{0}^{1} e-e^{x}dx=\left[ex-e^{x}\right]_{0}^{1}=\left[e-e^{1}\right]-\left[0-e^{0}\right]=e-e+1=1u^2$$

El área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$ y la recta horizontal $y = e$ es la suma de las áreas de la región 1 y 2: Área total = 2 unidades cuadradas.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5
Tenemos dos urnas con el siguiente número de bolas blancas y negras:
T: 4 bolas negras y 6 blancas,
R: 7 bolas negras y 3 blancas.
Se selecciona al azar una urna, se extrae una bola y se coloca en la otra urna. A continuación, se extrae una bola de esta última urna. Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas:
(a) sean negras,
(b) sean blancas,
(c) sean de distinto color.

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar cómo funciona el experimento aleatorio.



a) Nos piden calcular $P(N1\cap N2)$. Si miramos el diagrama ocurre en dos ramas. Sumamos sus probabilidades.

$$P(N1\cap N2)=P(T)P(N1/T)P(N2/N1\cap T)+P(R)P(N1/R)P(N2/N1\cap R)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{8}{11}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{11}=\boxed{\frac{67}{220}\simeq 0.305}$$

b) Nos piden calcular $P(B1 \cap B2)$. Si miramos el diagrama ocurre en dos ramas. Sumamos sus probabilidades.

$$P(B1 \cap B2) = P(T)P(B1/T)P(B2/B1 \cap T) + P(R)P(B1/R)P(B2/B1 \cap R) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{11} = \boxed{\frac{45}{220} \simeq 0.205}$$

c) Como tenemos calculadas las probabilidades de sacar dos bolas negras y la de sacar dos bolas blancas la probabilidad de sacar dos bolas de distinto color la calculamos usando el suceso contrario.

$$P((B1 \cap N2) \cup (N1 \cap B2)) = 1 - \left[P(B1 \cap B2) + P(N1 \cap N2) \right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{67}{220} + \frac{45}{220} \right] = \boxed{\frac{108}{220} \simeq 0.491}$$

Ejercicio B5

El peso (en gramos) de una pieza fabricada en serie sigue una distribución normal de media 52 y desviación típica 6,5.

(a) Calcula la probabilidad de que el peso de una pieza fabricada esté comprendido entre 50 y 68 gramos.

(b) Si el 30% de las piezas fabricadas pesa más que una pieza dada, ¿cuánto pesa esta última?

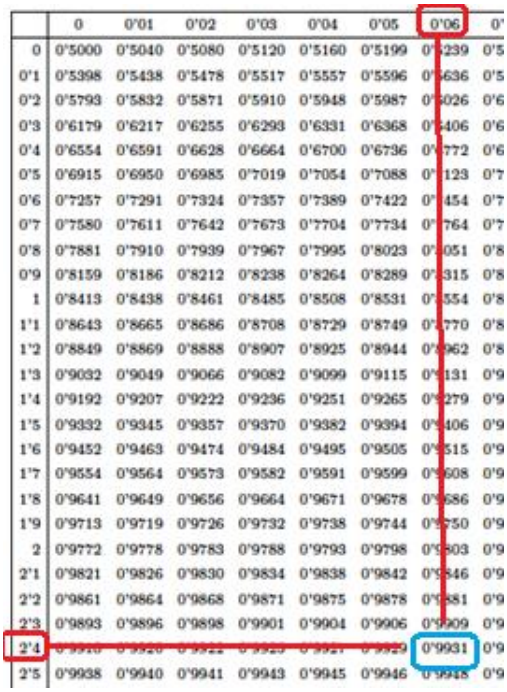
X = El peso (en gramos) de una pieza fabricada en serie. X = N(52, 6.5)

a) $P(52 \le X \le 68) = P(X \le 68) - P(X \le 52) = \{Tipificamos\} =$

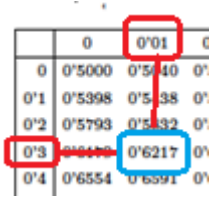
$$= P\left(Z \le \frac{68-52}{6.5}\right) - P\left(X \le \frac{50-52}{6.5}\right) = P(Z \le 2.46) - P(X \le -0.31) =$$

$$= P(Z \le 2.46) - \left[1 - P(X \le 0.31)\right] = \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} =$$

$$= 0.9931 - [1 - 0.6217] = \boxed{0.6148}$$



	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9
2'4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'9931	0'9
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9



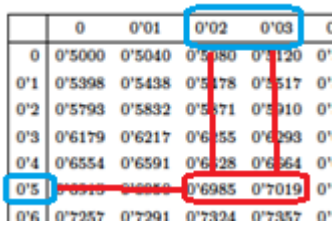
	0	0'01	0
0	0'5000	0'5040	0'
0'1	0'5398	0'5438	0'
0'2	0'5793	0'5832	0'
0'3	[illegible]	0'6217	0'
0'4	0'6554	0'6591	0'

b) Nos piden hallar el valor "a" tal que $P(X \ge a) = 0.30$.

$$P(X \ge a) = 1 - P(X \le a) = 0.30 \Rightarrow P(X \le a) = 0.70 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{a-52}{6.5}\right) = 0.70 \Rightarrow \{\text{Miramos en la tabla N(0,1)}\} \Rightarrow \frac{a-52}{6.5} = 0.525 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - 52 = 6.5 \cdot 0.525 \Rightarrow a = 52 + 6.5 \cdot 0.525 = \boxed{55.41}$$



	0	0'01	0'02	0'03	0
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'
0'5	[illegible]	[illegible]	0'6985	0'7019	0'
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'

El 30 % de las piezas está por encima de 55.41 gramos.

EAU extraordinaria 2021

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2021ko EZOHIKOA — EXTRAORDINARIA 2021

MATEMATIKA II — **MATEMÁTICAS II**

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discutir el sistema de ecuaciones lineales que sigue, en función del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - z = \alpha \\ 2x + \alpha y + z = 2 + \alpha \\ x - \alpha y + 2z = 2\alpha \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 1$, si es posible.

Ejercicio B1

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz X de orden 2×2 que verifica

$$A^2 \cdot X + B = C$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea *r* la recta de ecuaciones paramétricas

$$\{x = t,\ y = 2 + 2t,\ z = 1 + 3t\}$$

y sean $A = (1,2,3)$ y $B = (3,2,1)$. Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta *r* y que pasa por los puntos *A* y *B*. Calcular la distancia de la recta *r* a ese plano.

Ejercicio B2

Sean los puntos *A = (0, 2, 1), B = (1, b, 0), C = (–1, 0, 2)* y *D = (1, 1, 1)*.

a) Calcular el valor de *b* para que *A, B, C* y *D* estén en el mismo plano.

b) El plano que contiene a los puntos *A, B, C* y *D* es perpendicular al segmento *PQ* y lo divide en dos partes iguales. Si *P = (1, 2, –3)*, calcular las coordenadas de *Q*.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-4}$ y calcular sus máximos y sus mínimos.

Ejercicio B3

Sea $f(x) = x^4 + Ax^2 + Bx + C$. Obtener los valores de *A, B* y *C* para que en el punto de abscisa $x = 0$ la recta tangente a la gráfica de *f* sea *y = 2x – 1* y en el punto de abscisa *x = 1* la recta tangente a la gráfica de *f* sea horizontal. El extremo situado en el punto de abscisa *x = 1*, ¿es máximo o mínimo?

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibujar el recinto limitado por las gráficas de las parábolas $y=4x-x^2$ e $y=x^2-6$ y calcular su área.

Ejercicio B4

Calcular $\int x\ln(x+1)dx$, explicando el método utilizado.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

De los 700 estudiantes que tiene un centro escolar se sabe que 500 proceden del barrio donde está ubicado el centro, 575 utilizan el servicio de comedor y 400 son del barrio y utilizan el servicio de comedor. Se escoge un estudiante al azar:

a) Si es del barrio, ¿cuál es la probabilidad de que use el comedor?
b) Si usa el servicio de comedor, ¿cuál es la probabilidad de que no proceda del barrio?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del barrio o use el servicio de comedor?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea del barrio ni utilice el servicio de comedor?

Ejercicio B5

La estatura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 1,74 cm y desviación típica 0,05 cm. Se elige un individuo al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una estatura igual o inferior a la media?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que su estatura esté comprendida entre 1,64 y 1,84 cm?
c) Si la población está compuesta por 1500 individuos. ¿Cuántos tienen una estatura inferior a 1,54 cm?

Soluciones

Ejercicio A1

Discutir el sistema de ecuaciones lineales que sigue, en función del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - z = \alpha \\ 2x + \alpha y + z = 2 + \alpha \\ x - \alpha y + 2z = 2\alpha \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 1$, si es posible.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 1 & -\alpha & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2 & -1 & \alpha \\ 2 & \alpha & 1 & 2+\alpha \\ 1 & -\alpha & 2 & 2\alpha \end{array}\right).$$

Veamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 1 & -\alpha & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha^2 + 2 + 2\alpha + \alpha - 8 + \alpha^2 = 3\alpha^2 + 3\alpha - 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 + 3\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Hay tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $\alpha = 1$

Para este valor el sistema queda $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$. Aplicamos el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2x & +y & +z & =3 \\ -2x & -4y & +2z & =-2 \\ \hline & -3y & +3z & =1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{cccc} x & -y & +2z & =2 \\ -x & -2y & +z & =-1 \\ \hline & -3y & +3z & =1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -3y + 3z = 1 \\ -3y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrcl} & \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 2^a & & \\ -3y & +3z = & 1 & \\ 3y & -3z = & -1 & \\ \hline 0 & 0 = & 0 & \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ -3y+3z=1 \\ 0=0 \end{array}\right.$$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 3. $\alpha = -2$

Para este valor el sistema queda $\left\{\begin{array}{l} -2x+2y-z=-2 \\ 2x-2y+z=0 \\ x+2y+2z=-4 \end{array}\right.$

Aplicamos el método de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{l} -2x+2y-z=-2 \\ 2x-2y+z=0 \\ x+2y+2z=-4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rrcl} & & \text{Ecuación } 2^a + \text{Ecuación } 1^a & \\ 2x & -2y & +z = 0 & \\ -2x & +2y & -z = -2 & \\ \hline & & 0 = -2 & \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x+2y-z=-2 \\ 0=-2 \\ x+2y+2z=-4 \end{array}\right.$$

La segunda ecuación es una igualdad imposible.
El sistema es **incompatible** (sin solución)

Resumiendo: Para $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$ el sistema es compatible determinado, para α = 1 el sistema es compatible indeterminado y para α = –2 el sistema es incompatible.

Para α = 1 es compatible indeterminado. Hallamos sus infinitas soluciones. Nos quedamos con el sistema triangular equivalente obtenido con el método de Gauss en el apartado anterior.

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ 2x+y+z=3 \\ x-y+2z=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ -3y+3z=1 \\ 0=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ -3y+3z=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y=1+z \\ -3y=1-3z \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y=1+z \\ \boxed{y=\dfrac{1-3z}{-3}=\dfrac{-1+3z}{3}} \end{array}\right. \Rightarrow x+2\frac{-1+3z}{3}=1+z \Rightarrow 3x-2+6z=3+3z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x=5-3z \Rightarrow \boxed{x=\frac{5-3z}{3}}$$

Las soluciones del sistema son $x=\dfrac{5-3t}{3}$, $y=\dfrac{-1+3t}{3}$, $z=t$ siendo $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio B1

Sean

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz X de orden 2×2 que verifica

$$A^2\cdot X+B=C$$

Despejamos X en la ecuación.

$$A^2\cdot X+B=C\Rightarrow A^2\cdot X=C-B\Rightarrow X=\left(A^2\right)^{-1}(C-B)$$

Veamos si la matriz A^2 es invertible, en cuyo caso calculamos su inversa.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left|A^2\right|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$ La matriz es invertible.

$$\left(A^2\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A^2\right)^t\right)}{\left|A^2\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

Lo sustituimos en la expresión $X=\left(A^2\right)^{-1}(C-B)$

$$X=\left(A^2\right)^{-1}(C-B)$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right]$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 8\end{pmatrix}}$$

Ejercicio A2

Sea *r* la recta de ecuaciones paramétricas

$$\{x=t,\ y=2+2t,\ z=1+3t\}$$

y sean $A=(1,2,3)$ y $B=(3,2,1)$. Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta *r* y que pasa por los puntos *A* y *B*. Calcular la distancia de la recta *r* a ese plano.

Hallamos el vector director de la recta *r*

$$\left.\begin{array}{l} x=t \\ r: y=2+2t \\ z=1+3t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_r(0,2,1)\in r \\ \vec{v_r}=(1,2,3) \end{array}\right\}$$

Hallamos el vector que une los puntos A y B.

$$\left.\begin{array}{l} A=(1,2,3) \\ B=(3,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(3,2,1)-(1,2,3)=(2,0,-2)$$

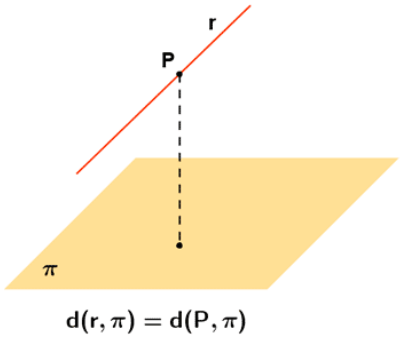
El plano π paralelo a *r* y que pasa por los puntos A y B tiene como vectores directores $\vec{v_r}$ y $\overrightarrow{AB}$, y pasa por el punto $A=(1,2,3)$.

$$\left.\begin{array}{l} A=(1,2,3)\in\pi \\ \vec{u}=\vec{v_r}=(1,2,3) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AB}=(2,0,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(x-1)+6(y-2)+0-4(z-3)+2(y-2)+0=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -4x+4+6y-12-4z+12+2y-4=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -4x+8y-4z=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x-2y+z=0}$$

Como recta y plano son paralelos la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x-2y+z=0 \\ P_r(0,2,1)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow D(r,\pi)=D(P_r,\pi)=\frac{|0-2\cdot 2+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{6}=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}\approx 1.22\,u}$$



Ejercicio B2

Sean los puntos $A = (0, 2, 1)$, $B = (1, b, 0)$, $C = (–1, 0, 2)$ y $D = (1, 1, 1)$.

a) Calcular el valor de b para que A, B, C y D estén en el mismo plano.

b) El plano que contiene a los puntos A, B, C y D es perpendicular al segmento PQ y lo divide en dos partes iguales. Si $P = (1, 2, –3)$, calcular las coordenadas de Q.

a) Hallamos el plano π que contiene a los puntos A, C y D. Luego hacemos que el punto B pertenezca al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} D(1,1,1)\in\pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{AC}=(-1,0,2)-(0,2,1)=(-1,-2,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AD}=(1,1,1)-(0,2,1)=(1,-1,0) \end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

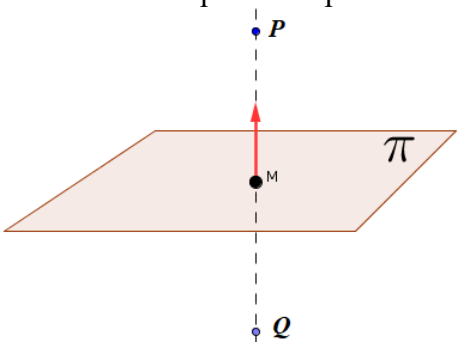
$$\Rightarrow y-1+z-1+2z-2+x-1=0\Rightarrow \pi: x+y+3z-5=0$$

El punto B pertenece al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x+y+3z-5=0 \\ B(1,b,0)\in\pi \end{array}\right\}\Rightarrow 1+b+0-5=0\Rightarrow \boxed{b=4}$$

El valor buscado es $b = 4$.

b) El plano que contiene a los puntos A, B, C y D es $\pi: x+y+3z-5=0$.
Nos piden hallar el punto Q simétrico de P respecto del plano π.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P.

$$\pi: x+y+3z-5=0\Rightarrow \vec{n}=(1,1,3)\Rightarrow r:\begin{cases} P(1,2,-3)\in r \\ \vec{v_r}=\vec{n}=(1,1,3) \end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=-3+3t \end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x+y+3z-5=0 \\ r:\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=-3+3t \end{cases} \end{array}\right\}\Rightarrow 1+t+2+t+3(-3+3t)-5=0\Rightarrow 1+t+2+t-9+9t-5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11t-11=0\Rightarrow t=1\Rightarrow \begin{cases} x=1+1=2 \\ y=2+1=3 \\ z=-3+3=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(2,3,0\right)$$

El punto Q se obtiene sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM}=\left(2,3,0\right)-\left(1,2,-3\right)=\left(1,1,3\right)$$

$$Q=\left(2,3,0\right)+\left(1,1,3\right)=\left(3,4,3\right)$$

El punto Q tiene coordenadas (3, 4, 3).

Ejercicio A3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-4}$ y calcular sus máximos y sus mínimos.

La función $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-4}$ tiene como dominio todos los reales menos los que anulan su denominador.

$$x^2-4=0\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2\,.$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Utilizamos el signo de la derivada de la función para estudiar su evolución.

$$f(x)=\frac{x-4}{x^2-4}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{x^2-4-2x(x-4)}{(x^2-4)^2}=\frac{x^2-4-2x^2+8x}{(x^2-4)^2}=\frac{-x^2+8x-4}{(x^2-4)^2}$$

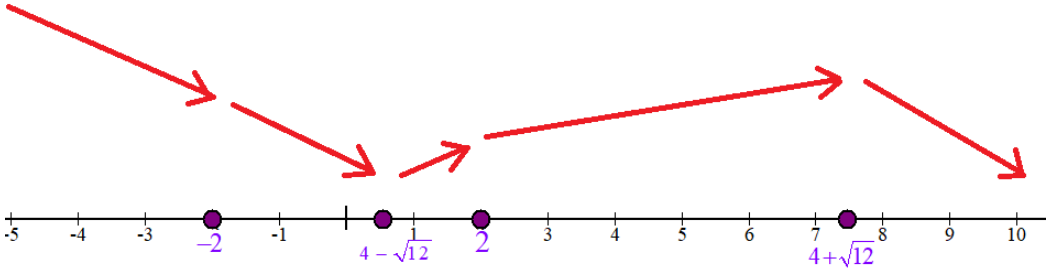
$$f\,'(x)=0\Rightarrow\frac{-x^2+8x-4}{(x^2-4)^2}=0\Rightarrow -x^2+8x-4=0\Rightarrow$$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4(-1)(-4)}}{-2}=\frac{-8\pm\sqrt{48}}{-2}=\frac{-8\pm 2\sqrt{12}}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-8+2\sqrt{12}}{-2}=4-\sqrt{12}\approx 0.53\\ \dfrac{-8-2\sqrt{12}}{-2}=4+\sqrt{12}\approx 7.46\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores obtenidos. Añadimos los valores –2 y 2 en los que la función es discontinua.

- En $(-\infty,-2)$ tomamos *x = –3* y la derivada vale $f\,'(-3)=\dfrac{-(-3)^2+8(-3)-4}{((-3)^2-4)^2}=\dfrac{-}{+}<0$. La función decrece en $(-\infty,-2)$.
- En $(-2,4-\sqrt{12})$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f\,'(0)=\dfrac{-0^2+0-4}{(0^2-4)^2}=-\dfrac{1}{4}<0$. La función decrece en $(-2,4-\sqrt{12})$.
- En $(4-\sqrt{12},2)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f\,'(1)=\dfrac{-1^2+8-4}{(1^2-4)^2}=\dfrac{3}{9}>0$. La función crece en $(4-\sqrt{12},2)$.
- En $(2,4+\sqrt{12})$ tomamos *x = 3* y la derivada vale $f\,'(3)=\dfrac{-3^2+8(3)-4}{(3^2-4)^2}=\dfrac{12}{25}>0$. La función crece en $(2,4+\sqrt{12})$.
- En $(4+\sqrt{12},+\infty)$ tomamos *x = 10* y la derivada vale $f\,'(9)=\dfrac{-9^2+72-4}{(10^2-4)^2}=-\dfrac{13}{+}<0$. La función decrece en $(4+\sqrt{12},+\infty)$.

La función sigue el esquema del dibujo.



La función decrece en $(-\infty,-2)\cup\left(-2,4-\sqrt{12}\right)\cup\left(4+\sqrt{12},+\infty\right)$ y crece en $\left(4-\sqrt{12},2\right)\cup\left(2,4+\sqrt{12}\right)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x=4-\sqrt{12}$ y un máximo relativo en $x=4+\sqrt{12}$

Ejercicio B3

Sea $f(x)=x^4+Ax^2+Bx+C$. Obtener los valores de *A*, *B* y *C* para que en el punto de abscisa $x=0$ la recta tangente a la gráfica de *f* sea $y = 2x - 1$ y en el punto de abscisa $x = 1$ la recta tangente a la gráfica de *f* sea horizontal. El extremo situado en el punto de abscisa $x = 1$, ¿es máximo o mínimo?

Si la función en el punto de abscisa $x=0$ tiene como recta tangente a la gráfica de *f* la recta $y=2x-1$, significa que $f(0) = 0 - 1 = -1$ y que $f'(0) = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^4+Ax^2+Bx+C \\ f(0)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1=0^4+A\cdot 0^2+0+C \Rightarrow \boxed{C=-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=4x^3+2Ax+B \\ f'(0)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2=4\cdot 0^3+0+B \Rightarrow \boxed{B=2}$$

La función queda como $f(x)=x^4+Ax^2+2x-1$

Como en el punto de abscisa $x = 1$ la recta tangente a la gráfica de *f* es horizontal significa que $f'(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^4+Ax^2+2x-1 \Rightarrow f'(x)=4x^3+2Ax+2 \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=4+2A+2 \Rightarrow \boxed{A=-3}$$

Los valores buscados son $A = -3$, $B = 2$, $C = -1$.

La función queda $f(x)=x^4-3x^2+2x-1$

La función presenta un punto crítico en $x = 1$ pues la derivada primera se anula.
Calculamos su segunda derivada

$$f(x)=x^4-3x^2+2x-1 \Rightarrow f'(x)=4x^3-6x+2 \Rightarrow f''(x)=12x^2-6$$

Sustituimos el valor $x = 1$ para averiguar el signo de la derivada segunda.

$$f''(1)=12-6=6>0$$

Como es positivo la función presenta un mínimo relativo en $x = 1$.

Ejercicio A4

Dibujar el recinto limitado por las gráficas de las parábolas $y=4x-x^2$ e $y=x^2-6$ y calcular su área.

Hallamos los vértices de las parábolas.

$$y=4x-x^2 \Rightarrow y'=4-2x \qquad y=x^2-6 \Rightarrow y'=2x$$

$$y'=0 \Rightarrow 4-2x=0 \Rightarrow x=2 \qquad y'=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$$

Averiguamos los puntos de corte de ambas gráficas.

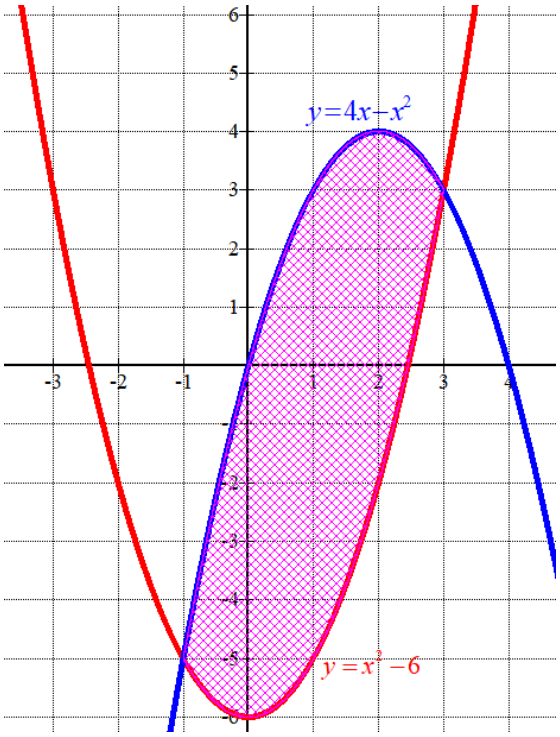
$$\left.\begin{matrix} y=4x-x^2 \\ y=x^2-6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4x-x^2=x^2-6 \Rightarrow -2x^2+4x+6=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-3)}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}\frac{2+4}{2}=3\\ \frac{2-4}{2}=-1\end{cases}$$

Las parábolas se cortan en $x=-1$ y en $x=3$. Hacemos una tabla de valores de cada una y dibujamos el recinto limitado por ellas.

x	$y=4x-x^2$
0	0
1	3
2	4 Vértice
3	3
4	0

x	$y=x^2-6$
−2	−2
−1	−5
0	−6 Vértice
1	−5
2	−2



El área del recinto lo calculamos como la integral definida entre –1 y 3 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_{-1}^{3}\left(4x-x^2\right)-\left(x^2-6\right)dx=\int_{-1}^{3}4x-x^2-x^2+6dx=\int_{-1}^{3}-2x^2+4x+6dx=$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^{3}=\left[-\frac{2}{3}(3)^3+2(3)^2+6(3)\right]-\left[-\frac{2}{3}(-1)^3+2(-1)^2+6(-1)\right]=$$

$$=-18+18+18-\frac{2}{3}-2+6=22-\frac{2}{3}=\frac{64}{3}\approx 21.3\,u^2$$

El área del recinto es 64/3 unidades cuadradas.

Ejercicio B4

Calcular $\int x\ln(x+1)dx$, explicando el método utilizado.

Utilizamos el método de integración por partes.

$$\int x\ln(x+1)dx=\left\{\begin{array}{l} u=\ln(x+1)\to du=\dfrac{1}{x+1}dx \\ dv=xdx\to v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right\}=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}dx=...$$

Descomponemos la fracción para facilitar el cálculo de la integral $\int\frac{x^2}{x+1}dx$.

$$\boxed{\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2-1+1}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}+\frac{1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}}$$

$$\int\frac{x^2}{x+1}dx=\int x-1+\frac{1}{x+1}dx=\frac{x^2}{2}-x+\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|$$

Sustituimos en la integral de partida.

$$\int x\ln(x+1)dx=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}dx=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right]=$$

$$=\boxed{\frac{x^2}{2}\ln|x+1|-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{\ln|x+1|}{2}+K}$$

Ejercicio A5

De los 700 estudiantes que tiene un centro escolar se sabe que 500 proceden del barrio donde está ubicado el centro, 575 utilizan el servicio de comedor y 400 son del barrio y utilizan el servicio de comedor. Se escoge un estudiante al azar:

a) Si es del barrio, ¿cuál es la probabilidad de que use el comedor?
b) Si usa el servicio de comedor, ¿cuál es la probabilidad de que no proceda del barrio?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del barrio o use el servicio de comedor?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea del barrio ni utilice el servicio de comedor?

Utilizamos una tabla de contingencia para obtener el resto de datos que van implícitos con los proporcionados en el problema.

	Utiliza el servicio de comedor	No utiliza el servicio de comedor	
Es del barrio	**400**		**500**
No es del barrio			
	575		**700**

Completamos los datos.

	Utiliza el servicio de comedor	No utiliza el servicio de comedor	
Es del barrio	**400**	**100**	**500**
No es del barrio	**175**	**25**	**200**
	575	**125**	**700**

Con estos datos podemos calcular las probabilidades pedidas utilizando la regla de Laplace.

$$P(A)=\frac{\text{Nº casos favorables al suceso A}}{\text{Nº casos posibles}}$$

Para simplificar las expresiones llamamos B = Ser del barrio, $\overline{B}$ = No ser del barrio

También llamamos C = Utilizar el servicio de comedor, $\overline{C}$ = No utilizar el servicio de comedor.

a) $P(C/B)=\frac{400}{500}=\boxed{0.8}$

b) $P(\overline{B}/C)=\frac{175}{575}=\boxed{\frac{7}{23}\approx 0.3043}$

c) $P(B\cup C)=\frac{400+100+175}{700}=\boxed{\frac{675}{700}\approx 0.96}$

d) $P(\overline{B}\cap\overline{C})=\boxed{\frac{25}{700}\approx 0.04}$

Ejercicio B5

La estatura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 1,74 cm y desviación típica 0,05 cm. Se elige un individuo al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una estatura igual o inferior a la media?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que su estatura esté comprendida entre 1,64 y 1,84 cm?
c) Si la población está compuesta por 1500 individuos. ¿Cuántos tienen una estatura inferior a 1,54 cm?

X = Estatura de un individuo X = N(1,74, 0.05)

a) En una distribución normal la media deja la mitad de la distribución a cada lado, por lo que $P(X \le \mu) = 0.5$.

b) Nos piden calcular $P(1.64 \le X \le 1.84)$.

$$P(1.64 \le X \le 1.84) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{1.64-1.74}{0.05} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{1.84-1.74}{0.05}\right) =$$

$$= P(-2 \le Z \le 2) = P(Z \le 2) - P(Z \le -2) = P(Z \le 2) - P(Z \ge 2) =$$

$$= P(Z \le 2) - \left[1 - P(Z \le 2)\right] = \{\text{Buscamos en la tabla N(0, 1)}\} =$$

$$= 0.9772 - (1 - 0.9772) = \boxed{0.9544}$$

c) Calculamos la probabilidad de que un individuo tenga una estatura inferior a 1,54.

$$P(X < 1.54) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1.54-1.74}{0.05}\right) = P(Z < -4) =$$

$$= P(Z > 4) = 1 - P(Z \le 4) = \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = 1 - 1 = 0$$

Prácticamente ningún individuo de la población tiene esa estatura.

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

EAU ordinaria 2021

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2021ko EKAINA — ORDINARIA 2021

MATEMATIKA II — **MATEMÁTICAS II**

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x - y + z = 1 \\ 3x - y + \alpha z = \alpha \\ x + (\alpha - 1) z = 1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 3$, si es posible.

Ejercicio B1

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinar para qué valores del parámetro α la matriz A no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $\alpha = 2$.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea *r* la recta que pasa por los puntos $A = (1, a, -1)$ y $B = (b, 1, 1)$ y π el plano de ecuación $x + y - 2z = 2b$.

a) Calcular los valores de los parámetros *a* y *b* para que la recta *r* sea perpendicular al plano π.

b) Calcular los valores de los parámetros *a* y *b* para que la recta *r* esté contenida en el plano π.

Ejercicio B2

Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P = (-2, 1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta *r* de ecuaciones paramétricas

$$\{x = 1 - 2t,\ y = 1 + t,\ z = t\}$$

Calcular la distancia de P al punto de corte de ambas rectas.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Estudiar los máximos, mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 5 + 8x^2 - x^4$. Representa la gráfica de *f*.

Ejercicio B3

Sea la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$.

a) Obtener los valores de los parámetros A, B y C para que la gráfica de *f* pase por el punto (0, 1) y tenga un mínimo en el punto (1, 1).

b) ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos? En caso afirmativo, encontrarlos.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Sean las funciones $f(x)=1/x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=x^2/8$.

a) Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las gráficas de esas tres funciones.
b) Calcular el área de dicho recinto.

