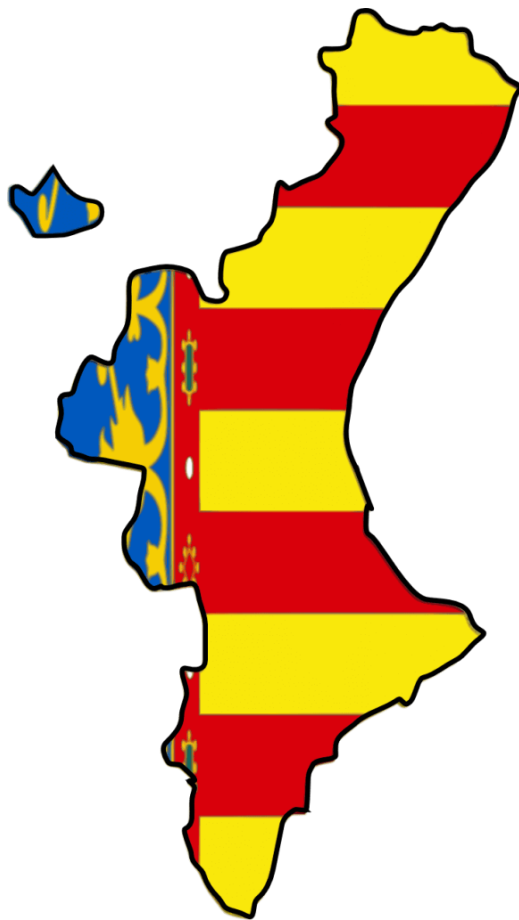


MATEMÁTICAS II

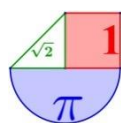
PAU

COMUNIDAD VALENCIANA

2017 a 2026



(24 exámenes resueltos)



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM
WWW.MATEMATICASPAU.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas PAU de la Comunidad Valenciana desde el año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU Julio 2026 Matemáticas II	3
PAU Julio Reserva 2026 Matemáticas II.....	21
PAU Junio 2026 Matemáticas II	41
PAU Junio Reserva 2026 Matemáticas II.....	61
PAU Julio 2025 Matemáticas II	82
PAU Julio 2025 Reserva Matemáticas II.....	101
PAU Junio 2025 Matemáticas II	119
PAU Junio 2025 Reserva Matemáticas II.....	136
PAU Julio 2024 Matemáticas II	153
PAU Junio 2024 Matemáticas II	168
PAU Julio 2023 Matemáticas II	184
PAU Junio 2023 Matemáticas II	198
PAU Julio 2022 Matemáticas II	214
PAU Junio 2022 Matemáticas II	227
PAU Julio 2021 Matemáticas II	241
PAU Junio 2021 Matemáticas II	255
PAU Septiembre 2020 Matemáticas II	272
PAU Julio 2020 Matemáticas II	287
PAU Julio 2019 Matemáticas II	300
PAU Junio 2019 Matemáticas II	313
PAU Julio 2018 Matemáticas II	331
PAU Junio 2018 Matemáticas II	343
PAU Julio 2017 Matemáticas II	355
PAU Junio 2017 Matemáticas II	368

PAU Julio 2026 Matemáticas II



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: EXTRAORDINÀRIA 2026	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA 2026
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos. La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán -0,10 puntos hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Rafa y Roger son dos tenistas que se han enfrentado a lo largo de sus carreras profesionales en tres tipos superficies: hierba, tierra batida y pista dura. El 10% de los partidos se jugaron en hierba y el 40% en tierra batida. Por otra parte, Rafa ganó el 25% de los partidos jugados en hierba, mientras que Roger ganó el 12.5% de los jugados en tierra batida y el 55% en pista dura. Se pide:

Responda a todos los apartados

- 1.1 (0.75 puntos)** Entre todos sus enfrentamientos, ¿cuál es el porcentaje de partidos que ha ganado Roger?
- 1.2 (0.75 puntos)** Si un partido fue ganado por Rafa, ¿cuál es la probabilidad de que se jugara en pista dura?
- 1.3 (1 punto)** Si tomamos una muestra de 10 partidos jugados en pista dura, ¿cuál es la probabilidad de que Roger haya ganado 5 o 6 partidos?

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 Mediante un proceso de mezclado continuo en tres tanques interconectados, una planta química produce tres compuestos, X, Y, Z, ligados a unos valores reales x , y , z , respectivamente, llamados pseudodensidades. Las pseudodensidades en los tanques deben estar en equilibrio para mantener la concentración deseada de los productos. Los ingenieros del proceso han establecido las siguientes condiciones de equilibrio:

- **Tanque 1:** La suma de la pseudodensidad x , más el triple de la pseudodensidad y , más la pseudodensidad z ha de valer 5.
- **Tanque 2:** La suma de α veces la pseudodensidad x , más el doble de la pseudodensidad z debe anularse, donde α es el factor catalizador.
- **Tanque 3:** La pseudodensidad z ha de ser α veces la pseudodensidad y .

Se pide:

- 2.1.1 (1.25 punto)** Estudiar la existencia y el número de soluciones x , y , z (las posibles configuraciones de equilibrio) en función de los valores del factor catalizador α .
- 2.1.2 (1.25 puntos)** Cuando el factor catalizador satisface $\alpha \neq -1$, el proceso alcanza estados de equilibrio factibles. En este caso, calcular, si existen, los valores x , y , z , en función del valor α .

2.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y el vector $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

2.2.1 (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones $Ax = Bx + b$.

2.2.2 (0.75 puntos) Hallar el valor de $\det(A^5(2B)^{-1})$.

2.2.3 (0.75 puntos) Calcular los valores de α y β , si existen, que satisfacen $\alpha A + \beta B = I$, siendo I la matriz identidad.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Se consideran los puntos del espacio $A(0,-1,0)$ y $B(1,0,1)$, y el vector $v=(2,-1,1)$. Se pide:

3.1.1 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación del plano π que es perpendicular a v y pasa por A .

3.1.2 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por B .

3.1.3 (0.75 puntos) Encontrar el punto C del plano π que está más cerca de B .

3.1.4 (0.25 puntos) Calcular la distancia del punto B al plano π .

3.2 Dado el plano $\pi: 2x + 3y - z = 0$ y los puntos $A(0,0,0)$, $B(10,0,-20)$, $C(0,15,-30)$ y $D(1,2,-1)$, se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Estudiar si el triángulo ABC está contenido en el plano π .

3.2.2 (1 punto) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C .

3.2.3 (1 punto) Calcular la distancia del punto D al plano π .

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Un brote de gripe se propaga a lo largo de unos días. El coeficiente de gravedad de la gripe t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ cuya derivada es $F'(t) = t^2(10-t)$.

Se pide:

4.1.1 (1.25 puntos) Calcular la función $F(t)$ sabiendo que en $t = 0$ el coeficiente de gravedad es 6.

4.1.2 (1.25 puntos) Calcular cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el valor máximo del coeficiente y cuál es dicho número.

4.2 Un arquitecto está diseñando un pequeño invernadero para un jardín. El suelo del invernadero tiene forma de triángulo para maximizar la eficiencia y la captación de luz. El perímetro total del invernadero está fijado en 60 metros para cumplir con las restricciones medioambientales de la zona, uno de los lados del triángulo mide x metros y los otros dos lados tienen la misma longitud. Se pide:

4.2.1 (1 punto) Deducir la expresión de la función $A(x)$ que representa el área del suelo del invernadero.

4.2.2 (1.5 puntos) El arquitecto define una función de eficiencia estructural, $f(x)$, que se calcula como el cuadrado del área del suelo del invernadero. Obtener el valor de x para el que la eficiencia estructural es máxima y hallar el área en este caso.

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
Tabla de la distribución binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
11	0		0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1		0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0751	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2		0,9998	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3		1,0000	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4		1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5		1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0		0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0317	0,0138	0,0077	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1		0,9938	0,8816	0,6590	0,2749	0,1584	0,0850	0,0540	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032
	2		0,9998	0,9804	0,8891	0,5583	0,3907	0,2528	0,1811	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193
	3		1,0000	0,9978	0,9744	0,7946	0,6488	0,4925	0,3931	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730
	4		1,0000	0,9998	0,9957	0,9274	0,8424	0,7237	0,6315	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938
	5		1,0000	1,0000	0,9995	0,9806	0,9456	0,8822	0,8223	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9961	0,9857	0,9614	0,9336	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9972	0,9905	0,9812	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9961	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
13	0		0,8775	0,5133	0,2542	0,0550	0,0238	0,0097	0,0051	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1		0,9928	0,8646	0,6213	0,2336	0,1267	0,0637	0,0385	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017
	2		0,9997	0,9755	0,8661	0,5017	0,3326	0,2025	0,1387	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112
	3		1,0000	0,9969	0,9658	0,7473	0,5843	0,4206	0,3224	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461
	4		1,0000	0,9997	0,9935	0,9009	0,7940	0,6543	0,5520	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334
	5		1,0000	1,0000	0,9991	0,9700	0,9198	0,8346	0,7587	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9930	0,9757	0,9376	0,8965	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9944	0,9818	0,9653	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9912	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9984	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	13		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Rafa y Roger son dos tenistas que se han enfrentado a lo largo de sus carreras profesionales en tres tipos superficies: hierba, tierra batida y pista dura. El 10% de los partidos se jugaron en hierba y el 40% en tierra batida. Por otra parte, Rafa ganó el 25% de los partidos jugados en hierba, mientras que Roger ganó el 12.5% de los jugados en tierra batida y el 55% en pista dura. Se pide:

Responda a todos los apartados

1.1 (0.75 puntos) Entre todos sus enfrentamientos, ¿cuál es el porcentaje de partidos que ha ganado Roger?

1.2 (0.75 puntos) Si un partido fue ganado por Rafa, ¿cuál es la probabilidad de que se jugara en pista dura?

1.3 (1 punto) Si tomamos una muestra de 10 partidos jugados en pista dura, ¿cuál es la probabilidad de que Roger haya ganado 5 o 6 partidos?

Supongamos que se enfrentaron en 1000 partidos. El 10% de los partidos se jugaron en hierba ($0.10 \cdot 1000 = 100$ se jugaron en hierba), el 40% en tierra batida ($0.40 \cdot 1000 = 400$ se jugaron en tierra batida) y el resto en pista dura ($1000 - 100 - 400 = 500$ se jugaron en pista dura).

Rafa ganó el 25% de los partidos jugados en hierba $\rightarrow$ Rafa ganó $0.25 \cdot 100 = 25$ partidos de los jugados en hierba.

Roger ganó el 12.5% de los jugados en tierra batida $\rightarrow$ Roger ganó $0.125 \cdot 400 = 50$ partidos de los jugados en tierra batida.

Roger ganó el 55% en pista dura $\rightarrow$ Roger ganó $0.55 \cdot 500 = 275$ partidos de los jugados en pista dura.

Ponemos estos datos en una tabla.

	Gana Rafa	Gana Roger	
Hierba	25		100
Tierra batida		50	400
Pista dura		275	500
TOTALES			1000

Completamos la tabla.

	Gana Rafa	Gana Roger	
Hierba	25	75	100
Tierra batida	350	50	400
Pista dura	225	275	500
TOTALES	600	400	1000

1.1 Teniendo en cuenta todos los enfrentamientos Roger ha ganado 400 de los 1000 partidos. La proporción de partidos ganados es $\frac{400}{1000} = 0.40$.

Roger ha ganado el 40 % de los enfrentamientos.

1.2 Rafa ha ganado 600 partidos y 225 en pista dura. La probabilidad de que se jugara en pista dura un partido que fue ganado por Rafa vale $\frac{225}{600} = 0.375$.

1.3 Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de partidos en pista dura ganados por Roger de un grupo de 10.

Esta variable es una binomial donde n = número de repeticiones = 10 y p = probabilidad de que Roger gane un partido a Rafa en pista dura = 0.55. $X = B(10, 0.55)$.

Como esta binomial no aparece en la tabla proporcionada cambiamos a la variable aleatoria Y que cuenta el número de partidos en pista dura ganados por Rafa de un grupo de 10.

Esta variable es una binomial donde n = número de repeticiones = 10 y p = probabilidad de que Rafa gane un partido a Roger en pista dura = $1 - 0.55 = 0.45$. $Y = B(10, 0.45)$.

Debemos calcular $P(X = 5) + P(X = 6) = P(Y = 5) + P(Y = 4)$.

Como $P(Y = 5) + P(Y = 4) = P(Y \leq 5) - P(Y \leq 3)$ si miramos en la tabla encontramos que esta probabilidad vale $0.7384 - 0.2660 = 0.4724$.

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0906
	3		1,0000	0,9999	0,9872	0,9791	0,9759	0,9696	0,9593	0,9438	0,9223	0,2660
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,8851	0,8338	0,7384

2.1 Mediante un proceso de mezclado continuo en tres tanques interconectados, una planta química produce tres compuestos, X, Y, Z, ligados a unos valores reales x, y, z , respectivamente, llamados pseudodensidades. Las pseudodensidades en los tanques deben estar en equilibrio para mantener la concentración deseada de los productos. Los ingenieros del proceso han establecido las siguientes condiciones de equilibrio:

- **Tanque 1:** La suma de la pseudodensidad x , más el triple de la pseudodensidad y , más la pseudodensidad z ha de valer 5.
- **Tanque 2:** La suma de α veces la pseudodensidad x , más el doble de la pseudodensidad z debe anularse, donde α es el factor catalizador.
- **Tanque 3:** La pseudodensidad z ha de ser α veces la pseudodensidad y .

Se pide:

2.1.1 (1.25 punto) Estudiar la existencia y el número de soluciones x, y, z (las posibles configuraciones de equilibrio) en función de los valores del factor catalizador α .

2.1.2 (1.25 puntos) Cuando el factor catalizador satisface $\alpha \neq -1$, el proceso alcanza estados de equilibrio factibles. En este caso, calcular, si existen, los valores x, y, z , en función del valor α .

2.1.1 Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada.

Tanque 1: La suma de la pseudodensidad x , más el triple de la pseudodensidad y , más la pseudodensidad z ha de valer 5 $\rightarrow x + 3y + z = 5$.

Tanque 2: La suma de α veces la pseudodensidad x , más el doble de la pseudodensidad z debe anularse, donde α es el factor catalizador $\rightarrow \alpha x + 2z = 0$.

Tanque 3: La pseudodensidad z ha de ser α veces la pseudodensidad $y \rightarrow z = \alpha y$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + 2z = 0 \\ z = \alpha y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + 2z = 0 \\ \alpha y - z = 0 \end{array} \right\}$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes del sistema y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando la matriz A tiene determinante nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + \alpha^2 - 0 + 3\alpha - 2\alpha = \alpha^2 + \alpha = \alpha(\alpha + 1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = 0} \\ o \\ \alpha + 1 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = -1} \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, el rango de la matriz ampliada también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $\alpha = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila segunda y tercera son

proporcionales. Consideramos el menor que resulta de quitar la primera columna y la fila tercera y calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 \neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Observamos que la columna cuarta, la

primera y la segunda son proporcionales.

El rango de la matriz ampliada es 2. Los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $\alpha = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor que resulta de quitar la fila y

columna primeras y calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que

resulta de quitar la primera columna y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 + 10 - 0 - 0 = 10 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3, distinto del rango de A que es 2.

El sistema es incompatible (sin solución).

Conclusión: Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $\alpha = -1$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $\alpha = 0$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

2.1.2 Para $\alpha \neq -1$ el sistema es compatible.

Si $\alpha = 0$ el sistema es compatible indeterminado. Hallamos sus soluciones.

$$\left. \begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ 2z=0 \\ \boxed{z=0} \end{array} \right\} \Rightarrow x+3y=5 \Rightarrow \boxed{x=5-3y} \Rightarrow \begin{cases} x=5-3t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Si $\alpha = 0$ las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x=5-3t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Obtenemos su solución.

$$\left. \begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ \alpha x+2z=0 \\ z=\alpha y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+3y+\alpha y=5 \\ \alpha x+2\alpha y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+(3+\alpha)y=5 \\ \alpha x+2\alpha y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \{\alpha \neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+(3+\alpha)y=5 \\ x+2y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+(3+\alpha)y=5 \\ x=-2y \end{array} \right\} \Rightarrow -2y+(3+\alpha)y=5 \Rightarrow (\alpha+1)y=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\alpha \neq -1\} \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{1+\alpha}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = -2 \frac{5}{1+\alpha} = \frac{-10}{1+\alpha}} \\ \boxed{z = \alpha \frac{5}{1+\alpha} = \frac{5\alpha}{1+\alpha}} \end{cases}$$

Para $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$ la solución es $x = \frac{-10}{1+\alpha}$, $y = \frac{5}{1+\alpha}$, $z = \frac{5\alpha}{1+\alpha}$.

2.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y el vector $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

2.2.1 (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones $Ax = Bx + b$.

2.2.2 (0.75 puntos) Hallar el valor de $\det(A^5 (2B)^{-1})$.

2.2.3 (0.75 puntos) Calcular los valores de α y β , si existen, que satisfacen $\alpha A + \beta B = I$, siendo I la matriz identidad.

2.2.1 Despejamos la matriz x en la ecuación matricial.

$$Ax = Bx + b \Rightarrow Ax - Bx = b \Rightarrow (A - B)x = b \Rightarrow x = (A - B)^{-1}b$$

Hallamos la inversa de la matriz $A - B$.

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A - B| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7 \neq 0$$

$$(A - B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A - B)^T)}{|A - B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}{7} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Hallamos la matriz x .

$$x = (A - B)^{-1}b = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 + 0 \\ 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$$

La solución es $x = \begin{pmatrix} -2/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$.

2.2.2 Hallamos el determinante de las matrices A y B .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \quad |B| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 4 = 19$$

Utilizamos las propiedades de los determinantes para hallar el valor de $\det(A^5 (2B)^{-1})$.

$$\det(A^5 (2B)^{-1}) = \det(A^5) \det((2B)^{-1}) = [\det(A)]^5 \cdot \frac{1}{\det(2B)} = \frac{[\det(A)]^5}{2^2 \det(B)} = \frac{3^5}{4 \cdot 19} = \boxed{\frac{243}{76}}$$

2.2.3 Intentamos encontrar los valores de α y β pedidos.

$$\alpha A + \beta B = I \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\beta & -2\beta \\ 2\beta & 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha + 5\beta & -\alpha - 2\beta \\ \alpha + 2\beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 1 \\ -\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a = (-1) \cdot \text{Ecuación } 3^a \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 1 \\ \alpha = -2\beta \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\beta + 5\beta = 1 \\ -2\beta + 3\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = -2 \cdot 1 = -2}$$

La solución es $\alpha = -2$ y $\beta = 1$.

- 3.1** Se consideran los puntos del espacio $A(0,-1,0)$ y $B(1,0,1)$, y el vector $v=(2,-1,1)$. Se pide:
- 3.1.1 (0.75 puntos)** Encontrar una ecuación del plano π que es perpendicular a v y pasa por A .
- 3.1.2 (0.75 puntos)** Encontrar una ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por B .
- 3.1.3 (0.75 puntos)** Encontrar el punto C del plano π que está más cerca de B .
- 3.1.4 (0.25 puntos)** Calcular la distancia del punto B al plano π .

3.1.1 Si el vector v es perpendicular al plano este puede ser su vector normal.

$$\left. \begin{array}{l} A(0,-1,0) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v} = (2,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(0,-1,0) \in \pi \\ \pi: 2x - y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 - (-1) + 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x - y + z - 1 = 0}$$

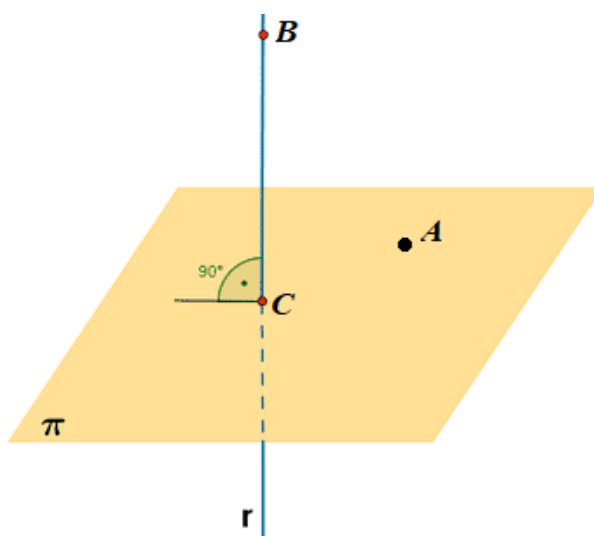
La ecuación del plano es $\pi: 2x - y + z - 1 = 0$.

3.1.2 La recta que es perpendicular a π tiene como vector director el vector normal del plano que es el vector $v=(2,-1,1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{v} = (2,-1,1) \\ B(1,0,1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

La recta buscada tiene ecuación $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$.

3.1.3 El punto C del plano π que está más cerca de B es la proyección ortogonal del punto B sobre el plano.



En los apartados anteriores hemos hallado la ecuación de la recta r y la del plano π . El punto C es el punto de intersección de recta y plano.

$$r: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow 2(1+2t)-(-t)+1+t-1=0 \Rightarrow 2+4t+t+1+t-1=0 \Rightarrow$$

$$\pi: 2x-y+z-1=0$$

$$\Rightarrow 6t+2=0 \Rightarrow 6t=-2 \Rightarrow t=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2\frac{-1}{3}=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{-1}{3}=\frac{1}{3} \\ z=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}$$

El punto C del plano π que está más cerca de B tiene coordenadas $C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

3.1.4 La distancia del punto B al plano π es el valor del módulo del vector $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) - (1, 0, 1) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

$$d(B, \pi) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0.8165 \text{ unidades}}$$

La distancia de B al plano π tiene un valor de $\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0.8165$ unidades de longitud.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x-y+z-1=0 \\ B(1,0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(B, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 0 + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0.8165 \text{ unidades}}$$

3.2 Dado el plano $\pi : 2x + 3y - z = 0$ y los puntos $A(0,0,0)$, $B(10,0,-20)$, $C(0,15,-30)$ y $D(1,2,-1)$, se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Estudiar si el triángulo ABC está contenido en el plano π .

3.2.2 (1 punto) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C .

3.2.3 (1 punto) Calcular la distancia del punto D al plano π .

3.2.1 Para que el triángulo ABC esté contenido en el plano lo deben de estar los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x + 3y - z = 0 \\ \text{¿} A(0,0,0) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0? \Rightarrow \text{¡¡SI!!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x + 3y - z = 0 \\ \text{¿} B(10,0,-20) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 10 + 3 \cdot 0 - (-20) = 0? \Rightarrow \text{¿} 20 + 20 = 0? \Rightarrow \text{¡¡NO!!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x + 3y - z = 0 \\ \text{¿} C(0,15,-30) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 15 - 30 = 0? \Rightarrow \text{¿} 45 - 30 = 0? \Rightarrow \text{¡¡NO!!}$$

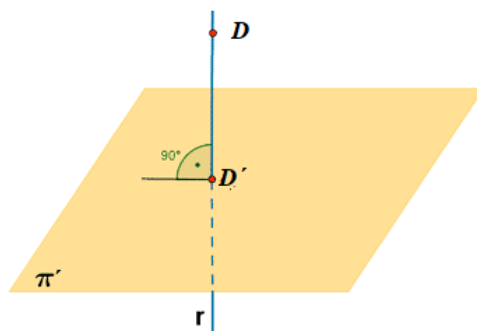
Los puntos B y C no pertenecen al plano. El triángulo ABC no está contenido en el plano π .

3.2.2 Obtenemos la ecuación del plano π' que contiene los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} A(0,0,0) \in \pi' \\ B(10,0,-20) \in \pi' \\ C(0,15,-30) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (10,0,-20) - (0,0,0) = (10,0,-20) \\ \overrightarrow{AC} = (0,15,-30) - (0,0,0) = (0,15,-30) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \frac{1}{10} \overrightarrow{AB} = (1,0,-2) \\ \vec{v} = \frac{1}{15} \overrightarrow{AC} = (0,1,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z + 2y + 2x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' : 2x + 2y + z = 0}$$

Para hallar la proyección del punto D sobre el plano π' obtenemos la recta r perpendicular al plano que pasa por el punto D . El punto D' es la intersección del plano con la recta.



$$\pi': 2x + 2y + z = 0 \Rightarrow \vec{n'} = (2, 2, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} D(1, 2, -1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n'} = (2, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t; t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Hallamos el punto D' de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \\ \pi': 2x + 2y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2t) + 2(2 + 2t) - 1 + t = 0 \Rightarrow 2 + 4t + 4 + 4t - 1 + t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9t + 5 = 0 \Rightarrow 9t = -5 \Rightarrow t = -\frac{5}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \frac{-5}{9} = \frac{-1}{9} \\ y = 2 + 2 \cdot \frac{-5}{9} = \frac{8}{9} \\ z = -1 - \frac{5}{9} = \frac{-14}{9} \end{cases} \Rightarrow D' \left(\frac{-1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{-14}{9} \right)$$

Las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C son $D' \left(\frac{-1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{-14}{9} \right)$.

3.2.3 Hallamos la distancia pedida.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + 3y - z = 0 \\ D(1, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(D, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{14}}{14} \approx 2,4054 \text{ unidades}$$

4.1 Un brote de gripe se propaga a lo largo de unos días. El coeficiente de gravedad de la gripe t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ cuya derivada es $F'(t) = t^2(10-t)$.

Se pide:

4.1.1 (1.25 puntos) Calcular la función $F(t)$ sabiendo que en $t=0$ el coeficiente de gravedad es 6.

4.1.2 (1.25 puntos) Calcular cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el valor máximo del coeficiente y cuál es dicho número.

4.1.1 La integral de la derivada es la función $\rightarrow \int F'(t) dt = F(t)$.

$$\int F'(t) dt = \int t^2(10-t) dt = \int 10t^2 - t^3 dt = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + K$$

La función es $F(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + K$. Determinamos el valor de K utilizando que $F(0) = 6$

$$\left. \begin{array}{l} F(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + K \\ F(0) = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 6 = \frac{10 \cdot 0^3}{3} - \frac{0^4}{4} + K \Rightarrow K = 6 \Rightarrow \boxed{F(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6}$$

4.1.2 Hallamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} F'(t) = t^2(10-t) \\ F'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t^2(10-t) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{t=0} \\ o \\ \boxed{t=10} \end{array} \right.$$

La función tiene dos puntos críticos. Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$F'(t) = t^2(10-t) = 10t^2 - t^3 \Rightarrow F''(t) = 20t - 3t^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F''(0) = 20 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = 0 \\ F''(10) = 20 \cdot 10 - 3 \cdot 10^2 = -100 < 0 \end{array} \right.$$

La función presenta un máximo para $t=10$.

Para este valor tenemos que $F(10) = \frac{10 \cdot 10^3}{3} - \frac{10^4}{4} + 6 = 839.33$.

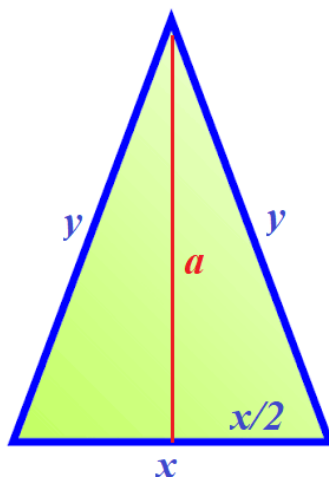
El valor máximo del coeficiente se obtiene a los 10 días siendo el coeficiente de gravedad de 839.33.

4.2 Un arquitecto está diseñando un pequeño invernadero para un jardín. El suelo del invernadero tiene forma de triángulo para maximizar la eficiencia y la captación de luz. El perímetro total del invernadero está fijado en 60 metros para cumplir con las restricciones medioambientales de la zona, uno de los lados del triángulo mide x metros y los otros dos lados tienen la misma longitud. Se pide:

4.2.1 (1 punto) Deducir la expresión de la función $A(x)$ que representa el área del suelo del invernadero.

4.2.2 (1.5 puntos) El arquitecto define una función de eficiencia estructural, $f(x)$, que se calcula como el cuadrado del área del suelo del invernadero. Obtener el valor de x para el que la eficiencia estructural es máxima y hallar el área en este caso.

4.2.1 Dibujamos la situación planteada.



El perímetro es de 60 metros $\rightarrow x + 2y = 60 \rightarrow 2y = 60 - x \Rightarrow y = 30 - \frac{x}{2}$.

Determinamos la altura del triángulo aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos a y $\frac{x}{2}$.

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + a^2 &= y^2 \\ y &= 30 - \frac{x}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + a^2 = \left(30 - \frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + a^2 = 900 + \frac{x^2}{4} - \frac{60x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 900 - 30x \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{900 - 30x}}$$

El área del triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

$$A(x) = \frac{x \cdot a}{2} = \frac{x\sqrt{900 - 30x}}{2}$$

4.2.2 Hallamos la expresión de la función $f(x)$.

$$f(x) = (A(x))^2 = \left(\frac{x\sqrt{900 - 30x}}{2}\right)^2 = \frac{x^2(900 - 30x)}{4} = \frac{900x^2}{4} - \frac{30x^3}{4} = 225x^2 - \frac{15x^3}{2}$$

Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$f(x) = 225x^2 - \frac{15x^3}{2} \Rightarrow f'(x) = 450x - \frac{45x^2}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 450x - \frac{45x^2}{2} = 0 \Rightarrow 45x \left(10 - \frac{x}{2} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x = 20 \end{cases}$$

Existen dos puntos críticos. Para $x = 0$ no habría invernadero y no lo tendremos en cuenta. Para $x = 20$ sustituimos en la segunda derivada para decidir si es máximo o mínimo.

$$f'(x) = 450x - \frac{45x^2}{2} \Rightarrow f''(x) = 450 - 45x \Rightarrow f''(20) = 450 - 45 \cdot 20 = -450 < 0$$

La función tiene un máximo relativo para $x = 20$ metros. Calculamos el área para este valor del lado desigual del invernadero triangular.

$$A(20) = \frac{20\sqrt{900 - 30 \cdot 20}}{2} = 10\sqrt{300} = 100\sqrt{3} \approx 173.205$$

La eficiencia estructural es máxima para $x = 20$ metros y el área del suelo del invernadero para este valor es de 173.205 metros cuadrados.

PAU Julio Reserva 2026 Matemáticas II



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: EXTRAORDINÀRIA 2026 (extra)	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA 2026 (extra)
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos. La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán -0,10 puntos hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

El 44% de los estudiantes de una universidad son hombres y el 56% mujeres. Un 20% de los hombres abandonan los estudios antes de acabar y un 15% en el caso de las mujeres. Se pide:

- 1.1 (0.75 puntos)** Calcular el porcentaje de estudiantes que finaliza sus estudios.
- 1.2 (0.75 puntos)** Si se elige un estudiante que ha abandonado los estudios, calcular la probabilidad de que sea mujer.
- 1.3 (1 punto)** Si se eligen a 7 alumnos masculinos, calcular la probabilidad de que al menos 3 de ellos finalicen sus estudios.

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 Se consideran la matriz A , dependiente del parámetro real a , y el vector w , siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}, w = (1 \quad 0 \quad -1)^T$$

donde T indica transpuesta. Se pide:

2.1.1 (1 punto) Calcular el rango de A en función del parámetro a .

2.1.2 (0.75 puntos) Discutir el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = w$

2.1.3 (0.75 puntos) Calcular el valor de z en función de a cuando el sistema es compatible determinado.

2.2 Las matrices cuadradas que verifican que su inversa es igual a su traspuesta se llaman matrices ortogonales. Se pide:

2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal y calcular

A^{38} y $(AA^T)^{39}$, donde A^T es la matriz traspuesta de A .

2.2.2 (0.5 puntos) ¿Puede ser el determinante de una matriz ortogonal igual a cero? Justificar la respuesta.

2.2.3 (0.5 puntos) Si A y B son dos matrices ortogonales de igual dimensión, analizar si $A \cdot B$ es también una matriz ortogonal.

2.2.4 (0.75 puntos) Encontrar la matriz X que verifique $A^2 X - 2B = 0$, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dados los puntos $A(1, -2, 1)$ y $B(3, 4, 3)$, y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = z-1$, se pide:

3.1.1 (1 punto) La ecuación del plano π_1 respecto al cual A y B son puntos simétricos.

3.1.2 (0.5 puntos) Comprobar que la recta r está contenida en el plano π_1 .

3.1.3 (1 punto) La ecuación del plano π_2 que contiene al punto A y tal que su intersección con π_1 es la recta r .

3.2 Dados el plano $\pi: -2x + y + 2z + 1 = 0$ y el punto $P(1, -2, 0)$, se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Calcular la distancia del punto P al plano π .

3.2.2 (1 punto) Escribir una ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto P .

3.2.3 (1 punto) Determinar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano π con los tres ejes coordenados.

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Se pide:

4.1.1 (1.25 puntos) Representar gráficamente la función $f(x)$.

4.1.2 (1.25 puntos) Calcular el área de la región delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales que pasan por los puntos mínimo y máximo de la función.

4.2 Se considera un triángulo rectángulo T cuyos catetos se cortan en el origen de coordenadas del plano; el cateto horizontal mide 4 unidades y el vertical 3. Consideramos un rectángulo R inscrito en el triángulo T de modo que dos lados del rectángulo R están situados sobre los catetos de T y uno de sus vértices está en la hipotenusa de T . Denotamos por x la longitud del lado de R que está sobre el cateto mayor y por y la longitud del lado de R que está sobre el cateto menor. Se pide:

4.2.1 (1 punto) Calcular la ecuación de la recta que contiene a la hipotenusa del triángulo T .

4.2.2 (1.5 puntos) Calcular los valores de x e y que hacen que el área de R sea máxima y calcular dicha área.

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
 Tabla de la distribución binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
11	0		0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1		0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0751	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2		0,9998	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3		1,0000	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4		1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5		1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0		0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0317	0,0138	0,0077	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1		0,9938	0,8816	0,6590	0,2749	0,1584	0,0850	0,0540	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032
	2		0,9998	0,9804	0,8891	0,5583	0,3907	0,2528	0,1811	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193
	3		1,0000	0,9978	0,9744	0,7946	0,6488	0,4925	0,3931	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730
	4		1,0000	0,9998	0,9957	0,9274	0,8424	0,7237	0,6315	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938
	5		1,0000	1,0000	0,9995	0,9806	0,9456	0,8822	0,8223	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9961	0,9857	0,9614	0,9336	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9972	0,9905	0,9812	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9961	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
13	0		0,8775	0,5133	0,2542	0,0550	0,0238	0,0097	0,0051	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1		0,9928	0,8646	0,6213	0,2336	0,1267	0,0637	0,0385	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017
	2		0,9997	0,9755	0,8661	0,5017	0,3326	0,2025	0,1387	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112
	3		1,0000	0,9969	0,9658	0,7473	0,5843	0,4206	0,3224	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461
	4		1,0000	0,9997	0,9935	0,9009	0,7940	0,6543	0,5520	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334
	5		1,0000	1,0000	0,9991	0,9700	0,9198	0,8346	0,7587	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9930	0,9757	0,9376	0,8965	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9944	0,9818	0,9653	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9912	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9984	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	13		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

El 44% de los estudiantes de una universidad son hombres y el 56% mujeres. Un 20% de los hombres abandonan los estudios antes de acabar y un 15% en el caso de las mujeres. Se pide:

1.1 (0.75 puntos) Calcular el porcentaje de estudiantes que finaliza sus estudios.

1.2 (0.75 puntos) Si se elige un estudiante que ha abandonado los estudios, calcular la probabilidad de que sea mujer.

1.3 (1 punto) Si se eligen a 7 alumnos masculinos, calcular la probabilidad de que al menos 3 de ellos finalicen sus estudios.

Supongamos que son 1000 estudiantes. El 44% de los estudiantes de una universidad son hombres $\rightarrow 0.44 \cdot 1000 = 440$ estudiantes son hombres y el 56% mujeres $\rightarrow 0.56 \cdot 1000 = 560$ estudiantes son mujeres. Un 20% de los hombres (440) abandonan los estudios antes de acabar $\rightarrow 0.20 \cdot 440 = 88$ estudiantes masculinos abandonan los estudios y un 15% en el caso de las mujeres $\rightarrow 0.15 \cdot 560 = 84$ estudiantes femeninos abandonan.

Ponemos estos datos en una tabla.

	Abandonan	Finalizan	
Hombres	88		440
Mujeres	84		560
TOTALES			1000

Completamos la tabla.

	Abandonan	Finalizan	
Hombres	88	352	440
Mujeres	84	476	560
TOTALES	172	828	1000

1.1 De los 1000 estudiantes 828 finalizan los estudios. El porcentaje de estudiantes que finalizan los estudios es $\frac{828}{1000} = 0.828$, es decir, el 82.8%.

1.2 Hay 172 estudiantes que abandonan y 84 son mujeres. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que el estudiante que abandona sea mujer es de $\frac{84}{172} = \frac{21}{43} \approx 0.4884$.

1.3 Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de estudiantes masculinos que finalizan los estudios de un grupo de 7 estudiantes masculinos.

Esta variable es una binomial donde $n =$ número de repeticiones $= 7$ y $p =$ probabilidad de que un estudiante masculino finalice los estudios $= 1 - 0.2 = 0.8$. $X = B(7, 0.8)$.

Como esta binomial no aparece en la tabla proporcionada cambiamos a la variable aleatoria Y que cuenta el número de estudiantes masculinos que abandonan los estudios de un grupo de 7 estudiantes masculinos.

Esta variable es una binomial donde $n =$ número de repeticiones $= 7$ y $p =$ probabilidad de que un estudiante masculino abandone los estudios $= 0.2$. $Y = B(7, 0.2)$.

Debemos calcular $P(X \geq 3)$.

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + \dots + P(X = 7) = P(Y = 4) + \dots + P(Y = 0) = P(Y \leq 4).$$

Si miramos en la tabla encontramos que esta probabilidad vale 0.9953.

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8920
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667
4	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953

2.1 Se consideran la matriz A , dependiente del parámetro real a , y el vector w , siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}, w = (1 \ 0 \ -1)^T$$

donde T indica transpuesta. Se pide:

2.1.1 (1 punto) Calcular el rango de A en función del parámetro a .

2.1.2 (0.75 puntos) Discutir el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = w$

2.1.3 (0.75 puntos) Calcular el valor de z en función de a cuando el sistema es compatible determinado.

2.1.1 Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + a + 4a - 3a^2 - 0 - 2 = -3a^2 + 5a - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3a^2 + 5a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-3)(-2)}}{2(-3)} = \frac{-5 \pm 1}{-6} = \begin{cases} \frac{-5+1}{-6} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}} = a \\ \frac{-5-1}{-6} = \boxed{1} = a \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq \frac{2}{3}$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $a = \frac{2}{3}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2/3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2/3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de

quitar la primera columna y la primera fila y calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0. \text{ El rango de } A \text{ es } 2.$$

CASO 3. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar

la primera columna y la primera fila y calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$. El rango de A es 2.

Conclusión: Si $a \neq \frac{2}{3}$ y $a \neq 1$ el rango de A es 3 y si $a = 1$ o $a = \frac{2}{3}$ el rango de A es 2.

2.1.2 El sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = w$ es el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Este sistema tiene como matriz

de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ a & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

En el apartado anterior hemos visto que el determinante de la matriz de coeficientes se anula para $a = 1$ y $a = \frac{2}{3}$. Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq \frac{2}{3}$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, el rango de la matriz ampliada también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = \frac{2}{3}$

En este caso hemos visto que el rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2/3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3

que resulta de quitar la primera columna y calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2/3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 0 - 2 + 2 - 0 = -1 \neq 0$$

Como el determinante es distinto de cero el rango de la matriz ampliada es 3, distinto del rango de A que es 2.

El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $a = 1$

En este caso hemos visto que el rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Podemos observar que la columna 4ª se

puede obtener como $2 \cdot \text{Columna } 3^{\text{a}} - \text{Columna } 1^{\text{a}}$. Por lo que el rango de A/B es 2 como el de la matriz A . De todas formas, para confirmarlo consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 0 - 2 + 3 + 0 = 0$$

El rango de la matriz ampliada es 2. Los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Conclusión: Si $a \neq \frac{2}{3}$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si

$a = \frac{2}{3}$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

2.1.3 Para $a \neq \frac{2}{3}$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado.

$$\text{El sistema es } \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos el método de Cramer para determinar el valor de z .

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-3 + 0 + 4 - 3a + 2 - 0}{-3a^2 + 5a - 2} = \frac{3 - 3a}{-3a^2 + 5a - 2} = \frac{\cancel{-3}(-1+a)}{\cancel{-3(a-1)}\left(a - \frac{2}{3}\right)} =$$

$$= \frac{1}{a - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{3a-2}{3}} = \boxed{\frac{3}{3a-2}}$$

Para $a \neq \frac{2}{3}$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado y el valor de z es $z = \frac{3}{3a-2}$.

2.2 Las matrices cuadradas que verifican que su inversa es igual a su traspuesta se llaman matrices ortogonales. Se pide:

2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal y calcular

A^{38} y $(AA^T)^{39}$, donde A^T es la matriz traspuesta de A .

2.2.2 (0.5 puntos) ¿Puede ser el determinante de una matriz ortogonal igual a cero? Justificar la respuesta.

2.2.3 (0.5 puntos) Si A y B son dos matrices ortogonales de igual dimensión, analizar si $A \cdot B$ es también una matriz ortogonal.

2.2.4 (0.75 puntos) Encontrar la matriz X que verifique $A^2 X - 2B = 0$, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2.2.1 La traspuesta de la matriz A es $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comprobamos que $A \cdot A^T = A^T \cdot A = Id$.

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

Se cumple la igualdad y la matriz A^T es la inversa de la matriz A .
Calculamos A^{38} .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^T = A^{-1}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A^{-1} \cdot A = Id$$

$$A^{38} = A^{36+2} = (A^3)^{12} \cdot A^2 = (Id)^{12} \cdot A^T = A^T$$

Tenemos que $A^{38} = A^T$.

Calculamos $(AA^T)^{39}$. Sabemos que $A \cdot A^T = Id$.

$$(AA^T)^{39} = (Id)^{39} = Id$$

Tenemos que $(AA^T)^{39} = Id$.

2.2.2 Una matriz ortogonal tiene inversa, por lo que su determinante no puede ser cero.

2.2.3 Si A y B son ortogonales entonces $A \cdot A^T = Id$ y $B \cdot B^T = Id$. Investigamos que ocurre con el producto $(AB) \cdot (AB)^T$.

$$(AB) \cdot (AB)^T = ABB^T A^T = A \cdot Id \cdot A^T = AA^T = Id$$

Análogamente se puede probar que $(AB)^T \cdot (AB) = Id$.

El producto de dos matrices ortogonales es otra matriz ortogonal.

2.2.4 Despejamos X en la igualdad.

$$A^2 X - 2B = 0 \Rightarrow A^2 X = 2B \Rightarrow A^T A \cdot AX = 2A^T B \Rightarrow Id \cdot AX = 2A^T B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^T AX = 2A^T A^T B \Rightarrow \boxed{X = 2A^T A^T B}$$

Hallamos la expresión de la matriz X.

$$X = 2A^T A^T B = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{3 \quad \cdot \quad 3} \times 2 \longrightarrow 3 \times 2$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

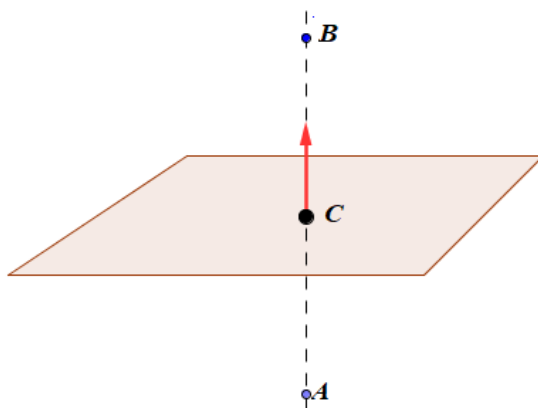
3.1 Dados los puntos $A(1,-2,1)$ y $B(3,4,3)$, y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = z-1$, se pide:

3.1.1 (1 punto) La ecuación del plano π_1 respecto al cual A y B son puntos simétricos.

3.1.2 (0.5 puntos) Comprobar que la recta r está contenida en el plano π_1 .

3.1.3 (1 punto) La ecuación del plano π_2 que contiene al punto A y tal que su intersección con π_1 es la recta r .

3.1.1 Si el punto B es simétrico de A respecto del plano π_1 entonces este plano contiene el punto medio C del segmento AB . Además, el vector $\overrightarrow{AB}$ es un vector normal del plano. También nos sirve como vector normal el vector $\overrightarrow{CB}$



$$\left. \begin{array}{l} A(1,-2,1) \\ B(3,4,3) \end{array} \right\} \Rightarrow C = \frac{(1,-2,1) + (3,4,3)}{2} = (2,1,2)$$

$$\left. \begin{array}{l} C(2,1,2) \\ B(3,4,3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{CB} = (3,4,3) - (2,1,2) = (1,3,1)$$

$$\left. \begin{array}{l} C(2,1,2) \in \pi_1 \\ \vec{n}_1 = \overrightarrow{CB} = (1,3,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} C(2,1,2) \in \pi_1 \\ \pi_1 : x + 3y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 3 \cdot 1 + 2 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 + D = 0 \Rightarrow D = -7 \Rightarrow \boxed{\pi_1 : x + 3y + z - 7 = 0}$$

La ecuación del plano es $\pi_1 : x + 3y + z - 7 = 0$.

3.1.2 Para que la recta r está contenida en el plano π_1 basta que 2 puntos de la recta estén en el plano.

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_r(0,2,1) \\ \vec{v}_r = (2,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

Obtenemos un segundo punto de la recta.

$$\text{Si } \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 - 1 = 1 \Rightarrow Q_r(2, 1, 2) \in r \\ z = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

¿Está el punto $Q_r(2, 1, 2)$ en el plano $\pi_1: x + 3y + z - 7 = 0$?

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: x + 3y + z - 7 = 0 \\ \text{¿} Q_r(2, 1, 2) \in \pi_1? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 + 3 \cdot 1 + 2 - 7 = 0? \Rightarrow \text{¡¡SI!!}$$

¿Está el punto $P_r(0, 2, 1)$ en el plano $\pi_1: x + 3y + z - 7 = 0$?

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: x + 3y + z - 7 = 0 \\ \text{¿} P_r(0, 2, 1) \in \pi_1? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 0 + 3 \cdot 2 + 1 - 7 = 0? \Rightarrow \text{¡¡SI!!}$$

Los dos puntos están en el plano y por tanto, todos los puntos de la recta están en el plano. La recta r está contenida en el plano π_1 .

3.1.3 El plano π_2 contiene el punto A y la recta r . Este plano tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector $\overrightarrow{AP_r}$.

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, 2, 1) \\ \vec{v}_r = (2, -1, 1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, 2, 1) \\ A(1, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP_r} = (0, 2, 1) - (1, -2, 1) = (-1, 4, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(1, -2, 1) \in \pi_2 \\ \vec{u}_2 = \vec{v}_r = (2, -1, 1) \\ \vec{v}_2 = \overrightarrow{AP_r} = (-1, 4, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_2: \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - y - 2 + 8z - 8 - z + 1 - 0 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x - y + 7z - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_2: 4x + y - 7z + 5 = 0}$$

La ecuación del plano es $\pi_2: 4x + y - 7z + 5 = 0$.

3.2 Dados el plano $\pi: -2x + y + 2z + 1 = 0$ y el punto $P(1, -2, 0)$, se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Calcular la distancia del punto P al plano π .

3.2.2 (1 punto) Escribir una ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto P .

3.2.3 (1 punto) Determinar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano π con los tres ejes coordenados.

3.2.1 Calculamos la distancia pedida.

$$\left. \begin{array}{l} P(1, -2, 0) \\ \pi: -2x + y + 2z + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|-2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{3} = 1$$

La distancia del punto P al plano π vale 1 unidad de longitud.

3.2.2 La recta perpendicular a π que pasa por el punto P tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: -2x + y + 2z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (-2, 1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1, -2, 0) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (-2, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -2 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

La recta tiene ecuación $r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -2 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

3.2.3 Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -2x + y + 2z + 1 = 0 \\ \text{Eje } OX \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 0 + 2 \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -2x + y + 2z + 1 = 0 \\ \text{Eje } OY \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \cdot 0 + y + 2 \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B(0, -1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -2x + y + 2z + 1 = 0 \\ \text{Eje } OZ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \cdot 0 + 0 + 2z + 1 = 0 \Rightarrow 2z + 1 = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2} \Rightarrow C\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

Hallamos los vectores que unen los vértices del triángulo ABC entre sí y el ángulo que forman entre ellos.

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{array}{l} A\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \\ B(0, -1, 0) \\ C\left(0, 0, \frac{-1}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, -1, 0) - \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, -1, 0\right) \\ \overrightarrow{AC} = \left(0, 0, \frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}\right) \end{array} \right. \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \\
& = \frac{\left(-\frac{1}{2}, -1, 0\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{5}{4}} \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \boxed{\widehat{A} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \approx 71.57^\circ}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{array}{l} A\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \\ B(0, -1, 0) \\ C\left(0, 0, \frac{-1}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = \left(0, 0, \frac{-1}{2}\right) - (0, -1, 0) = \left(0, 1, \frac{-1}{2}\right) \\ \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) \end{array} \right. \Rightarrow \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}|}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}|} = \\
& = \frac{\left(0, 1, \frac{-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)}{\sqrt{0^2 + 1^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}} \sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{\widehat{B} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36.87^\circ}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{array}{l} A\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \\ B(0, -1, 0) \\ C\left(0, 0, \frac{-1}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \\ \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = \left(0, -1, \frac{1}{2}\right) \end{array} \right. \Rightarrow \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{|\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \\
& = \frac{\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(0, -1, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \sqrt{0^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \boxed{\widehat{C} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \approx 71.57^\circ}
\end{aligned}$$

El triángulo ABC es un triángulo isósceles teniendo dos ángulos iguales $A = C = 71.57^\circ$ y otro ángulo desigual $B = 36.87^\circ$.

4.1 Sea la función real de variable real $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Se pide:

4.1.1 (1.25 puntos) Representar gráficamente la función $f(x)$.

4.1.2 (1.25 puntos) Calcular el área de la región delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales que pasan por los puntos mínimo y máximo de la función.

4.1.1 El dominio de la función es $\mathbb{R}$. La función es continua y derivable en todo su dominio. Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

$$y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0,0) \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \\ = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} = \frac{3-1}{2} = 1 = x \rightarrow \boxed{B(1,0)} \\ = \frac{3+1}{2} = 2 = x \rightarrow \boxed{C(2,0)} \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes de coordenadas son $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ y $C(2, 0)$. Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

La función tiene dos puntos críticos: $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \approx 0.42$ y $x = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \approx 1.58$.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 2 = 2 > 0. \text{ La función crece en } \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = -1 < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = 2 > 0. \text{ La función crece en } \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right).$$

La función crece en $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \approx 0.42$ y un mínimo relativo en

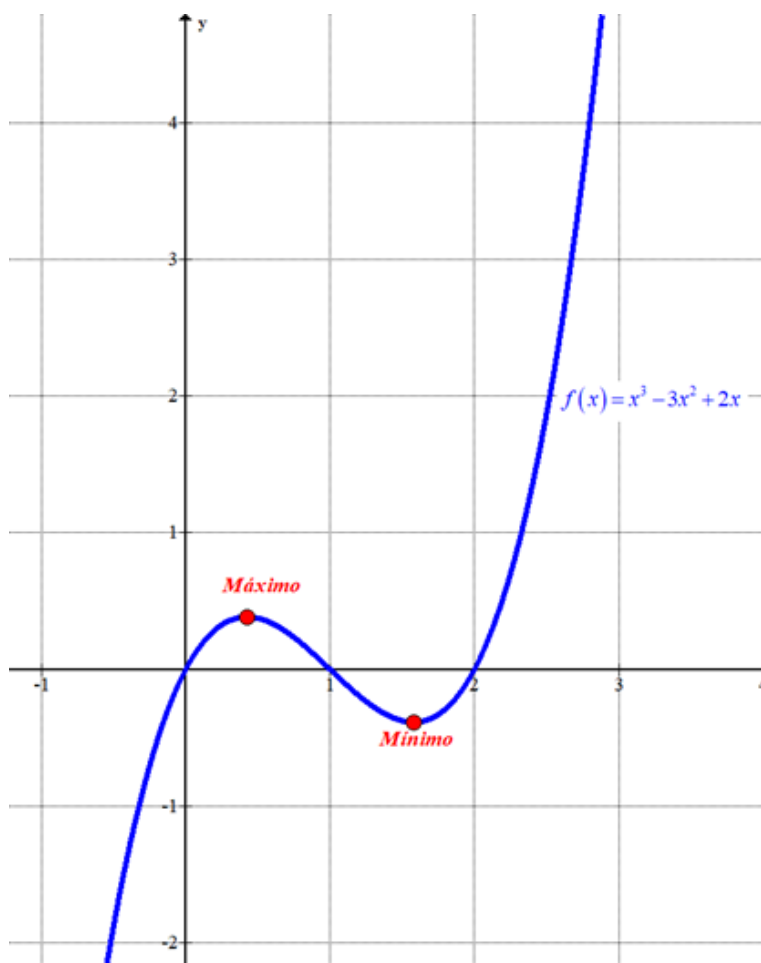
$$x = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \approx 1.58. \text{ Como } f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2\frac{3-\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ y}$$

$$f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2\frac{3+\sqrt{3}}{3} = \frac{-2\sqrt{3}}{9} \text{ el máximo relativo tiene coordenadas}$$

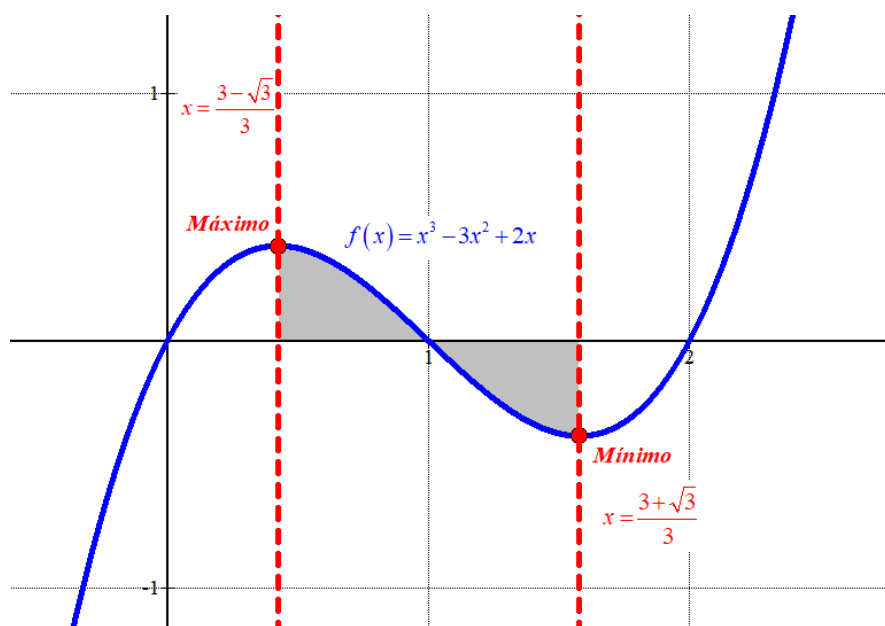
$$\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right) \text{ y el mínimo relativo } \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{-2\sqrt{3}}{9}\right).$$

Hacemos una pequeña tabla de valores y dibujamos la gráfica.

x	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$
-1	-6
0	0
1	0
2	0
3	6



4.1.2 Hacemos un dibujo de la región de la cual queremos hallar el área.



El recinto tiene dos partes simétricas. Hallamos el área de la primera de ellas y el área total será el doble de la integral de $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \approx 0.42$ a 1 de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}^1 f(x) dx &= \int_{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}^1 x^3 - 3x^2 + 2x dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}^1 = \\ &= \left[\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2 \right] - \left[\frac{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} \right)^4}{4} - \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} \right)^3 + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} \right)^2 \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36} \end{aligned}$$

El área de la región delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales que pasan por los puntos mínimo y máximo de la función vale $2 \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{18} \approx 0.2778$ unidades cuadradas.

4.2 Se considera un triángulo rectángulo T cuyos catetos se cortan en el origen de coordenadas del plano; el cateto horizontal mide 4 unidades y el vertical 3. Consideramos un rectángulo R inscrito en el triángulo T de modo que dos lados del rectángulo R están situados sobre los catetos de T y uno de sus vértices está en la hipotenusa de T . Denotamos por x la longitud del lado de R que está sobre el cateto mayor y por y la longitud del lado de R que está sobre el cateto menor. Se pide:

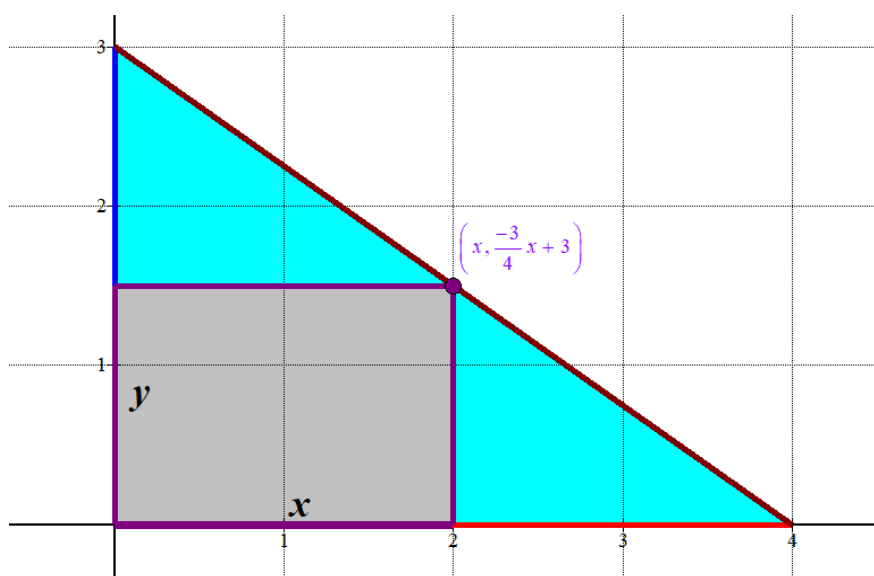
4.2.1 (1 punto) Calcular la ecuación de la recta que contiene a la hipotenusa del triángulo T .

4.2.2 (1.5 puntos) Calcular los valores de x e y que hacen que el área de R sea máxima y calcular dicha área.

4.2.1 Los vértices del triángulo rectángulo T son $A(0,0)$, $B(0,3)$ y $C(4,0)$. La recta que contiene a la hipotenusa debe pasar por $B(0,3)$ y $C(4,0)$.

$$\left. \begin{array}{l} B(0,3) \\ C(4,0) \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{0-3}{4-0} = \frac{-3}{4} \Rightarrow y-0 = \frac{-3}{4}(x-4) \Rightarrow y = \frac{-3}{4}x + 3$$

Los puntos situados sobre la hipotenusa tienen coordenadas $\left(x, \frac{-3}{4}x + 3\right)$, siendo $0 \leq x \leq 4$



4.2.2 El área del rectángulo es el producto de la base por la altura.

$$A(x) = x \cdot y = x \left(\frac{-3}{4}x + 3 \right) = \frac{-3}{4}x^2 + 3x$$

Averiguamos cuando se anula la derivada del área.

$$A(x) = \frac{-3}{4}x^2 + 3x \Rightarrow A'(x) = \frac{-3}{2}x + 3$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-3}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow -3x + 6 = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Existe un punto crítico. Sustituimos $x = 2$ en la segunda derivada para decidir si es máximo o mínimo.

$$A'(x) = \frac{-3}{2}x + 3 \Rightarrow A''(x) = \frac{-3}{2} \Rightarrow A''(2) = \frac{-3}{2} < 0$$

La primera derivada se anula para $x = 2$ y la segunda toma valor negativo. La función tiene un máximo relativo para $x = 2$. Para este valor tenemos que $y = \frac{-3}{4}2 + 3 = 1.5$.

El área máxima se consigue con un rectángulo de lados 2 y 1.5 siendo un área máxima con valor de $2 \cdot 1.5 = 3$ unidades cuadradas.

PAU Junio 2026 Matemáticas II



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: ORDINÀRIA 2026	CONVOCATORIA: ORDINARIA 2026
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos. La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán -0,10 puntos hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

En un país se ha detectado una enfermedad X transmitida por el virus VirusX. Se sabe que la enfermedad la padece el 20% de la población. Para detectarla, se usa un test de antígenos que, entre personas enfermas da positivo en el 90% de los casos y entre personas sanas da positivo en el 5% de los casos. Se pide:

Responda a todos los apartados

- 1.1 (0.75 puntos)** Calcular la probabilidad de que, al realizar el test a una persona del país al azar, dicho test dé positivo.
- 1.2 (0.75 puntos)** Calcular la probabilidad de que una persona esté sana sabiendo que ha dado positivo en el test.
- 1.3 (1 punto)** Si tomamos 8 personas de la población al azar, ¿cuál es la probabilidad de que como máximo dos de ellas tengan la enfermedad?

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de una matriz cuadrada T

de orden 3. El vector tensión en la dirección de $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viene dado por $u = Tv$. Para

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

se pide:

- 2.1.1 (1 punto)** Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .
- 2.1.2 (0.75 puntos)** Resolver el sistema $Tv = u$ para $m = -1$.
- 2.1.3 (0.75 puntos)** Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$, siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$.

2.2 Decimos que una matriz cuadrada es ortogonal cuando su matriz inversa coincide con su matriz transpuesta. Se pide:

2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que para todo valor real α la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

2.2.2 (0.75 puntos) Determinar los valores de a y b para que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea ortogonal. ¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

2.2.3 (1 punto) Resuelve la ecuación matricial con incógnita X

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dada la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y el plano $\pi: 2x + my + z - 3 = 0$, se pide:

3.1.1 (0.5 puntos) El valor de m para el que π y r son perpendiculares.

3.1.2 (0.75 puntos) El valor de m para el que π y r son paralelos.

3.1.3 (1.25 puntos) Calcular, cuando sea posible, el punto de intersección entre π y r en función del parámetro real m .

3.2 Consideramos la recta s del espacio con ecuación:

$$\frac{x-1}{0} = y-1 = \frac{z-1}{-1}.$$

Se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Encontrar una ecuación del plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular a s .

3.2.2 (1 punto) Encontrar los puntos de la recta s que están a distancia 4 del origen.

3.2.3 (1 punto) Calcular el ángulo que forma la recta s con el eje Z .

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Consideremos la función real de variable real $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio y estudiar la continuidad de la función f .

4.1.2 (0.5 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.3 (1 punto) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

4.1.4 (0.5 puntos) Representar la función f .

4.2 Un decorador desea pintar una pared rectangular de 12 metros de largo por 3 de alto. Para ello supone que la esquina inferior izquierda de la pared corresponde al origen de coordenadas de un plano y pinta en la pared la curva de ecuación

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2.$$

A continuación, el decorador colorea en rojo la parte de la pared que queda por encima de la curva y en verde la que queda por debajo. Se pide:

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0, 12]$.

4.2.2 (1 punto) Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.

4.2.3 (0.25 puntos) La parte verde se pinta usando botes de pintura capaces de cubrir 3 metros cuadrados cada uno. ¿Cuál es el mínimo número de botes que vamos a necesitar para pintar la parte verde?

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
Tabla de la distribución binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
11	0		0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1		0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0751	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2		0,9998	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3		1,0000	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4		1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5		1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0		0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0317	0,0138	0,0077	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1		0,9938	0,8816	0,6590	0,2749	0,1584	0,0850	0,0540	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032
	2		0,9998	0,9804	0,8891	0,5583	0,3907	0,2528	0,1811	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193
	3		1,0000	0,9978	0,9744	0,7946	0,6488	0,4925	0,3931	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730
	4		1,0000	0,9998	0,9957	0,9274	0,8424	0,7237	0,6315	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938
	5		1,0000	1,0000	0,9995	0,9806	0,9456	0,8822	0,8223	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9961	0,9857	0,9614	0,9336	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9972	0,9905	0,9812	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9961	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
13	0		0,8775	0,5133	0,2542	0,0550	0,0238	0,0097	0,0051	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1		0,9928	0,8646	0,6213	0,2336	0,1267	0,0637	0,0385	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017
	2		0,9997	0,9755	0,8661	0,5017	0,3326	0,2025	0,1387	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112
	3		1,0000	0,9969	0,9658	0,7473	0,5843	0,4206	0,3224	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461
	4		1,0000	0,9997	0,9935	0,9009	0,7940	0,6543	0,5520	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334
	5		1,0000	1,0000	0,9991	0,9700	0,9198	0,8346	0,7587	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9930	0,9757	0,9376	0,8965	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9944	0,9818	0,9653	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9912	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9984	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	13		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

En un país se ha detectado una enfermedad X transmitida por el virus VirusX. Se sabe que la enfermedad la padece el 20% de la población. Para detectarla, se usa un test de antígenos que, entre personas enfermas da positivo en el 90% de los casos y entre personas sanas da positivo en el 5% de los casos. Se pide:

Responda a todos los apartados

1.1 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que, al realizar el test a una persona del país al azar, dicho test dé positivo.

1.2 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que una persona esté sana sabiendo que ha dado positivo en el test.

1.3 (1 punto) Si tomamos 8 personas de la población al azar, ¿cuál es la probabilidad de que como máximo dos de ellas tengan la enfermedad?

Llamamos X al suceso “padecer la enfermedad X ”, $T+$ a “dar positivo en el test de antígenos para la detección de la enfermedad” y $T-$ a “dar negativo en el test de antígenos”.

Nos proporcionan las siguientes probabilidades:

$$P(X) = 0.20; P(T+/X) = 0.90; P(T+/X^c) = 0.05$$

1.1 Debemos calcular $P(T+)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T+) = P(X)P(T+/X) + P(X^c)P(T+/X^c) = 0.20 \cdot 0.90 + (1 - 0.20) \cdot 0.05 = \boxed{0.22}$$

1.2 Debemos calcular $P(X^c/T+)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(X^c/T+) = \frac{P(X^c \cap T+)}{P(T+)} = \frac{P(X^c)P(T+/X^c)}{P(T+)} = \frac{0.8 \cdot 0.05}{0.22} = \frac{2}{11} \approx 0.1818$$

1.3 Consideramos la variable aleatoria Y que cuenta el número de personas que tienen la enfermedad de un grupo de 8. Esta variable es una binomial donde n = número de repeticiones = 8 y p = probabilidad de que una persona tenga la enfermedad = 0.2.

Debemos calcular $P(Y \leq 2)$. Si miramos en la tabla encontramos que esta probabilidad vale 0.7969.

n	k	p	0.01	0.05	0.10	0.20	0
1	0		0.9900	0.9500	0.9000	0.8000	0.7
	1		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0
2	0		0.9801	0.9025	0.8100	0.6400	0.5
	1		0.9999	0.9975	0.9900	0.9000	0.9
	2		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0
3	0		0.9703	0.8574	0.7290	0.5120	0.4
	1		0.9997	0.9928	0.9720	0.8400	0.8
	2		1.0000	0.9999	0.9990	0.9000	0.9
	3		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0
4	0		0.9606	0.8145	0.6561	0.4096	0.3
	1		0.9994	0.9880	0.9477	0.8200	0.7
	2		1.0000	0.9995	0.9963	0.9280	0.9
	3		1.0000	1.0000	0.9999	0.9840	0.9
	4		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0
5	0		0.9510	0.7738	0.5905	0.3770	0.2
	1		0.9990	0.9774	0.9185	0.7730	0.6
	2		1.0000	0.9988	0.9914	0.9210	0.8
	3		1.0000	1.0000	0.9995	0.9830	0.9
	4		1.0000	1.0000	1.0000	0.9830	0.9
	5		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0
6	0		0.9415	0.7351	0.5314	0.3210	0.1
	1		0.9985	0.9672	0.8857	0.7540	0.5
	2		1.0000	0.9978	0.9842	0.9110	0.8
	3		1.0000	0.9999	0.9987	0.9500	0.9
	4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9840	0.9
	5		1.0000	1.0000	1.0000	0.9830	0.9
	6		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0
7	0		0.9321	0.6983	0.4783	0.2970	0.1
	1		0.9980	0.9556	0.8503	0.7040	0.4
	2		1.0000	0.9962	0.9745	0.9200	0.7
	3		1.0000	0.9998	0.9973	0.9670	0.9
	4		1.0000	1.0000	0.9998	0.9953	0.9
	5		1.0000	1.0000	1.0000	0.9950	0.9
	6		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0
	7		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0
8	0		0.9227	0.6634	0.4305	0.2780	0.1
	1		0.9973	0.9428	0.8131	0.6780	0.3
	2		0.9898	0.9815	0.9616	0.9363	0.6
	3		1.0000	0.9998	0.9998	0.9998	0.9

2.1 El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de una matriz cuadrada T

de orden 3. El vector tensión en la dirección de $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viene dado por $u = Tv$. Para

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .

2.1.2 (0.75 puntos) Resolver el sistema $Tv = u$ para $m = -1$.

2.1.3 (0.75 puntos) Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$, siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$.

2.1.1 La matriz $T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes del sistema y la matriz ampliada es

$$T/u = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 4 \\ m & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando la matriz T tiene determinante nulo.

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 - 0 - m^2 - 0 = 4 - m^2$$

$$|T| = 0 \Rightarrow 4 - m^2 = 0 \Rightarrow 4 = m^2 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m \neq -2$ y $m \neq 2$

En este caso el determinante de T es no nulo y su rango es 3, el rango de la matriz ampliada también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = -2$

En este caso el determinante de T es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz T queda $T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila primera y segunda son

proporcionales. Consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna primeras y

calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$. El rango de T es 2.

La matriz ampliada queda $T/u = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que

resulta de quitar la primera columna (proporcional a la segunda) y calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 8 - 0 - 0 + 8 = 16 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3, distinto del rango de T. El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $m = 2$

En este caso el determinante de T es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz T queda $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila primera y segunda son iguales.

Consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna primeras y calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$. El rango de T es 2.

La matriz ampliada queda $T/u = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila primera y segunda

son iguales, por lo que el rango no puede ser 3. El rango de la matriz ampliada es 2, como el rango de T, aunque menor que el número de incógnitas (3).