Ejercicio B4

Calcular, explicando los métodos utilizados,

$$I=\int (x+2)\sin(2x)dx \quad y \quad J=\int \frac{x+7}{x^2-4x-5}dx$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

En una farmacia se ha recibido un lote de medicamentos de los tipos A, I y M. El 80 % corresponde al medicamento A, el 10 % al I y el resto al M. En la revisión realizada por la farmacéutica se ha observado que hay medicamentos caducados en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de I y el 5 % de M. Se elige una caja de medicamentos al azar. Hallar:

a) La probabilidad de coger un medicamento caducado.
b) Si sabemos que el medicamento está caducado, la probabilidad de que sea del tipo A.

Ejercicio B5

En una ciudad se han elegido al azar 3900 personas. Hallar:

a) La probabilidad de que al menos 15 de ellas cumplan años el día del patrón de la ciudad.
b) La probabilidad de que el número de personas que cumplan años el día del patrón esté comprendido entre 5 y 15, ambos incluidos.

Soluciones

Ejercicio A1

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x - y + z = 1 \\ 3x - y + \alpha z = \alpha \\ x + (\alpha - 1) z = 1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 3$, si es posible.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 3 & -1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha - 1 & 1 \end{array}\right).$$

Veamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 3 & -1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha - 1 \end{vmatrix} = -\alpha^2 + \alpha - \alpha + 1 + 3\alpha - 3 = -\alpha^2 + 3\alpha - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(-2)}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{-2} = 1 \\ \frac{-3-1}{-2} = 2 \end{cases}$$

Hay tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $\alpha = 1$

Para este valor el sistema queda:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - y + z = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Dado lo sencillo que queda el sistema lo resolvemos y establecemos que tipo de sistema es.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - y + z = 1 \\ \boxed{x = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - y + z = 1 \\ 3 - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ -y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{¡¡Imposible!!}$$

Hay dos ecuaciones que el primer miembro de la igualdad es igual pero el otro es distinto, una situación imposible de resolver.

El sistema es **incompatible** (sin solución)

CASO 3. $\alpha = 2$

Para este valor el sistema queda:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Dado lo sencillo que queda el sistema lo resolvemos y establecemos que tipo de sistema es.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(1-z) - y + z = 1 \\ 3(1-z) - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2z - y + z = 1 \\ 3 - 3z - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y - z = -1 \\ -y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Ecuaciones iguales}\} \Rightarrow -y - z = -1 \Rightarrow y + z = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 - z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 1 - (1 - z) = z} \Rightarrow \text{Soluciones:} \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \, ; \, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Hay infinitas soluciones.

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

Para $\alpha = 3$ el sistema es compatible determinado (CASO 1). El sistema queda $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 3x - y + 3z = 3 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$.

Lo resolvemos utilizando el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-2 - 3 + 1 + 6}{-6 - 3 + 1 + 6} = \frac{2}{-2} = -1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{18 + 3 + 3 - 3 - 6 - 9}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-3 - 3 + 1 + 3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

La solución del sistema es $x = -1; \, y = -3; \, z = 1$

Ejercicio B1

Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & \alpha\\ 1 & \alpha & 1\\ 0 & \alpha & -1\end{pmatrix}.$$

a) Determinar para qué valores del parámetro α la matriz A no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $\alpha=2$.

a) Averiguamos cuando el determinante de A es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3 & \alpha\\ 1 & \alpha & 1\\ 0 & \alpha & -1\end{vmatrix}=-2\alpha+\alpha^2+3-2\alpha=\alpha^2-4\alpha+3$$

$$|A|=0\Rightarrow\alpha^2-4\alpha+3=0\Rightarrow\alpha=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-12}}{2}=\frac{4\pm2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=3\\ \frac{4-2}{2}=1\end{cases}$$

El determinante de A se anula para $\alpha=1$ y $\alpha=3$.
Para $\alpha=1$ y $\alpha=3$la matriz A no tiene inversa.

b) Para $\alpha=2$ la matriz A tiene inversa pues α es distinto de 1 y 3.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=-4+4+3-4=-1\neq0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=-\begin{pmatrix}-4 & 7 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -7 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ -2 & 4 & -1\end{pmatrix}}$$

Ejercicio A2

Sea r la recta que pasa por los puntos $A=(1,a,-1)$ y $B=(b,1,1)$ y π el plano de ecuación $x+y-2z=2b$.

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que la recta r sea perpendicular al plano π.
b) Calcular los valores de los parámetros a y b para que la recta r esté contenida en el plano π.

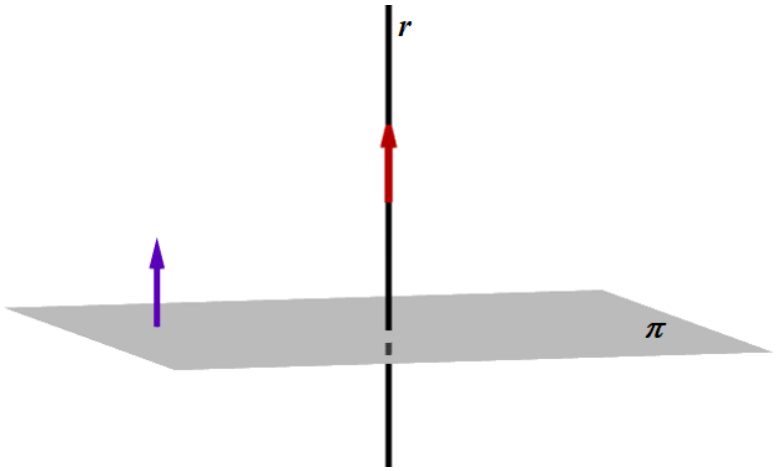
La recta r que pasa por los puntos $A=(1,a,-1)$ y $B=(b,1,1)$ tiene como vector director $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB}=(b,1,1)-(1,a,-1)=(b-1,1-a,2)$ y su ecuación es:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}=(b-1,1-a,2)\\ A=(1,a,-1)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=1+(b-1)\lambda\\ y=a+(1-a)\lambda\\ z=-1+2\lambda\end{cases}$$

a) Si la recta r es perpendicular al plano el vector normal del plano y el director de la recta deben indicar la misma dirección, por lo que sus coordenadas deben ser proporcionales.

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{AB}=(b-1,1-a,2)\\ \pi: x+y-2z=2b\Rightarrow \vec{n}=(1,1,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{b-1}{1}=\frac{1-a}{1}=\frac{2}{-2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{b-1}{1}=\frac{2}{-2}\rightarrow b-1=-1\Rightarrow \boxed{b=0}\\ \\ \frac{1-a}{1}=\frac{2}{-2}\rightarrow 1-a=-1\Rightarrow \boxed{a=2}\end{cases}$$



Los valores necesarios para que la recta r sea perpendicular al plano π son $a = 2$ y $b = 0$.

b) Si la recta r está contenida en el plano debe cumplirse que el vector normal del plano y el director de la recta sean perpendiculares, es decir, su producto escalar sea cero.

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{AB}=(b-1,1-a,2)\\ \pi: x+y-2z=2b \Rightarrow \vec{n}=(1,1,-2)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow (b-1,1-a,2)(1,1,-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b-1+1-a-4=0 \Rightarrow \boxed{b-a=4}$$

y además que el punto $B=(b,1,1)$ de la recta debe pertenecer al plano π.

$$\left.\begin{array}{l}B=(b,1,1)\in\pi\\ \pi: x+y-2z=2b\end{array}\right\} \Rightarrow b+1-2=2b \Rightarrow \boxed{-1=b}$$

Combinando las dos ecuaciones obtenidas tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}b-a=4\\ b=-1\end{array}\right\} \Rightarrow -1-a=4 \Rightarrow \boxed{-5=a}$$

Los valores necesarios para que la recta *r* esté contenida en el plano π son $a = -5$ y $b = -1$.

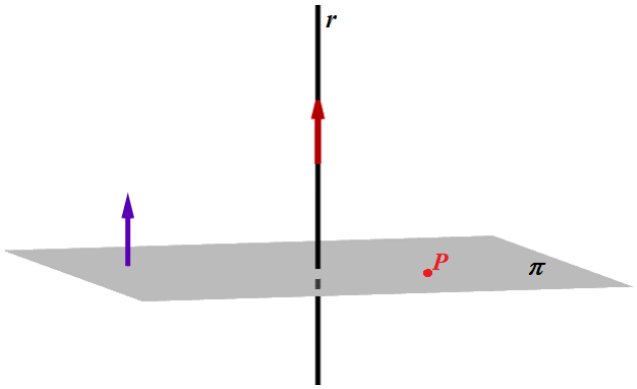
Ejercicio B2

Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P=(-2,1,0)$ y corta perpendicularmente a la recta *r* de ecuaciones paramétricas

$$\{x=1-2t,\ y=1+t,\ z=t\}$$

Calcular la distancia de P al punto de corte de ambas rectas.

Hallamos primero el plano π perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto P.



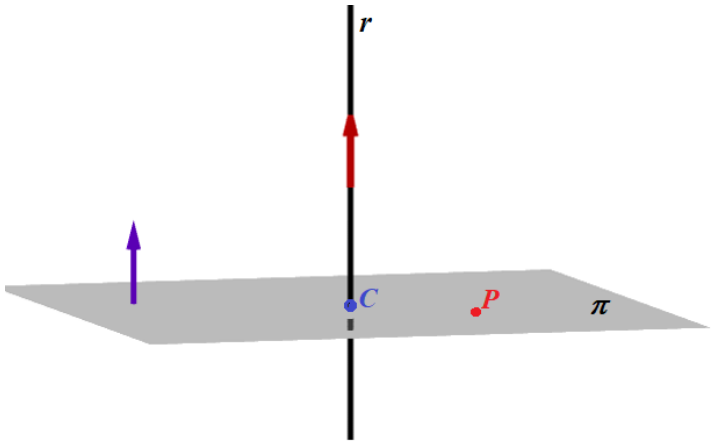
El plano tiene como vector normal el director de la recta.

$$r:\{x=1-2t,\ y=1+t,\ z=t\}\Rightarrow \vec{v_r}=(-2,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\vec{v_r}=(-2,1,1)\\ P=(-2,1,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi:-2x+y+z+D=0\\ P=(-2,1,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow -2(-2)+1+0+D=0\Rightarrow D=-5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi:-2x+y+z-5=0$$

Hallamos el punto C de corte de la recta *r* y el plano π.

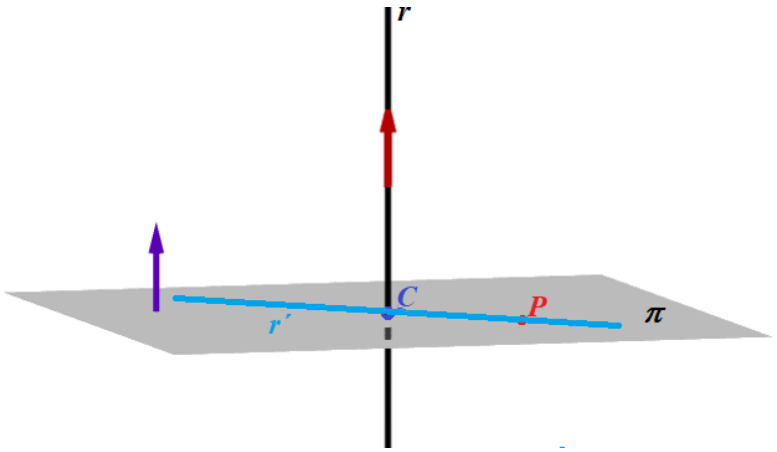


$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases}x=1-2t\\ y=1+t\\ z=t\end{cases}\\ \pi:-2x+y+z-5=0\end{array}\right\}\Rightarrow -2(1-2t)+(1+t)+t-5=0\Rightarrow -2+4t+1+t+t-5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6t-6=0\Rightarrow t=1\Rightarrow \begin{cases} x=1-2=-1 \\ y=1+1=2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(-1,2,1)}$$

La recta $r´$ perpendicular a la recta r que pasa por el punto P es la recta que pasa por los puntos P y C.

$$\left.\begin{matrix} C(-1,2,1) \\ P=(-2,1,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \vec{u}=\overrightarrow{PC}=(-1,2,1)-(-2,1,0)=(1,1,1) \\ P=(-2,1,0)\in r´ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{r´:\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}}$$



Como el punto de corte de ambas rectas es el punto C la distancia pedida es la distancia del punto P al C, que es el módulo del vector $\overrightarrow{PC}$ que une ambos puntos.

$$\overrightarrow{PC}=(-1,2,1)-(-2,1,0)=(1,1,1)$$

$$\boxed{Dis\tan cia(P,C)=\left|\overrightarrow{PC}\right|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}\,u}$$

Ejercicio A3
Estudiar los máximos, mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=5+8x^2-x^4$. Representa la gráfica de *f*.

Utilizamos la derivada de $f(x)=5+8x^2-x^4$ y averiguamos cuando se anula para determinar sus puntos críticos.

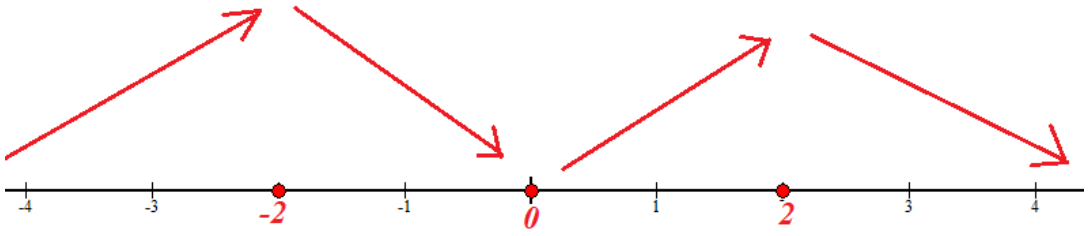
$$f(x)=5+8x^2-x^4 \Rightarrow f'(x)=16x-4x^3$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 16x-4x^3=0 \Rightarrow 4x\left(4-x^2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ 4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2 \end{cases}$$

La función tiene 3 puntos críticos: $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$.
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos 3 valores obtenidos.

- En $(-\infty,-2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3)=16(-3)-4(-3)^3=60>0$. La función crece en $(-\infty,-2)$.
- En $(-2,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=16(-1)-4(-1)^3=-12<0$. La función decrece en $(-2,0)$.
- En $(0,2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=16-4(1)^3=12>0$. La función crece en $(0,2)$.
- En $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=16(3)-4(3)^3=-60<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente.



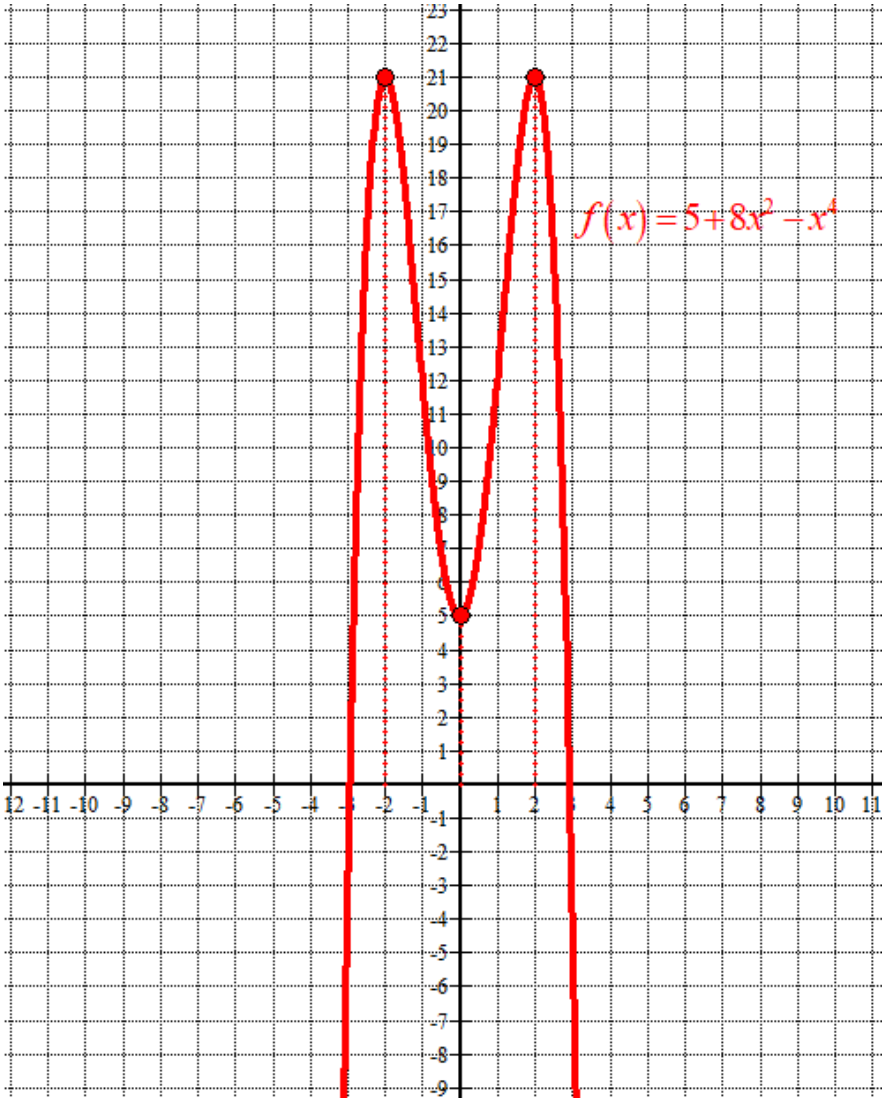
La función crece en $(-\infty,-2)\cup(0,2)$ y decrece en $(-2,0)\cup(2,+\infty)$.

La función presenta dos máximos relativos en $x = -2$ y en $x = 2$.
Como $f(-2)=5+8(-2)^2-(-2)^4=5+32-16=21$ **y** $f(2)=5+8(2)^2-2^4=21$ las coordenadas de los máximos relativos son (–2, 21) y (2, 21).

La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$.
Como $f(0)=5$ las coordenadas del mínimo relativo son (0, 5).

Para dibujar la gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$y=5+8x^2-x^4$
–3	–4
–2	21
0	5
2	21
3	–4



Ejercicio B3

Sea la función $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+A$.

a) Obtener los valores de los parámetros A, B y C para que la gráfica de *f* pase por el punto (0, 1) y tenga un mínimo en el punto (1, 1).

b) ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos? En caso afirmativo, encontrarlos.

a) Si la gráfica de la función pasa por el punto (0, 1) se cumple que *f(0) = 1*.

$$\left.\begin{matrix} f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+A \\ f(0)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(0)=1=A(0)^3+B(0)^2+C(0)+A=A \Rightarrow \boxed{A=1}$$

La función queda $f(x)=x^3+Bx^2+Cx+1$.

Como la función pasa por el punto (1, 1) que es mínimo se cumple que *f(1) = 1*.

$$\left.\begin{matrix} f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+A \\ f(1)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(1)=1=(1)^3+B(1)^2+C(1)+1 \Rightarrow 1=B+C+2 \Rightarrow \boxed{B+C=-1}$$

Como el punto (1, 1) es mínimo de la función la derivada se anula para *x = 1*.

$$\left.\begin{matrix} f'(x)=3x^2+2Bx+C \\ f'(1)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f'(1)=3(1)^2+2B(1)+C=0 \Rightarrow 3+2B+C=0 \Rightarrow \boxed{C=-3-2B}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y determinamos el valor de B y de C.

$$\left.\begin{matrix} B+C=-1 \\ C=-3-2B \end{matrix}\right\} \Rightarrow B-3-2B=-1 \Rightarrow -B=-1+3 \Rightarrow \boxed{B=-2} \Rightarrow \boxed{C=-3+4=1}$$

Los valores de los parámetros son A = 1, B = –2 y C = 1.

La función queda $f(x)=x^3-2x^2+x+1$

Podemos comprobar que en *x = 1* presenta un mínimo pues su derivada primera se anula y la segunda toma valor positivo.

$$f(x)=x^3-2x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2-4x+1 \Rightarrow f''(x)=6x-4$$

$$f'(1)=3-4+1=0 \quad y \quad f''(1)=6-4=2>0$$

b) Igualamos a cero la derivada primera y obtenemos el resto de puntos críticos.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-12}}{6}=\frac{4\pm 2}{6}=\begin{cases}\frac{4+2}{6}=1\\ \frac{4-2}{6}=\frac{1}{3}\end{cases}$$

La función tiene dos puntos críticos: *x = 1*, *x = 1/3*.

En *x = 1* ya hemos visto que hay un mínimo relativo.

Como $f''(x)=6x-4 \Rightarrow f''\left(\frac{1}{3}\right)=6\left(\frac{1}{3}\right)-4=-2<0$ la función presenta un máximo relativo en $x=1/3$.

Ejercicio A4

Sean las funciones $f(x)=1/x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=x^2/8$.

a) Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las gráficas de esas tres funciones.
b) Calcular el área de dicho recinto.

a) Averiguamos los puntos de corte entre las funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=1/x \\ g(x)=x^2 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x}=x^2 \Rightarrow 1=x^3 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{1}=1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=1/x \\ h(x)=x^2/8 \\ f(x)=h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{x^2}{8} \Rightarrow 8=x^3 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{8}=2}$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=x^2 \\ h(x)=x^2/8 \\ g(x)=h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=\frac{x^2}{8} \Rightarrow 8x^2=x^2 \Rightarrow 7x^2=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{0}=0}$$

Hacemos una tabla de valores para cada función en el intervalo (0, 2).

$f(x)=1/x$

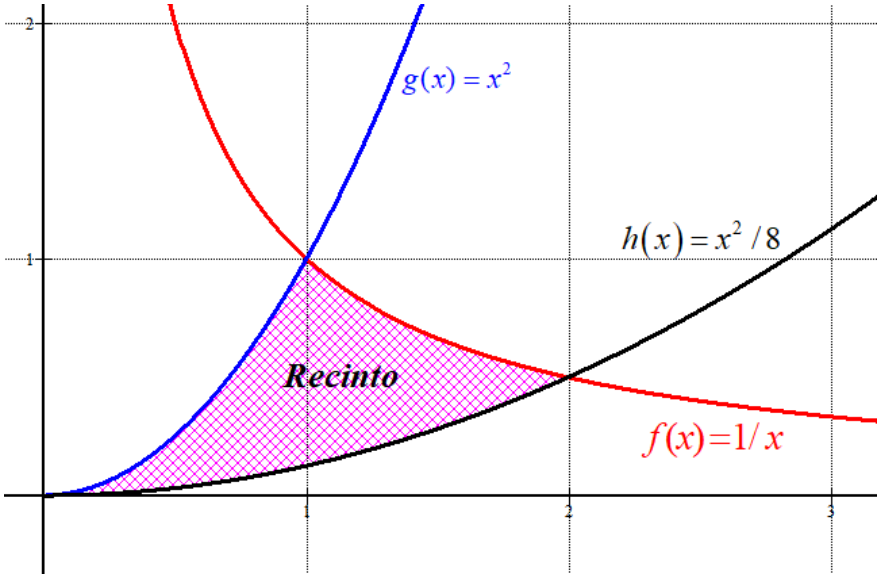
x	$y=\frac{1}{x}$
0.5	2
1	1
2	0.5
4	0.25

$g(x)=x^2$

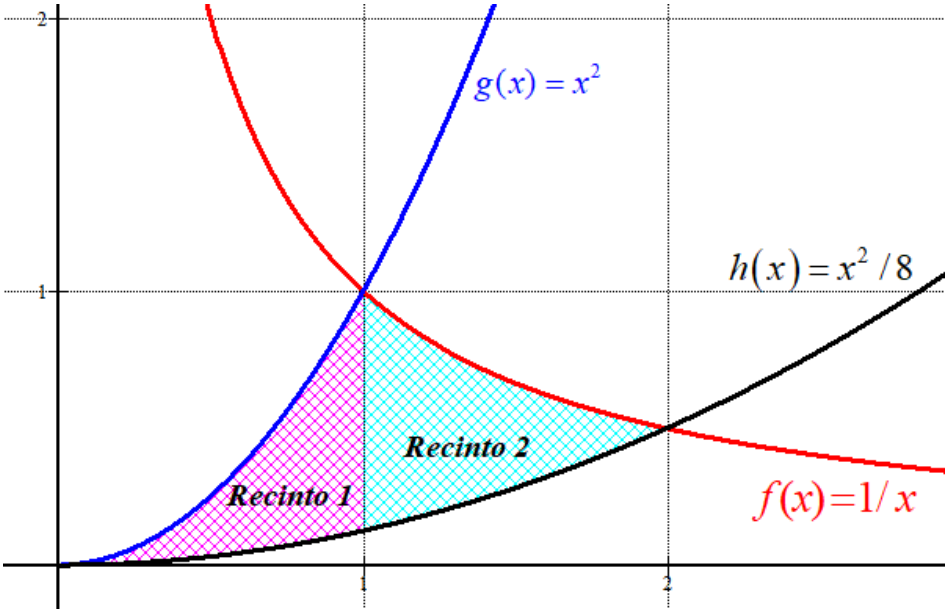
x	$y=x^2$
0	0
1	1
2	4
4	16

$h(x)=x^2/8$

x	$y=\frac{x^2}{8}$
0	0
1	0.125
2	0.5
4	2



b) Para calcular el área del recinto lo dividimos en dos partes: entre 0 y 1 el área la calculamos con una integral definida de $g(x) - h(x)$ y entre 1 y 2 cuya área la calculamos con una integral definida de $f(x) - h(x)$.



Observamos en el dibujo que el área total del recinto debe ser algo menos de una unidad cuadrada. Calculamos su valor exacto usando integrales.

$$\text{Área recinto } 1 = \int_0^1 x^2 - \frac{x^2}{8}\,dx = \int_0^1 \frac{8x^2 - x^2}{8}\,dx = \int_0^1 \frac{7x^2}{8}\,dx = \left[\frac{7}{8}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{7x^3}{24}\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{7\cdot 1^3}{24}\right] - \left[\frac{0}{24}\right] = \frac{7}{24}\,u^2$$

$$\text{Área recinto } 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{x^2}{8}\,dx = \left[\ln x - \frac{x^3}{24}\right]_1^2 = \left[\ln 2 - \frac{2^3}{24}\right] - \left[\ln 1 - \frac{1^3}{24}\right] =$$

$$= \ln 2 - \frac{8}{24} - 0 + \frac{1}{24} = \boxed{\ln 2 - \frac{7}{24}\,u^2}$$

El área total del recinto es la suma de las áreas obtenidas: $\frac{7}{24} + \ln 2 - \frac{7}{24} = \ln 2 \simeq \boxed{0.69\,u^2}$

Ejercicio B4

Calcular, explicando los métodos utilizados,

$$I=\int (x+2)\sin(2x)dx \quad y \quad J=\int \frac{x+7}{x^2-4x-5}dx$$

$$I=\int (x+2)\sin(2x)dx=\left\{\begin{array}{c}\text{Integración por partes}\\ u=x+2\to du=dx\\ dv=\sin(2x)dx\to v=\int \sin(2x)dx=-\frac{1}{2}\cos(2x)\end{array}\right\}=$$

$$=(x+2)\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)-\int -\frac{1}{2}\cos(2x)\,dx=-\frac{1}{2}(x+2)\cos(2x)+\frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}(x+2)\cos(2x)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)=\boxed{-\frac{1}{2}(x+2)\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+K}$$

$$J=\int \frac{x+7}{x^2-4x-5}dx=\{\text{Descomposición en fracciones simples}\}=...$$

$$x^2-4x-5=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(-5)}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=\left\{\begin{array}{l}\frac{4+6}{2}=5\\ \frac{4-6}{2}=-1\end{array}\right.\Rightarrow x^2-4x-5=(x-5)(x+1)$$

$$\frac{x+7}{x^2-4x-5}=\frac{x+7}{(x-5)(x+1)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-5)}{(x-5)(x+1)}$$

$$x+7=A(x+1)+B(x-5)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=5\to 12=A(6)\to A=2\\ x=-1\to 6=B(-6)\to B=-1\end{array}\right.$$

$$\frac{x+7}{x^2-4x-5}=\frac{2}{x-5}-\frac{1}{x+1}$$

$$...=\int \frac{2}{x-5}-\frac{1}{x+1}dx=\int \frac{2}{x-5}dx-\int \frac{1}{x+1}dx=\boxed{2\ln|x-5|-\ln|x+1|+K}$$

Ejercicio A5
En una farmacia se ha recibido un lote de medicamentos de los tipos A, I y M. El 80 % corresponde al medicamento A, el 10 % al I y el resto al M. En la revisión realizada por la farmacéutica se ha observado que hay medicamentos caducados en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de I y el 5 % de M. Se elige una caja de medicamentos al azar. Hallar:

a) La probabilidad de coger un medicamento caducado.
b) Si sabemos que el medicamento está caducado, la probabilidad de que sea del tipo A.

PRIMERA FORMA.
Supongamos que tenemos 100 cajas de medicamentos, de ellas 80 son de A, 10 de I y otras 10 de M.
Están caducados el 10 % de A, es decir, el 10 % de 80 que son $0.10 \cdot 80 = 8$ cajas caducadas.
Están caducados el 20 % de I, es decir, el 20 % de 10 que son $0.20 \cdot 10 = 2$ cajas caducadas.
Están caducados el 5 % de M, es decir, el 5 % de 80 que son $0.05 \cdot 10 = 0.5$ cajas caducadas.

Este último dato es un poco raro y podríamos pasar a considerar que tenemos 200 cajas en total y volver a calcular todo, pero sigamos resolviendo con este dato irreal pero que nos sirve para nuestros cálculos.

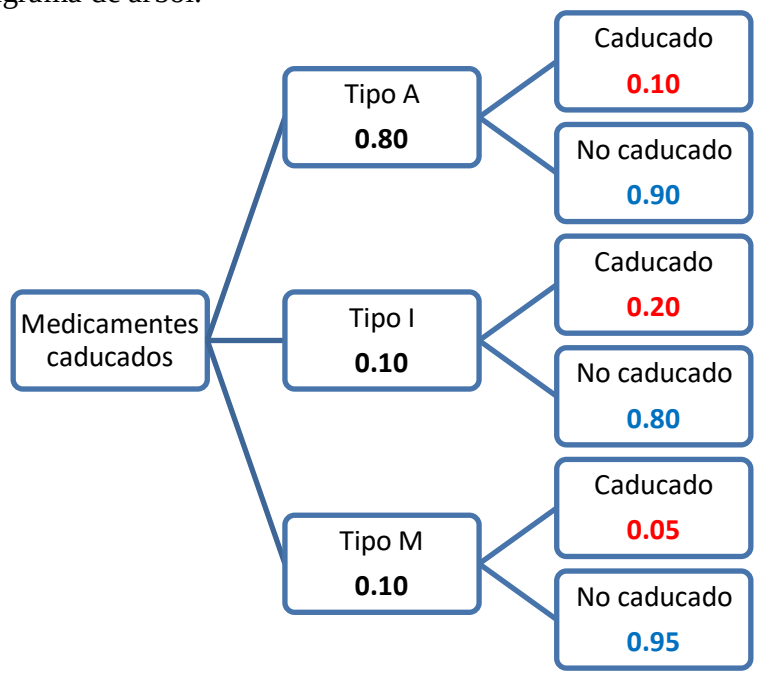
a) Como tenemos 100 cajas de medicamentes y de ellos 8, 2 y 0.5 caducadas aplicamos Laplace.

$$P\left(\text{Un medicamento caducado}\right)=\frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}}=\frac{8+2+0.5}{100}=\frac{10.5}{100}=\boxed{\frac{21}{200}=0.105}$$

b) Como son 10.5 las cajas caducadas y solo 8 son del tipo A, aplicamos Laplace.

$$P\left(\text{Sea del tipo A / Está caducado}\right)=\frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}}=\frac{8}{8+2+0.5}=\frac{8}{10.5}=\boxed{\frac{16}{21}\approx 0.762}$$

SEGUNDA FORMA.
Hacemos un diagrama de árbol.



Llamamos A = Coger un medicamento del tipo A, I = Coger un medicamento del tipo I, M = Coger un medicamento del tipo M.
Llamamos C = Coger un medicamento caducado, C^T = Coger un medicamento no caducado.

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C)=P(A)P(C/A)+P(I)P(C/I)+P(M)P(C/M)=$$

$$=0.8\cdot 0.1+0.1\cdot 0.2+0.1\cdot 0.05=\boxed{0.105}$$

b) Es una probabilidad a posteriori y para determinarla aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{P(A)P(C/A)}{P(C)}=\frac{0.8\cdot 0.1}{0.105}=\boxed{\frac{16}{21}\simeq 0.762}$$

Ejercicio B5

En una ciudad se han elegido al azar 3900 personas. Hallar:

a) La probabilidad de que al menos 15 de ellas cumplan años el día del patrón de la ciudad.
b) La probabilidad de que el número de personas que cumplan años el día del patrón esté comprendido entre 5 y 15, ambos incluidos.

Se trata de 3900 repeticiones de un experimento "Elegir una persona de una población y comprobar si cumple años el día del patrón" que solo tiene dos posibilidades: Si o No. Las repeticiones son independientes entre sí y la probabilidad de "Si" es 1/365.
Este modelo de probabilidad es una distribución binomial con parámetros n = 3900 y p = 1/365.

X = Número de personas que cumplen años el día del patrón. X = B(3900, 1/365)

Como el número de repeticiones es muy alto y se cumple que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$

$$np = 3900 \cdot \frac{1}{365} = \frac{780}{73} \approx 10.68 \geq 5 \qquad nq = 3900 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \approx 3889.3 \geq 5$$

para el cálculo de probabilidades utilizaremos una aproximación a una normal:

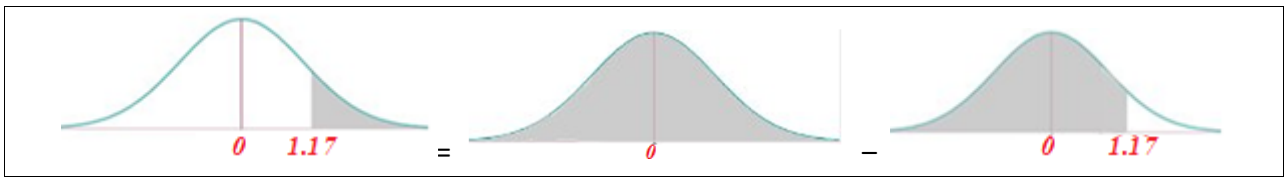
$$X' = N\left(np; \sqrt{npq}\right) = N(10.68; 3.26)$$

a)

$$P(\text{Haya al menos 15 que cumplan años el día del patrón}) = P(X \geq 15) =$$

$$= \{\text{Corrección de Yates o de continuidad}\} = P(X' > 14.5) =$$

$$= \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{14.5 - 10.68}{3.26}\right) = P(Z > 1.17) = \ldots$$



$$\ldots = 1 - P(Z \leq 1.17) = \{\text{Buscamos en la tabla N(0, 1)}\} = 1 - 0.8790 = \boxed{0.121}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319

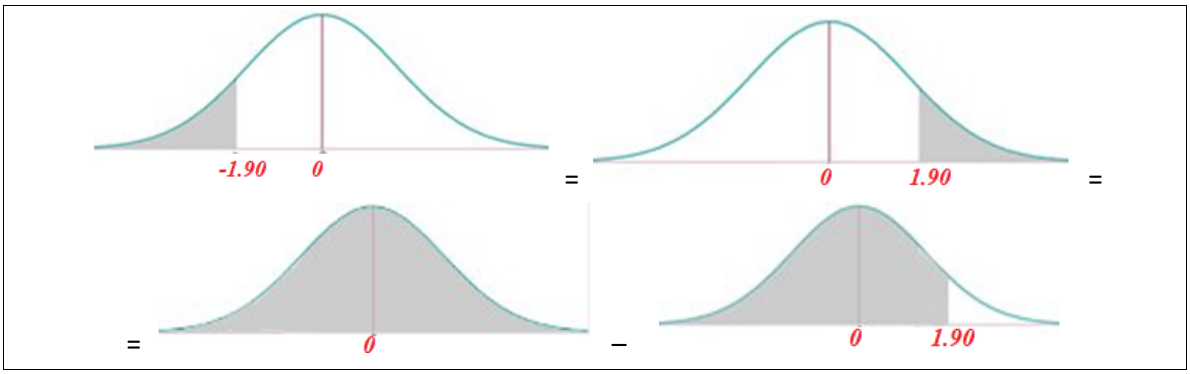
b)

$$P\left(\text{Hayan entre 5 y 15 personas que cumplan años el día del patrón}\right)=P\left(5\le X\le 15\right)=$$

$$=\left\{\text{Corrección de Yates o de continuidad}\right\}=P\left(4.5<X'<15.5\right)=$$

$$=\left\{Tipificamos\right\}=P\left(\frac{4.5-10.68}{3.26}<Z<\frac{15.5-10.68}{3.26}\right)=P\left(-1.90<Z<1.48\right)=$$

$$=P\left(Z<1.48\right)-P\left(Z<-1.90\right)=...$$



$$...=P\left(Z<1.48\right)-P\left(Z>1.90\right)=P\left(Z<1.48\right)-\left[1-P\left(Z<1.90\right)\right]=$$

$$=\left\{\text{Buscamos en la tabla N(0, 1)}\right\}=0.9306-\left[1-0.9713\right]=\boxed{0.9019}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

EAU extraordinaria 2020

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA 2020ko EKAINA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD ORDINARIA 2020

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una Unica pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1
Discutir, en función de A, el sistema que sigue y resolver cuando sea posible:

$$S=\begin{cases} x+y+z=2A \\ 2x+3y+4z=2 \\ 4x+4y+Az=4A \end{cases}$$

Ejercicio B1
Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular razonadamente M^{2020}.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2
Dada la recta
$r=\begin{cases} 3x+y-z=2 \\ 2x+y+4z=1 \end{cases}$, y el plano $\pi=3x+(\alpha+1)(y+1)+\alpha z=1$,

a) hallar $\propto$ para que la recta y el plano sean paralelos,

b) determinar si el punto $P=(1,1,2)$ pertenece al plano hallado en a).

Ejercicio B2
Hallar el punto Q, simétrico de $P=(1,2,3)$ respecto al plano de ecuación $x+y+z=0$, explicando los pasos seguidos para su cálculo.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3
Sea f la función definida como sigue:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x, & x\le 2 \\ x^2-bx-4, & x>2 \end{cases}$$

Calcular *a* y *b* razonadamente, sabiendo que *f* es derivable en toda la recta real.

Ejercicio B3
Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=x^2e^{2x}$.
Encontrar sus extremos.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4
Representar la región finita del plano limitada por la curva $y=3-x^2$ y por la recta $y=2x$. Calcular su área.

Ejercicio B4

Explicar en qué consiste el método de integración por partes y aplicarlo para calcular la integral

$$\int x\cos(3x)dx$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Una máquina produce recipientes cuyas capacidades se distribuyen según una distribución normal $N(10;\ 0{,}1)$. Un fabricante considera que un recipiente es defectuoso si su capacidad no está entre 9,8 y 10,1. Calcular:

a) La probabilidad de que un recipiente sea considerado defectuoso.
b) Si se han fabricado 1500 recipientes, ¿cuántos se esperan defectuosos?

Ejercicio B5

En un instituto el 40 por ciento de sus alumnos tiene el cabello castaño, el 35 por ciento tiene los ojos azules y el 15 por ciento tiene el cabello castaño y los ojos azules. Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga los ojos azules?
b) Si tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño ni los ojos azules?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el cabello castaño o los ojos azules?

Soluciones

Ejercicio A1

Discutir, en función de A, el sistema que sigue y resolver cuando sea posible:

$$S=\begin{cases} x+y+z=2A \\ 2x+3y+4z=2 \\ 4x+4y+Az=4A \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & A \end{pmatrix}$ con determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & A \end{vmatrix}=3A+16+8-12-2A-16=A-4.$$

El determinante es nulo cuando $A=4$.

Estudiamos dos situaciones distintas.

CASO 1. $A\neq 4$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

Para resolverlo utilizamos el método de Cramer.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & A \end{pmatrix} \quad A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2A \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & A & 4A \end{pmatrix}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2A & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4A & 4 & A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & A \end{vmatrix}}=\frac{6A^2+16A+8-12A-2A-32A}{A-4}=\boxed{\frac{6A^2-30A+8}{A-4}=x}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2A & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4A & A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & A \end{vmatrix}}=\frac{2A+32A+8A-8-4A^2-16A}{A-4}=\boxed{\frac{-4A^2+26A-8}{A-4}=y}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2A\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & 4 & 4A\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 4 & A\end{vmatrix}}=\frac{12A+8+16A-24A-8A-8}{A-4}=\boxed{\frac{-4A}{A-4}=z}$$

La solución es $\boxed{x=\frac{6A^2-30A+8}{A-4};\quad y=\frac{-4A^2+26A-8}{A-4};\quad z=\frac{-4A}{A-4}}$

CASO 2. $A=4$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 4 & 4\end{pmatrix}$ La fila 1ª y 3ª son proporcionales, por lo que considero el menor de orden 3 que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ con determinante

$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$.

El rango de A es 2.

Averiguamos el rango de $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 8\\ 2 & 3 & 4 & 2\\ 4 & 4 & 4 & 16\end{pmatrix}$.

¿El rango de A/B es 3?

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna → $\begin{pmatrix}1 & 1 & 8\\ 3 & 4 & 2\\ 4 & 4 & 16\end{pmatrix}$

con determinante $\begin{vmatrix}1 & 1 & 8\\ 3 & 4 & 2\\ 4 & 4 & 16\end{vmatrix}=64+8+96-128-48-8=-16\neq 0$.

El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B. El **sistema es incompatible**.

Ejercicio B1

Dada la matriz $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, calcular razonadamente M^{2020}.

$$M^1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$M^2=MM=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1+1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$M^3=M^2M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2+1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$M^4=M^3M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3+1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

...

$$M^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^{2020}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2020 & 1\end{pmatrix}}$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Dada la recta

$r=\begin{cases}3x+y-z=2\\2x+y+4z=1\end{cases}$, y el plano $\pi=3x+(\alpha+1)(y+1)+\alpha z=1$,

a) hallar $\propto$ para que la recta y el plano sean paralelos,

b) determinar si el punto $P=(1,1,2)$ pertenece al plano hallado en a).

a) Hallamos el vector director de la recta y el normal del plano.

$$r=\begin{cases}3x+y-z=2\\2x+y+4z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+y=z+2\\2x+y=1-4z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+y=2+z\\-2x-y=-1+4z\end{cases}$$

$$\boxed{x=1+5z}\Rightarrow 2(1+5z)+y=1-4z\Rightarrow$$

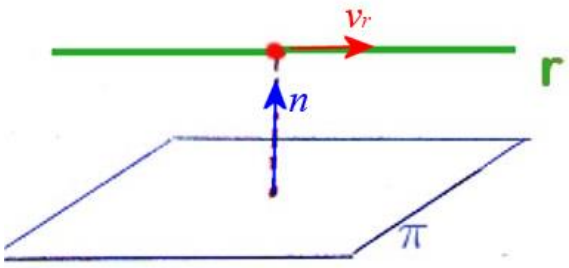
$$\Rightarrow 2+10z+y=1-4z\Rightarrow\boxed{y=-1-14z}$$

$$r=\begin{cases}x=1+5z\\y=-1-14z\\z=z\end{cases}\Rightarrow\boxed{r=\begin{cases}P_r(1,-1,0)\\\vec{v_r}=(5,-14,1)\end{cases}}$$

El vector director de la recta es $\vec{v_r}=(5,-14,1)$.

El vector normal del plano $\pi=3x+(\alpha+1)(y+1)+\alpha z=1$ es $\vec{n}=(3,1+\alpha,\alpha)$.

El vector director de la recta $\vec{v_r}=(5,-14,1)$ y el normal del plano $\vec{n}=(3,1+\alpha,\alpha)$ deben ser perpendiculares. Su producto escalar debe ser cero.



$$\vec{v_r}\cdot\vec{n}=0\Rightarrow(5,-14,1)(3,1+\alpha,\alpha)=0\Rightarrow 15-14-14\alpha+\alpha=0\Rightarrow -13\alpha=-1\Rightarrow\boxed{\alpha=\frac{1}{13}}$$

b) Para $\alpha=\frac{1}{13}$ el plano tiene ecuación:

$$\pi=3x+\left(\frac{1}{13}+1\right)(y+1)+\frac{1}{13}z=1\Rightarrow\pi=3x+\left(\frac{14}{13}\right)(y+1)+\frac{1}{13}z=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\pi=39x+14y+14+z=13\Rightarrow\pi=39x+14y+z+1=0$$

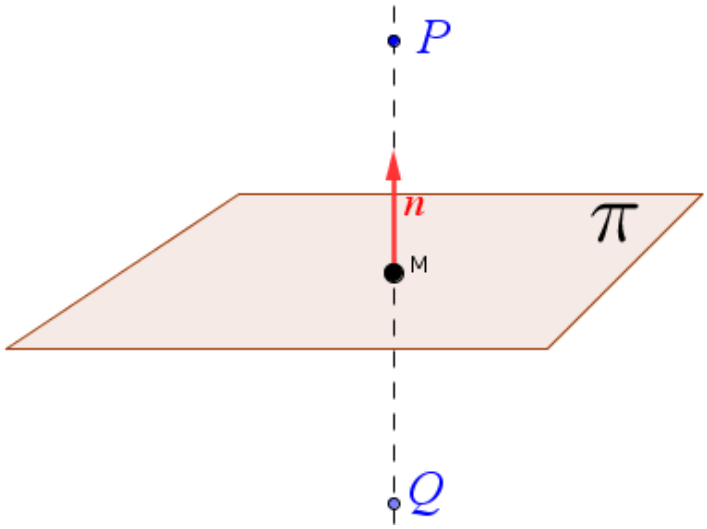
Si el punto $P=(1,1,2)$ pertenece al plano debe cumplir la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}¿P=(1,1,2)\in\pi?\\\pi=39x+14y+z+1=0\end{array}\right\}\Rightarrow ¿39+14+2+1=0?$$

No se cumple la igualdad y el punto no pertenece al plano.

Ejercicio B2

Hallar el punto Q, simétrico de $P=(1,2,3)$ respecto al plano de ecuación $x+y+z=0$, explicando los pasos seguidos para su cálculo.



Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P. Al ser perpendicular al plano el vector director de la recta es el normal del plano.

$$\pi \equiv x+y+z=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(1,2,3)\in r \\ \vec{v}=\vec{n}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow r\equiv \left.\begin{array}{r} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3+\lambda \end{array}\right\}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y+z=0 \\ r\equiv \left.\begin{array}{r} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3+\lambda \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda+2+\lambda+3+\lambda=0 \Rightarrow 6+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-2 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x=1-2=-1 \\ \Rightarrow y=2-2=0 \\ z=3-2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow M(-1,0,1)$$

Si $Q = (a, b, c)$ es el punto simétrico buscado, hacemos que M sea el punto medio del segmento PQ.

$$(-1,0,1)=\frac{(1,2,3)+(a,b,c)}{2} \Rightarrow (-2,0,2)=(1,2,3)+(a,b,c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a,b,c)=(-2,0,2)-(1,2,3) \Rightarrow \boxed{Q=(a,b,c)=(-3,-2,-1)}$$

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea f la función definida como sigue:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x, & x\le 2 \\ x^2-bx-4, & x>2 \end{cases}$$

Calcular a y b razonadamente, sabiendo que f es derivable en toda la recta real.

Si f es derivable en $x = 2$ también es continua, por lo que se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=4a+6 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} ax^2+3x=4a+6 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} x^2-bx-4=4-2b-4=-2b \end{array}\right\} \Rightarrow 4a+6=-2b \Rightarrow 2a+3=-b$$

La derivada de la función en $\mathbb{R}-\{2\}$ es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+3, & x<2 \\ 2x-b, & x>2 \end{cases}$$

Como es derivable en $x = 2$ las derivadas laterales deben ser iguales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-} 2ax+3=4a+3 \\ f'(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-b=4-b \end{array}\right\} \Rightarrow 4a+3=4-b \Rightarrow b=1-4a$$

Juntando las dos condiciones obtenidas tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} 2a+3=-b \\ b=1-4a \end{array}\right\} \Rightarrow 2a+3=-1+4a \Rightarrow -2a=-4 \Rightarrow \boxed{a=2} \Rightarrow \boxed{b=1-8=-7}$$

Los valores buscados son: $a = 2$ y $b = -7$.

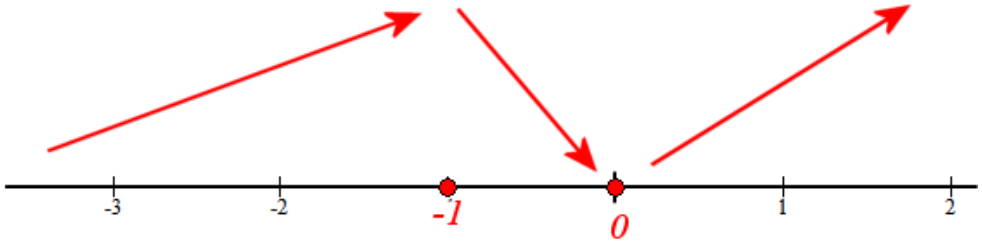
Ejercicio B3
Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=x^2e^{2x}$.
Encontrar sus extremos.

Derivamos e igualamos a cero.

$$f(x)=x^2e^{2x} \Rightarrow f\,'(x)=2xe^{2x}+2x^2e^{2x}=2xe^{2x}(1+x)$$
$$f\,'(x)=0 \Rightarrow 2xe^{2x}(1+x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1+x=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

Vemos el cambio de signo antes de 0, entre 0 y 1 y después de 1.

- En $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f\,'(-2)=-4e^{-4}(1-2)=\frac{4}{e^4}>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.
- En $(-1,0)$ tomamos $x=-0.5$ y la derivada vale $f\,'(-0.5)=-1\cdot e^{-1}(1-0.5)=\frac{-0.5}{e}<0$. La función decrece en $(-1,0)$.
- En $(0,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f\,'(2)=4e^4(1+2)=12e^4>0$. La función crece en $(0,+\infty)$.



La función crece en $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ y decrece en $(-1,0)$.

Tiene un punto máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 0$.
Como $f(-1)=(-1)^2e^{-2}=\frac{1}{e^2}$ y $f(0)=0^2e^0=0$ el punto máximo tiene coordenadas $\left(-1,\frac{1}{e^2}\right)$ y el punto mínimo tiene coordenadas $(0,0)$.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Representar la región finita del plano limitada por la curva $y=3-x^2$ y por la recta $y=2x$. Calcular su área.

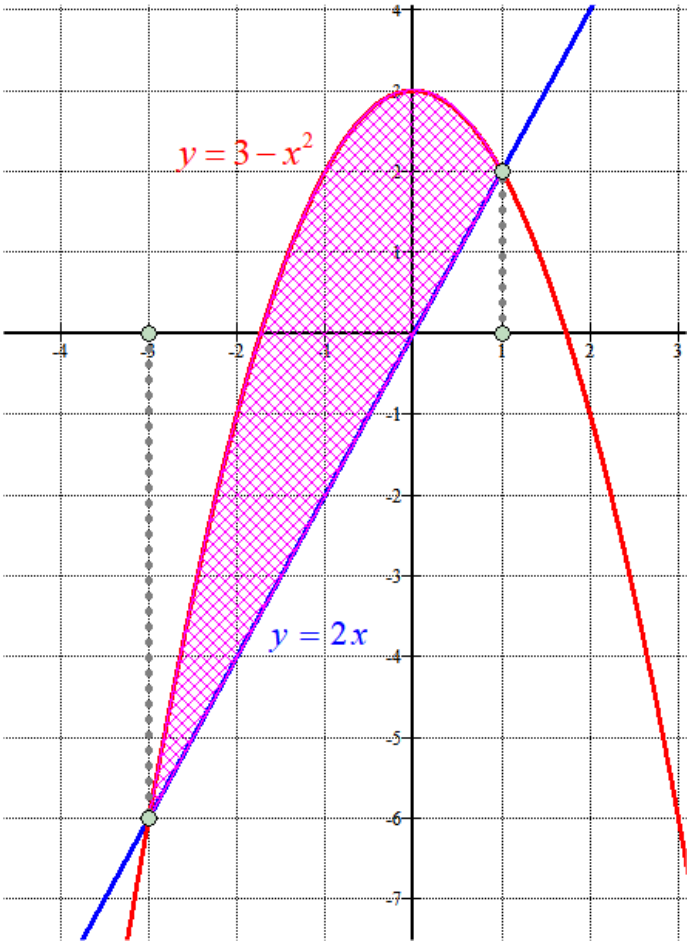
Hallamos los puntos de corte de las gráficas.

$$\left.\begin{matrix} y=3-x^2 \\ y=2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3-x^2=2x \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2+12}}{2}=\begin{cases}\frac{-2+4}{2}=1=x \\ \frac{-2-4}{2}=-3=x\end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para dibujar la parábola y otra para la recta entre –3 y 1.

x	$y=3-x^2$
–4	–13
–3	–6
–1	2
0	3
1	2
2	–1

x	$y=2x$
–3	–6
0	0
1	2



El área se puede aproximar contando cuadraditos en el dibujo del recinto. Son aproximadamente entre 10 y 11.

Calculamos su valor exacto con la integral definida entre –3 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_{-3}^{1} 3-x^2-2x\,dx=\left[3x-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-3}^{1}=\left[3-\frac{1}{3}-1\right]-\left[3(-3)-\frac{(-3)^3}{3}-(-3)^2\right]=$$

$$=3-\frac{1}{3}-1+9-9+9=11-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{32}{3}=10.66\,u^2}$$

Ejercicio B4

Explicar en qué consiste el método de integración por partes y aplicarlo para calcular la integral

$$\int x\cos(3x)dx$$

Este método de integración nos permite usar la fórmula de derivación de un producto para simplificar el integrando de una integral.

$$\int x\cos(3x)dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \to du = dx \\ dv = \cos(3x)dx \to v = \int \cos(3x)dx = \frac{1}{3}sen(3x) \end{array} \right\} =$$

$$= x\frac{1}{3}sen(3x) - \int \frac{1}{3}sen(3x)dx = x\frac{1}{3}sen(3x) - \frac{1}{3}\int sen(3x)dx =$$

$$= x\frac{1}{3}sen(3x) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right) = \boxed{\frac{xsen(3x)}{3} + \frac{\cos(3x)}{9} + C}$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Una máquina produce recipientes cuyas capacidades se distribuyen según una distribución normal $N(10;\ 0{,}1)$. Un fabricante considera que un recipiente es defectuoso si su capacidad no está entre 9,8 y 10,1. Calcular:

a) La probabilidad de que un recipiente sea considerado defectuoso.
b) Si se han fabricado 1500 recipientes, ¿cuántos se esperan defectuosos?

X = Capacidad de un recipiente. X = N(10; 0,1)

a) Vamos a calcular la probabilidad de que el recipiente sea bueno.

$$P(9{,}8 \le X \le 10{,}1) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{9{,}8-10}{0{,}1} \le Z \le \frac{10{,}1-10}{0{,}1}\right) = P(-2 \le Z \le 1) =$$

$$= P(Z \le 1) - P(Z \le -2) = P(Z \le 1) - P(Z \ge 2) = P(Z \le 1) - (1 - P(Z \le 2)) =$$

$$= 0.8413 - (1 - 0.9772) = \boxed{0.8185}$$

La probabilidad de no ser defectuoso es de 0.8185.

Por lo que la probabilidad de ser defectuoso es de 1 – 0.8185 = $\boxed{0.1815.}$

b) Si el 18.15 % de los recipientes son defectuosos, de 1500 habrán 1500 · 0.1815 = 272.25 recipientes defectuosos.

Aproximadamente 273 recipientes saldrán defectuosos.

Ejercicio B5

En un instituto el 40 por ciento de sus alumnos tiene el cabello castaño, el 35 por ciento tiene los ojos azules y el 15 por ciento tiene el cabello castaño y los ojos azules. Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga los ojos azules?
b) Si tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño ni los ojos azules?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el cabello castaño o los ojos azules?

Realizamos una tabla de contingencia para aclarar los datos y obtener los necesarios para responder a las preguntas planteadas.

	Nº alumnos con ojos azules	Nº alumnos sin ojos azules	
Nº alumnos con cabello castaño	**15**		**40**
Nº alumnos sin cabello castaño			
	35		**100**

Completamos la tabla.

	Nº alumnos con ojos azules	Nº alumnos sin ojos azules	
Nº alumnos con cabello castaño	**15**	**25**	**40**
Nº alumnos sin cabello castaño	**20**	**40**	**60**
	35	**65**	**100**

a) Observando la tabla hay 40 alumnos con cabellos castaños y de ellos 15 con ojos azules y aplicando la regla de Laplace:

$$P\left(\text{Tenga ojos azules / Tiene cabellos castaños}\right)=\frac{15}{40}=\boxed{\frac{3}{8}=0.375}$$

b) Observando la tabla hay 35 alumnos con ojos azules y de ellos 20 sin cabello castaño y aplicando la regla de Laplace:

$$P\left(\text{No tenga cabellos castaños / Tiene ojos azules}\right)=\frac{20}{35}=\boxed{\frac{4}{7}=0.571}$$

c) Observando la tabla hay 100 alumnos y de ellos 40 sin ojos azules ni cabello castaño y aplicando la regla de Laplace:

$$P\left(\textit{No tenga el cabello castaño ni los ojos azules}\right)=\boxed{\frac{40}{100}=0.4}$$

d) Observando la tabla hay 100 alumnos y de ellos 40 sin ojos azules ni cabello castaño, por lo que hay 100 – 40 = 60 con ojos azules o cabello castaño y aplicando la regla de Laplace:

$$P\left(\textit{Tenga ojos azules o cabello castaño}\right)=\boxed{\frac{60}{100}=0.6}$$

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

EAU ordinaria 2020

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA
2020ko EKAINA

MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
ORDINARIA 2020

MATEMÁTICAS II

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discutir el sistema $S(a)$ en función de a, siendo

$$S(a)=\begin{cases} ax-y+2z=2 \\ x-2y-z=1 \\ x+2y+az=3 \end{cases}$$

Resolver en función de a, mediante el método de Cramer, en los casos en que sea posible.

Ejercicio B1

Sea M (∝) la matriz dada por $M(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinar para qué valores de α la matriz no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa para $\alpha=0$, y en caso de que no sea posible razonar por qué no es posible.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (–1, 2, 3) y es paralelo a los vectores $\vec{v}=(-1,-2,-3)$ y $\vec{w}=(1,3,5)$

b) Hallar el valor de A para que el plano calculado en el apartado anterior y $Ax-y+5z=8$ sean perpendiculares.

Ejercicio B2

Sea π el plano $2x-y+Az=0$. Sea r la recta dada por $r\equiv\begin{cases} 4x-3y+4z=-1 \\ 3x-2y+z=-3 \end{cases}$

Hallar A para que r y π sean paralelos. Además, obtener el plano perpendicular a r y que pase por el origen.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+c$, obtener los valores de a, b y c para que su gráfica pase por (0, 2) y tenga un extremo en (1,–1). ¿Tiene f más extremos?

Ejercicio B3

Sea $f(x)=x^2+9$, y P el punto exterior a su gráfica de coordenadas P = (0, 0). Calcular razonadamente la (o las) tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto P.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibujar la región encerrada por $f(x)=x^2-2x+1$ y $g(x)=-x^2+5$, y calcular el área de dicha región.

Ejercicio B4

Calcular las integrales indefinidas I y J explicando los métodos usados para su resolución.

$$I = \int x\cos(2x)dx, \qquad J = \int \frac{dx}{x^2+2x-3}$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

En una empresa el 70 por ciento de sus trabajadoras están satisfechas con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 por ciento gana más de 1000 euros. Entre las no satisfechas solo el 20 por ciento gana más de 1000 euros. Si se elige una trabajadora al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane más de 1000 euros?
b) Si gana más de 1000 euros, ¿cuál es la probabilidad que esté satisfecha con su contrato?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane menos de 1000 euros y esté satisfecha con su contrato?

Ejercicio B5

En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de 0,4, se pide:

a) Identificar y describir este modelo de probabilidad.
b) Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.
c) Hallar la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

Soluciones

Ejercicio A1

Discutir el sistema $S(a)$ en función de a, siendo

$$S(a)=\begin{cases} ax-y+2z=2 \\ x-2y-z=1 \\ x+2y+az=3 \end{cases}$$

Resolver en función de a, mediante el método de Cramer, en los casos en que sea posible.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=-2a^2+1+4+4+a+2a=-2a^2+3a+9\,.$$

Igualamos a cero el determinante y vemos cuando se anula.

$$|A|=0\Rightarrow -2a^2+3a+9=0\Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{3^2+72}}{-4}=\begin{cases}\dfrac{-3+9}{-4}=-\dfrac{6}{4}=-\dfrac{3}{2}=a \\ \dfrac{-3-9}{-4}=3=a\end{cases}$$

Distinguimos 3 casos diferentes que analizamos a continuación.

CASO 1. $a\neq 3$ *y* $a\neq -\dfrac{3}{2}$

En este caso el determinante es no nulo y el rango de A es 3. Al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

Lo resolvemos por Cramer.

$$A=\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}\quad A/B=\begin{pmatrix} a & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 3 \end{pmatrix}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}}=\frac{-4a+3+4+12+a+4}{-2a^2+3a+9}=\frac{23-3a}{-2a^2+3a+9}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}}=\frac{a^2-2+6-2-2a+3a}{-2a^2+3a+9}=\frac{a^2+a+2}{-2a^2+3a+9}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}}=\frac{-6a-1+4+4+3-2a}{-2a^2+3a+9}=\frac{-8a+10}{-2a^2+3a+9}$$

CASO 2. $a=3$

En este caso el determinante es cero y el rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ Consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

con determinante $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-6+1=-5\neq 0$.

El rango de A es 2.

Veamos el rango de $A/B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª → $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}=3+4-12+4+12+3=14\neq 0$.

El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B.

El sistema es incompatible.