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Conclusión: Si $m \neq -2$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $m = -2$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

2.1.2 Para $m = -1$ el sistema es compatible determinado. Obtenemos su solución.

$$m = -1 \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Tv = u \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = 4 \\ \boxed{z = -2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 = y \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 2(2x - 4) = 4 \Rightarrow -x + 4x - 8 = 4 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow \boxed{x = 4} \Rightarrow \boxed{y = 2 \cdot 4 - 4 = 4}$$

La solución de $Tv = u$ es $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

2.1.3 Para $m = 2$ la matriz T queda $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinamos los valores de α tales que

$$\det(T - \alpha I) = 0.$$

$$T - \alpha I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\det(T - \alpha I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\alpha)^2(1-\alpha) + 0 + 0 - 0 - 4(1-\alpha) - 0 = 0 \Rightarrow (2-\alpha)^2(1-\alpha) - 4(1-\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(2-\alpha)^2 - 4](1-\alpha) = 0 \Rightarrow [4 + \alpha^2 - 4\alpha - 4](1-\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha^2 - 4\alpha)(1-\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha - 4)(1 - \alpha) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 4 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Las tensiones principales para $m = 2$ son $\alpha = 0$; $\alpha = 4$ y $\alpha = 1$.

2.2 Decimos que una matriz cuadrada es ortogonal cuando su matriz inversa coincide con su matriz traspuesta. Se pide:

2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que para todo valor real α la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

2.2.2 (0.75 puntos) Determinar los valores de a y b para que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea ortogonal. ¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

2.2.3 (1 punto) Resuelve la ecuación matricial con incógnita X

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.

2.2.1 La matriz traspuesta de $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ es $A^T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

Comprobamos que $A \cdot A^T = I$ y por tanto la inversa de A es su matriz traspuesta.

$$\begin{aligned} A \cdot A^T &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Queda comprobado que la matriz A es ortogonal.

2.2.2 La matriz traspuesta de $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es $B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Para que B sea ortogonal se debe cumplir $B \cdot B^T = I$

$$B \cdot B^T = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Existen 4 matrices de la forma de B que son ortogonales:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Despejamos X en la ecuación matricial.

La matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cumple que $B^{-1} = B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow BX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \longrightarrow 3 \times 2$

La matriz X solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$.

3.1 Dada la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y el plano $\pi: 2x + my + z - 3 = 0$, se pide:

3.1.1 (0.5 puntos) El valor de m para el que π y r son perpendiculares.

3.1.2 (0.75 puntos) El valor de m para el que π y r son paralelos.

3.1.3 (1.25 puntos) Calcular, cuando sea posible, el punto de intersección entre π y r en función del parámetro real m .

3.1.1 Para que el plano π y la recta r sean perpendiculares el vector director de la recta y el vector normal del plano deben tener coordenadas proporcionales.

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (2, -1, 1) \end{cases}$$

$$\pi: 2x + my + z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, m, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, -1, 1) \\ \vec{n} = (2, m, 1) \\ \pi \perp r \rightarrow \vec{n} \parallel \vec{v}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{-1}{m} = \frac{1}{1} \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

Para $m = -1$ el plano π y la recta r son perpendiculares.

3.1.2 Para el que el plano π y la recta r sean paralelos el vector director de la recta y el normal del plano deben ser perpendiculares. Además, la recta no debe estar contenida en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, -1, 1) \\ \vec{n} = (2, m, 1) \\ \pi \parallel r \rightarrow \vec{n} \perp \vec{v}_r \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (2, -1, 1) \cdot (2, m, 1) = 0 \Rightarrow 4 - m + 1 = 0 \Rightarrow 5 - m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 5}$$

Para $m = 5$ la recta es paralela al plano o está contenida en él. Comprobamos si un punto cualquiera de la recta pertenece o no al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, -1, 1) \in r \\ \pi: 2x + 5y + z - 3 = 0 \\ \text{¿} P_r \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) + 1 - 3 = 0? \Rightarrow \text{¿} 0 - 5 + 1 - 3 = 0? \Rightarrow \text{¡NO!}$$

El punto P_r no pertenece al plano y tampoco ningún punto de la recta. La recta es paralela al plano para $m = 5$.

3.1.3 La recta es paralela al plano para $m = 5$. Para el resto de valores de m la recta corta al plano. Hallamos ese punto de intersección en función de m .

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (2, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$\pi: 2x + my + z - 3 = 0 \quad \left. \begin{matrix} r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 2\lambda + m(-1 - \lambda) + 1 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\lambda - m - m\lambda + 1 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow (5 - m)\lambda - m - 2 = 0 \Rightarrow (5 - m)\lambda = m + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{5 - m \neq 0\} \Rightarrow \lambda = \frac{m+2}{5-m} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \frac{m+2}{5-m} = \frac{2m+4}{5-m} \\ y = -1 - \frac{m+2}{5-m} = \frac{-5+m-m-2}{5-m} = \frac{-7}{5-m} \\ z = 1 + \frac{m+2}{5-m} = \frac{5-m+m+2}{5-m} = \frac{7}{5-m} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{2m+4}{5-m}, \frac{-7}{5-m}, \frac{7}{5-m}\right)$$

Para $m \neq 5$ la recta r y el plano π se cortan en el punto $A\left(\frac{2m+4}{5-m}, \frac{-7}{5-m}, \frac{7}{5-m}\right)$.

3.2 Consideramos la recta s del espacio con ecuación:

$$\frac{x-1}{0} = y-1 = \frac{z-1}{-1}.$$

Se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Encontrar una ecuación del plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular a s .

3.2.2 (1 punto) Encontrar los puntos de la recta s que están a distancia 4 del origen.

3.2.3 (1 punto) Calcular el ángulo que forma la recta s con el eje Z .

3.2.1 Un plano perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$s: \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \vec{v}_s = (0, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1,1,1) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_s = (0, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(1,1,1) \in \pi \\ \pi: 0 \cdot x + 1 \cdot y + (-1) \cdot z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(1,1,1) \in \pi \\ \pi: y - z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: y - z = 0}$$

El plano que cumple lo pedido tiene ecuación $\pi: y - z = 0$.

3.2.2 Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta s .

$$s: \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_s(1,1,1) \\ \vec{v}_s = (0, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Un punto Q de la recta s tiene coordenadas $Q(1, 1 + \lambda, 1 - \lambda)$. Hallamos la distancia de este punto al origen y la igualamos a 4 para obtener los puntos pedidos.

$$\left. \begin{array}{l} Q(1, 1 + \lambda, 1 - \lambda) \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = (1, 1 + \lambda, 1 - \lambda) - (0, 0, 0) = (1, 1 + \lambda, 1 - \lambda)$$

$$d(O, Q) = 4 \Rightarrow |\overrightarrow{OQ}| = 4 \Rightarrow \sqrt{1^2 + (1 + \lambda)^2 + (1 - \lambda)^2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 1 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 + \lambda^2 - 2\lambda} = 4 \Rightarrow \sqrt{3 + 2\lambda^2} = 4 \Rightarrow 3 + 2\lambda^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2 = 13 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{13}{2} \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{13}{2}} = \frac{\pm\sqrt{26}}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q_1 \left(1, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2} \right) \\ Q_2 \left(1, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2} \right) \end{array} \right.$$

Existen dos puntos que cumplen lo pedido: $Q_1\left(1, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}\right)$ y $Q_2\left(1, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}\right)$.

3.2.3 La recta s tiene como vector director $\vec{v}_s = (0, 1, -1)$ y el eje Z tiene ecuaciones paramétricas

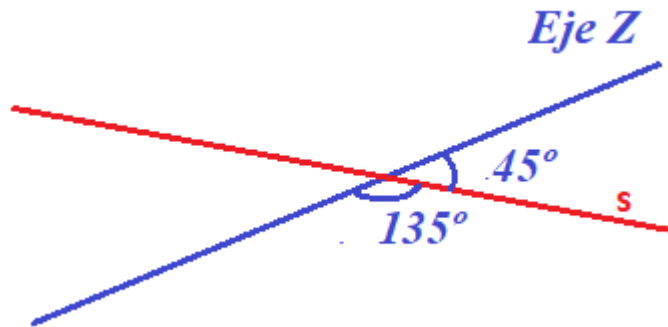
Eje Z : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$ y un vector director puede ser $\vec{u} = (0, 0, 1)$. Hallamos el ángulo formado por

las dos rectas que será el formado por sus vectores directores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (0, 0, 1) \\ \vec{v}_s = (0, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}_s) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}_s}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{(0, 0, 1)(0, 1, -1)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}_s) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 135^\circ$$

El ángulo formado por la recta s y el eje Z es de $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ radianes.



4.1 Consideremos la función real de variable real $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio y estudiar la continuidad de la función f .

4.1.2 (0.5 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.3 (1 punto) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

4.1.4 (0.5 puntos) Representar la función f .

4.1.1 La función es racional y su denominador no se anula para ningún valor real. El dominio de la función es $\mathbb{R}$.

La función es continua en todo su dominio.

4.1.2 Asíntota vertical $x = a$

Su dominio son todos los números reales y no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.

Hallamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2-2x+1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{-2} = \begin{cases} \frac{2+\sqrt{8}}{-2} = \boxed{-1-\sqrt{2} \approx -2.4 = x} \\ \frac{2-\sqrt{8}}{-2} = \boxed{-1+\sqrt{2} \approx 0.4 = x} \end{cases}$$

La función tiene dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ tomamos el valor $x = -10$ y la derivada vale

$$f'(-10) = \frac{-(-10)^2 - 2(-10) + 1}{((-10)^2 + 1)^2} = \frac{-79}{101^2} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1-\sqrt{2}).$$

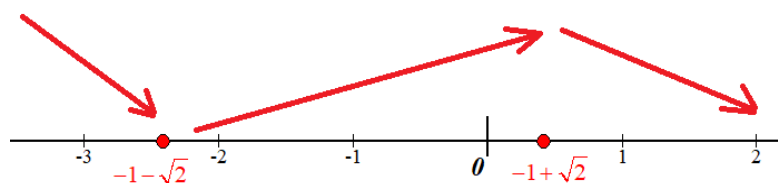
- En el intervalo $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$ tomamos el valor $x=0$ y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{-0^2 - 2 \cdot 0 + 1}{(0^2 + 1)^2} = 1 > 0. \text{ La función crece en } (-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}).$$

- En el intervalo $(-1+\sqrt{2}, +\infty)$ tomamos el valor $x=10$ y la derivada vale

$$f'(10) = \frac{-10^2 - 2 \cdot 10 + 1}{(10^2 + 1)^2} = \frac{-119}{101^2} < 0. \text{ La función decrece en } (-1+\sqrt{2}, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, +\infty)$ y crece en $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$.

4.1.3 Por el esquema anterior podemos afirmar que la función tiene un mínimo relativo en $x = -1-\sqrt{2}$ y un máximo relativo en $x = -1+\sqrt{2}$.

Comparamos el valor de la función en $-\infty$, en $x = -1-\sqrt{2}$, $x = -1+\sqrt{2}$ y en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{0+0}{1+0} = 0 \text{ en los extremos la función}$$

se aproxima a 0.

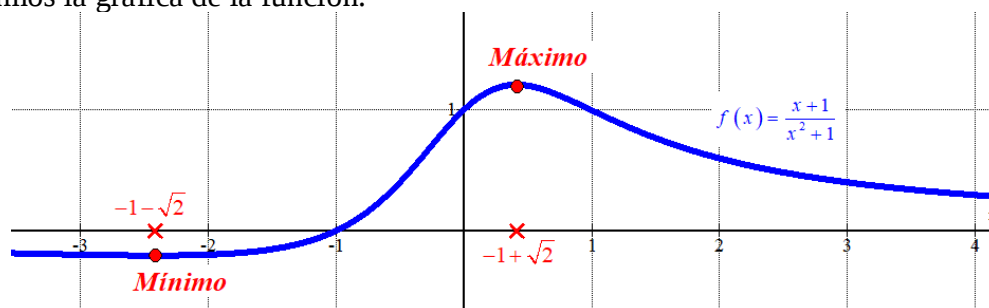
$$f(-1-\sqrt{2}) = \frac{-1-\sqrt{2}+1}{(-1-\sqrt{2})^2+1} = \frac{-\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+1} = \frac{-\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \approx -0.2$$

$$f(-1+\sqrt{2}) = \frac{-1+\sqrt{2}+1}{(-1+\sqrt{2})^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1.2$$

El mínimo relativo y absoluto de la función tiene coordenadas $\left(-1-\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$.

El máximo relativo y absoluto de la función tiene coordenadas $\left(-1+\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

4.1.4 Dibujamos la gráfica de la función.



4.2 Un decorador desea pintar una pared rectangular de 12 metros de largo por 3 de alto. Para ello supone que la esquina inferior izquierda de la pared corresponde al origen de coordenadas de un plano y pinta en la pared la curva de ecuación

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2.$$

A continuación, el decorador colorea en rojo la parte de la pared que queda por encima de la curva y en verde la que queda por debajo. Se pide:

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0,12]$.

4.2.2 (1 punto) Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.

4.2.3 (0.25 puntos) La parte verde se pinta usando botes de pintura capaces de cubrir 3 metros cuadrados cada uno. ¿Cuál es el mínimo número de botes que vamos a necesitar para pintar la parte verde?

4.2.1 Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \\ \text{Eje } X \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) = -2 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \\ \text{Eje } Y \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 = 3$$

La gráfica solo corta el eje Y en el punto A(0, 3).

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi x}{9} = 0 \rightarrow \boxed{x=0} \in [0,12] \\ \frac{\pi x}{9} = \pi \rightarrow \boxed{x=9} \in [0,12] \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $[0,9)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale

$$f'(3) = -\frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{9}\right) = -\frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0. \text{ La función decrece en } [0,9).$$

- En el intervalo $(9,12]$ tomamos $x=10$ y la derivada vale $f'(10) = -\frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{9}\right) > 0$. La función crece en $(9,12]$.

La función decrece en $[0,9)$ y crece en $(9,12]$.

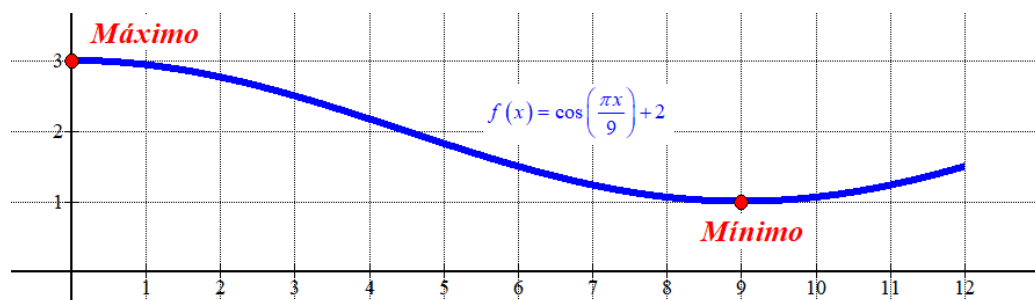
La función tiene un mínimo relativo y absoluto en $x=9$. Como

$$f(9) = \cos\left(\frac{9\pi}{9}\right) + 2 = \cos(\pi) + 2 = -1 + 2 = 1 \text{ las coordenadas del mínimo son } (9, 1).$$

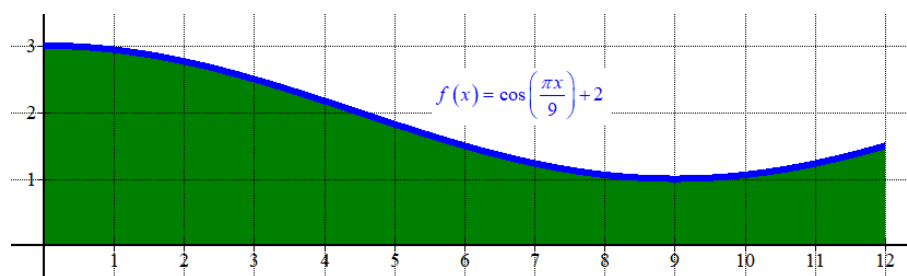
Valoramos la función en sus extremos de definición para establecer su valor máximo.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 = 3 \\ f(12) &= \cos\left(\frac{12\pi}{9}\right) + 2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 2 = 1.5 \end{aligned} \right\}$$

El máximo absoluto de la función tiene coordenadas (0,3).



4.2.2 Hallamos el área de la zona de la pared que se va a pintar de verde.

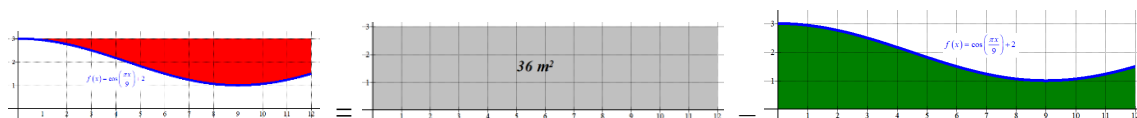


El área es el valor de la integral definida de 0 a 12 de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área verde} &= \int_0^{12} f(x) dx = \int_0^{12} \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 dx = \left[\frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x \right]_0^{12} = \\ &= \left[\frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{12\pi}{9}\right) + 24 \right] - \left[\frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 \cdot 0 \right] = \frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 24 = \boxed{24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 21.52 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

De verde se pintan $24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 21.52 \text{ m}^2$. Como el área total de la pared es de $3 \cdot 12 = 36$ metros

cuadrados, de rojo se pintan $36 - \left(24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}\right) = 12 + \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 14.48 \text{ m}^2$.



4.2.3 La parte verde tiene una superficie de 21.52 metros cuadrados. Con cada bote se pintan 3 metros cuadrados, entonces necesitamos $\frac{21.52}{3} = 7.17$ botes.

Para poder pintar la parte verde hacen falta 8 botes de pintura, sobrando un poco de pintura.

PAU Junio Reserva 2026 Matemáticas II



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: ORDINÀRIA 2026 (extra)	CONVOCATORIA: ORDINARIA 2026 (extra)
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: <i>Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.</i> La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán -0,10 puntos hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Durante la semana cultural de un centro docente, el Departamento de Matemáticas organiza un juego de azar por rondas en el que los alumnos pueden obtener puntos canjeables por pequeños premios. En cada ronda se lanza primero una moneda y, a continuación, un dado de seis caras. El resultado de la moneda combinado con el valor obtenido por el dado determina la condición para ganar la ronda:

- Si la moneda sale cara, el alumno gana la ronda si el número obtenido en el dado es mayor o igual que 5.
- Si la moneda sale cruz, el alumno gana la ronda si el número obtenido en el dado es par.

Cada ronda es independiente y sigue exactamente este mismo procedimiento. Se pide:

Responda a todos los apartados

- 1.1 (0.5 puntos)** Calcular la probabilidad de que, en una ronda cualquiera, el alumno gane.
- 1.2 (1 punto)** Sabiendo que en una ronda el alumno ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que en el lanzamiento de la moneda haya salido cara?
- 1.3 (1 punto)** Si se utiliza una moneda trucada tal que al lanzarla siempre se obtiene cara, y se realizan exactamente 7 rondas del juego, calcular la probabilidad de que el alumno gane exactamente 5 veces.

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + ay + z = 1 \\ -x + y + az = 2 \end{cases},$$

Se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro real α .

2.1.2 (1.5 puntos) Encontrar la solución del sistema cuando éste sea compatible.

2.2 Una entidad financiera utiliza modelos matriciales para simular el riesgo de una cartera de inversión compuesta por dos tipos de activos. La matriz de simulación es

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

donde a es un parámetro real de ajuste que refleja la volatilidad histórica del mercado.

2.2.1 (1 punto) El riesgo optimo se obtiene cuando se verifica la ecuación $A^2 - I = 2A$, donde

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar para qué valores de a se optimiza el riesgo.

2.2.2 (1.5 puntos) En determinadas condiciones de mercado, resulta conveniente invertir la simulación deshaciendo los cálculos previamente realizados. Para ello se necesita que la matriz de simulación admita inversa. Obtener los valores de a para los cuales se cumple esta última condición y calcular la inversa de la matriz de simulación en función del parámetro a .

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Sean las rectas $r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$. Se pide:

3.1.1 (1 punto) Estudiar, según el valor de a , la posición relativa de las dos rectas.

3.1.2 (1 punto) Calcular, si es posible, el valor de a para que las rectas se corten y, en ese caso, encontrar el punto de corte P .

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y P .

3.2 Dado el plano $\pi: 2x + y - 3 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$, se pide:

3.2.1 (1.25 puntos) Obtener la ecuación del plano π_1 perpendicular a π y que contiene a r .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular, si existe, un plano π_2 paralelo a π que contenga a r .

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Consideremos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.1 (0.75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f en el intervalo $[-1, 5]$.

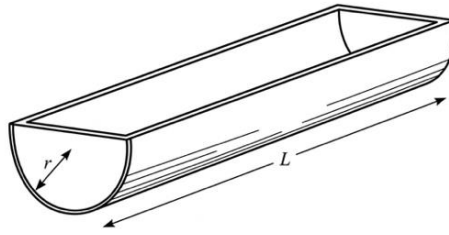
4.1.2 (0.5 puntos) Calcular los valores máximos y mínimos absolutos de la función f en el intervalo $[-1, 5]$.

4.1.3 (0.25 puntos) Representar la función f .

4.1.4 (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$.

4.2 Un comedero para animales tiene forma de semicilindro hueco abierto por la parte superior. Está construido con chapa metálica delgada. Los extremos semicirculares tienen radio r medido en cm

y la longitud del comedero es de L cm. El área total del semicilindro (incluyendo el área lateral curva y el área de las paredes semicirculares) es de $600\pi \text{ cm}^2$.



Se pide:

4.2.1 (1 punto) Encontrar la función que describe el volumen del comedero en función del radio r .

4.2.2 (1.5 puntos) Encontrar el radio r y la longitud L que maximizan el volumen del comedero y calcular dicho volumen.

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
Tabla de la distribución binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
11	0		0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1		0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0751	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2		0,9998	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3		1,0000	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4		1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5		1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0		0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0317	0,0138	0,0077	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1		0,9938	0,8816	0,6590	0,2749	0,1584	0,0850	0,0540	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032
	2		0,9998	0,9804	0,8891	0,5583	0,3907	0,2528	0,1811	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193
	3		1,0000	0,9978	0,9744	0,7946	0,6488	0,4925	0,3931	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730
	4		1,0000	0,9998	0,9957	0,9274	0,8424	0,7237	0,6315	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938
	5		1,0000	1,0000	0,9995	0,9806	0,9456	0,8822	0,8223	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9961	0,9857	0,9614	0,9336	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9972	0,9905	0,9812	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9961	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
13	0		0,8775	0,5133	0,2542	0,0550	0,0238	0,0097	0,0051	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1		0,9928	0,8646	0,6213	0,2336	0,1267	0,0637	0,0385	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017
	2		0,9997	0,9755	0,8661	0,5017	0,3326	0,2025	0,1387	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112
	3		1,0000	0,9969	0,9658	0,7473	0,5843	0,4206	0,3224	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461
	4		1,0000	0,9997	0,9935	0,9009	0,7940	0,6543	0,5520	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334
	5		1,0000	1,0000	0,9991	0,9700	0,9198	0,8346	0,7587	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9930	0,9757	0,9376	0,8965	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9944	0,9818	0,9653	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9912	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9984	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	13		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Durante la semana cultural de un centro docente, el Departamento de Matemáticas organiza un juego de azar por rondas en el que los alumnos pueden obtener puntos canjeables por pequeños premios. En cada ronda se lanza primero una moneda y, a continuación, un dado de seis caras. El resultado de la moneda combinado con el valor obtenido por el dado determina la condición para ganar la ronda:

- Si la moneda sale cara, el alumno gana la ronda si el número obtenido en el dado es mayor o igual que 5.
- Si la moneda sale cruz, el alumno gana la ronda si el número obtenido en el dado es par.

Cada ronda es independiente y sigue exactamente este mismo procedimiento. Se pide:

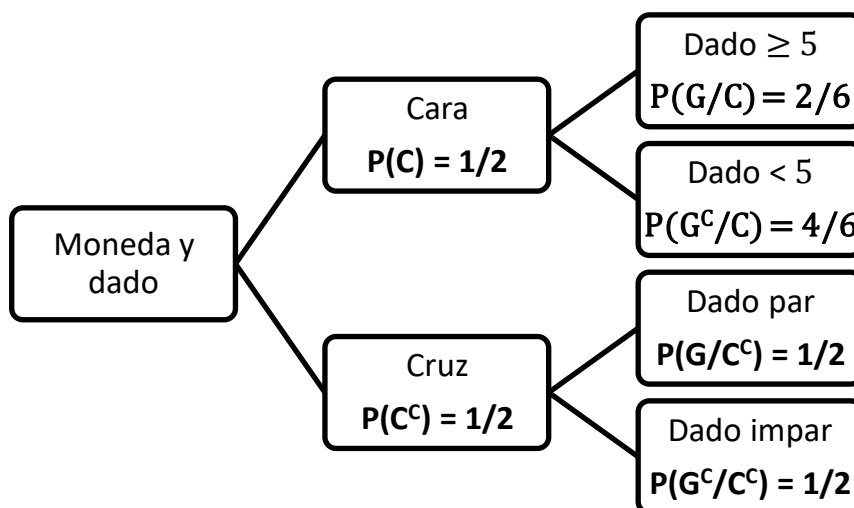
Responda a todos los apartados

1.1 (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que, en una ronda cualquiera, el alumno gane.

1.2 (1 punto) Sabiendo que en una ronda el alumno ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que en el lanzamiento de la moneda haya salido cara?

1.3 (1 punto) Si se utiliza una moneda trucada tal que al lanzarla siempre se obtiene cara, y se realizan exactamente 7 rondas del juego, calcular la probabilidad de que el alumno gane exactamente 5 veces.

Realizamos un diagrama de árbol.



1.1 Debemos calcular $P(G)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(C)P(G/C) + P(C^c)P(G/C^c) = 0.5 \cdot \frac{2}{6} + 0.5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12} \approx 0.4167$$

La probabilidad de que, en una ronda cualquiera, el alumno gane vale $\frac{5}{12} \approx 0.4167$.

1.2 Debemos calcular $P(C/G)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/G) = \frac{P(C \cap G)}{P(G)} = \frac{P(C)P(G/C)}{P(G)} = \frac{0.5 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Sabiendo que en una ronda el alumno ha ganado, la probabilidad de que en el lanzamiento de la moneda haya salido cara vale 0.4.

1.3 Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de veces que el alumno gana de 7 rondas, sabiendo que siempre sale cara. Esta variable es una binomial donde n = número de repeticiones = 7 y p = probabilidad de que una gane una ronda, saliendo cara en la moneda = $\frac{1}{3}$.

$X = B\left(7, \frac{1}{3}\right)$. Debemos calcular $P(X = 5)$.

$$P(X = 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 4) = 0.9931 - 0.9547 = \boxed{0.0384}$$

La probabilidad de que el alumno gane exactamente 5 veces vale 0.0384.

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9718	0,9547
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9997	0,9961	0,9931
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999

2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + ay + z = 1 \\ -x + y + az = 2 \end{cases},$$

Se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro real α .**2.1.2 (1.5 puntos)** Encontrar la solución del sistema cuando éste sea compatible.

2.1.1 La matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes del sistema y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a & & \\ -1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a & & \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a+1 & a+1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = a(a+1)^2 - (a+1)^2 - (a+1)^2 = (a+1)^2 [a-1-1] = (a+1)^2 (a-2) \end{aligned}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (a+1)^2 (a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, el rango de la matriz ampliada también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila primera y tercera son iguales.

También es proporcional la fila primera y segunda. El rango de A es 1.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que

resulta de quitar la primera fila y la primera y segunda columnas (proporcionales a la tercera) y calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 2, distinto del rango de A (1). El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila primera se puede obtener como

la segunda fila menos la tercera. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna primeras y calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que

resulta de quitar la primera columna y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 0 - 0 + 4 - 2 = 3 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3, distinto del rango de A (2). El sistema es incompatible (sin solución).

Conclusión: Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y si $a = 2$ o $a = -1$ el sistema es incompatible (sin solución).

2.1.2 Resolvemos el sistema para $a \neq -1$ y $a \neq 2$. Obtenemos su solución usando el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{2 - 1 + 2a - a}{(a+1)^2(a-2)} = \frac{1+a}{(a+1)^2(a-2)} = \frac{1}{(a+1)(a-2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \dots$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} &= \{ \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & a+1 \end{vmatrix} = \{ \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \} = \\ &= \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & a+1 \end{vmatrix} = a(a+1) - 3(a+1) = (a-3)(a+1) \end{aligned}$$

$$\dots = \frac{(a-3)(a+1)}{(a+1)^2(a-2)} = \boxed{\frac{a-3}{(a+1)(a-2)}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \dots$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= \{ \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{vmatrix} = \{ \text{Columna } 2^a + \text{Columna } 1^a \} = \\ &= \begin{vmatrix} a & a+1 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (a+1)(3a-3-a) = (a+1)(2a-3) \end{aligned}$$

$$\dots = \frac{(a+1)(2a-3)}{(a+1)^2(a-2)} = \boxed{\frac{2a-3}{(a+1)(a-2)}}$$

La solución del sistema para $a \neq -1$ y $a \neq 2$ es $x = \frac{1}{(a+1)(a-2)}$, $y = \frac{a-3}{(a+1)(a-2)}$,

$$z = \frac{2a-3}{(a+1)(a-2)}.$$

2.2 Una entidad financiera utiliza modelos matriciales para simular el riesgo de una cartera de inversión compuesta por dos tipos de activos. La matriz de simulación es

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

donde a es un parámetro real de ajuste que refleja la volatilidad histórica del mercado.

2.2.1 (1 punto) El riesgo optimo se obtiene cuando se verifica la ecuación $A^2 - I = 2A$, donde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Determinar para qué valores de } a \text{ se optimiza el riesgo.}$$

2.2.2 (1.5 puntos) En determinadas condiciones de mercado, resulta conveniente invertir la simulación deshaciendo los cálculos previamente realizados. Para ello se necesita que la matriz de simulación admita inversa. Obtener los valores de a para los cuales se cumple esta última condición y calcular la inversa de la matriz de simulación en función del parámetro a .

2.2.1 Resolvemos la ecuación matricial $A^2 - I = 2A$.

$$\begin{aligned} A^2 - I = 2A &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} (1-a)^2 + 1 & 1-a+1+a \\ 1-a+1+a & 1+(1+a)^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} (1-a)^2 + 1 - 1 & 2 \\ 2 & 1+(1+a)^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} (1-a)^2 & 2 \\ 2 & (1+a)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-a)^2 = 2-2a \\ (1+a)^2 = 2+2a \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 1 - 2a = 2 - 2a \\ a^2 + 2a + 1 = 2 + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1} \end{aligned}$$

Para $a = \sqrt{1} = \pm 1$ se optimiza el riesgo.

2.2.2 Para que la matriz A admita inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = (1-a)(1+a) - 1 = 1 - a^2 - 1 = -a^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Para cualquier valor de a distinto de cero la matriz A tiene inversa. Calculamos A^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}}{-a^2} = \frac{-1}{a^2} \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1-a}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{pmatrix}$$

Para cualquier valor de a distinto de cero la matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1-a}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{pmatrix}$.

3.1 Sean las rectas $r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases}$. Se pide:

3.1.1 (1 punto) Estudiar, según el valor de a , la posición relativa de las dos rectas.

3.1.2 (1 punto) Calcular, si es posible, el valor de a para que las rectas se corten y, en ese caso, encontrar el punto de corte P .

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y P .

3.1.1 Hallamos un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$r: \begin{cases} 2x + y = a \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = a - 2x \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = a - 2\lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, a, 1) \\ \vec{v}_r = (1, -2, 0) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x = a - z \end{cases} \Rightarrow -a + z + 2y + 2z = 5 \Rightarrow 2y = 5 + a - 3z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{5+a}{2} - \frac{3}{2}z \Rightarrow s: \begin{cases} x = a - \alpha \\ y = \frac{5+a}{2} - \frac{3}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s\left(a, \frac{5+a}{2}, 0\right) \\ \vec{u}_s = \left(-1, -\frac{3}{2}, 1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s\left(a, \frac{5+a}{2}, 0\right) \\ \vec{w}_s = 2\vec{u}_s = (-2, -3, 2) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -2, 0) \\ \vec{w}_s = (-2, -3, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-2} \neq \frac{-2}{-3} \neq \frac{0}{2}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan.

Obtenemos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{w}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, a, 1) \\ Q_s\left(a, \frac{5+a}{2}, 0\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = \left(a, \frac{5+a}{2}, 0\right) - (0, a, 1) = \left(a, \frac{5-a}{2}, -1\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -2, 0) \\ \vec{w}_s = 2\vec{u}_s = (-2, -3, 2) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = \left(a, \frac{5-a}{2}, -1\right) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{w}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ a & \frac{5-a}{2} & -1 \end{vmatrix} = 3 - 4a + 4 - 2 \frac{5-a}{2} =$$

$$= 3 - 4a + 4 - 5 + a = \boxed{2 - 3a}$$

Averiguamos cuando se anula el producto mixto.

$$[\vec{v}_r, \vec{w}_s, \vec{P_r Q_s}] = 0 \Rightarrow 2 - 3a = 0 \Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}$$

Para $a = \frac{2}{3}$ el producto mixto vale cero y las rectas se cortan. Para $a \neq \frac{2}{3}$ el producto mixto tiene un valor distinto de cero y las rectas se cruzan.

3.1.2 Las rectas se cortan para $a = \frac{2}{3}$. Hallamos el punto de corte de las dos rectas.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{2}{3} - 2\lambda \\ z = 1 \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \alpha \\ y = \frac{5 + \frac{2}{3}}{2} - \frac{3}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{2}{3} - 2\lambda \\ z = 1 \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \alpha \\ y = \frac{17}{6} - \frac{3}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} - \alpha = \lambda \\ \frac{17}{6} - \frac{3}{2}\alpha = \frac{2}{3} - 2\lambda \\ \boxed{\alpha = 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} - 1 = \lambda \\ \frac{17}{6} - \frac{3}{2} = \frac{2}{3} - 2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{\lambda = -\frac{1}{3}} \\ \frac{4}{3} = \frac{2}{3} - 2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{3} - 2\left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \{¡Se cumple!\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} - 2\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)}$$

El punto de corte de las dos rectas tiene coordenadas $P\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$.

3.1.3 La distancia entre el origen de coordenadas y P es el módulo del vector $\overrightarrow{OP}$.

$$\left. \begin{array}{l} P\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) - (0, 0, 0) = P\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$$

$$D(O, P) = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1^2} = \boxed{\frac{\sqrt{26}}{3} \approx 1.7 \text{ u}}$$

3.2 Dado el plano $\pi: 2x + y - 3 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$, se pide:

3.2.1 (1.25 puntos) Obtener la ecuación del plano π_1 perpendicular a π y que contiene a r .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular, si existe, un plano π_2 paralelo a π que contenga a r .

3.2.1 Un plano π_1 perpendicular a π y que contiene a r tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta y otro vector director el vector normal del plano π .

$$r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (1, -2, 0) \end{cases} \quad \pi: 2x + y - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = \vec{n} = (2, 1, 0) \\ \vec{v}_1 = \vec{v}_r = (1, -2, 0) \\ P_r(1, -1, 1) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(z-1) - (z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_1: z-1=0}$$

El plano que cumple lo pedido tiene ecuación $\pi_1: z-1=0$.

3.2.2 Estudiamos la posición relativa del plano π y la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -2, 0) \\ \vec{n} = (2, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1, -2, 0) \cdot (2, 1, 0) = 2 - 2 = 0$$

Al ser el producto escalar nulo el vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano. La recta está contenida en el plano o es paralelo a él.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y - 3 = 0 \\ \text{¿} P_r(1, -1, 1) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 1 - 1 - 3 = 0? \Rightarrow \text{¿} 2 - 1 - 3 = 0? \Rightarrow \text{¡NO!}$$

El punto $P_r(1, -1, 1)$ de la recta no pertenece al plano, por lo que la recta no está contenida en el plano. La recta es paralela al plano.

Si es posible determinar un plano π_2 paralelo a π que contenga a r .

Este plano paralelo a π tiene ecuación $\pi_2: 2x + y + D = 0$. Determinamos el valor de D obligando a que el plano π_2 contenga el punto $P_r(1, -1, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, -1, 1) \in \pi_2 \\ \pi_2: 2x + y + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi_2: 2x + y - 1 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi_2: 2x + y - 1 = 0$.

4.1 Consideremos la función real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ para $-1 \leq x \leq 5$. Se pide:

4.1.1 (0.75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f en el intervalo $[-1, 5]$.

4.1.2 (0.5 puntos) Calcular los valores máximos y mínimos absolutos de la función f en el intervalo $[-1, 5]$.

4.1.3 (0.25 puntos) Representar la función f .

4.1.4 (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$.

4.1.1 Averiguamos cuando la expresión $2x^2 - 3$ es positiva o negativa.

$$2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1.22$$

Solo pertenece al dominio de definición de la función el valor positivo de la raíz.

En el intervalo $\left[-1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ tomamos $x = 0$ y la expresión $2x^2 - 3$ vale $2 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0$.

En el intervalo $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 5\right]$ tomamos $x = 4$ y la expresión $2x^2 - 3$ vale $2 \cdot 4^2 - 3 = 29 > 0$.

Expresamos la función como una función a trozos.

$$f(x) = |2x^2 - 3| = \begin{cases} 3 - 2x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 2x^2 - 3 & \text{si } \frac{\sqrt{6}}{2} < x \leq 5 \end{cases}$$

Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$f'(x) = \begin{cases} -4x & \text{si } -1 \leq x < \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 4x & \text{si } \frac{\sqrt{6}}{2} < x \leq 5 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4x = 0 \rightarrow x = 0 \in \left[-1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \\ 4x = 0 \rightarrow x = 0 \notin \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 5\right] \end{cases}$$

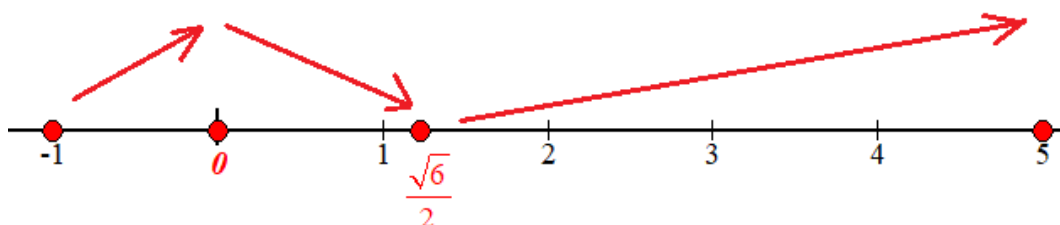
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 0$ y $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

- En el intervalo $[-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale $f'(-0.5) = -4(-0.5) = 2 > 0$.
La función crece en $[-1, 0)$.

- En el intervalo $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = -4 \cdot 1 = -4 < 0$. La función decrece en $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 5\right]$ tomamos $x=4$ y la derivada vale $f'(4) = 4 \cdot 4 = 16 > 0$. La función crece en $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 5\right]$.

La función crece en $[-1, 0) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 5\right]$ y decrece en $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

4.1.2 La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Valoramos la función en estos valores y en los extremos del intervalo de definición.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= |2(-1)^2 - 3| = 1 \\ f(0) &= |2 \cdot 0^2 - 3| = 3 \\ f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) &= \left|2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 3\right| = 0 \text{ Mínimo} \\ f(5) &= |2 \cdot 5^2 - 3| = 47 \text{ Máximo} \end{aligned} \right\}$$

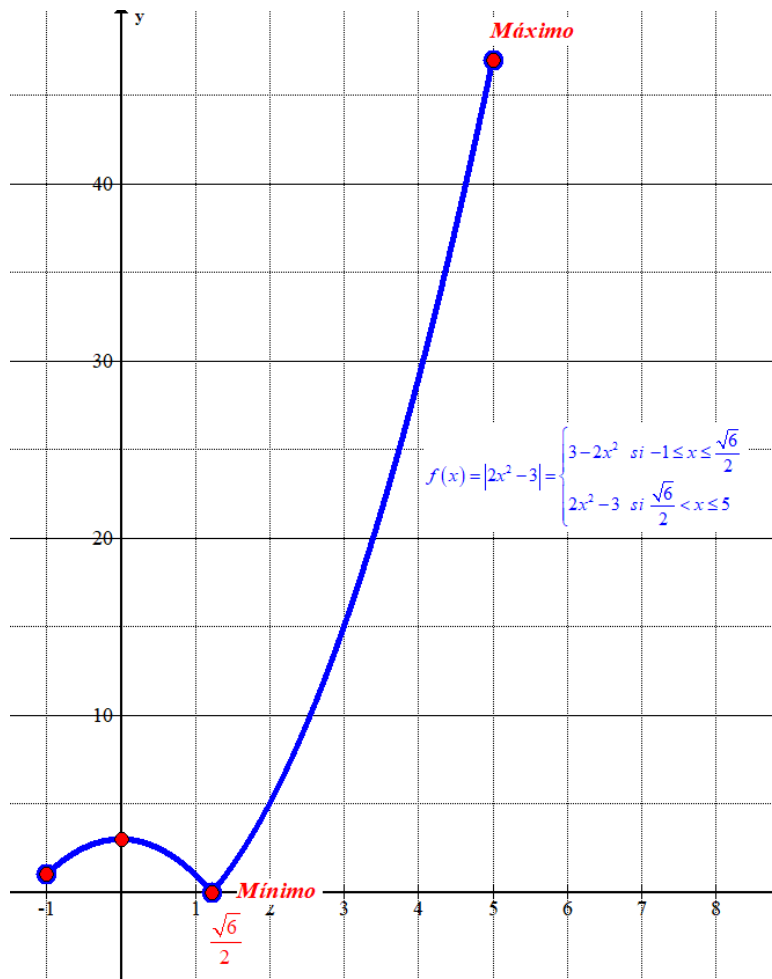
El valor máximo absoluto de la función f en el intervalo $[-1, 5]$ es 47 y se obtiene en $x=5$.

El valor mínimo absoluto de la función f en el intervalo $[-1, 5]$ es 0 y se obtiene en $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

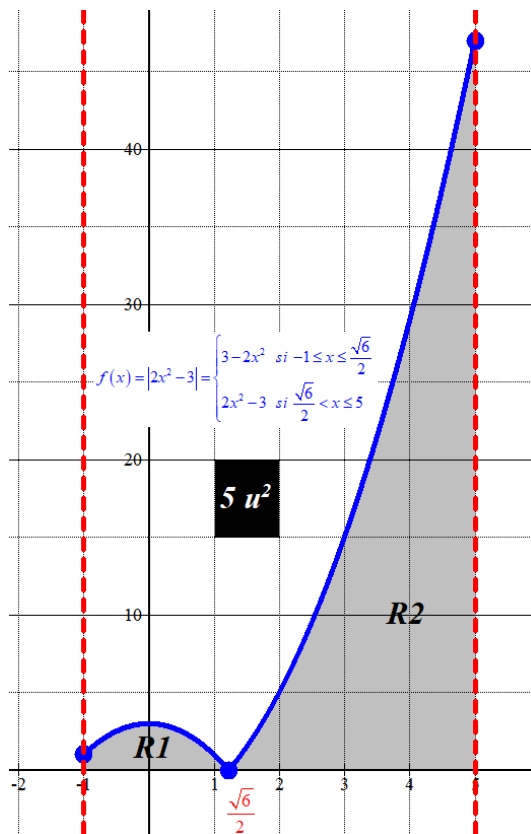
4.1.3 La gráfica de la función son dos trozos de parábolas. Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$f(x) = 3 - 2x^2$
-1	1
0	3
$\sqrt{6}/2$	0

x	$f(x) = 2x^2 - 3$
3	15
4	29
5	47



4.1.4 Dibujamos el recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$.



El área del recinto lo hallamos como la suma de las integrales definidas de -1 a $\frac{\sqrt{6}}{2}$ de la función y la integral definida de $\frac{\sqrt{6}}{2}$ a 5 de la función.

$$\text{Área } R1 = \int_{-1}^{\sqrt{6}/2} 3 - 2x^2 dx = \left[3x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^{\sqrt{6}/2} = \left[3 \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{2 \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^3}{3} \right] - \left[3(-1) - \frac{2(-1)^3}{3} \right] =$$

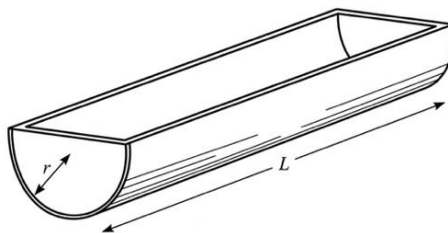
$$= \frac{3\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + 3 - \frac{2}{3} = \boxed{\sqrt{6} + \frac{7}{3}}$$

$$\text{Área } R2 = \int_{\sqrt{6}/2}^5 2x^2 - 3dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 3x \right]_{\sqrt{6}/2}^5 = \left[\frac{2 \cdot 5^3}{3} - 3 \cdot 5 \right] - \left[\frac{2 \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^3}{3} - 3 \frac{\sqrt{6}}{2} \right] =$$

$$= \frac{250}{3} - 15 - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2} = \boxed{\frac{205}{3} + \sqrt{6}}$$

El área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$, y las rectas $x = -1$, $x = 5$ e $y = 0$ es la suma de los dos valores obtenidos: $\sqrt{6} + \frac{7}{3} + \frac{205}{3} + \sqrt{6} = \frac{212}{3} + 2\sqrt{6} \approx 76.557$ unidades cuadradas.

4.2 Un comedero para animales tiene forma de semicilindro hueco abierto por la parte superior. Está construido con chapa metálica delgada. Los extremos semicirculares tienen radio r medido en cm y la longitud del comedero es de L cm. El área total del semicilindro (incluyendo el área lateral curva y el área de las paredes semicirculares) es de $600\pi \text{ cm}^2$.



Se pide:

4.2.1 (1 punto) Encontrar la función que describe el volumen del comedero en función del radio r .

4.2.2 (1.5 puntos) Encontrar el radio r y la longitud L que maximizan el volumen del comedero y calcular dicho volumen.

4.2.1 Las dos paredes semicirculares forman un círculo de radio r , por lo que su área es πr^2 . El lateral curvo tiene un área que obtenemos multiplicando la longitud de la semicircunferencia por el largo del semicilindro, es decir, $\frac{2\pi r}{2} \cdot L = \pi r L$. El área total del comedero es la suma de las dos y sabemos que tiene un valor de $600\pi \text{ cm}^2$.

$$\pi r^2 + \pi r L = 600\pi \Rightarrow r^2 + rL = 600 \Rightarrow rL = 600 - r^2 \Rightarrow L = \frac{600 - r^2}{r}$$

El volumen del comedero es el producto del área del semicírculo por la longitud del comedero (L).

$$V(r, L) = \frac{\pi r^2}{2} L$$

Como $L = \frac{600 - r^2}{r}$ obtenemos la expresión del volumen del comedero en función únicamente del radio de la pared semicircular.

$$\left. \begin{array}{l} L = \frac{600 - r^2}{r} \\ V(r, L) = \frac{\pi r^2}{2} L \end{array} \right\} \Rightarrow V(r) = \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{600 - r^2}{r} = \frac{\pi r (600 - r^2)}{2} = \frac{\pi}{2} (600r - r^3)$$

El volumen del comedero en función del radio r tiene la expresión $V(r) = \frac{\pi}{2} (600r - r^3)$.

4.2.2 Hallamos los puntos críticos de la función volumen.

$$V(r) = \frac{\pi}{2} (600r - r^3) \Rightarrow V'(r) = \frac{\pi}{2} (600 - 3r^2) = \frac{3\pi}{2} (200 - r^2)$$

$$V'(r) = 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{2} (200 - r^2) = 0 \Rightarrow 200 - r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = 200 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}}$$

Sustituimos $r = 10\sqrt{2}$ en la segunda derivada.

$$V'(r) = \frac{3\pi}{2}(200 - r^2) \Rightarrow V''(r) = \frac{3\pi}{2}(-2r) = -3\pi r \Rightarrow V''(10\sqrt{2}) = -3\pi(10\sqrt{2}) < 0$$

Para $r = 10\sqrt{2}$ la primera derivada se anula y la segunda es negativa. La función volumen tiene un máximo relativo para este valor del radio.

Si $r = 10\sqrt{2}$ entonces $L = \frac{600 - (10\sqrt{2})^2}{10\sqrt{2}} = \frac{600 - 200}{10\sqrt{2}} = \frac{400}{10\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$ y el volumen del

comedero tiene un valor de

$$V(10\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2} \left(600 \cdot 10\sqrt{2} - (10\sqrt{2})^3 \right) = \frac{\pi}{2} (6000\sqrt{2} - 2000\sqrt{2}) = 2000\pi\sqrt{2} \approx 8885.8 \text{ centímetros cúbicos.}$$

El volumen máximo del comedero es de $2000\pi\sqrt{2} \approx 8885.8 \text{ cm}^3$, que se consigue con un radio de $10\sqrt{2} \approx 14.14 \text{ cm}$ y un largo de $20\sqrt{2} \approx 28.28 \text{ cm}$.

PAU Julio 2025 Matemáticas II



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: JULIOL 2025	CONVOCATORIA: JULIO 2025
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: <u>Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.</u> La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Por cada falta de ortografía a partir de la tercera se deducirán 0,10 puntos, hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. La deducción máxima total es de un punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

La empresa TikiTak ha realizado un estudio del comportamiento de sus usuarios y ha observado que las 3/5 partes de sus publicaciones reciben un “Like”. Juana es una usuaria de TikiTak. Se pide:

- 1.1 (0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba ningún “Like” si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones?
- 1.2 (0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba más de dos “Likes” en sus cuatro publicaciones?
- 1.3 (1 punto)** Juana desea que la probabilidad de recibir al menos un “Like” sea mayor que 0.999. ¿Cuál es el menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo?

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

2.1.1 (1.25 puntos) La matriz X solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

2.1.2 (0.5 puntos) El determinante de la matriz $(3A^5B)^2$.

2.1.3 (0.75 puntos) Los valores de a y b , si existen, tales que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$.

2.2 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que dependen del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

Se pide:

- 2.2.1 (1.25 puntos)** Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a .
- 2.2.2 (1.25 puntos)** Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dados los planos $\pi_1 : x + 2y + mz = -1$, donde m es un parámetro real, y $\pi_2 : x + z = 6$.

3.1.1 (0.5 puntos) Encontrar el valor de m , si existe, para el que π_1 y π_2 son perpendiculares.

3.1.2 (1.25 puntos) Encontrar el valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45 grados.

3.1.3 (0.75 puntos) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2 .

3.2 Dado el plano $\pi : 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, -1)$ y $Q = (1, a, 1)$, calcular:

3.2.1 (1.25 puntos) Los valores del parámetro a , si existen, para los que la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π .

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Dada la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.2 (1.5 puntos) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

4.1.3 (0.5 puntos) Representar la función f .

4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.2.2 (0.25 puntos) Dibujar las gráficas de ambas funciones.

4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x = 1$ y las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
 Tabla de la distribución binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1175	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8867	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
11	0		0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1		0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0751	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2		0,9998	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3		1,0000	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4		1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5		1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0		0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0317	0,0138	0,0077	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1		0,9938	0,8816	0,6590	0,2749	0,1584	0,0850	0,0540	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032
	2		0,9998	0,9804	0,8891	0,5583	0,3907	0,2528	0,1811	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193
	3		1,0000	0,9978	0,9744	0,7946	0,6488	0,4925	0,3931	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730
	4		1,0000	0,9998	0,9957	0,9274	0,8424	0,7237	0,6315	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938
	5		1,0000	1,0000	0,9995	0,9806	0,9456	0,8822	0,8223	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9961	0,9857	0,9614	0,9336	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9972	0,9905	0,9812	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9961	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
13	0		0,8775	0,5133	0,2542	0,0550	0,0238	0,0097	0,0051	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1		0,9928	0,8646	0,6213	0,2336	0,1267	0,0637	0,0385	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017
	2		0,9997	0,9755	0,8661	0,5017	0,3326	0,2025	0,1387	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112
	3		1,0000	0,9969	0,9658	0,7473	0,5843	0,4206	0,3224	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461
	4		1,0000	0,9997	0,9935	0,9009	0,7940	0,6543	0,5520	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334
	5		1,0000	1,0000	0,9991	0,9700	0,9198	0,8346	0,7587	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9930	0,9757	0,9376	0,8965	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9944	0,9818	0,9653	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9912	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9984	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	13		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

La empresa TikiTak ha realizado un estudio del comportamiento de sus usuarios y ha observado que las $3/5$ partes de sus publicaciones reciben un “Like”. Juana es una usuaria de TikiTak. Se pide:

1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba ningún “Like” si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones?

1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba más de dos “Likes” en sus cuatro publicaciones?

1.3 (1 punto) Juana desea que la probabilidad de recibir al menos un “Like” sea mayor que 0.999. ¿Cuál es el menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo?

1.1 Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de Like que recibe Juana en sus 4 publicaciones. Esta variable es una binomial de parámetros $n = 4$ y $p = 3/5 = 0.6$.

$X = B(4, 0.6)$. Este valor de p no aparece en la tabla de la binomial. Consideramos una nueva variable aleatoria $Y = \text{Número de publicaciones sin Like de un grupo de 4}$. Los parámetros de esta binomial son $n = 4$ y $p = 2/5 = 0.4$.

Nos piden calcular $P(X = 0) = P(Y = 4)$. Miramos en la tabla adjunta y tenemos:

$$P(X = 0) = P(Y = 4) = P(X \leq 4) - P(Y \leq 3) = 1 - 0.9744 = 0.0256$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8400
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9991	0,9989	0,9987	0,9986	0,9984
4	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

1.2 Nos piden calcular $P(X \leq 2) = P(Y \geq 2)$.

$$P(X \leq 2) = P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - 0.4752 = 0.5248$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8400
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9991	0,9989	0,9987	0,9986	0,9984

1.3 Desea que $P(X \geq 1) > 0.999 \rightarrow P(Y \leq n-1) \geq 0.999$. Si buscamos en la tabla este valor.

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000 NO
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600 NO
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400 NO
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360 NO
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898 NO
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959 NO
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984 NO
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9946
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9993
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Se cumple a partir de $n = 8$. El menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo es de 8.

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)**Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2**

2.1 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

2.1.1 (1.25 puntos) La matriz X solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

2.1.2 (0.5 puntos) El determinante de la matriz $(3A^5B)^2$.

2.1.3 (0.75 puntos) Los valores de a y b , si existen, tales que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$.

2.1.1 Resolvemos la ecuación matricial $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$. Multiplicamos por $A^{-1}X$ a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} (A^{-1}X)^{-1} &= A(B^2A)^{-1} \Rightarrow (A^{-1}X)(A^{-1}X)^{-1} = (A^{-1}X)A(B^2A)^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow I = A^{-1}XA(B^2A)^{-1} \Rightarrow I(B^2A) = A^{-1}XA(B^2A)^{-1}(B^2A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow B^2A = A^{-1}XA \Rightarrow B^2AA^{-1} = A^{-1}XAA^{-1} \Rightarrow B^2 = A^{-1}X \Rightarrow AB^2 = AA^{-1}X \Rightarrow \\ &\Rightarrow X = AB^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz X solución de la ecuación es $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2.1.2 Aplicamos las propiedades de los determinantes para calcular el determinante pedido.

$$\left| (3A^5B)^2 \right| = |3A^5B|^2 = \left\{ \begin{array}{l} A^5B \text{ es una matriz } 2 \times 2 \\ |3A^5B| = 3^2 |A^5B| \end{array} \right\} = (3^2 |A^5B|)^2 = (9 |A|^5 |B|)^2 = \dots$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1, \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\dots = (9 \cdot 1^5 \cdot (-1))^2 = \boxed{81}$$

2.1.3 Calculamos las primeras potencias de la matriz B en busca de una regularidad.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B^{100} = B^{2 \cdot 50} = (B^2)^{50} = I^{50} = I$$

$$B^{99} = B^{98} B = (B^2)^{49} B = I \cdot B = B$$

Utilizamos el resultado obtenido en la igualdad planteada.

$$aB^{100} + bB^{99} = A + C \Rightarrow aI + bB = A + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 2b \\ 0 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+b & 2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 2b=0 \rightarrow \boxed{b=0} \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+0=1 \\ a-0=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=1}$$

La igualdad se cumple para $a=1$ y $b=0$.

2.2 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que dependen del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

Se pide:

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a .

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

2.2.1 La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ a & 1 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - a^2 - a - a - 0 - 1 = -a^2 - 2a - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)} = \frac{2 \pm 0}{-2} = -1$$

Surgen dos situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Convertimos este sistema en otro

triangular equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad -1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

2.2.2 Para $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ y = a - ax \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - a(a - ax) - z = -a \\ ax - a + ax + z = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - a^2 + a^2x - z = -a \\ 2ax + z = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a^2 + 1)x - z = a^2 - a \\ z = 2a - 2ax \end{cases} \Rightarrow (a^2 + 1)x - 2a + 2ax = a^2 - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2 + 2a + 1)x = a^2 + a \Rightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ a^2 + 2a + 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a^2 + a}{a^2 + 2a + 1} = \frac{a(a+1)}{(a+1)^2} = \frac{a}{a+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = a - a \frac{a}{a+1} = \frac{a^2 + a - a^2}{a+1} = \frac{a}{a+1}} \\ \boxed{z = 2a - 2a \frac{a}{a+1} = \frac{2a^2 + 2a - 2a^2}{a+1} = \frac{2a}{a+1}} \end{cases}$$

Para $a \neq -1$ la solución del sistema es $x = y = \frac{a}{a+1}$, $z = \frac{2a}{a+1}$.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)**Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2**

3.1 Dados los planos $\pi_1 : x + 2y + mz = -1$, donde m es un parámetro real, y $\pi_2 : x + z = 6$.

3.1.1 (0.5 puntos) Encontrar el valor de m , si existe, para el que π_1 y π_2 son perpendiculares.

3.1.2 (1.25 puntos) Encontrar el valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45 grados.

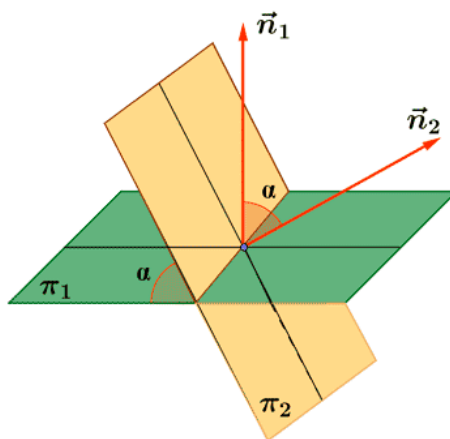
3.1.3 (0.75 puntos) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2 .

3.1.1 Para que dos planos sean perpendiculares deben serlo sus respectivos vectores normales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : x + 2y + mz = -1 \rightarrow \vec{n}_1 = (1, 2, m) \\ \pi_2 : x + z = 6 \rightarrow \vec{n}_2 = (1, 0, 1) \\ \pi_1 \perp \pi_2 \rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1, 2, m)(1, 0, 1) = 0 \Rightarrow 1 + 0 + m = 0 \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

Para $m = -1$ los planos π_1 y π_2 son perpendiculares.

3.1.2 Si el ángulo entre los dos planos es de 45° el ángulo entre sus vectores normales también es de 45° ,



Utilizamos el producto escalar.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1, 2, m) \\ \vec{n}_2 = (1, 0, 1) \\ (\pi_1, \pi_2) = 45^\circ \rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 45^\circ \\ \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(45^\circ) = \frac{|(1, 2, m) \cdot (1, 0, 1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + m^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1+m|}{\sqrt{5+m^2} \sqrt{2}} \Rightarrow \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = \frac{|1+m|}{\sqrt{5+m^2}} \Rightarrow 1 = \frac{|1+m|}{\sqrt{5+m^2}} \Rightarrow \sqrt{5+m^2} = |1+m| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5+m^2 = (1+m)^2 \Rightarrow 5+m^2 = 1+2m+m^2 \Rightarrow 4=2m \Rightarrow \boxed{m=2}$$

Para $m = 2$ los planos forman un ángulo de 45° .

3.1.3. Hallamos la ecuación de la recta intersección de los dos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : x + 2y + mz = -1 \\ \pi_2 : x + z = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + mz = -1 \\ x = 6 - z \end{array} \right\} \Rightarrow 6 - z + 2y + mz = -1 \Rightarrow 2y + (m-1)z = -7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = -7 + (1-m)z \Rightarrow y = \frac{-7}{2} + \frac{1-m}{2}z \Rightarrow r : \begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = \frac{-7}{2} + \frac{1-m}{2}\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

La ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2 es $r : \begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = \frac{-7}{2} + \frac{1-m}{2}\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

3.2 Dado el plano $\pi: 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, -1)$ y $Q = (1, a, 1)$, calcular:

3.2.1 (1.25 puntos) Los valores del parámetro a , si existen, para los que la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Παρά $a=1$, ελ πυντο σιμ[τριχο δε Q ρεσπεχτο δελ πλανο π .

3.2.1 Para que la recta que pasa por P y Q esté contenida en el plano basta con que los puntos estén en el plano.

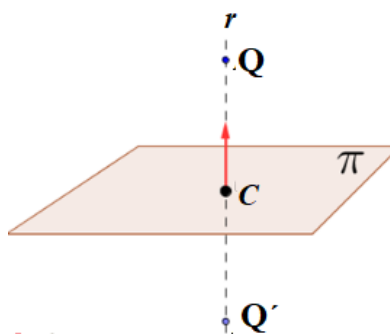
$$\left. \begin{array}{l} \pi: 3x + y - z = 2 \\ P = (0, 1, -1) \in \pi \\ Q = (1, a, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot 0 + 1 - (-1) = 2 \\ 3 \cdot 1 + a - 1 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 + 1 = 2 \\ a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Para $a = 0$ la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano.

3.2.2. Para $a = 1$ el punto Q tiene coordenadas $Q(1, 1, 1)$.

Tenemos que hallar el punto Q' simétrico de Q respecto del plano π .

Hallamos la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto Q . Luego hallamos el punto C de corte de recta r y el plano. Por último, determinamos el punto Q' simétrico de Q respecto del plano π .



Hallamos la ecuación de la recta r . Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano $\pi: 3x + y - z = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} Q(1, 1, 1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (3, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Hallo el punto C de corte de la recta r y el plano resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \pi: 3x + y - z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(1 + 3\lambda) + 1 + \lambda - (1 - \lambda) = 2 \Rightarrow 3 + 9\lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{11} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 3 \cdot \frac{-1}{11} = \frac{8}{11} \\ y = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \\ z = 1 + \frac{1}{11} = \frac{12}{11} \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11}\right)}$$

Las coordenadas del punto simétrico Q' las hallamos sumando al punto C el vector $\overrightarrow{QC}$.

$$\left. \begin{array}{l} C\left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11}\right) \\ Q(1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{QC} = \left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11}\right) - (1,1,1) = \left(\frac{-3}{11}, \frac{-1}{11}, \frac{1}{11}\right)$$

$$Q' = C + \overrightarrow{QC} = \left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11}\right) + \left(\frac{-3}{11}, \frac{-1}{11}, \frac{1}{11}\right) = \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right)$$

El punto simétrico de Q respecto del plano π es $Q'\left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right)$.

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)**Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2****4.1** Dada la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .4.1.2 (1.5 puntos) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .4.1.3 (0.5 puntos) Representar la función f .

4.1.1 Es una función racional y su dominio son todos los números reales menos los que anulan su denominador.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1} = \text{No existe}$$

Su denominador nunca se anula y el dominio de la función es $\mathbb{R}$.**Asíntotas verticales.** $x = a$

No existen, pues el dominio lo forman todos los números reales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.**Asíntota oblicua.** $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -1$ y $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{1 - (-2)^2}{((-2)^2 + 1)^2} = \frac{-3}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{1 - 0^2}{(0^2 + 1)^2} = 1 > 0$. La

función crece en $(-1, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{1-2^2}{(2^2+1)^2} = \frac{-3}{25} < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(-1, 1)$.

4.1.2. Por el estudio anterior sabemos que la evolución de la función es el que describe el esquema siguiente.



La función presenta un mínimo relativo en $x=-1$ y un máximo relativo en $x=1$.

Para $x=-1$ la función vale $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = \frac{-1}{2}$. El mínimo relativo tiene coordenadas $(-1, -1/2)$.

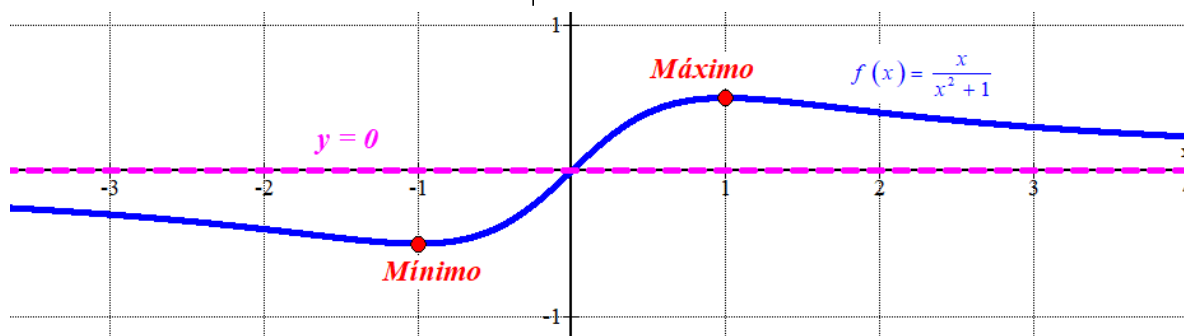
Para $x=1$ la función vale $f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$. El máximo relativo tiene coordenadas $(1, 1/2)$.

Para decidir si son máximos y mínimos absolutos calculamos el límite de la función en $+\infty$ y $-\infty$. Lo hemos calculado en el apartado anterior y los límites valen 0.

El máximo absoluto de la función es $\frac{1}{2}$ y el mínimo absoluto de la función es $\frac{-1}{2}$.

4.1.3. Con toda la información obtenida y una pequeña tabla de valores dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
-7	-0.14
-3	-0.3
-1	-0.5
0	0
1	0.5
3	0.3
7	0.14



4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.2.2 (0.25 puntos) Dibujar las gráficas de ambas funciones.

4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x=1$ y las gráficas de las dos funciones $y=f(x)$ e $y=g(x)$.

4.2.1 La función $f(x)$ es una función racional y su dominio son todos los números reales menos los que anulan su denominador.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = +\infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2) - 1 \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

Esta expresión de la derivada no se anula. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 0$ (valor excluido del dominio).

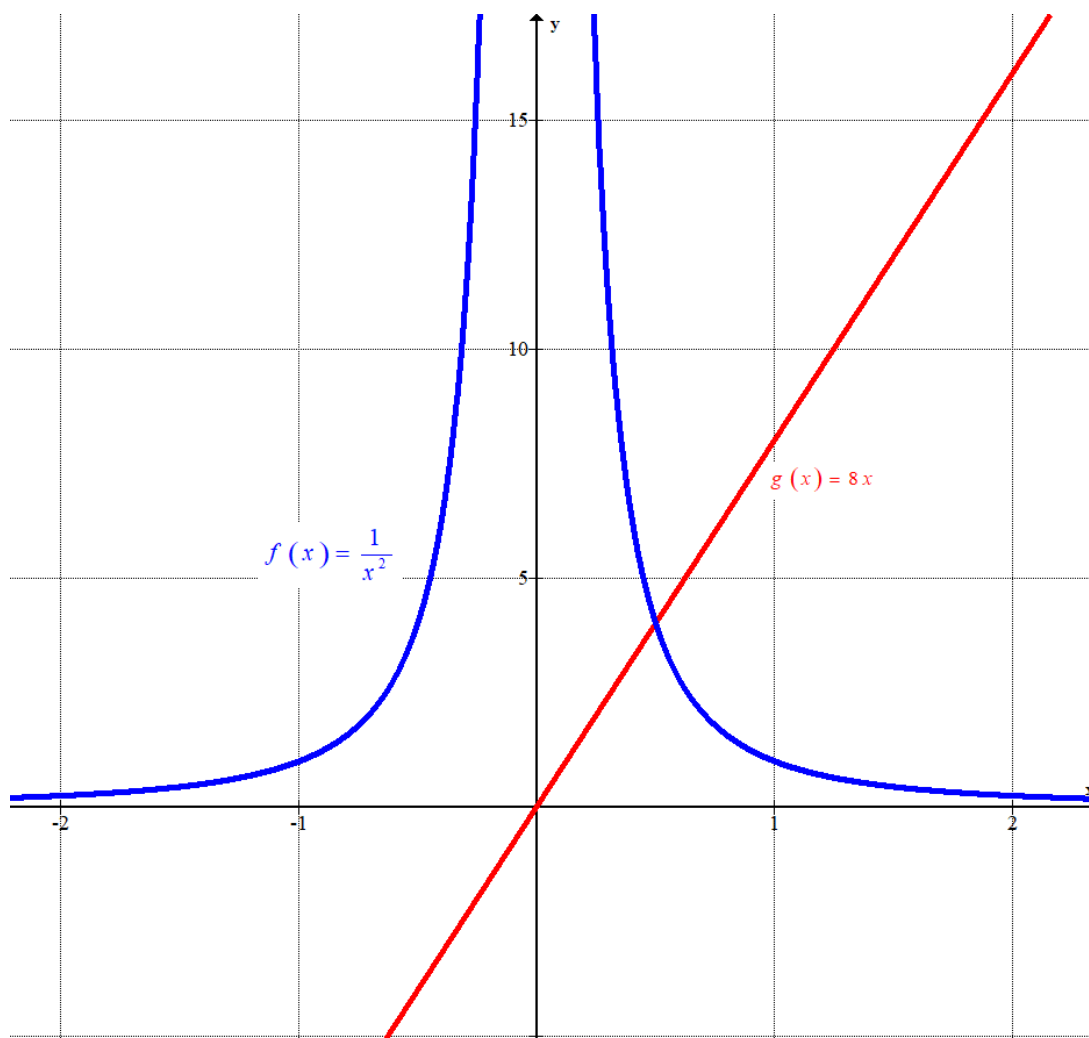
- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{-2}{(-2)^3} = \frac{1}{4} > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-2}{2^3} = \frac{-1}{4} < 0$. La función decrece en $(0, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$.