CASO 3. $a=-\frac{3}{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

$A=\begin{pmatrix} -3/2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3/2 \end{pmatrix}$ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª

$\rightarrow \begin{pmatrix} -3/2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -3/2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3+1=4\neq 0$.

El rango de A es 2.

Veamos el rango de $A/B=\begin{pmatrix} -3/2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3/2 & 3 \end{pmatrix}$

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3/2 & 3 \end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3/2 & 3 \end{vmatrix} = 3+4+6+4+12-\frac{3}{2}\neq 0$

El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B.

El sistema es incompatible.

Ejercicio B1

Sea $M(\propto)$ la matriz dada por $M(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & \alpha & 1\\ \alpha & 1 & \alpha\\ 0 & \alpha & 1\end{pmatrix}$.

a) Determinar para qué valores de α la matriz no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa para $\alpha=0$, y en caso de que no sea posible razonar por qué no es posible.

a) No tiene inversa cuando su determinante vale cero.

$$|M(\alpha)|=\begin{vmatrix}1 & \alpha & 1\\ \alpha & 1 & \alpha\\ 0 & \alpha & 1\end{vmatrix}=1+\alpha^2-\alpha^2-\alpha^2=1-\alpha^2$$

$$|M(\alpha)|=0\Rightarrow 1-\alpha^2=0\Rightarrow \alpha^2=1\rightarrow \alpha=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

La matriz $M(\propto)$ no tiene inversa para $\alpha=-1\, o\, \alpha=1$

b) Para $\alpha=0$ existe la inversa pues el determinante de $M(\propto)$ es no nulo.

$$M(0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow |M(0)|=1$$

$$(M(0))^{-1}=\frac{Adj(M(0)^T)}{|M(0)|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ejercicio A2

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (–1, 2, 3) y es paralelo a los vectores $\vec{v}=(-1,-2,-3)$ y $\vec{w}=(1,3,5)$

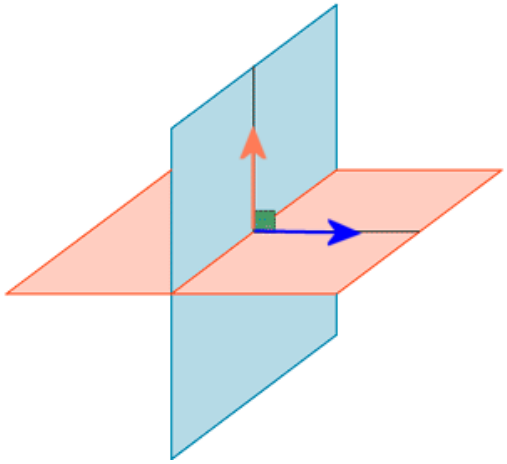
b) Hallar el valor de *A* para que el plano calculado en el apartado anterior y $Ax-y+5z=8$ sean perpendiculares.

a) Debemos hallar el plano que pasa por el punto (–1, 2, 3) y con los vectores directores $\vec{v}=(-1,-2,-3)$ y $\vec{w}=(1,3,5)$.

$$\left.\begin{array}{l}(-1,2,3)\in\pi\\ \vec{v}=(-1,-2,-3)\\ \vec{w}=(1,3,5)\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x+1 & y-2 & z-3\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}=0$$

$$-10x-10-3y+6-3z+9+2z-6+5y-10+9x+9=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv -x+2y-z-2=0}$$

b) Si el plano $Ax-y+5z=8$ es perpendicular a $\pi\equiv -x+2y-z-2=0$ el producto escalar de los vectores normales de ambos planos debe ser cero, pues los vectores son ortogonales.



$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(-1,2,-1)\\ \vec{n'}=(A,-1,5)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{n'}=0\Rightarrow(-1,2,-1)(A,-1,5)=0\Rightarrow -A-2-5=0\Rightarrow \boxed{A=-7}$$

Ejercicio B2

Sea π el plano $2x-y+Az=0$. Sea *r* la recta dada por $r\equiv\begin{cases}4x-3y+4z=-1\\3x-2y+z=-3\end{cases}$

Hallar A para que *r* y π sean paralelos. Además, obtener el plano perpendicular a *r* y que pase por el origen.

Para que *r* y π sean paralelos el vector director de la recta y el normal del plano deben ser ortogonales, por lo que su producto escalar debe ser cero.
Obtenemos un punto haciendo *z = 0* y un vector director de *r* haciendo el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos que la definen.

$$z=0\Rightarrow\begin{cases}4x-3y=-1\\3x-2y=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-12x+9y=3\\12x-8y=-12\end{cases}$$

$$y=-9\Rightarrow 4x+27=-1\Rightarrow 4x=-28\Rightarrow x=-7$$

$$P_r(-7,-9,0)$$

$$\overrightarrow{v_r}=(4,-3,4)\times(3,-2,1)=\begin{vmatrix}i&j&k\\4&-3&4\\3&-2&1\end{vmatrix}=-3i+12j-8k+9k-4j+8i=5i+8j+k=(5,8,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}r\,//\,\pi\\\overrightarrow{v_r}=(5,8,1)\\\vec{n}=(2,-1,A)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}=0\Rightarrow(5,8,1)(2,-1,A)=0\Rightarrow 10-8+A=0\Rightarrow\boxed{A=-2}$$

Falta ver que la recta no está contenida en el plano. Para ello basta con ver si el punto $P_r(-7,-9,0)$ cumple la ecuación del plano.

$$\left.\begin{array}{l}2x-y-2z=0\\P_r(-7,-9,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\text{¿}2(-7)-(-9)-2(0)=0\text{?}\Rightarrow\text{¿}-14+9=0\text{?}$$

El punto no pertenece al plano y recta y plano son paralelos.

Obtenemos el plano perpendicular a la recta r que pasa por O(0, 0, 0).
Al ser perpendicular a la recta el plano tiene a $\overrightarrow{v_r}=(5,8,1)$ como vector normal.

$$\left.\begin{array}{l}O(0,0,0)\in\pi'\\\vec{n}=\overrightarrow{v_r}=(5,8,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}O(0,0,0)\in\pi'\\\pi'\equiv 5x+8y+z+D=0\end{array}\right\}\Rightarrow 0+0+0+D=0\Rightarrow D=0$$

El plano pedido tiene ecuación $\boxed{\pi'\equiv 5x+8y+z=0}$

Ejercicio A3

Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+c$, obtener los valores de *a*, *b* y *c* para que su gráfica pase por (0, 2) y tenga un extremo en (1,–1). ¿Tiene *f* más extremos?

Si pasa por (0, 2) se cumple que $f(0)=2\Rightarrow f(0)=\boxed{c=2}$

Si tiene un extremo en (1,–1) quiere decir que pasa por (1,–1) y que la derivada se anula en $x=1$.

$$f(1)=-1\Rightarrow f(1)=a+b+2=-1\Rightarrow a+b=-3.$$

Al ser un extremo en *x = 1* la derivada se anula *f ´(1) = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx^2+c\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx \\ f'(1)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 3a+2b=0$$

Juntamos estas dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 3a+2b=0 \\ a+b=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3a+2b=0 \\ a=-b-3 \end{array}\right\}\Rightarrow -3b-9+2b=0\Rightarrow -b-9=0\Rightarrow \boxed{b=-9}\Rightarrow \boxed{a=9-3=6}$$

La función queda $f(x)=6x^3-9x^2+2$.

Calculamos su derivada y la igualamos a cero en busca de otros extremos.

$$f(x)=6x^3-9x^2+2\Rightarrow f'(x)=18x^2-18x$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 18x^2-18x=0\Rightarrow 18x(x-1)=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0\Rightarrow x=1 \end{cases}$$

El extremo en *x = 1* es el que nos proporciona el ejercicio. Veamos si *x = 0* es extremo.

$$f'(x)=18x^2-18x\Rightarrow f''(x)=36x-18$$

$$f''(0)=-18<0$$

En *x = 0* hay un máximo relativo

Ejercicio B3

Sea $f(x)=x^2+9$, y P el punto exterior a su gráfica de coordenadas P = (0, 0). Calcular razonadamente la (o las) tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto P.

Dibujamos la gráfica de la parábola y el punto para aclarar la situación planteada.

$f(x)=x^2+9$

x	$y=x^2+9$
–2	13
–1	10
0	9
1	10
2	13

La derivada de la función es $f'(x)=2x$

La tangente a *f(x)* en $x = a$ tiene ecuación:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$$\left.\begin{matrix} f(a)=a^2+9 \\ f'(a)=2a \end{matrix}\right\} \Rightarrow y-(a^2+9)=2a(x-a)$$

La tangente debe pasar por (0, 0) por lo que debe cumplirse:

$$0-(a^2+9)=2a(0-a)\Rightarrow -a^2-9=-2a^2\Rightarrow a^2-9=0\Rightarrow a^2=9\Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ a=3 \end{cases}$$

Hay dos tangentes a $f(x)=x^2+9$ que pasan por el punto P(0, 0):

$$\left.\begin{matrix} y-(a^2+9)=2a(x-a) \\ a=-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y-18=-6(x+3)\Rightarrow \boxed{y=-6x}$$

$$\left.\begin{matrix} y-(a^2+9)=2a(x-a) \\ a=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y-18=6(x-3)\Rightarrow \boxed{y=6x}$$

Ejercicio A4

Dibujar la región encerrada por $f(x)=x^2-2x+1$ y $g(x)=-x^2+5$, y calcular el área de dicha región.

Localicemos los puntos de corte de estas dos parábolas.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-2x+1=-x^2+5\Rightarrow 2x^2-2x-4=0\Rightarrow x^2-x-2=0$$

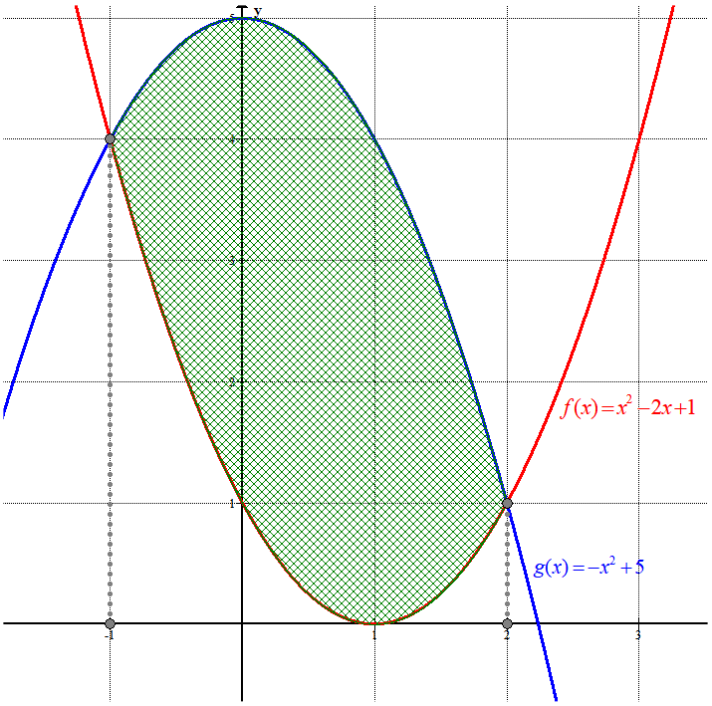
$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2=x\\ \frac{1-3}{2}=-1=x\end{cases}$$

Se cortan en $x=-1$ y en $x=2$.

Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la región del plano de la cual queremos determinar el área.

x	$f(x)=x^2-2x+1$
–2	9
–1	4
0	1
1	0
2	1

x	$g(x)=-x^2+5$
–2	1
–1	4
0	5
1	4
2	1



El recinto cubre aproximadamente 9 cuadraditos.
La calculamos con precisión haciendo uso de la integral.

El área es la integral definida entre –1 y 2 de $g(x)-f(x)$.

$$\int_{-1}^{2}-x^2+5-\left(x^2-2x+1\right)dx=\int_{-1}^{2}-2x^2+2x+4dx=\left[-2\frac{x^3}{3}+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=$$

$$=\left[-2\frac{2^3}{3}+2^2+8\right]-\left[-2\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2+4(-1)\right]=-\frac{16}{3}+4+8-\frac{2}{3}-1+4=\boxed{9\,u^2}$$

Ejercicio B4

Calcular las integrales indefinidas I y J explicando los métodos usados para su resolución.

$$I=\int x\cos(2x)dx, \qquad J=\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$$

$$I=\int x\cos(2x)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x\rightarrow du=dx\\ dv=\cos(2x)dx\rightarrow v=\int\cos(2x)dx=\frac{1}{2}sen(2x)\end{array}\right\}=$$

$$=x\frac{1}{2}sen(2x)-\int\frac{1}{2}sen(2x)dx=$$

$$=\frac{xsen(2x)}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)=$$

$$=\boxed{\frac{xsen(2x)}{2}+\frac{\cos(2x)}{4}+C}$$

$$J=\int\frac{dx}{x^2+2x-3}=$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^2+2x-3=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2+12}}{2}=\left\{\begin{array}{l}\frac{-2+4}{2}=1=x\\ \frac{-2-4}{2}=-3=x\end{array}\right. \Rightarrow x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$$

$$\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$$

$$1=A(x+3)+B(x-1)$$

$$x=1\rightarrow 1=4A\rightarrow A=\frac{1}{4}$$

$$x=-3\rightarrow 1=-4B\rightarrow B=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+3}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+3}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+3}dx=\boxed{\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+3|+C}$$

Ejercicio A5

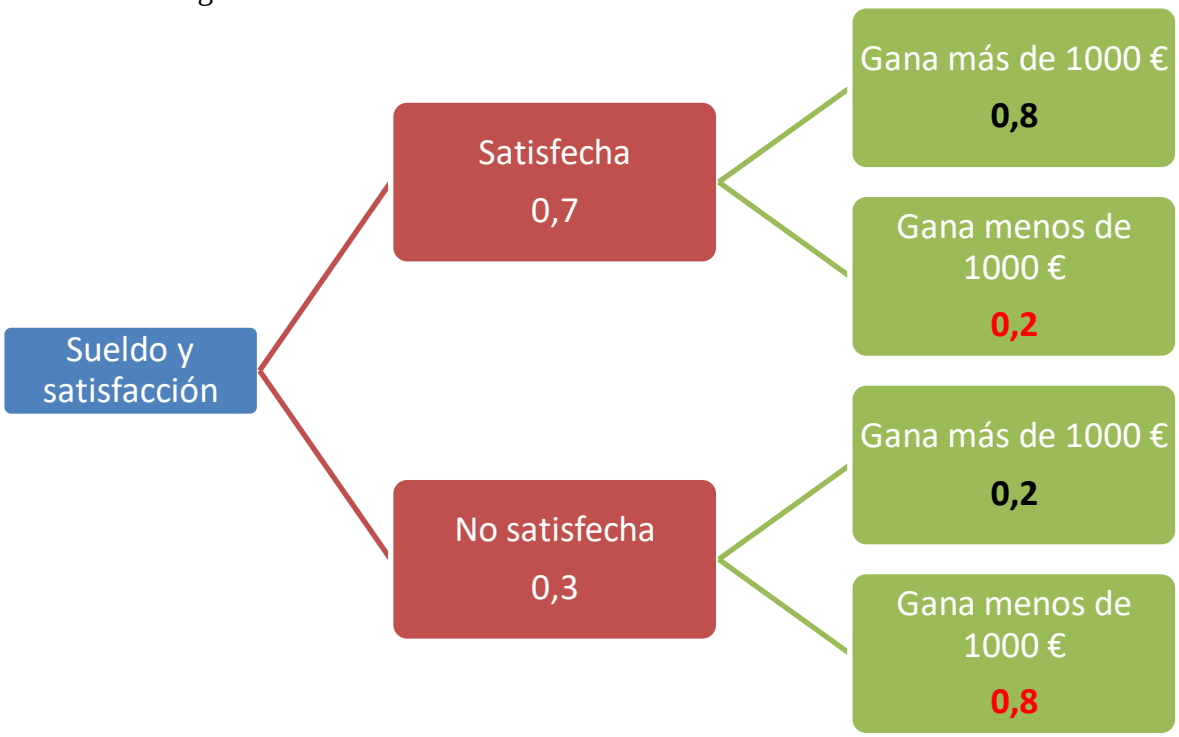
En una empresa el 70 por ciento de sus trabajadoras están satisfechas con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 por ciento gana más de 1000 euros. Entre las no satisfechas solo el 20 por ciento gana más de 1000 euros. Si se elige una trabajadora al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane más de 1000 euros?

b) Si gana más de 1000 euros, ¿cuál es la probabilidad que esté satisfecha con su contrato?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane menos de 1000 euros y esté satisfecha con su contrato?

Construimos un diagrama de árbol.



a) Mirando el diagrama lo calculamos multiplicando y sumando.

$$P(\text{Gane más de } 1000\ €) = 0,7 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,56 + 0,06 = \boxed{0,62}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Esté satisfecha con su contrato / Gana más de } 1000\ €) =$$

$$= \frac{P(\text{Esté satisfecha con su contrato} \cap \text{Gana más de } 1000\ €)}{P(\text{Gana más de } 1000\ €)} = \frac{0,7 \cdot 0,8}{0,62} = \boxed{\frac{28}{31} = 0,903}$$

c) $P(\text{Gane menos de } 1000\ € \text{ y esté satisfecha con su contrato}) = 0,7 \cdot 0,2 = \boxed{0,14}$

Ejercicio B5

En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de 0,4, se pide:

a) Identificar y describir este modelo de probabilidad.
b) Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.
c) Hallar la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

a) Se trata de 30 repeticiones de un experimento "Ver si el aparcamiento está ocupado" que solo tiene dos posibilidades: Ocupado o vacío. Las repeticiones son independientes entre sí y la probabilidad de estar ocupado es siempre 0,4.

Este modelo de probabilidad es una distribución binomial con parámetros n = 30 y p = 0.4.

X = Número de aparcamientos ocupados de las 30 plazas. X= B(30, 0.4)

b) Nos piden calcular $P(X=8)$.

$$P(\text{Haya 8 plazas ocupadas}) = P(X=8) = \binom{30}{8} 0.4^8 \cdot 0.6^{22} =$$

$$= \frac{\cancel{30} \cdot 29 \cdot \cancel{28} \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot \cancel{24} \cdot 23}{\cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2} 0.4^8 \cdot 0.6^{22} = \boxed{0.05}$$

c) Para calcular esta probabilidad aproximamos la distribución binomial a una normal.

X= B(30, 0.4)

Se aproxima con una normal de media $\mu = n \cdot p = 30 \cdot 0.4 = 12$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{30 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = 2.68$.

X= B(30, 0.4) se aproxima con una N(12, 2.68).

$$P(10 < X < 20) = \{\text{Ajuste de continuidad}\} = P(9.5 < X < 20.5) =$$

$$= \{Tipificamos\} = P\left(\frac{9.5-12}{2.68} < Z < \frac{20.5-12}{2.68}\right) =$$

$$= P(-0.9328 < Z < 3.1716) =$$

$$= P(Z < 3{,}1716) - P(Z < -0{,}9328) =$$

$$= P(Z < 3{,}1716) - P(Z > 0{,}9328) =$$

$$= P(Z < 3{,}1716) - [1 - P(Z < 0{,}9328)] =$$

$$= 0{,}9992 - [1 - 0{,}8238] = \boxed{0{,}823}$$

EAU extraordinaria 2019

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2019ko UZTAILA

JULIO 2019

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discutir, en función de los valores de A, el siguiente sistema

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x+y-z=1 \\ 2x-2y+Az=A \end{cases}$$

Ejercicio A2

Hallar la ecuación de **una** recta paralela al plano $\pi \equiv x+2y+3z=6$ y que contenga al punto P(1,0,0). ¿Es única dicha recta? Razonar la respuesta.

Ejercicio A3

Sea *f* la función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$.

a) Obtener los valores de *A*, *B* y *C* para que su gráfica contenga al punto P(0,1) y para que *f* tenga un mínimo local en el punto Q(2,0).
b) ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos locales?

Ejercicio A4

Sea R el recinto del plano limitado por las curvas $y=x(3-x)$ y por $y=x^2$.
Dibujar R y calcular su área.

Ejercicio A5

Una caja tiene 3 monedas R, L y M. La moneda R es normal, la L tiene cara por los dos lados y la M está trucada, de forma que la probabilidad de salir cara es 1/5. Se tira una moneda elegida al azar:

a) Calcular la probabilidad de que se obtenga cara.
b) Si ha salido cruz, ¿cuál es la probabilidad de que sea la moneda R?

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2019ko UZTAILA | JULIO 2019

MATEMATIKA II | **MATEMÁTICAS II**

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dada una matriz de tamaño 3 x 3 cuyo determinante es igual a 5, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones:

a) se cambian entre sí la primera y segunda fila,
b) se multiplica a la tercera columna por –2,
c) se multiplica a toda la matriz por 2 y
d) se traspone la matriz.

Calcular de forma razonada el valor del determinante de la matriz obtenida.

Ejercicio B2

Se considera la recta *r*

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

Y el punto P(1,2,5) exterior a la misma. Hallar la ecuación del plano que contiene a *r* y a P.

Ejercicio B3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Representar *f*.

Ejercicio B4

Calcular $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} dx$ explicando el método seguido para dicho cálculo.

Ejercicio B5

De los resultados obtenidos en una prueba realizada a 500 estudiantes se distribuyen normalmente con media 40 puntos y desviación típica 10 puntos.

a) ¿Qué porcentaje del alumnado tiene una puntuación entre 30 y 60 puntos?
b) ¿Cuántos estudiantes tienen una puntuación superior a 60 puntos?

Soluciones

Ejercicio A1
Discutir, en función de los valores de A, el siguiente sistema

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x+y-z=1 \\ 2x-2y+Az=A \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes asociada al sistema es $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & A \end{pmatrix}$ con determinante

$$|C|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & A \end{vmatrix}=A-4-6-(6+2A+2)=-A-18$$

Igualamos a cero el determinante para distinguir los distintos casos posibles en la resolución del sistema: $|C|=0 \Rightarrow -A-18=0 \Rightarrow A=-18$.

Distinguiremos 2 casos.

CASO 1. A $\neq -18$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas del sistema. El sistema es **compatible determinado** (una única solución)

CASO 2. A = –18

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x+y-z=1 \\ 2x-2y-18z=-18 \end{cases}$$ y si aplicamos Gauss obtenemos el sistema equivalente siguiente:

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x+y-z=1 \\ 2x-2y-18z=-18 \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrr} x & y & -z & =1 \\ -x & -2y & -3z & =-6 \\ \hline & -y & -4z & =-5 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - 2· Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrr} 2x & -2y & -18z & =-18 \\ -2x & -4y & -6z & =-12 \\ \hline & -6y & -24z & =-30 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=6 \\ -y-4z=-5 \\ -6y-24z=-30 \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - 6 · Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrr} -6y & -24z & =-30 \\ 6y & +24z & =30 \\ \hline & 0 & =0 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=6 \\ -y-4z=-5 \\ 0=0 \end{cases}$$

Este sistema es **compatible indeterminado** (tiene infinitas soluciones). Tiene más incógnitas que ecuaciones.

Ejercicio A2

Hallar la ecuación de **una** recta paralela al plano $\pi \equiv x+2y+3z=6$ y que contenga al punto P(1,0,0). ¿Es única dicha recta? Razonar la respuesta.

El vector director de la recta pedida $\overrightarrow{v_r}=(a,b,c)$ debe ser ortogonal al vector normal del plano $\vec{n}=(1,2,3)$ y su producto escalar debe ser cero.

$$\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}=(a,b,c)\cdot(1,2,3)=a+2b+3c=0$$

Esta recta no es única, ya que hay infinitas rectas paralelas al plano que pasan por un punto P, de hecho, existe todo un plano paralelo a otro que pase por un punto P.

Si le damos valores a = 2 y b = –1, nos queda $a+2b+3c=0\Rightarrow 2-2+3c=0\Rightarrow c=0$

El vector director de una recta paralela al plano $\pi \equiv x+2y+3z=6$ es $\overrightarrow{v_r}=(2,-1,0)$ y por tanto la recta pedida tendría ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(2,-1,0)\\ \text{Pasa por } P(1,0,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{r\equiv\begin{cases}x=1+2t\\ y=-t\\ z=0\end{cases}}$$

Ejercicio A3

Sea *f* la función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$.

a) Obtener los valores de *A*, *B* y *C* para que su gráfica contenga al punto P(0,1) y para que *f* tenga un mínimo local en el punto Q(2,0).

b) ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos locales?

a) Si $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ pasa por P(0,1) entonces $f(0)=1\Rightarrow 0^3+A\cdot 0^2+B\cdot 0+C=1\Rightarrow \boxed{C=1}$

Si $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ tiene un mínimo en Q(2,0), entonces pasa por ese punto, por lo que

$f(2)=0\Rightarrow 2^3+A\cdot 2^2+2B+1=0\Rightarrow 8+4A+2B+1=0\Rightarrow 4A+2B=-9$

Además, la derivada debe anularse en *x = 2*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C\Rightarrow f\,'(x)=3x^2+2Ax+B \\ f\,'(2)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 3\cdot 2^2+2A\cdot 2+B=0\Rightarrow 4A+B=-12$$

Si juntamos las tres condiciones, nos queda el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4A+2B=-9 \\ 4A+B=-12 \end{array}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ 4A\quad +B\quad =-12 \\ -4A\quad -2B\quad =9 \\ \hline \qquad -B\quad =-3 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4A+2B=-9 \\ -B=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4A+6=-9 \\ \boxed{B=3} \end{array}\right\}\Rightarrow 4A=-15\Rightarrow \boxed{A=\frac{-15}{4}}$$

Los valores son A = –15/4; B = 3; C = 1 y la función es $f(x)=x^3-\frac{15}{4}x^2+3x+1$.

b) Calculemos su derivada y comprobemos si tiene más puntos críticos.

$$f(x)=x^3-\frac{15}{4}x^2+3x+1\Rightarrow f\,'(x)=3x^2-\frac{15}{2}x+3$$

Igualamos a cero

$$f\,'(x)=0\Rightarrow 3x^2-\frac{15}{2}x+3=0\Rightarrow 6x^2-15x+6=0$$

$$x=\frac{15\pm\sqrt{225-144}}{12}=\frac{15\pm\sqrt{225-144}}{12}=\frac{15\pm 9}{12}=\left\{\begin{array}{l} x=\frac{15+9}{12}=\frac{24}{12}=2 \\ x=\frac{15-9}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

El otro punto es *x = 1/2*. Comprobamos con la segunda derivada que tipo de punto crítico es.

$f\,'(x)=3x^2-\frac{15}{2}x+3\Rightarrow f\,''(x)=6x-\frac{15}{2}$

Sustituyendo *x = 1/2* tenemoa que $f\,''\left(\frac{1}{2}\right)=6\frac{1}{2}-\frac{15}{2}=-\frac{9}{2}<0$

En *x = 1/2* hay un máximo local.

Ejercicio A4

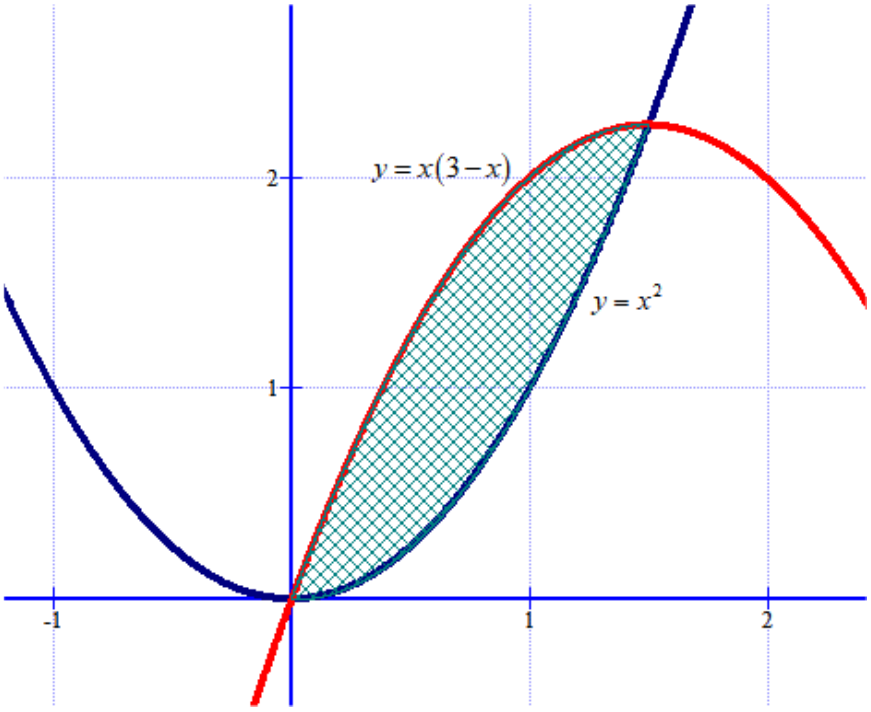
Sea R el recinto del plano limitado por las curvas $y = x(3-x)$ y por $y = x^2$.

Dibujar R y calcular su área.

Haciendo unas tablas de valores para las parábolas del ejercicio se obtiene el dibujo del recinto.

x	$y = x(3-x)$
-1	-4
0	0
1	2
2	2

x	$y = x^2$
-1	1
0	0
1	1
2	4



Averigüemos sus puntos de corte para poder calcular los límites de integración del recinto.

$$\left.\begin{matrix} y = x(3-x) \\ y = x^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x - x^2 = x^2 \Rightarrow 3x - 2x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x(3-2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3-2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Calculamos el valor del área del recinto R.

$$Área = \int_0^{\frac{3}{2}} 3x - x^2 - x^2 dx = \int_0^{\frac{3}{2}} 3x - 2x^2 dx = \left[3\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \left[3\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} - 2\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3} \right] - \left[3\frac{0^2}{2} - 2\frac{0^3}{3} \right] = \frac{27}{8} - \frac{9}{4} = \frac{27}{8} - \frac{18}{8} = \boxed{\frac{9}{8}u^2}$$

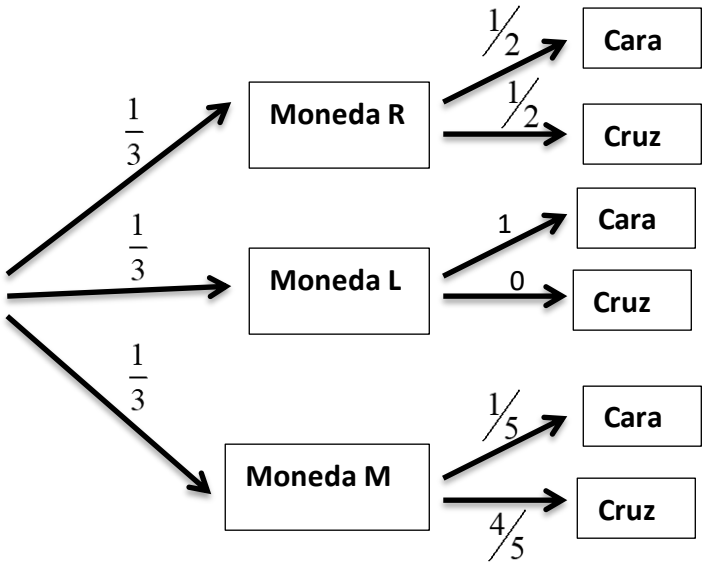
Ejercicio A5

Una caja tiene 3 monedas R, L y M. La moneda R es normal, la L tiene cara por los dos lados y la M está trucada, de forma que la probabilidad de salir cara es 1/5. Se tira una moneda elegida al azar:

a) Calcular la probabilidad de que se obtenga cara.

b) Si ha salido cruz, ¿cuál es la probabilidad de que sea la moneda R?

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar el experimento.



a) P(Sacar cara) = P(Elegir moneda R) · P(Sacar cara con moneda R) + P(Elegir moneda L) · P(Sacar cara con moneda L) + P(Elegir moneda M) · P(Sacar cara con moneda M) =

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\boxed{\frac{17}{30}}$$

b)

$$P\left(\textit{sea la moneda R, sabiendo que ha salido cruz}\right)=P\left(R/Cruz\right)=$$

$$=\frac{P\left(R\cap Cruz\right)}{P\left(Cruz\right)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{17}{30}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{30}}=\frac{30}{6\cdot 13}=\boxed{\frac{5}{13}}$$

Ejercicio B1
Dada una matriz de tamaño 3 x 3 cuyo determinante es igual a 5, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones:
a) se cambian entre sí la primera y segunda fila,
b) se multiplica a la tercera columna por –2,
c) se multiplica a toda la matriz por 2 y
d) se traspone la matriz.
Calcular de forma razonada el valor del determinante de la matriz obtenida.

a) Si la matriz de partida tiene determinante 5 y cambiamos dos filas entre si el determinante cambia de signo y vale –5.

b) Si multiplicamos una columna por –2 el determinante de esa matriz también se multiplica por –2, es decir vale 10.

c) Si multiplicamos toda la matriz (de orden 3 x 3) el determinante se multiplica por $2^3 = 8$, es decir vale 80.

d) Si se traspone la matriz el determinante no cambia.

El determinante de la matriz obtenida con todos los cambios indicados valdrá 80.

Ejercicio B2

Se considera la recta *r*

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

Y el punto P(1,2,5) exterior a la misma. Hallar la ecuación del plano que contiene a *r* y a P.

La recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ tiene como vector director $\vec{v_r} = (1,2,3)$ y pasa por el punto Q(1,2,3).

Para hallar la ecuación del plano utilizamos el punto P(1,2,5) perteneciente al plano y como vectores directores del plano los vectores $\vec{v_r} = (1,2,3)$ y $\overrightarrow{PQ} = (1,2,5) - (1,2,3) = (0,0,2)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(1,2,5) \\ \vec{v_r} = (1,2,3) \\ \overrightarrow{PQ} = (0,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x-4-2y+4=0 \Rightarrow \boxed{2x-y=0}$$

El plano pedido tiene ecuación $2x-y=0$.

Ejercicio B3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función $f(x)=x^3+3x^2-2$. Representar *f*.

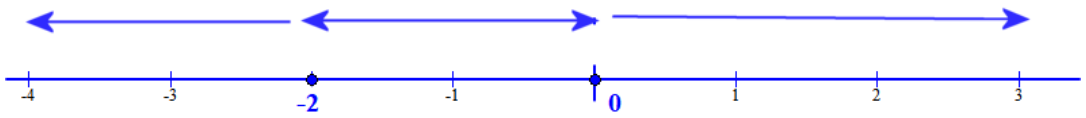
La función $f(x)=x^3+3x^2-2$ es continua, hallando los extremos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento y una tabla podemos representarla.

$$f(x)=x^3+3x^2-2 \Rightarrow f\,'(x)=3x^2+6x$$

Igualamos a cero

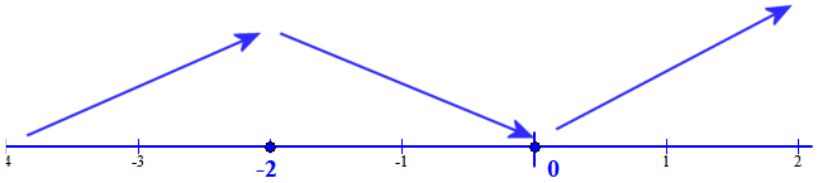
$$f\,'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+6x=0 \Rightarrow x(3x+6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3x+6=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

Al existir dos puntos críticos, la recta real se divide en 3 partes. Veamos que ocurre en cada una de ellas.



- En $(-\infty,-2)$ tomamos el valor x = –3 → $f\,'(-3)=3(-3)^2+6(-3)=27-18=9>0$ La función crece
- En $(-2,0)$ tomamos el valor x = –1 → $f\,'(-1)=3(-1)^2+6(-1)=3-6=-3<0$ La función decrece
- En $(0,+\infty)$ tomamos el valor x = 1 → $f\,'(1)=3(1)^2+6(1)=3+6=9>0$ La función crece.

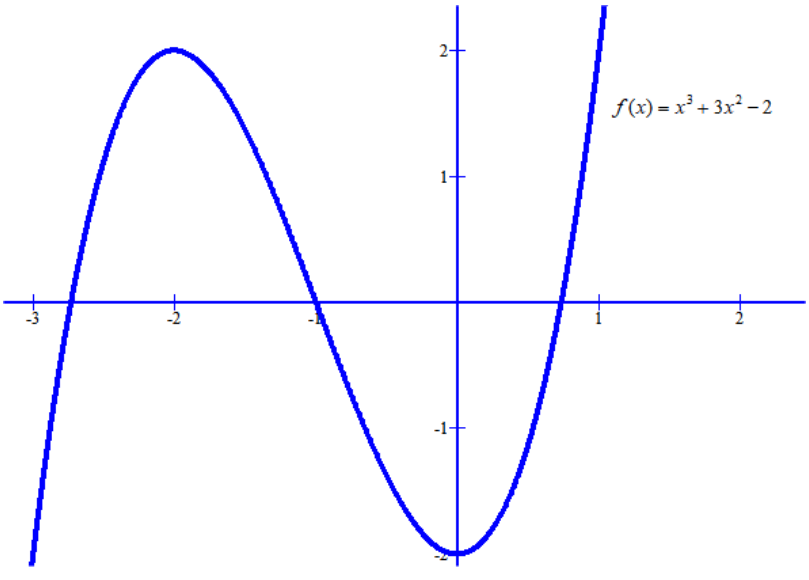
El esquema del comportamiento de la función es:



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y decrece en $(-2,0)$. Presenta un máximo local en x = –2 y un mínimo local en x = 0.

Su representación gráfica es:

x	$y=x^3+3x^2-2$
–3	–2
–2	2
–1	0
0	–2



Ejercicio B4

Calcular $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}dx$ explicando el método seguido para dicho cálculo.

Para calcular la integral $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}dx$ hay que descomponer la fracción algebraica en suma de fracciones simples.

$$\frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}$$

$$\frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

$$8x+7=A(x+3)+B(x+1)$$

$$x=-1\Rightarrow -8+7=A(2)\Rightarrow -1=2A\Rightarrow A=\frac{-1}{2}$$

$$x=-3\Rightarrow -24+7=B(-2)\Rightarrow -17=-2B\Rightarrow B=\frac{17}{2}$$

$$\frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}=\frac{-1/2}{x+1}+\frac{17/2}{x+3}$$

Por lo que:

$$\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}dx=\int \frac{-1/2}{x+1}+\frac{17/2}{x+3}dx=\int \frac{-1/2}{x+1}dx+\int \frac{17/2}{x+3}dx=\boxed{-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{17}{2}\ln|x+3|+C}$$

Ejercicio B5
De los resultados obtenidos en una prueba realizada a 500 estudiantes se distribuyen normalmente con media 40 puntos y desviación típica 10 puntos.
a) ¿Qué porcentaje del alumnado tiene una puntuación entre 30 y 60 puntos?
b) ¿Cuántos estudiantes tienen una puntuación superior a 60 puntos?

a) Siendo X = Puntos obtenidos por un estudiante. X = N(40, 10)
Para calcular el porcentaje calculo la probabilidad de que un estudiante esté en el rango de puntuación pedida: $P(30 < X < 60)$.

$$P(30 < X < 60) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{30-40}{10} < \frac{x-40}{10} < \frac{60-40}{10}\right) =$$

$$= P(-1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -1) = 0,9772 - (1 - P(z < 1)) =$$

$$= 0,9772 - (1 - 0,8413) = 0,8185$$

El porcentaje de alumnado entre 30 y 60 puntos es del 81,85 %.

b) Calculamos la probabilidad de que un estudiante esté con esa nota.

$$P(X > 60) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-40}{10} > \frac{60-40}{10}\right) = P(Z > 2) =$$

$$= 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

De los 500 estudiantes hay 0,0228 · 500 = 12 que tienen puntuación superior a 60 puntos.

EAU ordinaria 2019

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2019ko EKAINA — JUNIO 2019

MATEMATIKA II — **MATEMÁTICAS II**

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discutir, en función de *m*, el sistema de ecuaciones

$$S=\begin{cases}(m+3)x+my+mz=m-1\\ 3x\qquad\quad +mz=m-2\\ \qquad\quad -y\quad +z=m-3\end{cases}$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

Ejercicio A2

Sean la recta

$r\equiv\begin{cases}4x-3y+4z=1\\ 3x-2y+z=0\end{cases}$ y el plano $x-y+Az=0$.

a) ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a ***r***?
b) Encontrar el plano perpendicular a la recta ***r*** que pasa por el punto (0,0,0).

Ejercicio A3

Dada la función $f(x)=x^2+64$ y el **punto exterior** a su gráfica P(6,0), encontrar la recta o rectas tangentes a *f* que pasen por *P*.

Ejercicio A4

Calcula $\int xe^{-4x}dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

Ejercicio A5

Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?
b) Si se ha sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la primera caja?

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dada la matriz $A(a)$

$$A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

calcular, razonadamente, el valor de *a* para que el determinante de $A(a)^2$ valga 4.

Ejercicio B2

Se consideran los tres puntos A(0,0,1), B(1,1,1) y C(–1,–1,2). ¿Están alineados? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo calcular el plano que los contiene.

Ejercicio B3

Sea *f* la función $f(x)=x^2e^{-4x}$. Calcular la primera y la segunda derivada de *f*. Hallar los máximos y mínimos de *f*.

Ejercicio B4

Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y=x+2$ y por la parábola $y=x^2$. Calcular su área.

Ejercicio B5

Lanzamos un dado de seis caras 6000 veces. Calcular la probabilidad de que el número de veces que salga el 5

a) Sea superior a 1500.
b) Esté comprendido entre 1000 y 1100.

Soluciones

Ejercicio A1
Discutir, en función de *m*, el sistema de ecuaciones

$$S=\begin{cases}(m+3)x+my+mz=m-1\\ 3x\qquad\quad +mz=m-2\\ \qquad -y\quad +z=m-3\end{cases}$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A=\begin{pmatrix}m+3 & m & m\\ 3 & 0 & m\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix}m+3 & m & m\\ 3 & 0 & m\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=0+0-3m-\left(0+3m-m\left(m+3\right)\right)=-3m-3m+m^2+3m=m^2-3m$$

Lo igualamos a cero, para establecer distintos casos en la resolución del sistema.

$$m^2-3m=0\Rightarrow m\left(m-3\right)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\ m=3\end{cases}$$

Distinguimos 3 casos.

CASO 1. $m\neq 0; m\neq 3$.

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el de la ampliada e igual que el número de incógnitas. Por lo que el sistema es compatible determinado (única solución)

CASO 2. $m=0$.

El sistema queda $S=\begin{cases}3x=-1\\ 3x=-2\\ -y+z=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1}{3}\\ x=\dfrac{-2}{3}\\ -y+z=-3\end{cases}$

Este sistema es incompatible (no tiene solución). La incógnita x no puede tomar dos valores distintos.

CASO 3. $m=3$.

El sistema queda $S=\begin{cases}6x+3y+3z=2\\ 3x\quad +3z=1\\ \quad -y\quad +z=0\end{cases}$ que podemos buscar su sistema equivalente triangular utilizando el método de Gauss.

$$S=\begin{cases}6x+3y+3z=2\\3x\quad+3z=1\\-y+z=0\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación } 1^{\text{a}}\ -\ 2\cdot\text{Ecuación } 2^{\text{a}}\\ 6x+3y+3z=2\\ -6x\quad-6z=-2\\ \hline 3y-3z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}6x+3y+3z=2\\+3y-3z=0\\-y+z=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación } 2^{\text{a}}+3\cdot\text{Ecuación } 3^{\text{a}}\\ 3y-3z=0\\ -3y+3z=0\\ \hline 0=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}6x+3y+3z=2\\+3y-3z=0\\0=0\end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

Como pide resolverlo, seguimos con el sistema triangular equivalente.

$$\begin{cases}6x+3y+3z=2\\+3y-3z=0\\0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x+3y+3z=2\\y-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x+3y+3z=2\\\boxed{y=z}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x+3z+3z=2\Rightarrow 6x=2-6z\Rightarrow x=\frac{2}{6}-\frac{6z}{6}\Rightarrow\boxed{x=\frac{1}{3}-z}$$

La solución en el caso de indeterminación es $x=\frac{1}{3}-t;\ y=t;\ z=t$, siendo $t\in\mathbb{R}$.

Ejercicio A2

Sean la recta
$r \equiv \begin{cases} 4x-3y+4z=1 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$ y el plano $x-y+Az=0$.

a) ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a ***r***?
b) Encontrar el plano perpendicular a la recta ***r*** que pasa por el punto (0, 0, 0).

a) El vector director de la recta es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3i+12j-8k-(-9k+4j-8i) = 5i+8j+k = (5,8,1)$$

Y el vector normal del plano es $(1,-1,A)$

Para que sea el plano y la recta paralelos deben ser ortogonales el vector normal al plano y el director de la recta, es decir, su producto escalar debe ser cero.

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (5,8,1)\cdot(1,-1,A) = 5-8+A=0 \Rightarrow -3+A=0 \Rightarrow \boxed{A=3}$$

b) El plano perpendicular a la recta r debe tener vector normal el director de la recta $\overrightarrow{v_r} = (5,8,1)$
El plano tiene ecuación $5x+8y+z+D=0$ y como debe pasar por el punto (0, 0, 0), debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} 5x+8y+z+D=0 \\ \text{Pasa por } (0,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 0+D=0 \Rightarrow D=0$$

El plano pedido tiene ecuación $5x+8y+z=0$.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x)=x^2+64$ y el **punto exterior** a su gráfica P(6,0), encontrar la recta o rectas tangentes a f que pasen por P.

Necesitamos averiguar en que puntos de la curva su recta tangente pasa por el punto P(6,0).

La recta tangente a $f(x)=x^2+64$ en un punto (a, f(a)) de la curva tiene ecuación:

$$y-f(a)=f\,'(a)\left(x-a\right)$$

Sustituyamos en esta ecuación el valor de *f(a)* y *f´(a)*.

$$f(x)=x^2+64\Rightarrow f\,'(x)=2x\Rightarrow\begin{cases}f(a)=a^2+64\\f\,'(a)=2a\end{cases}$$

La recta tangente es:

$$y-a^2-64=2a\left(x-a\right)\Rightarrow y=2ax-2a^2+a^2+64\Rightarrow y=2ax-a^2+64$$

Como debe pasar por P(6,0), se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{l}y=2ax-a^2+64\\\text{Pasa por P(6,0)}\end{array}\right\}\Rightarrow 0=12a-a^2+64\Rightarrow -a^2+12a+64=0\Rightarrow a=\frac{-12\pm\sqrt{144-4(-1)64}}{-2}$$

$$a=\frac{-12\pm\sqrt{144+256}}{-2}=\frac{-12\pm 20}{-2}=\begin{cases}a=\dfrac{-12+20}{-2}=-4\\a=\dfrac{-12-20}{-2}=16\end{cases}$$

Las rectas tangentes son:

$$a=-4\Rightarrow y=-8x-16+64\Rightarrow \boxed{y=-8x+48}$$

$$a=16\Rightarrow y=32x-256+64\Rightarrow \boxed{y=32x-192}$$

Ejercicio A4

Calcula $\int xe^{-4x}dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

$$\int xe^{-4x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \to du = dx \\ dv = e^{-4x}dx \to v = \int e^{-4x}dx = \dfrac{e^{-4x}}{-4} \end{array} \right\} = x\frac{e^{-4x}}{-4} - \int \frac{e^{-4x}}{-4}dx = \frac{-xe^{-4x}}{4} + \frac{1}{4}\int e^{-4x}dx =$$

$$= \frac{-xe^{-4x}}{4} + \frac{1}{4}\frac{e^{-4x}}{-4} = \frac{-xe^{-4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{16} + C$$

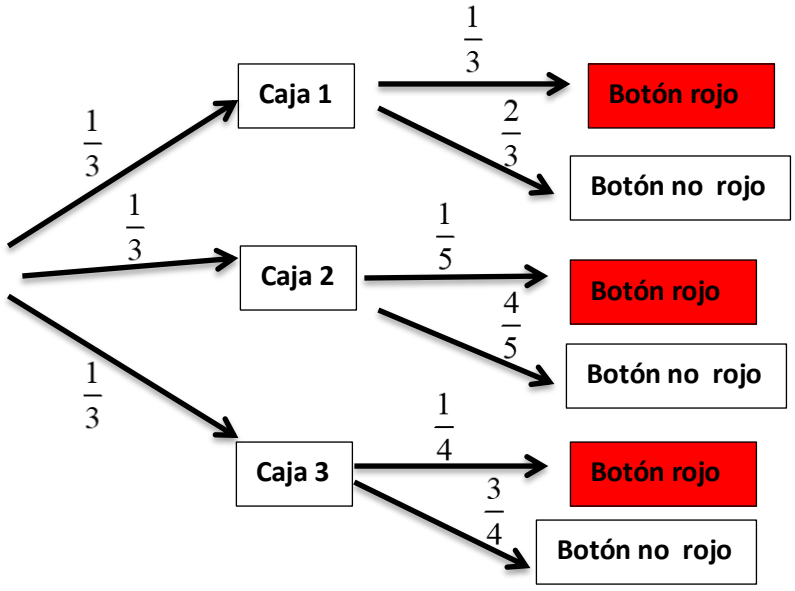
Ejercicio A5

Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?

b) Si se ha sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la primera caja?

Realicemos un diagrama de árbol para aclarar los sucesos posibles y su probabilidad.



a) P(Elegir botón rojo) = P(Elegir caja 1) · P(Elegir botón rojo en caja 1) + P(Elegir caja 2) · P(Elegir botón rojo en caja 2) + P(Elegir caja 3) · P(Elegir botón rojo en caja 3) =

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{12}=\boxed{\frac{47}{180}}$$

b)

$$P\left(\text{Sea de Caja 1, sabiendo que es rojo}\right)=P\left(\text{Caja 1/Botón rojo}\right)=$$

$$=\frac{P\left(\text{Caja 1}\cap\text{Botón rojo}\right)}{P\left(\text{Botón rojo}\right)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{47}{180}}=\frac{180}{9\cdot 47}=\boxed{\frac{20}{47}}$$

Ejercicio B1

Dada la matriz $A(a)$

$$A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

calcular, razonadamente, el valor de *a* para que el determinante de $A(a)^2$ valga 4.

Determinamos la expresión de la matriz A(a).

$$A(a)^2=A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1+a & a^2 & 0\\ 3 & a+1 & 1\end{pmatrix}$$

Su determinante valdrá

$$\left|A(a)^2\right|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1+a & a^2 & 0\\ 3 & a+1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot a^2\cdot 1=a^2 \text{ debe ser igual a 4.}$$

$$a^2=4\Rightarrow \boxed{a=2 \quad o \quad a=-2}$$

Ejercicio B2

Se consideran los tres puntos A(0,0,1), B(1,1,1) y C(–1,–1,2). ¿Están alineados? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo calcular el plano que los contiene.

Para comprobar si están alineados veremos si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,1)-(0,0,1)=(1,1,,0)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,-1,2)-(0,0,1)=(-1,-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow ¿\frac{1}{-1}=\frac{1}{-1}=\frac{0}{1}?$$

No son proporcionales, luego no están alineados y definen un plano. Averigüemos su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,,0)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,-1,1)\\ A(0,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}x-0 & y-0 & z-1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x-z+1-(-z+1+y)=0$$

La ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C es $x-y=0$

Ejercicio B3

Sea f la función $f(x)=x^2e^{-4x}$. Calcular la primera y la segunda derivada de *f*. Hallar los máximos y mínimos de *f*.

$$f(x)=x^2e^{-4x}\Rightarrow \boxed{f\,'(x)=2xe^{-4x}-4x^2e^{-4x}}$$

$$f\,'(x)=2xe^{-4x}-4x^2e^{-4x}\Rightarrow f\,''(x)=2e^{-4x}-8xe^{-4x}-8xe^{-4x}+16x^2e^{-4x}$$

$$\boxed{f\,''(x)=16x^2e^{-4x}-16xe^{-4x}+2e^{-4x}}$$

Para hallar máximos y mínimos igualo a cero la derivada primera.

$$f\,'(x)=0\Rightarrow 2xe^{-4x}-4x^2e^{-4x}=0\Rightarrow\left(2x-4x^2\right)e^{-4x}=0\Rightarrow 2x-4x^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x(1-2x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\1-2x=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Para ver cuál es máximo o mínimo sustituimos en la segunda derivada.

$$x=0\rightarrow f\,''(0)=16\cdot0^2\cdot e^{-4\cdot0}-16\cdot0\cdot e^{-4\cdot0}+2e^{-4\cdot0}=2>0$$

En $x=0$ la función tiene un mínimo relativo.

$$x=\frac{1}{2}\rightarrow f\,''\left(\frac{1}{2}\right)=16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot e^{-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}-16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}+2e^{-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}=4e^{-2}-8e^{-2}+2e^{-2}=-2e^{-2}<0$$

En $x=\dfrac{1}{2}$ la función tiene un máximo relativo.

Ejercicio B4

Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y = x + 2$ y por la parábola $y = x^2$. Calcular su área.

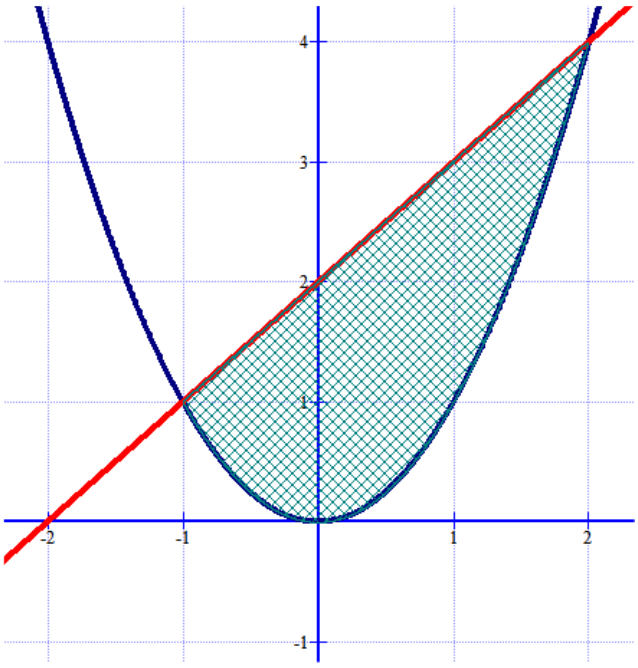
Hallamos los puntos de corte de sus gráficas.

$$\left.\begin{matrix} y = x+2 \\ y = x^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = \frac{1+3}{2} = 2 \\ x = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Realizamos una pequeña tabla de valores para dibujar tanto la recta como la parábola.

x	$y = x+2$
0	2
1	3
2	4

x	$y = x^2$
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4



El área del recinto se puede aproximar contando cuadraditos, …. Unas 4 unidades cuadradas.

Para calcularla con exactitud utilizamos la integral definida de la diferencia de las funciones con límites de integración –1 y 2.

$$Área = \int_{-1}^{2} (x+2) - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} - 2 - \frac{(-1)^3}{3} \right) =$$

$$= 2 + 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = 6 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 8 - 3 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{9}{2} u^2}$$

Ejercicio B5
Lanzamos un dado de seis caras 6000 veces. Calcular la probabilidad de que el número de veces que salga el 5
a) Sea superior a 1500.
b) Esté comprendido entre 1000 y 1100.

Al lanzar un dado sale 5 con probabilidad $p=\frac{1}{6}$ y de no salir 5 con probabilidad $q=\frac{5}{6}$. Si lanzamos 6000 veces ese dado y contamos el número de veces que sale 5, estamos hablando de una distribución binomial de parámetros $p=\frac{1}{6}$ y $n=6000$. $X=B\left(6000,\frac{1}{6}\right)$.

Debe de aproximarse a una normal, dado el alto número de repeticiones . La normal a la que se aproxima tiene parámetros $\mu=n\cdot p=6000\cdot\frac{1}{6}=1000$ y $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{6000\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}=\sqrt{\frac{5000}{6}}=28,9$

$X=B\left(6000,\frac{1}{6}\right)$ se aproxima por una distribución normal $N\left(1000,\ 28,9\right)$

a) Nos piden calcular $P\left(X>1500\right)$.

$$P\left(X>1500\right)=\left\{\text{Ajuste de continuidad}\right\}=P\left(X>1500,5\right)=\left\{Tipificamos\right\}=$$

$$=P\left(\frac{X-1000}{28,9}>\frac{1500,5-1000}{28,9}\right)=P\left(Z>17,3\right)=0$$

b) Nos piden calcular $P\left(1000<X<1100\right)$.

$$P\left(1000<X<1100\right)=\left\{\text{Ajuste de continuidad}\right\}=P\left(1000,5<X<1099,5\right)=$$

$$=\left\{Tipificamos\right\}=P\left(\frac{1000,5-1000}{28,9}<\frac{X-1000}{28,9}<\frac{1099,5-1000}{28,9}\right)=$$

$$=P\left(0,017<Z<3,443\right)=P\left(Z<3,443\right)-P\left(Z<0,017\right)=0,9997-0,508=\boxed{0,4917}$$

EAU extraordinaria 2018

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2018ko UZTAILA

JULIO 2018

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Determinar el rango de la matriz A(a) según los valores de *a*.

$$A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & a+1 & 1\\ a & 0 & 0 & 2\\ 0 & a & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Ejercicio A2

Sea π el plano de ecuación $x+y+z=1$, sea *r* la recta de ecuaciones paramétricas $\{x=1, y=t, z=t\}$ y sea *P* el punto $(1,1,0)$.

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a *r* y que contenga a *P*.

b) Hallar el punto simétrico de *P* respecto al plano π.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x)=x^2e^{-x}$ estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de máximos, mínimos y asíntotas.

Ejercicio A4

Calcular la siguiente integral indefinida

$$\int x^2e^{-3x}dx$$

Ejercicio A5

Calcular el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 8.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2018ko UZTAILA

JULIO 2018

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

Ejercicio B1

a) Discutir el siguiente sistema S(a) en función de *a*

$$S(a)=\begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a+1)y - z = a-1 \end{cases}$$

b) ¿Hay solución para $a=1$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

Ejercicio B2

Determinar el punto simétrico de $A(-3,1,-7)$ respecto a la recta *r* de ecuaciones paramétricas $\{x=-1+t, y=3+2t, z=-1+2t\}$.

Ejercicio B3

De la función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ se sabe que su gráfica pasa por el punto (1, 0) y que tiene un extremo en $x=0$ de valor 1.
a) Hallar A, B y C.
b) ¿El extremo situado en el punto $x=0$ es máximo o es mínimo?

Ejercicio B4

La curva $y=4x^2$ y la curva $y=4x-x^2$ delimitan un recinto finito del plano.

Dibujar dicho recinto y calcular su área.

Ejercicio B5

Hallar razonadamente el último dígito del número $P=(2018)^{2018}(3)^{2018}$

SOLUCIONES

Ejercicio A1

Determinar el rango de la matriz A(a) según los valores de a.

$$A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & a+1 & 1\\ a & 0 & 0 & 2\\ 0 & a & 2 & 0\end{pmatrix}$$

La matriz A(a) es de dimensiones 3×4, por lo que su rango puede ser como máximo 3 y como mínimo 1 pues tiene un elemento no nulo.
Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la primera y segunda columnas su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0-4=-4\neq 0$$

El rango de la matriz A(a) es 2 o 3.
Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la tercera columna y averiguamos cuando se anula.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 0 & 2\\ 0 & a & 0\end{vmatrix}=0+0+a^2-0-0-2a=a^2-2a$$

$$a^2-2a=0\Rightarrow a(a-2)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{a=0}\\ a-2=0\rightarrow\boxed{a=2}\end{cases}$$

Consideramos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a\neq 0$ y $a\neq 2$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 elegido es no nulo y por tanto el rango de la matriz A(a) es 3.

CASO 2. $a=0$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 elegido es nulo.

La matriz queda $A(0)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$. Observamos que las columnas primera y segunda son iguales. Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=0+0+0-0-0-4=-4\neq 0$$

Al ser no nulo el determinante del menor de orden 3 elegido el rango de A(0) es 3.

CASO 3. $a=2$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 elegido es nulo.

La matriz queda $A(2)=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\2&0&0&2\\0&2&2&0\end{pmatrix}$. Observamos que las columnas primera y cuarta son iguales. Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna.

$$\begin{vmatrix}1&3&1\\0&0&2\\2&2&0\end{vmatrix}=0+12+0-0-0-4=8\neq 0$$

Al ser no nulo el determinante del menor de orden 3 elegido el rango de *A(2)* es 3.

Conclusión: El rango de la matriz *A(a)* es 3 para cualquier valor de *a*.

Ejercicio A2

Sea π el plano de ecuación $x+y+z=1$, sea *r* la recta de ecuaciones paramétricas $\{x=1, y=t, z=t\}$ y sea *P* el punto $(1,1,0)$.

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a *r* y que contenga a *P*.

b) Hallar el punto simétrico de *P* respecto al plano π.

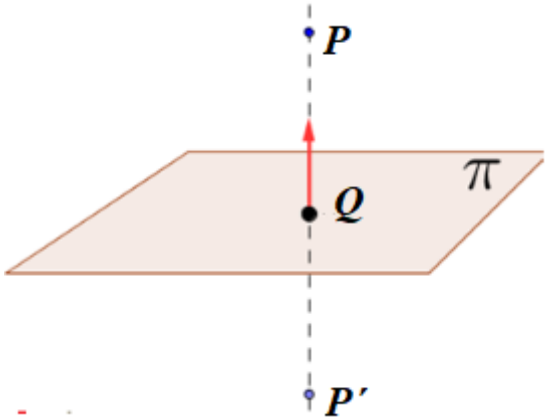
a) El plano π´ perpendicular a *r* tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_r}=(0,1,1) \\ P_r(1,0,0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n'}=\vec{v_r}=(0,1,1) \\ P(1,1,0)\in\pi' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi': y+z+D=0 \\ P(1,1,0)\in\pi' \end{array}\right\} \Rightarrow 1+0+D=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow \boxed{\pi': y+z-1=0}$$

La ecuación del plano π´ perpendicular a *r* y que contiene a *P* es $\pi': y+z-1=0$.

b) Para obtener el punto P´ simétrico de P respecto al plano π determinamos la recta que pasa por P y es perpendicular al plano. Luego determinamos el punto Q de corte de recta y plano y por último hallo P´ sumando a Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.