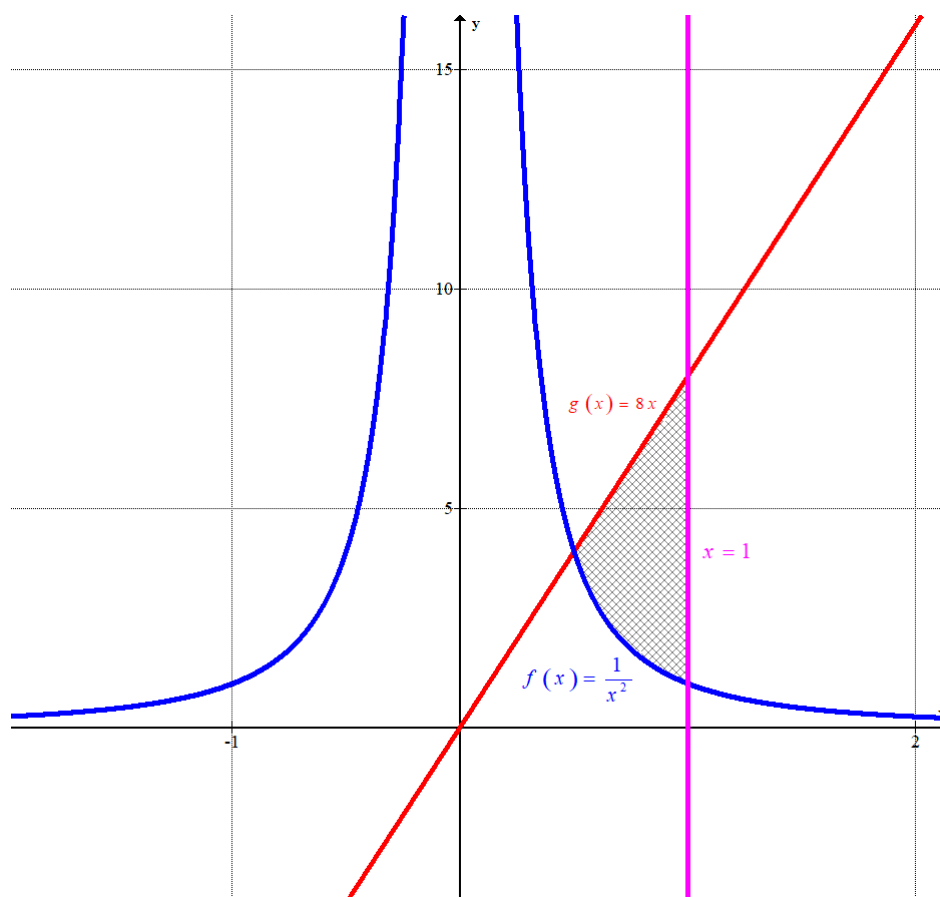
4.2.2. Hacemos una tabla de valores de cada función y dibujamos sus gráficas respectivas.

x	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
-2	0.25
-1	1
-0.5	4
0.5	4
1	1
2	0.25

x	$g(x) = 8x$
0.5	4
1	8



4.2.3. Dado que tenemos las gráficas de ambas funciones dibujamos el recinto del cual queremos hallar el área.



Averiguamos cuando las gráficas de las dos funciones se cortan.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 8x = \frac{1}{x^2} \Rightarrow 8x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

El área del recinto es el valor de la integral definida entre 0.5 y 1 de $g(x) - f(x)$.

$$\int_{0.5}^1 g(x) - f(x) dx = \int_{0.5}^1 8x - \frac{1}{x^2} dx = \int_{0.5}^1 8x - x^{-2} dx = \left[4x^2 - \frac{x^{-1}}{-1} \right]_{0.5}^1 = \left[4x^2 + \frac{1}{x} \right]_{0.5}^1 =$$

$$= \left[4 \cdot 1^2 + \frac{1}{1} \right] - \left[4 \cdot 0.5^2 + \frac{1}{0.5} \right] = 4 + 1 - 1 - 2 = \boxed{2}$$

El área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x=1$ y las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ tiene un valor de 2 unidades cuadradas.

PAU Julio 2025 Reserva Matemáticas II



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: JULIOL 2025 (reserva)	CONVOCATORIA: JULIO 2025 (reserva)
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: <u>Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.</u> La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Por cada falta de ortografía a partir de la tercera se deducirán 0,10 puntos, hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. La deducción máxima total es de un punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Se ha realizado una encuesta a 120 miembros de un club de lectura sobre sus preferencias literarias. La siguiente tabla muestra los resultados clasificados por edad y tipo de obra preferido.

Edad/Tipo de obra	Novela	Poesía	Obras de teatro	Ensayos
< 25 años	17	6	7	1
25 - 60 años	22	17	10	3
> 60 años	8	12	11	6

- 1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el tipo de obra preferido de una persona seleccionada al azar no sea el ensayo?
- 1.2 (0.75 puntos) Si se sabe que un miembro del club NO tiene como tipo de obra preferido la poesía, ¿cuál es la probabilidad de que tenga 25 años o más?
- 1.3 (1 punto) Dados 10 miembros del club que tienen entre 25 y 60 años, ambos incluidos. ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 3 de ellos tengan como tipo de obra preferido o bien las obras de teatro o bien los ensayos?

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular.

2.1.1 (0.75 puntos) La matriz X , si existe, tal que $2AX = BX + I$, siendo I la matriz identidad 2×2 .

2.1.2 (0.75 puntos) Si existen, los valores del parámetro real α tales que $4A^2 + \alpha A - I = 0$, siendo 0 la matriz nula 2×2 .

2.1.3 (1 punto) A^{12} .

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

donde a es un parámetro real, Se pide:

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular las soluciones del sistema éste sea compatible.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dado el plano $\pi: 2x - z = 1$, calcular:

3.1.1 (1.25 puntos) Si existe, el plano perpendicular a π que contiene a la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = y \end{cases}$.

3.1.2 (1.25 puntos) Los planos paralelos a π cuya distancia al punto $P=(0,1,2)$ es 2.

3.2 Se considera el plano π con ecuación $2x + 3y - z = 0$ y los cuatro puntos $A = (0,0,0)$, $B = (10,0,-20)$, $C = (0,15,-30)$ y $D = (1,2,-1)$.

3.2.1 (0.5 puntos) Comprobar si el triángulo ABC pertenece al plano π .

3.2.2 (0.5 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

3.2.3 (1.5 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C .

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9 - x^2}$

4.1.1 (0.75 puntos) Calcular el dominio de definición, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.2 (0.25 puntos) Dibujar la curva $y = f(x)$.

4.1.3 (0.75 puntos) Hallar todas las primitivas de f .

4.1.4 (0.75 puntos) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = f(x)$, $x = -1$, $x = 1$ y el eje de abscisas.

4.2 Se quiere construir un bote de refresco cilíndrico de volumen 33 cm^3 que tenga área total (incluyendo las tapas) mínima. Se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Expresar el área total del bote en función del radio de su base y de su altura.

4.2.2 (1.5 puntos) Obtener las dimensiones que minimizan el área total del bote.

4.2.3 (0.5 puntos) *Μαλλον διχρηα ρεα.*

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
 Tabla de la distribución binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1175	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8867	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
11	0		0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1		0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0751	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2		0,9998	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3		1,0000	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4		1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5		1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0		0,8864	0,5404	0,2824	0,0687	0,0317	0,0138	0,0077	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1		0,9938	0,8816	0,6590	0,2749	0,1584	0,0850	0,0540	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032
	2		0,9998	0,9804	0,8891	0,5583	0,3907	0,2528	0,1811	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193
	3		1,0000	0,9978	0,9744	0,7946	0,6488	0,4925	0,3931	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730
	4		1,0000	0,9998	0,9957	0,9274	0,8424	0,7237	0,6315	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938
	5		1,0000	1,0000	0,9995	0,9806	0,9456	0,8822	0,8223	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9961	0,9857	0,9614	0,9336	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9972	0,9905	0,9812	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9961	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
13	0		0,8775	0,5133	0,2542	0,0550	0,0238	0,0097	0,0051	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1		0,9928	0,8646	0,6213	0,2336	0,1267	0,0637	0,0385	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017
	2		0,9997	0,9755	0,8661	0,5017	0,3326	0,2025	0,1387	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112
	3		1,0000	0,9969	0,9658	0,7473	0,5843	0,4206	0,3224	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461
	4		1,0000	0,9997	0,9935	0,9009	0,7940	0,6543	0,5520	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334
	5		1,0000	1,0000	0,9991	0,9700	0,9198	0,8346	0,7587	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905
	6		1,0000	1,0000	0,9999	0,9930	0,9757	0,9376	0,8965	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9944	0,9818	0,9653	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095
	8		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9912	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9984	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983
	12		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	13		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Se ha realizado una encuesta a 120 miembros de un club de lectura sobre sus preferencias literarias. La siguiente tabla muestra los resultados clasificados por edad y tipo de obra preferido.

Edad/Tipo de obra	Novela	Poesía	Obras de teatro	Ensayos
< 25 años	17	6	7	1
25 - 60 años	22	17	10	3
> 60 años	8	12	11	6

1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el tipo de obra preferido de una persona seleccionada al azar no sea el ensayo?

1.2 (0.75 puntos) Si se sabe que un miembro del club NO tiene como tipo de obra preferido la poesía, ¿cuál es la probabilidad de que tenga 25 años o más?

1.3 (1 punto) Dados 10 miembros del club que tienen entre 25 y 60 años, ambos incluidos. ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 3 de ellos tengan como tipo de obra preferido o bien las obras de teatro o bien los ensayos?

1.1 Completamos la tabla sumando filas y columnas.

Edad/Tipo de obra	Novela	Poesía	Obras de teatro	Ensayos	TOTALES
< 25 años	17	6	7	1	31
25 - 60 años	22	17	10	3	52
> 60 años	8	12	11	6	37
TOTALES	47	35	28	10	120

Hay 47 miembros que prefieren novela, 35 poesía y 28 obras de teatro. Esto hace un total de $120 - 10 = 110$ que no prefieren el ensayo. La probabilidad de que el tipo de obra preferido de una persona seleccionada al azar no sea el ensayo vale $\frac{110}{120} = \frac{11}{12} \approx 0.9167$.

1.2 Hay $120 - 35 = 85$ miembros que no prefieren la poesía y de estos $17 + 7 + 1 = 25$ tienen menos de 25 años, por lo que $85 - 25 = 60$ tienen 25 años o más. La probabilidad de que la persona elegida que no le gusta la poesía tenga 25 años o más vale $\frac{60}{85} = \frac{12}{17} \approx 0.7059$.

1.3 Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de miembros con edad comprendida entre 25 y 60 años de un grupo de 10 que prefieren obras de teatro o ensayos.

Esta variable es una binomial de parámetros $n = 10$ y $p =$ probabilidad de que un miembro con edad entre 25 y 60 años prefiera obras de teatro o ensayos $= \frac{10 + 3}{52} = \frac{13}{52} = 0.25$. $X = B(10, 0.25)$.

Nos piden calcular $P(X \leq 3)$. Mirando en la tabla tenemos que $P(X \leq 3) = 0.7759$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,4356	0,2
	3		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,7759	0,3
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,4
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,5
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,6
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,7
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,8
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0

2.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular.

2.1.1 (0.75 puntos) La matriz X , si existe, tal que $2AX = BX + I$, siendo I la matriz identidad 2×2 .

2.1.2 (0.75 puntos) Si existen, los valores del parámetro real α tales que $4A^2 + \alpha A - I = 0$, siendo 0 la matriz nula 2×2 .

2.1.3 (1 punto) A^{12} .

2.1.1 Despejamos X en la ecuación matricial.

$$2AX = BX + I \Rightarrow 2AX - BX = I \Rightarrow (2A - B)X = I \Rightarrow X = (2A - B)^{-1}$$

Determinamos la inversa de la matriz $2A - B$.

$$2A - B = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|2A - B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

$$(2A - B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((2A - B)^T)}{|2A - B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación es $X = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

2.1.2 Buscamos los valores de α para que se cumpla lo pedido.

$$4A^2 + \alpha A - I = 0 \Rightarrow 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & \alpha \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & \alpha \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & \alpha \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

Para $\alpha = 0$ se cumple la igualdad.

2.1.3 Calculamos las primeras potencias de la matriz A en busca de una regularidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} I$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} A$$

$$A^4 = AA^3 = A \frac{1}{4} A = \frac{1}{4} A^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} I = \frac{1}{4^2} I$$

$$A^5 = AA^4 = A \frac{1}{4^2} I = \frac{1}{4^2} A$$

$$A^6 = AA^5 = A \frac{1}{4^2} A = \frac{1}{4^2} A^2 = \frac{1}{4^2} \frac{1}{4} I = \frac{1}{4^3} I$$

$$A^{12} = A^6 A^6 = \frac{1}{4^3} I \frac{1}{4^3} I = \frac{1}{4^6} I = \begin{pmatrix} \frac{1}{4^6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^6} \end{pmatrix}$$

Hemos comprobado que $A^{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4^6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4096} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4096} \end{pmatrix}.$

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1+a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases}$$

donde a es un parámetro real, Se pide:

2.2.1 **(1.25 puntos)** Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.2.2 **(1.25 puntos)** Calcular las soluciones del sistema éste sea compatible.

2.2.1 La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1+a & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1-a \\ 1+a & 2 & 1 & a \\ a & -1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1+a & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + a - 2 - 2a - 4a - 1 - a + 3 = 6 - 6a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 6 - 6a = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Surgen dos situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Convertimos este sistema en otro

triangular equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 3 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \\ -3 \quad 3 \quad -3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 4 \quad -1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 6 \quad 6 \quad 3 \quad 3 \\ -6 \quad -2 \quad -4 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 4 \quad -1 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 4 \quad -1 \quad 0 \\ 0 \quad -4 \quad 1 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{3 \quad 1 \quad 2 \quad 0}^{A/B} \\ \hline 0 & 4 & -1 & 3 \\ \hline 0 & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & -3 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

2.2.2 Para $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1+a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1+a)x + 2y + z = a \\ z = 1 - a + y - ax \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 2(1 - a + y - ax) = 1 - a \\ (1+a)x + 2y + 1 - a + y - ax = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 2 - 2a + 2y - 2ax = 1 - a \\ x + \cancel{ax} + 2y + 1 - a + y - \cancel{ax} = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-2a)x + 3y = -1 + a \\ x + 3y = 2a - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3-2a)x + 3y = -1 + a \\ x = 2a - 1 - 3y \end{cases} \Rightarrow (3-2a)(2a-1-3y) + 3y = -1 + a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a - 3 - 9y - 4a^2 + 2a + 6ay + 3y = -1 + a \Rightarrow (-6 + 6a)y = 4a^2 - 7a + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{4a^2 - 7a + 2}{6a - 6} \Rightarrow x = 2a - 1 - 3 \frac{4a^2 - 7a + 2}{6a - 6} = 2a - 1 - \frac{4a^2 - 7a + 2}{2a - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\cancel{4a^2} - 2a - 4a + \cancel{2} - \cancel{4a^2} + 7a - \cancel{2}}{2a - 2} = \frac{a}{2a - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 1 - a + \frac{4a^2 - 7a + 2}{6a - 6} - a \frac{a}{2a - 2} = \frac{6a - 6 - 6a^2 + 6a + 4a^2 - 7a + 2}{6a - 6} - \frac{3a^2}{6a - 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{-5a^2 + 5a - 4}{6a - 6}$$

Para $a \neq 1$ la solución del sistema es $x = \frac{a}{2a-2}$, $y = \frac{4a^2 - 7a + 2}{6a - 6}$, $z = \frac{-5a^2 + 5a - 4}{6a - 6}$.

OTRA FORMA DE RESOLVER el apartado 2.2.2

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1+a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 3ª} \\ (1+a)x + 2y + z = a \\ \hline -ax + y - z = -1 + a \\ \hline x + 3y = -1 + 2a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 3ª} \\ 3x + y + 2z = 1 - a \\ \hline -2ax + 2y - 2z = -2 + 2a \\ \hline (3-2a)x + 3y = -1 + a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (3-2a)x + 3y = -1 + a \\ x + 3y = -1 + 2a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª} - \text{Ecuación 2ª} \\ (3-2a)x + 3y = -1 + a \\ \hline -x - 3y = 1 - 2a \\ \hline (2-2a)x = -a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (2-2a)x = -a \\ x + 3y = -1 + 2a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = \frac{-a}{2-2a}} \\ x + 3y = -1 + 2a \\ ax - y + z = 1 - a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-a}{2-2a} + 3y = -1 + 2a \\ a \frac{-a}{2-2a} - y + z = 1 - a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y = -1 + 2a + \frac{a}{2-2a} = \frac{-2+2a+4a-4a^2+a}{2-2a} = \frac{-4a^2+7a-2}{2-2a} \\ \frac{-a^2}{2-2a} - y + z = 1 - a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = \frac{-4a^2+7a-2}{3(2-2a)}} \\ -y + z = 1 - a + \frac{a^2}{2-2a} = \frac{2-2a-2a+2a^2+a^2}{2-2a} = \frac{3a^2-4a+2}{2-2a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{-4a^2+7a-2}{3(2-2a)} + z = \frac{3a^2-4a+2}{2-2a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{3a^2-4a+2}{2-2a} + \frac{-4a^2+7a-2}{3(2-2a)} = \frac{9a^2-12a+6-4a^2+7a-2}{3(2-2a)} = \boxed{\frac{5a^2-5a+4}{3(2-2a)}} = z$$

3.1 Dado el plano $\pi: 2x - z = 1$, calcular:

3.1.1 (1.25 puntos) Si existe, el plano perpendicular a π que contiene a la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = y \end{cases}$.

3.1.2 (1.25 puntos) Los planos paralelos a π cuya distancia al punto $P=(0,1,2)$ es 2.

3.1.1 El plano π' perpendicular a π tiene como vector director el vector normal de π . Otro vector director del plano π' es el vector director de la recta r . También debe contener cualquier punto de la recta.

$$\pi: 2x - z = 1 \rightarrow \vec{n} = (2, 0, -1)$$

$$r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y \rightarrow x = \frac{1}{2}y \\ z = y \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \frac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, 0, 0) \\ \vec{v}_r = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (2, 0, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) \\ P_r(0, 0, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}y + 2z - 2y + x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \frac{5}{2}y + 2z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': 2x - 5y + 4z = 0}$$

El plano perpendicular a π que contiene a la recta r tiene ecuación $\pi': 2x - 5y + 4z = 0$.

3.1.2 Un plano paralelo a $\pi: 2x - z - 1 = 0$ tiene ecuación $\pi_1: 2x - z + D = 0$. Y debe cumplir que la distancia al punto P valga 2.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: 2x - z + D = 0 \\ P(0, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi_1, P) = 2 \Rightarrow \frac{|2 \cdot 0 - 2 + D|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|D - 2|}{\sqrt{5}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |D - 2| = 2\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} D - 2 = 2\sqrt{5} \rightarrow D_1 = 2\sqrt{5} + 2 \rightarrow \boxed{\pi_1: 2x - z + 2 + 2\sqrt{5} = 0} \\ -D + 2 = 2\sqrt{5} \rightarrow 2 - 2\sqrt{5} = D_2 \rightarrow \boxed{\pi_2: 2x - z + 2 - 2\sqrt{5} = 0} \end{cases}$$

Los planos buscados son $\pi_1: 2x - z + 2 + 2\sqrt{5} = 0$ y $\pi_2: 2x - z + 2 - 2\sqrt{5} = 0$.

3.2 Se considera el plano π con ecuación $2x+3y-z=0$ y los cuatro puntos $A = (0,0,0)$, $B = (10,0,-20)$, $C = (0,15,-30)$ y $D = (1,2,-1)$.

3.2.1 (0.5 puntos) Comprobar si el triángulo ABC pertenece al plano π .

3.2.2 (0.5 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

3.2.3 (1.5 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C . ▢

3.2.1 Comprobamos que los puntos A , B y C pertenecen al plano.

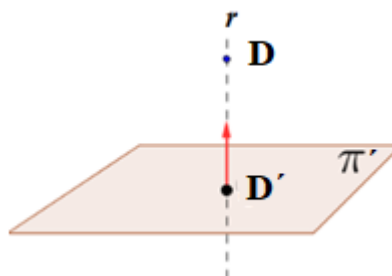
$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x+3y-z=0 \\ \text{¿}A(0,0,0) \in \pi? \\ \text{¿}B(10,0,-20) \in \pi? \\ \text{¿}C(0,15,-30) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{¿}2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0? \\ \text{¿}2 \cdot 10 + 3 \cdot 0 - (-20) = 0? \\ \text{¿}2 \cdot 0 + 3 \cdot 15 - (-30) = 0? \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{¿}0 + 0 - 0 = 0? \rightarrow SI \\ \text{¿}20 + 0 + 20 = 0? \rightarrow NO \\ \text{¿}0 + 45 + 30 = 0? \rightarrow NO \end{array} \right\}$$

Los puntos B y C no pertenecen al plano. El triángulo no pertenece al plano.

3.2.2. Calculamos el valor de la distancia pedida.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x+3y-z=0 \\ D(1,2,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(D, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{14}}{14} \approx 2.4u$$

3.2.3 Debemos hallar las coordenadas del punto D' del dibujo.



Hallamos la ecuación del plano π' que contiene los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} A(0,0,0) \\ B(10,0,-20) \\ C(0,15,-30) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(0,0,0) \in \pi' \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (10,0,-20) - (0,0,0) = (10,0,-20) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,15,-30) - (0,0,0) = (0,15,-30) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y & z \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & 15 & -30 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 150z + 300y + 300x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': 2x + 2y + z = 0}$$

Hallamos la ecuación de la recta r . Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano $\pi': 2x + 2y + z = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} D(1, 2, -1) \in r \\ \pi': 2x + 2y + z = 0 \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n} = (2, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto D' de corte de la recta r y el plano resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \\ \pi': 2x + 2y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 4\lambda + 4 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0 \Rightarrow 9\lambda + 5 = 0 \Rightarrow 9\lambda = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-5}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{-5}{9} = \frac{-1}{9} \\ y = 2 + 2\frac{-5}{9} = \frac{8}{9} \\ z = -1 - \frac{5}{9} = \frac{-14}{9} \end{cases} \Rightarrow D'\left(\frac{-1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{-14}{9}\right)$$

Las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A, B y C son $D'\left(\frac{-1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{-14}{9}\right)$.

4.1 Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$

4.1.1 (0.75 puntos) Calcular el dominio de definición, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.2 (0.25 puntos) Dibujar la curva $y = f(x)$.

4.1.3 (0.75 puntos) Hallar todas las primitivas de f .

4.1.4 (0.75 puntos) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = f(x)$, $x = -1$, $x = 1$ y el eje de abscisas.

4.1.1 Es una función racional y su dominio son todos los números reales menos los que anulan su denominador.

$$f(x) = \frac{x}{9-x^2} \Rightarrow 9-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = -3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{9-x^2} = \frac{-3}{9-(-3)^2} = \frac{-3}{0} = \infty$$

$x = -3$ es asíntota vertical.

¿ $x = 3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{9-x^2} = \frac{3}{9-3^2} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x = 3$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

Buscamos los puntos críticos de la función.

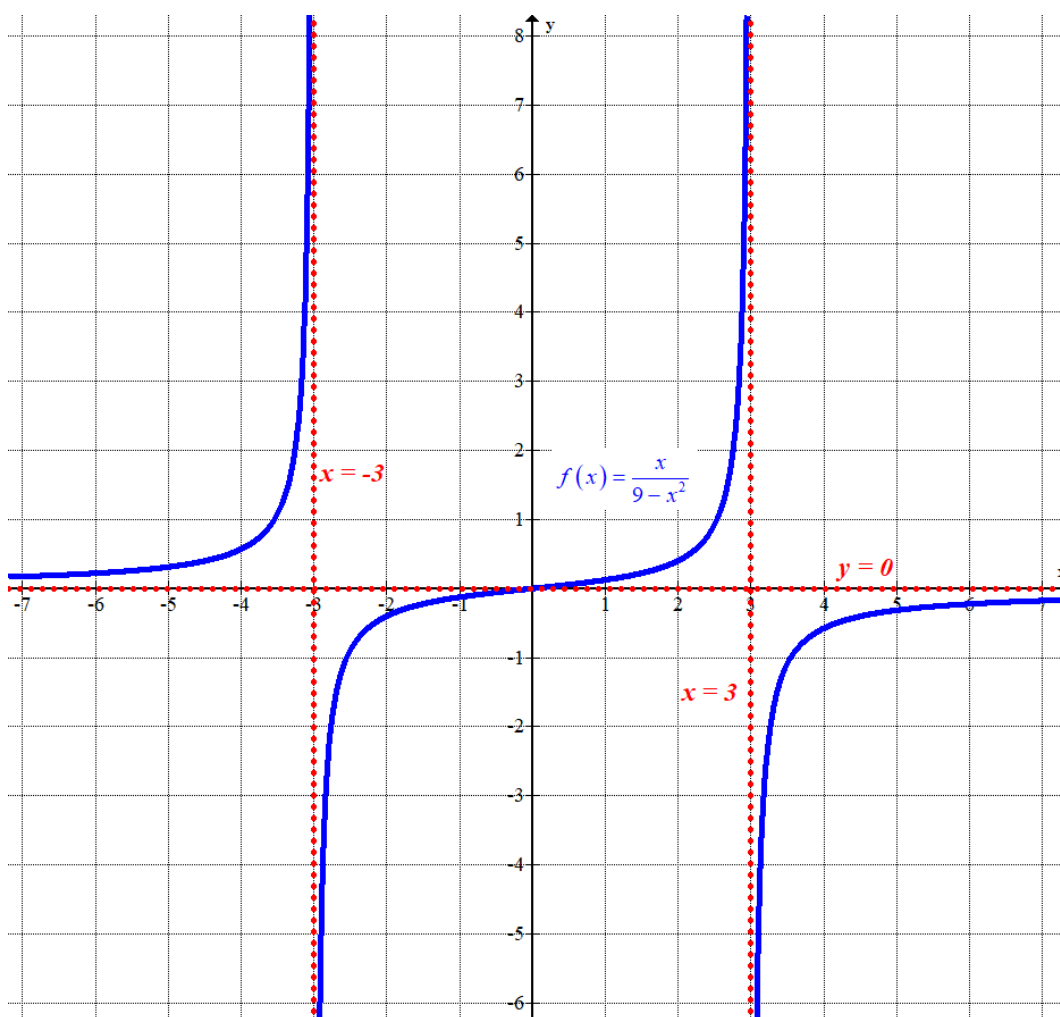
$$f(x) = \frac{x}{9-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(9-x^2) - x(-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{9-x^2+2x^2}{(9-x^2)^2} = \frac{9+x^2}{(9-x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{9+x^2}{(9-x^2)^2} = 0 \Rightarrow 9+x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \sqrt{-9} \text{ No existe}$$

La función no presenta puntos críticos. La derivada va a ser siempre positiva pues el numerador y el denominador son siempre positivos. La función es creciente en todo su dominio $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

4.1.2. Realizamos una pequeña tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{x}{9-x^2}$
-4	0.57
-2	-0.4
0	0
2	0.4
4	-0.57



4.1.3 Hallamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int \frac{x}{9-x^2} dx = \frac{1}{-2} \int \frac{-2x}{9-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln|9-x^2| + K$$

Todas las primitivas de la función f tienen la expresión $F(x) = -\frac{1}{2} \ln|9-x^2| + K$.

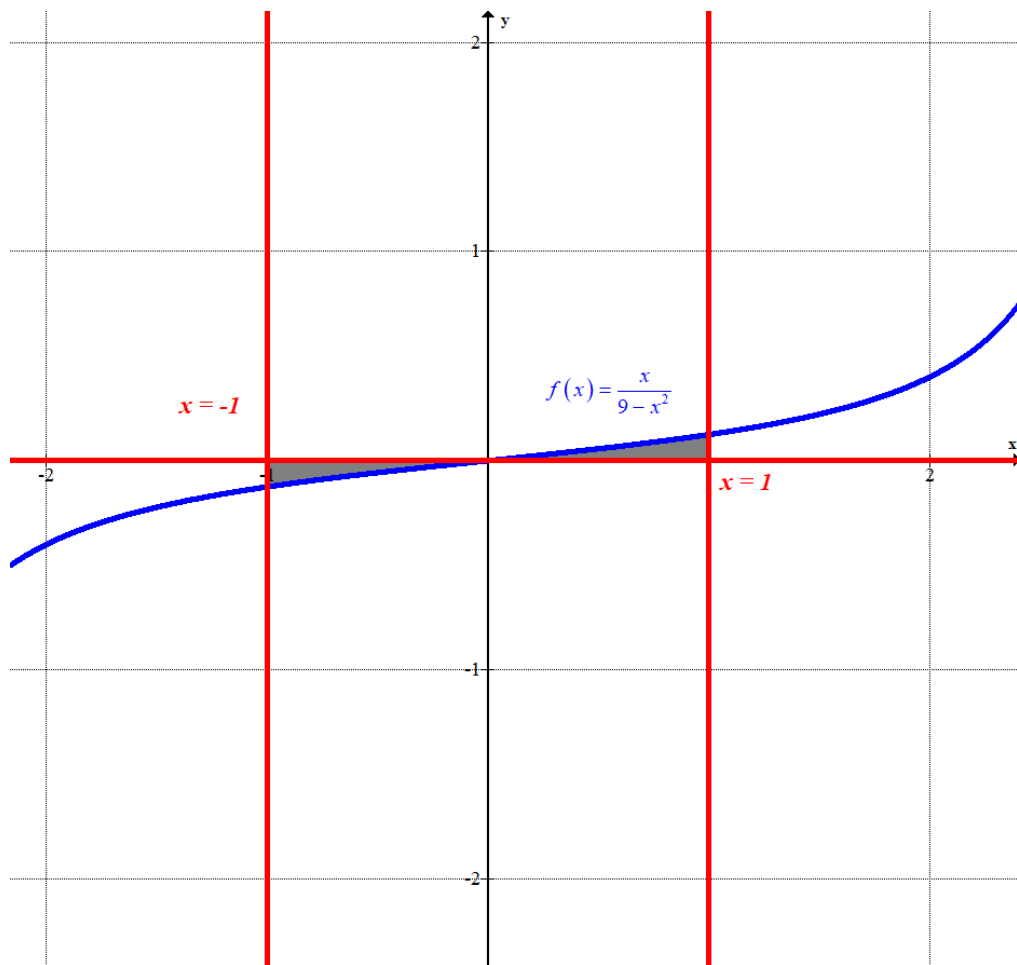
4.1.4 Como la función corta el eje de abscisas en $x=0 \in (-1,1)$ el área comprendida entre las curvas $y=f(x)$, $x=-1$, $x=1$ y el eje de abscisas la calculamos como el valor absoluto de la integral definida entre -1 y 0 de la función más la integral definida entre 0 y 1 de la función.

$$\int_{-1}^0 \frac{x}{9-x^2} dx = \left[\frac{-1}{2} \ln |9-x^2| \right]_{-1}^0 = \left[\frac{-1}{2} \ln |9-0^2| \right] - \left[\frac{-1}{2} \ln |9-(-1)^2| \right] = -\frac{\ln 9}{2} + \frac{\ln 8}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{9-x^2} dx = \left[\frac{-1}{2} \ln |9-x^2| \right]_0^1 = \left[\frac{-1}{2} \ln |9-1^2| \right] - \left[\frac{-1}{2} \ln |9-0^2| \right] = \frac{-\ln 8}{2} + \frac{\ln 9}{2}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^0 \frac{x}{9-x^2} dx \right| + \int_0^1 \frac{x}{9-x^2} dx = \left| \frac{\ln 8 - \ln 9}{2} \right| + \frac{\ln 9 - \ln 8}{2} =$$

$$= \frac{\ln 9 - \ln 8}{2} + \frac{\ln 9 - \ln 8}{2} = \boxed{\ln 9 - \ln 8 = 0.1178 u^2}$$



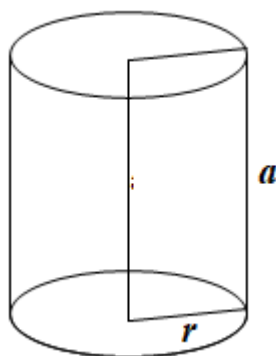
4.2 Se quiere construir un bote de refresco cilíndrico de volumen 33 cm^3 que tenga área total (incluyendo las tapas) mínima. Se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Expresar el área total del bote en función del radio de su base y de su altura.

4.2.2 (1.5 puntos) Obtener las dimensiones que minimizan el área total del bote.

4.2.3 (0.5 puntos) Hallar dicha área.

4.2.1 Hacemos un dibujo del bote de radio de base “ r ” y altura “ a ”.



El área del bote es la suma del área lateral más las dos áreas de las tapas superior e inferior.

$$A(a, r) = 2\pi r \cdot a + 2\pi r^2$$

4.2.2 El volumen del bote es el producto del área de la base por la altura: $V(a, r) = \pi r^2 \cdot a$.

Igualemos este volumen a 33 y despejamos “ a ”.

$$V(a, r) = \pi r^2 \cdot a = 33 \Rightarrow a = \frac{33}{\pi r^2}$$

Sustituimos este resultado en la función del área y obtenemos una función que solo depende de “ r ”.

$$\left. \begin{array}{l} A(a, r) = 2\pi r \cdot a + 2\pi r^2 \\ a = \frac{33}{\pi r^2} \end{array} \right\} \Rightarrow A(r) = 2\pi r \frac{33}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{66}{r} + 2\pi r^2$$

Queremos minimizar la función $A(r) = \frac{66}{r} + 2\pi r^2$. Hallamos sus puntos críticos.

$$A'(r) = \frac{-66}{r^2} + 4\pi r \quad A'(r) = 0 \Rightarrow \frac{-66}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{66}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi r^3 = 66 \Rightarrow r^3 = \frac{66}{4\pi} = \frac{33}{2\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}$$

Tenemos un punto crítico en $r = \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}$. Sustituimos este valor en la segunda derivada,

$$A'(r) = \frac{-66}{r^2} + 4\pi r = -66r^{-2} + 4\pi r \Rightarrow A''(r) = -66(-2)r^{-3} + 4\pi = \frac{122}{r^3} + 4\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A''\left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right) = \frac{122}{\left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right)^3} + 4\pi = \frac{122}{\frac{33}{2\pi}} + 4\pi = \frac{244\pi}{33} + 4\pi > 0$$

La función presenta un mínimo relativo para $r = \sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}} \simeq 1.7382$ centímetros.

Para este valor del radio determinamos la altura del bote.

$$a = \frac{33}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right)^2} = \frac{33\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi\sqrt[3]{33^2}} \simeq 3.4765 \text{ cm}$$

Las dimensiones del bote de volumen 33 cm^3 con área mínima son 1.7382 centímetros de radio de la base y 3.4765 centímetros de altura.

4.2.3 Hallamos el área mínima.

$$A\left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right) = \frac{66}{\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}} + 2\pi \left(\sqrt[3]{\frac{33}{2\pi}}\right)^2 \simeq 56.95 \text{ cm}^2$$

PAU Junio 2025 Matemáticas II



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: JUNY 2025	CONVOCATORIA: JUNIO 2025
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: <u>Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.</u> La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Por cada falta de ortografía a partir de la tercera se deducirán 0,10 puntos, hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. La deducción máxima total es de un punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una pizzería ofrece tres tipos de pizza: margarita, vegetariana y pepperoni. A lo largo de los años, utilizando su aplicación para teléfonos inteligentes, el restaurante ha recopilado datos sobre las preferencias de los clientes, calculando que el 40% de sus clientes piden pizza margarita, el 25% elige la pizza vegetariana y el resto prefiere la pizza pepperoni.

1.1 (0.25 puntos) Si se elige un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya pedido una pizza pepperoni?

1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes elegidos al azar hayan pedido distintos tipos de pizza?

Para mejorar su servicio y agilizar los tiempos de preparación, la pizzería decide considerar un grupo típico de 10 clientes con el objetivo de decidir cuántas pizzas margarita preparar con antelación y evitar retrasos durante las horas con más demanda, minimizando el desperdicio.

1.3 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 de los 10 clientes pidan pizzas margarita?

1.4 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los 10 clientes del grupo pida una pizza margarita?

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 En un sistema de procesamiento de imágenes se utiliza una matriz para transformar ciertos datos. La matriz depende del parámetro real α y es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

2.1.1 (1.25 puntos) En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores α que permitan funcionar a este proceso.

2.1.2 (1.25 puntos) En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A . Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α .

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.2.2 (0.75 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

2.2.3 (0.75 puntos) Calcular la solución del sistema para $a = 0$.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y la recta $s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcular:

3.1.1 (1 punto) Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

3.1.2 (1 punto) La ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

3.1.3 (0.5 puntos) La distancia del punto $P = (1, 0, 2)$ a dicho plano.

3.2 Se consideran el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1, 0, 1)$. Se pide:

3.2.1 (1 punto) La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q = (2, 1, 2)$.

3.2.2 (0.5 puntos) La distancia del punto Q al plano π .

3.2.3 (1 punto) El punto simétrico de P respecto al plano π .

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Una empresa de paquetería quiere diseñar distintos modelos de cajas. Uno de esos modelos consiste en una caja de 80 cm^3 de volumen, con base y tapa cuadradas. El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2 . La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro.

Obtener:

4.1.1 (0.75 puntos) La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x .

4.1.2 (1.25 puntos) Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible.

4.1.3 (0.5 puntos) El precio del material en el caso anterior.

4.2 Dada la función real de variable real

$$f(x) = x|x - 2|$$

Se pide:

4.2.1 (1 punto) Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

4.2.2 (1.5 puntos) Calcular el área de la región anterior.

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
 Tabla de la distribución binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	1/3	0.35	0.40	0.45	0.50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1298	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9867	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7084	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9986	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2680	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,9080	0,8281
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9728	0,9453
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9997	0,9990

6

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una pizzería ofrece tres tipos de pizza: margarita, vegetariana y pepperoni. A lo largo de los años, utilizando su aplicación para teléfonos inteligentes, el restaurante ha recopilado datos sobre las preferencias de los clientes, calculando que el 40% de sus clientes piden pizza margarita, el 25% elige la pizza vegetariana y el resto prefiere la pizza pepperoni.

1.1 (0.25 puntos) Si se elige un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya pedido una pizza pepperoni?

1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes elegidos al azar hayan pedido distintos tipos de pizza?

Para mejorar su servicio y agilizar los tiempos de preparación, la pizzería decide considerar un grupo típico de 10 clientes con el objetivo de decidir cuántas pizzas margarita preparar con antelación y evitar retrasos durante las horas con más demanda, minimizando el desperdicio.

1.3 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 de los 10 clientes pidan pizzas margarita?

1.4 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los 10 clientes del grupo pida una pizza margarita?

1.1 De los clientes de la pizzería prefieren pizza pepperoni el $100 - 40 - 25 = 35$ % de los clientes. La probabilidad de que un cliente elegido al azar haya pedido una pizza pepperoni es de 0.35.

1.2 Si llamamos M a “elegir pizza Margarita”, V a “elegir pizza Vegetariana” y P a “elegir pizza Pepperoni”. La elección de cada cliente se supone independiente de la elección de otro cliente. La probabilidad de que elijan pizzas diferentes es la probabilidad de que el cliente 1 elija pizza margarita y el cliente 2 no más la probabilidad de que el cliente 1 elija pizza vegetariana y el cliente 2 no más la probabilidad de que el cliente 1 elija pizza pepperoni y el cliente 2 no

$$P(M1 \cap \overline{M2}) + P(V1 \cap \overline{V2}) + P(P1 \cap \overline{P2}) = P(M1)P(\overline{M2}) + P(V1)P(\overline{V2}) + P(P1)P(\overline{P2}) =$$

$$= 0.4 \cdot (1 - 0.4) + 0.25 \cdot (1 - 0.25) + 0.35 \cdot (1 - 0.35) = \boxed{0.655}$$

1.3 Consideramos X la variable aleatoria que cuenta el número de clientes que eligen pizza margarita de un grupo de 10 clientes. X es una variable binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.4$. $X = B(10, 0.4)$.

Nos piden calcular $P(X = 4)$.

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} 0.4^4 \cdot 0.6^6 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^6 = 210 \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^6 \approx \boxed{0.2508}$$

1.4 Nos piden calcular $P(X \geq 1)$. Utilizamos el suceso contrario para calcular esta probabilidad.

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + \dots + P(X = 10) =$$

$$= 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0.4^0 \cdot 0.6^{10} = 1 - 1 \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^{10} = 1 - 0.6^{10} \approx \boxed{0.994}$$

Los valores obtenidos con la fórmula de la probabilidad en una distribución binomial se pueden obtener utilizando la tabla proporcionada en el examen.

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6580
	2		1,0000	0,9999	0,9999	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9608	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9482	0,9163	0,8889	0,8735	0,8308
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8985	0,8389	0,7901	0,7648	0,6926
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8308
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9690
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9612
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9986	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9997
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0		0,9048	0,6052	0,3770	0,1359	0,0759	0,0409	0,0260	0,0207	0,0060
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0484
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9976	0,9947	0,9917	0,9888	0,9331

$$P(X = 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 3) = 0,6331 - 0,3823 = 0,2508$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - 0,006 = 0,994$$

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)**Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2**

2.1 En un sistema de procesamiento de imágenes se utiliza una matriz para transformar ciertos datos. La matriz depende del parámetro real α y es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

2.1.1 (1.25 puntos) En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores α que permitan funcionar a este proceso.

2.1.2 (1.25 puntos) En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A . Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α .

2.1.1 Resolvemos la ecuación matricial $A^2 = A$.

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \alpha^2 = \alpha \\ \alpha^2 = \alpha \\ (1-\alpha)^2 = 1-\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 0 \\ \alpha^2 - \alpha = 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 1 - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = 0} \\ \alpha(\alpha - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \\ \alpha^2 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha(\alpha - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = 0} \\ \alpha = 1 \end{cases} \end{cases}$$

La igualdad solo se cumple para $\alpha = 0$.

2.1.2 La matriz inversa de A solo existe cuando su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} = \alpha(1-\alpha) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = \alpha(1-\alpha)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \alpha(1-\alpha) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = 0} \\ \boxed{\alpha = 1} \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de α distinto de 0 y de 1.

Calculamos la expresión de la matriz inversa para $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} = \alpha(1-\alpha) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = \alpha(1-\alpha)$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha) & -\alpha(1-\alpha) & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\alpha} \end{pmatrix}$$

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.2.2 (0.75 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

2.2.3 (0.75 puntos) Calcular la solución del sistema para $a = 0$.

2.2.1 La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & a & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6a + 10 - 6 + 3a + 8 + 15 = 9a + 27$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 9a + 27 = 0 \Rightarrow 9a = -27 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

Surgen dos situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq -3$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = -3$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Convertimos este sistema en otro

equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 6 \quad -9 \quad -15 \quad -9 \\ -6 \quad 4 \quad 6 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -5 \quad -9 \quad -9 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 3 \quad 6 \quad 9 \\ -3 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 5 \quad 9 \quad 9 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -9 & -9 \\ 0 & 5 & 9 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \textit{Fila 3}^a + \textit{Fila 2}^a & & & \\ 0 & 5 & 9 & 9 \\ 0 & -5 & -9 & -9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \textit{Nueva Fila 3}^a \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{3 \quad -2 \quad -3 \quad 0}^{A/B} & & \\ 0 & -5 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_4 & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

2.2.2 Para $a = -3$ el sistema es compatible indeterminado. Resolvemos el sistema partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{3 & -2 & -3 & 0}^{A/B} \\ 0 & -5 & -9 & -9 \\ \underbrace{0 & 0 & 0 & 0}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 2y - 3z = 0 \\ -5y - 9z = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 2y - 3z = 0 \\ -5y = -9 + 9z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 2y - 3z = 0 \\ y = \frac{9 - 9z}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 2\frac{9-9z}{5} - 3z = 0 \Rightarrow 15x - 2(9-9z) - 15z = 0 \Rightarrow 15x - 18 + 18z - 15z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x + 3z - 18 = 0 \Rightarrow 5x + z - 6 = 0 \Rightarrow 5x = 6 - z \Rightarrow x = \frac{6-z}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{9}{5} - \frac{9}{5}\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las soluciones son $\begin{cases} x = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{9}{5} - \frac{9}{5}\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$ o bien $\begin{cases} x = \frac{6}{5} - \alpha \\ y = \frac{9}{5} - 9\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 5\alpha \end{cases}$.

2.2.3 Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x & -5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x & -5z = -3 \\ x = 3 - y - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(3 - y - 2z) - 2y - 3z = 0 \\ 2(3 - y - 2z) - 5z = -3 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 9 - 3y - 6z - 2y - 3z = 0 \\ 6 - 2y - 4z - 5z = -3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -5y - 9z = -9 \\ -2y - 9z = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5y - 9z = -9 \\ 2y + 9z = 9 \end{cases} \\ &\quad \overline{-3y = 0} \Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -2 \cdot 0 - 9z = -9 \Rightarrow -9z = -9 \Rightarrow \boxed{z=1} \Rightarrow \boxed{x=3-0-2 \cdot 1=1}$$

Para $a = 0$ la solución del sistema es $x=1, y=0, z=1$.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)**Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2**

3.1 Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y la recta $s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcular:

3.1.1 (1 punto) Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

3.1.2 (1 punto) La ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

3.1.3 (0.5 puntos) La distancia del punto $P = (1,0,2)$ a dicho plano.

3.1.1 Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta s .

$$s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow -1 + 2y + z = 0 \Rightarrow z = 1 - 2y \Rightarrow s: \begin{cases} x = -1 \\ y = \alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases}$$

Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas e intentamos resolverlo.

$$\begin{aligned} \begin{cases} s: \begin{cases} x = -1 \\ y = \alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases} \\ r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -1 = 1 + 2\lambda \\ \alpha = \lambda \\ 1 - 2\alpha = 2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 = 2\lambda \rightarrow \boxed{\lambda = -1} \\ \alpha = \lambda \\ -2\alpha = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = -1} \\ -2\alpha = 1 + 1 \rightarrow \boxed{\alpha = -1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 - 2(-1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1, -1, 3)} \end{aligned}$$

Las rectas se cortan en el punto $A(-1, -1, 3)$.

3.1.2 El plano π que contiene a las rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene a los puntos de las dos rectas.

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, -1) \\ P_r(1, 0, 2) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -1 \\ y = \alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (0, 1, -2) \\ Q_s(-1, 0, 1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_r &= (2, 1, -1) \\ \vec{v}_s &= (0, 1, -2) \\ P_r(1, 0, 2) &\in \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 2 + 2z - 4 + 4y + x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 4y + 2z - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - 4y - 2z + 3 = 0}$$

La ecuación del plano que contiene a ambas rectas es $\pi: x - 4y - 2z + 3 = 0$.

3.1.3 Hallamos la distancia del punto $P = (1,0,2)$ al plano $\pi : x - 4y - 2z + 3 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - 4y - 2z + 3 = 0 \\ P(1, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|1 - 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-2)^2}} = \frac{0}{\sqrt{21}} = 0$$

La distancia del punto P al plano es 0. El punto P pertenece al plano.

3.2 Se consideran el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1, 0, 1)$. Se pide:

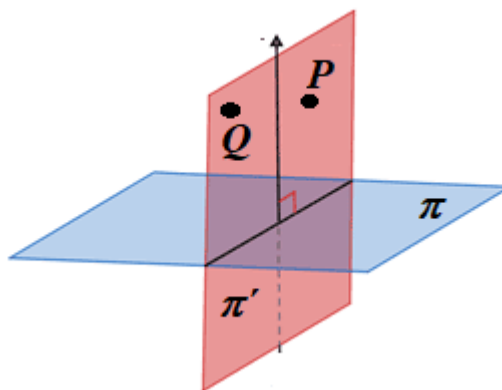
3.2.1 (1 punto) La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q = (2, 1, 2)$.

3.2.2 (0.5 puntos) La distancia del punto Q al plano π .

3.2.3 (1 punto) El punto simétrico de P respecto al plano π .

3.2.1 El plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ tiene como vector normal.

El plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q = (2, 1, 2)$ tiene como vectores directores el vector normal del plano π y el vector $\overrightarrow{PQ}$.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (2, 1, 2) - (-1, 0, 1) = (3, 1, 1) \\ \vec{v} = \vec{n} = (3, -1, 2) \\ P(-1, 0, 1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 2 + 3y - 3z + 3 - 3z + 3 - 6y + x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 3y - 6z + 9 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x - y - 2z + 3 = 0}$$

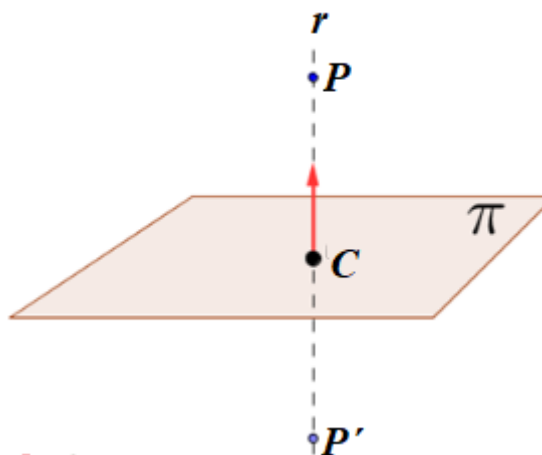
El plano π' perpendicular a π que pasa por P y por Q tiene ecuación $\pi': x - y - 2z + 3 = 0$.

3.2.2 Hallamos la distancia del punto $Q = (2, 1, 2)$ al plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 3x - y + 2z - 4 = 0 \\ Q(2, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow d(Q, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{5\sqrt{14}}{14} \approx 1.3363 \text{ unidades}}$$

La distancia del punto Q al plano π tiene un valor de $\frac{5\sqrt{14}}{14} \approx 1.3363$ unidades.

3.2.3 Hallamos la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P . Luego hallamos el punto C de corte de recta r y el plano. Por último, determinamos el punto P' simétrico de P respecto del plano π .



Hallo la ecuación de la recta r . Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano $\vec{n} = (3, -1, 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(-1, 0, 1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (3, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

Hallo el punto C de corte de la recta r y el plano resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$\pi : 3x - y + 2z = 4 \quad \left. \begin{array}{l} x = -1 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 3(-1 + 3\lambda) + \lambda + 2(1 + 2\lambda) = 4 \Rightarrow -3 + 9\lambda + \lambda + 2 + 4\lambda = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{14} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 3\frac{5}{14} = \frac{1}{14} \\ y = -\frac{5}{14} \\ z = 1 + 2\frac{5}{14} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{12}{7}\right)$$

Las coordenadas del punto simétrico P' las hallamos sumando al punto C el vector $\overrightarrow{PC}$.

$$\left. \begin{array}{l} C\left(\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{12}{7}\right) \\ P(-1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PC} = \left(\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{12}{7}\right) - (-1, 0, 1) = \left(\frac{15}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{5}{7}\right)$$

$$P' = C + \overrightarrow{PC} = \left(\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{12}{7}\right) + \left(\frac{15}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{5}{7}\right) = \left(\frac{16}{14}, -\frac{10}{14}, \frac{17}{7}\right) = \left(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{17}{7}\right)$$

El punto simétrico de P respecto del plano π es $P'\left(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{17}{7}\right)$.

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)**Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2**

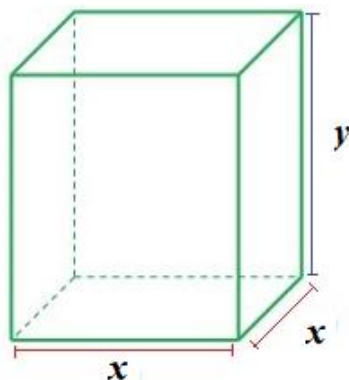
4.1 Una empresa de paquetería quiere diseñar distintos modelos de cajas. Uno de esos modelos consiste en una caja de 80 cm^3 de volumen, con base y tapa cuadradas. El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2 . La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro.

Obtener:

4.1.1 (0.75 puntos) La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x .

4.1.2 (1.25 puntos) Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible.

4.1.3 (0.5 puntos) El precio del material en el caso anterior.



4.1.1 El volumen del prisma (80 cm^3) es el producto del área (x^2) de la base por la altura (y).

$$80 = x^2 y \Rightarrow y = \frac{80}{x^2}$$

El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2 . Hay cuatro paredes laterales con la misma superficie (xy).

$$\text{Coste de los laterales} = 4xy \cdot 1 = 4xy = 4x \frac{80}{x^2} = \frac{320}{x} \text{ céntimos.}$$

La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro, por lo que cuesta $1 + 0.25 = 1.25$ céntimos el m^2 . El material de la base y la tapa cuesta $2x^2 \cdot 1.25 = 2.5x^2$ céntimos.

El coste del material necesario para construir la caja es la suma de las cantidades obtenidas.

$$P(x) = \frac{320}{x} + 2.5x^2 \text{ céntimos.}$$

4.1.2 Derivamos la función y averiguamos cuando se anula.

$$P(x) = \frac{320}{x} + 2.5x^2 \Rightarrow P'(x) = \frac{-320}{x^2} + 5x$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-320}{x^2} + 5x = 0 \Rightarrow 5x = \frac{320}{x^2} \Rightarrow 5x^3 = 320 \Rightarrow x^3 = \frac{320}{5} = 64 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{64} = 4}$$

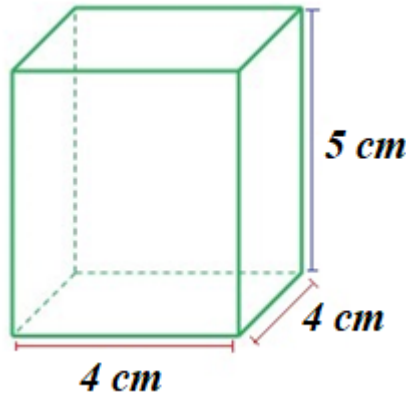
La función tiene un punto crítico en $x = 4$. Determinamos el signo de la segunda derivada para $x = 4$.

$$P'(x) = \frac{-320}{x^2} + 5x = -320x^{-3} + 5x \Rightarrow P''(x) = 960x^{-4} + 5 = \frac{960}{x^4} + 5 \Rightarrow P''(4) = \frac{960}{4^4} + 5 > 0$$

Al ser positiva la segunda derivada sabemos que la función $P(x)$ presenta un mínimo relativo en $x = 4$.

Para $x = 4$ obtenemos el valor de la altura: $y = \frac{80}{x^2} = \frac{80}{16} = 5$.

La caja con menor coste tiene de lado en la base cuadrada de 4 cm y 5 cm de altura.



4.1.3 Para el caso anterior el coste del material es $P(4) = \frac{320}{4} + 2.5 \cdot 4^2 = 120$ céntimos. El coste mínimo es de 1.2 euros.

4.2 Dada la función real de variable real

$$f(x) = x|x-2|$$

Se pide:

4.2.1 (1 punto) Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

4.2.2 (1.5 puntos) Calcular el área de la región anterior.

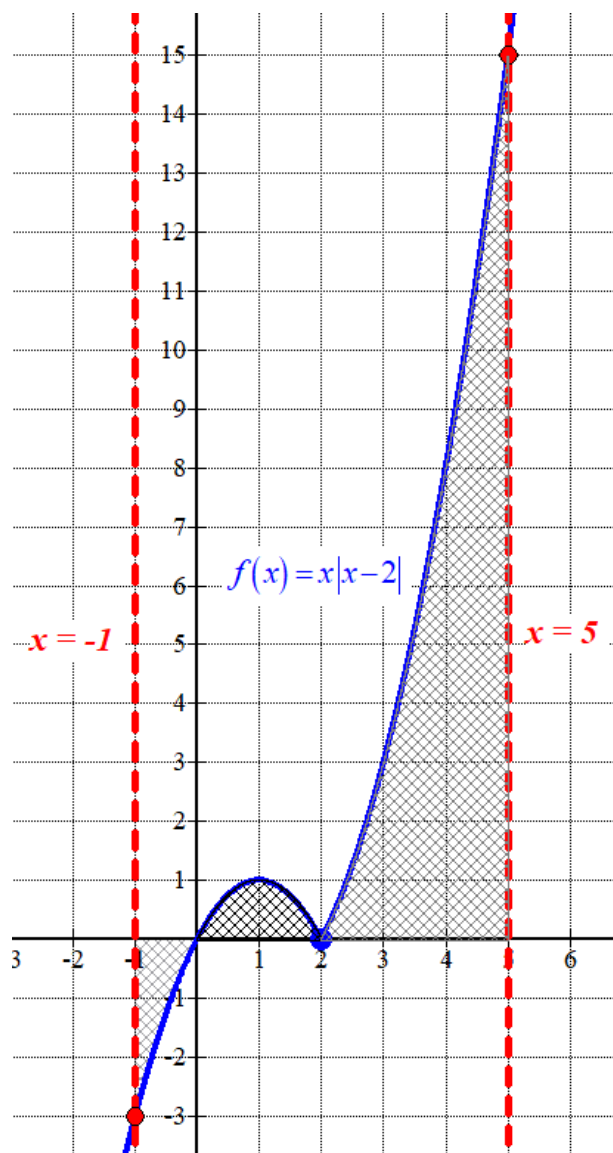
4.2.1 Expresamos la función como una función a trozos. La función cambia de expresión en $x = 2$.

$$f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x(-x+2) & \text{si } x < 2 \\ x(x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} x(2-x) & \text{si } x < 2 \\ x(x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Averiguamos cuando la gráfica de la función corta el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x|x-2| \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x|x-2| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \in [-1, 5] \\ x-2=0 \rightarrow \boxed{x=2} \in [-1, 5] \end{cases}$$

Dibujamos la gráfica de la función y la región indicada.



4.2.2 La región está dividida en tres partes. Calculamos el área de cada parte.

El área del trozo de la izquierda es el valor absoluto de la integral definida de la función entre -1 y 0 .

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 x(2-x) dx = \int_{-1}^0 2x - x^2 dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = \\ &= \left[0^2 - \frac{0^3}{3} \right] - \left[(-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3} \right] = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

El área del trozo de la izquierda vale $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

El área del trozo del centro es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 2 .

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 2x - x^2 dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left[2^2 - \frac{2^3}{3} \right] - \left[0^2 - \frac{0^3}{3} \right] = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

El área del trozo del centro vale $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

El área del trozo de la derecha es el valor de la integral definida de la función entre 2 y 5 .

$$\begin{aligned}\int_2^5 f(x) dx &= \int_2^5 x(x-2) dx = \int_2^5 x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^5 = \\ &= \left[\frac{5^3}{3} - 5^2 \right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 \right] = \frac{125}{3} - 25 - \frac{8}{3} + 4 = \boxed{18}\end{aligned}$$

El área del trozo de la derecha vale 18 unidades cuadradas.

El área de toda la región es la suma de las tres áreas obtenidas: $\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 18 = \frac{62}{3} \simeq 20.6667$ unidades cuadradas.

PAU Junio 2025 Reserva Matemáticas II



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: JUNY 2025 (reserva)	CONVOCATORIA: JUNIO 2025 (reserva)
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: <u>Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.</u> La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Por cada falta de ortografía a partir de la tercera se deducirán 0,10 puntos, hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. La deducción máxima total es de un punto.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una firma automovilística fabrica tres modelos de coches: M1, M2 y M3, y produce un 35% de vehículos en Estados Unidos, un 45% en China y un 20% en Alemania.

En la planta de Estados Unidos se fabrican un 38% de vehículos del modelo M1, un 42% del M2 y un 20% del M3; en la de China un 42% del M1, un 40% del M2 y un 18% del M3; y en la de Alemania un 24% del M1, un 40% del M2 y un 36% del M3.

El control de calidad ha detectado que en Estados Unidos un 3% de los coches presenta algún tipo de defecto, en China un 4% y en Alemania un 1%.

- 1.1 (0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un coche seleccionado al azar presente algún tipo de defecto?
- 1.2 (0.75 puntos)** Si un coche no presenta ningún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que esté fabricado en Estados Unidos?
- 1.3 (1 punto)** Dados 9 coches fabricados en Alemania, calcular la probabilidad que al menos 3 sean del modelo M2.

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

- 2.1** Una empresa de producción agrícola desarrolla fertilizantes que combinan tres nutrientes esenciales: nitrógeno (N), fósforo (P) y potasio (K). Se representan por x , y , z las cantidades en kilogramos a usar por lote de N, P, K, respectivamente. Estas cantidades deben cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases}$$

- 2.1.1 (1.25 puntos)** Discutir, en función del parámetro α , el sistema de ecuaciones anterior.
- 2.1.2 (1.25 puntos)** Obtener las cantidades x , y , z en el caso de que el sistema sea compatible.

2.2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 (0.5 puntos) Calcular el producto AB y la matriz transpuesta de AB .

2.2.2 (0.75 puntos) En los casos en los que A es invertible, calcular la inversa de A .

2.2.3 (1.25 puntos) Resolver la ecuación matricial $BX + A^2 = C$.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$, calcular:

3.1.1 (0.75 puntos) Calcular la distancia entre el punto $(3, 1, -2)$ y el plano π , en función del parámetro real a .

3.1.2 (0.75 puntos) Para $a = 4$, calcular el ángulo que forma la recta r con el plano π .

3.1.3 (1 punto) Para $a = 3$, calcular el punto simétrico del punto $\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right)$ respecto del plano π .

3.2 Dada la recta $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\alpha}$, que depende del parámetro real α , y la recta

$$s: \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

3.2.1 (1.25 puntos) Calcular el valor del parámetro α para el que r y s son perpendiculares.

3.2.2 (1.25 puntos) Suponiendo que $\alpha \neq 0$, obtener la recta paralela a s que pase por el punto de r cuya coordenada z vale 0.

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Se considera un prisma triangular de altura h cm, cuya base es un triángulo equilátero de lado x cm. El prisma tiene área total (área que incluye el área de las caras laterales y de las bases superior e inferior) igual a 10 cm^2 . Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Expresar el área total del prisma en función de x y h .

4.1.2 (1.5 puntos) Obtener los valores de x y h que maximizan el volumen.

4.1.3 (0.5 puntos) Hallar dicho volumen.

4.2 Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Calcular el dominio de definición y las asíntotas de f .

4.2.2 (0.75 puntos) Indicar, si existen, los extremos, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

4.2.3 (0.5 puntos) Representar gráficamente la función $y = f(x)$.

4.2.4 (0.75 puntos) Calcular la integral indefinida $\int f(x) dx$.

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
 Tabla de la distribución binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,9600	0,9438	0,9240	0,9070	0,8913	0,8480	0,7848	0,7000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9608	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9880	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2821	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1638	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9988	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5708	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1084	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0048	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9484	0,9006	0,8342	0,7461
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9988	0,9962	0,9909	0,9805
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0		0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1		0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2		0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		1,0000	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,7889	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9803	0,9740	0,9452	0,9080	0,8281
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990

6

Soluciones

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una firma automovilística fabrica tres modelos de coches: M1, M2 y M3, y produce un 35% de vehículos en Estados Unidos, un 45% en China y un 20% en Alemania.

En la planta de Estados Unidos se fabrican un 38% de vehículos del modelo M1, un 42% del M2 y un 20% del M3; en la de China un 42% del M1, un 40% del M2 y un 18% del M3; y en la de Alemania un 24% del M1, un 40% del M2 y un 36% del M3.

El control de calidad ha detectado que en Estados Unidos un 3% de los coches presenta algún tipo de defecto, en China un 4% y en Alemania un 1%.

1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche seleccionado al azar presente algún tipo de defecto?

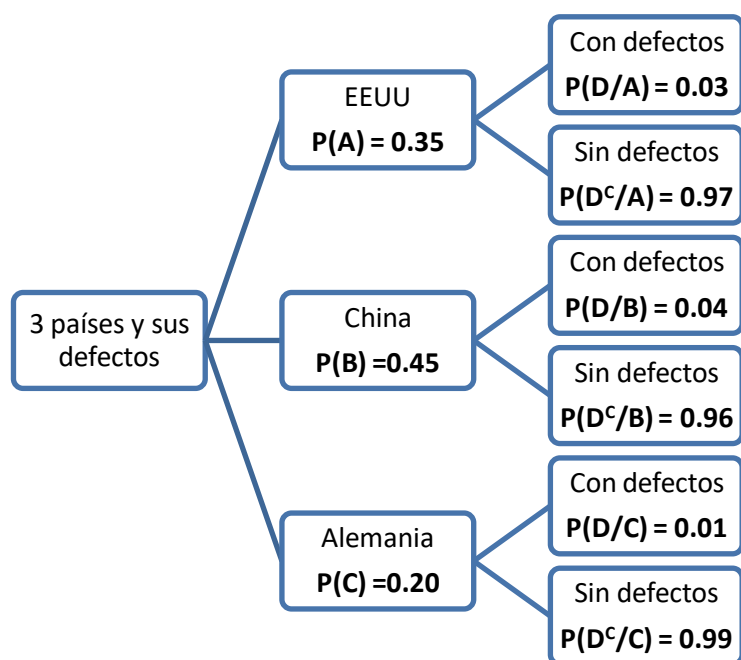
1.2 (0.75 puntos) Si un coche no presenta ningún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que esté fabricado en Estados Unidos?

1.3 (1 punto) Dados 9 coches fabricados en Alemania, calcular la probabilidad que al menos 3 sean del modelo M2.

Llamamos A a “el coche está fabricado en Estados Unidos”, B a “el coche está fabricado en China”, C a “el coche está fabricado en Alemania” y D al suceso “el vehículo presenta defectos”.

Nos dicen que $P(A) = 0.35$, $P(B) = 0.45$, $P(C) = 0.20$, $P(D/A) = 0.03$, $P(D/B) = 0.004$ y $P(D/C) = 0.001$.

Realizamos un diagrama de árbol de probabilidades.



1.1 Nos piden $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= 0.35 \cdot 0.03 + 0.45 \cdot 0.04 + 0.20 \cdot 0.01 = \boxed{0.0305}$$

1.2 Nos piden calcular $P(A/D^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D^c) = \frac{P(A \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(A)P(D^c/A)}{1 - P(D)} = \frac{0.35 \cdot 0.97}{1 - 0.0305} = \frac{97}{277} \approx 0.3502$$

1.3 Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de coches del modelo M2 de un grupo de 9 coches fabricados en Alemania. Sabemos que la probabilidad de que un coche fabricado en Alemania sea del modelo M2 es de 0.40 (el 40% de los coches fabricados en Alemania son del modelo M2), por lo que la variable aleatoria es una binomial con parámetros $n = 9$ y $p = 0.40$. $X = B(9, 0.4)$.

Nos piden calcular $P(X \geq 3)$.

Para poder utilizar los datos de la tabla de la binomial proporcionados utilizamos el suceso contrario.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.2318 = 0.7682$$

n	k	p	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	1/3	0.35	0.40
1	0		0.9900	0.9500	0.9000	0.8000	0.7500	0.7000	0.6667	0.6500	0.6000
	1		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0		0.9801	0.9025	0.8100	0.6400	0.5625	0.4900	0.4444	0.4225	0.3600
	1		0.9999	0.9975	0.9900	0.9600	0.9375	0.9100	0.8889	0.8775	0.8400
	2		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0		0.9703	0.8574	0.7290	0.5120	0.4219	0.3430	0.2963	0.2748	0.2160
	1		0.9997	0.9928	0.9720	0.8960	0.8438	0.7840	0.7407	0.7183	0.6480
	2		1.0000	0.9999	0.9990	0.9920	0.9844	0.9730	0.9630	0.9571	0.9360
	3		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0		0.9606	0.8145	0.6561	0.4096	0.3164	0.2401	0.1975	0.1785	0.1296
	1		0.9994	0.9880	0.9477	0.8182	0.7383	0.6517	0.5926	0.5630	0.4512
	2		1.0000	0.9995	0.9963	0.9728	0.9492	0.9163	0.8889	0.8735	0.8008
	3		1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9961	0.9919	0.9877	0.9850	0.9444
	4		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0		0.9510	0.7738	0.5905	0.3277	0.2373	0.1681	0.1317	0.1160	0.0784
	1		0.9990	0.9774	0.9185	0.7373	0.6328	0.5282	0.4609	0.4284	0.3370
	2		1.0000	0.9988	0.9914	0.9421	0.8965	0.8369	0.7901	0.7648	0.6426
	3		1.0000	1.0000	0.9995	0.9933	0.9844	0.9692	0.9547	0.9460	0.8930
	4		1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9990	0.9976	0.9959	0.9947	0.9698
	5		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0		0.9415	0.7351	0.5314	0.2621	0.1780	0.1176	0.0878	0.0754	0.0467
	1		0.9985	0.9672	0.8857	0.6554	0.5339	0.4202	0.3512	0.3191	0.2333
	2		1.0000	0.9978	0.9842	0.9011	0.8308	0.7443	0.6804	0.6471	0.5443
	3		1.0000	0.9999	0.9987	0.9830	0.9624	0.9295	0.8999	0.8826	0.8008
	4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9954	0.9891	0.9822	0.9777	0.9360
	5		1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9986	0.9982	0.9698
	6		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0		0.9321	0.6983	0.4783	0.2097	0.1335	0.0824	0.0585	0.0490	0.0280
	1		0.9980	0.9556	0.8503	0.5767	0.4449	0.3294	0.2634	0.2338	0.1586
	2		1.0000	0.9962	0.9743	0.8520	0.7564	0.6471	0.5708	0.5323	0.4399
	3		1.0000	0.9998	0.9973	0.9667	0.9294	0.8740	0.8267	0.8002	0.7102
	4		1.0000	1.0000	0.9998	0.9953	0.9871	0.9712	0.9547	0.9444	0.8937
	5		1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9987	0.9962	0.9931	0.9910	0.9412
	6		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9994	0.9684
	7		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	0		0.9227	0.6634	0.4305	0.1678	0.1001	0.0576	0.0390	0.0319	0.0168
	1		0.9973	0.9428	0.8131	0.5033	0.3671	0.2553	0.1951	0.1691	0.1064
	2		0.9999	0.9942	0.9619	0.7969	0.6785	0.5518	0.4682	0.4278	0.3354
	3		1.0000	0.9996	0.9950	0.9437	0.8862	0.8059	0.7414	0.7084	0.6441
	4		1.0000	1.0000	0.9996	0.9966	0.9727	0.9420	0.9121	0.8939	0.8463
	5		1.0000	1.0000	1.0000	0.9988	0.9958	0.9887	0.9803	0.9747	0.9302
	6		1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9987	0.9974	0.9964	0.9615
	7		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9998	0.9693
	8		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0		0.9135	0.6302	0.3874	0.1342	0.0751	0.0404	0.0260	0.0207	0.0101
	1		0.9966	0.9288	0.7748	0.4362	0.3003	0.1960	0.1431	0.1211	0.0700
	2		0.9999	0.9913	0.9617	0.9144	0.8687	0.7923	0.6952	0.6199	0.2318

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)**Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2**

2.1 Una empresa de producción agrícola desarrolla fertilizantes que combinan tres nutrientes esenciales: nitrógeno (N), fósforo (P) y potasio (K). Se representan por x , y , z las cantidades en kilogramos a usar por lote de N, P, K, respectivamente. Estas cantidades deben cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases}$$

2.1.1 (1.25 puntos) Discutir, en función del parámetro α , el sistema de ecuaciones anterior.

2.1.2 (1.25 puntos) Obtener las cantidades x , y , z en el caso de que el sistema sea compatible.

2.1.1 La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \alpha & 30 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & \alpha & 10 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 3\alpha + 8 + \cancel{2\alpha} - \cancel{2\alpha} + 8\alpha + 3 = 11\alpha + 11$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 11\alpha + 11 = 0 \Rightarrow 11\alpha = -11 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

Surgen dos situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $\alpha \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $\alpha = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 30 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$. Convertimos este sistema en otro

equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 30 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad 10 \\ -2 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 14 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 3 \cdot \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a & & & \\ -6 & 3 & 3 & 12 \\ 6 & 8 & -2 & 60 \\ \hline 0 & 11 & 1 & 72 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{3 \quad 4 \quad -1}^{A/B} & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 70 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A & 14 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Tienen rangos distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

2.1.2 El sistema es compatible solo para $\alpha \neq -1$, siendo compatible determinado. Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ 2x & -y & +\alpha z & = 10 \\ -2x & +y & +z & = 4 \\ \hline & & (\alpha+1)z & = 14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ (\alpha+1)z = 14 \rightarrow \{\alpha+1 \neq 0\} \rightarrow \boxed{z = \frac{14}{\alpha+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y + \alpha \frac{14}{\alpha+1} = 30 \\ -2x + y + \frac{14}{\alpha+1} = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y + \frac{14\alpha}{\alpha+1} = 30 \\ y = 4 - \frac{14}{\alpha+1} + 2x \end{cases} \Rightarrow 3x + 4\left(4 - \frac{14}{\alpha+1} + 2x\right) + \frac{14\alpha}{\alpha+1} = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 16 - \frac{56}{\alpha+1} + 8x + \frac{14\alpha}{\alpha+1} = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11x = 14 - \frac{14\alpha}{\alpha+1} + \frac{56}{\alpha+1} = \frac{14\alpha + 14 - 14\alpha + 56}{\alpha+1} = \frac{70}{\alpha+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{70}{11(\alpha+1)}} \Rightarrow y = 4 - \frac{14}{\alpha+1} + 2 \frac{70}{11(\alpha+1)} = \frac{44(\alpha+1) - 154 + 140}{11(\alpha+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{44\alpha + 44 - 14}{11(\alpha+1)} = \frac{44\alpha + 30}{11(\alpha+1)}}$$

La solución del sistema es $x = \frac{70}{11(\alpha+1)}$, $y = \frac{44\alpha + 30}{11(\alpha+1)}$ y $z = \frac{14}{\alpha+1}$.

2.2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 (0.5 puntos) Calcular el producto AB y la matriz transpuesta de AB .

2.2.2 (0.75 puntos) En los casos en los que A es invertible, calcular la inversa de A .

2.2.3 (1.25 puntos) Resolver la ecuación matricial $BX + A^2 = C$.

2.2.1 Obtenemos la expresión de la matriz AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 4+15 \\ -1+m & 2+5m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ m-1 & 2+5m \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de su transpuesta.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ m-1 & 2+5m \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & m-1 \\ 19 & 2+5m \end{pmatrix}$$

2.2.2 Para que sea invertible la matriz A su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m - 3 = 0 \Rightarrow 2m = 3 \Rightarrow \boxed{m = \frac{3}{2}}$$

La matriz A es invertible para cualquier valor de m distinto de $\frac{3}{2}$.

Calculamos la inversa para los valores $m \neq \frac{3}{2} \rightarrow 2m - 3 \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & m \end{pmatrix}}{2m-3} = \frac{1}{2m-3} \begin{pmatrix} m & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{2m-3} & \frac{-3}{2m-3} \\ \frac{-1}{2m-3} & \frac{2}{2m-3} \end{pmatrix}$$

2.2.3 Despejamos X de la ecuación matricial.

$$BX + A^2 = C \Rightarrow BX = C - A^2 \Rightarrow X = B^{-1}(C - A^2)$$

Hallamos la inversa de la matriz B .

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 2 = -7 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}{-7} = \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Terminamos de hallar la matriz X.

$$C - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+3 & 6+3m \\ 2+m & 3+m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -7-3m \\ 3-m & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1}(C - A^2) = \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -7-3m \\ 3-m & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} -35-6+2m & -35-15m+6 \\ 7-3+m & 7+3m+3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} -41+2m & -29-15m \\ 4+m & 10+3m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41-2m}{7} & \frac{29+15m}{7} \\ \frac{-4-m}{7} & \frac{-10-3m}{7} \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} \frac{41-2m}{7} & \frac{29+15m}{7} \\ \frac{-4-m}{7} & \frac{-10-3m}{7} \end{pmatrix}.$

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)**Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2**

3.1 Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$, calcular:

3.1.1 (0.75 puntos) Calcular la distancia entre el punto $(3, 1, -2)$ y el plano π , en función del parámetro real a .

3.1.2 (0.75 puntos) Para $a = 4$, calcular el ángulo que forma la recta r con el plano π .

3.1.3 (1 punto) Para $a = 3$, calcular el punto simétrico del punto $\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right)$ respecto del plano π .

3.1.1 Hallamos la distancia del punto $A(3, 1, -2)$ al plano $\pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0 \\ A(3, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, \pi) = \frac{|2 \cdot 3 + a + 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + a^2 + (-1)^2}} = \frac{|11 + a|}{\sqrt{5 + a^2}}$$

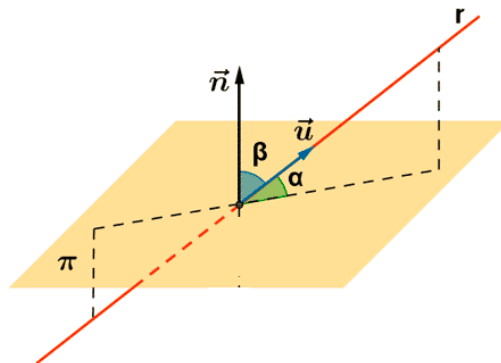
3.1.2 Para $a = 4$ el plano queda $\pi \equiv 2x + 4y - z + 3 = 0$.

Hallamos un vector director de la recta como el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos que la definen.

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 21i - 9j + 6k = (21, -9, 6)$$

Tomamos como vector director de la recta el vector obtenido dividido por 3.

Hallamos el ángulo entre el vector normal del plano y el vector director de la recta.



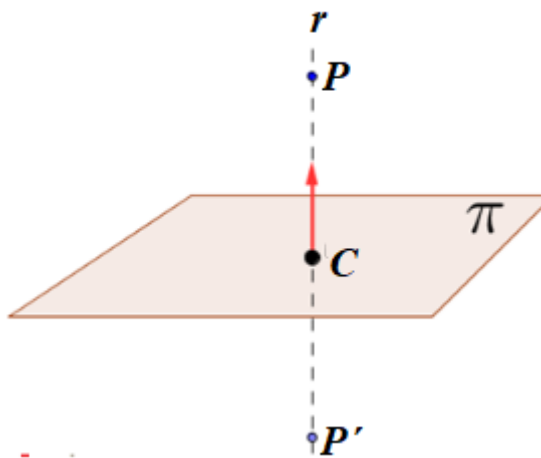
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \frac{1}{3} \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \frac{1}{3} (21, -9, 6) = (7, -3, 2) \\ \pi \equiv 2x + 4y - z + 3 = 0 \rightarrow \vec{n} = (2, 4, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{n}) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{n}}{|\vec{v}_r| |\vec{n}|} =$$

$$= \frac{(7, -3, 2)(2, 4, -1)}{\sqrt{7^2 + (-3)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2}} = \frac{14 - 12 - 2}{\sqrt{62} \sqrt{21}} = 0 \Rightarrow (\vec{v}_r, \vec{n}) = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

El ángulo que forman recta y plano es de $90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$. La recta es paralela al plano o está contenida en él.

3.2.3 Para $a = 3$ el plano queda $\pi \equiv 2x + 3y - z + 3 = 0$.

Hallamos la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto $P\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right)$. Luego hallamos el punto C de corte de recta r y el plano. Por último, determinamos el punto P' simétrico de P respecto del plano π .



Hallo la ecuación de la recta r . Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano $\vec{n} = (2, 3, -1)$.

$$\left. \begin{array}{l} P\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (2, 3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{9}{2} + 2\lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Hallo el punto C de corte de la recta r y el plano resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + 3y - z + 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = \frac{9}{2} + 2\lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\left(\frac{9}{2} + 2\lambda\right) + 3(5 + 3\lambda) - (-1 - \lambda) + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 + 4\lambda + 15 + 9\lambda + 1 + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow 14\lambda + 28 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} + 2(-2) = \frac{1}{2} \\ y = 5 + 3(-2) = -1 \\ z = -1 - (-2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)}$$

Las coordenadas del punto simétrico P' las hallamos sumando al punto C el vector $\overrightarrow{PC}$.

$$\left. \begin{array}{l} C\left(\frac{1}{2}, -1, 1\right) \\ P\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PC} = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right) - \left(\frac{9}{2}, 5, -1\right) = (-4, -6, 2)$$

$$P' = C + \overrightarrow{PC} = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right) + (-4, -6, 2) = \left(\frac{-7}{2}, -7, 3\right)$$

El punto simétrico de P respecto del plano π es $P'\left(\frac{-7}{2}, -7, 3\right)$.

3.2 Dada la recta $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\alpha}$, que depende del parámetro real α , y la recta

$$s: \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

3.2.1 (1.25 puntos) Calcular el valor del parámetro α para el que r y s son perpendiculares.

3.2.2 (1.25 puntos) Suponiendo que $\alpha \neq 0$, obtener la recta paralela a s que pase por el punto de r cuya coordenada z vale 0.

3.2.1 Para que las rectas sean perpendiculares el producto escalar de sus vectores directores debe ser nulo. Obtenemos un vector director de cada recta.

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\alpha} \Rightarrow \vec{u}_r = (2, 3, \alpha)$$

$$s: \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x = 2 + z - 2y \end{cases} \Rightarrow -2 - z + 2y + y + z = 1 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=1} \Rightarrow x = 2 + z - 2 \Rightarrow \boxed{x=z} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (1, 0, 1)$$

Hacemos que su producto escalar sea nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 3, \alpha) \\ \vec{v}_s = (1, 0, 1) \\ \vec{u}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1, 0, 1)(2, 3, \alpha) = 0 \Rightarrow 2 + 0 + \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$$

Para $\alpha = -2$ las rectas r y s son perpendiculares.

3.2.2 Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r .

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, \alpha) \\ P_r(-1, 2, 0) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = \alpha\lambda \end{cases}$$

Un punto B cualquiera de la recta r tiene coordenadas $B(-1 + 2\lambda, 2 + 3\lambda, \alpha\lambda)$. Si este punto la coordenada z vale 0 entonces $\left. \begin{array}{l} \alpha\lambda = 0 \\ \alpha \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = 0$. El punto tiene coordenadas $B(-1, 2, 0)$.

Una recta paralela a s tiene su mismo vector director $\vec{v}_s = (1, 0, 1)$.

Hallamos la ecuación de la recta t con vector director $\vec{w}_t = \vec{v}_s = (1, 0, 1)$ y que pasa por el punto $B(-1, 2, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} B(-1, 2, 0) \in t \\ \vec{w}_t = \vec{v}_s = (1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow t: \begin{cases} x = -1 + \beta \\ y = 2 \\ z = \beta \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}$$

Suponiendo que $\alpha \neq 0$, la recta paralela a s que pasa por el punto de r cuya coordenada z vale 0

tiene ecuación $t: \begin{cases} x = -1 + \beta \\ y = 2 \\ z = \beta \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}$.

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)**Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2**

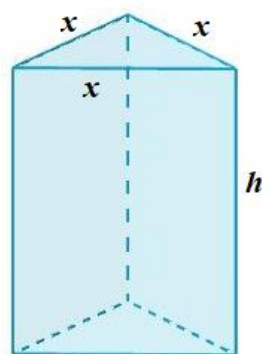
4.1 Se considera un prisma triangular de altura h cm, cuya base es un triángulo equilátero de lado x cm. El prisma tiene área total (área que incluye el área de las caras laterales y de las bases superior e inferior) igual a 10 cm^2 . Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Expresar el área total del prisma en función de x y h .

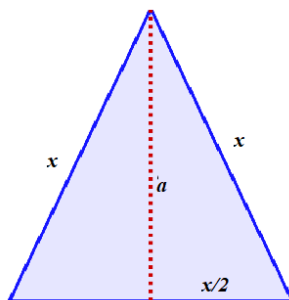
4.1.2 (1.5 puntos) Obtener los valores de x y h que maximizan el volumen.

4.1.3 (0.5 puntos) Hallar dicho volumen.

4.1.1 Dibujamos la situación planteada y hallamos el área del prisma.



El prisma tiene 3 caras laterales iguales de forma rectangular siendo el área de cada una de ellas: xh . El área de las bases superior e inferior es el área de dos triángulos equiláteros de lado x .



Por el teorema de Pitágoras sabemos que:

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = a^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow a^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{x \cdot a}{2} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$$

El área total del prisma es la suma del área de las 3 caras laterales y las 2 bases.

$$A(x, h) = 3xh + 2 \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = 3xh + \frac{\sqrt{3}}{2} x^2$$

4.1.2 Como el área vale 10 cm^2 sustituimos este valor en la función obtenida y despejamos h .

$$\left. \begin{array}{l} A(x, h) = 3xh + \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 \\ \text{Área} = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 3xh + \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 = 10 \Rightarrow 6xh + x^2 \sqrt{3} = 20 \Rightarrow \boxed{h = \frac{20 - \sqrt{3}x^2}{6x}}$$

Obtenemos la expresión del volumen del prisma.

$$V(x, h) = \text{Área base} \cdot \text{altura} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h \left\{ \begin{array}{l} h = \frac{20 - \sqrt{3}x^2}{6x} \end{array} \right\} \Rightarrow V(x) = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{20 - \sqrt{3}x^2}{6x} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}x(20 - \sqrt{3}x^2)}{24} = \frac{20\sqrt{3}x - 3x^3}{24} = \frac{5\sqrt{3}}{6}x - \frac{1}{8}x^3$$

Derivamos la función volumen y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$V(x) = \frac{5\sqrt{3}}{6}x - \frac{1}{8}x^3 \Rightarrow V'(x) = \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{8}x^2$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{8}x^2 = 0 \Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{3}{8}x^2 \Rightarrow 40\sqrt{3} = 18x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{40\sqrt{3}}{18} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}} = \frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3} \approx 1.96189$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada para saber si es máximo o mínimo.

$$V'(x) = \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{8}x^2 \Rightarrow V''(x) = -\frac{6}{8}x \Rightarrow V''(1.96189) = \frac{-6(1.96189)}{8} < 0$$

Al ser negativa la segunda derivada la función volumen presenta un máximo para

$x = \frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3} \approx 1.96189$. Obtenemos el valor de h para este valor.

$$h = \frac{20 - \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3} \right)^2}{6 \frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3}} = \frac{20 - \frac{\sqrt{3}(20\sqrt{3})}{9}}{2\sqrt{20\sqrt{3}}} = \frac{20 - \frac{60}{9}}{2\sqrt{20\sqrt{3}}} = \frac{\frac{40}{3}}{2\sqrt{20\sqrt{3}}} = \frac{20}{3\sqrt{20\sqrt{3}}} \approx 1.1327$$

El prisma de volumen máximo tiene 1.96189 cm en el lado de la base y 1.1327 cm de altura.

4.2.3 Hallamos el volumen máximo.

$$V\left(\frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3}\right) = \frac{20\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3} \right) - 3 \left(\frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3} \right)^3}{24} = \frac{\frac{20\sqrt{3}\sqrt{20\sqrt{3}}}{3} - 3 \frac{20\sqrt{3}\sqrt{20\sqrt{3}}}{27}}{24} \approx 1.8878$$

El volumen máximo es de 1.8878 centímetros cúbicos.

4.2 Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Calcular el dominio de definición y las asíntotas de f .

4.2.2 (0.75 puntos) Indicar, si existen, los extremos, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

4.2.3 (0.5 puntos) Representar gráficamente la función $y = f(x)$.

4.2.4 (0.75 puntos) Calcular la integral indefinida $\int f(x) dx$.

4.2.1 El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{(x-1)^2} + x = \frac{4}{(1-1)^2} + 1 = \frac{4}{0} + 1 = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(x-1)^2} + x = \frac{4}{\infty} + \infty = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{(x-1)^2} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x(x-1)^2} + 1 = \frac{4}{\infty} + 1 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{(x-1)^2} + x - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{4}{\infty} = 0$$

La recta $y = x$ es asíntota oblicua.

4.2.2 Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot (x-1)^2 - 4 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} + 1 = \frac{-8}{(x-1)^3} + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-8}{(x-1)^3} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{8}{(x-1)^3} = 1 \Rightarrow 8 = (x-1)^3 \Rightarrow x-1 = \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 3$, añadimos también $x = 1$ excluido del dominio.

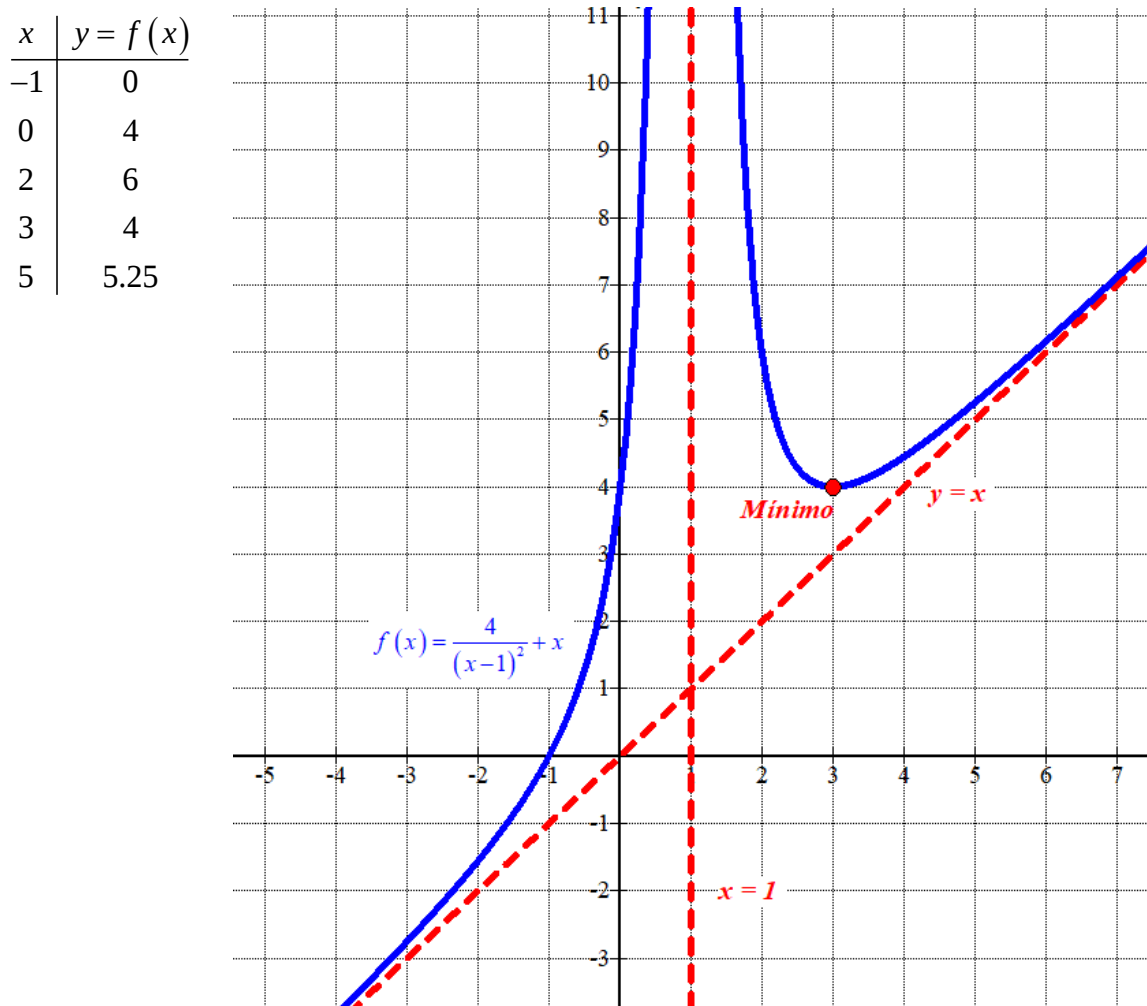
- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-8}{(0-1)^3} + 1 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$.

- En el intervalo $(1,3)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-8}{(2-1)^3} + 1 = -7 < 0$. La función decrece en $(1,3)$.
- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x=4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{-8}{(4-1)^3} + 1 = \frac{19}{27} > 0$. La función crece en $(3,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,1) \cup (3,+\infty)$ y decrece en $(1,3)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x=3$. Como $f(3) = \frac{4}{(3-1)^2} + 3 = 4$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(3,4)$.

4.2.3 Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.



4.2.4 Calculamos la integral.

$$\int f(x) dx = \int \frac{4}{(x-1)^2} + x dx = \int 4(x-1)^{-2} + x dx = \frac{4(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{4}{1-x} + \frac{x^2}{2} + K}$$

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2024	CONVOCATORIA: JULIO 2024
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos. <u>Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.</u> La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde k es un número real.

- ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible? (2 puntos)
- Para $k = 0$, si existe, calcular la matriz inversa de A . (4 puntos)
- Para $k = 0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD = DA$. (4 puntos)

Problema 2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

- Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución. (5 puntos)
- Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X = B$, encontrar el valor de α, β y γ dependiendo del parámetro real a . (5 puntos)

Problema 3. Se dan las rectas $r: x-1 = y-2 = \frac{z-1}{2}$ y $s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Se pide:

- Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección. (5 puntos)
- Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s . (5 puntos)

Problema 4. Sea el plano $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

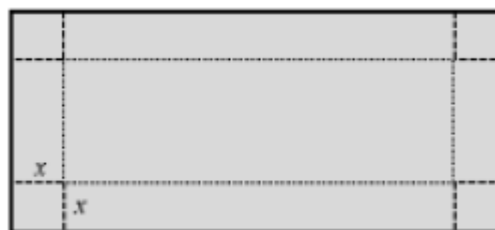
- Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad. (2 puntos)
- Calcular, en función del parámetro d , las coordenadas de los puntos A, B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X, Y y Z , respectivamente. (3 puntos)
- Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior. (5 puntos)

Problema 5. Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

- El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = -\frac{3}{4}$. (3 puntos)
- Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. (2 puntos)
- Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. (5 puntos)

Problema 6. Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

- Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. (8 puntos)
- Dicho volumen. (2 puntos)



Problema 7. Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10.25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30% de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10% defectuosas. El 25% de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5% defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

- ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa? (4 puntos)
- Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina? (3 puntos)
- Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina? (3 puntos)

Problema 8. Se ha determinado que en el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía diez mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

- Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. (3 puntos)
- Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. (3 puntos)
- Ocho o más mensajes tengan emoticonos. (4 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Soluciones

Problema 1. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde k es un número real.

- a) ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible? (2 puntos)
 b) Para $k = 0$, si existe, calcular la matriz inversa de A . (4 puntos)
 c) Para $k = 0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD = DA$. (4 puntos)

a) La matriz A es invertible si su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 2k - 3k - 2 + k^2 - 0 = k^2 - k - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = k \\ \frac{1-3}{2} = -1 = k \end{cases}$$

La matriz A es invertible para cualquier valor de k distinto de -1 y de 2 .

b) Para $k = 0$ existe la inversa de A . La calculamos.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1/3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1/3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1/3 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + 1 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para $k = 0$ la matriz inversa queda $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Para $k = 0$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Una matriz diagonal tiene la expresión $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Debe cumplir $AD = DA$

$$AD = DA \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3c \\ 0 & b/3 & c \\ 2a & -b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3a \\ 0 & b/3 & b \\ 2c & -c & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 3c \rightarrow a = c \\ c = b \\ 2a = 2c \rightarrow a = c \\ -b = -c \rightarrow b = c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = b = c \Rightarrow D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Las matrices diagonales que cumplen $AD = DA$ tienen la expresión $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2 X = B$ tiene una única solución. (5 puntos)

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2 X = B$, encontrar el valor de α, β y γ dependiendo del parámetro real a . (5 puntos)

a) Para que la ecuación matricial tenga una única solución la matriz A^2 debe tener inversa y para ello es necesario que su determinante sea no nulo. Averiguamos cuando se anula dicho determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 0 - 4a - 0 - 0 = 6 - 4a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 6 - 4a = 0 \Rightarrow 4a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

La ecuación matricial $A^2 X = B$ tiene una única solución para los valores de a distintos de 1.5.

b) Resolvemos la ecuación matricial.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 2+6 \\ 3+6+a & 4 & 6+2+3 \\ a+3a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix}$$

$$A^2 X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3(1+2a)-8 \\ 3(9+a)-8-11 \\ 12a-(2a+9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3+6a-8 \\ 27+3a-19 \\ 12a-2a-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6a-5 \\ 8+3a \\ 10a-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 6a-5 \\ \beta = 3a+8 \\ \gamma = 10a-9 \end{cases}$$

Los valores buscados son $\alpha = 6a-5$, $\beta = 3a+8$, $\gamma = 10a-9$.

Problema 3. Se dan las rectas $r: x-1=y-2=\frac{z-1}{2}$ y $s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$. Se pide:

- a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección. (5 puntos)
 b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s . (5 puntos)

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de las rectas.

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,2,1) \\ \vec{v}_r = (1,1,2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$$

$$s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(3,3,-1) \\ \vec{u}_s = (-2,-1,2) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=3-2\alpha \\ y=3-\alpha \\ z=-1+2\alpha \end{cases}$$

Intentamos resolver el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \\ s: \begin{cases} x=3-2\alpha \\ y=3-\alpha \\ z=-1+2\alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3-2\alpha=1+\lambda \\ 3-\alpha=2+\lambda \\ -1+2\alpha=1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=2\alpha+\lambda \\ 1=\alpha+\lambda \\ -2=-2\alpha+2\lambda \rightarrow 1=\alpha-\lambda \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 2=2\alpha+\lambda \\ 1=\alpha+\lambda \\ \lambda=\alpha-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=2\alpha+\alpha-1 \\ 1=\alpha+\alpha-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3=3\alpha \\ 2=2\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha=1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=3-2=1 \\ y=3-1=2 \\ z=-1+2=1 \end{cases}} \end{aligned}$$

La solución del sistema es única, por lo que las rectas se cortan en el punto de coordenadas la solución del sistema. Las rectas r y s se cortan en $P(1,2,1)$.

- b) La recta t que pasa por P y es perpendicular a r y a s tiene como vector director el producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1,1,2) \\ \vec{u}_s = (-2,-1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{w}_t = \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2i - 4j - k + 2k - 2j + 2i = \\ = 4i - 6j + k = (4, -6, 1) \end{aligned}$$

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $P(1,2,1)$ con vector director $\vec{w}_t = (4, -6, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_t = (4, -6, 1) \\ P(1,2,1) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow t: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-1}{1}$$

La recta t que pasa por P y es perpendicular a r y a s tiene ecuación $t: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-1}{1}$.

Problema 4. Sea el plano $\pi : 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

- a) Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad. (2 puntos)
 b) Calcular, en función del parámetro d , las coordenadas de los puntos A , B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X , Y y Z , respectivamente. (3 puntos)
 c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior. (5 puntos)

- a) Hallamos la distancia del plano al punto $(0, 0, 0)$ y la igualamos a 1.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ O(0,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi, O) = \frac{|0 + 0 + 0 - d|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{|d|}{\sqrt{61}}$$

$$d(\pi, O) = 1 \Rightarrow \frac{|d|}{\sqrt{61}} = 1 \Rightarrow |d| = \sqrt{61} \Rightarrow \begin{cases} d = +\sqrt{61} \\ d = -\sqrt{61} \end{cases}$$

Para $d = +\sqrt{61}$ y $d = -\sqrt{61}$ la distancia del plano al origen vale 1.

- b) Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ \text{Eje } OX \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 6x - d = 0 \Rightarrow 6x = d \Rightarrow x = \frac{d}{6} \Rightarrow A\left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ \text{Eje } OY \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 4y - d = 0 \Rightarrow 4y = d \Rightarrow y = \frac{d}{4} \Rightarrow B\left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ \text{Eje } OZ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -3z - d = 0 \Rightarrow 3z = -d \Rightarrow z = \frac{-d}{3} \Rightarrow C\left(0, 0, \frac{-d}{3}\right)$$

Los puntos de corte del plano con los ejes son $A\left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$, $B\left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$ y $C\left(0, 0, \frac{-d}{3}\right)$.

- c) Hallamos las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \left(0, \frac{d}{4}, 0\right) - \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right) = \left(\frac{-d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(0, 0, \frac{-d}{3}\right) - \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right) = \left(\frac{-d}{6}, 0, \frac{-d}{3}\right)$$

Hallamos el ángulo formado por ambos vectores.

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \left(\frac{-d}{6}, \frac{d}{4}, 0 \right) \\ \vec{AC} &= \left(\frac{-d}{6}, 0, \frac{-d}{3} \right) \end{aligned} \left\} \Rightarrow \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} =$$
$$= \frac{\left(\frac{-d}{6}, \frac{d}{4}, 0 \right) \cdot \left(\frac{-d}{6}, 0, \frac{-d}{3} \right)}{\sqrt{\left(\frac{-d}{6} \right)^2 + \left(\frac{d}{4} \right)^2 + 0} \cdot \sqrt{\left(\frac{-d}{6} \right)^2 + 0 + \left(\frac{-d}{3} \right)^2}} = \frac{\frac{d^2}{36}}{\sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{16}} \cdot \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{9}}} =$$
$$= \frac{\frac{d^2}{36}}{\sqrt{\frac{13d^2}{144}} \cdot \sqrt{\frac{5d^2}{36}}} = \frac{\frac{d^2}{36}}{\frac{\sqrt{13}d}{12} \cdot \frac{\sqrt{5}d}{6}} = \frac{\frac{d^2}{36}}{\frac{\sqrt{65}d^2}{72}} = \frac{2}{\sqrt{65}} \Rightarrow (\vec{AB}, \vec{AC}) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{65}}\right) = 75.6^\circ$$

Para $d \neq 0$ el ángulo formado por los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ tiene un valor aproximado de 75.6° .

Problema 5. Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

- a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = -\frac{3}{4}$. (3 puntos)
- b) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. (2 puntos)
- c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. (5 puntos)

a) Si la función $h(x)$ tiene un mínimo relativo en la abscisa $x = -\frac{3}{4}$ la derivada de la función debe

anularse para $x = -\frac{3}{4} \rightarrow h'\left(-\frac{3}{4}\right) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} h'(x) = a + 2x \\ h'\left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = a + 2\left(-\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

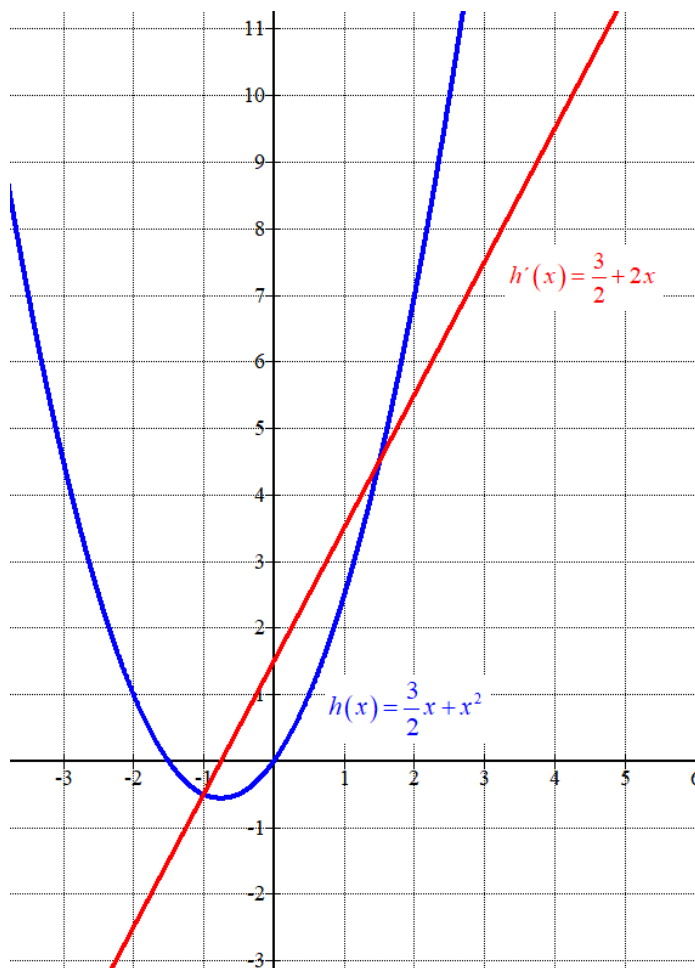
También se cumple que la derivada segunda $h''(x) = 2$ es positiva para $x = -\frac{3}{4}$, y por tanto presenta un mínimo relativo en dicho valor.

b) Para $a = \frac{3}{2}$ la función queda $h(x) = \frac{3}{2}x + x^2$ y la derivada $h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$.

Dibujamos la parábola y la recta asociada a ambas funciones.

x	$h(x) = \frac{3}{2}x + x^2$
-2	1
$-\frac{3}{2}$	0
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{9}{16}$
0	0
2	7

x	$h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$
0	1.5
1	3.5
2	5.5



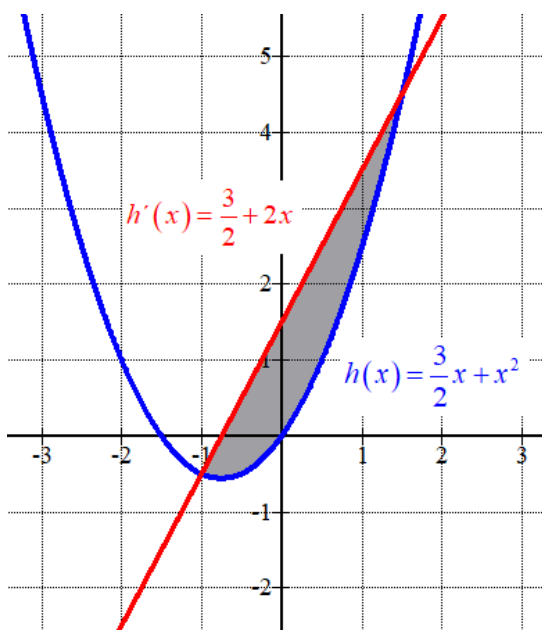
c) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} h(x) = \frac{3}{2}x + x^2 \\ h'(x) = \frac{3}{2} + 2x \\ h(x) = h'(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2}x + x^2 = \frac{3}{2} + 2x \Rightarrow 3x + 2x^2 = 3 + 4x \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1+5}{4} = \boxed{\frac{3}{2} = x} \\ \frac{1-5}{4} = \boxed{-1 = x} \end{cases}$$

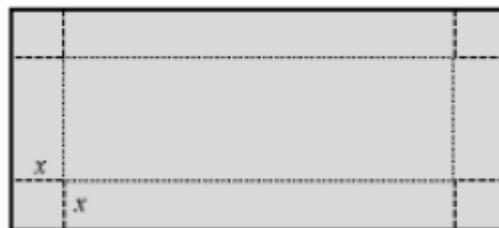
Calculamos el área de la región encerrada entre ambas gráficas como la integral definida entre -1 y $\frac{3}{2}$ de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^{1.5} \left(\frac{3}{2} + 2x - \left(\frac{3}{2}x + x^2 \right) \right) dx = \int_{-1}^{1.5} \left(\frac{3}{2} + 2x - \frac{3}{2}x - x^2 \right) dx = \\ &= \int_{-1}^{1.5} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} = \\ &= \left[-\frac{(3/2)^3}{3} + \frac{(3/2)^2}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{3}{2}(-1) \right] = \\ &= -\frac{27}{24} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = -\frac{9}{8} + \frac{9}{16} + 2 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \boxed{\frac{125}{48} \approx 2.6 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

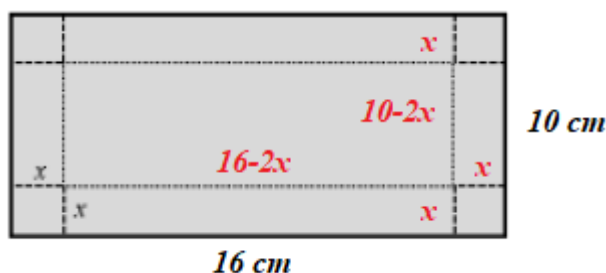


Problema 6. Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

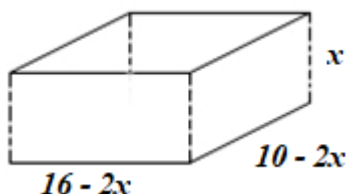
- a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. (8 puntos)
b) Dicho volumen. (2 puntos)



Dibujamos la situación planteada.



El volumen de la caja es el volumen de un prisma de base rectangular de lados $16-2x$ y $10-2x$ con altura x .



$$\text{Volumen} = V(x) = (16-2x)(10-2x)x = (160-32x-20x+4x^2)x = 160x-52x^2+4x^3$$

- a) Derivamos la función volumen y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$V(x) = 160x - 52x^2 + 4x^3 \Rightarrow V'(x) = 160 - 104x + 12x^2$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 160 - 104x + 12x^2 = 0 \Rightarrow 40 - 26x + 3x^2 = 0 \Rightarrow$$

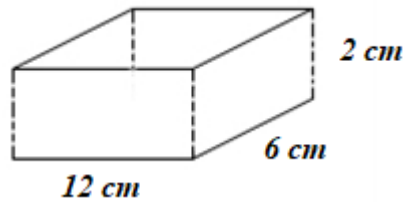
$$\Rightarrow x = \frac{26 \pm \sqrt{(-26)^2 - 4(3)(40)}}{2(3)} = \frac{26 \pm 14}{6} = \begin{cases} \frac{26+14}{6} = \frac{20}{3} = x \\ \frac{26-14}{6} = 2 = x \end{cases}$$

Sustituimos estos dos puntos críticos de la función volumen en la segunda derivada.

$$V'(x) = 160 - 104x + 12x^2 \Rightarrow V''(x) = -104 + 24x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V''\left(\frac{20}{3}\right) = -104 + 24 \cdot \frac{20}{3} = 56 > 0 \rightarrow x = \frac{20}{3} \text{ es mínimo} \\ V''(2) = -104 + 24 \cdot 2 = -56 < 0 \rightarrow x = 2 \text{ es máximo} \end{cases}$$

El volumen es máximo para $x = 2$. Las dimensiones de la caja con volumen máximo son $12 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$.



b) El volumen máximo que se puede conseguir es con $x = 2$. Lo calculamos.

$$\text{Volumen máximo} = V(2) = (16 - 2 \cdot 2)(10 - 2 \cdot 2)2 = 12 \cdot 6 \cdot 2 = 144 \text{ cm}^3$$

El volumen máximo es de 144 cm^3 .

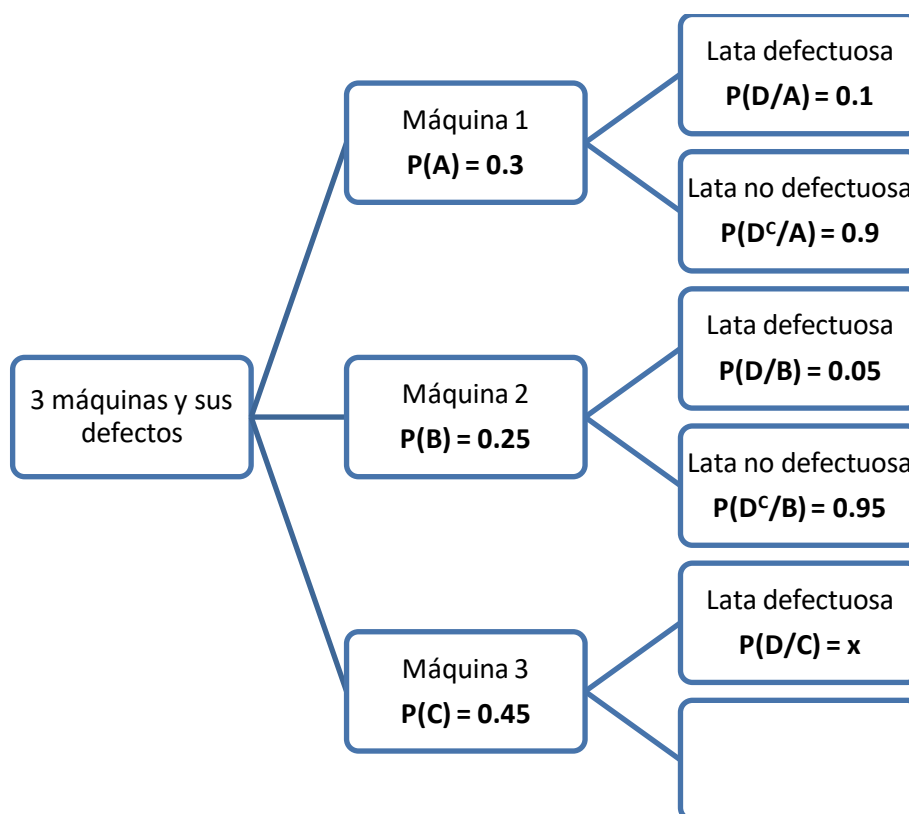
Problema 7. Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10.25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30% de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10% defectuosas. El 25% de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5% defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa? (4 puntos)
- b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina? (3 puntos)
- c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina? (3 puntos)

Llamamos A al suceso “la lata de refresco es fabricada por la primera máquina”, B a “la lata de refresco es fabricada por la segunda máquina”, C a “la lata de refresco es fabricada por la tercera máquina” y D al suceso “la lata fabricada es defectuosa”.

Con los datos del ejercicio tenemos que $P(D) = 0.1025$, $P(A) = 0.30$, $P(D/A) = 0.10$, $P(B) = 0.25$, $P(D/B) = 0.05$, $P(C) = 1 - 0.3 - 0.25 = 0.45$.

Realizamos un diagrama de árbol para organizar toda la información del ejercicio.



- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.1025 = 0.3 \cdot 0.1 + 0.25 \cdot 0.05 + 0.45 \cdot x \Rightarrow 0.1025 = 0.03 + 0.0125 + 0.45x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.45x = 0.1025 - 0.0425 = 0.06 \Rightarrow x = \frac{0.06}{0.45} = \boxed{\frac{2}{15} \approx 0.1333}$$

La probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa es de $\frac{2}{15}$.

b) Nos piden calcular $P(A/D^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D^c) = \frac{P(A \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(A)P(D^c/A)}{1 - P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.9}{1 - 0.1025} = \boxed{\frac{108}{359} \approx 0.3}$$

La probabilidad de que una lata no defectuosa proceda de la primera máquina es de $\frac{108}{359}$.

c) Calculamos la probabilidad de que la lata defectuosa haya sido fabricada por la segunda máquina: $P(B/D)$.

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{P(D)} = \frac{0.25 \cdot 0.05}{0.1025} = \frac{5}{41}$$

La probabilidad de que una lata defectuosa **no** haya sido fabricada por la segunda máquina tiene un valor de $1 - \frac{5}{41} = \frac{36}{41} \approx 0.878$.

Problema 8. Se ha determinado que en el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía diez mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

- a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. (3 puntos)
 b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. (3 puntos)
 c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos. (4 puntos)

Llamamos X = Número de emoticonos enviados en 10 mensajes de WhatsApp.

El número de repeticiones es $n = 10$. La probabilidad de enviar un emoticono es $p = 0.6$.

Como cada repetición se supone independiente de las demás X es una variable binomial.

$X = B(10, 0.6)$.

- a) Nos piden calcular $P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^{10} = 0.4^{10} \approx \boxed{0.0001}$$

La probabilidad de que ningún mensaje contenga un emoticono es de 0.0001.

- b) Las dos quintas partes de los 10 mensajes son $\frac{2}{5} \cdot 10 = 4$ mensajes.

Nos piden calcular $P(X = 4)$.

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} 0.6^4 \cdot 0.4^6 = \left\{ \begin{aligned} \binom{10}{4} &= \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2}} = 210 \end{aligned} \right\} = 210 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^6 \approx \boxed{0.1115}$$

La probabilidad de que exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos es de 0.1115.

- c) Nos piden calcular $P(X \geq 8)$.

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$$

$$= \binom{10}{8} 0.6^8 \cdot 0.4^2 + \binom{10}{9} 0.6^9 \cdot 0.4^1 + \binom{10}{10} 0.6^{10} \cdot 0.4^0 =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} \binom{10}{8} &= \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \\ &= \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \binom{10}{9} &= \frac{10!}{9! \cdot 1!} = 10 \\ \binom{10}{10} &= 1 \end{aligned} \right\} =$$

$$= 45 \cdot 0.6^8 \cdot 0.4^2 + 10 \cdot 0.6^9 \cdot 0.4 + 0.6^{10} \approx \boxed{0.1673}$$

La probabilidad de que ocho o más mensajes tengan emoticonos tiene un valor aproximado de 0.1673.



PAU Junio 2024 Matemáticas II
COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA
UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2024	CONVOCATORIA: JUNIO 2024
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos. <u>Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.</u> La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m :

$$\begin{aligned} -x + y + z &= m \\ 2x + my - z &= 3m \\ (m-1)x + 3y - z &= 6 + m. \end{aligned} \quad :$$

Se pide:

- Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m . (6 puntos)
- Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución. (4 puntos)

Problema 2. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

- Estudiar el rango de A en función del parámetro real m . (3 puntos)
- Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$. (4 puntos)
- Para $m = 0$, calcular A^5 . (3 puntos)

Problema 3. Se considera la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi: 3x - my + z = 1$. Se pide:

- Determinar el valor del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r . (4 puntos)
- Para los valores m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π , que contenga a la recta r . (3 puntos)
- Calcular, en función de m , la distancia entre π y el punto $P=(1, -1, -2)$. (3 puntos)

Problema 4. Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P=(2,1,3)$ y $Q=(1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R=(4,7,6)$.

- Calcular la ecuación de la recta r . (2 puntos)
- Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado. (3 puntos)
- Hallar las coordenadas de los otros dos vértices. (5 puntos)

Problema 5. Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

- a) Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$. (3 puntos)
- b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (5 puntos)
- c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$. (2 puntos)

Problema 6. Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(-1,1)$. Se consideran las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$, $0 < a < 1$, contenidas dentro de R . Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R . (10 puntos)

Problema 7. Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2 . La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro. La probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0.6. La moneda M_2 tiene una cara impresa en ambos lados.

- a) Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.
 - 1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras? (3 puntos)
 - 2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz? (3 puntos)
- b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1 . Responder a la misma pregunta para la moneda M_2 . (4 puntos)

Problema 8. Un comercial de venta por teléfono sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta. Este comercial realiza 10 llamadas.

- a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas. (3 puntos)
- b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas. (3 puntos)
- c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas. (4 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Soluciones

Problema 1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m :

$$\begin{aligned} -x + y + z &= m \\ 2x + my - z &= 3m \\ (m-1)x + 3y - z &= 6 + m. \end{aligned} :$$

Se pide:

- a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m . (6 puntos)
 b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución. (4 puntos)

a) La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & m \\ 2 & m & -1 & 3m \\ m-1 & 3 & -1 & 6+m \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = m - m + 1 + 6 - m(m-1) + 2 - 3 = 6 - m^2 + m = -m^2 + m + 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^2 + m + 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)(6)}}{-2} = \frac{-1 \pm 5}{-2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{-2} = \boxed{-2 = m} \\ \frac{-1-5}{-2} = \boxed{3 = m} \end{cases}$$

Surgen tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $m \neq -2$ y $m \neq 3$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $m = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Convertimos este sistema en otro

equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -2 \quad -1 \quad 6 \\ -2 \quad 2 \quad 2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -3 \quad 3 \quad -1 \quad 4 \\ 3 \quad -3 \quad -3 \quad 6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -4 \quad 10 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 4 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad -4 \quad 10 \\ 0 \quad 0 \quad 4 \quad 8 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 18 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{-1 \quad 1 \quad 1 \quad -2}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 18}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema no tiene solución (es incompatible).

CASO 3. $m=3$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$. Convertimos este sistema en otro

equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 2 \quad 3 \quad -1 \quad 9 \\ -2 \quad -3 \quad 1 \quad -9 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 3 \quad -1 \quad 9 \\ -2 \quad 2 \quad 2 \quad 6 \\ \hline 0 \quad 5 \quad 1 \quad 15 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{-1 \quad 1 \quad 1 \quad 3}^{A/B} \\ 0 \quad 5 \quad 1 \quad 15 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $m=3$ el sistema es compatible indeterminado. Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} -x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 9 \\ 2x + 3y - z = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \{ \text{Ecuación } 2^a = \text{Ecuación } 3^a \} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 3 + x - y \\ 2x + 3y - z = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 3y - (3 + x - y) = 9 \Rightarrow x + 4y = 12 \Rightarrow \boxed{x = 12 - 4y} \Rightarrow \boxed{z = 3 + 12 - 4y - y = 15 - 5y}$$

$$\text{Las soluciones son } \begin{cases} x = 12 - 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 15 - 5\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Problema 2. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m . (3 puntos)
 b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$. (4 puntos)
 c) Para $m = 0$, calcular A^5 . (3 puntos)

a) El rango de A es 3, 2 o 1.

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{vmatrix} = m^2 + 0 + 0 - m^3 - 0 - 0 = m^2 - m^3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - m^3 = 0 \Rightarrow m^2(1 - m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 1 - m = 0 \rightarrow m = 1 \end{cases}$$

Nos surgen tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $m = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la

fila segunda y la columna tercera (son nulas) $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

CASO 3. $m = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la

fila y columna terceras $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ el rango de A es 3 y si $m = 0$ o $m = 1$ el rango de A es 2.

b) Para $m = -1$ (caso 1) el determinante de A es no nulo y la matriz tiene inversa. La calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{Adj \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{2}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial y obtenemos su expresión.

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0-3+0 \\ 0+0+0 & 0-2+0 \\ -1+0+0 & 0+1+0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

c) Para $m=0$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3. Se considera la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi: 3x - my + z = 1$. Se pide:

- Determinar el valor del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r . (4 puntos)
- Para los valores m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π , que contenga a la recta r . (3 puntos)
- Calcular, en función de m , la distancia entre π y el punto $P=(1,-1,-2)$. (3 puntos)

- a) Para que recta y plano sean paralelos el vector normal del plano y el director de la recta deben ser perpendiculares (producto escalar nulo) y además los puntos de la recta no deben pertenecer al plano (la recta no está contenida en el plano).

Hallamos el vector normal del plano y el director de la recta. Su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, -1, -2) \\ \vec{v}_r = (2, 3, -1) \end{cases} \\ \pi: 3x - my + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (3, -m, 1) \\ r \parallel \pi \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (2, 3, -1)(3, -m, 1) = 0 \Rightarrow 6 - 3m - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 = 3m \Rightarrow \boxed{m = \frac{5}{3}}$$

El plano queda $\pi: 3x - \frac{5}{3}y + z = 1 \Rightarrow \pi: 9x - 5y + 3z = 3$.

Vemos si el punto $P_r(1, -1, -2)$ perteneciente a la recta pertenece al plano.

$$¿P_r(1, -1, -2) \in \pi: 9x - 5y + 3z = 3? \Rightarrow ¿9 \cdot 1 - 5(-1) + 3(-2) = 3? \Rightarrow ¿9 + 5 - 6 = 3?$$

La igualdad no es cierta y el punto P_r no pertenece al plano.

Para $m = \frac{5}{3}$ la recta r y el plano π son paralelos.

Para que la recta esté contenida en el plano el vector normal del plano y el director de la recta deben ser perpendiculares (producto escalar nulo) lo que implica que $m = \frac{5}{3}$. Para este valor ya hemos visto que el punto $P_r(1, -1, -2)$ no pertenece al plano. No existe ningún valor de m que haga que la recta esté contenida en el plano.

- b) Para $m = \frac{5}{3}$ el plano queda $\pi: 9x - 5y + 3z = 3$. Un plano π' paralelo a π tiene ecuación

$\pi': 9x - 5y + 3z = D$. Para que este plano contenga a la recta r basta con que contenga al punto $P_r(1, -1, -2)$ de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \pi': 9x - 5y + 3z = D \\ P_r(1, -1, -2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 9 - 5(-1) + 3(-2) = D \Rightarrow \boxed{D = 8}$$

El plano π' paralelo a π , que contiene a la recta r tiene ecuación $\pi': 9x - 5y + 3z = 8$.

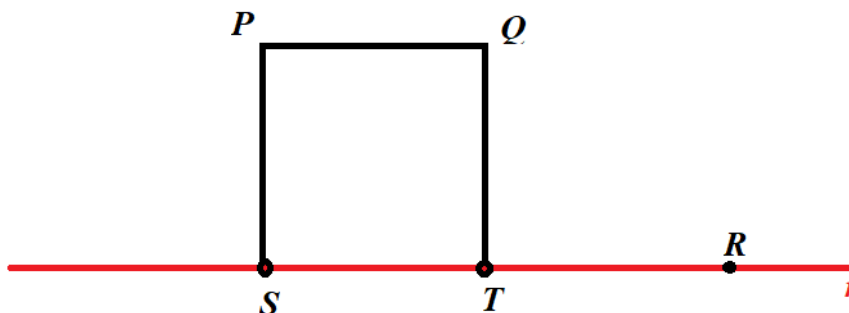
c) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 3x - my + z - 1 = 0 \\ P(1, -1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 - m(-1) - 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-m)^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{|m|}{\sqrt{10 + m^2}}}$$

Problema 4. Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P=(2,1,3)$ y $Q=(1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R=(4,7,6)$.

- a) Calcular la ecuación de la recta r . (2 puntos)
 b) Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado. (3 puntos)
 c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices. (5 puntos)

La situación planteada es la del dibujo.



- a) La recta r debe ser paralela al segmento PQ . Hallamos la recta r que pasa por el punto R y tiene como vector director el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (1,3,1) - (2,1,3) = (-1,2,-2) \\ R(4,7,6) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

- b) El plano que contiene el cuadrado es el plano que contiene el punto $P(2,1,3)$ y tiene como vectores directores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{QR} = (4,7,6) - (1,3,1) = (3,4,5) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (-1,2,-2) \\ P(2,1,3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8(x-2) - 5(y-1) + 6(z-3) + 4(z-3) + 6(y-1) - 10(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -18(x-2) + (y-1) + 10(z-3) = 0 \Rightarrow -18x + 36 + y - 1 + 10z - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: -18x + y + 10z + 5 = 0}$$

El plano que contiene el cuadrado tiene ecuación $\pi: -18x + y + 10z + 5 = 0$.

- c) Sabemos que el punto S es un punto de la recta r que cumple que $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a $\overrightarrow{PS}$, es decir, su producto escalar es nulo.

$$r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow S(4 - \lambda, 7 + 2\lambda, 6 - 2\lambda)$$

$$\overrightarrow{PS} = (4 - \lambda, 7 + 2\lambda, 6 - 2\lambda) - (2, 1, 3) = (2 - \lambda, 6 + 2\lambda, 3 - 2\lambda)$$

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PS} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PS} = 0 \Rightarrow (-1, 2, -2)(2 - \lambda, 6 + 2\lambda, 3 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1(2 - \lambda) + 2(6 + 2\lambda) - 2(3 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow -2 + \lambda + 12 + 4\lambda - 6 + 4\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = \frac{-4}{9} \Rightarrow S\left(4 + \frac{4}{9}, 7 - 2\frac{4}{9}, 6 + 2\frac{4}{9}\right) = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$$

Sabemos que el punto T es un punto de la recta r que cumple que $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a $\overrightarrow{QT}$, es decir, su producto escalar es nulo.

$$r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow T(4 - \lambda, 7 + 2\lambda, 6 - 2\lambda)$$

$$\overrightarrow{QT} = (4 - \lambda, 7 + 2\lambda, 6 - 2\lambda) - (1, 3, 1) = (3 - \lambda, 4 + 2\lambda, 5 - 2\lambda)$$

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{QT} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QT} = 0 \Rightarrow (-1, 2, -2)(3 - \lambda, 4 + 2\lambda, 5 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1(3 - \lambda) + 2(4 + 2\lambda) - 2(5 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow -3 + \lambda + 8 + 4\lambda - 10 + 4\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{9} \Rightarrow T\left(4 - \frac{5}{9}, 7 + 2\frac{5}{9}, 6 - 2\frac{5}{9}\right) = \left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$$

Los otros dos vértices del cuadrado son los puntos $S\left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$ y $T\left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$.

Problema 5. Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

- a) Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$. (3 puntos)
- b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (5 puntos)
- c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$. (2 puntos)

- a) La función $f(x)$ tiene un denominador que no se anula por lo que su dominio son todos los números reales.

Asíntota vertical. $x = a$

No tiene pues el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Asíntota horizontal. $y = b$

Estudiamos la situación cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = \frac{\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{2e^{2x}} = \frac{k}{+\infty} = \{k \neq 0\} = 0$$

La función tiene una asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$: $y = 0$.

Estudiamos la situación cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} kxe^{-2x} = k(-\infty)e^{+\infty} = \{k \neq 0\} = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Hemos supuesto que k es distinto de cero. Si $k = 0$ la función sería $f(x) = \frac{0 \cdot x}{e^{2x}} = 0$ que no tiene asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Cuando x tiende a $+\infty$ la función tiene asíntota horizontal y no puede tener asíntota oblicua. Cuando x tiende a $-\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{kx}{e^{2x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{kx}{xe^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} ke^{-2x} = \{k \neq 0\} = \infty$$

La función no tiene asíntota oblicua.

- b) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{kx}{e^{2x}} = kxe^{-2x} \Rightarrow f'(x) = ke^{-2x} + kx(-2)e^{-2x} = (k - 2kx)e^{-2x} = k(1 - 2x)e^{-2x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow k(1 - 2x)e^{-2x} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k \neq 0 \\ e^{-2x} \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después del valor crítico encontrado $x = \frac{1}{2}$.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0) = k(1-0)e^0 = k$. Si k es positivo la función es creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y si k es negativo la función es decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = k(1-2)e^{-2} = -ke^{-2} = \frac{-k}{e^2}$. Si k es positivo la función es decreciente en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y si k es negativo la función es creciente en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Resumiendo: Si $k > 0$ la función crece en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y decrece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Si $k < 0$ la función decrece en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y crece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Si $k > 0$ la función tiene un máximo relativo en $x = \frac{1}{2}$. Si $k < 0$ la función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{1}{2}$.

c) La función es continua en $[-1, 1]$. Calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo:

$$f(-1) = \frac{k(-1)}{e^{2(-1)}} = \frac{-k}{e^{-2}} = -ke^2, \quad f(1) = \frac{k(1)}{e^{2(1)}} = \frac{k}{e^2} = ke^{-2}.$$

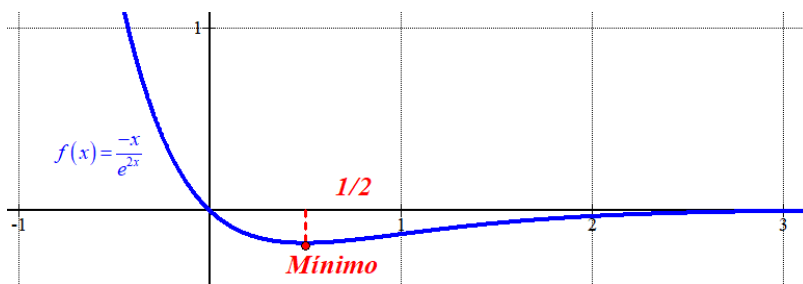
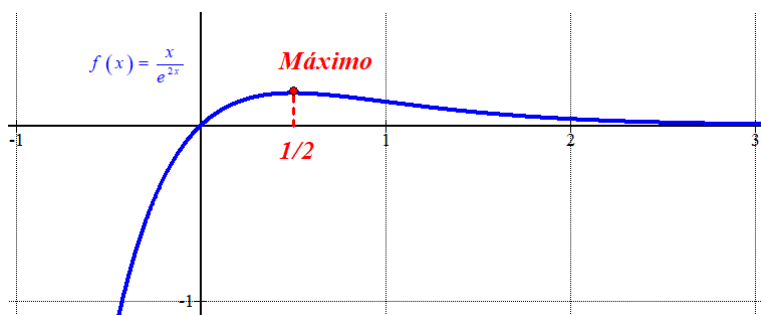
La función toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo:

$$\text{Si } k > 0 \rightarrow f(-1) = -ke^2 < 0 \text{ y } f(1) = ke^{-2} > 0.$$

$$\text{Si } k < 0 \rightarrow f(-1) = -ke^2 > 0 \text{ y } f(1) = ke^{-2} < 0.$$

Aplicando el teorema de Bolzano tenemos que existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

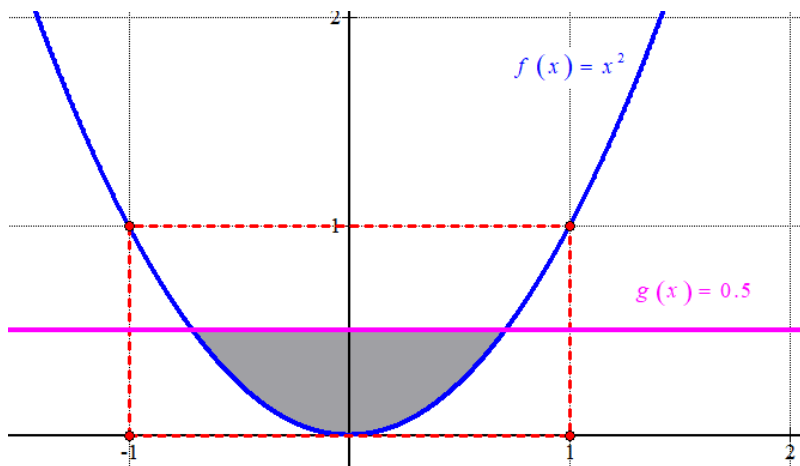
Este valor que nos dice el teorema de Bolzano que existe es $c = 0$.



Problema 6. Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(-1,1)$. Se consideran las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$, $0 < a < 1$, contenidas dentro de R. Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R. (10 puntos)

Dibujamos la situación planteada.

x	$f(x) = x^2$
-1	1
0	0
1	1



Averiguamos los puntos de corte de las dos gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = a \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

El área del rectángulo R es: base · altura = $2 \cdot 1 = 2$ unidades cuadradas.

El área de la región gris del dibujo debe valer $2/3$.

Calculamos el valor del área de la región limitada por las dos gráficas.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} g(x) - f(x) dx = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} a - x^2 dx = \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = \\ &= \left[a\sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^3}{3} \right] - \left[a(-\sqrt{a}) - \frac{(-\sqrt{a})^3}{3} \right] = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} + a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \\ &= 2a\sqrt{a} - \frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{6a\sqrt{a} - 2a\sqrt{a}}{3} = \frac{4a\sqrt{a}}{3} \end{aligned}$$

Igualemos el área a $2/3$ y obtenemos el valor de a .

$$\frac{4a\sqrt{a}}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2a\sqrt{a} = 1 \Rightarrow (2a\sqrt{a})^2 = 1^2 \Rightarrow 4a^2 \cdot a = 1 \Rightarrow 4a^3 = 1 \Rightarrow a^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

El valor buscado es $a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

Problema 7. Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2 . La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro. La probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0.6. La moneda M_2 tiene una cara impresa en ambos lados.
a) Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.

1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras? (3 puntos)

2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz? (3 puntos)

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1 . Responder a la misma pregunta para la moneda M_2 . (4 puntos)

La probabilidad de sacar cara con la moneda M_1 es $P(C / M_1) = 0.6$.

La probabilidad de sacar cara con la moneda M_2 es $P(C / M_2) = 1$.

La probabilidad de elegir una de las monedas es $P(M_1) = P(M_2) = 0.5$.

Las tres elecciones de una de las monedas y el lanzamiento de la moneda son independientes entre si.

a.1) La probabilidad de sacar cara en un lanzamiento es $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(M_1)P(C / M_1) + P(M_2)P(C / M_2) = 0.5 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 1 = 0.8$$

La probabilidad de sacar tres caras en tres lanzamientos es el producto de las probabilidades de sacar cara en un lanzamiento.

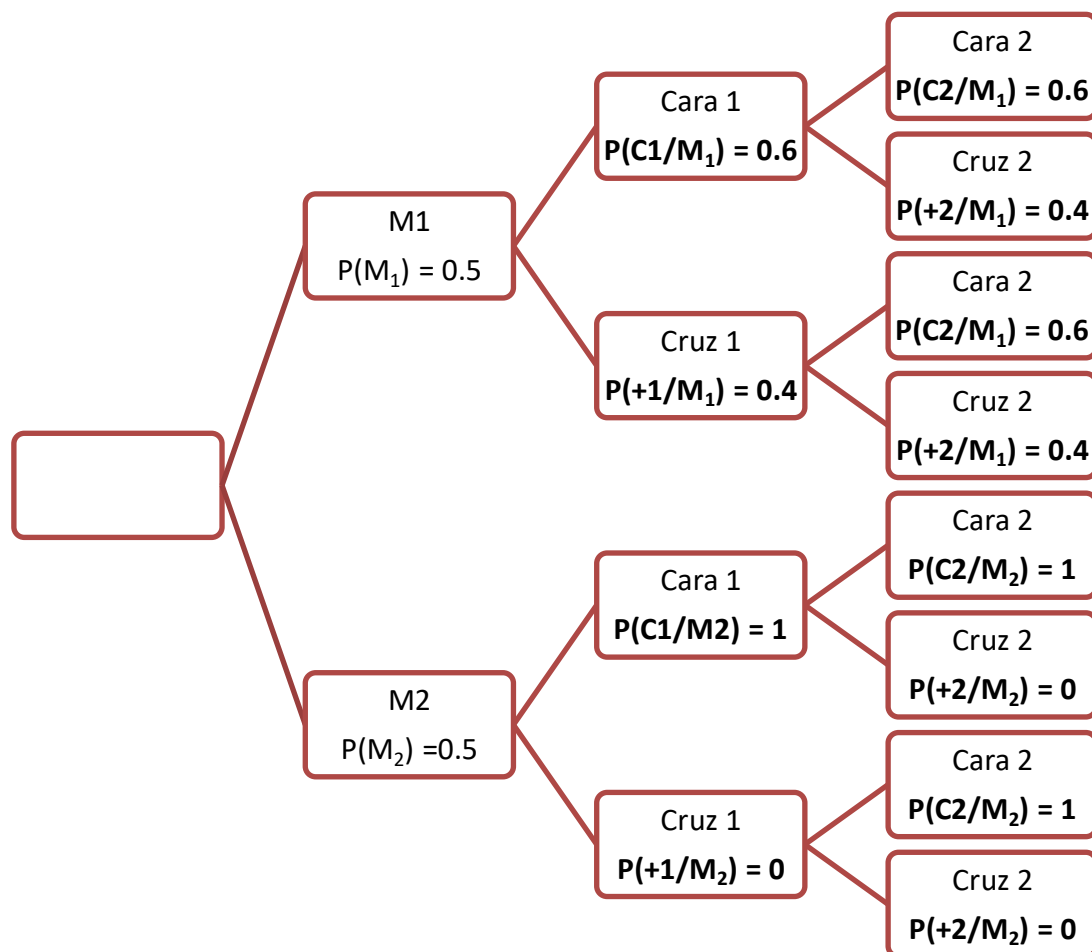
$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1) \cdot P(C_2) \cdot P(C_3) = 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = \boxed{0.512}$$

a.2) Para sacar exactamente una cruz debemos sacar una cruz y dos caras. Esto puede pasar de distintas maneras: $C_1 C_2 +3$, $C_1 +2 C_3$ o $+1 C_2 C_3$.

$$P(\text{Sacar 1 cruz}) = P(C_1 \cap C_2 \cap +3) + P(C_1 \cap +2 \cap C_3) + P(+1 \cap C_2 \cap C_3) =$$

$$= 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 3 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = \boxed{0.384}$$

b) Realizamos un diagrama de árbol.



La probabilidad de sacar 2 caras en los dos lanzamientos es:

$$P(2 \text{ caras}) = P(M_1)P(C1/M_1)P(C2/M_1) + P(M_2)P(C1/M_2)P(C2/M_2) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 1 \cdot 1 = 0.68$$

Nos piden calcular $P(M_1 / (2 \text{ caras}))$.

$$P(M_1 / (2 \text{ caras})) = \frac{P(M_1 \cap (2 \text{ caras}))}{P(2 \text{ caras})} = \frac{P(M_1)P((2 \text{ caras})/M_1)}{P(2 \text{ caras})} =$$

$$= \frac{P(M_1)P(C1/M_1)P(C2/M_1)}{P(2 \text{ caras})} = \frac{0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.6}{0.68} = \boxed{\frac{9}{34} \approx 0.2647}$$

Nos piden calcular $P(M_2 / (2 \text{ caras}))$.

$$P(M_2 / (2 \text{ caras})) = \frac{P(M_2 \cap (2 \text{ caras}))}{P(2 \text{ caras})} = \frac{P(M_2)P((2 \text{ caras})/M_2)}{P(2 \text{ caras})} =$$

$$= \frac{P(M_2)P(C1/M_2)P(C2/M_2)}{P(2 \text{ caras})} = \frac{0.5 \cdot 1 \cdot 1}{0.68} = \boxed{\frac{25}{34} \approx 0.7353}$$

Problema 8. Un comercial de venta por teléfono sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta. Este comercial realiza 10 llamadas.

- a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas. (3 puntos)
 b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas. (3 puntos)
 c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas. (4 puntos)

Llamamos X = Número de ventas en 10 llamadas.

El número de repeticiones es $n = 10$. La probabilidad de realizar una venta en una llamada es $p = 1 - 0.30 = 0.7$.

X es una variable binomial. $X = B(10, 0.7)$.

- a) Nos piden calcular $P(X > 7)$.

$$\begin{aligned} P(X > 7) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \\ &= \binom{10}{8} 0.7^8 \cdot 0.3^2 + \binom{10}{9} 0.7^9 \cdot 0.3^1 + \binom{10}{10} 0.7^{10} \cdot 0.3^0 = \boxed{0.3828} \end{aligned}$$

La probabilidad de que consiga más de 7 ventas es de 0.3828.

- b) Nos piden calcular $P(X \geq 5)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \\ &= \binom{10}{5} 0.7^5 \cdot 0.3^5 + \binom{10}{6} 0.7^6 \cdot 0.3^4 + \binom{10}{7} 0.7^7 \cdot 0.3^3 + \binom{10}{8} 0.7^8 \cdot 0.3^2 + \\ &+ \binom{10}{9} 0.7^9 \cdot 0.3^1 + \binom{10}{10} 0.7^{10} \cdot 0.3^0 = \boxed{0.9527} \end{aligned}$$

La probabilidad de que consiga al menos 5 ventas es de 0.9527.