Hallo la ecuación de la recta. Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x+y+z=1 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(1,1,0)\in s \\ \vec{v_s}=\vec{n}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow s\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Hallo el punto Q de corte de la recta *s* y el plano resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x+y+z=1 \\ s\equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda+1+\lambda+\lambda=1 \Rightarrow 3\lambda=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3} \\ y=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow Q\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{-1}{3}\right) \\ z=\dfrac{-1}{3} \end{cases}$$

Las coordenadas del punto simétrico P´ las hallamos sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left.\begin{array}{l} P(1,1,0) \\ Q\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{-1}{3}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{-1}{3}\right)-(1,1,0)=\left(\frac{-1}{3},\frac{-1}{3},\frac{-1}{3}\right)$$

$$P'=Q+\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{-1}{3}\right)+\left(\frac{-1}{3},\frac{-1}{3},\frac{-1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)$$

El punto simétrico de P respecto del plano π es $P'\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)$

Ejercicio A3

Dada la función $f(x)=x^2e^{-x}$ estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de máximos, mínimos y asíntotas.

El dominio de la función $f(x)=x^2e^{-x}=\dfrac{x^2}{e^x}$ es $\mathbb{R}$, pues el denominador no se puede anular.

Asíntota vertical. $x=a$

No tiene pues el dominio de la función son todos los números reales.

Asíntota horizontal. $y=b$

Cuando x tiende a $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{\infty}{e^{+\infty}}=\frac{\infty}{\infty}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=$$

$$=\frac{\infty}{\infty}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función cuando x tiende a $+\infty$.

Cuando x tiende a $-\infty$.

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=(-\infty)^2e^{+\infty}=(+\infty)(+\infty)=+\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Cuando x tiende a $+\infty$ no tiene pues existe una asíntota horizontal.

Cuando x tiende a $-\infty$ lo comprobamos.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=(-\infty)e^{+\infty}=(-\infty)(+\infty)=-\infty$$

No existe asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

Conclusión: La función solo tiene una asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$: $y=0$.

Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

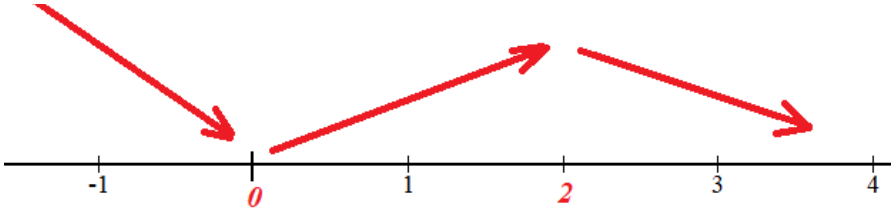
$$f(x)=x^2e^{-x}\Rightarrow f´(x)=2xe^{-x}+x^2(-1)e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}$$

$$f´(x)=0\Rightarrow(2x-x^2)e^{-x}=0\Rightarrow 2x-x^2=0\Rightarrow x(2-x)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ 2-x=0\to\boxed{x=2}\end{cases}$$

Hemos encontrado dos puntos críticos de la función. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ consideramos $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1)=\left(2(-1)-(-1)^2\right)e^1=-3e<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,2)$ consideramos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=\left(2-1^2\right)e^{-1}=\frac{1}{e}>0$. La función crece en $(0,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ consideramos $x=3$ y la derivada vale $f'(3)=\left(2\cdot 3-3^2\right)e^{-3}=\frac{-3}{e^3}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y crece en $(0,2)$.
La función tiene un mínimo relativo en $x=0$ y un máximo relativo en $x=2$.

$$f(0)=0^2e^{-0}=0 \qquad\qquad f(2)=2^2e^{-2}=\frac{4}{e^2}$$

El mínimo relativo tiene coordenadas (0, 0) y el máximo relativo es el punto $\left(2,\frac{4}{e^2}\right)$.

Ejercicio A4

Calcular la siguiente integral indefinida

$$\int x^2 e^{-3x} dx$$

Calculamos la integral usando el método de integración por partes.

$$\int x^2 e^{-3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \to du = 2xdx \\ dv = e^{-3x} dx \to v = \int e^{-3x} dx = \frac{-1}{3} e^{-3x} \end{array} \right\} =$$

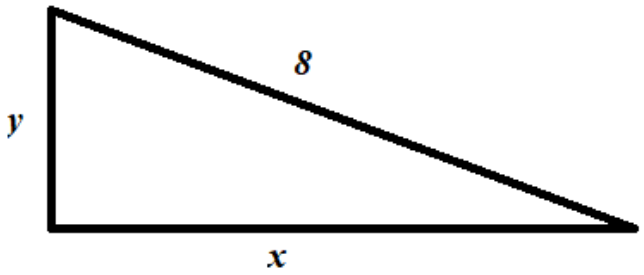
$$= x^2 \left(\frac{-1}{3} e^{-3x} \right) - \int \frac{-1}{3} e^{-3x} 2xdx = \frac{-x^2}{3e^{3x}} + \frac{2}{3} \int x e^{-3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \to du = dx \\ dv = e^{-3x} dx \to v = \frac{-1}{3} e^{-3x} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{-x^2}{3e^{3x}} + \frac{2}{3} \left[x \left(\frac{-1}{3} e^{-3x} \right) - \int \frac{-1}{3} e^{-3x} dx \right] = \frac{-x^2}{3e^{3x}} + \frac{2}{3} \left[\frac{-x}{3e^{3x}} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx \right] =$$

$$= \frac{-x^2}{3e^{3x}} + \frac{2}{3} \left[\frac{-x}{3e^{3x}} + \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{3} e^{-3x} \right) \right] = \boxed{\frac{-x^2}{3e^{3x}} - \frac{2x}{9e^{3x}} - \frac{2}{27e^{3x}} + C}$$

Ejercicio A5

Calcular el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 8.



Aplicando el teorema de Pitágoras se cumple que $x^2+y^2=8^2 \Rightarrow y^2=64-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{64-x^2}$, siendo $0<x<8$.
El área del triángulo rectángulo es la mitad del producto de la base (x) por la altura (y).

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y)=\dfrac{xy}{2} \\ y=\sqrt{64-x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)=\frac{x\sqrt{64-x^2}}{2}$$

Derivamos esta función y buscamos cuando se anula la derivada.

$$A(x)=\frac{x\sqrt{64-x^2}}{2}=\frac{\sqrt{x^2\left(64-x^2\right)}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{64x^2-x^4} \Rightarrow A'(x)=\frac{1}{2}\frac{128x-4x^3}{2\sqrt{64x^2-x^4}}$$

$$A'(x)=0 \Rightarrow \frac{128x-4x^3}{4\sqrt{64x^2-x^4}}=0 \Rightarrow 128x-4x^3=0 \Rightarrow 32x-x^3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(32-x^2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 32-x^2=0 \rightarrow x^2=32 \rightarrow \boxed{x=\sqrt{32}\simeq 5.66} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=\sqrt{32}$.

- En el intervalo $\left(0,\sqrt{32}\right)$ consideramos $x=1$ y la derivada vale $A'(1)=\dfrac{128-4}{4\sqrt{64-1^4}}=\dfrac{124}{4\sqrt{63}}>0$. La función crece en $\left(0,\sqrt{32}\right)$.
- En el intervalo $\left(\sqrt{32},8\right)$ consideramos $x=6$ y la derivada vale $A'(6)=\dfrac{128\cdot 6-4\cdot 6^3}{4\sqrt{64\cdot 6^2-6^4}}=\dfrac{-2\sqrt{7}}{7}<0$. La función decrece en $\left(\sqrt{32},8\right)$.

Como la función crece antes y decrece después existe un máximo relativo en $x=\sqrt{32}$.

El valor del área máxima es $A\left(\sqrt{32}\right)=\dfrac{\sqrt{32}\sqrt{64-\left(\sqrt{32}\right)^2}}{2}=16\ u^2$.

Ejercicio B1

a) Discutir el siguiente sistema S(a) en función de *a*

$$S(a)=\begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a+1)y - z = a-1 \end{cases}$$

b) ¿Hay solución para $a=1$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & a+1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 3 & a+1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & a+1 & -1 \end{vmatrix}=-1+3a^2-2(a+1)+3+2a-a(a+1)=$$

$$=-1+3a^2-\cancel{2a}-2+3+\cancel{2a}-a^2-a=2a^2-a$$

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0\Rightarrow 2a^2-a=0\Rightarrow a(2a-1)=0\Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ 2a-1=0\rightarrow 2a=1\rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a\neq 0$ y $a\neq\frac{1}{2}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow \begin{cases} Fila\,3^a-3\cdot Fila\,1^a \\ 3 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \\ -3 \quad 0 \quad 3 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 2 \quad -7\rightarrow Nueva\ Fila\,3^a \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,2ª-2\cdot Fila\,1ª \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & -4 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,2ª \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,3ª-Fila\,2ª \\ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,3ª \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 0 & -1 & 2}^{A/B} \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & -3 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

CASO 3. $a=\frac{1}{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 3 & 3/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,3ª-3\cdot Fila\,1ª \\ \begin{array}{cccc} 3 & 3/2 & -1 & -1/2 \\ -3 & -3/2 & 3 & -6 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & -13/2 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,3ª \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,2ª-2\cdot Fila\,1ª \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1/2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & -4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 5/2 & -4 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,2ª \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5/2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -13/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 5\cdot Fila\,3ª-4\cdot\ Fila\,2ª \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 10 & -65/2 \\ 0 & 0 & -10 & 16 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -33/2 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,3ª \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 1/2 & -1 & 2}^{A/B} \\ 0 & 0 & 5/2 & -4 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & -33/2 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

Resumiendo: Para $a=1$ y $a\neq\frac{1}{2}$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a=0$ y $a=\frac{1}{2}$ es incompatible (sin solución).

b) Para $a=1$ estaríamos en el caso 1 estudiado en el apartado anterior y el sistema tiene solución. Resolvemos el sistema.

$$S(1)=\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+y+z=0 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=2 \\ z=-2x-y \\ 3x+2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+2x+y=2 \\ 3x+2y+2x+y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=2 \\ 5x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=2 \\ y=\dfrac{-5x}{3} \end{cases} \Rightarrow 3x-2\frac{5x}{3}=2 \Rightarrow 3x-\frac{10x}{3}=2 \Rightarrow 9x-10x=6 \Rightarrow$$

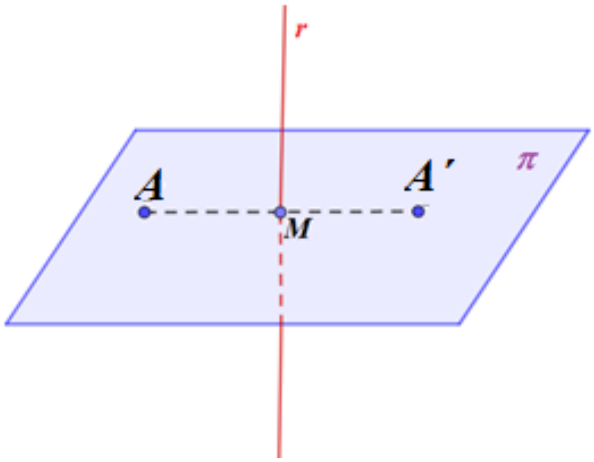
$$\Rightarrow -x=6 \Rightarrow \boxed{x=-6} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-5(-6)}{3}=10} \Rightarrow \boxed{z=-2(-6)-10=2}$$

La solución es $x=-6,\ y=10,\ z=2$.

Ejercicio B2

Determinar el punto simétrico de $A(-3,1,-7)$ respecto a la recta *r* de ecuaciones paramétricas $\{x=-1+t, y=3+2t, z=-1+2t\}$.

Vamos a determinar las coordenadas del punto A´ simétrico de A respecto de la recta *r* calculando previamente el plano π perpendicular a la recta, después el punto M de corte de recta y plano. Por último, hallamos el punto A´ sumándole al punto M el vector $\overrightarrow{AM}$ ya que M es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$.



Hallamos la ecuación del plano π. Su vector normal es el vector director de la recta.

$$r:\{x=-1+t, y=3+2t, z=-1+2t\} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+2t \\ z=-1+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,2,2) \\ Q_r(-1,3,-1) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\overrightarrow{u_r}=(1,2,2) \\ A(-3,1,-7)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi\equiv x+2y+2z+D=0 \\ A(-3,1,-7)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow -3+2-14+D=0 \Rightarrow D=15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi\equiv x+2y+2z+15=0}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi\equiv x+2y+2z+15=0 \\ r:\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+2t \\ z=-1+2t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -1+t+2(3+2t)+2(-1+2t)+15=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1+t+6+4t-2+4t+15=0 \Rightarrow 9t+18=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=-2\Rightarrow \begin{cases} x=-1-2=-3 \\ y=3-4=-1 \\ z=-1-4=-5 \end{cases} \Rightarrow M\left(-3,-1,-5\right)$$

Hallamos las coordenadas del punto A´.

$$\overrightarrow{AM}=\left(-3,-1,-5\right)-\left(-3,1,-7\right)=\left(0,-2,2\right)$$

$$A'=M+\overrightarrow{AM}=\left(-3,-1,-5\right)+\left(0,-2,2\right)=\left(-3,-3,-3\right)$$

El punto simétrico de A respecto de la recta *r* tiene coordenadas A´ $\left(-3,-3,-3\right)$.

Ejercicio B3

De la función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ se sabe que su gráfica pasa por el punto (1, 0) y que tiene un extremo en $x=0$ de valor 1.
a) Hallar A, B y C.
b) ¿El extremo situado en el punto $x=0$ es máximo o es mínimo?

a) Si la gráfica pasa por el punto (1, 0) se cumple que $f(1)=0$. Como tiene un extremo en $x=0$ de valor 1 se cumple que $f(0)=1$ y que $f'(0)=0$. Utilizamos toda esta información para obtener la expresión de la función.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C \\ f'(x)=3x^2+2Ax+B \\ f(1)=0 \\ f(0)=1 \\ f'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 0=1^3+A\cdot 1^2+B\cdot 1+C \\ 1=0^3+A\cdot 0^2+B\cdot 0+C \Rightarrow \\ 0=3\cdot 0^2+2A\cdot 0+B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0=1+A+B+C \\ \boxed{1=C} \\ \boxed{0=B} \end{cases} \Rightarrow 0=1+A+0+1 \Rightarrow \boxed{A=-2}$$

Los valores buscados son $A=-2$, $B=0$ y $C=1$.

b) La función tiene la expresión $f(x)=x^3-2x^2+1$. Su derivada es $f'(x)=3x^2-4x$ y la derivada segunda es $f''(x)=6x-4$. Sustituimos $x=0$ en la segunda derivada y obtenemos su signo: $f''(0)=6\cdot 0-4=-4<0$. Al ser negativo el valor de la segunda derivada la función presenta un máximo relativo en $x=0$.

Ejercicio B4

La curva $y=4x^2$ y la curva $y=4x-x^2$ delimitan un recinto finito del plano.

Dibujar dicho recinto y calcular su área.

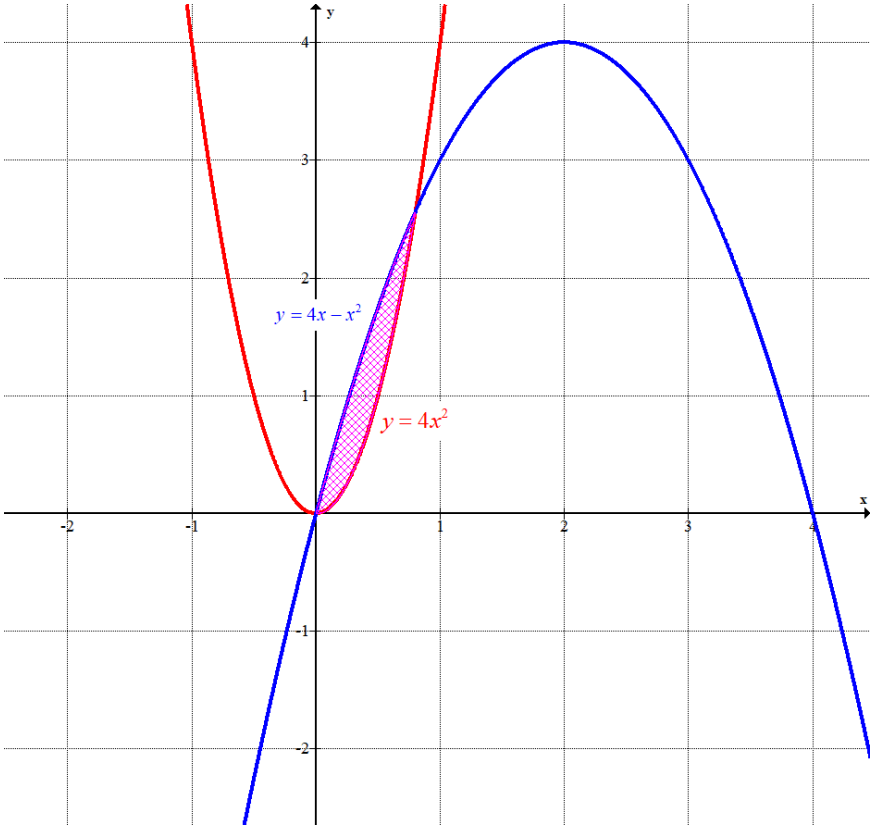
Hallamos los puntos de corte de las gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y=4x^2 \\ y=4x-x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x^2=4x-x^2 \Rightarrow 5x^2-4x=0 \Rightarrow x(5x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 5x-4=0 \rightarrow \boxed{x=\frac{4}{5}=0.8} \end{cases}$$

Obtenemos una tabla de valores de cada función y dibujamos la gráfica de ambas funciones.

x	$y=4x^2$
-1	4
0	0
0.8	2.56
1	4

x	$y=4x-x^2$
-1	-5
0	0
0.8	2.56
1	3



Como se puede observar en el dibujo el valor del área del recinto limitado por las gráficas va a tener un valor pequeño, va a ser menor de 1 unidad cuadrada (1 cuadradito del dibujo).
Calculamos su valor exacto como la integral definida entre 0 y 0.8 de la diferencia de las funciones.

$$Área=\int_0^{0.8} 4x-x^2-4x^2\,dx=\int_0^{0.8} 4x-5x^2\,dx=\left[2x^2-\frac{5x^3}{3}\right]_0^{0.8}=$$

$$=\left[2\cdot 0.8^2-\frac{5\cdot 0.8^3}{3}\right]-\left[2\cdot 0^2-\frac{5\cdot 0^3}{3}\right]=\boxed{\frac{32}{75}\simeq 0.4267\,u^2}$$

El área tiene un valor aproximado de 0.4267 unidades cuadradas.

Ejercicio B5

Hallar razonadamente el último dígito del número $P=(2018)^{2018}(3)^{2018}$

Las potencias tienen el mismo exponente por lo que podemos expresar este producto como $P=(2018)^{2018}(3)^{2018}=6054^{2018}$.

La última cifra de esta potencia es la última cifra de la potencia 4^{2018}. Obtenemos la expresión de las potencias sucesivas de 4 buscando una regularidad en ellas.

$4^1=4$ $4^2=16$ $4^3=64$ $4^4=256$

$4^5=1024$ $4^6=4096$ $4^7=16384$ $4^8=65536$

Observamos que las potencias de exponente impar acaban 4 y las potencias de exponente par acaban en 6, por lo que 4^{2018} acaba en 6 (2018 es par).

Podemos afirmar que la última cifra de $P=(2018)^{2018}(3)^{2018}$ es 6.

EAU ordinaria 2018

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2018ko EKAINA

JUNIO 2018

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Calcula el rango de la siguiente matriz según los valores de a:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ -1 & 3 & a & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio A2

Dados los puntos $A(3, 3, 3)$, $B(2, 3, 4)$, $C(0, 0, 4)$ y $D(3, 0, 1)$.

a) ¿Están en el mismo plano? En caso afirmativo hallar la ecuación del plano. En caso negativo razonar la respuesta.

b) Calcular a para que el punto $P(a, a, 8)$ esté en la recta que pasa por los puntos A y C.

Ejercicio A3

Sea f la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 3-ax^2, & x\le 1 \\ \dfrac{2}{ax}, & x>1 \end{cases}$$

Estudiar su continuidad y su derivabilidad en función de a.

Ejercicio A4

Calcular la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}\,dx$$

Ejercicio A5

De todos los números positivos x e y tales que $x+y=10$ encontrar aquellos para los que el producto $P=x^2y$ sea máximo.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2018ko EKAINA

JUNIO 2018

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dado el siguiente sistema de ecuaciones S(a)

$$S(a)=\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (a+1)y - az = 2a \\ x + ay + (a+1)z = 1 \end{cases}$$

a) Discutirlo según los distintos valores de *a*.

b) ¿Hay solución para $a=2$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

Ejercicio B2

Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $P(2,-1,2)$ y a la recta

$$r \equiv \frac{x}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-1}.$$

Ejercicio B3

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2-4}$, se pide:

a) Hallar las asíntotas de *f*.
b) Hallar los intervalos donde es creciente y donde es decreciente.
c) ¿Tiene extremos la función *f*? En caso afirmativo ¿en qué puntos?

Ejercicio B4

Representar el recinto del plano limitado por las curvas $y=e^x$, $y=e^{-x}$ y por la recta $x=1$. Calcular su área.

Ejercicio B5

Si llamamos *P* a la suma de todos los números pares menores que 1001 y *T* a la suma de todos los múltiplos de 3 menores que 1001, ¿cuánto vale *P* − *T*?

SOLUCIONES

Ejercicio A1
Calcula el rango de la siguiente matriz según los valores de a:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ -1 & 3 & a & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz A es de dimensiones 3×4, por lo que su rango puede ser como máximo 3 y como mínimo 1 pues tiene un elemento no nulo.
Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la tercera fila y la primera y segunda columnas su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0-8=-8\neq 0$$

El rango de la matriz A es 2 o 3.
Observamos que la primera y la cuarta columna son proporcionales, por lo que el único menor que puede tener determinante no nulo es el que se obtiene quitando la cuarta columna. Averiguamos cuando se anula.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & a & 4 \\ -1 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2+0+0+4a-0-12=a^2+4a-12$$

$$a^2+4a-12=0 \Rightarrow a=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(1)(-12)}}{2}=\frac{-4\pm 8}{2}=\begin{cases}\frac{-4+8}{2}=\boxed{2=a} \\ \frac{-4-8}{2}=\boxed{-6=a}\end{cases}$$

Consideramos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a\neq 2$ y $a\neq -6$.
En este caso el determinante del menor de orden 3 elegido es no nulo y por tanto el rango de la matriz A es 3.

CASO 2. $a=2$.
En este caso el determinante del menor de orden 3 elegido es nulo. Como la cuarta columna es proporcional a la primera no existe ningún menor de orden 3 con determinante no nulo.
El rango de A es 2.

CASO 3. $a=-6$.
En este caso el determinante del menor de orden 3 elegido es nulo. Como la cuarta columna es proporcional a la primera no existe ningún menor de orden 3 con determinante no nulo.
El rango de A es 2.

Conclusión: Para $a\neq 2$ y $a\neq -6$ el rango de la matriz A es 3 y para $a=2$ o $a=-6$ el rango de A es 2.

Ejercicio A2

Dados los puntos $A(3, 3, 3)$, $B(2, 3, 4)$, $C(0, 0, 4)$ y $D(3, 0, 1)$.

a) ¿Están en el mismo plano? En caso afirmativo hallar la ecuación del plano. En caso negativo razonar la respuesta.

b) Calcular a para que el punto $P(a, a, 8)$ esté en la recta que pasa por los puntos A y C.

a) Hallamos la ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{matrix} A(3,3,3) \\ B(2,3,4) \\ C(0,0,4) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2,3,4)-(3,3,3) = (-1,0,1) \\ \overrightarrow{AC} = (0,0,4)-(3,3,3) = (-3,-3,1) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1,0,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-3,-3,1) \\ C(0,0,4) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3y+3(z-4)-0+y+3x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y+3z-12+y+3x=0 \Rightarrow \boxed{\pi : 3x-2y+3z-12=0}$$

Averiguamos si el punto D pertenece al plano definido por los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{matrix} \pi : 3x-2y+3z-12=0 \\ ¿D(3,0,1) \in \pi ? \end{matrix}\right\} \Rightarrow ¿3\cdot 3-2\cdot 0+3\cdot 1-12=0? \Rightarrow ¿9+3-12=0? \Rightarrow ¡¡¡SI!!!!$$

Los cuatro puntos son coplanarios y la ecuación del plano π que los contiene es $\pi : 3x-2y+3z-12=0$.

b) Hallamos la recta r que pasa por los puntos A y C.

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AC} = (-3,-3,1) \\ C(0,0,4) \in r \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = -3t \\ y = -3t \\ z = 4+t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Hacemos que el punto $P(a, a, 8)$ cumpla las ecuaciones de la recta r.

$$\left.\begin{matrix} r : \begin{cases} x = -3t \\ y = -3t \\ z = 4+t \end{cases} \\ P(a,a,8) \in r \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -3t \\ a = -3t \\ 8 = 4+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3t \\ a = -3t \\ 4 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ \boxed{a = -12} \end{cases}$$

Para que el punto P pertenezca a la recta que pasa por los puntos A y C debe ser $a = -12$.

Ejercicio A3

Sea f la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases}3-ax^2, & x\le 1\\ \dfrac{2}{ax}, & x>1\end{cases}$$

Estudiar su continuidad y su derivabilidad en función de a.

La función en el intervalo $(-\infty,1)$ tiene la expresión $f(x)=3-ax^2$ que es una expresión polinómica y continua.

La función en el intervalo $(1,+\infty)$ tiene la expresión $f(x)=\dfrac{2}{ax}$ que es una expresión racional cuyo denominador se anula en $x=0\notin(1,+\infty)$, por lo que es continua en $(1,+\infty)$.

Estudiamos la continuidad en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=3-a\cdot 1^2=3-a\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 3-ax^2=3-a\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{ax}=\dfrac{2}{a}\\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow 3-a=\frac{2}{a}\Rightarrow 3a-a^2=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-3a+2=0\Rightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+1}{2}=\boxed{2=a}\\ \dfrac{3-1}{2}=\boxed{1=a}\end{cases}$$

Para que la función sea continua debe ser $a=2$ o $a=1$. Para cualquier otro valor la función no es continua.

Para $a=2$ o $a=1$ estudiamos la derivabilidad de la función.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$ y su derivada es $f'(x)=\begin{cases}-2ax, & x<1\\ \dfrac{-2}{ax^2}, & x>1\end{cases}$.

Para que la función sea derivable en $x=1$ debe coincidir las derivadas laterales: $f'(1^+)=f'(1^-)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-2}{ax^2}=\dfrac{-2}{a}\\ f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}-2ax=-2a\\ f'(1^+)=f'(1^-)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{-2}{a}=-2a\Rightarrow -2=-2a^2\Rightarrow a^2=1\Rightarrow\boxed{a=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Conclusión: La función es continua y derivable para $a=1$. La función es continua y no es derivable para $a=2$. La función no es continua para cualquier valor de a distinto de 1 y 2.

Ejercicio A4

Calcular la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}\,dx$$

Utilizamos el método de integración por descomposición en fracciones simples.
Descomponemos en fracciones simples la expresión del integrando.

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}\Rightarrow \frac{2x-1}{x(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-1=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0\rightarrow \boxed{-1=A} \\ x=-1\rightarrow -3=-C\rightarrow \boxed{C=3}\Rightarrow 3=-9+6B+6\Rightarrow 6=6B\Rightarrow \boxed{B=1}\Rightarrow \\ x=2\rightarrow 3=9A+6B+2C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{x(x+1)^2}=\frac{-1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$$

Aplicamos lo conseguido al cálculo de la integral.

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}\,dx=\int \frac{-1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}\,dx=\int \frac{-1}{x}\,dx+\int \frac{1}{x+1}\,dx+\int \frac{3}{(x+1)^2}\,dx=$$

$$=-\ln(x)+\ln(x+1)+3\int (x+1)^{-2}\,dx=-\ln(x)+\ln(x+1)+3\frac{(x+1)^{-1}}{-1}=$$

$$=\boxed{-\ln(x)+\ln(x+1)-\frac{3}{x+1}+K}$$

Ejercicio A5
De todos los números positivos x e y tales que $x+y=10$ encontrar aquellos para los que el producto $P=x^2y$ sea máximo.

Ponemos la variable "y" en función de "x": $x+y=10\rightarrow y=10-x$.
Obtenemos la expresión del producto dependiendo solo de la variable "x".

$$\left.\begin{array}{l} P=x^2y \\ y=10-x \end{array}\right\}\Rightarrow P(x)=x^2(10-x)=10x^2-x^3$$

Determinamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$P(x)=10x^2-x^3\Rightarrow P'(x)=20x-3x^2$$

$$P'(x)=0\Rightarrow 20x-3x^2=0\Rightarrow x(20-3x)=0\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 20-3x=0\rightarrow 3x=20\rightarrow \boxed{x=\dfrac{20}{3}} \end{cases}$$

Como los números deben ser positivos solo nos sirve como punto crítico $x=\dfrac{20}{3}$. Sustituimos este valor en la derivada segunda y observamos su signo.

$$P'(x)=20x-3x^2\Rightarrow P''(x)=20-6x\Rightarrow P''\left(\frac{20}{3}\right)=20-6\frac{20}{3}=-20<0$$

Como la segunda derivada es negativa el producto es máximo para $x=\dfrac{20}{3}$.

Para este valor de "x" obtenemos $y=10-\dfrac{20}{3}=\dfrac{10}{3}$.

Los números positivos que cumpliendo que suman 10 hacen máximo el producto son $x=\dfrac{20}{3}$ e $y=\dfrac{10}{3}$.