- c) Nos piden calcular $P(3 \leq X \leq 8)$.

$$\begin{aligned} P(3 \leq X \leq 8) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = \\ &= \binom{10}{3} 0.7^3 \cdot 0.3^7 + \binom{10}{4} 0.7^4 \cdot 0.3^6 + \binom{10}{5} 0.7^5 \cdot 0.3^5 + \binom{10}{6} 0.7^6 \cdot 0.3^4 + \\ &+ \binom{10}{7} 0.7^7 \cdot 0.3^3 + \binom{10}{8} 0.7^8 \cdot 0.3^2 = \boxed{0.8491} \end{aligned}$$

La probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas es de 0.8491.

PAU Julio 2023 Matemáticas II



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT CONVOCATÒRIA: JULIOL 2023	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD CONVOCATORIA: JULIO 2023
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos. <i>Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.</i> La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
 donde a es un parámetro real:

- Discutir el sistema en función del parámetro a . (6 puntos)
- Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. (4 puntos)

Problema 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

- La matriz $M = (A - \alpha I)^2$, donde α es un parámetro real. (6 puntos)
- El valor de α , si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula. (4 puntos)

Problema 3. Dados los puntos $A=(2,-1,0)$, $B=(1,2,3)$ y $C=(-1,0,0)$:

- Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B . (3 puntos)
- Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C . (4 puntos)
- Calcular la distancia del punto A al plano π . (3 puntos)

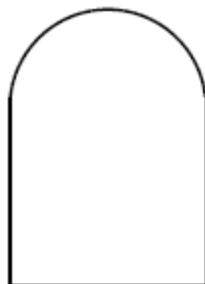
Problema 4. Dada la recta $r : (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, -1, 2)$ y el plano $\pi : 5x + my + z = 2$:

- Obtener la posición relativa de r y π en función de m . (6 puntos)
- Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π . (4 puntos)

Problema 5. Consideramos la función $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$.

- a) Comprobar que $x = -\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable. (2 puntos)
- b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (4 puntos)
- c) Obtener $\int f(x) dx$. (4 puntos)

Problema 6. Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la siguiente figura.



Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:

- a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura x . (3 puntos)
- b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz. (5 puntos)
- c) Calcular el valor de dicha área máxima. (2 puntos)

Problema 7. Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.

- a) Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos? (5 puntos)
- b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color? (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Problema 8. Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0,02 y la segunda planta con probabilidad 0,06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primera planta es de 0,7. Compramos un móvil. Se pide determinar:

- a) La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso. (4 puntos)
- b) Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción. (6 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Soluciones

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real:

a) Discutir el sistema en función del parámetro a . (6 puntos)

b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. (4 puntos)

a) Estudiamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = 2a(a+2) + 2a + 2 + 1 - a - (a+1)(a+2) - 4 =$$

$$= 2a^2 + 4a + 2a + 2 + 1 - a - a^2 - 2a - a - 2 - 4 = a^2 + 2a - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 = a \\ \frac{-2-4}{2} = -3 = a \end{cases}$$

Analizamos tres casos distintos.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq -3$.

En este caso el determinante de A es distinto de cero y el rango de la matriz A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = 1$.

En este caso el determinante de A es nulo. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a - 2 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \\ -2 \quad -2 \quad -4 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -3 \quad -3 \text{ Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a - 2 \cdot \text{Fila 3}^a \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \\ -2 \quad -2 \quad -6 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -5 \quad -5 \text{ Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 & 0 & -15 & -15 \\ 0 & 0 & 15 & 15 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \text{ Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right\}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

CASO 3. $a = -3$.

En este caso el determinante de A es nulo. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & -4 & -2 \\ \hline 0 & 4 & -3 & -3 \text{ Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & -4 \\ \hline 0 & -4 & 3 & -5 \text{ Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -8 \text{ Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_a \end{array} \right\}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz ampliada A/B es 3. Como tienen rangos distintos el sistema es incompatible (no tiene solución).

Resumiendo: Si $a \neq 1$ y $a \neq -3$ el sistema es compatible determinado, si $a = -3$ el sistema es incompatible y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

b) El sistema es compatible indeterminado para $a = 1$.

Lo resolvemos a partir del sistema triangular obtenido en el apartado anterior.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y + z = -1 \\ -3z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y + z = -1 \\ z = \frac{-3}{-3} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 2y + 1 = -1 \Rightarrow 2x + 2y = -2 \Rightarrow x + y = -1 \Rightarrow y = -1 - x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}}$$

Problema 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

- a) La matriz $M = (A - \alpha I)^2$, donde α es un parámetro real. (6 puntos)
- b) El valor de α , si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula. (4 puntos)

a) Realizamos los cálculos para determinar la matriz M.

$$A - \alpha I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

$$M = (A - \alpha I)^2 = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3-\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^2 + 1 - 2 & \alpha + \alpha - 2 & 2\alpha + 2 - 6 + 2\alpha \\ \alpha + \alpha - 2 & 1 + \alpha^2 - 2 & 2 + 2\alpha - 6 + 2\alpha \\ -\alpha - 1 + 3 - \alpha & -1 - \alpha + 3 - \alpha & -2 - 2 + (3 - \alpha)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 2\alpha - 2 & 4\alpha - 4 \\ 2\alpha - 2 & \alpha^2 - 1 & 4\alpha - 4 \\ -2\alpha + 2 & -2\alpha + 2 & -4 + 9 + \alpha^2 - 6\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 2\alpha - 2 & 4\alpha - 4 \\ 2\alpha - 2 & \alpha^2 - 1 & 4\alpha - 4 \\ -2\alpha + 2 & -2\alpha + 2 & \alpha^2 - 6\alpha + 5 \end{pmatrix}$$

b) Igualamos la matriz M a la matriz con todos los términos nulos.

$$\left. \begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 2\alpha - 2 & 4\alpha - 4 \\ 2\alpha - 2 & \alpha^2 - 1 & 4\alpha - 4 \\ -2\alpha + 2 & -2\alpha + 2 & \alpha^2 - 6\alpha + 5 \end{pmatrix} \\ 0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 1 = 0 \rightarrow \alpha^2 = 1 \rightarrow \alpha = \sqrt{1} = \begin{cases} 1 = \alpha \\ -1 = \alpha \end{cases} \\ 2\alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha - 1 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = 1} \\ 4\alpha - 4 = 0 \rightarrow \alpha - 1 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = 1} \\ -2\alpha + 2 = 0 \rightarrow \alpha - 1 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = 1} \\ \alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \\ = \begin{cases} \frac{6+4}{2} = 6 = \alpha \\ \frac{6-4}{2} = 1 = \alpha \end{cases} \end{cases}$$

La matriz M es nula solo cuando $\alpha = 1$.

Problema 3. Dados los puntos $A=(2,-1,0)$, $B=(1,2,3)$ y $C=(-1,0,0)$:

- a) Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B . (3 puntos)
- b) Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C . (4 puntos)
- c) Calcular la distancia del punto A al plano π . (3 puntos)

a) Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B .

$$r: \begin{cases} A(2,-1,0) \in r \\ B(1,2,3) \in r \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (1,2,3) - (2,-1,0) = (-1,3,3) \\ B(1,2,3) \in r \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} \rightarrow 3x-3 = -y+2 \\ \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{3} \rightarrow y-2 = z-3 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} 3x+y-5=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

b) El plano π que es perpendicular a la recta r tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\begin{aligned} \vec{n} = \vec{v}_r = (-1,3,3) \left\{ \begin{array}{l} \pi: -x+3y+3z+D=0 \\ C(-1,0,0) \in \pi \end{array} \right\} &\Rightarrow \begin{cases} \pi: -x+3y+3z+D=0 \\ C(-1,0,0) \in \pi \end{cases} \Rightarrow 1+0+0+D=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\pi: -x+3y+3z-1=0} \end{aligned}$$

c) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\begin{aligned} \pi: -x+3y+3z-1=0 \\ A(2,-1,0) \end{aligned} \left\{ \Rightarrow d(A,\pi) = \frac{|-2-3+0-1|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+3^2}} = \frac{6}{\sqrt{19}} \approx 1.3765 \text{ unidades} \right.$$

Problema 4. Dada la recta $r : (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, -1, 2)$ y el plano $\pi : 5x + my + z = 2$:

- a) Obtener la posición relativa de r y π en función de m . (6 puntos)
 b) Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π . (4 puntos)

- a) El vector director de la recta es $\vec{v}_r = (-1, -1, 2)$ y el vector normal del plano es $\vec{n} = (5, m, 1)$.

Para que la recta y el plano sean paralelos o la recta esté contenida en el plano deben ser perpendiculares el vector director de la recta y el normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, -1, 2) \\ \vec{n} = (5, m, 1) \\ \vec{v}_r \perp \vec{n} \rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (-1, -1, 2)(5, m, 1) = 0 \Rightarrow -5 - m + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{-3 = m}$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

Si $m \neq -3$ el producto escalar no es nulo y por tanto recta y plano no son paralelos, por lo que serán secantes y se cortarán en un punto.

Si $m = -3$ el producto escalar es nulo y por tanto recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Vemos si el punto $A(1, 1, 0)$ perteneciente a la recta está en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 5x - 3y + z = 2 \\ ¿A(1, 1, 0) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow ¿5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 0 = 2? \Rightarrow ¿5 - 3 = 2?$$

Se cumple la igualdad. El punto A de la recta y todos los puntos de dicha recta pertenecen al plano. Es decir, la recta está contenida en el plano.

Resumiendo: Si $m \neq -3$ recta y plano coinciden en un punto. Si $m = -3$ la recta está contenida en el plano.

- b) El plano π' que contiene a r y es perpendicular a π tiene como uno de sus vectores directores el vector normal del plano π .

Otro vector director del plano π' es el vector director de la recta r .

Para $m = 1$ el plano es $\pi : 5x + y + z = 2$ y su vector normal es $\vec{n} = (5, 1, 1)$.

El vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (-1, -1, 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (5, 1, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (-1, -1, 2) \\ A(1, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2 - y + 1 - 5z + z - 10y + 10 + x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' : 3x - 11y - 4z + 8 = 0}$$

Problema 5. Consideramos la función $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$.

- a) Comprobar que $x = -\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable. (2 puntos)
- b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (4 puntos)
- c) Obtener $\int f(x) dx$. (4 puntos)

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} \Rightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(2)}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2} = x \\ \frac{-5-3}{4} = -2 = x \end{cases}$$

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}, -2 \right\}$$

En $x = -\frac{1}{2}$ la función presenta una discontinuidad. Comprobamos si es evitable viendo si el límite de la función cuando x tiende a $-1/2$ tiene un valor finito.

$$\lim_{x \rightarrow -1/2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{-4x + 1}{4x + 5} =$$

$$= \frac{-4\left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{4\left(-\frac{1}{2}\right) + 5} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\left. \begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1}{2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} + 2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} \\ \lim_{x \rightarrow -1/2} f(x) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ es una discontinuidad evitable.}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Vemos si la función se puede simplificar descomponiendo el numerador y el denominador.

$$2x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(2)}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2} = x \\ \frac{-5-3}{4} = -2 = x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 2)$$

$$-2x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)(1)}}{-4} = \frac{-1 \pm 3}{-4} = \begin{cases} \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2} = x \\ \frac{-1-3}{-4} = 1 = x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x^2 + x + 1 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

Si simplificamos la función se evitaría la discontinuidad en $x = -\frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{\cancel{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)}{-\cancel{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 2)} = \frac{-(x - 1)}{x + 2} = \frac{1 - x}{x + 2}$$

b) Calculamos la derivada.

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{1 - x}{x + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1 \cdot (x + 2) - (1)(1 - x)}{(x + 2)^2} = \frac{-x - 2 - 1 + x}{(x + 2)^2} = \frac{-3}{(x + 2)^2}$$

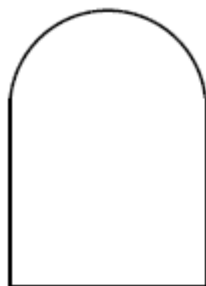
Esta derivada no cambia de signo y siempre es negativa.

La función es decreciente en todo su dominio $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, -2\right\}$.

c) Usamos la simplificación de la función vista en el apartado anterior.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} dx = \int \frac{1 - x}{x + 2} dx = \int \frac{1 + 2 - 2 - x}{x + 2} dx = \int \frac{3 - (x + 2)}{x + 2} dx = \\ &= \int \frac{3}{x + 2} dx - \int \frac{x + 2}{x + 2} dx = 3 \int \frac{1}{x + 2} dx - \int dx = \boxed{3 \ln|x + 2| - x + K} \end{aligned}$$

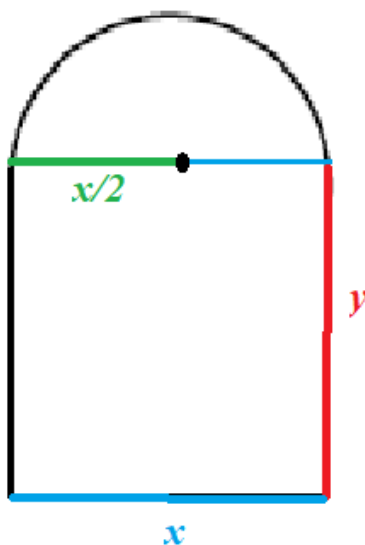
Problema 6. Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la siguiente figura.



Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:

- a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura x . (3 puntos)
 b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz. (5 puntos)
 c) Calcular el valor de dicha área máxima. (2 puntos)

a) Completamos el dibujo de la ventana poniendo nombre a las longitudes de cada lado.



El perímetro de la ventana es la suma de los tres lados rectos y la longitud de la semicircunferencia.

$$\left. \begin{aligned} \text{Perímetro} &= x + 2y + \frac{2\pi \frac{x}{2}}{2} = x + 2y + \frac{\pi x}{2} \\ \text{Perímetro} &= 20 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 4y + \pi x = 40 \Rightarrow 4y = 40 - 2x - \pi x \Rightarrow y = \frac{40 - 2x - \pi x}{4} = 10 - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x$$

Buscamos la expresión de la superficie de la ventana. Es la suma del área del rectángulo más el área del semicírculo.

$$\left. \begin{aligned} A(x, y) &= xy + \frac{\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = xy + \frac{\pi x^2}{8} \\ y &= 10 - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x \end{aligned} \right\} \Rightarrow A(x) = x \left(10 - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x \right) + \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x) = 10x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi x^2}{8} = 10x - \frac{x^2}{2} - \frac{2\pi}{8}x^2 + \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x) = 10x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{8}x^2 = 10x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2$$

b) Buscamos el máximo de la función área usando la derivada.

$$A(x) = 10x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2 \Rightarrow A'(x) = 10 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)2x = 10 - \left(\frac{4+\pi}{8}\right)2x = 10 - \frac{4+\pi}{4}x$$

$$\left. \begin{array}{l} A'(x) = 10 - \frac{4+\pi}{4}x \\ A'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 10 - \frac{4+\pi}{4}x = 0 \Rightarrow 10 = \frac{4+\pi}{4}x \Rightarrow 40 = (4+\pi)x \Rightarrow x = \frac{40}{4+\pi} \simeq 5.6$$

Comprobamos si el punto crítico $x = \frac{40}{4+\pi}$ es un máximo usando la derivada segunda.

$$A'(x) = 10 - \frac{4+\pi}{4}x \Rightarrow A''(x) = -\frac{4+\pi}{4} \Rightarrow A''\left(\frac{40}{4+\pi}\right) = -\frac{4+\pi}{4} < 0 \rightarrow x = \frac{40}{4+\pi} \text{ es máximo}$$

Como la segunda derivada es negativa la función área tiene un máximo para $x = \frac{40}{4+\pi}$.

Las dimensiones de la ventana con superficie máxima son $x = \frac{40}{4+\pi} \simeq 5.6$ metros en la base, en

la parte recta vertical vale $y = 10 - \frac{1}{2} \frac{40}{4+\pi} - \frac{\pi}{4} \frac{40}{4+\pi} = 10 - \frac{20}{4+\pi} - \frac{10\pi}{4+\pi} \simeq 2.8$ metros y el

semicírculo superior de radio $\frac{x}{2} = \frac{20}{4+\pi} \simeq 2.8$ metros.

c) Para $x = \frac{40}{4+\pi}$ calculamos el valor del área.

$$\begin{aligned} A\left(\frac{40}{4+\pi}\right) &= 10 \frac{40}{4+\pi} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \left(\frac{40}{4+\pi}\right)^2 = \\ &= \frac{400}{4+\pi} - \frac{4+\pi}{8} \frac{1600}{(4+\pi)^2} = \frac{400}{4+\pi} - \frac{200}{4+\pi} = \frac{200}{4+\pi} \simeq 28.005 \end{aligned}$$

El área tiene un valor de 28005 metros cuadrados.

Problema 7. Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.

a) Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos? (5 puntos)

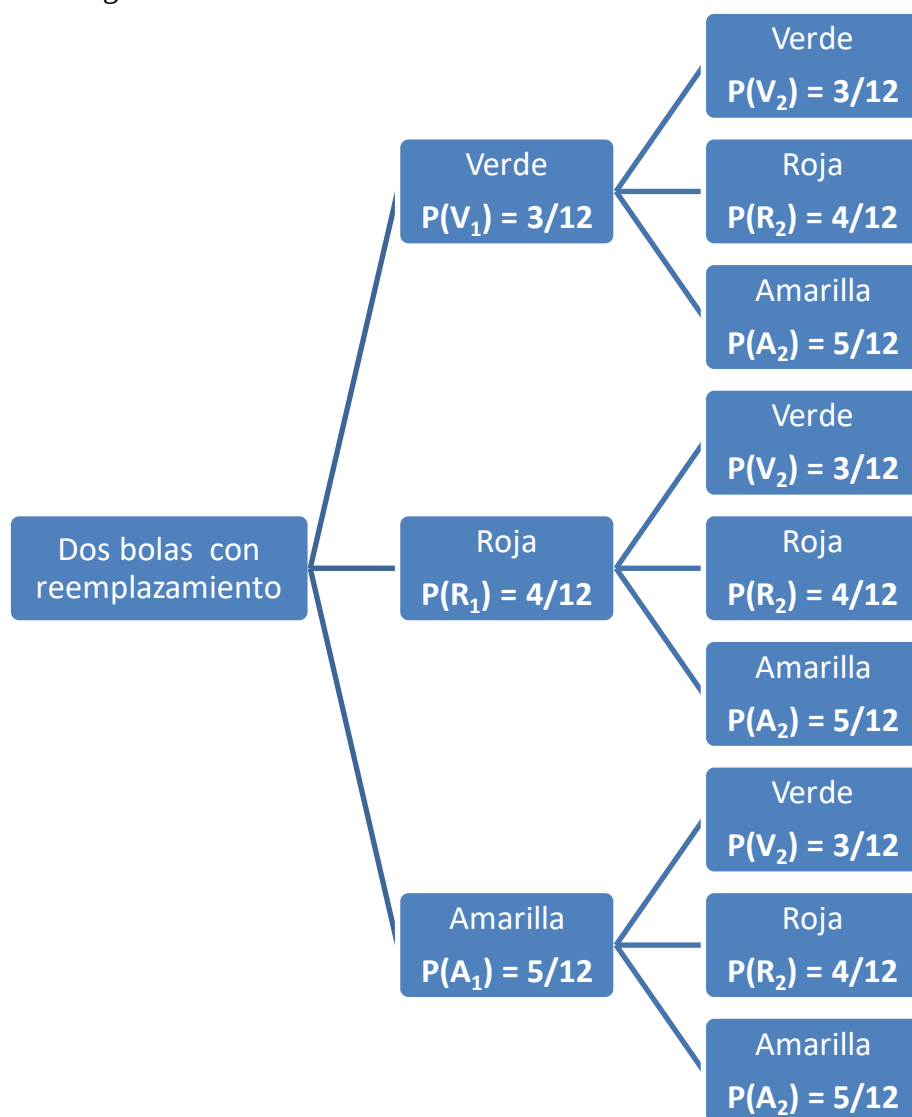
b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color? (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Llamamos V_1, V_2 a sacar bola verde en primera o segunda extracción. Análogamente con las bolas de color rojo o amarillo $\rightarrow R_1, R_2, A_1, A_2$.

Las probabilidades en la segunda extracción son las mismas que en la primera extracción ya que las extracciones son con reemplazamiento. Además, el resultado de la segunda extracción es independiente de lo que haya ocurrido en la primera.

Hacemos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P[(V_1 \cap V_2) \cup (R_1 \cap R_2) \cup (A_1 \cap A_2)]$.

$$P[(V_1 \cap V_2) \cup (R_1 \cap R_2) \cup (A_1 \cap A_2)] = P(V_1 \cap V_2) + P(R_1 \cap R_2) + P(A_1 \cap A_2) =$$

$$= P(V_1)P(V_2) + P(R_1)P(R_2) + P(A_1)P(A_2) = \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} + \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \boxed{\frac{25}{72} \approx 0.3472}$$

Que las dos bolas sean de distinto color es el suceso contrario del que sean del mismo color.

$$P(\text{Distinto color}) = 1 - P(\text{Mismo color}) = 1 - \frac{25}{72} = \boxed{\frac{47}{72} \approx 0.6528}$$

- b) En este nuevo experimento se puede considerar que se extraen tres bolas sucesivas, pero sin reemplazamiento.

Para que las tres bolas sean de distinto color debe ser una verde, otra roja y otra amarilla. Existen distintas formas de que esto ocurra

Calculamos la probabilidad de este suceso teniendo en cuenta que en la segunda extracción quedan 11 bolas y en la tercera solo quedan 10 bolas.

$$P(\text{Tres bolas de distinto color}) = P(V_1 \cap R_2 \cap A_3) + P(R_1 \cap V_2 \cap A_3) + P(V_1 \cap A_2 \cap R_3) +$$

$$+ P(A_1 \cap R_2 \cap V_3) + P(A_1 \cap V_2 \cap R_3) + P(R_1 \cap A_2 \cap V_3) =$$

$$= \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{10} =$$

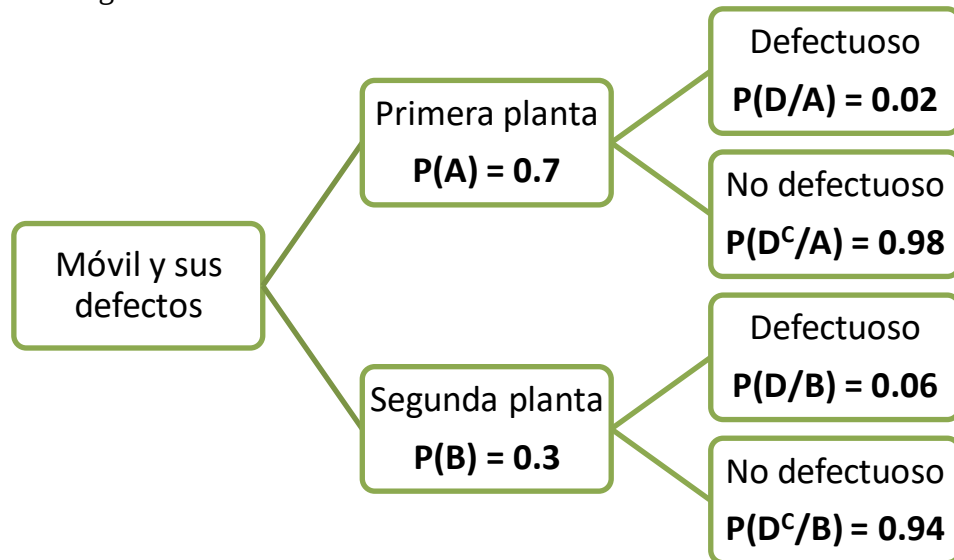
$$= 6 \cdot \left(\frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{10} \right) = \boxed{\frac{3}{11} \approx 0.2727}$$

Problema 8. Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0,02 y la segunda planta con probabilidad 0,06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primera planta es de 0,7. Compramos un móvil. Se pide determinar:

- a) La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso. (4 puntos)
 b) Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción. (6 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(B \cap D)$.

$$P(B \cap D) = P(B)P(D/B) = 0.3 \cdot 0.06 = \boxed{0.018}$$

- b) Nos piden calcular $P(A/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(A/D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B)} = \\
 &= \frac{0.7 \cdot 0.02}{0.7 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.06} = \boxed{\frac{7}{16} = 0.4375}
 \end{aligned}$$

PAU Junio 2023 Matemáticas II



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2023	CONVOCATORIA: JUNIO 2023
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: Ελ αλυμναδο χοντεσταρ(σολο ΧΥΑΤΡΟ προβλεμασ εντρε λοσ ΟΧΗΟ προπυεστοσ. Χαδα προβλεμα σε πυντυαρ(ηαστα 10 πυντοσ. Λα χαλιφιχαχι (ν δελ εφερχιχο σερ(λα συμα δε λασ χαλιφιχαχιονεσ δε χαδα προβλεμα διπιδιδα εντρε 4 ψ απροξιμ αδα α λασ χεν(σιμασ. Σε περιμτε ελ υσο δε χαλχυλαδορασ σιεμπρε θυε νο σεαν γρ(φιχασ ο προγραμαβλεσ, ψ θυε νο πυεδαν ρεαλιζαρ χ(λ χυλο σιμβ (λιχο νι αλμαχεναρ τεξτο ο φ (ρμυλασ εν μεμορια. Σε υτιλιχε ο νο λα χαλχυλαδορα, λοσ ρεσυλταδοσ αν αλ(τιχοσ, νυμ(ριχοσ ψ γρ(φιχοσ δεβερ(ν εσταρ σιεμπρε δεβιδαμεντε φυστιφιχαδοσ.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$:

- Estudiar cuándo la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene solución en función del parámetro real m . (4 puntos)
- Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan. (6 puntos)

Problema 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$:

- Obtener la matriz $(AB^T + I)^{-1}$ donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)
- Comprobar que $C^2 = -\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13} . (4 puntos)

Problema 3. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y los puntos $P = (0,0,3)$ y $Q = (2,2,\alpha)$, obtener:

- Los valores del parámetro real α , si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q . (6 puntos)
- La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P . (4 puntos)

Problema 4. Dada la recta $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$ y el punto $P = (0,5,2)$ se pide:

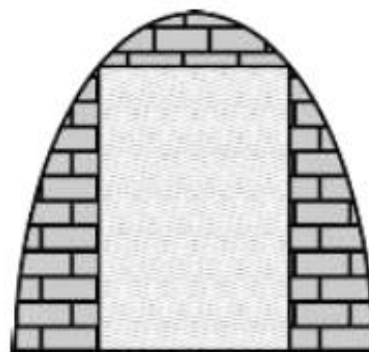
- Comprobar que el punto $Q = (2,6,0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q . (2 puntos)
- Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s . (3 puntos)
- Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r . (5 puntos)

Problema 5. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+1)$. Obtener:

- a) El dominio y las asíntotas de $f(x)$. (2 puntos)
- b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, y sus máximos y mínimos. (4 puntos)
- c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. (4 puntos)

Problema 6. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:

- a) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)
- b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra. (4 puntos)



Problema 7. Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2 . La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y .

- a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. (3 puntos)
- b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. (7 puntos)

Problema 8. Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de países de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

- a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. (5 puntos)
- b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Soluciones

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$:

- a) Estudiar cuándo la ecuación matricial $A^2 X = B$ tiene solución en función del parámetro real m . (4 puntos)
 b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan. (6 puntos)

a) Calculamos la expresión de la matriz A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial planteada.

$$A^2 X = B \Rightarrow X = (A^2)^{-1} B$$

Comprobamos si existe la inversa de la matriz A^2 .

$$|A^2| = \begin{vmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{vmatrix} = 3m^2 + 9 - 3m^2 = 9 \neq 0$$

Como el determinante de la matriz A^2 no se anula existe su inversa y la ecuación $A^2 X = B$ tiene como solución $X = (A^2)^{-1} B$.

La ecuación $A^2 X = B$ tiene solución para cualquier valor del parámetro real m .

b) Hallamos la inversa de la matriz A^2 .

$$\begin{aligned} (A^2)^{-1} &= \frac{\text{Adj}((A^2)^T)}{|A^2|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+2m & m^2+3 & 3m \\ 2 & m & 3 \end{pmatrix}}{9} = \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} m^2+3 & 3m \\ m & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2+2m & 3m \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2+2m & m^2+3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ m & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & m \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ m^2+3 & 3m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2+2m & 3m \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2+2m & m^2+3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3m^2 + 9 - 3m^2 & -(6 + 6m - 6m) & 2m + 2m^2 - 2m^2 - 6 \\ 0 & 3 & -m \\ 0 & -3m & m^2 + 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & -6 & 2m - 6 \\ 0 & 3 & -m \\ 0 & -3m & m^2 + 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X.

$$A^2 X = B \Rightarrow X = (A^2)^{-1} B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & -6 & 2m - 6 \\ 0 & 3 & -m \\ 0 & -3m & m^2 + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9m + 18m - 54 \\ -9m \\ 9(m^2 + 3) \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 27m - 54 \\ -9m \\ 9(m^2 + 3) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3m - 6 \\ -m \\ m^2 + 3 \end{pmatrix}} = X$$

Problema 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$:

- a) Obtener la matriz $(AB^T + I)^{-1}$ donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)
- b) Comprobar que $C^2 = -\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13} . (4 puntos)

a) Hallamos la expresión de la matriz $AB^T + I$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB^T + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 2+0+0 \\ 0+1+1 & 0-1+0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinamos la inversa de la matriz $AB^T + I$.

$$|AB^T + I| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$(AB^T + I)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((AB^T + I)^T\right)}{|AB^T + I|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(AB^T + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}}$$

b) Calculamos la expresión de C^2 .

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \alpha^3 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & -\alpha^3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 \end{pmatrix} = -\alpha^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\alpha^3 \cdot I$$

Hemos comprobado que $C^2 = -\alpha^3 I$

Calculamos el valor de C^{13} . Sabemos que $C^2 = -\alpha^3 I$.

$$C^{13} = C^2 \cdot C^2 \cdot C^2 \cdot C^2 \cdot C^2 \cdot C^2 \cdot C = (-\alpha^3 I)(-\alpha^3 I)(-\alpha^3 I)(-\alpha^3 I)(-\alpha^3 I)(-\alpha^3 I)C$$

$$C^{13} = (-\alpha^3)^6 I \cdot C = \alpha^{18} \cdot C = \alpha^{18} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{C^{13} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}}$$

Problema 3. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y los puntos $P = (0,0,3)$ y $Q = (2,2,\alpha)$, obtener:

- a) Los valores del parámetro real α , si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q . (6 puntos)
 b) La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P . (4 puntos)

a) Hallamos la ecuación de la recta s que pasa por los puntos P y Q .

$$s: \begin{cases} P(0,0,3) \in s \\ Q(2,2,\alpha) \in s \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} \vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2,2,\alpha) - (0,0,3) = (2,2,\alpha-3) \\ P(0,0,3) \in s \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 + (\alpha - 3)\lambda \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} \vec{v}_s = (2,2,\alpha-3) \\ P(0,0,3) \in s \end{cases}$$

Hallamos un vector director y un punto de la recta r .

$$r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 + y + 2y + z = 0 \Rightarrow z = -1 - 3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{u}_r = (1,1,-3) \\ A_r(1,0,-1) \end{cases}$$

Para que sean paralelas las rectas deben tener vectores directores de coordenadas proporcionales (indican la misma dirección).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (2,2,\alpha-3) \\ \vec{u}_r = (1,1,-3) \\ \vec{u}_r \parallel \vec{v}_s \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{2}{1} = \frac{\alpha-3}{-3} \Rightarrow 2 = \frac{\alpha-3}{-3} \Rightarrow \alpha-3 = -6 \Rightarrow \boxed{\alpha = -3}$$

Para $\alpha = -3$ podemos afirmar que las rectas r y s son paralelas o coincidentes.

Comprobamos que no son coincidentes viendo si el punto $P(0,0,3)$ de la recta s pertenece o no a la recta r .

$$\begin{aligned} & \text{¿} P(0,0,3) \in r? \\ & r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{¿} \begin{cases} 0 = 1 + \lambda \\ 0 = \lambda \\ 3 = -1 - 3\lambda \end{cases} \quad ? \Rightarrow \text{¿} \begin{cases} -1 = \lambda \\ 0 = \lambda \\ 4 = -3\lambda \rightarrow \lambda = \frac{-4}{3} \end{cases} \quad ? \Rightarrow P(0,0,3) \notin r \end{aligned}$$

Para $\alpha = -3$ el punto P de la recta s no pertenece a la recta r y podemos afirmar que las rectas r y s son paralelas.

b) El plano π perpendicular a r tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\pi: \begin{cases} P(0,0,3) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{u}_r = (1,1,-3) \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{cases} P(0,0,3) \in \pi \\ \pi: x + y - 3z + D = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + 0 - 9 + D = 0 \Rightarrow D = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: x + y - 3z + 9 = 0}$$

Problema 4. Dada la recta $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$ y el punto $P = (0, 5, 2)$ se pide:

- a) Comprobar que el punto $Q = (2, 6, 0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q . (2 puntos)
 b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s . (3 puntos)
 c) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r . (5 puntos)

a) Comprobamos que el punto $Q = (2, 6, 0)$ pertenece a la recta r .

$$r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 2 + 6 + 7 \cdot 0 = 16 \\ 9 \cdot 2 - 6 + 7 \cdot 0 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 + 6 = 16? \\ 18 - 6 = 12? \end{cases}$$

$\checkmark Q(2, 6, 0) \in r?$

Son ciertas las dos igualdades y el punto Q pertenece a la recta r .

Hallamos la ecuación de la recta s que pasa por los puntos P y Q .

$$\begin{cases} P(0, 5, 2) \in s \\ Q(2, 6, 0) \in s \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} Q(2, 6, 0) \in s \\ \vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2, 6, 0) - (0, 5, 2) = (2, 1, -2) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

b) El ángulo que forman las rectas es el formado por sus vectores directores.

Hallamos un vector director de la recta r pasando la ecuación de la recta a paramétricas.

$$r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 16 - 5x - 7z \\ 9x - (16 - 5x - 7z) + 7z = 12 \end{cases} \Rightarrow 9x - 16 + 5x + 7z + 7z = 12 \Rightarrow 14x + 14z = 28 \Rightarrow x + z = 2 \Rightarrow x = 2 - z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x - 16 + 5x + 7z + 7z = 12 \Rightarrow 14x + 14z = 28 \Rightarrow x + z = 2 \Rightarrow x = 2 - z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 16 - 5(2 - z) - 7z \Rightarrow y = 6 - 2z \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 6 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, -2, 1) \\ Q(2, 6, 0) \in r \end{cases}$$

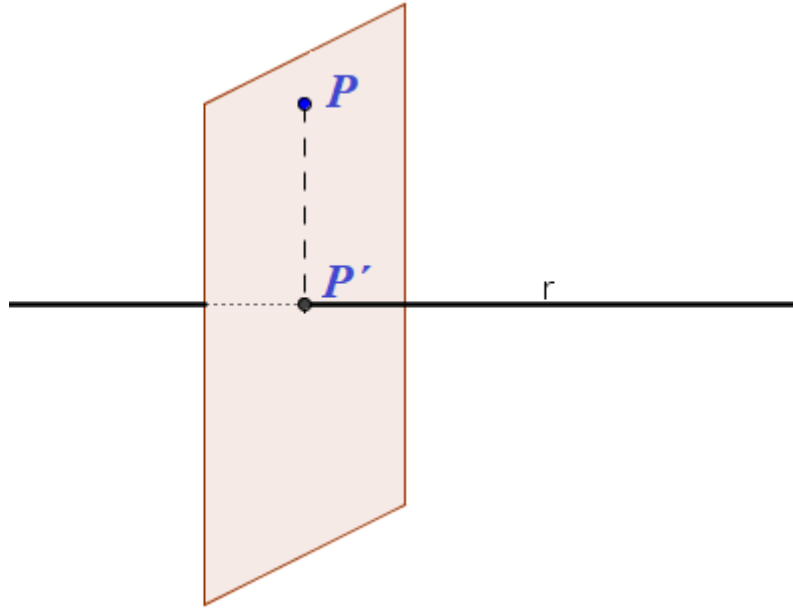
Hallamos el ángulo formado por las dos rectas.

$$\begin{cases} \vec{v}_s = (2, 1, -2) \\ \vec{u}_r = (-1, -2, 1) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{v}_s, \vec{u}_r) = \frac{|\vec{v}_s \cdot \vec{u}_r|}{|\vec{v}_s| \cdot |\vec{u}_r|} = \frac{|(2, 1, -2) \cdot (-1, -2, 1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2}}$$

$$\cos(\vec{v}_s, \vec{u}_r) = \frac{|-2 - 2 - 2|}{\sqrt{9} \sqrt{6}} = \frac{|-6|}{3\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow (\vec{v}_s, \vec{u}_r) = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \approx 35^\circ$$

El ángulo formado por las rectas r y s es de aproximadamente 35° .

c) Hallamos el punto P' que es la proyección ortogonal del punto P en la recta r .



Hallamos el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto P . Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{u}_r = (-1, -2, 1) \\ P(0, 5, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: -x - 2y + z + D = 0 \\ P(0, 5, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -0 - 10 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: -x - 2y + z + 8 = 0$$

Hallamos el punto P' como el punto de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -x - 2y + z + 8 = 0 \\ r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 6 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + \lambda - 12 + 4\lambda + \lambda + 8 = 0 \Rightarrow 6\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 6 - 2 = 4 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P'(1, 4, 1)}$$

La proyección ortogonal del punto P en la recta r es el punto $P'(1, 4, 1)$.

Problema 5. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+1)$. Obtener:

- a) El dominio y las asíntotas de $f(x)$. (2 puntos)
 b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, y sus máximos y mínimos. (4 puntos)
 c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. (4 puntos)

- a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador y los que hacen negativo el contenido del logaritmo.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+1) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin \text{Dominio} \\ x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases}$$

$$\text{Dominio } f(x) = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} + \ln(x+1) = \frac{1}{0} + \ln(1) = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical

¿ $x = -1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} + \ln(x+1) = \frac{1}{-1} + \ln(0) = -1 - \infty = -\infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \ln(x+1) = \frac{1}{+\infty} + \ln(+\infty) = 0 + \infty = +\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{+\infty} + \frac{\infty}{\infty} = \\ &= 0 + \frac{\infty}{\infty} = 0 + \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \dots \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\dots = 0 + 0 = 0$$

Como $m = 0$ la función no tiene asíntota oblicua.

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+1) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x+1 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62 = x \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.62 = x \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de -1 , 0 y los dos valores obtenidos.

- En el intervalo $(-1, -0.62)$ tomamos $x = -0.8$ y la derivada vale

$$f'(-0.8) = \frac{-1}{(-0.8)^2} + \frac{1}{-0.8+1} = 0.4375 > 0. \text{ La función crece en } (-1, -0.62).$$

- En el intervalo $(-0.62, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

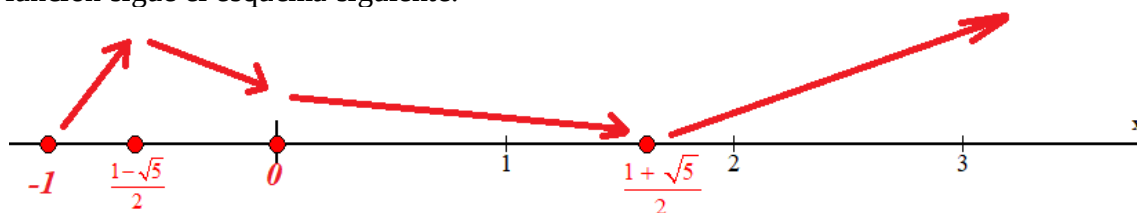
$$f'(-0.5) = \frac{-1}{(-0.5)^2} + \frac{1}{-0.5+1} = -2 < 0. \text{ La función decrece en } (-0.62, 0).$$

- En el intervalo $(0, 1.62)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-1}{1^2} + \frac{1}{1+1} = -0.5 < 0$. La función decrece en $(0, 1.62)$.

- En el intervalo $(1.62, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-1}{3^2} + \frac{1}{3+1} = \frac{227}{144} > 0$.

La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $\left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y un mínimo relativo en $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = 2$ es el valor absoluto de la integral definida entre 1 y 2 de la función.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{x} + \ln(x+1) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \ln(x+1) dx = \ln x + \int \ln(x+1) dx = \dots$$

$$\int \ln(x+1) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x+1) \rightarrow du = \frac{1}{x+1} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \ln(x+1) - \int x \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= x \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx = x \ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1} dx =$$

$$= x \ln(x+1) - \left[\int \frac{x+1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx \right] = x \ln(x+1) - \left[\int dx - \int \frac{1}{x+1} dx \right] =$$

$$= x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + K$$

$$\dots = \ln x + x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + K$$

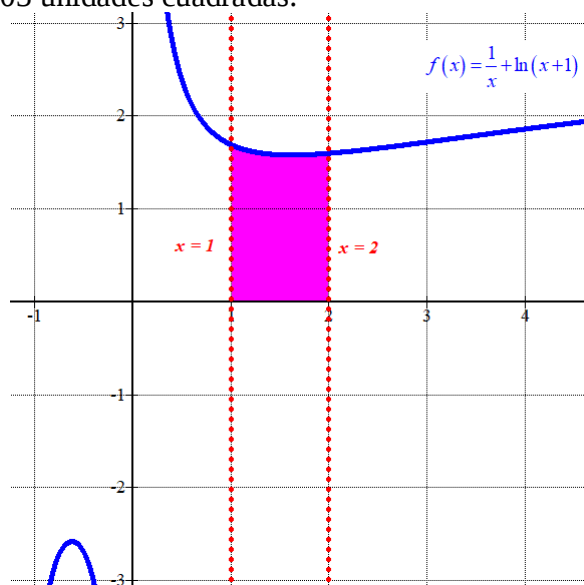
Calculamos la integral definida.

$$\int_1^2 \frac{1}{x} + \ln(x+1) dx = \left[\ln x + x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) \right]_1^2 =$$

$$= \left[\ln 2 + 2 \ln(2+1) - 2 + \ln(2+1) \right] - \left[\ln 1 + \ln(1+1) - 1 + \ln(1+1) \right] =$$

$$= \cancel{\ln 2} + 2 \ln 3 + \ln 3 - 2 - 0 - \ln 2 + 1 - \cancel{\ln 2} = -1 + 3 \ln 3 - \ln 2 \approx 1.60$$

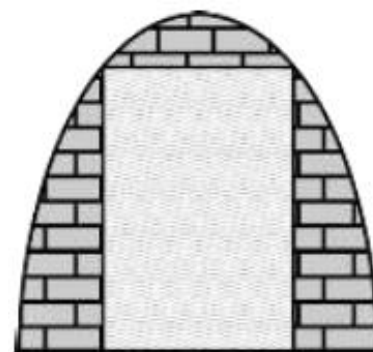
El área de la región comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = 2$ tiene un valor aproximado de 1.603 unidades cuadradas.



Problema 6. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:

a) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)

b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra. (4 puntos)



a) Buscamos la expresión de la superficie de la puerta.

Dibujamos la parábola $y = -x^2 + 12$.

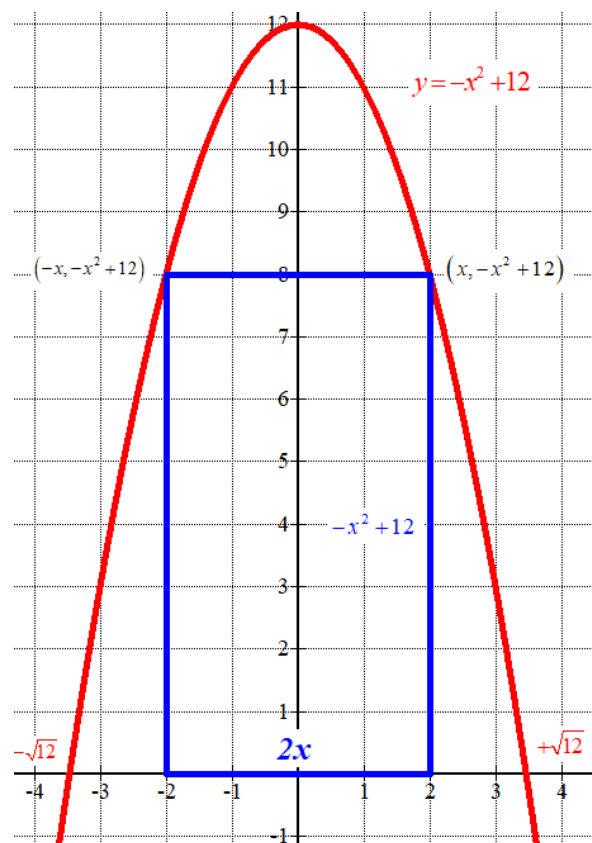
Los puntos de corte con el suelo son:

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 12 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12}$$

El vértice de la parábola es:

$$\left. \begin{array}{l} y' = -2x \\ y' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

x	$y = -x^2 + 12$
-4	-4
-2	8
0	12
2	8
4	-4



Dada la simetría de la función el área del rectángulo azul es:

$$\text{Área}(x) = \text{Base} \cdot \text{altura} = 2x \cdot (-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x$$

Buscamos los puntos críticos de la función. Derivamos la función y la igualamos a cero.

$$A(x) = -2x^3 + 24x \Rightarrow A'(x) = -6x^2 + 24$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Solo nos interesa el valor positivo. Sustituimos este valor en la derivada segunda para ver si $x = 2$ es el máximo buscado.

$$A'(x) = -6x^2 + 24 \Rightarrow A''(x) = -12x \Rightarrow A''(2) = -12 \cdot 2 = -24 < 0 \rightarrow x = 2 \text{ es máximo}$$

Al ser negativo el valor de la derivada segunda la función presenta un valor máximo para $x = 2$. La puerta de dimensiones $2 \cdot 2 = 4$ metros de base e $y = -2^2 + 12 = 8$ metros de altura tiene un área máxima.

b) El área de la parte frontal de la puerta es $4 \cdot 8 = 32$ metros cuadrados.

El área de la zona recubierta por ladrillo es la diferencia del área bajo la parábola y el área de la puerta.

Calculamos el valor del área bajo la curva como la integral definida entre $-\sqrt{12}$ y $+\sqrt{12}$ de la función $y = -x^2 + 12$.

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} -x^2 + 12 dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + 12x \right]_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} = \left[-\frac{\sqrt{12}^3}{3} + 12\sqrt{12} \right] - \left[-\frac{(-\sqrt{12})^3}{3} + 12(-\sqrt{12}) \right] = \\ &= -\frac{12\sqrt{12}}{3} + 12\sqrt{12} - \frac{12\sqrt{12}}{3} + 12\sqrt{12} = 24\sqrt{12} - 8\sqrt{12} = \boxed{16\sqrt{12} \approx 55.426 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

El área de la parte recubierta de piedra es $16\sqrt{12} - 32 \approx 23.4256$ metros cuadrados

Problema 7. Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2 . La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y .

- a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. (3 puntos)
- b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. (7 puntos)

Llamamos C_1, C_2 a sacar cara con la moneda M_1 o M_2 .

Sabemos que $P(C_1) = x$ y que $P(C_2) = y$.

- a) El suceso “No obtener ninguna cara al lanzar las dos monedas” es $\overline{C_1} \cap \overline{C_2}$.

$$\begin{aligned} P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) &= \left\{ \begin{array}{l} C_1 \text{ y } C_2 \text{ son independientes} \\ \overline{C_1} \text{ y } \overline{C_2} \text{ son independientes} \end{array} \right\} = P(\overline{C_1})P(\overline{C_2}) = \\ &= (1 - P(C_1))(1 - P(C_2)) = \boxed{(1-x)(1-y)} \end{aligned}$$

El suceso “Obtener solo una cara al lanzar las dos monedas” es $(C_1 \cap \overline{C_2}) \cup (\overline{C_1} \cap C_2)$.

$$\begin{aligned} P[(C_1 \cap \overline{C_2}) \cup (\overline{C_1} \cap C_2)] &= P(C_1 \cap \overline{C_2}) + P(\overline{C_1} \cap C_2) = \\ &= P(C_1)P(\overline{C_2}) + P(\overline{C_1})P(C_2) = P(C_1)[1 - P(C_2)] + [1 - P(C_1)]P(C_2) = \\ &= \boxed{x(1-y) + (1-x)y} \end{aligned}$$

El suceso “Obtener dos caras al lanzar las dos monedas” es $C_1 \cap C_2$.

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1)P(C_2) = \boxed{xy}$$

- b) Llamamos CC_1, CC_2 a sacar cara con la moneda M_1 o M_2 en el segundo lanzamiento.

Sabemos que $P(CC_1) = x$ y que $P(CC_2) = y$.

El suceso “No obtener ninguna cara al lanzar las dos monedas de la nueva forma” es $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{CC_1} \cap \overline{CC_2}$.

$$\begin{aligned} P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{CC_1} \cap \overline{CC_2}) &= \left\{ \begin{array}{l} C_1 \text{ y } C_2 \text{ son independientes} \\ \overline{C_1} \text{ y } \overline{C_2} \text{ son independientes} \end{array} \right\} = P(\overline{C_1})P(\overline{C_2})P(\overline{CC_1})P(\overline{CC_2}) = \\ &= (1 - P(C_1))(1 - P(C_2))(1 - P(CC_1))(1 - P(CC_2)) = \boxed{(1-x)^2(1-y)^2} \end{aligned}$$

El suceso “Obtener solo una cara al lanzar las dos monedas de la nueva forma” es $(C_1 \cap \overline{C_2} \cap \overline{CC_2}) \cup (\overline{C_1} \cap C_2 \cap \overline{CC_1}) \cup (\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap CC_1 \cap \overline{CC_2}) \cup (\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{CC_1} \cap CC_2)$.

$$\begin{aligned}
 &P\left[(C_1 \cap \overline{C_2} \cap \overline{CC_2}) \cup (\overline{C_1} \cap C_2 \cap \overline{CC_1}) \cup (\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap CC_1 \cap \overline{CC_2}) \cup (\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{CC_1} \cap CC_2)\right] = \\
 &= P(C_1 \cap \overline{C_2} \cap \overline{CC_2}) + P(\overline{C_1} \cap C_2 \cap \overline{CC_1}) + P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap CC_1 \cap \overline{CC_2}) + P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{CC_1} \cap CC_2) = \\
 &= P(C_1)P(\overline{C_2})P(\overline{CC_2}) + P(\overline{C_1})P(C_2)P(\overline{CC_1}) + \\
 &+ P(\overline{C_1})P(\overline{C_2})P(CC_1)P(\overline{CC_2}) + P(\overline{C_1})P(\overline{C_2})P(\overline{CC_1})P(CC_2) = \\
 &= x(1-y)(1-y) + (1-x)y(1-x) + (1-x)(1-y)x(1-y) + (1-x)(1-y)(1-x)y = \\
 &= \boxed{x(1-y)^2 + y(1-x)^2 + x(1-x)(1-y)^2 + y(1-x)^2(1-y)}
 \end{aligned}$$

El suceso “Obtener dos caras al lanzar las dos monedas de la nueva forma” es el suceso $(C_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap \overline{C_2} \cap CC_2) \cup (\overline{C_1} \cap C_2 \cap CC_1) \cup (\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap CC_1 \cap CC_2)$.

$$\begin{aligned}
 &P\left[(C_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap \overline{C_2} \cap CC_2) \cup (\overline{C_1} \cap C_2 \cap CC_1) \cup (\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap CC_1 \cap CC_2)\right] = \\
 &= P(C_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap \overline{C_2} \cap CC_2) + P(\overline{C_1} \cap C_2 \cap CC_1) + P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap CC_1 \cap CC_2) = \\
 &= xy + x(1-y)y + (1-x)yx + (1-x)(1-y)xy = \\
 &= xy + xy(1-y) + xy(1-x) + xy(1-x)(1-y) = \\
 &= xy[1 + 1 - y + 1 - x + 1 - x - y + xy] = \boxed{xy(4 - 2x - 2y + xy)}
 \end{aligned}$$

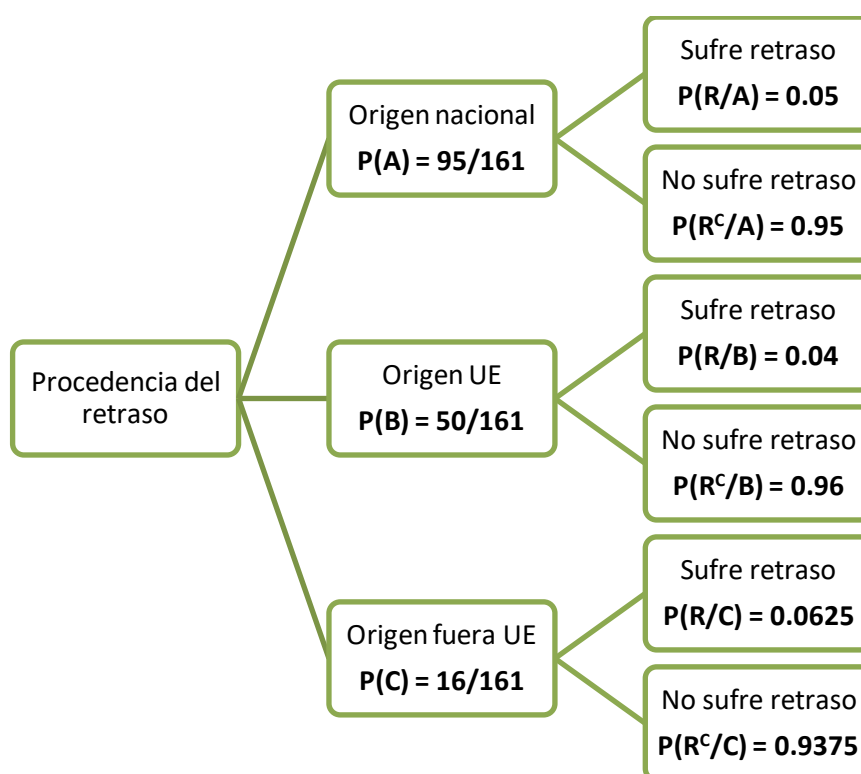
Problema 8. Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de países de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

- a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. (5 puntos)
 b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Llamamos A al suceso “El vuelo es de origen nacional”, B al suceso “El vuelo es de origen la Unión Europea” y C al suceso “El vuelo tiene origen en países de fuera de la Unión Europea”. R al suceso “El vuelo llega con retraso”.

Con los datos proporcionados en el ejercicio realizamos un diagrama de árbol.



- a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R) = P(A)P(R/A) + P(B)P(R/B) + P(C)P(R/C) =$$

$$= \frac{95}{161} \cdot 0.05 + \frac{50}{161} \cdot 0.04 + \frac{16}{161} \cdot 0.0625 = \frac{31}{644} \approx 0.0481$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/R) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{P(B)P(R/B)}{P(R)} = \frac{\frac{50}{161} \cdot 0.04}{\frac{31}{644}} = \frac{8}{31} \approx 0.2581$$

PAU Julio 2022 Matemáticas II



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2022	CONVOCATORIA: JULIO 2022
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: El alumno contestará solo TRES problemas entre los seis propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}.$$

- a) Discutir el sistema en función del parámetro real a . (5 puntos)
 b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible. (5 puntos)

Problema 2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$.

- a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (4 puntos)
 b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4 . (3 puntos)
 c) Calcular $\det(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$. (3 puntos)

Problema 3. Dados los puntos $A = (2, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$, y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$:

- a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B . (2 puntos)
 b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r . (4 puntos)
 c) Calcular la distancia del punto A a la recta s . (4 puntos)

Problema 4. Dados los puntos $A = (2, 1, -2)$ y $B = (3, 2, 3)$, y el plano π definido por $2x + 2y + z = 3$, obtener:

- a) El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B . (5 puntos)
 b) El área del triángulo cuyos vértices son A , B y C . (5 puntos)

Problema 5.

- a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida: (5 puntos)

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx .$$

- b) Determinar, en función de t , el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$. (2 puntos)

- c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$ sea igual a $\ln \frac{25}{4}$. (3 puntos)

Problema 6. Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x . Por cada punto $M = (x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY . Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

- a) Determinar el área del rectángulo en función de x . (3 puntos)
- b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área. (7 puntos)

Soluciones

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}.$$

- a) Discutir el sistema en función del parámetro real a . (5 puntos)
 b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible. (5 puntos)

a) La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 & a \end{pmatrix}.$$

Estudiamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix} = 0 + 1 - a + 1 - a^2 = -a^2 - a + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 - a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 8}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{1+3}{-2} = \boxed{-2 = a} \\ \frac{1-3}{-2} = \boxed{1 = a} \end{cases}$$

Surgen tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq -2$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

El sistema queda $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x - 2y - 3z = -2 \end{cases}$ Convertimos este sistema en otro equivalente más

sencillo de estudiar.

$$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x - 2y - 3z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 1}^a + 2 \cdot \text{Ecuación 2}^a \\ -2x + y = 1 \\ 2x + 2z = 2 \\ \hline y + 2z = 3 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 1^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 3^a \\ -2x + y = 1 \\ 2x - 4y - 6z = -4 \\ \hline -3y - 6z = -3 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + y = 1 \\ y + 2z = 3 \Rightarrow \\ -3y - 6z = -3 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + 3 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ -3y - 6z = -3 \\ 3y + 6z = 9 \\ \hline 0 = 6 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + y = 1 \\ y + 2z = 3 \Rightarrow \text{¡Imposible!} \\ 0 = 6 \end{array} \right.$$

El sistema no tiene solución (es incompatible)

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

El sistema queda $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ Convertimos este sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x + y = 1 \\ -x - z = -1 \\ \hline y - z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a = \text{Ecuación } 1^a \\ \text{quito ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a \neq -2$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Hallamos la solución utilizando el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & a & a-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}} = \frac{a - a + 1 - a}{-a^2 - a + 2} = \frac{1 - a}{-a^2 - a + 2} = \frac{-(a-1)}{-(a-1)(a+2)} = \boxed{\frac{1}{a+2}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}} = \frac{a^2 - a + 1 - a + 1 - a^2}{-a^2 - a + 2} = \frac{2 - 2a}{-a^2 - a + 2} = \frac{-2(a-1)}{-(a-1)(a+2)} = \boxed{\frac{2}{a+2}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}} = \frac{1+a-a-a^2}{-a^2-a+2} = \frac{1-a^2}{-a^2-a+2} = \frac{-(a-1)(a+1)}{-(a-1)(a+2)} = \boxed{\frac{a+1}{a+2}}$$

La solución es $x = \frac{1}{a+2}$; $y = \frac{2}{a+2}$; $z = \frac{a+1}{a+2}$

Para $a=1$ el sistema es compatible indeterminado. Hallamos sus soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ \boxed{y=z} \end{cases} \Rightarrow x+z=1 \Rightarrow \boxed{x=1-z}$$

Las soluciones del sistema son: $x=1-t$; $y=t$; $z=t$; $t \in \mathbb{R}$

Problema 2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$.

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4 . (3 puntos)

c) Calcular $\det(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$. (3 puntos)

a) El producto de una matriz por su inversa da la matriz identidad.

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+b & -a-b+1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ -a-b+1=0 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-b \\ -a-b+1=0 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1+b-b+1=0 \\ 1-b-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ -2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=1-0=1 \end{cases}$$

Los valores buscados son $a=1$; $b=0$

b) Para $a=1$; $b=0$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) A^{-50} \cdot A^{50} = I \Rightarrow |A^{-50} \cdot A^{50}| = |I| \Rightarrow |A^{-50}| \cdot |A^{50}| = |I| \Rightarrow |A^{-50}| \cdot |A|^{50} = 1$$

Calculamos el determinante de la matriz A y despejamos en la ecuación $\det(A^{-50})$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \neq 0 \Rightarrow |A^{-50}| \cdot (a^2 - b^2)^{50} = 1 \Rightarrow |A^{-50}| \cdot |A|^{50} = 1$$

$$\Rightarrow |A^{-50}| = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{50}}$$

Problema 3. Dados los puntos $A=(2,0,0)$ y $B=(0,1,0)$, y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$:

- a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B . (2 puntos)
 b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r . (4 puntos)
 c) Calcular la distancia del punto A a la recta s . (4 puntos)

a) La recta r que pasa por los puntos A y B tiene como vector director $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (0,1,0) - (2,0,0) = (-2,1,0) \\ A = (2,0,0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

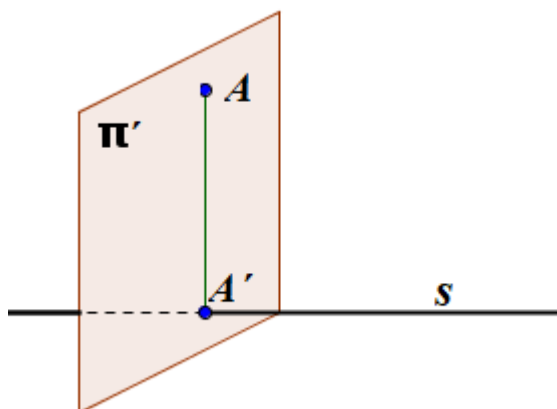
b) Si el plano π contiene a la recta s uno de los vectores directores del plano es el vector director de la recta s . Al ser paralelo a la recta r el otro vector director del plano π es el vector director de la recta r .

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z \Rightarrow s: \begin{cases} \vec{u}_s = (2,3,1) \\ P_s(1,1,0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (-2,1,0) \\ \vec{v} = \vec{u}_s = (2,3,1) \\ P_s(1,1,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-1-6z-2z+2y-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: x+2y-8z-3=0}$$

c) Hallamos la proyección ortogonal del punto A en la recta s .



Hallamos el plano π' perpendicular a la recta s que pasa por el punto A . Al ser perpendicular a la recta el vector normal del plano es el vector director de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}' = \vec{u}_s = (2, 3, 1) \\ A = (2, 0, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi': 2x + 3y + z + D = 0 \\ A = (2, 0, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi': 2x + 3y + z - 4 = 0}$$

Hallamos el punto A' de corte del plano π' y la recta s.

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z \Rightarrow s: \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 3, 1) \\ P_s(1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi': 2x + 3y + z - 4 = 0 \\ s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + 3(1 + 3\lambda) + \lambda - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 4\lambda + 3 + 9\lambda + \lambda - 4 = 0 \Rightarrow 14\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{14} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{-1}{14} = \frac{12}{14} \\ y = 1 + 3\frac{-1}{14} = \frac{11}{14} \\ z = \frac{-1}{14} \end{cases} \Rightarrow A' \left(\frac{12}{14}, \frac{11}{14}, \frac{-1}{14} \right)$$

La distancia del punto A a la recta s es la distancia del punto A al punto A'.

$$d(A, s) = d(A, A') = |\overrightarrow{AA'}| = \dots$$

$$\overrightarrow{AA'} = \left(\frac{12}{14}, \frac{11}{14}, \frac{-1}{14} \right) - (2, 0, 0) = \left(\frac{12}{14} - 2, \frac{11}{14}, \frac{-1}{14} \right) = \left(\frac{-16}{14}, \frac{11}{14}, \frac{-1}{14} \right)$$

$$\dots = \sqrt{\left(\frac{-16}{14} \right)^2 + \left(\frac{11}{14} \right)^2 + \left(\frac{-1}{14} \right)^2} = \sqrt{\frac{378}{196}} = \frac{3\sqrt{42}}{14} \approx 1.389$$

La distancia del punto A a la recta s es $\frac{3\sqrt{42}}{14} \approx 1.389$

Problema 4. Dados los puntos $A=(2,1,-2)$ y $B=(3,2,3)$, y el plano π definido por $2x+2y+z=3$, obtener:

- a) El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B . (5 puntos)
 b) El área del triángulo cuyos vértices son A , B y C . (5 puntos)

a) La recta perpendicular a π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: 2x+2y+z=3 \Rightarrow \vec{n}=(2,2,1)$$

$$r: \begin{cases} B(3,2,3) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (2,2,1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto C de corte de la recta r y el plano π .

$$\pi: 2x+2y+z=3 \quad r: \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases} \Rightarrow 2(3+2\lambda)+2(2+2\lambda)+3+\lambda=3 \Rightarrow 6+4\lambda+4+4\lambda+3+\lambda=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\lambda=-10 \Rightarrow \lambda=-\frac{10}{9} \Rightarrow \begin{cases} x=3+2\frac{-10}{9}=\frac{7}{9} \\ y=2+2\frac{-10}{9}=\frac{-2}{9} \\ z=3+\frac{-10}{9}=\frac{17}{9} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{7}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{17}{9}\right)$$

b) El área del triángulo cuyos vértices son A , B y C es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}=(3,2,3)-(2,1,-2)=(1,1,5)$$

$$\overrightarrow{AC}=\left(\frac{7}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{17}{9}\right)-(2,1,-2)=\left(\frac{7}{9}-2, \frac{-2}{9}-1, \frac{17}{9}+2\right)=\left(\frac{-11}{9}, \frac{-11}{9}, \frac{35}{9}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 5 \\ \frac{-11}{9} & \frac{-11}{9} & \frac{35}{9} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 5 \\ -11 & -11 & 35 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} (35i - 55j - 11k + 11k - 35j + 55i) =$$

$$= \frac{1}{9} (90i - 90j) = 10i - 10j = (10, -10, 0)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{10^2 + (-10)^2 + 0^2}}{2} = \boxed{5\sqrt{2} \approx 7.07}$$

Problema 5.

a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida: (5 puntos)

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx.$$

b) Determinar, en función de t , el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$. (2 puntos)c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$ sea igual a $\ln \frac{25}{4}$. (3 puntos)

a) Utilizamos el método de integración por descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^2 - 5x - 14 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 + 56}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2} = \begin{cases} \frac{5+9}{2} = 7 = x \\ \frac{5-9}{2} = -2 = x \end{cases}$$

$$\frac{18}{x^2 - 5x - 14} = \frac{18}{(x-7)(x+2)} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \frac{18}{(x-7)(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-7)}{(x-7)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18 = A(x+2) + B(x-7) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x = -2 \rightarrow 18 = -9B \Rightarrow B = \frac{18}{-9} = -2 \\ \text{Si } x = 7 \rightarrow 18 = 9A \Rightarrow A = \frac{18}{9} = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{18}{x^2 - 5x - 14} = \frac{2}{x-7} - \frac{2}{x+2}$$

$$\dots = \int \frac{2}{x-7} - \frac{2}{x+2} dx = \int \frac{2}{x-7} dx - \int \frac{2}{x+2} dx = 2 \ln|x-7| - 2 \ln|x+2| =$$

$$= \ln(x-7)^2 - \ln(x+2)^2 = \ln \frac{(x-7)^2}{(x+2)^2} = \boxed{\ln \left(\frac{x-7}{x+2} \right)^2 + K}$$

b) Calculamos la integral definida.

$$\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx = \left[\ln \left(\frac{x-7}{x+2} \right)^2 \right]_8^t = \left[\ln \left(\frac{t-7}{t+2} \right)^2 \right] - \left[\ln \left(\frac{8-7}{8+2} \right)^2 \right] =$$

$$= \ln \left(\frac{t-7}{t+2} \right)^2 - \ln \frac{1}{100} = \ln \left(\frac{t-7}{t+2} \right)^2 - (\ln 1 - \ln 100) = \boxed{\ln \left(\frac{t-7}{t+2} \right)^2 + \ln 100}$$

c) Igualamos el resultado obtenido en el apartado anterior a $\ln \frac{25}{4}$ y obtenemos el valor de t .

$$\ln \left(\frac{t-7}{t+2} \right)^2 + \ln 100 = \ln \frac{25}{4} \Rightarrow \ln \left(\frac{t-7}{t+2} \right)^2 = \ln \frac{25}{4} - \ln 100 \Rightarrow \ln \left(\frac{t-7}{t+2} \right)^2 = \ln \frac{25}{100} \Rightarrow$$

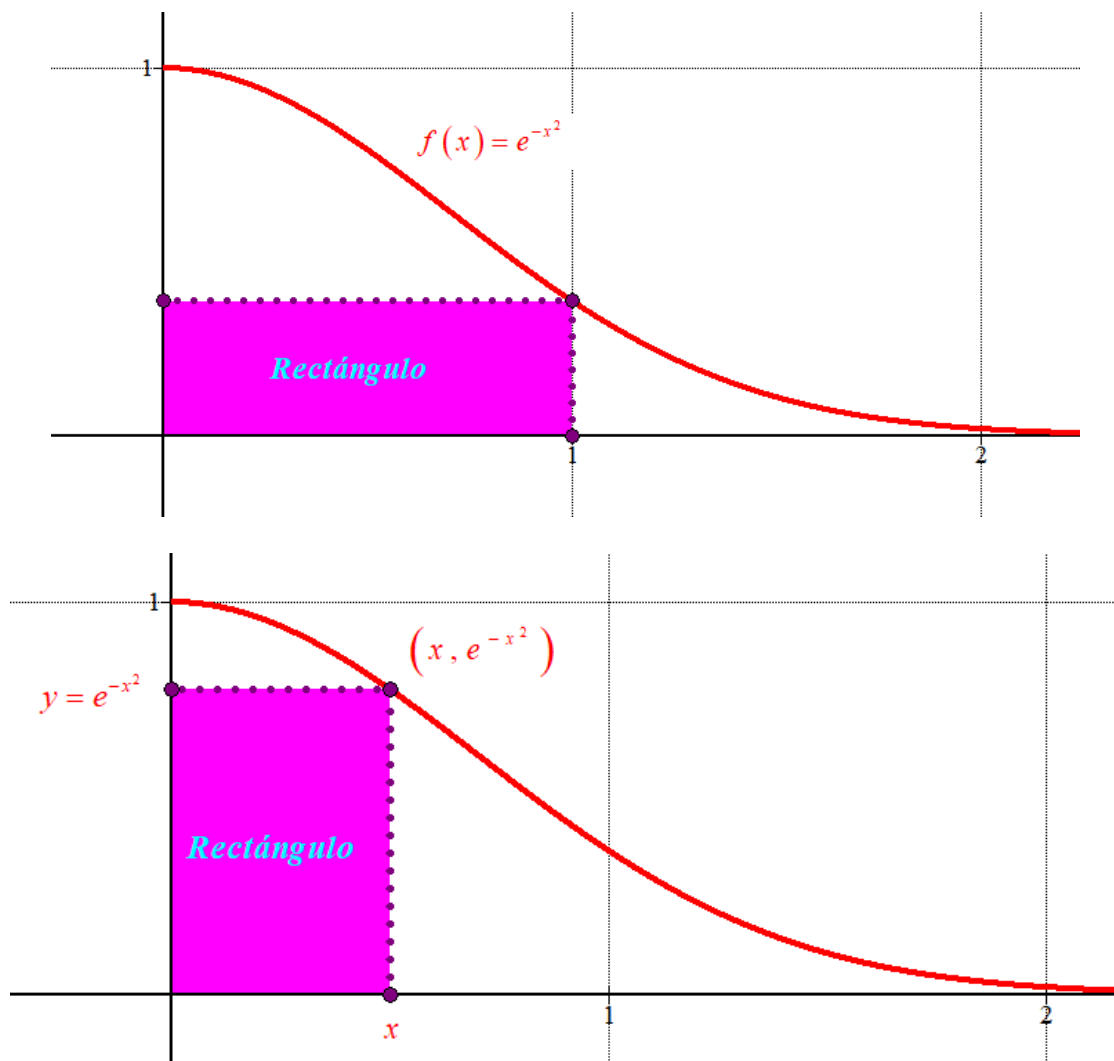
$$\Rightarrow \ln \left(\frac{t-7}{t+2} \right)^2 = \ln \frac{25}{400} \Rightarrow \left(\frac{t-7}{t+2} \right)^2 = \frac{25}{400} = \frac{1}{16} \Rightarrow \left(\frac{t-7}{t+2} \right)^2 = \left(\frac{1}{4} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{t-7}{t+2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4t - 28 = t + 2 \Rightarrow 3t = 30 \Rightarrow \boxed{t=10} \\ 0 \\ \frac{t-7}{t+2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow 4t - 28 = -t - 2 \Rightarrow 5t = 26 \Rightarrow t = \frac{26}{5} < 8 \text{ ¡No es válido!} \end{cases}$$

El valor buscado es $t = 10$.