Ejercicio B1

Dado el siguiente sistema de ecuaciones S(a)

$$S(a)=\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (a+1)y - az = 2a \\ x + ay + (a+1)z = 1 \end{cases}$$

a) Discutirlo según los distintos valores de *a*.

b) ¿Hay solución para $a=2$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -a \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & a+1 & -a & 2a \\ 1 & a & a+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -a \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix}=(a+1)^2-2a-\cancel{a}+\cancel{a}+1-2(a+1)+a^2=$$

$$=a^2+1^2+\cancel{2a}-\cancel{2a}+1-2a-2+a^2=2a^2-2a$$

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0\Rightarrow 2a^2-2a=0\Rightarrow 2a(a-1)=0\Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ a-1=0\rightarrow \boxed{a=1} \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a\neq 0$ y $a\neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3^a-Fila\,1^a & & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline -1 & -2 & 1 & -2 \\ \hline 0 & -2 & 2 & -1\rightarrow Nueva\ Fila\,3^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,2^a-Fila\,1^a & & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & 1 & -2 \\ \hline 0 & -1 & 1 & -2\rightarrow Nueva\ Fila\,2^a \end{array}\right\}\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,3ª - 2\cdot Fila\,2ª \\ 0 \quad -2 \quad 2 \quad -1 \\ 0 \quad 2 \quad -2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \rightarrow Nueva\ Fila\,3ª \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 2 & -1 & 2}^{A/B} \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 3 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,3ª - Fila\,1ª \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ -1 \quad -2 \quad 1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 3 \quad -1 \rightarrow Nueva\ Fila\,3ª \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,2ª - Fila\,1ª \\ 1 \quad 2 \quad -1 \quad 2 \\ -1 \quad -2 \quad 1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow Fila\,2ª \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{Fila\,3ª \leftrightarrow Fila\,2ª\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 2 & -1 & 2}^{A/B} \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a=1$ y $a\neq 0$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a=0$ es incompatible (sin solución) y para $a=1$ es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a=2$ estaríamos en el caso 1 estudiado en el apartado anterior y el sistema tiene solución.
Resolvemos el sistema.

$$S(2)=\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + 3y - 2z = 4 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y + z \\ x + 3y - 2z = 4 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2y + z + 3y - 2z = 4 \\ 2 - 2y + z + 2y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - z = 2 \\ 4z = -1 \rightarrow \boxed{z = \frac{-1}{4}} \end{cases} \Rightarrow y + \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{y = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}} \Rightarrow \boxed{x = 2 - 2\frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-7}{4}}$$

La solución es $x=\frac{-7}{4}$, $y=\frac{7}{4}$, $z=\frac{-1}{4}$.

Ejercicio B2

Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $P(2,-1,2)$ y a la recta

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

El plano que contiene la recta tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta, el otro vector director del plano es el vector que une el punto P con un punto cualquiera de la recta.

$$r \equiv \frac{x-0}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_r} = (2,1,-1) \\ Q_r(0,3,1) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} Q_r(0,3,1) \\ P(2,-1,2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ_r} = (0,3,1) - (2,-1,2) = (-2,4,-1)$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{u} = \overrightarrow{PQ_r} = (-2,4,-1) \\ \vec{v} = \vec{v_r} = (2,1,-1) \\ P(2,-1,2) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(x-2) - 2(y+1) - 2(z-2) - 8(z-2) - 2(y+1) + x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + 8 - 2y - \cancel{2} - 2z + \cancel{4} - 8z + 16 - 2y - 2 + x - \cancel{2} = 0 \Rightarrow -3x - 4y - 10z + 22 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi : 3x + 4y + 10z - 22 = 0}$$

La ecuación del plano que contiene el punto P y la recta r es $\pi : 3x + 4y + 10z - 22 = 0$.

Ejercicio B3

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2-4}$, se pide:

a) Hallar las asíntotas de *f*.

b) Hallar los intervalos donde es creciente y donde es decreciente.

c) ¿Tiene extremos la función *f*?. En caso afirmativo ¿en que puntos?

El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

a) **Asíntota vertical.** $x=a$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3}{x^2-4}=\frac{(-2)^2-3}{(-2)^2-4}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3}{x^2-4}=\frac{2^2-3}{2^2-4}=\frac{1}{0}=\infty$$

La función tiene dos asíntotas verticales: $x=-2$ y $x=2$.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}\frac{x^2-3}{x^2-4}=\lim_{x\to \infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to \infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{1-\frac{3}{\infty}}{1-\frac{4}{\infty}}=\frac{1-0}{1-0}=1$$

La función tiene una asíntota horizontal: $y=1$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

b) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{x^2-3}{x^2-4} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-2x(x^2-3)}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3+6x}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2-4)^2}=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=0$ y de los puntos excluidos del dominio: $x=-2$ y $x=2$.

- En el intervalo $(-\infty,-2)$ consideramos $x=-3$ y la derivada vale $f'(-3)=\dfrac{-2(-3)}{\left((-3)^2-4\right)^2}=\dfrac{6}{25}>0$. La función crece en $(-\infty,-2)$.
- En el intervalo $(-2,0)$ consideramos $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{-2(-1)}{\left((-1)^2-4\right)^2}=\dfrac{2}{9}>0$. La función crece en $(-2,0)$.
- En el intervalo $(0,2)$ consideramos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{-2\cdot 1}{\left(1^2-4\right)^2}=\dfrac{-2}{9}<0$. La función decrece en $(0,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ consideramos $x=3$ y la derivada vale $f'(3)=\dfrac{-2\cdot 3}{\left(3^2-4\right)^2}=\dfrac{-6}{25}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y decrece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$.

c) La función tiene un extremo en $x=0$, este extremo es un máximo relativo ya que la función crece antes y decrece después de este valor.

Como $f(0)=\dfrac{0^2-3}{0^2-4}=\dfrac{3}{4}$ el máximo relativo tiene coordenadas $\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$.

Ejercicio B4

Representar el recinto del plano limitado por las curvas $y=e^x$, $y=e^{-x}$ y por la recta $x=1$.
Calcular su área.

Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

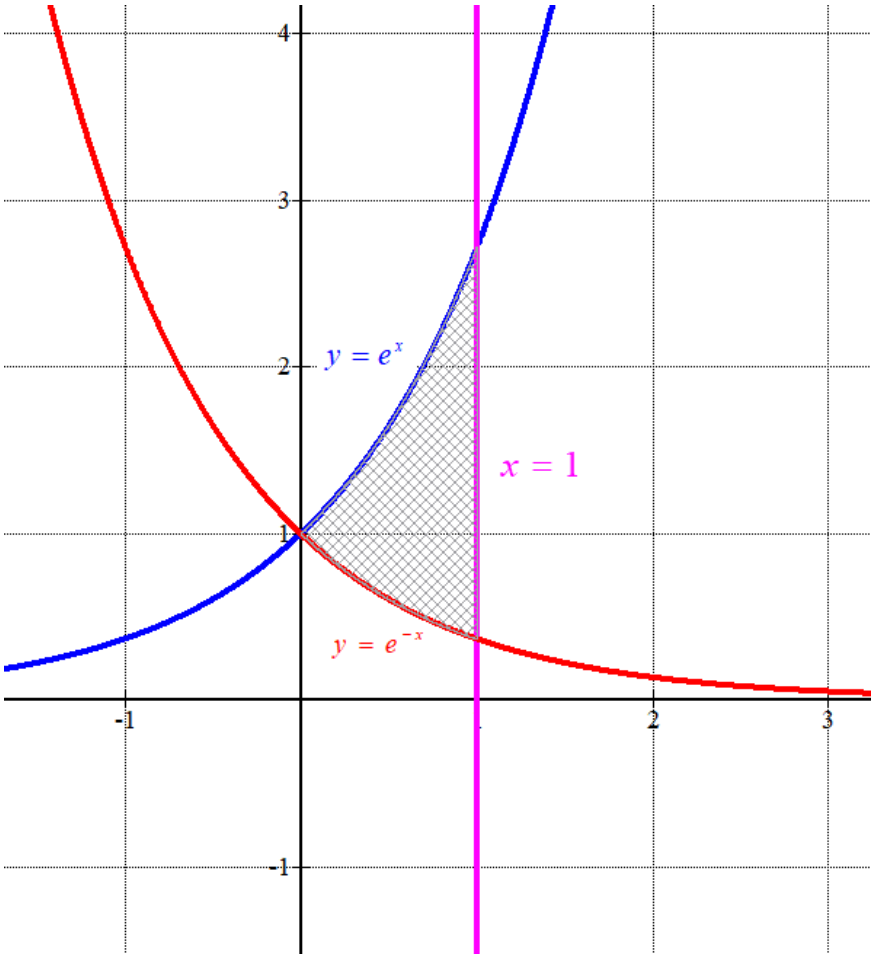
$$\left.\begin{matrix} y=e^x \\ y=e^{-x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow e^x=e^{-x} \Rightarrow e^x=\frac{1}{e^x} \Rightarrow e^{2x}=1 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Dibujamos las gráficas de ambas funciones y la recta vertical $x=1$.

x	$y=e^x$
-1	e^{-1}
0	1
1	e

x	$y=e^{-x}$
-1	e
0	1
1	e^{-1}

$x=1$	y
1	0
1	1



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada de área vemos que el área de la zona rayada tendrá un valor aproximado de 1 unidad cuadrada. Calculamos su valor exacto como la integral definida de 0 a 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$Área=\int_0^1 e^x-e^{-x}dx=\left[e^x+e^{-x}\right]_0^1=\left[e^1+e^{-1}\right]-\left[e^0+e^{-0}\right]=e+\frac{1}{e}-2\simeq 1.086u^2$$

Ejercicio B5
Si llamamos *P* a la suma de todos los números pares menores que 1001 y *T* a la suma de todos los múltiplos de 3 menores que 1001, ¿cuánto vale $P - T$?

La suma de los números pares menores de 1001 es la siguiente:

$$\overbrace{4 + 998}^{1002}$$

$$\overbrace{6 + 996}^{1002}$$

$$2\cdot 1+4+6+8+10+.....+996+998+2\cdot 500=\frac{(2+1000)500}{2}=250500$$

$$\underbrace{2 + 1000}_{1002}$$

Hemos aplicado la propiedad de las progresiones aritméticas que cumple que la suma de los extremos va siendo la misma de forma concéntrica. Como hay 500 números pares menores de 1001 la suma de todos es 500/2 veces 1000 +2.
La suma de los múltiplos de 3 menores de 1001 es la siguiente:

$$3\cdot 1,6,9,12,.....,993,996,3\cdot 333=\frac{(3+999)333}{2}=166833$$

Hemos aplicado la propiedad de las progresiones aritméticas que cumple que la suma de los extremos va siendo la misma de forma concéntrica. Como hay 333 múltiplos de 3 menores de 1001 la suma de todos es 333/2 veces 999 +3.

La diferencia entre estos dos valores es $P-T=250500-166833=83667$

EAU extraordinaria 2017

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2017ko UZTAILA

JULIO 2017

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro *a*

$$\begin{aligned} ax+2y+6z&=0\\ 2x+ay+4z&=2\\ 2x+ay+6z&=a-2 \end{aligned}$$

En caso de existir, encontrar la solución para el caso $a = 0$.

Ejercicio A2

Dada la recta que pasa por los puntos $A(0,2,3)$ y $B(-1,1,1)$ encontrar un punto P de dicha recta tal que la distancia de P al punto $M(1,0,1)$ sea la misma que la distancia de P al punto $N(0,4,2)$.

Ejercicio A3

Sabemos que la recta $y=2x-10$ es tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx-1$ en el punto $P(1,-8)$.

a) Calcula los valores de A y B.

b) Calcular los puntos de corte de la función $f(x)$ con la recta de ecuación $y=-15x-1$.

Ejercicio A4

Resolver la siguiente integral indefinida $\int (x+5)e^{3x}dx$

Ejercicio A5

La suma de 45 números seguidos nos da 1890. ¿Cuál es el menor y el mayor de los números que componen esa suma?

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2017ko UZTAILA

JULIO 2017

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

Ejercicio B1

a) Calcula para qué valor, o valores, de *x* admite inversa la siguiente matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) En caso de existir, calcula la inversa de A para $x=-3$.

Ejercicio B2

a) Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x-3y+z=0 \text{ y } \pi_2 \equiv 2x-y+3z-5=0$$

y que pasa por el punto $P(2,6,5)$.

b) Encontrar la distancia del primer plano a la recta obtenida.

Ejercicio B3

Dada la función $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$

a) Razonar la existencia de máximos y mínimos de la función. Si existen hallarlos.
b) ¿Para qué intervalos es creciente la función?
c) Hallar todas las asíntotas de la función.

Ejercicio B4

Calcular el área del recinto limitado por las siguientes parábolas, realizando un dibujo del mismo.

$$y=-x^2-10x, \qquad y=(x+4)^2$$

Ejercicio B5

Dado el número $N=2^{2017}+5^{2017}+6^{2017}$ sea $Z=N^{2017}$.
Contestar razonadamente a la siguiente pregunta: ¿es *Z* múltiplo de 10?

SOLUCIONES

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a

$$ax+2y+6z=0$$
$$2x+ay+4z=2$$
$$2x+ay+6z=a-2$$

En caso de existir, encontrar la solución para el caso $a = 0$.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} a & 2 & 6 & 0 \\ 2 & a & 4 & 2 \\ 2 & a & 6 & a-2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{vmatrix}=6a^2+16+\cancel{12a-12a}-24-4a^2=2a^2-8$$

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0\Rightarrow 2a^2-8=0\Rightarrow 2a^2=8\Rightarrow a^2=4\Rightarrow \boxed{a=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a\neq -2$ y $a\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=-2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3^a+Fila\,1^a & & & \\ 2 & -2 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 12 & -4\rightarrow Nueva\,Fila\,3^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,2^a+Fila\,1^a & & & \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 10 & 2\rightarrow Nueva\,Fila\,2^a \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 5\cdot Fila\,3ª - 6\cdot Fila\,2ª \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 60 & -20 \\ 0 & 0 & -60 & -12 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -32 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,3ª \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{-2 & 2 & 6 & 0}^{A/B} \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & -32 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Fila\,3ª - Fila\,1ª \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & -6 & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,3ª \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,2ª - Fila\,1ª \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -6 & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,2ª \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{2 & 2 & 6 & 0}^{A/B} \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a = -2$ es incompatible (sin solución) y para $a = 2$ es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Para $a = 0$ estaríamos en el caso 1 estudiado en el apartado anterior y el sistema tiene solución. Lo resolvemos.

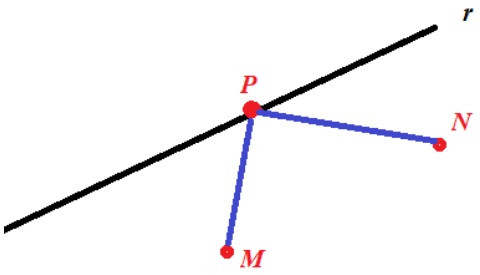
$$\left.\begin{array}{l} 2y + 6z = 0 \\ 2x + 4z = 2 \\ 2x + 6z = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y + 3z = 0 \\ x + 2z = 1 \\ x + 3z = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y + 3z = 0 \\ x = 1 - 2z \\ x + 3z = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y + 3z = 0 \\ 1 - 2z + 3z = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y + 3z = 0 \\ \boxed{z = -2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 6} \\ \boxed{x = 1 + 4 = 5} \end{array}\right.$$

La solución es $x = 5,\ y = 6,\ z = -2$.

Ejercicio A2

Dada la recta que pasa por los puntos $A(0,2,3)$ y $B(-1,1,1)$ encontrar un punto P de dicha recta tal que la distancia de P al punto $M(1,0,1)$ sea la misma que la distancia de P al punto $N(0,4,2)$



Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta *r* que pasa por los puntos A y B.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}=(-1,1,1)-(0,2,3)=(-1,-1,-2)\\ A(0,2,3)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=-t\\ y=2-t\\ z=3-2t\end{cases}$$

Un punto P de la recta *r* tiene coordenadas $P(-t,2-t,3-2t)$.

La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que los une.

$$\left.\begin{array}{l}M(1,0,1)\\ P(-t,2-t,3-2t)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{PM}=(1,0,1)-(-t,2-t,3-2t)=(1+t,-2+t,-2+2t)$$

$$d(M,P)=\left|\overrightarrow{PM}\right|=\sqrt{(1+t)^2+(-2+t)^2+(-2+2t)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}N(0,4,2)\\ P(-t,2-t,3-2t)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{PN}=(0,4,2)-(-t,2-t,3-2t)=(t,2+t,-1+2t)$$

$$d(N,P)=\left|\overrightarrow{PN}\right|=\sqrt{t^2+(2+t)^2+(-1+2t)^2}$$

Hallamos el valor o valores de *t* que hacen que estas distancias sean iguales.

$$d(M,P)=d(N,P)\Rightarrow\sqrt{(1+t)^2+(-2+t)^2+(-2+2t)^2}=\sqrt{t^2+(2+t)^2+(-1+2t)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1+t)^2+(-2+t)^2+(-2+2t)^2=t^2+(2+t)^2+(-1+2t)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\cancel{t^2}+2t+4+\cancel{t^2}-4t+4+\cancel{4t^2}-8t=\cancel{t^2}+4+\cancel{t^2}+4t+1+\cancel{4t^2}-4t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10t+9=5\Rightarrow 4=10t\Rightarrow\boxed{t=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P(-t,2-t,3-2t)\\ t=\frac{2}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow P\left(\frac{-2}{5},\frac{8}{5},\frac{11}{5}\right)$$

Ejercicio A3

Sabemos que la recta $y=2x-10$ es tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx-1$ en el punto $P(1,-8)$.

a) Calcula los valores de A y B.

b) Calcular los puntos de corte de la función $f(x)$ con la recta de ecuación $y=-15x-1$.

a) Si la recta es tangente a la función en el punto $P(1,-8)$ el valor de la función es –8 en $x=1$ → $f(1)=-8$. Además, la derivada de la función en $x=1$ coincide con el valor de la pendiente de la recta $y=2x-10$ → $f'(1)=2$.

$$\left.\begin{matrix} f(1)=-8 \\ f(x)=x^3+Ax^2+Bx-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -8=1^3+A\cdot 1^2+B\cdot 1-1 \Rightarrow \boxed{A+B=-8}$$

$$\left.\begin{matrix} f'(1)=2 \\ f'(x)=3x^2+2Ax+B \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2=3\cdot 1^2+2A\cdot 1+B \Rightarrow \boxed{2A+B=-1}$$

Reunimos estas dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix} A+B=-8 \\ 2A+B=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} B=-8-A \\ 2A+B=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2A-8-A=-1 \Rightarrow \boxed{A=7} \Rightarrow \boxed{B=-8-7=-15}$$

Los valores buscados son $A=7$ y $B=-15$.

b) La función queda $f(x)=x^3+7x^2-15x-1$. Hallamos los puntos de corte pedidos.

$$\left.\begin{matrix} y=-15x-1 \\ f(x)=x^3+7x^2-15x-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \cancel{-15x}-1=x^3+7x^2\cancel{-15x}-1 \Rightarrow x^3+7x^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(x+7)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0-1=-1 \rightarrow A(0,-1) \\ x+7=0 \rightarrow x=-7 \rightarrow y=-15(-7)-1=-106 \rightarrow B(-7,-106) \end{cases}$$

Los puntos de corte de la función $f(x)$ con la recta de ecuación $y=-15x-1$ son $A(0,-1)$ y $B(-7,-106)$.

Ejercicio A4

Resolver la siguiente integral indefinida $\int (x+5)e^{3x}dx$

Aplicamos el método de integración por partes.

$$\int (x+5)e^{3x}dx = \left\{ \begin{array}{l} x+5=u \to dx=du \\ e^{3x}dx=dv \to v=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right\} = (x+5)\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx =$$

$$= \frac{x+5}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{x+5}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} = \left(\frac{x+5}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3x} = \boxed{\left(\frac{3x+14}{9}\right)e^{3x} + K}$$

Ejercicio A5
La suma de 45 números seguidos nos da 1890. ¿Cuál es el menor y el mayor de los números que componen esa suma?

Los 45 números seguidos los llamamos $x, x+1, x+2, x+3, \ldots., x+44$.
Nos dicen que suman 1890.

$$\overbrace{2 \quad + \quad 43}^{45}$$

$$\overbrace{1 \quad + \quad 44}^{45}$$

$$x+x+1+x+2+x+3+....+x+44=1890 \Rightarrow 45x+\left(1+2+3+4+...+43+44\right)=1890$$

$$\Rightarrow 45x+\frac{\left(44+1\right)44}{2}=1890 \Rightarrow 45x+990=1890 \Rightarrow 45x=900 \Rightarrow \boxed{x=\frac{900}{45}=20}$$

Por lo que el menor es 20 y el mayor 20 + 44 = 64.

Ejercicio B1

a) Calcula para qué valor, o valores, de *x* admite inversa la siguiente matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & x\\ x & 0 & -1\\ -6 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

b) En caso de existir, calcula la inversa de A para $x=-3$.

a) Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & x\\ x & 0 & -1\\ -6 & -1 & 0\end{vmatrix}=0+6-x^2-0-0-1=-x^2+5$$

$$|A|=0\Rightarrow -x^2+5=0\Rightarrow x^2=5\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{5}}$$

Para que la matriz A tenga inversa debe ser $x\neq-\sqrt{5}$ y $x\neq+\sqrt{5}$.

b) Para $x=-3$ se cumple que es un valor distinto de $x\neq-\sqrt{5}$ y $x\neq+\sqrt{5}$ y por tanto existe la inversa. La calculamos.

Para $x=-3$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ -3 & 0 & -1\\ -6 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ -3 & 0 & -1\\ -6 & -1 & 0\end{vmatrix}=-(-3)^2+5=-4\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -3 & -6\\ 1 & 0 & -1\\ -3 & -1 & 0\end{pmatrix}}{-4}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -3 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-3 & -6\\ -1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -6\\ -3 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -3\\ -3 & -1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-3 & -6\\ 0 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -6\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ -6 & -18 & 10\\ 3 & -5 & 3\end{pmatrix}$$

Ejercicio B2

a) Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x-3y+z=0 \text{ y } \pi_2 \equiv 2x-y+3z-5=0$$

y que pasa por el punto $P(2,6,5)$.

b) Encontrar la distancia del primer plano a la recta obtenida.

a) Si la recta es paralela a los planos su vector director debe ser perpendicular al vector normal de cada uno de los planos. Por lo que el producto vectorial de los vectores normales de los planos será un vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x-3y+z=0 \to \vec{n_1}=(1,-3,1)\\ \pi_2 \equiv 2x-y+3z-5=0 \to \vec{n_2}=(2,-1,3)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v_r}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=-9i+2j-k+6k-3j+i=-8i-j+5k=(-8,-1,5)$$

Hallamos la ecuación de la recta con vector director $\vec{v_r}=(-8,-1,5)$ y que pasa por el punto $P(2,6,5)$. Esta es la recta pedida.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(-8,-1,5)\\ P(2,6,5)\in r\end{array}\right\} \Rightarrow r:\begin{cases}x=2-8t\\ y=6-t\\ z=5+5t\end{cases};\ t\in\mathbb{R}$$

b) Como la recta *r* hallada es paralela al plano π_1 la distancia de la recta al plano es la distancia de un punto cualquiera de la recta a dicho plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x-3y+z=0\\ P(2,6,5)\in r\end{array}\right\} \Rightarrow d(r,\pi_1)=d(P,\pi_1)=\frac{|2-3\cdot 6+5|}{\sqrt{1^1+(-3)^2+1^2}}=\frac{11}{\sqrt{11}}=\sqrt{11}\simeq 3.31u$$

Ejercicio B3

Dada la función $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$

a) Razonar la existencia de máximos y mínimos de la función. Si existen hallarlos.
b) ¿Para qué intervalos es creciente la función?
c) Hallar todas las asíntotas de la función.

a) Buscamos los puntos críticos de la función (candidatos a máximos o mínimos).

$$y=\frac{x^3+4}{x^2}\Rightarrow y'=\frac{3x^2\cdot x^2-2x\left(x^3+4\right)}{\left(x^2\right)^2}=\frac{3x^4-2x^4-8x}{x^4}=\frac{x^4-8x}{x^4}=\frac{x^3-8}{x^3}$$

$$y'=0\Rightarrow\frac{x^3-8}{x^3}=0\Rightarrow x^3-8=0\Rightarrow x^3=8\Rightarrow\boxed{x=\sqrt[3]{8}=2}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después del punto crítico $x=2$ y del valor excluido del dominio $x=0$.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ consideramos $x=-1$ y la derivada vale $y'=\dfrac{(-1)^3-8}{(-1)^3}=9>0$. La función crece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,2)$ consideramos $x=1$ y la derivada vale $y'=\dfrac{1^3-8}{1^3}=-7<0$. La función decrece en $(0,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ consideramos $x=3$ y la derivada vale $y'=\dfrac{3^3-8}{3^3}=\dfrac{19}{27}>0$. La función crece en $(2,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(0,2)$.

Como la función decrece antes de $x=2$ y crece después la función tiene un mínimo relativo en $x=2$.
Como $x=0$ no pertenece al dominio de la función entonces no tiene máximo relativo.

b) Por lo visto en el apartado anterior la función es creciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

c) **Asíntota vertical.** $x=a$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{0\}$. Comprobamos si la función tiene una asíntota vertical en $x=0$.

$$\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}\frac{x^3+4}{x^2}=\frac{0^3+4}{0^2}=\frac{4}{0}=\infty$$

La recta $x=0$ es una asíntota vertical de la función.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} + \frac{4}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x + \frac{4}{x^2} = \infty + \frac{4}{\infty} = \infty + 0 = \infty$$

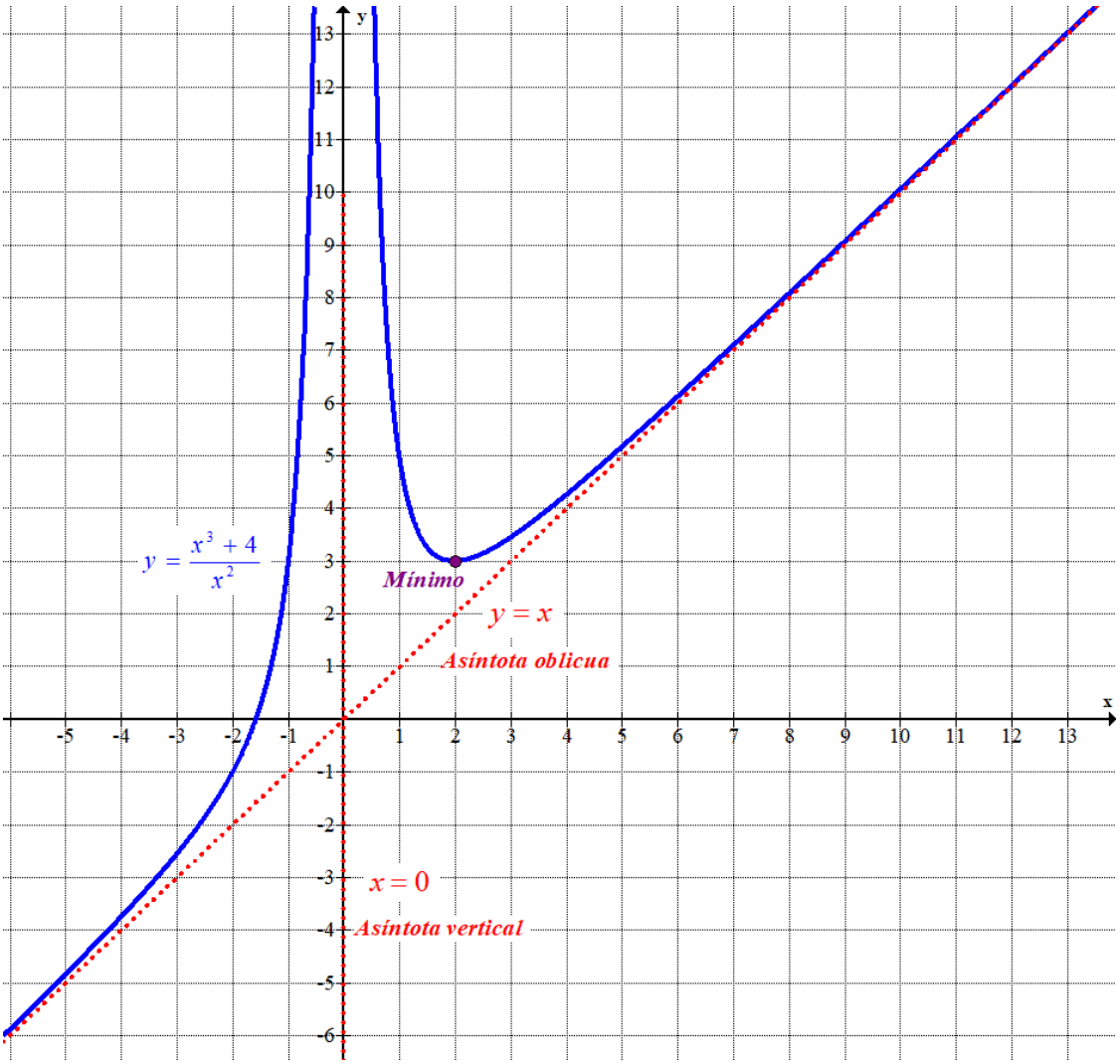
La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3} + \frac{4}{x^3} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{4}{x^3} = 1 + \frac{4}{\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4}{x^2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = \frac{4}{\infty} = 0$$

La recta $y = x$ es asíntota oblicua de la función.



Ejercicio B4

Calcular el área del recinto limitado por las siguientes parábolas, realizando un dibujo del mismo.

$$y=-x^2-10x, \qquad y=(x+4)^2$$

Hallamos los puntos de corte de las dos gráficas.

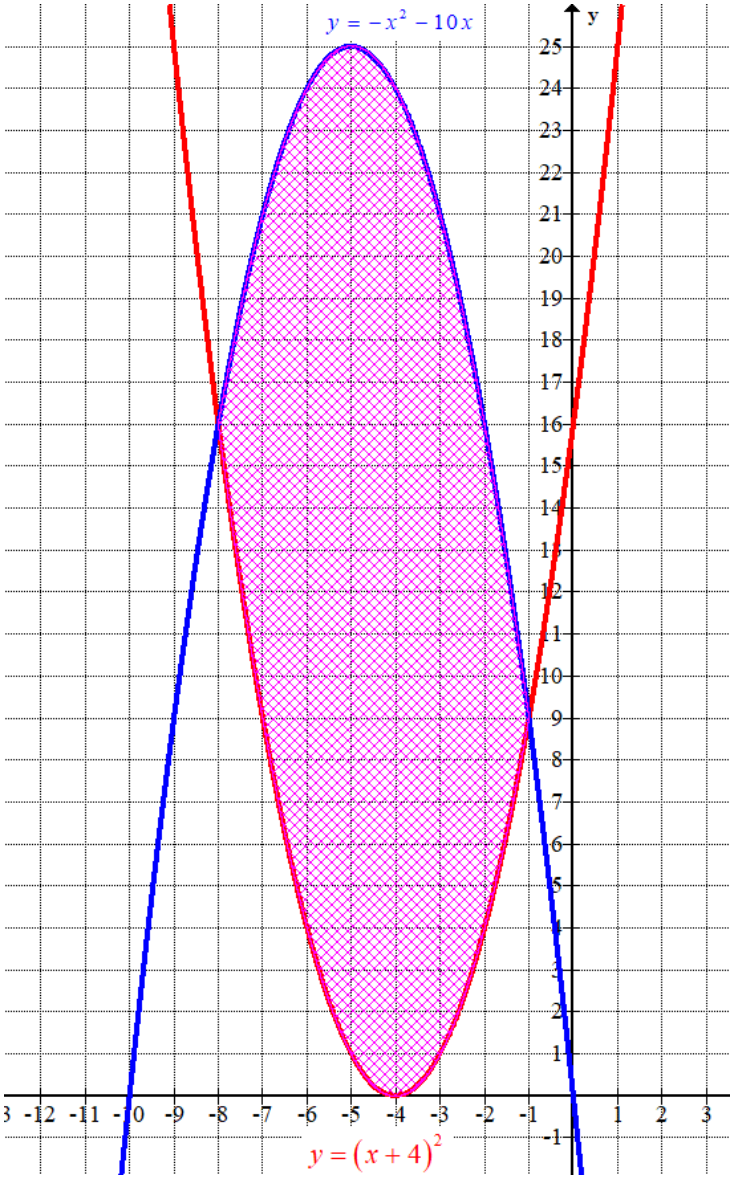
$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2-10x \\ y=(x+4)^2=x^2+8x+16 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+8x+16=-x^2-10x \Rightarrow 2x^2+18x+16=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+9x+8=0 \Rightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-32}}{2}=\frac{-9\pm 7}{2}=\begin{cases}\dfrac{-9+7}{2}=\boxed{-1=x} \\ \dfrac{-9-7}{2}=\boxed{-8=x}\end{cases}$$

Para dibujar la gráfica de las funciones entre –8 y –1 obtenemos una tabla de valores de cada una de ellas. También coloreamos la región delimitada por ambas gráficas.

x	$y=-x^2-10x$
–8	16
–6	24
–4	24
–1	9
0	0

x	$y=(x+4)^2$
–8	16
–6	4
–4	0
–1	9
0	16



Calculamos el área de la región del plano limitado por las dos gráficas como la integral definida entre –8 y –1 de la diferencia de las dos funciones.

$$Área = \int_{-8}^{-1} -x^2 - 10x - \left(x^2 + 8x + 16\right) dx = \int_{-8}^{-1} -x^2 - 10x - x^2 - 8x - 16 dx =$$

$$= \int_{-8}^{-1} -2x^2 - 18x - 16 dx = \left[\frac{-2x^3}{3} - 9x^2 - 16x\right]_{-8}^{-1} =$$

$$= \left[\frac{-2(-1)^3}{3} - 9(-1)^2 - 16(-1)\right] - \left[\frac{-2(-8)^3}{3} - 9(-8)^2 - 16(-8)\right] =$$

$$= \frac{2}{3} - 9 + 16 - \frac{1024}{3} + 576 - 128 = \boxed{\frac{343}{3} \simeq 114.33 u^2}$$

Ejercicio B5

Dado el número $N = 2^{2017} + 5^{2017} + 6^{2017}$ sea $Z = N^{2017}$.