- Problema 6.** Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x . Por cada punto $M = (x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY . Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.
- a) Determinar el área del rectángulo en función de x . (3 puntos)
- b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área. (7 puntos)

Dibujamos la situación planteada.



- a) La base del rectángulo es “ x ” y la altura es $y = e^{-x^2}$.

$$\boxed{\text{Área}(x) = \text{Base} \cdot \text{altura} = x \cdot e^{-x^2}}$$

La función área es $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$

- b) Derivamos la función e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot (-2x) e^{-x^2} = e^{-x^2} - 2x^2 \cdot e^{-x^2} = (1 - 2x^2) e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1 - 2x^2)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ e^{-x^2} = 0 \Rightarrow \text{¡No es posible!} \end{cases}$$

Sustituimos estos dos valores en la segunda derivada y averiguamos cuál de ellos es el máximo.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - 2x^2)e^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = (-4x)e^{-x^2} + (1 - 2x^2)(-2x)e^{-x^2} = \\ &= -4xe^{-x^2} + (-2x + 4x^3)e^{-x^2} = (-4x - 2x + 4x^3)e^{-x^2} = (-6x + 4x^3)e^{-x^2} \end{aligned}$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \left(-6\sqrt{\frac{1}{2}} + 4\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3\right)e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \left(\frac{-6}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)e^{-1/2} = \frac{-4}{\sqrt{2}}e^{-1/2} < 0$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \left(+6\sqrt{\frac{1}{2}} + 4\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3\right)e^{-\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \left(\frac{6}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)e^{-1/2} = \frac{4}{\sqrt{2}}e^{-1/2} > 0$$

La función presenta un valor máximo en $x = +\sqrt{\frac{1}{2}}$, siendo este valor máximo del área del rectángulo:

$$\text{Área} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2e}} \approx 0.429u^2}$$

El área máxima se alcanza en $x = +\sqrt{\frac{1}{2}}$ y el valor del área máxima es $\frac{1}{\sqrt{2e}} \approx 0.429u^2$.

PAU Junio 2022 Matemáticas II



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2022	CONVOCATORIA: JUNIO 2022
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: El alumno contestará solo TRES problemas entre los seis propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Se pide:

- Demostrar que $C - AB^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)
- Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^T X + I$, donde I es la matriz identidad. (3 puntos)
- Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n . (3 puntos)

Problema 2. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinar:

- El rango de la matriz A en función del parámetro real m . (4 puntos)
- La matriz inversa de A en el caso $m = 2$. (4 puntos)
- El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8 . (2 puntos)

Problema 3. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$.

- Indicar justificadamente la posición relativa de r y s . (5 puntos)
- Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s . (5 puntos)

Problema 4. Dados los planos $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$, y la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

- Calcular la posición relativa de π_1 y π_2 . (3 puntos)
- Calcular el punto P' que es simétrico al punto $P = (1, 0, 0)$ respecto del plano π_1 . (4 puntos)
- Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r . (3 puntos)

Problema 5. Consideramos la función $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$. Obtener:

- a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. (1 punto)
- b) Las asíntotas de la función. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. (3 puntos)
- d) La primitiva de la función $f(x)$. (4 puntos)

Problema 6. Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.

- a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo. (3 puntos)
- b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima. (7 puntos)

Soluciones

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Se pide:

- a) Demostrar que $C - AB^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)
 b) Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^T X + I$, donde I es la matriz identidad. (3 puntos)
 c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n . (3 puntos)

a) Calculamos la expresión de $C - AB^T$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C - AB^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1+1 & 0 \\ -1+2-1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Comprobamos que tiene inversa y la calculamos.

$$|C - AB^T| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0. \text{ Tiene inversa.}$$

$$(C - AB^T)^{-1} = \frac{\text{Adj}(C - AB^T)^T}{|C - AB^T|} = \frac{\text{Adj} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$CX = AB^T X + I \Rightarrow CX - AB^T X = I \Rightarrow (C - AB^T)X = I \Rightarrow X = (C - AB^T)^{-1}$$

Como ya hemos calculado la inversa de $C - AB^T$ sustituimos en la ecuación dicho valor.

$$X = (C - AB^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

c) Calculamos la expresión de la matriz AB^T y sus potencias.

$$AB^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0 \\ -1+2-1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2^1 I$$

$$(AB^T)^2 = AB^T \cdot AB^T = 2^1 I \cdot 2^1 I = 4I = 2^2 I$$

$$(AB^T)^3 = (AB^T)^2 \cdot AB^T = 4I \cdot 2I = 8I = 2^3 I$$

....

$$(AB^T)^n = 2^n I$$

Problema 2. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinar:

- a) El rango de la matriz A en función del parámetro real m . (4 puntos)
 b) La matriz inversa de A en el caso $m = 2$. (4 puntos)
 c) El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8 . (2 puntos)

a) Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{vmatrix} = m^3 - 4m^2(m-1) - 2m^2 = m^3 - 4m^3 + 4m^2 - 2m^2 = -3m^3 + 2m^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3m^3 + 2m^2 = 0 \Rightarrow m^2(-3m + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -3m + 2 = 0 \rightarrow m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Tenemos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $m \neq 0$ y $m \neq \frac{2}{3}$.En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.**CASO 2.** Si $m = 0$ En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz A queda $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. La matriz A tiene rango 1 pues solo hay una columna

con elementos no nulos.

CASO 3. Si $m = \frac{2}{3}$ En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz A queda $A = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -4/3 & 4/9 & 1 \\ 0 & 4/3 & 1 \end{bmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de

quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ -4/3 & 4/9 \end{bmatrix}$ comprobamos que su determinante es no nulo y por tanto el rango de A es 2.

$$\begin{vmatrix} 2/3 & 0 \\ -4/3 & 4/9 \end{vmatrix} = \frac{8}{27} \neq 0$$

b) Para $m = 2$ el rango de A es 3 y por tanto tiene inversa.

La matriz A queda $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Calculamos su inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}}{8 - 16 - 8}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

c) Se debe cumplir que $|2A| = 8 \Rightarrow 2^3 |A| = -8 \Rightarrow |A| = \frac{-8}{8} = -1$.

Como hemos calculado el determinante de A en el apartado a) nos queda la igualdad:

$$\left. \begin{array}{l} |A| = -3m^3 + 2m^2 \\ |A| = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -3m^3 + 2m^2 = -1 \Rightarrow -3m^3 + 2m^2 + 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación utilizando el método de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & & -3 & -1 & -1 \\ \hline & -3 & -1 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow -3m^3 + 2m^2 - 1 = (m-1)(-3m^2 - m - 1)$$

$$-3m^2 - m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 12}}{-6} = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{-6} = \text{No existe}$$

Tenemos que $m = 1$ es la única solución de la ecuación $-3m^3 + 2m^2 - 1 = 0$

Se cumple que $|2A| = 8$ para $m = 1$.

Problema 3. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$.

- a) Indicar justificadamente la posición relativa de r y s . (5 puntos)
 b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s . (5 puntos)

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(-1, 2, 0) \\ \vec{u}_r = (1, -3, 1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = -3 + 4t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} Q_s(4, -3, 0) \\ \vec{v}_s = (-5, 4, 1) \end{cases}$$

Observamos que los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales por lo que las rectas ni son coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, -3, 1) \\ \vec{v}_s = (-5, 4, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-5} \neq \frac{-3}{4} \neq \frac{1}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Comprobamos si se anula o no el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (4, -3, 0) - (-1, 2, 0) = (5, -5, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, -3, 1) \\ \vec{v}_s = (-5, 4, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (5, -5, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -15 + 25 - 20 + 5 = -5 \neq 0$$

Como $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = -5 \neq 0$ las rectas r y s se cruzan (no son coplanarias).

b) Hallamos el plano π que pasa por el origen $O(0, 0, 0)$ y contiene a la recta r . Y el plano π' que pasa por el origen y contiene a la recta s .

La intersección de los dos planos es la recta l buscada.

$$\pi: \begin{cases} O(0, 0, 0) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{OP_r} = (-1, 2, 0) \\ \vec{v} = \vec{u}_r = (1, -3, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 3z - 2z + y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + y + z = 0}$$

$$\pi': \begin{cases} O(0, 0, 0) \in \pi' \\ \vec{u} = \overrightarrow{OQ_s} = (4, -3, 0) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (-5, 4, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & -3 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x + 16z - 15z - 4y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': -3x - 4y + z = 0}$$

La recta l tiene ecuación $l: \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -3x - 4y + z = 0 \end{cases}$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Debemos de hallar un punto A de la recta r y otro B de la recta s tal que el origen O y estos dos puntos estén alineados. La recta que une estos tres puntos es la recta l que pasa por el origen y corta a r y s .

$$A \in r: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 2 - 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow A(-1 + \alpha, 2 - 3\alpha, \alpha); \quad B \in s: \begin{cases} x = 4 - 5\beta \\ y = -3 + 4\beta \\ z = \beta \end{cases} \Rightarrow B(4 - 5\beta, -3 + 4\beta, \beta),$$

Para que A, B y O estén alineados los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= (-1 + \alpha, 2 - 3\alpha, \alpha) - (0, 0, 0) = (-1 + \alpha, 2 - 3\alpha, \alpha) \\ \overrightarrow{OB} &= (4 - 5\beta, -3 + 4\beta, \beta) - (0, 0, 0) = (4 - 5\beta, -3 + 4\beta, \beta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-1 + \alpha}{4 - 5\beta} = \frac{2 - 3\alpha}{-3 + 4\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-1 + \alpha}{4 - 5\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \beta(-1 + \alpha) = \alpha(4 - 5\beta) \rightarrow -\beta + \alpha\beta = 4\alpha - 5\alpha\beta \\ \frac{2 - 3\alpha}{-3 + 4\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \beta(2 - 3\alpha) = \alpha(-3 + 4\beta) \rightarrow 2\beta - 3\alpha\beta = -3\alpha + 4\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\beta - 4\alpha + 6\alpha\beta = 0 \rightarrow \beta(-1 + 6\alpha) = 4\alpha \rightarrow \beta = \frac{4\alpha}{-1 + 6\alpha} \\ 2\beta + 3\alpha - 7\alpha\beta = 0 \rightarrow 2\beta + 3\alpha - 7\alpha\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \frac{4\alpha}{-1 + 6\alpha} + 3\alpha - 7\alpha \frac{4\alpha}{-1 + 6\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{8\alpha + 3\alpha(-1 + 6\alpha) - 28\alpha^2}{-1 + 6\alpha} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8\alpha - 3\alpha + 18\alpha^2 - 28\alpha^2}{-1 + 6\alpha} = 0 \Rightarrow -10\alpha^2 + 5\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5\alpha(2\alpha - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow \beta = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A(-1, 2, 0) \\ B(4, -3, 0) \end{cases} \text{ ¡No es posible!} \\ \text{Estos puntos no están alineados con el } O(0, 0, 0). \\ \text{No se cumple la igualdad inicial } \frac{-1 + \alpha}{4 - 5\beta} = \frac{2 - 3\alpha}{-3 + 4\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \\ o \\ 2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{2}{-1 + 3} = 1 \Rightarrow \begin{cases} A(-1/2, 1/2, 1/2) \\ B(-1, 1, 1) \end{cases} \end{cases}$$

La única solución es la recta que pasa por $O(0, 0, 0)$, $A(-1/2, 1/2, 1/2)$ y $B(-1, 1, 1)$.

$$\left. \begin{aligned} O(0, 0, 0) &\in l \\ \vec{v}_l = \overrightarrow{OB} &= (-1, 1, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow l: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 4. Dados los planos $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$, y la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

- a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2 . (3 puntos)
 b) Calcular el punto P' que es simétrico al punto $P = (1, 0, 0)$ respecto del plano π_1 . (4 puntos)
 c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r . (3 puntos)

a) Hallamos el vector normal de cada plano.

$$\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (2, -1, -1)$$

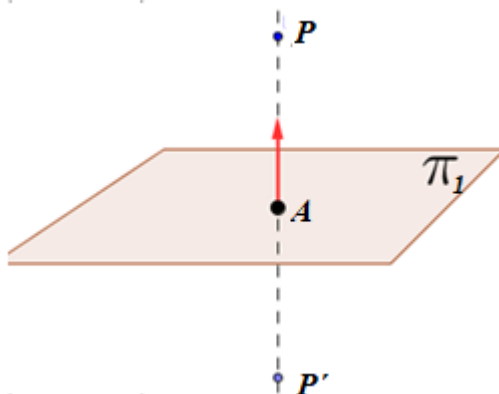
$$\pi_2: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + x + 1 + \beta \\ z = x + 1 - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 + x + \beta \\ \beta = x + 1 - z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 + x + x + 1 - z \Rightarrow \pi_2: 2x - y - z + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (2, -1, -1)$$

Como los vectores normales de los dos planos son iguales: $\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = (2, -1, -1)$ los planos son paralelos o coincidentes.

Como tienen ecuaciones distintas $\left. \begin{array}{l} \pi_1: 2x - y - z + 4 = 0 \\ \pi_2: 2x - y - z + 3 = 0 \end{array} \right\}$ los planos son paralelos.

b) Realizamos los pasos indicados en el dibujo.



Hallamos la recta s perpendicular al plano π_1 que pasa por $P(1, 0, 0)$.

$$\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (2, -1, -1)$$

$$s: \begin{cases} P(1, 0, 0) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{n}_1 = (2, -1, -1) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

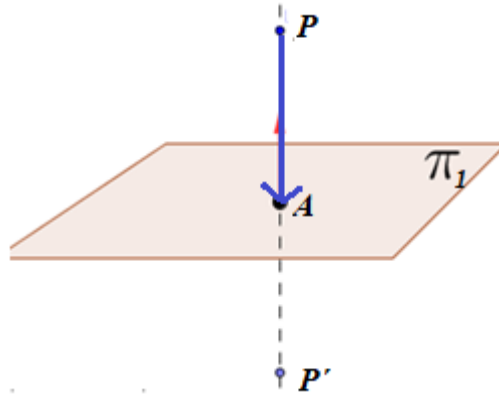
Hallamos el punto A de corte de la recta s y el plano π_1 .

$$\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$$

$$s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) + 4 = 0 \Rightarrow 2 + 4\lambda + \lambda + \lambda + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1, 1, 1)}$$

El punto P' simétrico de P respecto del plano π_1 se obtiene sumando al punto A el vector $\overrightarrow{PA}$.



$$\overrightarrow{PA} = (-1, 1, 1) - (1, 0, 0) = (-2, 1, 1)$$

$$\boxed{P' = (-1, 1, 1) + (-2, 1, 1) = (-3, 2, 2)}$$

El punto simétrico es $P'(-3, 2, 2)$.

c) Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta r .

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(1, 0, 2) \\ \vec{u}_r = (1, 2, -1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

Resolvemos el sistema planteado con sus ecuaciones.

$$\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 2(1 + \lambda) - 2\lambda - (2 - \lambda) + 4 = 0 \Rightarrow 2 + 2\lambda - 2\lambda - 2 + \lambda + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -4 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 4 = -3 \\ y = 2(-4) = -8 \\ z = 2 - (-4) = 6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(-3, -8, 6)}$$

El punto de corte entre el plano π_1 y la recta r existe y tiene coordenadas $Q(-3, -8, 6)$.

Problema 5. Consideramos la función $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$. Obtener:

- | | |
|---|------------|
| a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. | (1 punto) |
| b) Las asíntotas de la función. | (2 puntos) |
| c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. | (3 puntos) |
| d) La primitiva de la función $f(x)$. | (4 puntos) |

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-2, +2\}$.

Punto de corte con eje de abscisas ($y = 0$)

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} \Bigg|_{y=0} \Rightarrow \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3 \Rightarrow x = \sqrt{-3} \text{ ¡Imposible!}$$

La función no corta el eje de abscisas.

Punto de corte con el eje de ordenadas ($x = 0$)

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} \Bigg|_{x=0} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 + 3}{0^2 - 4} = \frac{-3}{4} \Rightarrow A\left(0, -\frac{3}{4}\right)$$

El punto de corte con el eje de ordenadas es $A\left(0, -\frac{3}{4}\right)$.

b) Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{2^2 + 3}{2^2 - 4} = \frac{7}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{(-2)^2 + 3}{(-2)^2 - 4} = \frac{7}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

$y = 1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene, pues tiene una asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3-8x-2x^3-6x}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-14x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow -14x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de -2 , 0 y $+2$.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = \frac{42}{(3^2-4)^2} = \frac{42}{25} > 0$.

La función crece en $(-\infty, -2)$.

- En el intervalo $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{14}{((-1)^2-4)^2} = \frac{14}{9} > 0$.

La función crece en $(-2, 0)$.

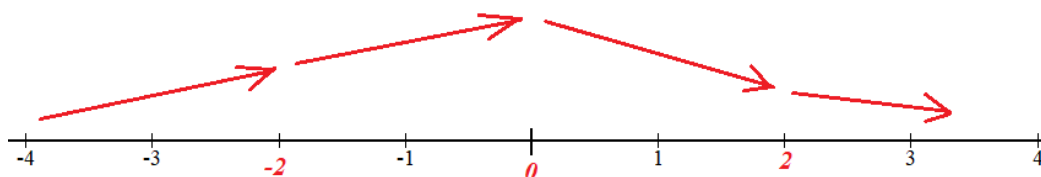
- En el intervalo $(0, +2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-14}{(1^2-4)^2} = \frac{-14}{9} < 0$. La

función decrece en $(0, +2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-42}{((-3)^2-4)^2} = \frac{-42}{25} < 0$.

La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 0$

d) Utilizamos el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int f(x) dx = \int \frac{x^2+3}{x^2-4} dx = \dots$$

$$\frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{x^2-4+7}{x^2-4} = \frac{x^2-4}{x^2-4} + \frac{7}{x^2-4} = 1 + \frac{7}{x^2-4}$$

$$\frac{7}{x^2-4} = \frac{7}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \frac{7}{(x-2)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 = A(x+2) + B(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 7=4A \rightarrow A=\frac{7}{4} \\ x=-2 \rightarrow 7=-4B \rightarrow B=-\frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{x^2-4} = \frac{7/4}{x-2} - \frac{7/4}{x+2}$$

$$\frac{x^2+3}{x^2-4} = 1 + \frac{7/4}{x-2} - \frac{7/4}{x+2}$$

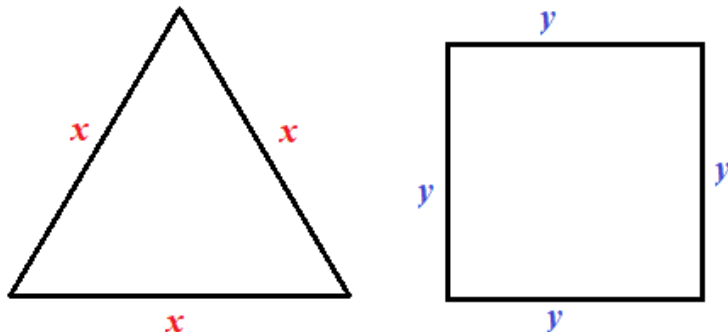
$$\dots = \int 1 + \frac{7/4}{x-2} - \frac{7/4}{x+2} dx = \int 1 dx + \int \frac{7/4}{x-2} dx - \int \frac{7/4}{x+2} dx = x + \frac{7}{4} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{7}{4} \int \frac{1}{x+2} dx =$$

$$= \boxed{x + \frac{7}{4} \ln|x-2| - \frac{7}{4} \ln|x+2| + K}$$

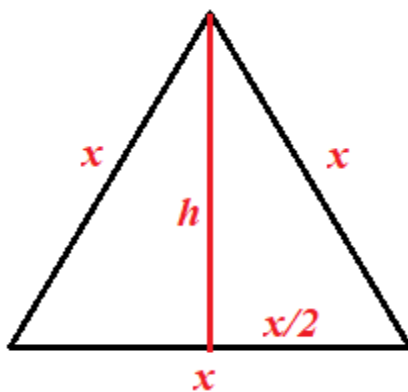
Problema 6. Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo. (3 puntos)

b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima. (7 puntos)



a) Se corta el cable en dos partes, con una de ellas se construye un triángulo equilátero y con la otra un cuadrado. Tenemos que $3x + 4y = 240 \Rightarrow y = \frac{240 - 3x}{4} = 60 - \frac{3}{4}x$.



Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \Rightarrow h^2 + \frac{x^2}{4} = x^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Llamamos $f(x)$ a la suma de las áreas de triángulo y cuadrado que depende del valor de x comprendido entre 0 y 240.

$$f(x) = y^2 + \frac{x \cdot h}{2} = \left(60 - \frac{3}{4}x\right)^2 + \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \left(\frac{240 - 3x}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

La función es $f(x) = \left(\frac{240 - 3x}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

b) Derivamos la función y la igualamos a cero.

$$f(x) = \left(\frac{240-3x}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2\left(\frac{240-3x}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}2x = \frac{-720+9x}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$f'(x) = \frac{-720+9x}{8} + \frac{4\sqrt{3}}{8}x = \frac{9x+4\sqrt{3}x-720}{8} = \frac{(9+4\sqrt{3})x-720}{8}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{(9+4\sqrt{3})x-720}{8} = 0 \Rightarrow (9+4\sqrt{3})x = 720 \Rightarrow \boxed{x = \frac{720}{9+4\sqrt{3}}}$$

Sustituimos este valor en la derivada segunda.

$$f'(x) = \frac{(9+4\sqrt{3})x-720}{8} \Rightarrow f''(x) = \frac{9+4\sqrt{3}}{8} \Rightarrow f''\left(\frac{720}{9+4\sqrt{3}}\right) = \frac{9+4\sqrt{3}}{8} > 0$$

Al ser positivo el valor de la derivada segunda la función presenta un valor mínimo para

$$x = \frac{720}{9+4\sqrt{3}} \simeq 45.203 \text{ metros}.$$

Para construir el triángulo hará falta $3x = \frac{2160}{9+4\sqrt{3}} \simeq 135.609$ metros de cable.

El valor mínimo de la suma de las áreas de triángulo y cuadrado es:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{720}{9+4\sqrt{3}}\right) &= \left(\frac{240-3\frac{720}{9+4\sqrt{3}}}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{720}{9+4\sqrt{3}}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{\frac{2160+960\sqrt{3}-2160}{9+4\sqrt{3}}}{4}\right)^2 + \frac{518400\sqrt{3}}{4(9+4\sqrt{3})^2} = \\ &= \left(\frac{960\sqrt{3}}{4(9+4\sqrt{3})}\right)^2 + \frac{129600\sqrt{3}}{(9+4\sqrt{3})^2} = \left(\frac{240\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{129600\sqrt{3}}{(9+4\sqrt{3})^2} = \\ &= \frac{172800}{(9+4\sqrt{3})^2} + \frac{129600\sqrt{3}}{(9+4\sqrt{3})^2} = \boxed{\frac{172800+129600\sqrt{3}}{(9+4\sqrt{3})^2} \simeq 1565.872 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

PAU Julio 2021 Matemáticas II



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2021	CONVOCATORIA: JULIO 2021
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: El alumno contestará solo TRES problemas entre los seis propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Se da el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}$$
, donde m es un parámetro real. Se

pide:

- La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m . (4 puntos)
- La solución del sistema cuando $m = 1$. (3 puntos)
- Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

Problema 2. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$, $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi: x + my + z = 2$ y

$\pi_3: x + ay + z = 1$ que depende del parámetro real m . Obtened:

- La posición relativa de las rectas r y s . (4 puntos)
- El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π . (3 puntos)
- Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m = 2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2,2,2)$. (3 puntos)

Problema 3. Dada la función $f(x) = xe^{1-x^2}$, calculad:

- El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. (4 puntos)
- Las asíntotas y la gráfica de f . (3 puntos)
- La integral $\int f(x)dx$. (3 puntos)

Problema 4. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2 - 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Obtener

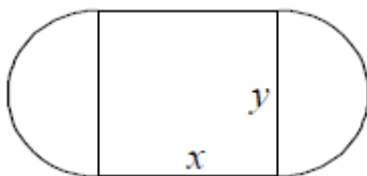
- a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a . (3 puntos)
- b) Una matriz C tal que $AC = 16I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a = 0$. (4 puntos)
- c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tiene solución. (3 puntos)

Problema 5. Dados los puntos $P(1,1,0)$, $Q(2, -1,1)$ y $R(\alpha, 3, -1)$ se pide:

- a) La ecuación del plano que contiene a P , Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas. (3 puntos)
- b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q . Calculad la distancia entre las rectas r y s . (4 puntos)
- c) Los valores de α para los cuales P , Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene. (3 puntos)

Problema 6. Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide $(4 + \pi)$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:

- a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo. (5 puntos)
- b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima. (5 puntos)



Soluciones

Problema 1. Se da el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}$$
, donde m es un parámetro real. Se

pide:

- a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m . (4 puntos)
- b) La solución del sistema cuando $m = 1$. (3 puntos)
- c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & m & m \end{pmatrix}$

Igualemos a cero el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{vmatrix} = 2m - 15 - 4 - 5 + m + 24 = 3m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3m = 0 \Rightarrow m = 0$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. $m \neq 0$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3. El rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 0$

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3. Transformamos la matriz ampliada en una matriz triangular equivalente y establecemos el rango de A y de A/B a partir de esta.

$$\begin{aligned} A/B &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \hline 2 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \\ -2 \quad -2 \quad -6 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -5 \quad 0 \\ \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \hline 5 \quad -4 \quad 0 \quad 0 \\ -5 \quad -5 \quad -15 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -9 \quad -15 \quad 0 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -9 & -15 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -9 \quad -15 \quad 0 \\ 0 \quad 9 \quad 15 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow (A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Observando la matriz $(A/B)'$ tenemos que el rango de A es 2, al igual que el rango de A/B y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $m = 1$ el sistema es compatible determinado. La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Lo resolvemos por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-3-1+12}{3} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{15+1-1-6}{3} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2-4-5+1}{3} = -2$$

La solución es $x = y = 3, z = -2$.

c) Para $m = 0$ es compatible indeterminado. Lo resolvemos.

El sistema queda $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases}$ que es equivalente al obtenido en la transformación realizada

en el apartado a) y a partir del cual resolvemos el sistema.

$$(A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 3z = 0 \\ -3y - 5z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 3z = 0 \\ -3y = 5z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 3z = 0 \\ y = -\frac{5}{3}z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \frac{5}{3}z + 3z = 0 \Rightarrow 3x - 5z + 9z = 0 \Rightarrow 3x + 4z = 0 \Rightarrow 3x = -4z \Rightarrow \boxed{x = -\frac{4}{3}z}$$

La solución es $x = -\frac{4}{3}t; y = -\frac{5}{3}t; z = t$, siendo $t \in \mathbb{R}$

Problema 2. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$, $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi: x+my+z=2$ y

$\pi_3: x+ay+z=1$ que depende del parámetro real m . Obtened:

- a) La posición relativa de las rectas r y s . (4 puntos)
 b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π . (3 puntos)
 c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m=2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2,2,2)$. (3 puntos)

a) Obtenemos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ z=-1+2x \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 2) \\ P_r(0, 1, -1) \end{cases}$$

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (1, -1, 2) \\ Q_s(1, 0, 0) \end{cases}$$

Vemos si las coordenadas de los vectores directores son proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{v}_s = (1, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} = \frac{2}{2}$$

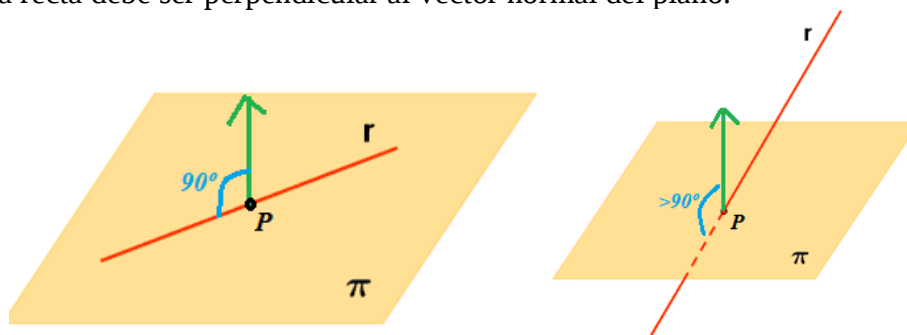
Como son proporcionales las rectas son paralelas o coincidentes.

Comprobamos si un punto cualquiera de r está en s .

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P_r(0, 1, -1) \in s? \\ s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \frac{0-1}{1} = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{2} ? \Rightarrow \text{¿} -1 = -1 = -\frac{1}{2} ?$$

No es cierto y las rectas no son la misma. Las rectas r y s son paralelas.

- b) Para que la recta r esté contenida en el plano el punto P_r debe estar en el plano π y el vector director de la recta debe ser perpendicular al vector normal del plano.



$$r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 2) \\ P_r(0, 1, -1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x+my+z=2 \\ P_r(0, 1, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 0+m-1=2 \Rightarrow \boxed{m=3}$$

Comprobamos que $\vec{u}_r$ y $\vec{n}$ son perpendiculares, es decir, su producto escalar es cero.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + 3y + z = 2 \Rightarrow \vec{n} = (1, 3, 1) \\ \vec{u}_r = (1, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u}_r = (1, 3, 1)(1, -1, 2) = 1 - 3 + 2 = 0$$

Es cierto que para $m = 3$ la recta está contenida en el plano π .

c) Para $m = 2$ el plano tiene ecuación $\pi : x + 2y + z = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + 2y + z = 2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow z = 2 \Rightarrow A(0, 0, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + 2y + z = 2 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(0, 1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + 2y + z = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow C(2, 0, 0)$$

El volumen del tetraedro con vértices A, B, C y P es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ y $\overrightarrow{PC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PA} = (0, 0, 2) - (2, 2, 2) = (-2, -2, 0) \\ \overrightarrow{PB} = (0, 1, 0) - (2, 2, 2) = (-2, -1, -2) \\ \overrightarrow{PC} = (2, 0, 0) - (2, 2, 2) = (0, -2, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}] = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 8 + 8 = 12$$

$\text{Volumen } ABCP = \frac{12}{6} = 2 \text{ u}^3$

Problema 3. Dada la función $f(x) = xe^{1-x^2}$, calculad:

- a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. (4 puntos)
 b) Las asíntotas y la gráfica de f . (3 puntos)
 c) La integral $\int f(x)dx$. (3 puntos)

a) El dominio de la función son todos los reales, pues es una exponencial y polinomios.

Dom $f(x) = \mathbb{R}$

Hallamos su derivada y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

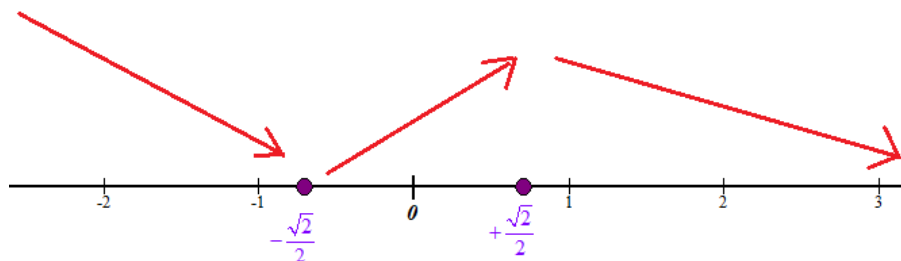
$$f(x) = xe^{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{1-x^2} + x(-2x)e^{1-x^2} = e^{1-x^2} - 2x^2e^{1-x^2} = e^{1-x^2}(1-2x^2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{1-x^2}(1-2x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{1-x^2} = 0, \text{ ¡Imposible!} \\ 1-2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = e^{1-1}(1-2(-1)^2) = -1 < 0$. La función decrece en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- En $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = e^1(1) = e > 0$. La función crece en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- En $\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = e^{1-1}(1-2) = -1 < 0$. La función decrece en $\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ y crece en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Como

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \approx -1.16 \text{ el mínimo relativo tiene coordenadas } (-0.7, -1.16)$$

La función presenta un máximo relativo en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \approx 1.16$ el máximo relativo tiene coordenadas $(0.7, 1.16)$

b) **Asíntota vertical.** $x = a$

No tiene pues el dominio son todos los números reales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\begin{aligned} b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2-1}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x e^{x^2-1}} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{x^2-1}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x e^{x^2-1}} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

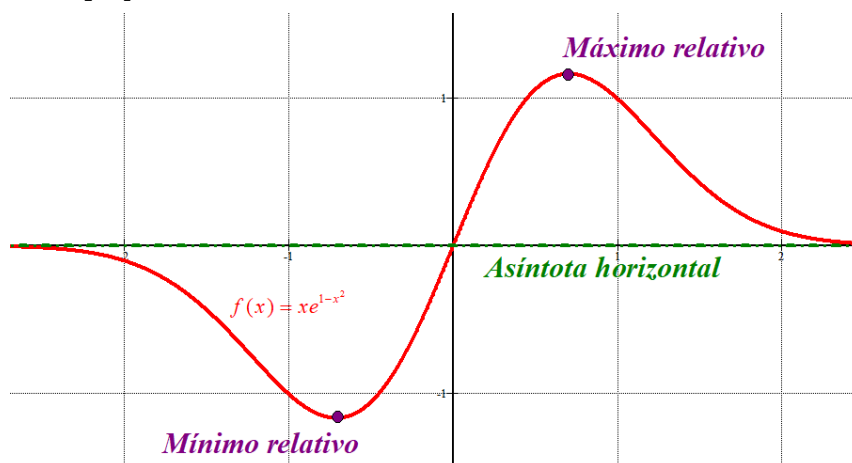
La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene, pues existe asíntota horizontal.

Para obtener la gráfica hacemos una pequeña tabla de valores.

x	$y = x e^{1-x^2}$
-2	-0.1
-1	-1
0	0
1	1
2	0.1



c) Calculamos la integral usando un cambio de variable.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int x e^{1-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} 1-x^2 = t \Rightarrow -2x dx = dt \\ dx = -\frac{1}{2x} dt \end{array} \right\} = \int \cancel{x} e^t \left(-\frac{1}{2\cancel{x}} \right) dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t = \boxed{-\frac{1}{2} e^{1-x^2} + K} \end{aligned}$$

Problema 4. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2 - 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Obtener

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a . (3 puntos)

b) Una matriz C tal que $AC = 16I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a = 0$. (4 puntos)

c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tiene solución. (3 puntos)

a) Hallamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2 - 2 & 3 \end{vmatrix} = \cancel{3a} + 2 - 3a^2 + 6 - \cancel{3a} + 6 - a^2 + 2 = -4a^2 + 16$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -4a^2 + 16 = 0 \Rightarrow -4(a^2 - 4) = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{4} = \pm 2$$

CASO 1. Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y por tanto su rango es 3.

CASO 2. $a = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos como queda la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ Si consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna 1ª vemos}$$

que su determinante es no nulo y por tanto el rango de A es 2.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 2 = -8 \neq 0$$

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos como queda la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ Si consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna 1ª vemos que}$$

su determinante es no nulo y por tanto el rango de A es 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \neq 0$$

Resumiendo: Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el rango de A es 3 y si $a = -2$ o $a = 2$ el rango de A es 2.

b) Cuando $a = 0$ el determinante de A es no nulo y tiene inversa. Podemos despejar en la ecuación matricial planteada.

$$AC = 16I \Rightarrow A^{-1}AC = 16A^{-1}I \Rightarrow C = 16A^{-1}$$

Hallamos la inversa de A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 6 + 2 = 16 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{16} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en $C = 16A^{-1}$ tenemos que:

$$C = 16A^{-1} = 16 \cdot \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Calculamos la expresión de la matriz B.

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 3] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{1 \cdot 1} \times 3 \longrightarrow 3 \times 3$

Vemos que todas las filas son proporcionales: la 2ª es la 1ª cambiada de signo y la 3ª es el doble de la 1ª. Por tanto, el rango de B es 1.

El sistema $B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tiene como matriz de coeficientes la matriz B que tiene rango 1, veamos

el rango de la matriz ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{array} \right)$. El rango de esta matriz también es 1, pues

todas las filas son proporcionales: la 2ª es la 1ª cambiada de signo y la 3ª es el doble de la 1ª. Por tanto, el rango es 1.

El rango de la matriz de coeficientes (1) es igual al rango de la matriz ampliada (1) y menor que el número de incógnitas (3) por lo que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Problema 5. Dados los puntos $P(1,1,0)$, $Q(2, -1,1)$ y $R(\alpha, 3, -1)$ se pide:

- a) La ecuación del plano que contiene a P , Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas. (3 puntos)
- b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q . Calculad la distancia entre las rectas r y s . (4 puntos)
- c) Los valores de α para los cuales P , Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene. (3 puntos)

- a) Cuando $\alpha = 1$ los puntos son $P(1,1,0)$, $Q(2, -1,1)$ y $R(1, 3, -1)$

Determinamos la ecuación del plano π que pasa por los tres puntos como el plano con vectores directores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ y que pasa por $P(1,1,0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1) - (1, 1, 0) = (1, -2, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PR} = (1, 3, -1) - (1, 1, 0) = (0, 2, -1) \\ P(1, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2x} - \cancel{2} + 2z + y - 1 - \cancel{2x} + \cancel{2} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: y + 2z - 1 = 0}$$

Hallamos la distancia del origen de coordenadas $O(0,0,0)$ al plano $\pi: y + 2z - 1 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \\ \pi: y + 2z - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(O, \pi) = \frac{|0 + 0 - 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} u$$

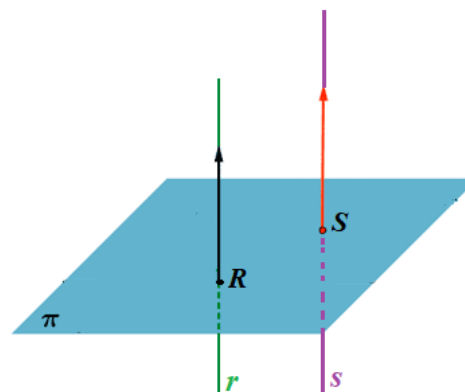
- b) Cuando $\alpha = 1$ el punto R tiene coordenadas $R(1, 3, -1)$.

La recta s que pasa por P y Q tiene como vector director el vector $\overrightarrow{PQ}$, por lo que la recta r paralela a s tiene el mismo vector director $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (1, -2, 1) \\ R(1, 3, -1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Para hallar la distancia entre las dos rectas paralelas r y s hallamos el plano π perpendicular a ambas y que pase por el punto R , después hallamos el punto S de corte del plano y la recta s .

La distancia entre las rectas es el módulo del vector $\overrightarrow{RS}$.



Hallamos la ecuación del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, -2, 1) \\ R(1, 3, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: x - 2y + z + D = 0 \Rightarrow 1 - 6 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 6 \Rightarrow \pi: x - 2y + z + 6 = 0$$

Hallamos la ecuación de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \overrightarrow{PQ} = (1, -2, 1) \\ P(1, 1, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 1 - 2\beta \\ z = \beta \end{cases}$$

Hallamos el punto S de corte de recta s y plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x - 2y + z + 6 = 0 \\ s: \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 1 - 2\beta \\ z = \beta \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \beta - 2(1 - 2\beta) + \beta + 6 = 0 \Rightarrow 1 + \beta - 2 + 4\beta + \beta + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\beta + 5 = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{5}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \\ y = 1 + \frac{10}{6} = \frac{16}{6} \\ z = -\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow S\left(\frac{1}{6}, \frac{16}{6}, -\frac{5}{6}\right)$$

Hallamos el módulo del vector $\overrightarrow{RS}$

$$\left. \begin{array}{l} S\left(\frac{1}{6}, \frac{16}{6}, -\frac{5}{6}\right) \\ R(1, 3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{RS} = \left(\frac{1}{6}, \frac{16}{6}, -\frac{5}{6}\right) - (1, 3, -1) = \left(-\frac{5}{6}, -\frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(r, s) = d(R, S) = |\overrightarrow{RS}| = \sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(-\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{6}} u$$

La distancia entre las rectas paralelas r y s es $\sqrt{\frac{5}{6}} u$

c) Tenemos la ecuación de la recta s que pasa por P y $Q \rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 1 - 2\beta \\ z = \beta \end{cases}$.

Hacemos que la recta s pase por el punto $R(\alpha, 3, -1)$ para que estén alineados.

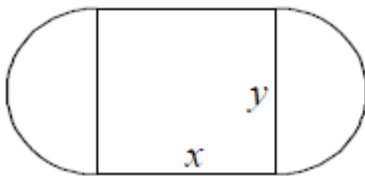
$$\left. \begin{array}{l} s: \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 1 - 2\beta \\ z = \beta \end{cases} \\ R(\alpha, 3, -1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 + \beta \\ 3 = 1 - 2\beta \\ -1 = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 + \beta \\ 2 = -2\beta \\ -1 = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 + \beta \\ -1 = \beta \\ -1 = \beta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = 1 - 1 = 0}$$

Para que estén alineados los puntos P , Q y R debe ser $\alpha = 0$.

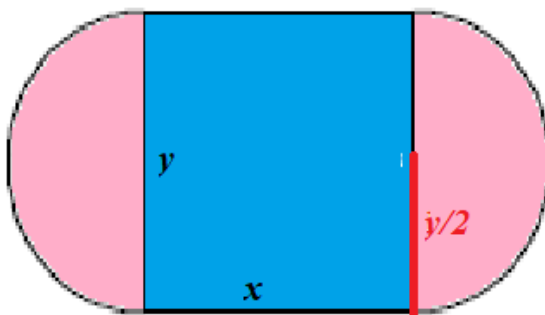
La ecuación de la recta que los contiene es $s: \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 1 - 2\beta \\ z = \beta \end{cases}$

Problema 6. Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide $(4 + \pi)$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:

- a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo. (5 puntos)
 b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima. (5 puntos)



- a) Hallamos la expresión de la superficie del campo en función de x e y .



La superficie del rectángulo azul es " $x \cdot y$ ", la superficie de las dos semicircunferencias con radio $y/2$ es $\pi \left(\frac{y}{2}\right)^2$.

Sumamos para obtener la superficie total del campo y la igualamos a $4 + \pi$.

$$xy + \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 4 + \pi \Rightarrow xy + \frac{\pi y^2}{4} = 4 + \pi \Rightarrow 4xy + \pi y^2 = 16 + 4\pi \Rightarrow 4xy = 16 + 4\pi - \pi y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{16 + 4\pi - \pi y^2}{4y} = \frac{16 + 4\pi}{4y} - \frac{\pi y^2}{4y} = \frac{4 + \pi}{y} - \frac{\pi}{4}y$$

Hay que pintar un rectángulo (dos lados de longitud " x " y otros dos de longitud " y ") y dos semicircunferencias de radio " $y/2$ ", lo que hace una circunferencia de radio " $y/2$ ".

Hay que pintar $P(x, y) = 2x + 2y + 2\pi \frac{y}{2} = 2x + 2y + \pi y$.

Sustituimos " x " en la longitud de líneas a pintar y tenemos:

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) &= 2x + 2y + \pi y \\ x &= \frac{4 + \pi}{y} - \frac{\pi}{4}y \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(x, y) = P(y) = 2\left(\frac{4 + \pi}{y} - \frac{\pi}{4}y\right) + 2y + \pi y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(y) = \frac{8 + 2\pi}{y} - \frac{\pi}{2}y + 2y + \pi y \Rightarrow \boxed{P(y) = \frac{8 + 2\pi}{y} + \frac{\pi}{2}y + 2y}$$

b) Derivamos la función $P(y)$ e igualamos a cero.

$$P(y) = \frac{8+2\pi}{y} + \frac{\pi}{2}y + 2y \Rightarrow P'(y) = -\frac{8+2\pi}{y^2} + \frac{\pi}{2} + 2$$

$$P'(y) = 0 \Rightarrow -\frac{8+2\pi}{y^2} + \frac{\pi}{2} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{\pi+4}{2} = \frac{8+2\pi}{y^2} \Rightarrow y^2 = \frac{2(8+2\pi)}{\pi+4} = \frac{4(4+\pi)}{\cancel{\pi+4}} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{4} = \pm 2$$

Solo nos sirve el valor positivo $y = 2$, sustituimos en la segunda derivada para comprobar si es un mínimo.

$$P'(y) = -\frac{8+2\pi}{y^2} + \frac{\pi}{2} + 2 = -(8+2\pi)y^{-2} + \frac{\pi}{2} + 2 \Rightarrow P''(y) = 2(8+2\pi)y^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P''(2) = 2(8+2\pi)2^{-3} > 0$$

La derivada segunda es positiva con $y = 2$, luego hay un mínimo relativo de $P(y)$.

$$\text{Sustituimos para obtener } x \rightarrow x = \frac{4+\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot 2 = \frac{4+\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Se consigue un mínimo de longitud de las líneas a pintar con $x = y = 2$.

PAU Junio 2021 Matemáticas II



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2021	CONVOCATORIA: JUNIO 2021
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: El alumno contestará solo TRES problemas entre los seis propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = 2 \\ x + (a-1)y + 2z = 1 \\ 2x + ay + z = -1 \end{cases}$$

- a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a . (5 puntos)
 b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible. (5 puntos)

Problema 2. Se dan los planos $\pi_1 : x + y + z = a - 1$, $\pi_2 : 2x + y + az = a$ y $\pi_3 : x + ay + z = 1$.

- a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a . (4 puntos)
 b) Para $a = 1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3 . (3 puntos)
 c) Para $a = 2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2 . (3 puntos)

Problema 3. Consideramos la función $f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)}$, obtened:

- a) El dominio y las asíntotas de la función. (2 puntos)
 b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (4 puntos)
 c) La integral $\int f(x)dx$. (4 puntos)

Problema 4. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 + 1 \end{bmatrix}$, se pide:

- a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m . (4 puntos)
 b) Explicad cuándo la matriz A es invertible. (2 puntos)
 c) Resolved la ecuación $XA = I$ donde I es la matriz identidad en el caso $m = 1$. (4 puntos)

Problema 5. Dados el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

- a) Calculad la distancia del punto P al plano π . (2 puntos)
 b) Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π . (5 puntos)
 c) Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π . (3 puntos)

Problema 6. Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R , uno de cuyos vértices es el punto (x, y) (véase la figura).

a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x , cuando $0 \leq x \leq 32$.

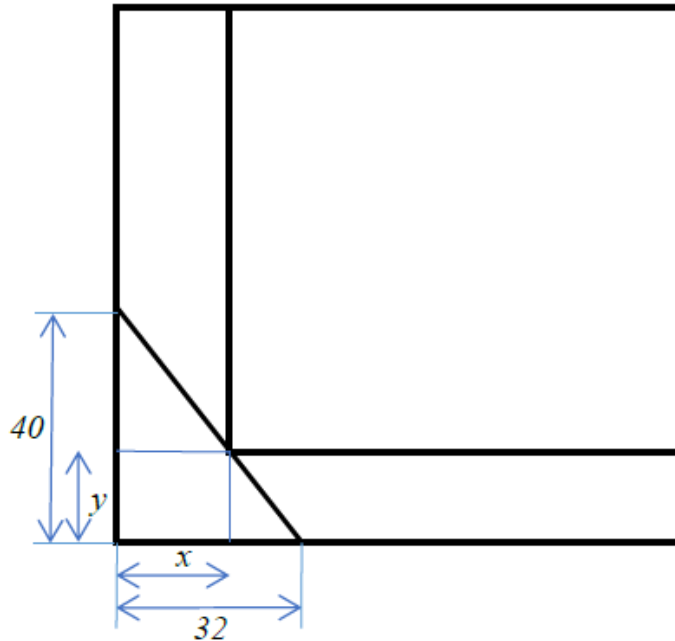
(4 puntos)

b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima.

(4 puntos)

c) Calculad el valor de dicha área máxima.

(2 puntos)



Soluciones

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = 2 \\ x + (a-1)y + 2z = 1 \\ 2x + ay + z = -1 \end{cases}$$

- a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a . (5 puntos)
 b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible. (5 puntos)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{array} \right)$

Obtenemos el determinante de A y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = a-1+4+a^2+a-2(a-1)(a+1)-1-2a = a^2+2-2a^2+2 = -a^2+4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \sqrt{4} = \pm 2$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 2$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right)$ utilizamos el método de Gauss para obtener

una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Nueva Fila } 2^a \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & -4 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow (A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -4 \quad 3 \quad -5 \\ 0 \quad 4 \quad -3 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow (A/B)'' = \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{1 \quad 1 \quad -1}^{A/B} & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A & -4 \end{array} \right)$$

Se observa que el rango de A es 2 y el de A/B es 3.

El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right)$ utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -3 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \\ \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \\ -2 \quad -2 \quad -6 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -5 \quad -5 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$(A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad -5 \quad -5 \\ 0 \quad 0 \quad 5 \quad 5 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow (A/B)'' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 2. Pero el número de incógnitas es 3.

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $a = -2$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

- b) Resolvemos el sistema para el caso 1 siendo $a \neq 2$ y $a \neq -2$ y el sistema compatible determinado. Obtenemos sus soluciones con el método de Cramer.

$$|A| = -a^2 + 4$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2a-2-2+a^2+a+a^2-1-1-4a}{-a^2+4} = \frac{2a^2-a-6}{-a^2+4}$$

$$x = \frac{(a-2)(2a+3)}{(a-2)(-a-2)} = \frac{2a+3}{-a-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+8-a-1-2a-2-2+2}{-a^2+4} = \frac{-3a+6}{-a^2+4} = \frac{-3(a-2)}{(a-2)(-a-2)} = \frac{3}{a+2} = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-a+1+2+2a-4a+4+1-a}{-a^2+4} = \frac{-4a+8}{-a^2+4} = \frac{-4(a-2)}{(a-2)(-a-2)} = \frac{4}{a+2} = z$$

En el caso 3 siendo $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos partiendo del sistema equivalente obtenido por el método de Gauss.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow (A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x+y+3z=2 \\ -z=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+3z=2 \\ \boxed{z=1} \end{array} \right\} \Rightarrow x+y+3=2 \Rightarrow \boxed{x=-y-1} \Rightarrow \begin{cases} x=-t-1 \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$$

Para $a \neq 2$ y $a \neq -2$ el sistema tiene solución $x = \frac{2a+3}{-a-2}$; $y = \frac{3}{a+2}$; $z = \frac{4}{a+2}$

Para $a = 2$ el sistema tiene solución: $x = -t-1$; $y = t$; $z = 1$ siendo t un número real.

Problema 2. Se dan los planos $\pi_1 : x + y + z = a - 1$, $\pi_2 : 2x + y + az = a$ y $\pi_3 : x + ay + z = 1$.

- a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a . (4 puntos)
 b) Para $a = 1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3 . (3 puntos)
 c) Para $a = 2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2 . (3 puntos)

a) Planteamos un sistema con los tres planos y lo estudiamos como un sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array} \right\}$$

La matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array} \right)$

La matriz de coeficientes es $A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{array} \right)$, calculamos su determinante e igualamos a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a + 2a - 1 - 2 - a^2 = -a^2 + 3a - 2$$

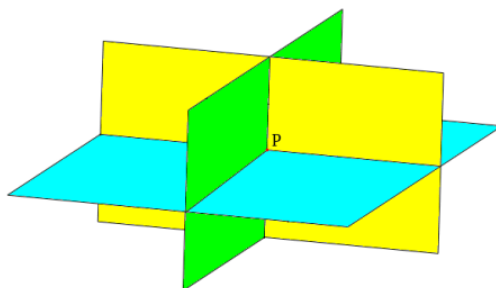
$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-1)(-2)}}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{-2} = 1 = a \\ \frac{-3-1}{-2} = 2 = a \end{cases}$$

Establecemos tres situaciones distintas que analizamos.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema tiene una única solución. Esta solución es un punto, que es el punto de corte de los tres planos. Los tres planos se cortan en un punto.



CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango no es 3. Analizamos la matriz ampliada y la transformamos en otra matriz equivalente triangular.

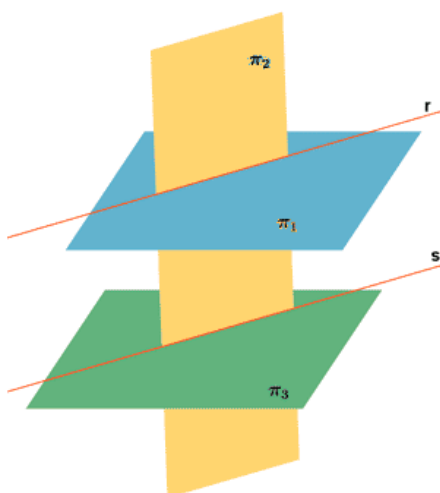
$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \hline 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \\ \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \hline 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. El sistema no tiene solución.

Los tres planos no se cortan al mismo tiempo.

Como las ecuaciones son $\pi_1: x+y+z=0$, $\pi_2: 2x+y+z=1$ y $\pi_3: x+y+z=1$ tenemos que los planos π_1 y π_3 son paralelos y son secantes con el plano π_2



CASO 3. $a = 2$

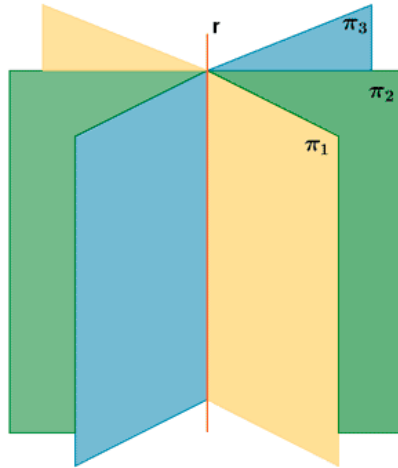
En este caso el determinante de A es no nulo y su rango no es 3. Analizamos la matriz ampliada y la transformamos en otra matriz equivalente triangular.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \hline 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \\ \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \hline 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow (A/B)'' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 al igual que el rango de A/B. Y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

Los planos son secantes y se cortan en una recta común a los tres.



b) Para $a = 1$ estamos en el caso 2 estudiado. Las ecuaciones de los planos son $\pi_1 : x + y + z = 0$, y $\pi_3 : x + y + z = 1$. Los planos π_1 y π_3 son paralelos y por tanto no tienen recta común.

c) Para $a = 2$ estamos en el caso 3 y si existe la recta común cuya ecuación implícita es:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : x + y + z = 1 \\ \pi_2 : 2x + y + 2z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Problema 3. Consideramos la función $f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)}$, obtened:

- a) El dominio y las asíntotas de la función. (2 puntos)
 b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (4 puntos)
 c) La integral $\int f(x)dx$. (4 puntos)

- a) El dominio de la función lo forman todos los números reales salvo los que anulen el denominador.

$$f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)} \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Dominio de $f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 0$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{0-1}{0(0+2)} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

¿ $x = -2$?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{-2-1}{-2(-2+2)} = \frac{-3}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe pues existe asíntota horizontal.

- b) Derivamos la función y vemos cuando se anula.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+2x - (x-1)(2x+2)}{(x^2+2x)^2} = \frac{x^2+2x-2x^2-2x+2x+2}{(x^2+2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2} = 0 \Rightarrow -x^2+2x+2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)2}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{-2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{-2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores $x = 1 - \sqrt{3}$ y $x = 1 + \sqrt{3}$. Añadimos como puntos de separación también los excluidos del dominio, por no poder usarlos en el cálculo de la derivada.

- En $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = \frac{-(-3)^2 + 2(-3) + 2}{((-3)^2 + 2(-3))^2} = \frac{-13}{+} < 0$.

La función decrece en $(-\infty, -2)$

- En $(-2, 1 - \sqrt{3})$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{-(-1)^2 + 2(-1) + 2}{((-1)^2 + 2(-1))^2} = \frac{-1}{+} < 0$.

La función decrece en $(-2, 1 - \sqrt{3})$

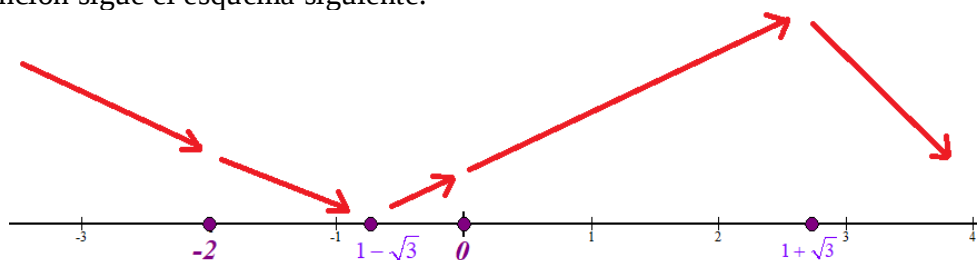
- En $(1 - \sqrt{3}, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = \frac{-(-0.5)^2 + 2(-0.5) + 2}{((-0.5)^2 + 2(-0.5))^2} = \frac{0.75}{+} > 0. \text{ La función crece en } (1 - \sqrt{3}, 0)$$

- En $(0, 1 + \sqrt{3})$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-1^2 + 2 + 2}{(1^2 + 2)^2} = \frac{3}{+} > 0$. La función crece en $(0, 1 + \sqrt{3})$

- En $(1 + \sqrt{3}, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-3^2 + 6 + 2}{(3^2 + 6)^2} = \frac{-1}{+} < 0$. La función decrece en $(1 + \sqrt{3}, +\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, +\infty)$ y crece en $(1 - \sqrt{3}, 0) \cup (0, 1 + \sqrt{3})$.

c) Calculamos la integral pedida.

$$\int f(x) dx = \int \frac{x-1}{x(x+2)} dx = \dots$$

Descomponemos la fracción del integrando en fracciones simples.

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x(x+2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} \\ \frac{x-1}{x(x+2)} &= \frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)} \\ x-1 &= A(x+2)+Bx \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow -1=2A \rightarrow A=-\frac{1}{2} \\ x=-2 \rightarrow -3=-2B \Rightarrow B=\frac{3}{2} \end{cases} \\ \frac{x-1}{x(x+2)} &= \frac{-1/2}{x} + \frac{3/2}{x+2}\end{aligned}$$

$$\dots = \int \frac{-1/2}{x} + \frac{3/2}{x+2} dx = \int \frac{-1/2}{x} dx + \int \frac{3/2}{x+2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x+2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x+2| = \frac{1}{2} (3 \ln|x+2| - \ln|x|) = \frac{1}{2} (\ln|x+2|^3 - \ln|x|) = \boxed{\frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{(x+2)^3}{x} \right| \right) + K}$$

Problema 4. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 + 1 \end{bmatrix}$, se pide:

- a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m . (4 puntos)
 b) Explicad cuándo la matriz A es invertible. (2 puntos)
 c) Resolved la ecuación $XA = I$ donde I es la matriz identidad en el caso $m = 1$. (4 puntos)

a) El rango de A es igual o menor que 3.

¿El rango de A es 3?

Para ello debe ser el determinante de A no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 + 1 \end{vmatrix} = -m(m^2 + 1) - 2m^2 = -m^3 - m - 2m^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^3 - 2m^2 - m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m(m^2 + 2m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \text{o} \\ m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = -1 \end{cases}$$

Para $m \neq 0$ y $m \neq -1$ el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.

Estudiamos los dos casos que nos quedan por considerar.

Si $m = 0$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Observamos que la fila 2ª es nula, por lo que consideramos el

menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 2ª y la columna 3ª con determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0. \text{ Por lo que el rango de } A \text{ es } 2.$$

Si $m = -1$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Observamos que la columna 1ª y 3ª son iguales.

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna y fila 3ª con determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Por lo que el rango de } A \text{ es } 2.$$

Resumiendo: Si $m \neq 0$ y $m \neq -1$ el rango de A es 3. Si $m = 0$ o $m = -1$ el rango de A es 2.

- b) Hemos averiguado cuando el determinante de A se anula, por lo que podemos afirmar que la matriz A es invertible si m es distinta de 0 y 1.

- c) Para $m = 1$ el determinante de A es no nulo y existe la inversa de A , por lo que podemos despejar la matriz X en la ecuación $XA = I$.

$$XA = I \Rightarrow X = I \cdot A^{-1} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A para $m = 1$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0 \text{ Existe la inversa de } A.$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{-4} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

La solución es $X = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

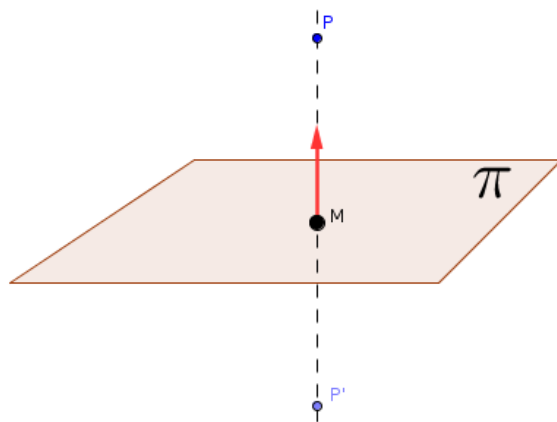
Problema 5. Dados el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

- a) Calculad la distancia del punto P al plano π . (2 puntos)
- b) Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π . (5 puntos)
- c) Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π . (3 puntos)

a) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P(1,2,3) \\ \pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|3 + 4 + 3 + 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \text{ unidades}$$

b) Hallamos la recta r perpendicular al plano que pasa por P . Después hallamos el punto M de corte de recta r y plano π . El punto P' lo obtendremos sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.



La recta perpendicular al plano π tiene como vector director el normal del plano π .

$$\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (3, 2, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (3, 2, 1) \\ P(1, 2, 3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + 3 + \lambda + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 + 9\lambda + 4 + 4\lambda + 3 + \lambda + 4 = 0 \Rightarrow 14 + 14\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 3(-1) = -2 \\ y = 2 + 2(-1) = 0 \\ z = 3 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-2, 0, 2)$$

Obtenemos el punto P' sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$

$$\left. \begin{array}{l} M(-2, 0, 2) \\ \overrightarrow{PM} = (-2, 0, 2) - (1, 2, 3) = (-3, -2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P' = (-2, 0, 2) + (-3, -2, -1) = (-5, -2, 1)}$$

El punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π tiene coordenadas $P'(-5, -2, 1)$.

c) El plano π' que pasa por P' y es paralelo a π tiene como vector normal el mismo que el plano π .

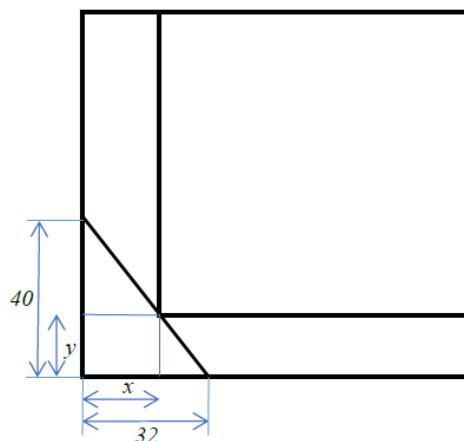
$$\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (3, 2, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P'(-5, -2, 1) \in \pi' \\ \vec{n}' = \vec{n} = (3, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P'(-5, -2, 1) \in \pi' \\ \pi' \equiv 3x + 2y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -15 - 4 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = 18$$

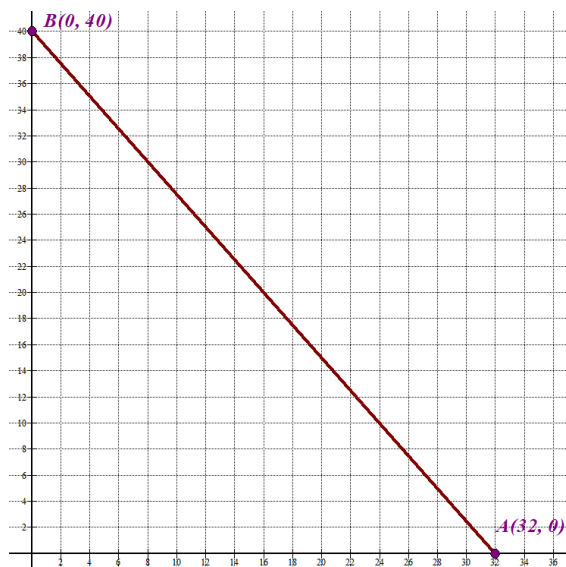
$$\boxed{\pi' \equiv 3x + 2y + z + 18 = 0}$$

Problema 6. Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R , uno de cuyos vértices es el punto (x, y) (véase la figura).

- a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x , cuando $0 \leq x \leq 32$. (4 puntos)
 b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima. (4 puntos)
 c) Calculad el valor de dicha área máxima. (2 puntos)



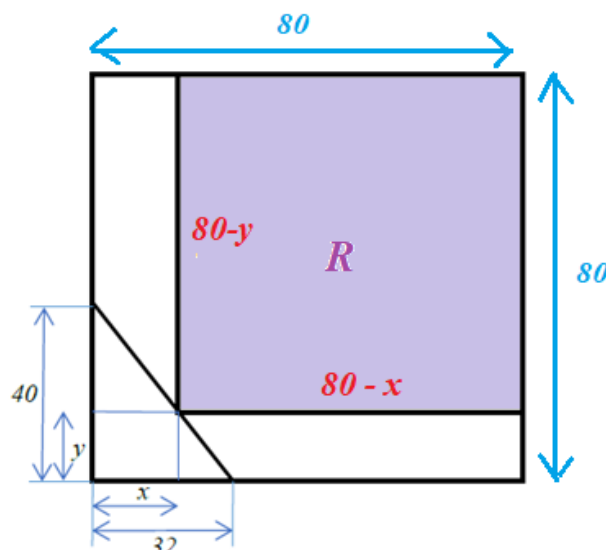
- a) Averiguamos la ecuación de la recta que hace de hipotenusa del triángulo de espejo que se ha roto.



$$\left. \begin{array}{l} y = mx + n \\ A(32, 0) \in \text{recta} \\ B(0, 40) \in \text{recta} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = 32m + n \\ 40 = 0 + n \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = 32m + n \\ 40 = n \end{array} \right\} \Rightarrow 32m + 40 = 0 \Rightarrow m = -\frac{40}{32} = -\frac{5}{4}$$

$$y = -\frac{5}{4}x + 40$$

Tenemos la situación que aparece en el dibujo siguiente:



El área del rectángulo R vendrá expresada en función de x como sigue:

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{5}{4}x + 40 \\ \text{área}(x, y) = f(x, y) &= (80 - x)(80 - y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = (80 - x) \left(80 - \left(-\frac{5}{4}x + 40 \right) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = (80 - x) \left(80 + \frac{5}{4}x - 40 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = (80 - x) \left(40 + \frac{5}{4}x \right) = 3200 + 100x - 40x - \frac{5}{4}x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 60x + 3200$$

b) Derivamos e igualamos a cero en busca del máximo del área.

$$f(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 60x + 3200 \Rightarrow f'(x) = -\frac{10}{4}x + 60$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{10}{4}x + 60 = 0 \Rightarrow -10x + 240 = 0 \Rightarrow x = \frac{240}{10} = 24$$

$$f'(x) = -\frac{10}{4}x + 60 \Rightarrow f''(x) = -\frac{10}{4} \Rightarrow f''(24) = -\frac{10}{4} < 0$$

En $x = 24$ hay un máximo relativo. Será el máximo absoluto pues la expresión del área es una parábola.

$$\text{Para } x = 24 \text{ tenemos que } y = -\frac{5}{4}24 + 40 = -30 + 40 = 10$$

Las dimensiones de R que hacen máxima el área son $80 - 24 = 56$ cm y $80 - 10 = 70$ cm.

c) Como las dimensiones del rectángulo R son 56 cm x 70 cm el área máxima es $70 \cdot 56 = 3920$ cm².

PAU Septiembre 2020 Matemáticas II



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: SETEMBRE 2020	CONVOCATORIA: SEPTIEMBRE 2020
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: El alumno elegirá solo TRES problemas entre los seis propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + ay + 2z = 3 \\ x - 3y + az = -2 \\ x + y + 2z = a \end{cases}$$
, donde a un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Los valores de a para los cuales el sistema es compatible. (4 puntos)
- La solución del sistema cuando $a = 0$. (3 puntos)
- Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

Problema 2. Se dan los planos $\pi: x + y = 1$ y $\pi': x - y + z = 1$ y el punto $P(1, -1, 0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto P y es paralela a los planos π y π' . (3 puntos)
- La distancia de la recta r a cada uno de los planos π y π' . (3 puntos)
- Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π' . (4 puntos)

Problema 3. Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, **obtener razonadamente, escribiendo todos los**

pasos del razonamiento utilizado:

- El dominio de definición y las asíntotas de la función f . (3 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función. (3+1 puntos)
- El valor de $\int_2^3 f(x) dx$. (3 puntos)

Problema 4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa. (3 puntos)
- Dos constantes a, b de modo que $A^{-1} = A^2 + aA + bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$ siendo I la matriz identidad. (3 puntos)
- El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones. Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema. (2+2 puntos)

Problema 5. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$, $s: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ y el plano

$$\pi: 3x + ay - z + 1 = 0.$$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Si hay algún valor del parámetro a para el cual la recta r está contenida en el plano π . (4 puntos)
- La distancia entre las rectas r y s . (3 puntos)
- El coseno del ángulo que forman la recta r y la recta $t: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$. (3 puntos)

Problema 6. Los vértices de un triángulo son $A(0, 12)$, $B(-5, 0)$ y $C(5, 0)$. Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas $(-x, 0)$, $(x, 0)$, siendo $0 \leq x \leq 5$. Los otros dos vértices están situados en los segmentos AB y AC .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La expresión $f(x)$ del área del rectángulo anterior. (4 puntos)
- El valor de x para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido. (3 puntos)
- La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo. (3 puntos)

Soluciones

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + ay + 2z = 3 \\ x - 3y + az = -2 \\ x + y + 2z = a \end{cases}$$
, donde a un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible. (4 puntos)
- b) La solución del sistema cuando $a = 0$. (3 puntos)
- c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Con determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + a^2 + 2 + 6 - 2a - a = a^2 - 3a + 2$

Igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 = a \\ \frac{3-1}{2} = 1 = a \end{cases}$$

Estudiamos las tres situaciones diferentes que se nos plantean según el valor de a .

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a = 1$

El determinante de A es 0 y el rango de A no es 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Rango de A es 2?

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4 \neq 0$. El rango de A es 2.

Averiguamos el rango de la matriz ampliada A/B .

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con

$$\text{determinante } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 2 + 3 + 9 - 1 + 2 = 8 \neq 0. \text{ El rango de A/B es 3.}$$

Rango de A = 2 $\neq$ 3 = Rango de A/B.

El sistema es incompatible.

CASO 3. $a = 2$

El determinante de A es 0 y el rango de A no es 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Rango de A es 2?

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ con

$$\text{determinante } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª (es el doble de la 1ª) $\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ con determinante } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 4 + 3 + 9 - 4 + 2 = 0.$$

El rango de A/B no es 3. Por lo que su rango es el mismo que el de A.

Rango de A = 2 = Rango de A/B < 3 = Número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo: Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado, si $a = 1$ el sistema es incompatible y si $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

a) El sistema es compatible para $a \neq 1$.

b) Para $a = 0$ estamos en el caso 1 y el sistema es compatible determinado.

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ x - 3y = -2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 2z \\ x - 3y = -2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3 - 2z) - 3y = -2 \\ (3 - 2z) + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2z - 3y = -5 \\ 3 + y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2z - 3y = -5 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow -2z + 9 = -5 \Rightarrow -2z = -14 \Rightarrow \boxed{z = 7} \Rightarrow \boxed{x = 3 - 14 = -11}$$

La solución es $x = -11$; $y = -3$; $z = 7$.

c) El sistema es compatible indeterminado en el caso 3, cuando $a = 2$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x - 3y + 2z = -2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x \quad -3y \quad +2z \quad = -2 \\ -x \quad -2y \quad -2z \quad = -3 \\ \hline -5y \quad \quad \quad = -5 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \end{array} \right\} \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x \quad +y \quad +2z \quad = 2 \\ -x \quad -2y \quad -2z \quad = -3 \\ \hline -y \quad \quad \quad = -1 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ -5y = -5 \\ -y = -1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ \boxed{y = 1} \end{cases} \Rightarrow x + 2 + 2z = 3 \Rightarrow \boxed{x = 1 - 2z} \end{aligned}$$

Para $a = 2$ las soluciones del sistema son $x = 1 - 2t$; $y = 1$; $z = t$.

Problema 2. Se dan los planos $\pi: x + y = 1$ y $\pi': x - y + z = 1$ y el punto $P(1, -1, 0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto P y es paralela a los planos π y π' . (3 puntos)
- b) La distancia de la recta r a cada uno de los planos π y π' . (3 puntos)
- c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π' . (4 puntos)

- a) Si la recta r es paralela a los dos planos debe ser perpendicular a sus vectores normales y el producto vectorial de los vectores normales de los planos π y π' será el vector director de r .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + y = 1 \rightarrow \vec{n} = (1, 1, 0) \\ \pi': x - y + z = 1 \rightarrow \vec{n}' = (1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n} \times \vec{n}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i - k - k - j = i - j - 2k = (1, -1, -2)$$

La ecuación de la recta r es:

$$\left. \begin{array}{l} P(1, -1, 0) \in r \\ \vec{v}_r = (1, -1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

- b) Como la recta r es paralela a ambos planos la distancia de la recta a cada uno de ellos es la distancia del punto $P(1, -1, 0)$ de la recta r a cada plano.

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \left\{ \begin{array}{l} P(1, -1, 0) \\ \pi: x + y - 1 = 0 \end{array} \right\} = \frac{|1 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} u$$

$$d(r, \pi') = d(P, \pi') = \left\{ \begin{array}{l} P(1, -1, 0) \\ \pi': x - y + z - 1 = 0 \end{array} \right\} = \frac{|1 + 1 + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} u$$

- c) La recta s que resulta de la intersección de los planos tiene como ecuación:

$$s: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

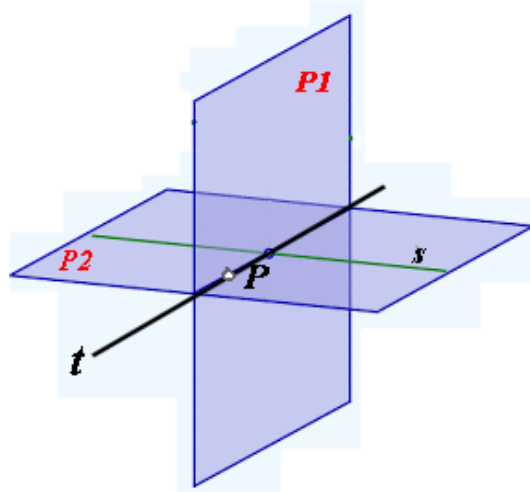
Esta recta s tiene como vector director el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen y ya lo hemos calculado, porque es el vector director de la recta r anterior $\rightarrow \vec{v}_s = \vec{v}_r = (1, -1, -2)$. Las dos rectas son paralelas.

Y un punto de la recta s lo obtenemos dando el valor $y = 0$ y calculando el resto de coordenadas

$$\text{del punto } s: \begin{cases} x + 0 = 1 \\ x - 0 + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 + z = 1 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow P_s(1, 0, 0).$$

$$s: \left\{ \begin{array}{l} P_s(1, 0, 0) \\ \vec{v}_s = (1, -1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

Hallamos la ecuación del plano P_1 que pasa por P y es perpendicular a la recta s . También el plano P_2 que pasa por P y contiene a la recta s . La recta que nos piden es la intersección de ambos planos.



$$\left. \begin{array}{l} P(1, -1, 0) \in P1 \\ \vec{n}_1 = \vec{v}_s = (1, -1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(1, -1, 0) \in P1 \\ P1: x - y - 2z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 1 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow \underline{P1: x - y - 2z - 2 = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1, -1, 0) \in P2 \\ \vec{u} = \vec{v}_s = (1, -1, -2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{P_s P} = (1, 0, 0) - (1, -1, 0) = (0, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow P2: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z + 2x - 2 = 0 \Rightarrow \underline{P2: 2x + z - 2 = 0}$$

La recta t buscada tiene ecuación $t: \begin{cases} x - y - 2z - 2 = 0 \\ 2x + z - 2 = 0 \end{cases}$

Problema 3. Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, **obtener razonadamente, escribiendo todos los**

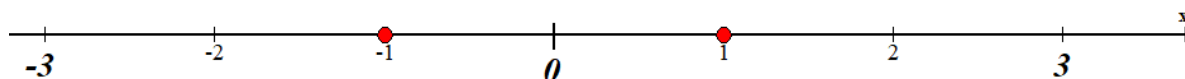
pasos del razonamiento utilizado:

- a) El dominio de definición y las asíntotas de la función f . (3 puntos)
 b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función. (3+1 puntos)
 c) El valor de $\int_2^3 f(x)dx$. (3 puntos)

- a) El dominio de definición son los valores de x que no anulen el denominador ni hagan negativo el radicando del denominador. Es decir, el radicando debe ser positivo.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

La recta real se divide en tres partes. Estudiamos el signo del radicando en cada una de ellas.



En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -3 \rightarrow (-3)^2 - 1 = 8 > 0$.

En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0 \rightarrow 0^2 - 1 = -1 < 0$.

En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 3 \rightarrow 3^2 - 1 = 8 > 0$.

El dominio es $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = -1$?

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-1}{0} = \infty$$

¿ $x = 1$?

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{0} = \infty$$

Las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = -1$$

Las asíntotas horizontales son $y = 1$ en $+\infty$ e $y = -1$ en $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

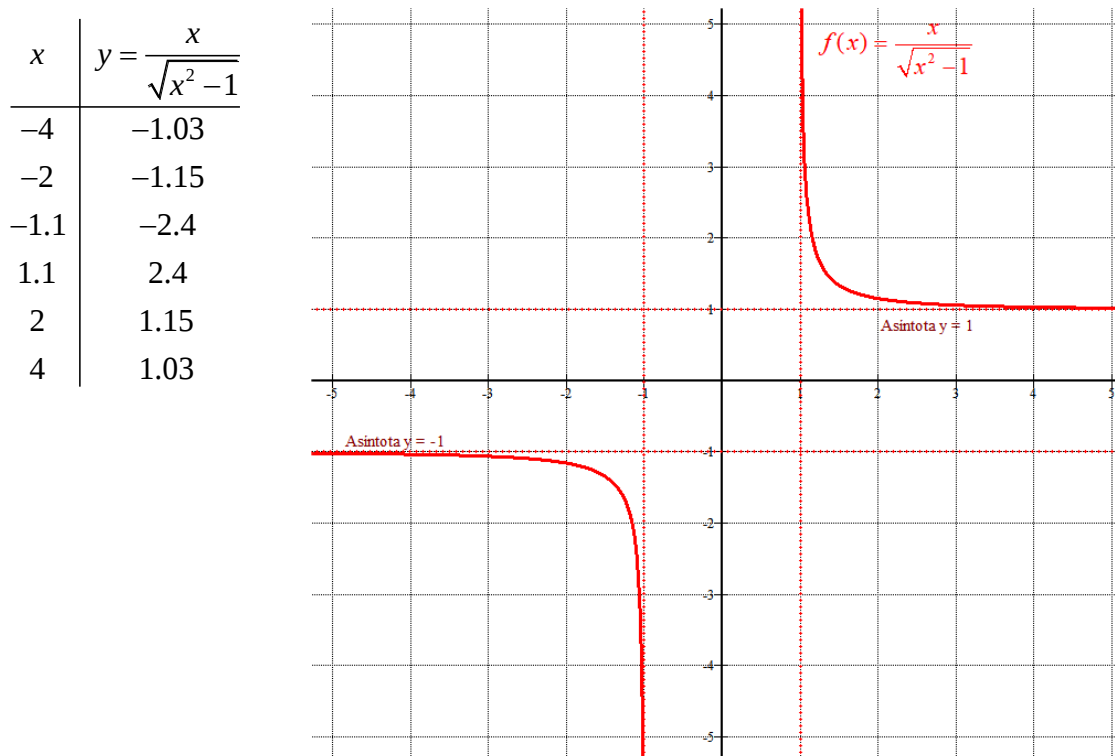
No hay pues existen asíntotas horizontales.

- b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{(\sqrt{x^2-1})^2} = \frac{\sqrt{x^2-1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{(\sqrt{x^2-1})^2 - x^2}{x^2-1}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-1-x^2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

Esta derivada nunca se anula y siempre tendrá el mismo signo pues $x^2-1 > 0$ en todo su dominio. Por lo que la derivada es siempre negativa. Es decir, la función siempre decrece.



c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x^2-1=t \Rightarrow 2x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right\} = \int \frac{x}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2x} = \int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int t^{-1/2} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1} = \frac{1}{2} \frac{t^{1/2}}{1/2} = \sqrt{t} = \sqrt{x^2-1} + K$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \left[\sqrt{x^2-1} \right]_2^3 = \left[\sqrt{3^2-1} \right] - \left[\sqrt{2^2-1} \right] = \boxed{\sqrt{8} - \sqrt{3} \approx 1.09}$$

Problema 4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa. (3 puntos)
 b) Dos constantes a, b de modo que $A^{-1} = A^2 + aA + bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$ siendo I la matriz identidad. (3 puntos)

- c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones.

Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema. (2+2 puntos)

- a) Comprobamos si el determinante de la matriz A es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Al ser no nulo la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Si multiplicamos la ecuación matricial planteada $A^{-1} = A^2 + aA + bI$ por la matriz A tenemos que $AA^{-1} = AA^2 + aAA + bAI \Rightarrow I = A^3 + aA^2 + bA \Rightarrow A^3 + aA^2 + bA - I = 0$.
 Como nos dicen que podemos utilizar que se cumple $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$ entonces las constantes buscadas son $a = -3$ y $b = 3$.

- c) Obtenemos la expresión del sistema.

$$(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes tiene determinante $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3$

Para $\lambda \neq 1$ este determinante es no nulo y el sistema tiene una solución única. Para que tenga infinitas soluciones debe ser $\lambda = 1$. Lo resolvemos para $\lambda = 1$.

$$(A-I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0$$

Las soluciones son $x = \alpha$; $y = 0$; $z = \beta$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Problema 5. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z=2\lambda \end{cases}$, $s: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ y el plano

$$\pi: 3x + ay - z + 1 = 0.$$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Si hay algún valor del parámetro a para el cual la recta r está contenida en el plano π . (4 puntos)
 b) La distancia entre las rectas r y s . (3 puntos)
 c) El coseno del ángulo que forman la recta r y la recta $t: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$. (3 puntos)

- a) Para que la recta esté contenida en el plano el vector director de la recta debe ser perpendicular al normal del plano, es decir, su producto escalar debe ser cero.

$$r: \begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda \\ z=2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,2,0) \\ \vec{v}_r = (0,1,2) \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (0,1,2)(3,a,-1) = 0 \Rightarrow a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ \pi: 3x+ay-z+1=0 \Rightarrow \vec{n} = (3,a,-1) \end{array} \right\}$$

Para $a=2$ hemos obtenido que recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. Veamos si la recta está contenida o es paralela, para ello basta ver si el punto $P_r(1,2,0)$ que pertenece a la recta r pertenece al plano $\pi: 3x+2y-z+1=0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P_r(1,2,0) \in \pi? \\ \pi: 3x+2y-z+1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 3+4-0+1=0?$$

No se cumple luego la recta y el plano son paralelos y para ningún valor de a la recta está contenida en el plano.

- b) Averigüemos primero la posición relativa de las rectas.

$$r: \begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda \\ z=2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,2,0) \\ \vec{v}_r = (0,1,2) \end{cases} \quad s: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(-1,0,-2) \\ \vec{u}_s = (2,-1,1) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni coincidentes ni paralelas.

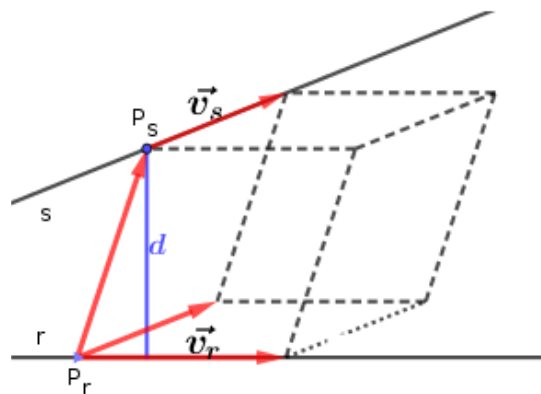
Veamos si se cortan o se cruzan. Utilizamos el producto mixto de los vectores de las rectas y un vector que une un punto de la recta s con un punto de la recta r .

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (-1, 0, -2) - (1, 2, 0) = (-2, -2, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{P_r Q_s} = (-2, -2, -2) \\ \vec{v}_r = (0, 1, 2) \\ \vec{u}_s = (2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{P_r Q_s}, \vec{v}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2-8-0+4+0-4 = -10 \neq 0$$

Al ser distinto de cero las rectas se cruzan.

Utilizamos la fórmula de la distancia entre dos rectas que se cruzan:



$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + 4j - 2k + 2i = 3i + 4j - 2k = (3, 4, -2) \Rightarrow |\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$$

$$d(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|\vec{P_r P_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \boxed{\frac{10}{\sqrt{29}} u}$$

- c) El ángulo formado por las rectas es el ángulo formado por sus vectores directores. Hallamos los vectores directores de cada una de las rectas.

$$t: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y \\ y = 2 + z \end{cases} \Rightarrow 2x = 2 + z \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{2}z \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}z \\ y = 2 + z \end{cases}$$

$$t: \begin{cases} x = 1 + 0.5\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_t(1, 2, 0) \\ \vec{v}_t(0.5, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_t(1, 2, 0) \\ \vec{u}_t = 2(0.5, 1, 1) = (1, 2, 2) \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, 2, 0) \\ \vec{v}_r = (0, 1, 2) \end{cases}$$

El coseno del ángulo que forman se obtiene de la fórmula del producto escalar.

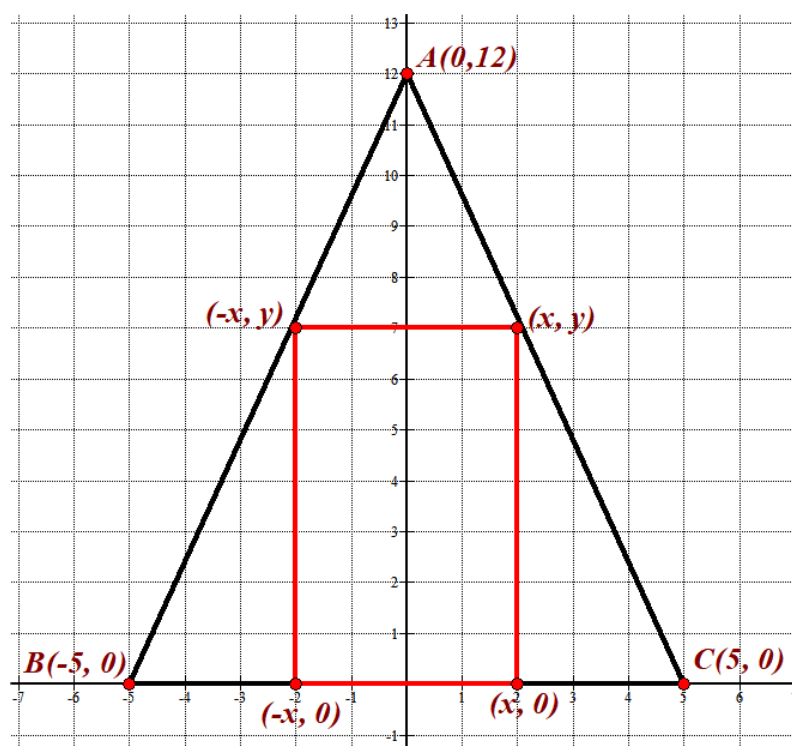
$$\cos(r, t) = \cos(\vec{v}_r, \vec{u}_t) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{u}_t}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{u}_t|} = \frac{(0, 1, 2)(1, 2, 2)}{\sqrt{0+1+4}\sqrt{1+4+4}} = \frac{2+4}{3\sqrt{5}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{5}} = 0.8944}$$

Problema 6. Los vértices de un triángulo son $A(0, 12)$, $B(-5, 0)$ y $C(5, 0)$. Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas $(-x, 0)$, $(x, 0)$, siendo $0 \leq x \leq 5$. Los otros dos vértices están situados en los segmentos AB y AC .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La expresión $f(x)$ del área del rectángulo anterior. (4 puntos)
 b) El valor de x para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido. (3 puntos)
 c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo. (3 puntos)

Hacemos un dibujo descriptivo de la situación planteada.



- a) La base del rectángulo es $2x$, pero necesitamos conocer la altura para determinar el área. Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $C(5, 0)$ y $A(0, 12)$.

$$y = mx + n \Rightarrow \begin{cases} C(5, 0) \rightarrow 0 = 5m + n \\ A(0, 12) \rightarrow 12 = 0 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -5m \\ n = 12 \end{cases} \Rightarrow -5m = 12 \Rightarrow m = -\frac{12}{5}$$

$$y = -\frac{12}{5}x + 12$$

Por lo que el área del rectángulo que se forma (depende del valor de x) tiene la expresión:

$$\text{Área}(x) = \text{Base} \cdot \text{Altura} = 2x \cdot \left(-\frac{12}{5}x + 12\right) = -\frac{24}{5}x^2 + 24x$$

- b) Derivamos la función área e igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$\text{Área}(x) = -\frac{24}{5}x^2 + 24x \Rightarrow \text{Área}'(x) = -\frac{48}{5}x + 24$$

$$\text{Área}'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{48}{5}x + 24 = 0 \Rightarrow -\frac{48}{5}x = -24 \Rightarrow x = \frac{120}{48} = 2.5$$

Sustituimos este valor en la derivada segunda.

$$\text{Área}''(x) = -\frac{48}{5} \Rightarrow \text{Área}''(2.5) = -\frac{48}{5} < 0$$

La función área tiene un valor máximo para $x = 2.5$.

Sustituimos y averiguamos el valor de la altura del rectángulo $\rightarrow y = -\frac{12}{5} \cdot 2.5 + 12 = 6$

Sustituimos y obtenemos el área del rectángulo $\rightarrow \text{Área}(2.5) = -\frac{24}{5} \cdot 2.5^2 + 24 \cdot 2.5 = 30 \text{ u}^2$

Con un rectángulo de base 5 unidades y altura 6 unidades tenemos un rectángulo de área máxima, siendo esta de 30 unidades cuadradas.

c) El área del triángulo es $\frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60 \text{ u}^2$ y la del rectángulo anterior 30 u^2 .

La proporción es $\frac{60}{30} = 2$. El rectángulo tiene de área la mitad del triángulo.

PAU Julio 2020 Matemáticas II



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2020	CONVOCATORIA: JULIO 2020
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: El alumno elegirá solo TRES problemas entre los seis propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = -2 \end{cases}$$
, siendo a un parámetro real,

obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El estudio del sistema en función del parámetro a . (5 puntos)
- b) Las soluciones del sistema cuando $a = -2$. (3 puntos)
- c) La solución del sistema cuando $a = 0$. (2 puntos)

Problema 2. Sea la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y los puntos $P = (1, 0, 0)$ y $Q = (2, 1, \alpha)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r . (3 puntos)
- b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r , cuando $\alpha = 1$. (3 puntos)
- c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r , cuando $\alpha = 1$. (4 puntos)

Problema 3. Se da la función real f definida por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El dominio y las asíntotas de la función f . (3 puntos)
- b) La integral $\int f(x)dx$, así como la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2, 0)$. (3+1 puntos)
- c) El área de la región limitada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$. (3 puntos)

Problema 4. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real b .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa. (3 puntos)
- b) Los valores de b para que la matriz $A^T A$ tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A . (3 puntos)
- c) La inversa de A^T , cuando dicha inversa exista. (4 puntos)

Problema 5. Se dan el plano $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos $(1, 2, -1)$, $B(2, 1, 0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π . (4 puntos)
- b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A .
Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r . (1+2 puntos)
- c) La distancia entre el punto B y la recta r . (3 puntos)

Problema 6. En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado. (4 puntos)
- b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x)$, $0 \leq x \leq 20$. (4 puntos)
- c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área. (2 puntos)

Soluciones

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = -2 \end{cases}$$
, siendo a un parámetro real,

obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El estudio del sistema en función del parámetro a . (5 puntos)
- b) Las soluciones del sistema cuando $a = -2$. (3 puntos)
- c) La solución del sistema cuando $a = 0$. (2 puntos)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + a - a^3 - 1 - 1 = -a^3 + 3a - 2.$$

Averiguamos cuando se anula este determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^3 + 3a - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & \underline{0} \rightarrow a = 1 \text{ es raíz} \end{array} \quad -a^3 + 3a - 2 = (a-1)(-a^2 - a + 2)$$

$$-a^2 - a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-1)2}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{1+3}{-2} = -2 = a \\ \frac{1-3}{-2} = 1 = a \end{cases}$$

Tenemos tres situaciones distintas a estudiar.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado**.

CASO 2. $a = 1$

El determinante de A es 0 y el rango de A no es 3

¿El rango de A es 2? ¿o 1?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. El rango de esta matriz es 1 pues las 3 filas son iguales.

Veamos el rango de $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Su rango no es 3 pues la fila 1ª y 2ª son iguales.

Es 2 pues tomando el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 1ª y las columnas 1ª y 2ª

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$.

Rango de $A = 1 \neq 2 = \text{Rango de } A/B$

El sistema es **incompatible**.

CASO 3. $a = -2$

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna

3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ tiene determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$. El rango de A es 2.

Veamos el rango de $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Hemos añadido una columna 4ª que es igual que la 1ª, por lo que el rango de A/B es el mismo que el de A .

Rango de $A = \text{Rango de } A/B = 2 < 3 = \text{Número de incógnitas}$.

El sistema es **compatible indeterminado**.

Resumiendo: Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado, si $a = 1$ el sistema es incompatible y si $a = -2$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Cuando $a = -2$ estamos en el caso 3 y tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x & -2y & +z & = 1 \\ -x & -y & +2z & = -1 \\ \hline & -3y & +3z & = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{cases} \\ \begin{cases} \text{Ecuación 3ª} + 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ -2x & +y & +z & = -2 \\ 2x & +2y & -4z & = +2 \\ \hline & 3y & -3z & = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \Rightarrow \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2ª} = \text{Ecuación 3ª} \\ \text{Quito ecuación 3ª} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ \boxed{y = z} \end{cases} \Rightarrow x + z - 2z = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1 + z} \end{aligned}$$

Las soluciones son $\boxed{x=1+t; \quad y=t; \quad z=t}$

- c) Cuando $a = 0$ estamos en el caso 1 y el sistema tiene una única solución. La hallamos utilizando el método de Cramer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2-1-1}{-2} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-1+2}{-2} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+2-1}{-2} = -1$$

La solución es $\boxed{x=2; \quad y=-1; \quad z=-1}$

Problema 2. Sea la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y los puntos $P = (1, 0, 0)$ y $Q = (2, 1, \alpha)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r . (3 puntos)
 b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r , cuando $\alpha = 1$. (3 puntos)
 c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r , cuando $\alpha = 1$. (4 puntos)

- a) La recta que pasa por P y Q tiene como vector director $\overrightarrow{PQ} = (2, 1, \alpha) - (1, 0, 0) = (1, 1, \alpha)$. El vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$.

Para que sean paralelas deben tener vectores directores con coordenadas proporcionales

$$\vec{v}_r = (1, 1, -1) \text{ y } \overrightarrow{PQ} = (1, 1, \alpha), \text{ por lo que } \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}.$$

- b) El plano que contiene a P y Q tiene como uno de sus vectores directores $\overrightarrow{PQ} = (2, 1, \alpha) - (1, 0, 0) = (1, 1, \alpha) = (1, 1, 1)$. Como es paralelo a la recta r el otro vector director del plano es $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 0, 0) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (1, 1, -1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x-1-y+z-z-y+x-1=0$$

$$2x-2y-2=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x-y-1=0}$$

- c) El plano π' que es perpendicular a r tiene como vector normal el director de r : $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$. Hallamos la ecuación de este plano.

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 0, 0) \in \pi' \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(1, 0, 0) \in \pi' \\ \pi' \equiv x+y-z+D=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1+0-0+D=0 \Rightarrow D=-1$$

$$\pi' \equiv x+y-z-1=0$$

Aplicamos la fórmula de la distancia de punto a plano.

$$\left. \begin{array}{l} Q(2, 1, 1) \\ \pi' \equiv x+y-z-1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{distancia}(Q, \pi') = \frac{|2+1-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577 \text{ u}}$$

Problema 3. Se da la función real f definida por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El dominio y las asíntotas de la función f . (3 puntos)
 b) La integral $\int f(x)dx$, así como la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2, 0)$. (3+1 puntos)
 c) El área de la región limitada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$. (3 puntos)

a) El dominio de una función racional son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

El dominio de la función f es $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} = \frac{1}{0} = \infty. \text{ Si es asíntota.}$$

¿ $x = 1$ es asíntota?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} = \frac{2}{0} = \infty. \text{ Si es asíntota.}$$

$x = 0$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene pues tiene asíntota horizontal.

b) $\int f(x)dx = \int \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} dx = \dots$

Descomponemos en fracciones simples la fracción del integrando.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \\ \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} &= \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} \\ x^2 + 1 &= Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2 \\ x = 0 &\rightarrow 1 = B(-1) \rightarrow B = -1 \\ x = 1 &\rightarrow 2 = C \\ x = -1 &\rightarrow 2 = 2A - 2B + C \rightarrow 2 = 2A + 2 + 2 \rightarrow 2A = -2 \Rightarrow A = -1 \\ \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} &= \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dots &= \int \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-1} dx = -\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{2}{x-1} dx = \\
 &= -\int \frac{1}{x} dx - \int x^{-2} dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx = \\
 &= -\ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} + 2\ln|x-1| = \boxed{-\ln|x| + \ln(x-1)^2 + \frac{1}{x} + K}
 \end{aligned}$$

Si la primitiva debe pasar por el punto (2, 0) se cumple:

$$-\ln 2 + \ln(2-1)^2 + \frac{1}{2} + K = 0 \Rightarrow K = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

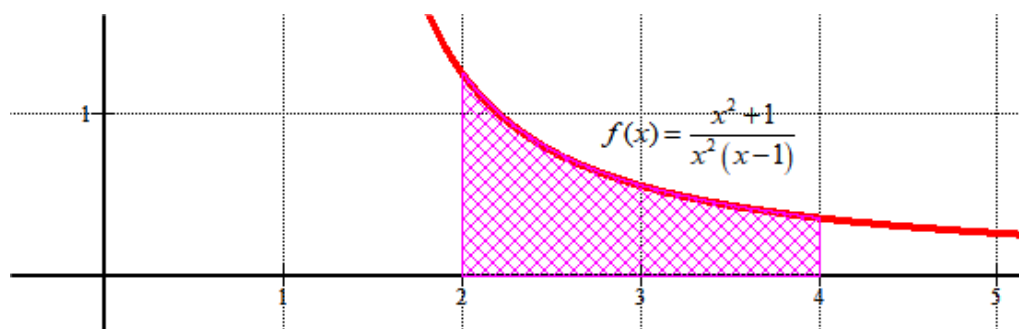
La primitiva buscada es
$$F(x) = -\ln x + \ln(x-1)^2 - \frac{1}{x} + \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln \frac{2(x-1)^2}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$$

c) La función $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$ no corta el eje de abscisas.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = 0 \Rightarrow x^2+1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{-1} = \text{No existe}$$

El área pedida es la integral definida de la función entre 2 y 4.

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_2^4 \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} dx = \left[-\ln|x| + \ln(x-1)^2 + \frac{1}{x} \right]_2^4 = \\
 &= \left[-\ln 4 + \ln(4-1)^2 + \frac{1}{4} \right] - \left[-\ln 2 + \ln(2-1)^2 + \frac{1}{2} \right] = \\
 &= -\ln 4 + \ln 9 + \frac{1}{4} + \ln 2 - \ln 1 - \frac{1}{2} = \ln \frac{18}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\ln \frac{9}{2} - \frac{1}{4} = 1.254 \text{ u}^2}
 \end{aligned}$$



Problema 4. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real b .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa. (3 puntos)
 b) Los valores de b para que la matriz $A^T A$ tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A . (3 puntos)
 c) La inversa de $A^T A$, cuando dicha inversa exista. (4 puntos)

a) Calculemos la expresión de ambas matrices:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & 0+2b & 2-2 \\ -b+0 & 0+0 & 2b-0 \\ 1-2 & 0+2b & -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0-2 & -2+0+4 \\ -1+b^2+1 & -2+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}$$

Para que AB tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|AB| = \begin{vmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{vmatrix} = -4b^2 - 8b^2 + 12b^2 = 0$$

No existe la inversa de AB , independientemente del valor de b .

Para que BA tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|BA| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 2b^2$$

$$12 - 2b^2 = 0 \Rightarrow 6 - b^2 = 0 \Rightarrow 6 = b^2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{6}$$

Para cualquier valor de b distinto $\pm\sqrt{6}$ existe la inversa de BA .

b) Calculamos la expresión de $A^T A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T A = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b^2+1 & 2+0-2 \\ 2+0-2 & 4+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Averiguamos si su determinante se puede anular.

$$|A^T A| = \begin{vmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 8(b^2+2)$$

$$|A^T A| = 0 \Rightarrow 8(b^2+2) = 0 \Rightarrow b^2+2 = 0 \Rightarrow b = \sqrt{-2} = \text{No existe}$$

El determinante de $A^T A$ nunca se anula. La inversa de $A^T A$ existe siempre.

c) La inversa existe para cualquier valor de b . La calculamos.

$$A^T A = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^T A)^T = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A^T A)^T)}{|A^T A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}{8(b^2+2)} = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix}}{8(b^2+2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Problema 5. Se dan el plano $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(2, 1, 0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A , B y es perpendicular a π . (4 puntos)

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A .

Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r . (1+2 puntos)

c) La distancia entre el punto B y la recta r . (3 puntos)

a) Si el plano π' pasa por A y por B tiene como uno de sus vectores directores el vector

$\vec{AB} = (2, 1, 0) - (1, 2, -1) = (1, -1, 1)$ y al ser perpendicular al plano $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ otro de sus vectores directores es el normal del plano $\pi: \vec{n} = (2, 1, -1)$.

$$\left. \begin{array}{l} B(2, 1, 0) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{AB} = (1, -1, 1) \\ \vec{v} = \vec{n} = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x - 2 + 2y - 2 + z + 2z + y - 1 - x + 2 = 0$$

$$3y + 3z - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv y + z - 1 = 0}$$

b) Si la recta es perpendicular al plano $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ tiene como vector director el normal del plano $\vec{v}_r = \vec{n} = (2, 1, -1)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, -1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ r \equiv y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{array}}$$

Ponemos la ecuación de la recta en forma continua:

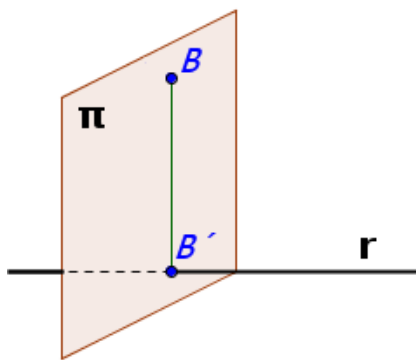
$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

Separamos esta ecuación en dos igualdades que nos proporcionan la ecuación de dos planos que se cortan en esta recta. Existen muchos pares de planos cuya intersección es la misma recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} \\ \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-1 = 2y-4 \\ -y+2 = z+1 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{r: \begin{cases} x-2y+3=0 \\ -y-z+1=0 \end{cases}}$$

Dos planos cuya intersección es la recta r pueden ser $\alpha: x - 2y + 3 = 0$ y $\beta: -y - z + 1 = 0$.

c) Para determinar la distancia de un punto B a una recta r seguimos el procedimiento descrito en el siguiente dibujo.



Como tenemos la ecuación del plano $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ y de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ hallamos el punto B' de corte de ambos y la distancia pedida es el módulo del vector $\overrightarrow{BB'}$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y - z - 5 = 0 \\ x = 1 + 2\lambda \\ r \equiv y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + 2 + \lambda + 1 + \lambda - 5 = 0 \Rightarrow 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow B'(1, 2, -1)$$

Hallamos las coordenadas del vector que une el punto B con el B' .

$$\overrightarrow{BB'} = (1, 2, -1) - (2, 1, 0) = (-1, 1, -1)$$

La distancia del punto B a la recta r es la distancia del punto B al B' .

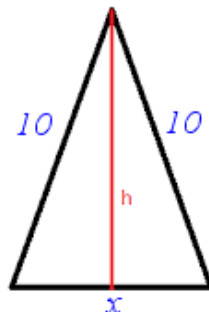
$$d(B, r) = d(B, B') = |\overrightarrow{BB'}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{3} u}$$

Problema 6. En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.

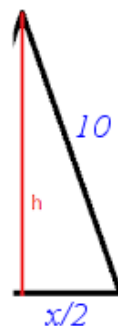
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado. (4 puntos)
 b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x)$, $0 \leq x \leq 20$. (4 puntos)
 c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área. (2 puntos)

a) La situación planteada es la del dibujo.



Considerando el triángulo rectángulo del dibujo:



Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$10^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow 100 = h^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow h^2 = 100 - \frac{x^2}{4} = \frac{400 - x^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{400 - x^2}{4}}$$

Así el área del triángulo es:

$$\text{Área}(x) = \frac{x \cdot h}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{\frac{400 - x^2}{4}}}{2} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{400 - x^2}}{2}}{2} = \frac{x\sqrt{400 - x^2}}{4}$$

b) Si los dos lados miden 10 cm el lado desigual debe medir entre 0 y 20 cm.

Derivamos la función área.

$$A(x) = \frac{x\sqrt{400 - x^2}}{4} = \frac{1}{4}x\sqrt{400 - x^2} \Rightarrow A'(x) = \frac{1}{4} \left[\sqrt{400 - x^2} + x \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{400 - x^2}} \right]$$

$$A'(x) = \frac{1}{4} \left[\frac{(\sqrt{400 - x^2})^2 - x^2}{\sqrt{400 - x^2}} \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{(400 - x^2) - x^2}{\sqrt{400 - x^2}} \right] = \frac{400 - 2x^2}{4\sqrt{400 - x^2}} = \frac{200 - x^2}{2\sqrt{400 - x^2}}$$

Igualamos a cero.

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{200 - x^2}{2\sqrt{400 - x^2}} = 0 \Rightarrow 200 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{200} \approx 14.14 \text{ cm}$$

Estudiamos el cambio de signo en el intervalo $[0, 20]$ de la derivada antes y después de $x = \sqrt{200}$.

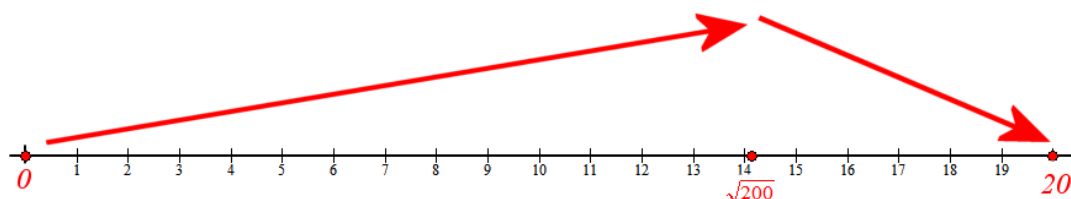
- En $(0, \sqrt{200})$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$A'(x) = \frac{200 - 10^2}{2\sqrt{400 - 10^2}} = \frac{100}{2\sqrt{300}} > 0. \text{ La función crece en } (0, \sqrt{200}).$$

- En $(\sqrt{200}, 20)$ tomamos $x = 15$ y la derivada vale

$$A'(x) = \frac{200 - 15^2}{2\sqrt{400 - 15^2}} = \frac{-25}{2\sqrt{175}} < 0. \text{ La función decrece en } (\sqrt{200}, 20).$$

La función sigue el esquema siguiente.



El área crece en el intervalo $(0, \sqrt{200})$ y decrece en $(\sqrt{200}, 20)$.

- c) Por el gráfico anterior se deduce que en $x = \sqrt{200}$ hay un máximo relativo del área del triángulo. Como el área para $x = 0$ es 0 y para $x = 20$ también es 0 el máximo relativo lo será absoluto. Dicho valor máximo es:

$$\text{Área}(\sqrt{200}) = \frac{\sqrt{200} \sqrt{400 - (\sqrt{200})^2}}{4} = \frac{\sqrt{200} \sqrt{400 - 200}}{4} = \frac{200}{4} = \boxed{50 \text{ cm}^2}$$

PAU Julio 2019 Matemáticas II



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2019	CONVOCATORIA: JULIO 2019
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

OPCIÓN A

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{cases}$$
, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 puntos)
- La solución del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 puntos)
- El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 puntos)

Problema A.2. Se da el plano $\pi: 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P = (10, 0, 10)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La distancia del punto P al plano π . (3 puntos)
- El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C , obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. (4 puntos)
- El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C . (3 puntos)

Problema A.3. Se da la función real h definida por $h(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- El dominio de la función h . Los límites $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$. (1 + 2 puntos)
- La asíntota de la curva $y = h(x)$. (2 puntos)
- La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x) dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$. (3 + 2 puntos)

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX = \alpha X$ solo admite una solución. (4 puntos)
- b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 5X$. (3 puntos)
- c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100} obtener el valor β tal que $A^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 puntos)

Problema B.2. Se dan en el espacio la recta $r: \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi: x + 2y + 3z = 6$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β . (5 puntos)
- b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$. (3 puntos)
- c) La ecuación del plano que pasa por $(0,0,0)$ y que no corta al plano π . (2 puntos)

Problema B.3. Un proyectil está unido al punto $(0, 2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2,0)$ y $(2,0)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0, 2)$. (2 puntos)
- b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \leq x \leq 2$. (2 puntos)
- c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$. (2 puntos)
- d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \leq x \leq 2$. (4 puntos)

Soluciones

OPCIÓN A

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{cases}$$
, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 puntos)
 b) La solución del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 puntos)
 c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 puntos)

a) La matriz de los coeficientes asociada al sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ con determinante } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 3 + 18 + 4 = -1 \neq 0$$

Al ser el determinante de A no nulo el rango de la matriz de coeficientes es siempre 3 al igual que el rango de la ampliada y el número de incógnitas. El sistema es siempre COMPATIBLE DETERMINADO.

b) Para $\alpha = -1$ el sistema es compatible determinado.

El sistema queda
$$\begin{cases} 2x + 3z = -1 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$$
. Lo resolvemos con la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{10 - 15 - 2}{-1} = 7 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{50 - 6 - 45 + 5}{-1} = -4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1 - 6 + 10}{-1} = -5$$

- c) Añadimos al sistema
$$\begin{cases} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{cases}$$
 una ecuación más $x + y + z = 0$ y averiguamos el valor de α .

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x + 3z = \alpha \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ \hline -2y + z = \alpha \end{cases} \begin{cases} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x - 2y + 2z = 5 \\ -x - y - z = 0 \\ \hline -3y + z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación } 4^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \\ -3x - 3y - 3z = 0 \\ \hline -4y + 2z = \alpha + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y + z = \alpha \\ -3y + z = 5 \\ -4y + 2z = \alpha + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot \text{Ecuación } 3^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ -6y + 2z = 10 \\ 6y - 3z = -3\alpha \\ \hline -z = -3\alpha + 10 \end{cases} \begin{cases} \text{Ecuación } 4^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ -4y + 2z = \alpha + 1 \\ 4y - 2z = -2\alpha \\ \hline 0 = -\alpha + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y + z = \alpha \\ -z = -3\alpha + 10 \\ 0 = -\alpha + 1 \end{cases}$$

Para que este sistema tenga solución debe cumplirse que la cuarta ecuación sea cierta, es decir,
 $0 = -\alpha + 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

Problema A.2. Se da el plano $\pi: 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P = (10, 0, 10)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) La distancia del punto P al plano π . (3 puntos)
 b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. (4 puntos)
 c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C. (3 puntos)

a) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left. \begin{array}{l} P(10, 0, 10) \\ \pi: 2x + y + 2z - 8 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Distancia}(P, \pi) = \frac{|20 + 0 + 20 - 8|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \boxed{\frac{32}{3} u}$$

b) Hallamos los puntos de intersección del plano π con cada uno de los ejes.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y + 2z = 8 \\ \text{eje OX} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y + 2z = 8 \\ \text{eje OY} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow y = 8 \Rightarrow B(0, 8, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y + 2z = 8 \\ \text{eje OZ} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow 2z = 8 \Rightarrow z = 4 \Rightarrow C(0, 0, 4)$$

El área del triángulo de vértices A, B y C es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores que unen A con B y A con C.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 8, 0) - (4, 0, 0) = (-4, 8, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, 4) - (4, 0, 0) = (-4, 0, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 32i + 32k + 16j = (32, 16, 32)$$

$$\text{Área triángulo ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{32^2 + 16^2 + 32^2}}{2} = \frac{48}{2} = \boxed{24 u^2}$$

c) El volumen del tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los vectores que unen uno de sus vértices con los demás.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 8, 0) - (4, 0, 0) = (-4, 8, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, 4) - (4, 0, 0) = (-4, 0, 4) \\ \overrightarrow{AP} = (10, 0, 10) - (4, 0, 0) = (6, 0, 10) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 10 \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 192 + 320 = 512$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{512}{6} = \boxed{85,33 u^3}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER c)

El área del tetraedro PABC es la tercera parte del producto del área de la base (el triángulo ABC) por la altura (distancia de P al plano definido por los puntos A, B y C).

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{\text{Área ABC} \cdot d(P, \pi)}{3} = \frac{24 \cdot \frac{32}{3}}{3} = \frac{256}{3} = \boxed{85,33 u^3}$$

Problema A.3. Se da la función real h definida por $h(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) El dominio de la función h . Los límites $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$. (1 + 2 puntos)
- b) La asíntota de la curva $y = h(x)$. (2 puntos)
- c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x)dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$. (3 + 2 puntos)

- a) El dominio de la función $h(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5}$ son todos los números reales salvo los que anulen el denominador.

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \text{No tiene solución}$$

El dominio es $\mathbb{R}$.

Calculamos los límites pedidos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = \boxed{\frac{-3}{5}}$$

- b) Esta curva no presenta asíntotas verticales, pues su dominio es $\mathbb{R}$. Tampoco presenta asíntotas horizontales, pues hemos visto que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = +\infty$. Solo nos queda averiguar si tiene asíntota oblicua.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^3 + 2x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^3} + x^2 + \cancel{5x} - 3 - \cancel{x^3} - 2x^2 - \cancel{5x}}{x^2 + 2x + 5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 3}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \end{aligned}$$

La asíntota oblicua es $\boxed{y = x - 1}$

- c) Determinamos la primitiva de la función h .

$$\int h(x)dx = \int \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} dx = \{\text{Realizamos la división}\}$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 \quad +x^2 \quad +5x \quad -3 \quad | \quad x^2+2x+5 \\
 -x^3 \quad -2x^2 \quad -5x \quad \quad \quad x \quad -1 \\
 \hline
 0 \quad -x^2 \quad 0 \quad -3 \\
 \quad \quad x^2 \quad 2x \quad 5 \\
 \hline
 0 \quad 2x \quad +2
 \end{array}$$

Seguimos calculando la integral.

$$\int h(x)dx = \int x - 1 + \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx = \int x dx - \int dx + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx = \boxed{\frac{x^2}{2} - x + \ln(x^2+2x+5) + C}$$

Para calcular el área pedida debemos comprobar si la función $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$ y la recta $y=0$ se cortan.

$$\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = 0 \Rightarrow x^3+x^2+5x-3=0 \Rightarrow$$

No es fácil resolver esta ecuación, por Ruffini no sale solución.

Comprobemos si cambia de signo en el intervalo $[1, 5]$.

x	$h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$
1	$\frac{4}{8} > 0$
2	$\frac{+}{+} > 0$
3	$\frac{+}{+} > 0$
4	$\frac{+}{+} > 0$
5	$\frac{+}{+} > 0$

La conclusión es que la función $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$ es siempre positiva en el intervalo $[1,5]$ y el área pedida es la integral definida de la función con límites de integración 1 y 5.

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_1^5 \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x^2+2x+5) \right]_1^5 = \\
 &= \left[\frac{5^2}{2} - 5 + \ln(5^2+10+5) \right] - \left[\frac{1^2}{2} - 1 + \ln(1^2+2+5) \right] = \\
 &= \frac{15}{2} + \ln 40 + \frac{1}{2} - \ln 8 = \boxed{8 + \ln 5 u^2}
 \end{aligned}$$

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX = \alpha X$ solo admite una solución. (4 puntos)
- b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 5X$. (3 puntos)
- c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100} obtener el valor β tal que $A^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 puntos)

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones a partir de la ecuación matricial.

$$AX = \alpha X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+4y \\ -x+6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+4y = \alpha x \\ -x+6y = \alpha y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\alpha)x + 4y = 0 \\ -x + (6-\alpha)y = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene solución única si el determinante de la matriz de los coeficientes es no nula.

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{vmatrix} = 6 - \alpha - 6\alpha + \alpha^2 + 4 = \alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0$$

$$\alpha = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \alpha = \frac{7+3}{2} = 5 \\ \alpha = \frac{7-3}{2} = 2 \end{cases}$$

Tiene solución única cuando es $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 5$.

b) Resolvemos la ecuación matricial que sabemos tendrá infinitas soluciones.

$$AX = 5X \Rightarrow \begin{cases} (1-5)x + 4y = 0 \\ -x + (6-5)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow x = y$$

Las soluciones son $X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$, para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$

$$c) AX = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ -4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2X. X \text{ es solución de la ecuación.}$$

Multiplicamos por la matriz A la ecuación $AX = 2X$

$$AX = 2X \Rightarrow AAX = A2X \Rightarrow A^2X = 2AX = 2 \cdot 2X = 2^2X \Rightarrow A^2X = 2^2X$$

Multiplico por la matriz A de nuevo.

$$AA^2X = A2^2X \Rightarrow A^3X = 2^2AX = 2^22X = 2^3X \Rightarrow A^3X = 2^3X$$

Repitiendo esta operación las veces necesarias se llegaría a la igualdad:

$$A^{100}X = 2^{100}X, \text{ por lo que el valor de } \beta \text{ es } 2^{100}.$$

Problema B.2. Se dan en el espacio la recta $r: \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi: x+2y+3z=6$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β . (5 puntos)
- b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$. (3 puntos)
- c) La ecuación del plano que pasa por $(0,0,0)$ y que no corta al plano π . (2 puntos)

- a) La posición relativa de plano y recta depende, inicialmente, del vector normal del plano $\vec{n} = (1, 2, 3)$ y el director de la recta $\vec{v}_r = (-1, -4, \beta)$.

Calculamos su producto escalar, si este es cero los vectores son perpendiculares y por tanto plano y recta son paralelos o la recta está contenida en el plano, si es distinto de cero son secantes.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (-1, -4, \beta) \cdot (1, 2, 3) = -1 - 8 + 3\beta = 0 \Rightarrow \beta = 3$$

Si $\beta \neq 3$ el producto escalar es no nulo y plano y recta son SECANTES. Se cortan en un punto.

Si $\beta = 3$ el producto escalar es nulo y debemos ver si son paralelos o la recta está contenida en el plano. Para ello comprobamos si el punto $P_r(\alpha, 0, 0)$ de la recta está contenida en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(\alpha, 0, 0) \in \pi \\ \pi: x+2y+3z=6 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + 0 + 0 = 6 \Rightarrow \alpha = 6$$

Hay dos posibilidades:

Siendo $\beta = 3$, si $\alpha = 6$ la recta está contenida en el plano. Si $\alpha \neq 6$ la recta es paralela al plano.

- b) Cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$ hemos visto que la recta está contenida en el plano y por tanto la distancia es 0.
- c) Para que un plano no corte a otro deben de ser paralelos y por tanto deben tener el mismo vector normal. El plano $\pi: x+2y+3z=6$ tiene vector normal $\vec{n} = (1, 2, 3)$, por lo que el plano pedido tiene vector normal $\vec{n} = (1, 2, 3)$ y pasa por el punto $(0,0,0)$.

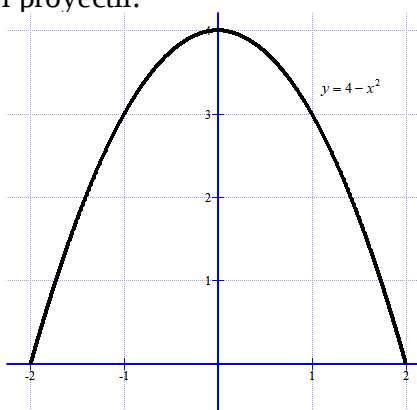
$$\left. \begin{array}{l} \pi': x+2y+3z+D=0 \\ \text{Pasa por } (0,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow 0+0+0+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow \boxed{\pi': x+2y+3z=0}$$

Problema B.3. Un proyectil está unido al punto $(0, 2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

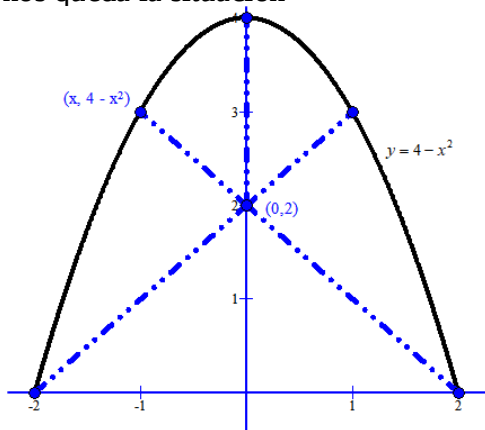
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0, 2)$. (2 puntos)
- Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$. (2 puntos)
- Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$. (2 puntos)
- El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \leq x \leq 2$. (4 puntos)

a) Dibujamos la trayectoria del proyectil:



Le añadimos la cuerda y nos queda la situación



Expresemos la distancia del punto $(0, 2)$ a uno cualquiera de la gráfica $(x, 4 - x^2)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{distancia}((0, 2), (x, 4 - x^2)) = \sqrt{(x - 0)^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 4 + x^4 - 4x^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \end{aligned}$$

b) Hallamos el máximo de $f(x)$ usando la derivada.

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}$$

Igualemos a cero la derivada

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 3x = 0 \Rightarrow$$

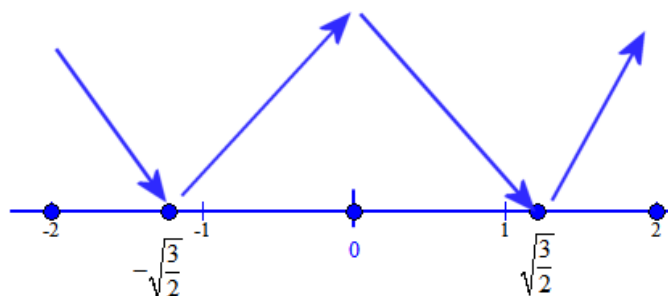
$$x(2x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm 1,22 \end{cases}$$

Veamos que ocurre en los intervalos en que se divide el intervalo $[-2, 2]$.

- En $\left[-2, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ tomamos el valor $x = -1,5$. La derivada vale

$$f'(-1,5) = \frac{2(-1,5)^3 - 3(-1,5)}{\sqrt{(-1,5)^4 - 3(-1,5)^2 + 4}} = \frac{-2,25}{+} < 0. \text{ La función decrece.}$$
- En $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$ tomamos $x = -1 \rightarrow f'(-1) = \frac{2(-1)^3 - 3(-1)}{\sqrt{(-1)^4 - 3(-1)^2 + 4}} = \frac{1}{+} > 0. \text{ La función crece.}$
- En $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ tomamos $x = 1 \rightarrow f'(1) = \frac{2(1)^3 - 3(1)}{\sqrt{(1)^4 - 3(1)^2 + 4}} = \frac{-1}{+} < 0. \text{ La función decrece.}$
- En $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 2\right]$ tomamos $x = 1,5 \rightarrow f'(1,5) = \frac{2(1,5)^3 - 3(1,5)}{\sqrt{(-1,5)^4 - 3(-1,5)^2 + 4}} = \frac{2,25}{+} > 0. \text{ La función crece.}$

El esquema que representa el crecimiento y decrecimiento de la función es:



La máxima distancia estaría en $x = 0$ (máximo local) o en los extremos $x = -2$ o en $x = 2$. En el dibujo inicial se aprecia que la distancia es mayor en $x = 2$ y en $x = -2$, comprobémoslo.

$$f(-2) = \sqrt{(-2)^4 - 3(-2)^2 + 4} = \sqrt{16 - 12 + 4} = \sqrt{8}$$

$$f(0) = \sqrt{0^4 - 3(0)^2 + 4} = \sqrt{4}$$

$$f(2) = \sqrt{(2)^4 - 3(2)^2 + 4} = \sqrt{16 - 12 + 4} = \sqrt{8}$$

La máxima distancia se produce en los puntos $(2,0)$ y en $(-2,0)$.

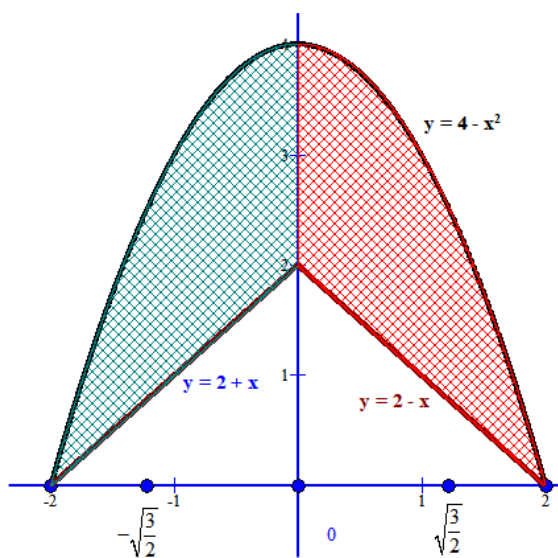
- c) La mínima distancia se produce en $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ y en $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ como se ha comprobado en el apartado anterior.

Como $y(-\sqrt{\frac{3}{2}}) = 4 - \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$; $y(\sqrt{\frac{3}{2}}) = 4 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

Los puntos son $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$

d) Dibujamos la región de la cual queremos hallar el área.

La función $y = 2 - |x| = \begin{cases} 2+x & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2-x & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$. Por lo que dividimos el recinto en dos partes.



$$\text{Área} = \int_{-2}^0 4 - x^2 - (2 + x) dx + \int_0^2 4 - x^2 - (2 - x) dx =$$

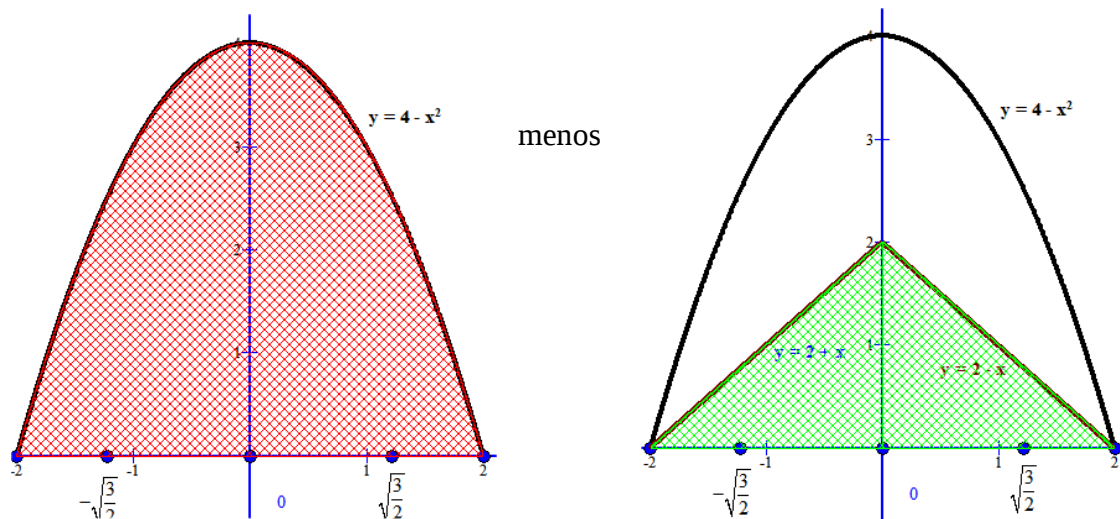
$$= \int_{-2}^0 2 - x^2 - x dx + \int_0^2 2 - x^2 + x dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 + \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 =$$

$$= \left[2 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} \right] - \left[2(-2) - \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} \right] + \left[2(2) - \frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} \right] - \left[2 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} \right] =$$

$$= 4 - \frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{8}{3} + 2 = 12 - \frac{16}{3} = \frac{36-16}{3} = \boxed{\frac{20}{3} u^2}$$

OTRA FORMA DE HACERLO.

Aprovechando la simetría y sencillez de la figura



El área primera la calculamos con una integral definida y la segunda con la fórmula del área de un triángulo de base 4 y altura 2.

Área bajo la parábola es:

$$\int_{-2}^2 4 - x^2 dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left[4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right] - \left[4(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right] = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3}$$

El área del triángulo es $\text{Área} = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$

El área pedida es $16 - \frac{16}{3} - 4 = 12 - \frac{16}{3} = \boxed{\frac{20}{3} u^2}$

PAU Junio 2019 Matemáticas II



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2019	CONVOCATORIA: JUNIO 2019
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

OPCIÓN A

Problema A.1. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a , y una

matriz B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a=1$. (2+2 puntos)

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a=-1$ (3 puntos)

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$. (3 puntos)

Problema A.2. Consideremos en el espacio las rectas $r: \begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$ y $s: x=y+1=\frac{z-2}{2}$

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s . (3 puntos)

b) La recta que pasa por $P(0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r . (4 puntos)

c) El valor que deben tener los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x-2y+az=b$. (3 puntos)

Problema A.3. Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. (3 puntos)

b) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$. (2 puntos)

c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$. (1 punto)

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)dx$, $\int xe^{-x}dx$. (4 puntos)

OPCIÓN B

Problema B.1. Se da el sistema
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = a \end{cases}$$
, donde a es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores de a para los que el sistema es compatible y los valores de a para los que el sistema es incompatible. (4 puntos)
- b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. (4 puntos)
- c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. (2 puntos)

Problema B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π . (4 puntos)
- b) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 puntos)
- c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C. (2 puntos)

Problema B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0,0) y (250,0), respectivamente, siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1,0) y (0,1). El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$

con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse. (2 puntos)
- b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto. (4 puntos)
- c) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su recorrido y el valor de dicha distancia. (4 puntos)

Soluciones

Problema A.1. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a , y una

matriz B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a=1$. (2+2 puntos)

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$ (3 puntos)

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$. (3 puntos)

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = a(a+1) + 0 - 2a(a-1) - [-3a(a+1) + 0 + 2(a-1)] = \\ &= a^2 + a - 2a^2 + 2a - [-3a^2 - 3a + 2a - 2] = -a^2 + a + 2a - [-3a^2 - a - 2] = \\ &= -a^2 + a + 2a + 3a^2 + a + 2 = 2a^2 + 4a + 2 \\ |A| = 0 &\Rightarrow 2a^2 + 4a + 2 = 0 \\ \text{Simplificando} &\Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

Caso 1. Si $a \neq -1$.

$|A| \neq 0$ y por tanto rango de A es 3.

Caso 2. Si $a = -1$.

$|A| = 0$. El rango de A no es 3, debe ser menor. La matriz A queda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

De la cual podemos extraer un menor de orden 2 no nulo, como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

El rango de A es 2

Además, piden el cálculo del determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a=1$.

Si $a = 1$ entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tenemos dos formas de proceder: La primera es aplicando propiedades de los determinantes y la segunda es calculando el valor de la matriz $2A^{-1}$ y averiguar el valor de su determinante.

La primera vía:

$2A^{-1}$ es una matriz 3×3 , luego $|2A^{-1}| = 2^3 |A^{-1}| = 8 \cdot \frac{1}{|A|} = \frac{8}{2a^2 + 4a + 2} = \frac{8}{2 + 4 + 2} = \frac{8}{8} = 1$

La segunda vía:

Como $|A| = 2a^2 + 4a + 2 = 8 \neq 0$ podemos calcular la inversa de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{8} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Así tenemos que $2A^{-1} = 2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Su determinante vale $|2A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3/2 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + 0 + 0 - \left[-\frac{3}{4} + 0 + 0 \right] = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

b) Si $a = -1$ entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Cuando $a = -1$ la ecuación: $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ queda $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tenemos dos formas diferentes de resolver este sistema: La primera es multiplicando las matrices y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante y la segunda es hallando la inversa de

la matriz A y la solución sería $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

La primera vía:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x - z \\ -2x + 2z \\ -3x - 2y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - z = -1 \\ -2x + 2z = 2 \\ -3x - 2y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = z - 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2(z - 1) + 2z = 2 \\ -3(z - 1) - 2y - z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} -2z + 2 + 2z = 2 \\ -3z + 3 - 2y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2z + 2 + 2z = 2 \\ -3z + 3 - 2y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 = 2 \\ -2y - 4z = -3 \end{array} \right\}$$

$$-2y = 4z - 3 \Rightarrow y = \frac{4z - 3}{-2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = z - 1 \\ y = \frac{4z - 3}{-2} \\ z = z \end{array} \right\} \text{ La solución es } \left. \begin{array}{l} x = z - 1 \\ y = \frac{4z - 3}{-2} \\ z = z \end{array} \right\}$$

La segunda vía:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0 + 0 - 4 - [0 + 0 - 4] = 0$$

Esta segunda vía no es posible, ya que no podemos calcular la inversa de A.

c) Tenemos que la matriz B es de orden 3x3 y además $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$.

$$\text{Si juntamos las matrices B: } B^2 + 2B = \frac{1}{3}I$$

$$\text{Si multiplicamos por 3: } 3B^2 + 6B = \frac{3}{3}I \Rightarrow 3B^2 + 6B = I$$

$$\text{Sacando factor común: } 3B^2 + 6B = I \Rightarrow B(3B + 6I) = I$$

$$\text{Y por definición de la matriz inversa tenemos que } B^{-1} = 3B + 6I.$$

Los valores buscados son m = 3 y n = 6.

Problema A.2. Consideremos en el espacio las rectas $r: \begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$ y $s: x=y+1=\frac{z-2}{2}$

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s . (3 puntos)
 b) La recta que pasa por $P(0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r . (4 puntos)
 c) El valor que deben tener los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x-2y+az=b$. (3 puntos)

- a) Estudiemos la posición relativa de ambas rectas. Para ello determinamos sus vectores directores y algún punto de r y s .

$$r: \begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=y-3 \\ 2x=z-3 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=y-3 \\ x=\frac{z-3}{2} \end{cases} \Rightarrow r: x=y-3=\frac{z-3}{2}$$

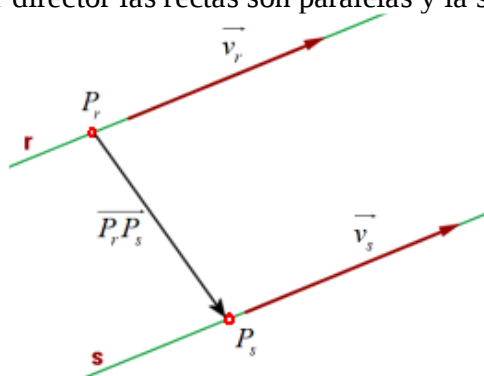
$$r: \frac{x-0}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{2}$$

La recta r tiene como vector director $\vec{v}_r = (1, 1, 2)$ y pasa por el punto $P_r(0, 3, 3)$

La recta $s: x=y+1=\frac{z-2}{2}$ es de la forma $s: \frac{x-0}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$

Tiene como vector director $\vec{v}_s = (1, 1, 2)$ y pasa por el punto $P_s(0, -1, 2)$

Como tienen el mismo vector director las rectas son paralelas y la situación es:

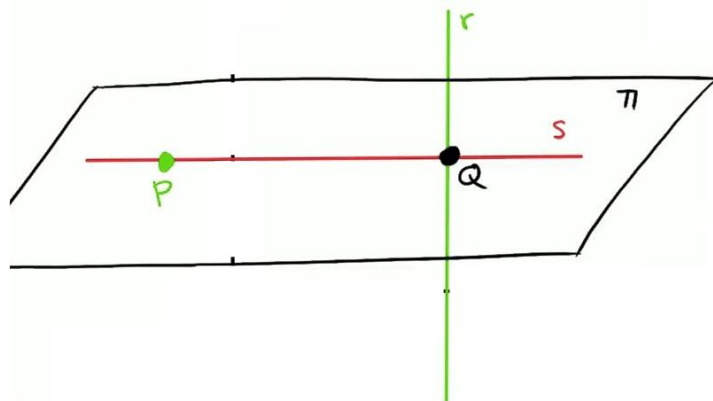


Por tanto, el plano que las contiene tiene como vectores directores $\vec{v}_s = \vec{v}_r = (1, 1, 2)$ y el vector $\overrightarrow{P_r P_s} = (0, -1, 2) - (0, 3, 3) = (0, -4, -1)$ y pasa por el punto $P_r(0, 3, 3)$. Su ecuación es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-3 & z-3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: -x+0-4(z-3)-[0-y+3-8x]=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: -x-4z+12+y-3+8x=0 \Rightarrow \pi: 7x+y-4z+9=0$$

- b) Para determinar la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r empezamos hallando el plano perpendicular a r y que pasa por P .



Este plano tiene como vector normal el director de la recta $\vec{v}_r = (1, 1, 2)$, así el plano tiene ecuación $\pi: x + y + 2z + D = 0$. Como pasa por P tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + y + 2z + D = 0 \\ P(0, -1, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 0 - 1 + 2 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow 3 + D = 0 \Rightarrow D = -3$$

El plano es $\pi: x + y + 2z - 3 = 0$.

Hallamos el punto Q de corte del plano $\pi: x + y + 2z - 3 = 0$ con la recta $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + 3 = 0 \rightarrow x = y - 3 \\ 2x - z + 3 = 0 \\ x + y + 2z - 3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(y - 3) - z + 3 = 0 \\ y - 3 + y + 2z - 3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2y - z - 3 = 0 \\ 2y + 2z - 6 = 0 \end{array} \right.$$

Cambiamos el signo a la segunda ecuación y las sumamos.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y - z - 3 = 0 \\ -2y - 2z + 6 = 0 \Rightarrow -3z = -3 \Rightarrow z = 1 \\ \hline 0 \quad -3z + 3 = 0 \end{array} \right.$$

Sustituyendo en $2y - z - 3 = 0 \Rightarrow 2y - 1 - 3 = 0 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2$

Volviendo a sustituir en $x = y - 3 \Rightarrow x = 2 - 3 = -1$

El punto de corte de la recta r y el plano π tiene coordenadas $Q(-1, 2, 1)$.