Contestar razonadamente a la siguiente pregunta: ¿es Z múltiplo de 10?

Para que Z sea múltiplo de 10 debe de acabar en 0.

Buscamos una regularidad en la suma de las potencias sucesivas de 2, 5 y 6.

$$2^1 + 5^1 + 6^1 = 13$$

$$2^2 + 5^2 + 6^2 = 65$$

$$2^3 + 5^3 + 6^3 = 349$$

$$2^4 + 5^4 + 6^4 = 1937$$

$$2^5 + 5^5 + 6^5 = 10933$$

$$2^6 + 5^6 + 6^6 = 62345$$

$$2^7 + 5^7 + 6^7 = 358189$$

$$2^8 + 5^8 + 6^8 = 2070497$$

$$2^9 + 5^9 + 6^9 = 12031333$$

....

Observamos que la última cifra de las potencias sucesivas va acabando en 3, 5, 9 o 7.

Por lo que $N = 2^{2017} + 5^{2017} + 6^{2017}$ no acaba en 0 (acaba en 3).

$$\left.\begin{array}{l} 2017 \;\big|\; \underline{4} \\ 017 \quad 504 \\ \overline{001} \end{array}\right\} \Rightarrow N = 2^{2017} + 5^{2017} + 6^{2017} = ...3$$

Y por lo tanto $Z = N^{2017}$ tampoco va a acabar en 0, pues las potencias de un número que acaba en 3 acaban en 3, 9, 7 o 1, pero nunca en 0.

$$\left.\begin{array}{l} 3^1 = 3 \\ 3^2 = 9 \\ 3^3 = 27 \\ 3^4 = 81 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 3^5 = 243 \\ 3^6 = 729 \\ 3^7 = 2187 \\ 3^8 = 6561 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 3^9 = 19683 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{array}\right\}$$

EAU ordinaria 2017

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2017ko EKAINA

JUNIO 2017

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro *m*. (NO es necesario resolverlo)

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x + my + z &= 2 \\ 3x + y - mz &= 3 \end{aligned}$$

Ejercicio A2

Dado el punto $M(1,-3,7)$, obtener su simétrico respecto a la recta que pasa por los puntos $A(1,-3,4)$ y $B(0,-4,1)$.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 7$

a) Calcula A, B, y C sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es horizontal, que además la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y que corta al eje *OX* en $x = 1$.

b) Para los valores obtenidos calcula los máximos y los mínimos de la función.

Ejercicio A4

La curva $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo A(0,0), B(0, 2), C(4,2) , D(4, 0) en dos recintos.

a) Dibuja la gráfica de la función y el rectángulo ABCD.
b) Calcula el área de cada uno de los recintos.

Ejercicio A5

Calcular la potencia A^{2017} de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2017ko EKAINA

JUNIO 2017

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de *m* la matriz *A* posee inversa? Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro *m*.

b) Hallar el valor *m* para que se cumpla la igualdad $A^2=4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio B2

Calcula la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la recta $r\equiv\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{3}$ y que pasa por el punto $A(14,3,3)$.

Ejercicio B3

Dada la función $y=\frac{x}{1-x^2}$

a) ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Para qué intervalos es creciente?

b) Razonar si tiene máximos y mínimos. En caso afirmativo hallarlos.

c) Calcula la recta tangente a dicha curva en el punto cuya abscisa es $x=0$.

Ejercicio B4

Resolver la siguiente integral: $\int\frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}dx$

Ejercicio B5

Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos. Hay viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de viajeros abona el 80% y un tercer grupo abona el 50%. La recaudación del autobús fue de 46,56 euros.

Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros.

SOLUCIONES

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro *m*. (NO es necesario resolverlo)

$$\begin{aligned} 2x+y-z&=1\\ x+my+z&=2\\ 3x+y-mz&=3 \end{aligned}$$

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&m&1\\3&1&-m\end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$A/B=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&m&1&2\\3&1&-m&3\end{pmatrix}$.

Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&m&1\\3&1&-m\end{vmatrix}=-2m^2+3-1+3m+m-2=-2m^2+4m$$

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0\Rightarrow -2m^2+4m=0\Rightarrow -2m(m-2)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{m=0}\\ m-2=0\rightarrow\boxed{m=2}\end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m\neq 0$ y $m\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $m=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&0&1&2\\3&1&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow\{Fila\,2^a\leftrightarrow Fila\,1^a\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&2\\2&1&-1&1\\3&1&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^a-3\cdot Fila\,1^a\\ \begin{array}{cccc}3&1&0&3\\-3&0&-3&-6\end{array}\\ \hline \begin{array}{cccc}0&1&-3&-3\end{array}\rightarrow Nueva\ Fila\,3^a\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}Fila\,2^a-2\cdot Fila\,1^a\\ \begin{array}{cccc}2&1&-1&1\\-2&0&-2&-4\end{array}\\ \hline \begin{array}{cccc}0&1&-3&-3\end{array}\rightarrow Nueva\ Fila\,2^a\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-3&-3\\0&1&-3&-3\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}Fila\,3^a-Fila\,2^a\\0&1&-3&-3\\0&-1&3&3\\\hline 0&0&0&0\end{matrix}\rightarrow Nueva\ Fila\,3^a\right\}\Rightarrow\left(\begin{matrix}\overbrace{1&0&1}^{A}&\overbrace{2}^{B}\\0&1&-3&-3\\\underbrace{0&0&0}_{A}&0\end{matrix}\right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B y menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

CASO 3. $m=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&2&1&2\\3&1&-2&3\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{Fila\,2^a\leftrightarrow Fila\,1^a\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&-1&1\\3&1&-2&3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}Fila\,3^a-3\cdot Fila\,1^a\\3&1&-2&3\\-3&-6&-3&-6\\\hline 0&-5&-5&-3\end{matrix}\rightarrow Nueva\ Fila\,3^a\right\}\left\{\begin{matrix}Fila\,2^a-2\cdot Fila\,1^a\\2&1&-1&1\\-2&-4&-2&-4\\\hline 0&-3&-3&-3\end{matrix}\rightarrow Nueva\ Fila\,2^a\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&-3&-3&-3\\0&-5&-5&-3\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}3\cdot Fila\,3^a-5\cdot Fila\,2^a\\0&-15&-15&-9\\0&15&15&15\\\hline 0&0&0&6\end{matrix}\rightarrow Nueva\ Fila\,3^a\right\}\Rightarrow\left(\begin{matrix}\overbrace{1&2&1}^{A}&\overbrace{2}^{B}\\0&-3&-3&-3\\\underbrace{0&0&0}_{A}&6\end{matrix}\right)$$

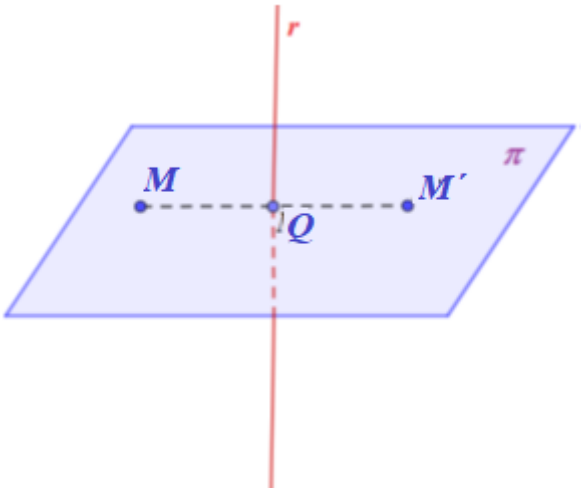
El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

Resumiendo: Para $m\neq 0$ y $m\neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $m=2$ es incompatible (sin solución) y para $m=0$ es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Ejercicio A2

Dado el punto $M(1,-3,7)$, obtener su simétrico respecto a la recta que pasa por los puntos $A(1,-3,4)$ y $B(0,-4,1)$.

Vamos a determinar las coordenadas del punto M´ simétrico de M respecto de la recta *r* que pasa por los puntos $A(1,-3,4)$ y $B(0,-4,1)$ calculando previamente el plano π perpendicular a la recta que pasa por M, después el punto Q de corte de recta y plano. Por último, hallamos el punto M´ sumándole al punto Q el vector $\overrightarrow{MQ}$ ya que Q es el punto medio del segmento $\overline{MM'}$.



Hallamos la ecuación del plano π. Su vector normal es el vector director de la recta $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{matrix}A(1,-3,4)\\B(0,-4,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \vec{v_r}=\overrightarrow{AB}=(0,-4,1)-(1,-3,4)=(-1,-1,-3)$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{n}=\vec{v_r}=(-1,-1,-3)\\M(1,-3,7)\in\pi\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\pi\equiv -x-y-3z+D=0\\M(1,-3,7)\in\pi\end{matrix}\right\}\Rightarrow -1+3-21+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=19\Rightarrow \pi\equiv -x-y-3z+19=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv x+y+3z-19=0}$$

Hallamos el punto Q de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{matrix}\vec{v_r}=\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-3)\\B(0,-4,1)\in r\end{matrix}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=-\lambda\\y=-4-\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\z=1-3\lambda\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\pi\equiv x+y+3z-19=0\\r:\begin{cases}x=-\lambda\\y=-4-\lambda\\z=1-3\lambda\end{cases}\end{matrix}\right\}\Rightarrow -\lambda-4-\lambda+3-9\lambda-19=0\Rightarrow -11\lambda-20=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\lambda = -20 \Rightarrow \lambda = \frac{-20}{11} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{20}{11} \\ y = -4 + \dfrac{20}{11} = \dfrac{-24}{11} \Rightarrow Q\left(\dfrac{20}{11}, \dfrac{-24}{11}, \dfrac{71}{11}\right) \\ z = 1 - 3\dfrac{-20}{11} = \dfrac{71}{11} \end{cases}$$

Hallamos las coordenadas del punto M´.

$$\overrightarrow{MQ} = \left(\frac{20}{11}, \frac{-24}{11}, \frac{71}{11}\right) - (1, -3, 7) = \left(\frac{9}{11}, \frac{9}{11}, \frac{-6}{11}\right)$$

$$M' = Q + \overrightarrow{MQ} = \left(\frac{20}{11}, \frac{-24}{11}, \frac{71}{11}\right) + \left(\frac{9}{11}, \frac{9}{11}, \frac{-6}{11}\right) = \left(\frac{29}{11}, \frac{-15}{11}, \frac{65}{11}\right)$$

El punto M´ simétrico de M respecto de la recta *r* tiene coordenadas $M'\left(\frac{29}{11}, \frac{-15}{11}, \frac{65}{11}\right)$.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x)=x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+7$

a) Calcula A, B, y C sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa $x=0$ es horizontal, que además la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x=2$ y que corta al eje *OX* en $x=1$.

b) Para los valores obtenidos calcula los máximos y los mínimos de la función.

a) Si la recta tangente en el punto de abscisa $x=0$ es horizontal significa que la pendiente de la recta vale 0 y por tanto la derivada de la función en $x=0$ vale 0 → $f'(0)=0$.

$$\left.\begin{matrix} f'(x)=4x^3+3Ax^2+2Bx+C \\ f'(0)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0=4\cdot 0^3+3A\cdot 0^2+2B\cdot 0+C \Rightarrow \boxed{C=0}$$

La función queda $f(x)=x^4+Ax^3+Bx^2+7$.

La función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x=2$ → $f'(2)=0$.

La función corta al eje *OX* en $x=1$ → $f(1)=0$.

$$\left.\begin{matrix} f'(2)=0 \\ f'(x)=4x^3+3Ax^2+2Bx \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0=4\cdot 2^3+3A\cdot 2^2+2B\cdot 2 \Rightarrow 0=32+12A+4B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=8+3A+B \Rightarrow \boxed{3A+B=-8}$$

$$\left.\begin{matrix} f(1)=0 \\ f(x)=x^4+Ax^3+Bx^2+7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0=1^4+A\cdot 1^3+B\cdot 1^2+7 \Rightarrow 0=1+A+B+7 \Rightarrow \boxed{A+B=-8}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix} 3A+B=-8 \\ A+B=-8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3A+B=-8 \\ B=-8-A \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3A-8-A=-8 \Rightarrow 2A=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A=0} \Rightarrow \boxed{B=-8+0=-8}$$

Los valores buscados son $A=0$ y $B=-8$.

b) Para los valores obtenidos la función queda $f(x)=x^4-8x^2+7$.

Hallamos los puntos críticos de la función.

$$\left.\begin{matrix} f(x)=x^4-8x^2+7 \rightarrow f'(x)=4x^3-16x \\ f'(x)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4x^3-16x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2} \end{cases}$$

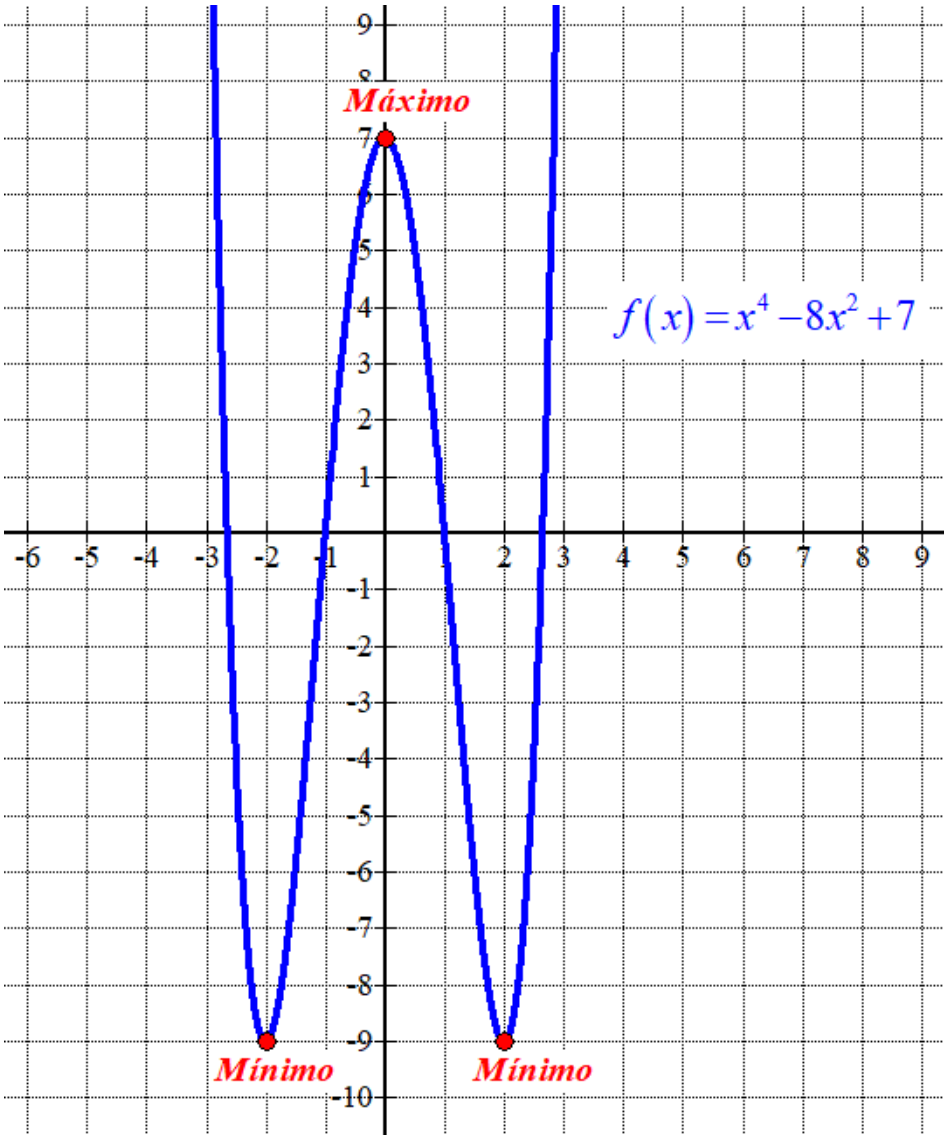
Sustituimos estos valores obtenidos en la segunda derivada.

$$f'(x)=4x^3-16x \Rightarrow f''(x)=12x^2-16 \Rightarrow \begin{cases} f''(-2)=12(-2)^2-16=32>0 \\ f''(0)=12\cdot 0^2-16=-16<0 \\ f''(2)=12\cdot 2^2-16=32>0 \end{cases}$$

La función presenta dos mínimos relativos: uno en $x=-2$ y otro en $x=2$ y un máximo relativo en $x=0$.

$$f(-2)=(-2)^4-8(-2)^2+7=-9 \qquad f(2)=2^4-8\cdot 2^2+7=-9 \qquad f(0)=0^4-8\cdot 0^2+7=7$$

Los mínimos relativos tienen coordenadas (–2, –9) y (2, –9). El máximo relativo tiene coordenadas (0, 7).



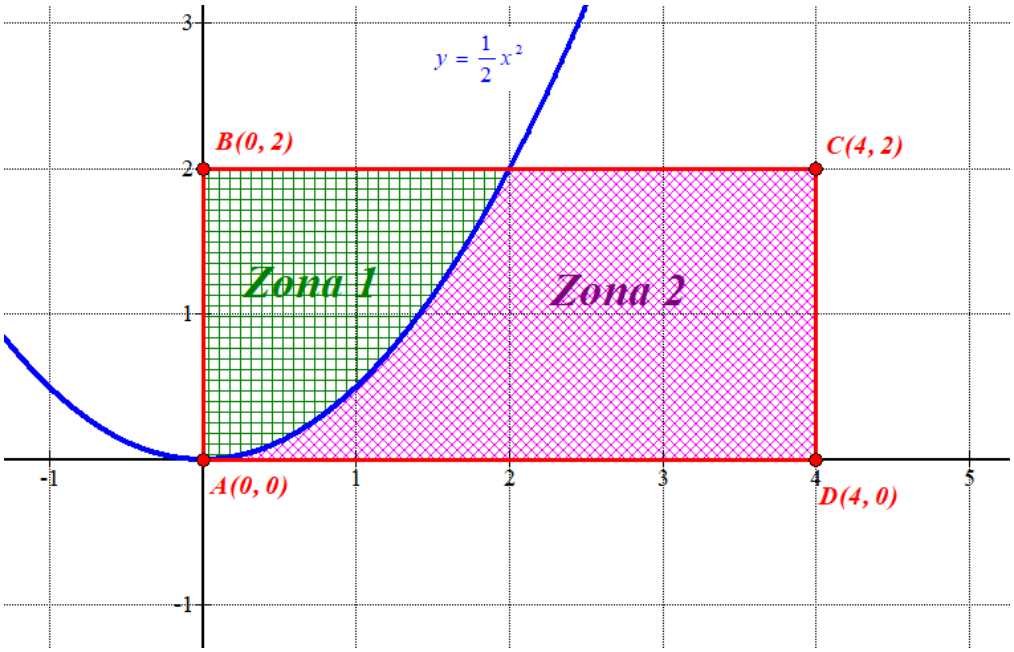
Ejercicio A4

La curva $y=\frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo A(0,0), B(0, 2), C(4,2) , D(4, 0) en dos recintos.

a) Dibuja la gráfica de la función y el rectángulo ABCD.
b) Calcula el área de cada uno de los recintos.

a) Dibujamos el rectángulo ABCD y la parábola $y=\frac{1}{2}x^2$. Coloreamos de un color diferente cada uno de los trozos en que la parábola divide al rectángulo.

x	$y=\frac{1}{2}x^2$
–2	2
0	0
2	2



b) El área de la zona 1 es el valor de la integral definida de 0 a 2 de la diferencia entre la recta horizontal $y=2$ y la curva $y=\frac{1}{2}x^2$.

$$Área 1=\int_0^2 2-\frac{1}{2}x^2dx=\left[2x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\left[2\cdot 2-\frac{2^3}{6}\right]-\left[2\cdot 0-\frac{0^3}{6}\right]=4-\frac{8}{6}=\boxed{\frac{8}{3}\simeq 2.667u^2}$$

El área de la zona 2 es la diferencia entre el área del rectángulo y el área de la zona 1.

$$Área\ rectángulo=4\cdot 2=8u^2$$

$$Área\ 2=8-\frac{8}{3}=\boxed{\frac{16}{3}\simeq 5.333u^2}$$

Ejercicio A5

Calcular la potencia A^{2017} de la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculamos las primeras potencias de la matriz A en busca de alguna regularidad.

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-Id$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=-A$$

$$A^4=A^3A=-AA=-A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=Id$$

Como $A^4=Id$ dividimos 2017 entre 4.

$$\begin{array}{r|l} 2017 & 4 \\ \hline -20 & 504 \\ \hline 17 & \\ \underline{-16} & \\ \boxed{1} & \end{array}$$

Por lo que 2017 = 504 · 4 + 1. Calculamos A^{2017}.

$$A^{2017}=A^{504\cdot 4+1}=\left(A^4\right)^{504}\cdot A^1=\left(Id\right)^{504}\cdot A=Id\cdot A=A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio B1

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de *m* la matriz *A* posee inversa? Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro *m*.

b) Hallar el valor *m* para que se cumpla la igualdad $A^2=4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudiamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix}=-2m^2+0+0-0-0-0=-2m^2$$

$$|A|=0\Rightarrow -2m^2=0\Rightarrow \boxed{m=0}$$

Si $m\neq 0$ el determinante de A es no nulo, existe la inversa de A y su rango es 3.

Si $m=0$ el determinante de A es nulo y no existe la inversa de A.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Observamos que tiene dos columnas nulas, por lo que el rango de A es 1.

b) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$A^2=4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} m^2 & -2m+4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2+m & m^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} m^2=4\rightarrow m=\sqrt{4}=\pm 2 \\ -2m+4=0\rightarrow m=2 \\ -2+m=0\rightarrow m=2 \end{cases}\Rightarrow \boxed{m=2}$$

El único valor para el que se cumple lo pedido es $m=2$.

Ejercicio B2

Calcula la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3}$ y que pasa por el punto $A(14,3,3)$.

Necesitamos encontrar el punto B de la recta *r* tal que el vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a la recta, es decir, tal que el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{v_r}$ sea cero.

Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r \equiv \frac{x-0}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2,-2,3) \\ P_r(0,3,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3-2\lambda \\ z = 1+3\lambda \end{cases}$$

Un punto B de la recta *r* tiene coordenadas $B(2\lambda, 3-2\lambda, 1+3\lambda)$.

Hallamos el valor de λ que hace que se cumpla $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0$

$$\left.\begin{matrix} A(14,3,3) \\ B(2\lambda,3-2\lambda,1+3\lambda) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2\lambda,3-2\lambda,1+3\lambda) - (14,3,3) = (2\lambda-14,-2\lambda,3\lambda-2)$$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r} = (2,-2,3) \\ \overrightarrow{AB} = (2\lambda-14,-2\lambda,3\lambda-2) \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (2\lambda-14,-2\lambda,3\lambda-2)(2,-2,3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\lambda - 28 + 4\lambda + 9\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 17\lambda - 34 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

Para $\lambda = 2$ el punto es $B(4,-1,7)$.

La recta pedida será la recta *s* que pasa por los puntos A y B. Hallamos su ecuación.

$$\left.\begin{matrix} B(4,-1,7) \in s \\ A(14,3,3) \in s \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{AB} = (14,3,3) - (4,-1,7) = (10,4,-4)$$

$$\left.\begin{matrix} A(14,3,3) \in s \\ \overrightarrow{u_s} = (10,4,-4) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{s : \frac{x-14}{10} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{-4}}$$

La ecuación de la recta *s* que corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3}$ y que pasa por el punto $A(14,3,3)$ es $s : \frac{x-14}{10} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{-4}$.

Ejercicio B3

Dada la función $y=\dfrac{x}{1-x^2}$

a) ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Para qué intervalos es creciente?
b) Razonar si tiene máximos y mínimos. En caso afirmativo hallarlos.
c) Calcula la recta tangente a dicha curva en el punto cuya abscisa es $x=0$.

a) El dominio de la función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{1}=\pm 1}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función haciendo uso de la derivada.

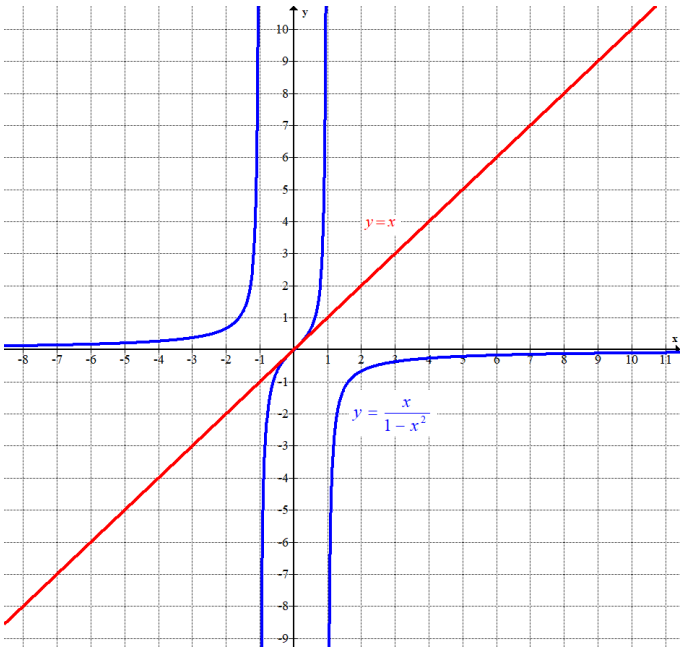
$$y=\frac{x}{1-x^2}\Rightarrow y'=\frac{1\cdot(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

Esta expresión de la derivada siempre es positiva. La función es creciente en todo su dominio: $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

b) La función no tiene máximos ni mínimos pues siempre es creciente.

c) La ecuación de la recta tangente a la curva en $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

$$\left.\begin{array}{l} y-f(0)=f'(0)(x-0) \\ f(0)=\dfrac{0}{1-0^2}=0 \\ f'(0)=\dfrac{1+0^2}{(1-0^2)^2}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow y-0=1(x-0)\Rightarrow \boxed{y=x}$$



Ejercicio B4

Resolver la siguiente integral: $\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}dx$

Utilizamos el método de integración por descomposición en fracciones simples.

Descomponemos la fracción $\frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}$ en suma de fracciones más sencillas.

$$x^3-2x^2+x=0 \Rightarrow x\left(x^2-2x+1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4}}{2}=1 \end{cases}$$

$$\frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}=\frac{x^2+5}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2} \Rightarrow \frac{x^2+5}{x(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow x^2+5=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow \boxed{5=A} \\ x=1 \rightarrow \boxed{6=C} \\ x=2 \rightarrow 9=A+2B+2C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9=5+2B+12 \Rightarrow 9-17=2B \Rightarrow \boxed{B=\frac{-8}{2}=-4}$$

Hemos obtenido que $\frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}=\frac{5}{x}-\frac{4}{x-1}+\frac{6}{(x-1)^2}$.

Utilizamos la descomposición obtenida para calcular la integral.

$$\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}dx=\int \frac{5}{x}-\frac{4}{x-1}+\frac{6}{(x-1)^2}dx=\int \frac{5}{x}dx-\int \frac{4}{x-1}dx+\int \frac{6}{(x-1)^2}dx=$$

$$=5\int \frac{1}{x}dx-4\int \frac{1}{x-1}dx+6\int (x-1)^{-2}dx=5\ln x-4\ln(x-1)+6\frac{(x-1)^{-1}}{-1}=$$

$$=\boxed{5\ln x-4\ln(x-1)-\frac{6}{x-1}+K}$$

Ejercicio B5

Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos. Hay viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de viajeros abona el 80% y un tercer grupo abona el 50%. La recaudación del autobús fue de 46,56 euros.

Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros.

Llamamos "x" al número de viajeros que pagan el billete entero, "y" al número de viajeros que pagan el 80% y "z" al número de viajeros que pagan el 50%.

Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos → $x+y+z=60$.

Hay "x" viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de "y" viajeros abona el 80% ($0.8\cdot 1.2=0.96$ €) y un tercer grupo de "z" viajeros abona el 50% ($0.5\cdot 1.2=0.6$ €). La recaudación del autobús fue de 46,56 € → $1.2x+0.96y+0.6z=46.56$.

El número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros → $z=2(x+y)$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ 1.2x+0.96y+0.6z=46.56 \\ z=2(x+y)=2x+2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+2x+2y=60 \\ 1.2x+0.96y+0.6(2x+2y)=46.56 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+3y=60 \\ 1.2x+0.96y+1.2x+1.2y=46.56 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=20 \\ 2.4x+2.16y=46.56 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=20-x \\ 2.4x+2.16y=46.56 \end{array}\right\} \Rightarrow 2.4x+2.16(20-x)=46.56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.4x+43.2-2.16x=46.56 \Rightarrow 0.24x=3.36 \Rightarrow \boxed{x=\frac{3.36}{0.24}=14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=20-14=6} \Rightarrow \boxed{z=28+12=40}$$

De los 60 viajeros 14 pagan el billete entero, 6 pagan el 80% y los 40 restantes pagan el 50%.