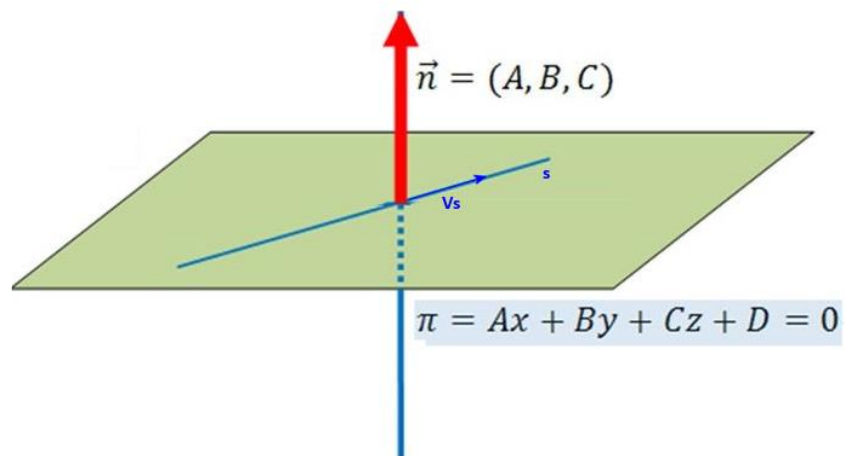
La recta t que se nos pide hallar es la que pasa por $P(0, -1, 2)$ y $Q(-1, 2, 1)$. Tiene como vector director $\overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 1) - (0, -1, 2) = (-1, 3, -1)$, su ecuación es:

$$\left. \begin{array}{l} P(0, -1, 2) \\ \overrightarrow{PQ} = (-1, 3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow t: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$$

c) Para que la recta $s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ esté contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$ deben de ocurrir dos cosas:

El punto $P(0, -1, 2)$ de la recta s debe estar en el plano y el vector director de la recta

$\vec{v}_s = (1, 1, 2)$ debe ser perpendicular al normal del plano.



Primero:

$$\left. \begin{array}{l} P(0, -1, 2) \text{ pertenece a } \pi \\ \pi : x - 2y + az = b \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 2 + 2a = b \Rightarrow b = 2a + 2$$

Segundo:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 1, 2) \\ \vec{n} = (1, -2, a) \\ \vec{v}_s \perp \vec{n} \rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1, 1, 2) \cdot (1, -2, a) = 0 \Rightarrow 1 - 2 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo en la primera ecuación tenemos: $b = 2a + 2 \Rightarrow b = 1 + 2 = 3$

Los valores pedidos son $a = 0.5$ y $b = 3$.

Problema A.3. Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

- Las asíntotas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. (3 puntos)
- La representación gráfica de la curva $y = f(x)$. (2 puntos)
- El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$. (1 punto)
- El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)dx$, $\int xe^{-x}dx$. (4 puntos)

- a) El dominio de la función $f(x) = xe^{-x^2} = \frac{x}{e^{x^2}}$ es $\mathbb{R}$. No presenta discontinuidades.

Asíntota vertical: La función no presenta al no anularse el denominador.

Asíntota horizontal: calculamos su límite cuando x tiende a infinito y a menos infinito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (Regla de L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x^2} \cdot 2x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (Regla de L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{x^2} \cdot 2x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$

Asíntota oblicua: Como tenemos asíntota horizontal no puede haber oblicua.

Para estudiar el crecimiento determino la expresión de la derivada.

$$f(x) = xe^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = 1e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$$

La igualamos a cero:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1-2x^2)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-2x^2 = 0 \Rightarrow 1 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm 0,707 \\ 0 \\ e^{-x^2} = 0; \text{ Esto no es posible} \end{cases}$$

Situando estos puntos críticos sobre la recta real y valorando la derivada antes del menor, entre ellos y después del mayor, podremos determinar el comportamiento de la función.

- En el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ tomamos el punto -1 y calculamos

$$f'(-1) = (1-2(-1)^2)e^{-(-1)^2} = (-1)e^{-1} = -\frac{1}{e} < 0. \text{ En este intervalo la función decrece.}$$

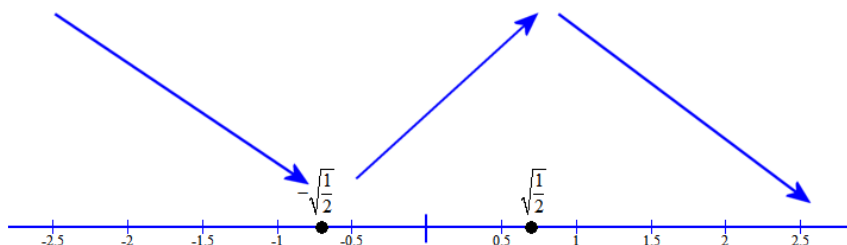
- En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, +\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ tomamos el punto 0 y calculamos

$$f'(0) = (1-2 \cdot 0^2)e^{-0^2} = (1)e^0 = 1 > 0. \text{ En este intervalo la función crece.}$$

- En el intervalo $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ tomamos el punto +1 y calculamos

$$f'(1) = (1 - 2 \cdot 1^2) e^{-1^2} = (-1) e^{-1} = -\frac{1}{e} < 0. \text{ En este intervalo la función decrece.}$$

La función sigue el esquema del dibujo siguiente.



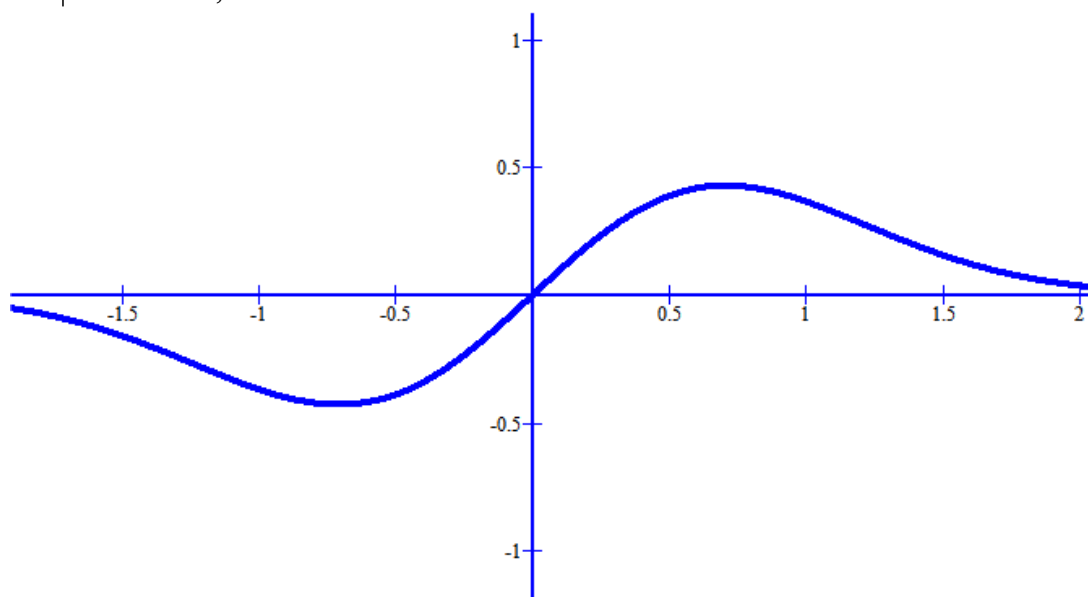
La función presenta un mínimo en $x = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -0,707$ y un máximo en $x = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$.

Decrece en los intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$. Crece en el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

b) Realicemos una tabla para hacer su representación gráfica:

x	$y = xe^{-x^2}$
-2	$-2/e^4 = -0,036$
-1	$-1/e = -0,36$
0	0
1	$1/e = 0,36$
2	$2/e^4 = 0,036$

y utilizando los datos de las asíntotas y máximos y mínimos obtenidos



c) La función queda $g(x) = f(x) + ax = xe^{-x^2} + ax$

Esta función es continua en el intervalo $[0,1]$ al ser suma de funciones continuas, es derivable al ser suma de funciones derivables y la tercera condición para aplicar el teorema de Rolle es que

$$g(0) = g(1) \Rightarrow 0 \cdot e^{-0^2} + a \cdot 0 = 1 \cdot e^{-1^2} + a \cdot 1 \Rightarrow 0 = e^{-1} + a \Rightarrow a = -\frac{1}{e}.$$

Para $a = -\frac{1}{e}$ la función $g(x)$ cumple las condiciones para poder aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$.

d) La primera integral es inmediata $\int f(x)dx = \int xe^{-x^2}dx = \frac{1}{-2} \int -2xe^{-x^2}dx = \frac{1}{-2} e^{-x^2} + C$

Para el cálculo de la segunda integral utilizamos el método de integración por partes.

$$\int xe^{-x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = x \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x}dx =$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

Problema B.1. Se da el sistema
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = a \end{cases}$$
, donde a es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores de a para los que el sistema es compatible y los valores de a para los que el sistema es incompatible. (4 puntos)
- b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. (4 puntos)
- c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. (2 puntos)

a) Estudiamos la compatibilidad del sistema
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = a \end{cases}$$
 en función del parámetro a .

La matriz ampliada asociada es
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & a \end{array} \right)$$

Utilizando el método de Gauss:

$$\text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \rightarrow \begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -3 & -12 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 7 & 9 & 11 & a \end{array}$$

$$\text{Fila } 3^a - 7 \cdot \text{Fila } 1^a \rightarrow \begin{array}{ccc|c} -7 & -7 & -7 & -28 \\ 7 & 9 & 11 & a \\ 0 & 2 & 4 & -28 + a \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -28 + a \end{array}$$

$$\text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -4 & 14 \\ 0 & 2 & 4 & -28 + a \\ 0 & 0 & 0 & -14 + a \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -14 + a \end{array}$$

El sistema triangular equivalente al inicial es:
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + 2z = -7 \\ 0 = -14 + a \end{cases}$$

Este sistema solo es compatible si $-14 + a = 0$, es decir $a = 14$.

Caso 1. $a = 14$.

El sistema queda
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + 2z = -7 \\ 0 = 0 \end{cases}$$
. Este sistema es **compatible** indeterminado
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + 2z = -7 \end{cases}$$

Caso 2. $a \neq 14$.

El sistema triangular equivalente al inicial es:
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + 2z = -7 \\ 0 = -14 + a \end{cases}$$
 La tercera ecuación es una igualdad imposible y por tanto el sistema es **incompatible**.

Utilizando los rangos

La matriz ampliada asociada es
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & a \end{array} \right)$$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$ y su determinante vale

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} = 44 + 35 + 27 - (28 + 33 + 45) = 106 - 106 = 0$$

El rango de la matriz A no es 3. Su rango es 2 ya que hay un menor de orden 2 no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$$

Y la matriz ampliada asociada al sistema es $Am = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & a \end{array} \right)$. Si consideramos el menor de

orden 3 formado por la 2ª, 3ª y 4ª columna obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \\ 9 & 11 & a \end{vmatrix} = 5a + 45 + 176 - (180 + 4a + 55) = 5a + 221 - 235 - 4a = a - 14$$

Iguálándolo a cero $\rightarrow a - 14 = 0 \rightarrow a = 14$, nos surgen dos posibilidades:

Caso 1. $a = 14$. Rango de A = 2 y rango de Am = 2 < nº de incógnitas=3. El sistema es compatible indeterminado.

Caso 2. $a \neq 14$. Rango de A = 2 y rango de Am = 3. Como son distintos el sistema es incompatible.

b) El sistema es compatible cuando $a = 14$. Queda de la forma:
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = 14 \end{cases}$$

que aplicando el método de Gauss como ya se ha hecho nos queda un sistema que resolvemos.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + 2z = -7 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y = -2z - 7 \end{cases} \Rightarrow x - 2z - 7 + z = 4 \Rightarrow x = z + 11$$

$$\left. \begin{array}{l} x = z + 11 \\ y = -2z - 7 \\ z = z \end{array} \right\}$$

Las soluciones son

c) Si vamos a sustituir 11 por cualquier otro valor pasamos a un parámetro b . Así queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + bz = a \end{array} \right.$$

En este caso el determinante de la matriz de los coeficientes queda dependiente de dicho valor:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & b \end{vmatrix} = 4b + 35 + 27 - (28 + 3b + 45) = b - 11$$

Igualándolo a cero, nos salen dos casos distintos:

Caso 1. $b = 11$.

Ya estudiado en los apartados anteriores

Caso 2. $b \neq 11$

Rango de A es 3, el rango de la ampliada también es 3 igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

Problema B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π . (4 puntos)
 b) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 puntos)
 c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C. (2 puntos)

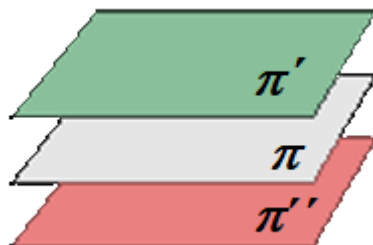
- a) Un plano paralelo a $\pi: 9x + 12y + 20z - 180 = 0$ tiene el mismo vector normal y su ecuación sería $\pi': 9x + 12y + 20z + D = 0$. Al ser paralelos la distancia entre ellos es la distancia de un punto de ellos al otro plano. Tomamos un punto de π , por ejemplo, tomamos el valor $x = 0$ e $y = 0$ por lo que queda $20z = 180 \Rightarrow z = 9$. Un punto de π es $P(0, 0, 9)$ y la distancia al plano paralelo π' es:

$$\begin{aligned} \text{Distancia}(\pi, \pi') &= \text{Distancia}(P, \pi') = \frac{|9 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 20 \cdot 9 + D|}{\sqrt{9^2 + 12^2 + 20^2}} = \\ &= \frac{|180 + D|}{\sqrt{81 + 144 + 400}} = \frac{|180 + D|}{\sqrt{625}} = \frac{|180 + D|}{25} \end{aligned}$$

Como debe ser 4, se cumple:

$$\frac{|180 + D|}{25} = 4 \Rightarrow |180 + D| = 100 \Rightarrow \begin{cases} 180 + D = 100 \Rightarrow D = -80 \\ 180 + D = -100 \Rightarrow D = -280 \end{cases}$$

Las ecuaciones de los dos planos pedidos son:



$$\pi': 9x + 12y + 20z - 80 = 0 \quad \text{y} \quad \pi'': 9x + 12y + 20z - 280 = 0$$

- b) El eje OX tiene ecuación $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, el OY tiene ecuación $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el OZ tiene ecuación $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Los puntos de corte se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes:

Punto de corte de π con eje OX:

$$\begin{cases} 9x + 12y + 20z - 180 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 9x + 0 + 0 - 180 = 0 \Rightarrow 9x = 180 \Rightarrow x = 20 \quad \text{El punto es } A(20, 0, 0)$$

Punto de corte de π con eje OY:

$$\begin{cases} 9x + 12y + 20z - 180 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + 12y + 0 - 180 = 0 \Rightarrow 12y = 180 \Rightarrow y = 15 \text{ El punto es } B(0,15,0)$$

Punto de corte de π con eje OZ:

$$\begin{cases} 9x + 12y + 20z - 180 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + 0 + 20z - 180 = 0 \Rightarrow 20z = 180 \Rightarrow z = 9 \text{ El punto es } C(0,0,9)$$

Los vectores pedidos tienen coordenadas $\overrightarrow{AB} = (0,15,0) - (20,0,0) = (-20,15,0)$ y

$\overrightarrow{AC} = (0,0,9) - (20,0,0) = (-20,0,9)$.

El ángulo entre ellos se obtiene con la fórmula del producto escalar.

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-20,15,0) \cdot (-20,0,9)}{\sqrt{20^2 + 15^2} \cdot \sqrt{20^2 + 9^2}} = \frac{400}{25\sqrt{481}}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arccos\left(\frac{400}{25\sqrt{481}}\right) = 43,15^\circ$$

- c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C se obtiene por la fórmula del producto mixto. Previamente calculamos los vectores $\overrightarrow{OA} = (20,0,0)$, $\overrightarrow{OB} = (0,15,0)$ y $\overrightarrow{OC} = (0,0,9)$.

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]}{6} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \frac{20 \cdot 15 \cdot 9}{6} = 450 u^3$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Como O es el origen de coordenadas y los puntos A, B y C están en los ejes de coordenadas el ángulo que forman las aristas OA, OB y OC es de 90° . El volumen del tetraedro que determinan los cuatro puntos es la sexta parte del producto de las distancias de O a cada uno de los otros puntos.

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{20 \cdot 15 \cdot 9}{6} = 450 u^3$$

Problema B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0,0) y (250,0), respectivamente, siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1,0) y (0,1). El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$

con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

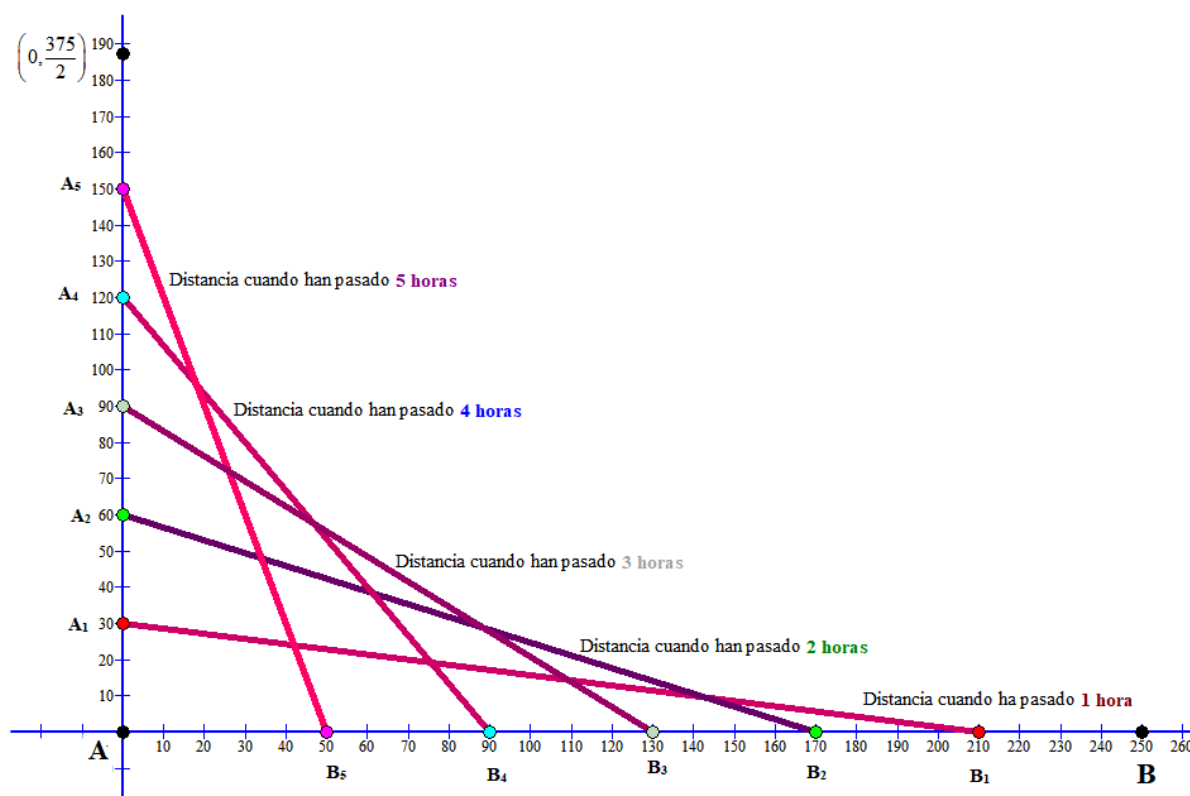
- La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse. (2 puntos)
- El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto. (4 puntos)
- Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su recorrido y el valor de dicha distancia. (4 puntos)

a) La posición del punto B al pasar 1 hora es $B_1(250 - 40, 0)$.

La posición del punto B al pasar t horas es $B_t(250 - 40t, 0)$.

La posición del punto A al pasar 1 hora es $A_1(0, 30)$.

La posición del punto A al pasar t horas es $A_t(0, 30t)$.



La distancia entre los puntos al pasar t horas es el módulo del vector que los une:

$$\overrightarrow{A_t B_t} = (250 - 40t, 0) - (0, 30t) = (250 - 40t, -30t)$$

$$|\overrightarrow{A_t B_t}| = \sqrt{(250 - 40t)^2 + (-30t)^2} = \sqrt{62500 + 1600t^2 - 20000t + 900t^2} =$$

$$= \sqrt{2500t^2 - 20000t + 62500} = \sqrt{100(25t^2 - 200t + 625)} =$$

$$= \sqrt{2500(t^2 - 8t + 25)} = 50\sqrt{t^2 - 8t + 25}$$

La función que expresa la distancia entre los dos puntos es $f(t) = 50\sqrt{t^2 - 8t + 25}$

b) El móvil A cuando pasan t horas tiene posición $A_t(0, 30t)$. Llega a $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ cuando

$$\frac{375}{2} = 30T \Rightarrow 375 = 60T \Rightarrow T = \frac{375}{60} = 6 + \frac{15}{60} = 6 \text{ horas y cuarto}$$

El móvil B cuando pasan t horas tiene posición $B_t(250 - 40t, 0)$. Llega a $(0, 0)$ cuando

$$250 - 40T = 0 \Rightarrow 40T = 250 \Rightarrow T = \frac{250}{40} = 6 + \frac{10}{40} = 6 + \frac{1}{4} = 6 \text{ horas y cuarto}$$

La función $f(t)$ está definida de 0 a 6.25 h.

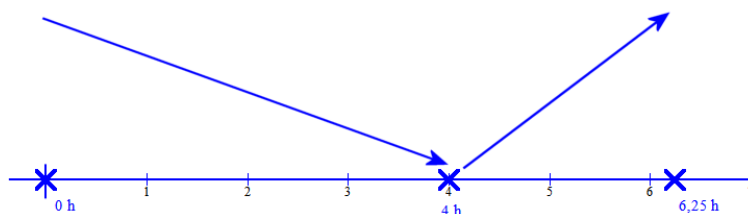
Estudiamos su variación. Para ello utilizamos la derivada:

$$f(t) = 50\sqrt{t^2 - 8t + 25} \Rightarrow f'(t) = 50 \frac{2t - 8}{2\sqrt{t^2 - 8t + 25}} = \frac{100t - 400}{2\sqrt{t^2 - 8t + 25}} = \frac{50t - 200}{\sqrt{t^2 - 8t + 25}}$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow \frac{50t - 200}{\sqrt{t^2 - 8t + 25}} = 0 \Rightarrow 50t - 200 = 0 \Rightarrow t = \frac{200}{50} = 4 \text{ h}$$

Veamos que ocurre antes, entre y después del punto crítico que exista a las 4 horas.

- En $(0, 4)$ tomamos el valor 2 y $f'(2) = \frac{50 \cdot 2 - 200}{\sqrt{2^2 - 8 \cdot 2 + 25}} = \frac{-100}{\sqrt{13}} < 0$. La función decrece.
- En $(4, 6.25)$ tomamos el valor 5 y $f'(5) = \frac{50 \cdot 5 - 200}{\sqrt{5^2 - 8 \cdot 5 + 25}} = \frac{50}{\sqrt{10}} > 0$. La función crece.



La función decrece de 0 a 4 horas y crece de 4 a 6.25 horas

c) Utilizamos el esquema anterior.

La distancia es mínima en $t = 4$ horas y esa distancia es:

$$f(4) = 50\sqrt{4^2 - 8 \cdot 4 + 25} = 50\sqrt{16 - 32 + 25} = 50 \cdot 3 = 150 \text{ km}$$

La distancia mínima se produce a las 4 horas y es de 150 km.

La distancia máxima debe estar en uno de los extremos del intervalo $[0, 6.25]$

$$t = 0 \Rightarrow f(0) = 50\sqrt{0^2 - 8 \cdot 0 + 25} = 50 \cdot 5 = 250 \text{ km}$$

$$t = 6.25 \Rightarrow f(6.25) = 50\sqrt{6.25^2 - 8 \cdot 6.25 + 25} = 187.5 \text{ km}$$

La distancia máxima se produce a las 0 h (al comenzar) y es de 250 Km.

PAU Julio 2018 Matemáticas II



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2018	CONVOCATORIA: JULIO 2018
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

OPCIÓN A

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-1)y + z = 0 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}, \text{ donde } a \text{ es un}$$

parámetro real. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**

- Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible (5 puntos).
- Las soluciones del sistema cuando $a = 1$ (3 puntos).
- La solución del sistema cuando $a = 0$ (2 puntos).

Problema A.2. Se tiene el plano $\pi: x - y + z - 3 = 0$, la recta $s: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $A(1,1,1)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La recta que pasa por A , corta a la recta s y es paralela al plano π (4 puntos).
- El plano que pasa por A , es perpendicular al plano π y paralelo a la recta s (3 puntos).
- Discute si el punto $(3,2,1)$ está en la recta paralela a s que pasa por $(5,3,1)$ (3 puntos).

Problema A.3. Consideremos la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \cos(\pi x)$ que depende de los parámetros a, b, c . Obtener **razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**

- La relación entre los coeficientes a, b, c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$ (2 puntos).
- La relación que deben verificar los coeficientes a, b, c para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$. (4 puntos).
- $\int_0^1 x \cos(\pi x) dx$ (4 puntos).

OPCIÓN B

Problema B.1. Resolver los siguientes apartados, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) Dadas A y B , matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$ (4 puntos).

- b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \text{ cumpla que } B^2 = B \text{ pero } AB \neq A \text{ y } BA \neq B \quad (2 \text{ puntos}).$$

- c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad (4 \text{ puntos}).$$

Problema B.2. Dada la recta $r : \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y - z = 8 \end{cases}$ se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r (3 puntos).
 b) La ecuación del plano π que es paralelo a r y pasa por los puntos $(5, 0, 1)$ y $(4, 1, 0)$ (4 puntos).
 c) La distancia entre la recta r y el plano π obtenido en el apartado anterior (3 puntos).

Problema B.3. Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo R de 600 cm^2 de área de manera que:

Por encima y por debajo de R deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y a derecha de R deben tener una anchura de 2 cm cada uno.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R (3 puntos).
 b) El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima (5 puntos).
 c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima (2 puntos).

Soluciones

OPCIÓN A

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-1)y + z = 0 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}, \text{ donde } a \text{ es un}$$

parámetro real. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible (5 puntos).
- b) Las soluciones del sistema cuando $a = 1$ (3 puntos).
- c) La solución del sistema cuando $a = 0$ (2 puntos).

Estudiamos el sistema antes de responder a lo planteado en el ejercicio.

La matriz de coeficientes y ampliada del sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}; \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a-1 & a \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 + 1 + 0 - 0 - 0 - a = a^2 + 1 - 2a + 1 - a = a^2 - 3a + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 = a \\ \frac{3-1}{2} = 1 = a \end{cases}$$

Estudiamos las tres situaciones diferentes que se nos plantean.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3, será 2 o 1.

Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de A y de A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{1 \quad 1 \quad 0 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

El rango de A y de A/B es 2 y el número de incógnitas es 3. El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3, será 2 o 1.

Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de A y de A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ -1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, el de A/B es 3. Al ser los rangos distintos el sistema es incompatible.

Resumiendo: Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado, si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado y si $a = 2$ el sistema es incompatible.

a) El sistema es compatible cuando $a \neq 2$.

b) Para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos a partir del sistema equivalente obtenido anteriormente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y=1 \\ z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=1-y \\ z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{array}}$$

c) Cuando $a = 0$ el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ z=y \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+y=1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{2}}$$

La solución es $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Problema A.2. Se tiene el plano $\pi : x - y + z - 3 = 0$, la recta $s : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $A(1,1,1)$.

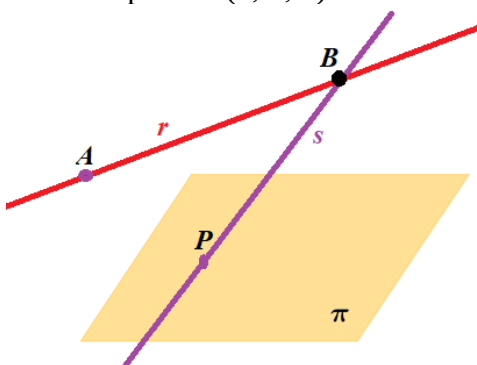
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- La recta que pasa por A , corta a la recta s y es paralela al plano π (4 puntos).
- El plano que pasa por A , es perpendicular al plano π y paralelo a la recta s (3 puntos).
- Discute si el punto $(3,2,1)$ está en la recta paralela a s que pasa por $(5,3,1)$ (3 puntos).

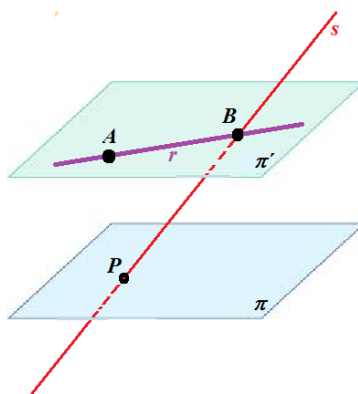
a) Estudiamos la posición relativa de la recta s y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - y + z - 3 = 0 \\ s : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x - y + z - 3 = 0 \\ x = 2y \\ z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2y - y + 0 - 3 = 0 \\ y = 3 \\ x = 6 \end{array} \Rightarrow P(6, 3, 0)$$

El plano π y la recta s se cortan en el punto $P(6, 3, 0)$.



Buscamos una recta r paralela al plano y que corte a la recta s . Además, pasa por el punto A . Hallamos el plano π' paralelo a π y que pasa por A . Dicho plano contiene la recta r .



$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - y + z - 3 = 0 \\ \pi' \parallel \pi \\ A(1,1,1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi' : x - y + z + D = 0 \\ 1 - 1 + 1 + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \pi' : x - y + z - 1 = 0$$

Hallamos el punto B de corte de la recta s con el plano π' .

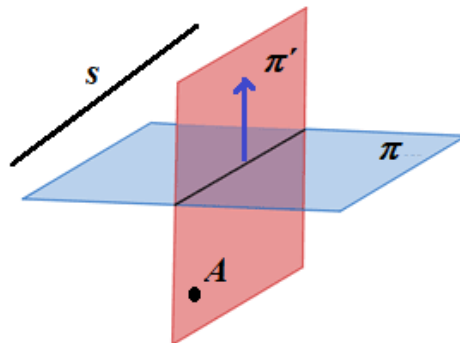
$$\left. \begin{array}{l} \pi' : x - y + z - 1 = 0 \\ s : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x - y + z - 1 = 0 \\ x = 2y \\ z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2y - y + 0 - 1 = 0 \\ y = 1 \\ x = 2 \end{array} \Rightarrow B(2, 1, 0)$$

$$\Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow B(2,1,0)$$

La recta r pedida debe pasar por los puntos A y B.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,1,1) \in r \\ B(2,1,0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(1,1,1) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (2,1,0) - (1,1,1) = (1,0,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1 \\ z=1-\lambda \end{cases}$$

- b) El plano π'' perpendicular al plano π tiene como uno de sus vectores directores el normal del plano π . Como el plano π'' es paralelo a la recta s otro vector director del plano es el director de la recta s .



$$\pi: x-y+z-3=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,-1,1)$$

$$s: \begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=2y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=2\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s=(2,1,0)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(1,1,1) \in \pi'' \\ \vec{u} = \vec{n} = (1,-1,1) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (2,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi'': \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0+2y-2+z-1+2z-2-0-x+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi'': -x+2y+3z-4=0}$$

- c) Hallamos la recta t paralela a s que pasa por $(5,3,1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_t = \vec{v}_s = (2,1,0) \\ (5,3,1) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow t: \begin{cases} x=5+2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1 \end{cases}$$

Comprobamos si el punto $(3, 2, 1)$ pertenece a la recta t .

$$\left. \begin{array}{l} t: \begin{cases} x=5+2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1 \end{cases} \\ \text{¿}(3,2,1) \in t? \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3=5+2\lambda \\ 2=3+\lambda \\ 1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2=2\lambda \\ -1=\lambda \\ 1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1=\lambda \\ -1=\lambda \\ 1=1 \end{cases}$$

La recta t pasa por el punto $(3, 2, 1)$.

Problema A.3. Consideremos la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \cos(\pi x)$ que depende de los parámetros a, b, c . Obtener **razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) La relación entre los coeficientes a, b, c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$ (2 puntos).
- b) La relación que deben verificar los coeficientes a, b, c para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$. (4 puntos).
- c) $\int_0^1 x \cos(\pi x) dx$ (4 puntos).

- a) Si $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$ se debe cumplir que $f(1) = 22$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \cos(\pi x) \\ f(1) = 22 \end{array} \right\} \Rightarrow 22 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 \cos(\pi) \Rightarrow \boxed{22 = a + b - c}$$

- b) Si es horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$ debe cumplirse que su pendiente es 0 y por tanto debe ser $f'(1) = 0$.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \cos(\pi x) \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \cos(\pi x) + cx(-\sin(\pi x))\pi$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \cos(\pi x) - \pi cx \sin(\pi x) \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c \cos(\pi) - \pi c \sin(\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = 3a + 2b - c}$$

- c) Calculamos primero la integral indefinida usando integración por partes.

$$\begin{aligned} \int x \cos(\pi x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos(\pi x) dx \Rightarrow v = \int \cos(\pi x) dx = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \end{array} \right\} = \\ &= x \cdot \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) - \int \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) dx = \frac{x}{\pi} \sin(\pi x) - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\pi} (-\cos(\pi x)) = \\ &= \frac{x}{\pi} \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi x) + K \end{aligned}$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cos(\pi x) dx &= \left[\frac{x}{\pi} \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi x) \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1}{\pi} \sin(\pi) + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi) \right] - \left[\frac{0}{\pi} \sin(0) + \frac{1}{\pi^2} \cos(0) \right] = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} = \boxed{\frac{-2}{\pi^2}} \end{aligned}$$

OPCIÓN B

Problema B.1. Resolver los siguientes apartados, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) Dadas A y B , matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$ (4 puntos).

b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ cumpla que $B^2 = B$ pero $AB \neq A$ y $BA \neq B$ (2 puntos).

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad (4 \text{ puntos}).$$

a) Comprobamos las igualdades.

$$\left. \begin{array}{l} AB = A \\ BA = B \end{array} \right\} \Rightarrow A^2 = A \cdot A = AB \cdot A = A \cdot BA = A \cdot B = A$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = A \\ BA = B \end{array} \right\} \Rightarrow B^2 = B \cdot B = BA \cdot B = B \cdot AB = B \cdot A = B$$

b) Averiguamos cuando se cumple $B^2 = B$

$$B^2 = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ a+b=1 \\ b^2 = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - a = 0 \rightarrow a(a-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ 0 \\ a=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ 0 \end{cases} \\ a+b=1 \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \\ b^2 - b = 0 \rightarrow b(b-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ 0 \\ b=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \end{cases}$$

Comprobamos si se cumple también $AB \neq A$ y $BA \neq B$.

Para $a = 0$ y $b = 1$.

$$a = 0; b = 1 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq A$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq B$$

Para $a = 0$ y $b = 1$ se cumple todo lo pedido.

$$a = 1; b = 0 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

Para $a = 1$ y $b = 0$ no se cumple todo lo pedido.

La única solución es $a = 0$ y $b = 1$.

c) Calculamos el primer determinante.

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos 2 como factor común} \\ \text{en la primera columna} \end{array} \right\} = 2 \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = \boxed{6}$$

Calculamos el segundo determinante.

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Separamos la suma de la primera columna} \\ \text{en suma de dos determinantes} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{En el segundo determinante} \\ \text{La primera columna es la suma de las otras dos} \\ \text{por lo que el determinante vale 0} \end{array} \right\} = 3 + 0 = 3$$

Problema B.2. Dada la recta $r: \begin{cases} x+y=3 \\ x+4y-z=8 \end{cases}$ se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos**

los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r (3 puntos)
 b) La ecuación del plano π que es paralelo a r y pasa por los puntos $(5, 0, 1)$ y $(4, 1, 0)$ (4 puntos)
 c) La distancia entre la recta r y el plano π obtenido en el apartado anterior (3 puntos)

a) Expresamos las variables “x” y “z” en función de “y”.

$$r: \begin{cases} x+y=3 \\ x+4y-z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-y \\ x+4y-z=8 \end{cases} \Rightarrow 3-y+4y-z=8 \Rightarrow 3y-z=5 \Rightarrow 3y-5=z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-5+3\lambda \end{cases}$$

b) El plano π que es paralelo a r y pasa por los puntos $(5, 0, 1)$ y $(4, 1, 0)$ tiene como vectores directores el director de la recta r y el vector que une ambos puntos.

$$r: \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-5+3\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-1, 1, 3) \quad \vec{AB} = (5, 0, 1) - (4, 1, 0) = (1, -1, 1)$$

$$\pi: \begin{cases} (5, 0, 1) \in \pi \\ \vec{u} = (-1, 1, 3) \\ \vec{v} = (1, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-5 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-5+3y+z-1-z+1+y+3x-15=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+4y-20=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+y-5=0}$$

c) Como la recta r y el plano π son paralelos la distancia entre la recta y el plano es la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

$$r: \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-5+3\lambda \end{cases} \Rightarrow P(3, 0, -5) \in r$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x+y-5=0 \\ P(3, 0, -5) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|3+0-5|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}u}$$

Problema B.3. Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo R de 600 cm^2 de área de manera que:

Por encima y por debajo de R deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y a derecha de R deben tener una anchura de 2 cm cada uno.

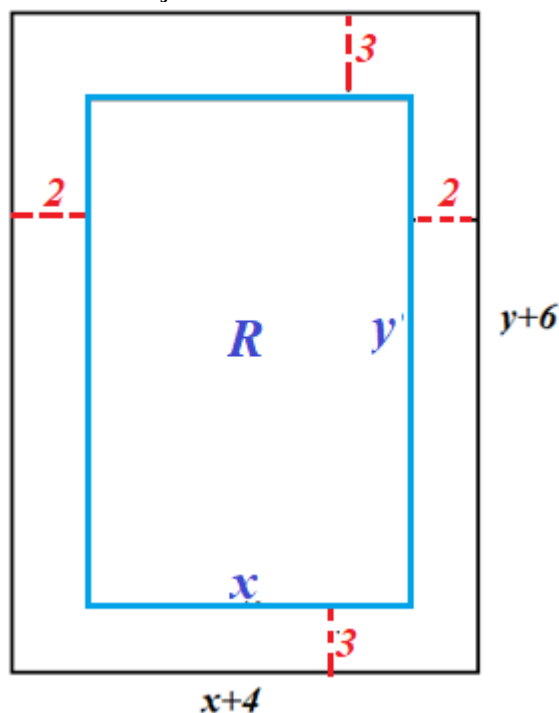
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R (3 puntos).

b) El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima (5 puntos).

c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima (2 puntos).

La situación planteada es la del dibujo.



a) El área del rectángulo R del dibujo es $600 \rightarrow xy = 600 \Rightarrow y = \frac{600}{x}$.

La cartulina es un rectángulo de base $x + 4$ y de altura $y + 6$.

$$\begin{aligned} \text{Área cartulina} &= (x+4)(y+6) = (x+4)\left(\frac{600}{x} + 6\right) = (x+4)\left(\frac{600+6x}{x}\right) = \\ &= \frac{(x+4)(600+6x)}{x} = \frac{600x + 24x + 2400 + 6x^2}{x} = \frac{6x^2 + 624x + 2400}{x} \end{aligned}$$

La función área de la cartulina es $A(x) = \frac{6x^2 + 624x + 2400}{x}$

b) Usamos la derivada.

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{(12x + 624)x - (6x^2 + 624x + 2400)}{x^2} = \frac{12x^2 + 624x - 6x^2 - 624x - 2400}{x^2} \\ A'(x) &= \frac{6x^2 - 2400}{x^2} \end{aligned}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{6x^2 - 2400}{x^2} = 0 \Rightarrow 6x^2 - 2400 = 0 \Rightarrow x^2 - 400 = 0 \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{400} = 20}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este punto crítico $x = 20$ para comprobar si es un valor mínimo del área.

- En el intervalo $(0, 20)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $A'(10) = \frac{600 - 2400}{100} = -18 < 0$.
La función decrece en $(0, 20)$.
- En el intervalo $(20, 600)$ tomamos $x = 30$ y la derivada vale $A'(30) = \frac{5400 - 2400}{900} = \frac{10}{9} > 0$.
La función crece en $(20, 600)$.

La función cambia de decrecer a crecer en $x = 20$. La función presenta un mínimo. El área presenta un mínimo en $x = 20$ cm.

c) Para $x = 20$ tenemos que $y = \frac{600}{20} = 30$.

La cartulina de área mínima tiene dimensiones: $x + 4 = 24$ cm de ancho, $y + 6 = 36$ cm de alto.

PAU Junio 2018 Matemáticas II



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2018	CONVOCATORIA: JUNIO 2018
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

OPCIÓN A

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} y - z = 1 - a \\ -x + z = 5 \\ -ax + y - z = 1 \end{cases}$$
, donde a es un parámetro real.

Se pide obtener **razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**

- Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado (2 puntos).
- Las soluciones del sistema cuando $a = 3$ (4 puntos).
- Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado (4 puntos).

Problema A.2. Dados los puntos $A(-1, 2, \lambda)$, $B(2, 3, 5)$ y $C(3, 5, 3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- El valor del parámetro λ para que el segmento AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A , B y C (3 puntos).
- El área del triángulo de vértices A , B y C cuando $\lambda = 6$ (4 puntos).
- La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A , B y C cuando $\lambda = 6$ (3 puntos).

Problema A.3. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ se pide obtener **razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**

- El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$ (2 puntos).
- Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$. (4 puntos).
- El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$ (4 puntos).

OPCIÓN B

Problema B.1. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1} = aA + bI$ (3 puntos).
- b) Los valores de α y β para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$ (4 puntos).
- c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2 (3 puntos).

Problema B.2. Dados el punto $A(5, 7, 3)$ y la recta $r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$, se pide obtener

razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La recta s que corta a la recta r , pasa por el punto A , y es perpendicular a la recta r (4 puntos).
- b) La distancia del punto A a la recta r (3 puntos).
- c) La distancia del punto $B(1, 1, 1)$ al plano π que pasa por $(3, -1, 0)$ y es perpendicular a r (3 puntos).

Problema B.3. Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud x , se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud $100 - x$, se construye un cuadrado. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) La función de la variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \leq x \leq 100$ (4 puntos).
- b) El valor de la variable x en el intervalo $[0, 100]$ para el cual dicha función (suma de las áreas en función de x obtenida en el apartado a)) alcanza su mínimo valor (3 puntos).
- c) El valor de la variable x en el intervalo $[0, 100]$ para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido (3 puntos).

Soluciones

OPCIÓN A

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} y - z = 1 - a \\ -x + z = 5 \\ -ax + y - z = 1 \end{cases}, \text{ donde } a \text{ es un parámetro real.}$$

Se pide obtener **razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado (2 puntos)
 b) Las soluciones del sistema cuando $a = 3$ (4 puntos)
 c) Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado (4 puntos)

a) La matriz de coeficientes A y la matriz ampliada asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -1 \end{pmatrix}; A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1-a \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ -a & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -1 \end{vmatrix} = -a + 1 - 1 = -a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Si el valor de " a " es distinto de cero el determinante de A no se anula y su rango es 3, el rango de A/B también es 3 y como son también 3 el número de incógnitas tenemos un sistema compatible determinado.

b) Cuando $a = 3$ el sistema es compatible determinado (apartado anterior). Lo resolvemos.

$$\begin{cases} y - z = -2 \\ -x + z = 5 \\ -3x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z - 2 \\ z - 5 = x \\ -3x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow -3(z - 5) + (z - 2) - z = 1 \Rightarrow -3z + 15 + z - 2 - z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3z = -12 \Rightarrow \boxed{z = 4} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 4 - 2 = 2} \\ \boxed{x = z - 5 = -1} \end{cases} \Rightarrow \text{Solución: } \boxed{x = -1; y = 2; z = 4}$$

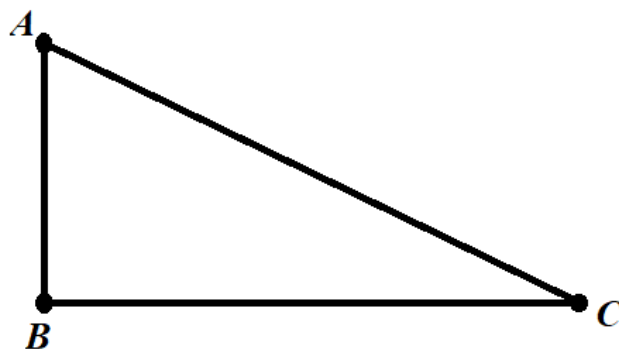
c) Como el determinante de A se anula para $a = 0$, comprobamos si el sistema es compatible indeterminado para $a = 0$. Y lo resolvemos.

$$\begin{cases} y - z = 1 \\ -x + z = 5 \\ y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + z \\ -x = 5 - z \\ y = 1 + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + z \\ x = -5 + z \end{cases} \Rightarrow \text{Soluciones: } \boxed{\begin{matrix} x = -5 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{matrix}}; \text{ siendo } \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema A.2. Dados los puntos $A(-1, 2, \lambda)$, $B(2, 3, 5)$ y $C(3, 5, 3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) El valor del parámetro λ para que el segmento AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A , B y C (3 puntos).
 b) El área del triángulo de vértices A , B y C cuando $\lambda = 6$ (4 puntos).
 c) La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A , B y C cuando $\lambda = 6$ (3 puntos).

a) Hacemos un dibujo de la situación planteada.



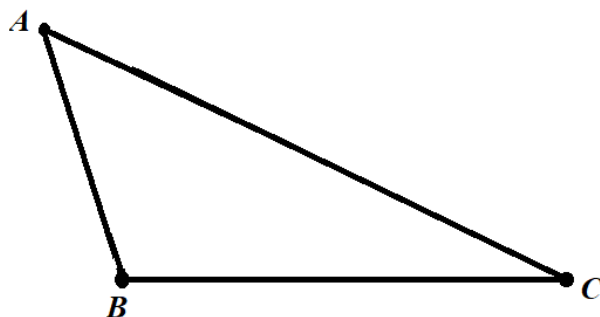
Para que AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A , B y C el ángulo B debe ser de 90° . Los lados AB y BC deben ser perpendiculares y por tanto el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = (-1, 2, \lambda) - (2, 3, 5) = (-3, -1, \lambda - 5) \\ \overrightarrow{BC} = (3, 5, 3) - (2, 3, 5) = (1, 2, -2) \\ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (-3, -1, \lambda - 5) \cdot (1, 2, -2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 - 2 - 2\lambda + 10 = 0 \Rightarrow -2\lambda = -5 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{5}{2}}$$

b) Cuando $\lambda = 6$ el triángulo no es rectángulo y debemos calcular su área usando la fórmula

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|}{2}.$$



$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = (-3, -1, 6 - 5) = (-3, -1, 1) \\ \overrightarrow{BC} = (1, 2, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2i + j - 6k + k - 6j - 2i$$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = 0i - 5j - 5k = (0, -5, -5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + (-5)^2 + (-5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2} u^2}$$

c) Cuando $\lambda = 6$ los puntos son: $A(-1, 2, 6)$, $B(2, 3, 5)$ y $C(3, 5, 3)$

La ecuación del plano π que contiene al triángulo de vértices A , B y C debe tener como vectores directores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, y contener un punto cualquiera de los tres.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{BA} = (-3, -1, 6-5) = (-3, -1, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{BC} = (1, 2, -2) \\ A(-1, 2, 6) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x+1) + y - 2 - 6(z-6) + z - 6 - 6(y-2) - 2(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2x} + x + y - \cancel{2} - 6z + 36 + z - 6 - 6y + 12 - \cancel{2x} - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y - 5z + 40 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: y + z - 8 = 0}$$

Problema A.3. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ se pide obtener **razonadamente, escribiendo los**

pasos del razonamiento utilizado:

- a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$ (2 puntos).
 b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$ (4 puntos).
 c) El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$ (4 puntos).

a) El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

No existe pues existe asíntota horizontal.

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f'(x) = \frac{0(x^2 - x) - (2x - 1)}{(x^2 - x)^2} = \frac{1 - 2x}{(x^2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - 2x}{(x^2 - x)^2} = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Estudiamos el crecimiento antes, entre y después de este valor y los valores excluidos del dominio: $x = 0$; $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{1+2}{((-1)^2+1)^2} = \frac{3}{4} > 0$.

La función crece en $(-\infty, 0)$.

- En el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ tomamos $x = 1/4$ y la derivada vale

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{128}{9} > 0. \text{ La función crece en } \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tomamos $x = 3/4$ y la derivada vale

$$f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{4}\right)^2} = \frac{-128}{9} < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{1-4}{(2^2-2)^2} = \frac{-3}{4} < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

Resumiendo: La función crece en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$ y decrece en $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$

c) La gráfica de la función no corta el eje de abscisas.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = 0 \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow \text{¡No es posible!}$$

El valor del área pedida es la integral definida de la función entre 2 y 3.
Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \frac{1}{x^2 - x} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A(x-1) + Bx \Rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow 1=B \\ x=0 \rightarrow 1=-A \rightarrow A=-1 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{x^2 - x} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

$$\dots = \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} dx = -\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = -\ln x + \ln(x-1) + K$$

Calculamos la integral definida.

$$\text{Área} = \int_2^3 \frac{1}{x^2 - x} dx = \left[-\ln x + \ln(x-1)\right]_2^3 = \left[-\ln 3 + \ln(3-1)\right] - \left[-\ln 2 + \ln(2-1)\right] =$$

$$= 2 \ln 2 - \ln 3 \approx \boxed{0.287 u^2}$$

OPCIÓN B

Problema B.1. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1} = aA + bI$ (3 puntos).

b) Los valores de α y β para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$ (4 puntos).

c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2 (3 puntos).

a) Utilizamos la igualdad $A^2 + 2A = 3I$.

$$A^2 + 2A = 3I \Rightarrow A(A + 2I) = 3I \Rightarrow A\left(\frac{1}{3}(A + 2I)\right) = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I\right) = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}$$

b) Utilizamos la igualdad $A^2 + 2A = 3I$.

$$A^2 + 2A = 3I \Rightarrow A^2 = -2A + 3I$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (-2A + 3I)(-2A + 3I) = 4A^2 - 6AI - 6IA + 9I^2 = 4A^2 - 12A + 9I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^4 = 4(-2A + 3I) - 12A + 9I = -8A + 12I - 12A + 9I = -20A + 21I \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -20 \\ \beta = 21 \end{cases}$$

c) Aplicamos las propiedades de los determinantes.

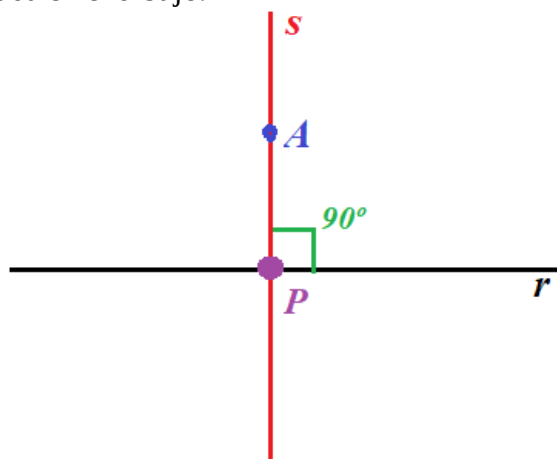
$$|2B^{-1}| = \begin{cases} B^{-1} \text{ es cuadrada de orden } 3 \\ |2B^{-1}| = 2^3 |B^{-1}| \end{cases} = 2^3 |B^{-1}| = \begin{cases} |B^{-1}| = \frac{1}{|B|} \end{cases} = 8 \frac{1}{|B|} = \begin{cases} |B| = 2 \end{cases} = 8 \frac{1}{2} = 4$$

Problema B.2. Dados el punto $A(5, 7, 3)$ y la recta $r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$, se pide obtener

razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La recta s que corta a la recta r , pasa por el punto A , y es perpendicular a la recta r . (4 puntos)
 b) La distancia del punto A a la recta r (3 puntos).
 c) La distancia del punto $B(1, 1, 1)$ al plano π que pasa por $(3, -1, 0)$ y es perpendicular a r (3 puntos).

a) La situación es la planteada en el dibujo.



Hallamos el plano π' perpendicular a la recta r que pasa por A .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (-1, 3, 2) \\ A(5, 7, 3) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi': -x + 3y + 2z + D = 0 \\ A(5, 7, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -5 + 21 + 6 + D = 0 \Rightarrow D = -22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi': -x + 3y + 2z - 22 = 0$$

Hallamos el punto P de corte del plano π' y la recta r .

$$r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2} \Rightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} P_r(3, -1, 0) \\ \vec{v}_r = (-1, 3, 2) \end{array} \right. \Rightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi': -x + 3y + 2z - 22 = 0 \\ r: \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow -(3 - \lambda) + 3(-1 + 3\lambda) + 4\lambda - 22 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 + \lambda - 3 + 9\lambda + 4\lambda - 22 = 0 \Rightarrow 14\lambda - 28 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 2 = 1 \\ y = -1 + 6 = 5 \\ z = 2\lambda = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{P(1, 5, 4)}$$

La recta s pasa por el punto A y P . Hallamos su ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} A(5,7,3) \in s \\ P(1,5,4) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(5,7,3) \in s \\ \vec{v}_s = \overrightarrow{AP} = (1,5,4) - (5,7,3) = (-4,-2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{s: \frac{x-5}{-4} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z-3}{1}}$$

- b) La distancia del punto A a la recta r es la distancia de A a P , es decir, el módulo del vector $\overrightarrow{AP} = (-4, -2, 1)$.

$$d(A, r) = d(A, P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{21}u}$$

- c) Hallamos la ecuación del plano π que pasa por $(3, -1, 0)$ y es perpendicular a r . Al ser perpendicular a la recta tiene como vector normal el director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (-1, 3, 2) \\ (3, -1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: -x + 3y + 2z + D = 0 \\ (3, -1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -3 - 3 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: -x + 3y + 2z + 6 = 0$$

Aplicamos la fórmula de distancia de un punto al plano para calcular $d(B, \pi)$.

$$\left. \begin{array}{l} B(1,1,1) \\ \pi: -x + 3y + 2z + 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(B, \pi) = \frac{|-1 + 3 + 2 + 6|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{5\sqrt{14}}{7}u}$$

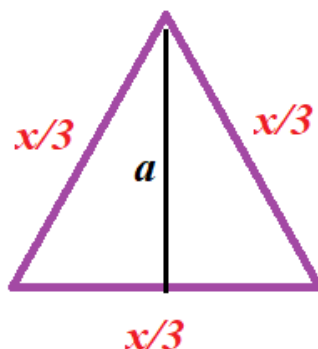
Problema B.3. Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud x , se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud $100 - x$, se construye un cuadrado. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) La función de la variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \leq x \leq 100$ (4 puntos).
 b) El valor de la variable x en el intervalo $[0,100]$ para el cual dicha función (suma de las áreas en función de x obtenida en el apartado a)) alcanza su mínimo valor (3 puntos).
 c) El valor de la variable x en el intervalo $[0,100]$ para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido (3 puntos).

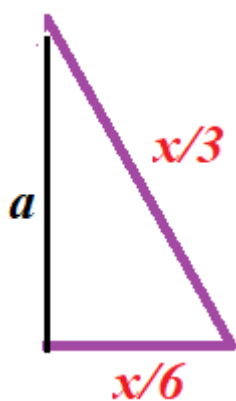
a) Hacemos un dibujo descriptivo.



El triángulo equilátero debe tener de perímetro x , por lo tanto, cada uno de sus lados iguales miden $x/3$. Hallamos su altura para poder hallar su área.



Tomamos el triángulo rectángulo que se obtiene con la mitad del triángulo equilátero y aplicamos el teorema de Pitágoras.



$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{6}\right)^2 + a^2 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{36} = a^2 \Rightarrow \frac{4x^2 - x^2}{36} = a^2 \Rightarrow \frac{3x^2}{36} = a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{12} = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{x^2}{12}} \Rightarrow a = \frac{x}{\sqrt{12}}$$

Hallamos el área del triángulo equilátero.

$$\text{Área triángulo} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt{12}}}{2} = \frac{x^2}{6\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{36} x^2$$

El cuadrado tiene como perímetro $100 - x$, por lo que su lado mide $\frac{100 - x}{4}$ y su área es:

$$\text{Área cuadrado} = \left(\frac{100 - x}{4}\right)^2 = \left(25 - \frac{x}{4}\right)^2$$

La función suma de las dos áreas es:

$$f(x) = \text{Área cuadrado} + \text{Área triángulo} = \left(25 - \frac{x}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 = 625 + \frac{x^2}{16} - \frac{50}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{36}x^2$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}\right)x^2 - \frac{25}{2}x + 625; \text{ siendo } 0 \leq x \leq 100$$

b) Hallamos la derivada y la igualamos a cero, en busca de sus puntos críticos.

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}\right)x - \frac{25}{2} = \left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right)x - \frac{25}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right)x - \frac{25}{2} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right)x = \frac{25}{2} \Rightarrow x = \frac{\frac{25}{2}}{\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}} = \frac{25}{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{9}} = \frac{25}{\frac{9 + 4\sqrt{3}}{36}} = \frac{900}{9 + 4\sqrt{3}} \approx 56.5 \text{ cm}$$

Hemos encontrado un punto crítico, sustituimos en la derivada segunda y comprobamos que es un mínimo.

$$f''(x) = \left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right) \Rightarrow f''(56.5) = \left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right) > 0$$

La suma de las áreas es mínima para $x = \frac{900}{9 + 4\sqrt{3}} \approx 56.5 \text{ cm}$

c) Solo existe un punto crítico de la función y es un mínimo. Por tanto, el máximo valor se alcanza en los extremos del intervalo de definición $[0, 100]$.

Valoramos la función en los dos extremos y vemos donde alcanza dicho valor máximo.

$$f(0) = \left(\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}\right) \cdot 0^2 - \frac{25}{2} \cdot 0 + 625 = 625 \text{ cm}^2$$

$$f(100) = \left(\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}\right) \cdot 100^2 - \frac{25}{2} \cdot 100 + 625 \approx 481.125 \text{ cm}^2$$

El valor máximo de la suma de áreas se consigue con $x = 0$, es decir utilizando todo el alambre para construir el cuadrado.

PAU Julio 2017 Matemáticas II



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2017

CONVOCATORIA: JULIO 2017

Assignatura: MATEMÀTIQUES II

Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREMO DEL EXAMEN:

Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$ y
 $2B^3 = B$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad. Obtener **razonadamente, escribiendo todos**
los pasos del razonamiento utilizado:

- La justificación de que la matriz A es invertible (2 puntos)
y el cálculo de la matriz A^3 en función de A y de I . (2 puntos)
- Los valores posibles del determinante de B . (3 puntos)
- El valor del determinante de la matriz B^2 , sabiendo que la matriz B tiene inversa. (3 puntos).

PROBLEMA A.2. Se dan la recta $r: \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y + mz = n$. Obtener**razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π se cortan en un punto. (3 puntos)
- Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π no se cortan. (3'5 puntos)
- Los valores de m y n para los que la recta r está contenida en el plano π . (3'5 puntos)

PROBLEMA A.3. Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = ax$ y la función $f(x) = x^3 - ax$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes coordenados y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f . (1 + 2 puntos)
- La gráfica de la función f cuando $a = 9$. (3 puntos)
- Calcular en función del parámetro a , el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = ax$, cuando $a > 1$. (2 puntos)
- El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. (2 puntos)

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1} . (2 + 2 puntos)
- b) La justificación de que $A^4 = I$. (2 puntos)
- c) El cálculo de las matrices A^7 , A^{30} y A^{100} . (4 puntos)

PROBLEMA B.2. Sea la recta $r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi: 2x - y + bz = 0$, siendo a y b dos parámetros reales. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) El punto de intersección de la recta r y el plano π cuando $a = -b = 1$. (2'5 puntos)
- b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $a = b = 4$. (2'5 puntos)
- c) La posición relativa de la recta r y del plano π en función de los valores de los parámetros a y b . (5 puntos)

PROBLEMA B.3. Se considera el triángulo T de vértices $O = (0, 0)$, $A = (x, y)$ y $B = (0, y)$, siendo $x > 0$, $y > 0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) El área del triángulo T en función de x . (3 puntos)
- b) El valor de x para el que dicha área es máxima. (5 puntos)
- c) El valor de dicha área máxima. (2 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$ y

$2B^3 = B$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad. Obtener razonadamente, escribiendo todos

los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La justificación de que la matriz A es invertible (2 puntos)
 y el cálculo de la matriz A^3 en función de A y de I . (2 puntos)
 b) Los valores posibles del determinante de B . (3 puntos)
 c) El valor del determinante de la matriz B^2 , sabiendo que la matriz B tiene inversa. (3 puntos)

- a) Como $A^2 = -A - I$ tenemos que $A^2 + A = -I \Rightarrow -A^2 - A = I \Rightarrow A(-A - I) = I$, por lo que la matriz A tiene inversa, siendo su inversa $A^{-1} = -A - I$.

Calculamos A^3 .

$$A^3 = A^2 \cdot A = (-A - I) \cdot A = -A^2 - A = -(-A - I) - A = A + I - A = I$$

- b) Sabemos que B es una matriz cuadrada de orden 3, por lo que B^3 también es una matriz cuadrada de orden 3 y se cumple $|2B^3| = 2^3 |B^3|$.

$$2B^3 = B \Rightarrow |2B^3| = |B| \Rightarrow 2^3 |B^3| = |B| \Rightarrow 8|B|^3 = |B| \Rightarrow 8|B|^3 - |B| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |B|(8|B|^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |B| = 0 \\ \text{o} \\ 8|B|^2 - 1 = 0 \rightarrow |B|^2 = \frac{1}{8} \rightarrow |B| = \sqrt{\frac{1}{8}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

- c) Multiplicamos por la inversa de B en la ecuación matricial $2B^3 = B$.

$$2B^3 = B \Rightarrow 2B^2 \cdot B = B \Rightarrow 2B^2 \cdot B \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1} \Rightarrow 2B^2 = I$$

Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$2B^2 = I \Rightarrow |2B^2| = |I| \Rightarrow 2^3 |B^2| = 1 \Rightarrow |B^2| = \frac{1}{8}$$

PROBLEMA A.2. Se dan la recta $r: \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+y+mz=n$. Obtener

razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π se cortan en un punto. (3 puntos)
 b) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π no se cortan. (3'5 puntos)
 c) Los valores de m y n para los que la recta r está contenida en el plano π . (3'5 puntos)

- a) Para que el plano y la recta se corten en un punto el sistema formado por sus ecuaciones debe tener solución única. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más fácil de analizar.

$$r: \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ x \quad +3y \quad -z = 1 \\ -x \quad +2y \quad +2z = -1 \\ \hline 5y \quad +z = 0 \rightarrow \text{Nueva Ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - 2 \cdot Ecuación 1ª} \\ 2x \quad +y \quad +mz = n \\ -2x \quad +4y \quad +4z = -2 \\ \hline 5y \quad +(m+4)z = n-2 \rightarrow \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-2y-2z=1 \\ 5y+z=0 \\ 5y+(m+4)z=n-2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 2ª} \\ 5y \quad +(m+4)z = n-2 \\ -5y \quad -z = 0 \\ \hline (m+3)z = n-2 \rightarrow \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-2y-2z=1 \\ 5y+z=0 \\ (m+3)z=n-2 \end{array} \right\}$$

Para que el sistema equivalente obtenido tenga solución única debe ser $m+3 \neq 0 \Rightarrow m \neq -3$ y el valor de n no influye en que la solución sea única.

La recta r y el plano π se cortan en un punto para cualquier valor de m distinto de -3 .

- b) Para que la recta r y el plano π no se corten el sistema no debe tener solución. Utilizamos lo conseguido en el apartado a).

$$r: \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-2y-2z=1 \\ 5y+z=0 \\ (m+3)z=n-2 \end{array} \right\}$$

La tercera ecuación debe ser una igualdad imposible y para ello debe ser $m+3=0 \Rightarrow m=-3$ y además $n-2 \neq 0 \Rightarrow n \neq 2$.

La recta r y el plano π no se cortan para $m=-3$ y $n \neq 2$.

- c) Para que la recta r esté contenida en el plano π el sistema debe tener infinitas soluciones.

La tercera ecuación debe ser una identidad y para ello debe ser $m+3=0 \Rightarrow m=-3$ y además $n-2=0 \Rightarrow n=2$.

La recta r está contenida en el plano π para $m=-3$ y $n=2$.

PROBLEMA A.3. Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = ax$ y la función $f(x) = x^3 - ax$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes coordenados y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f . (1 + 2 puntos)
- b) La gráfica de la función f cuando $a = 9$. (3 puntos)
- c) Calcular en función del parámetro a , el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = ax$, cuando $a > 1$. (2 puntos)
- d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. (2 puntos)

- a) Hallamos los puntos de corte de la curva $y = f(x) = x^3 - ax$ con los ejes coordenados.

Con el eje OY ($x = 0$):

$$\left. \begin{array}{l} y = x^3 - ax \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0^3 - a \cdot 0 = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

Con el eje OX ($y = 0$):

$$\left. \begin{array}{l} y = x^3 - ax \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - ax = 0 \Rightarrow x(x^2 - a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0, 0) \\ x^2 - a = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{a} \rightarrow \begin{cases} B(\sqrt{a}, 0) \\ C(-\sqrt{a}, 0) \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos el crecimiento o decrecimiento de la función usando la derivada. Determinamos los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - a \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - a = 0 \Rightarrow 3x^2 = a \Rightarrow x^2 = \frac{a}{3} \Rightarrow \{a > 0\} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ tomamos $x = -2\sqrt{\frac{a}{3}}$ y la derivada vale

$$f'\left(-2\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = 3\left(-2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2 - a = 4a - a = 3a > 0. \text{ La función crece en } \left(-\infty, -\sqrt{\frac{a}{3}}\right).$$

- En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, +\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - a = -a < 0$

. La función decrece en $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, +\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$.

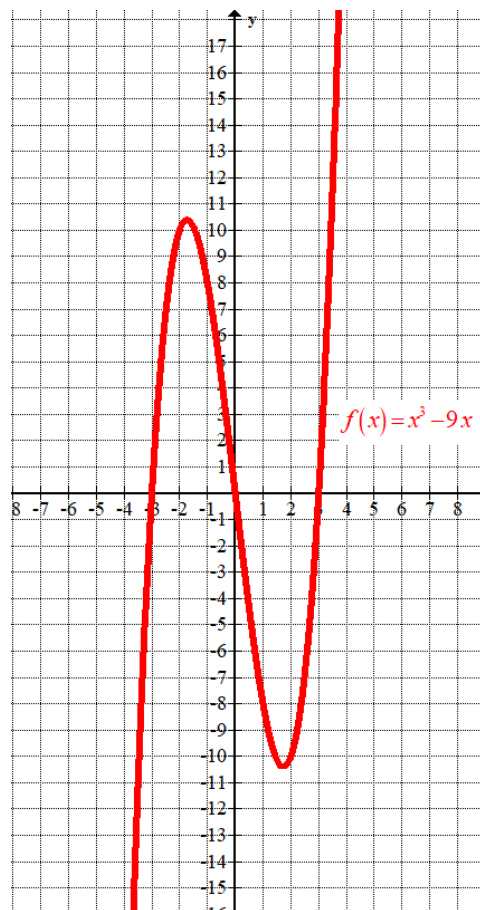
- En el intervalo $\left(+\sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty\right)$ tomamos $x = 2\sqrt{\frac{a}{3}}$ y la derivada vale

$$f'\left(2\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = 3\left(2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2 - a = 4a - a = 3a > 0. \text{ La función crece en } \left(+\sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty\right).$$

Resumiendo: La función crece en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}}\right)$.

- b) Para $a = 9$ la función queda $f(x) = x^3 - 9x$. Por lo visto en el apartado a) sabemos que la función corta los ejes en $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. La función crece en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$. Hacemos una tabla de valores y la representamos.

x	$y = x^3 - 9x$
-2	8
$-\sqrt{3}$	0
-1	8
0	0
1	-8
$\sqrt{3}$	0
2	-10



- c) Las curvas $y = x^3$ e $y = ax$ se cortan en los puntos que corte que hemos obtenido en el apartado a). Se cortan en $C(-\sqrt{a}, 0)$, $A(0, 0)$ y $B(\sqrt{a}, 0)$.

El área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = ax$, cuando $a > 1$ es el valor absoluto de la integral de la diferencia de las funciones entre $x = 0$ y $x = \sqrt{a}$.

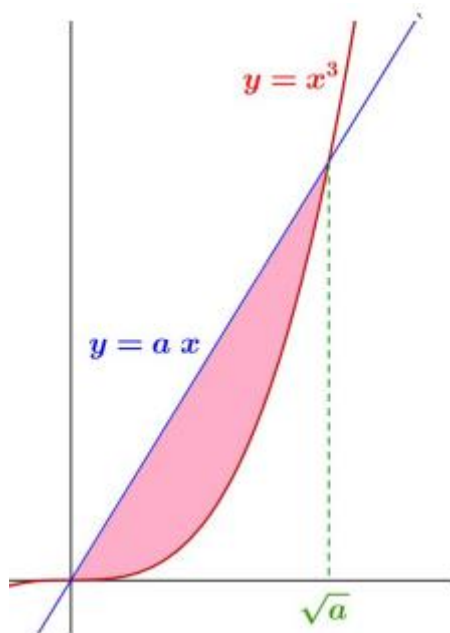
Como $a > 1$ entonces $\sqrt{a} > 1$, comprobamos que gráfica es superior en $x = 1 \in (0, \sqrt{a})$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 1^3 = 1 \\ y = a \cdot 1 = a \end{array} \right\} \text{ Como } a > 1 \text{ la recta está por encima de la curva.}$$

$$\text{Área} = \int_0^{\sqrt{a}} ax - x^3 dx = \left[a \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{a}} = \left[a \frac{(\sqrt{a})^2}{2} - \frac{(\sqrt{a})^4}{4} \right] - \left[a \frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4} \right] =$$

$$= a \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \boxed{\frac{a^2}{4} u^2}$$

El área del recinto del dibujo es $\frac{a^2}{4}$ unidades cuadradas.



- d) Calculamos el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. La función $y = x^3$ corta el eje OX en $x = 0$, por lo que el área es la integral definida de la función entre 0 y 2.

$$\text{Área} = \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \left[\frac{2^4}{4} \right] - \left[\frac{0^4}{4} \right] = 4u^2$$

Igualamos el valor del área obtenida en el apartado c) a 4 y despejamos el valor de a .

$$\frac{a^2}{4} = 4 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} = 4$$

Como $a > 0$ solo consideramos el valor positivo de la raíz: $a = 4$.

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1} . (2 + 2 puntos)
 b) La justificación de que $A^4 = I$. (2 puntos)
 c) El cálculo de las matrices A^7 , A^{30} y A^{100} . (4 puntos)

a) La matriz tiene inversa si su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (-1) - 0 - 0 = 1 \neq 0$$

El determinante tiene un valor no nulo y la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos las potencias sucesivas de A hasta llegar a A^4 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

c) Utilizamos la igualdad $A^4 = I$.

$$A^7 = A^4 \cdot A^3 = I \cdot A^3 = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{30} = A^{4 \cdot 7 + 2} = A^{4 \cdot 7} \cdot A^2 = (A^4)^7 \cdot A^2 = I^7 \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{100} = A^{4 \cdot 25} = (A^4)^{25} = I^{25} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA B.2. Sea la recta $r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi: 2x - y + bz = 0$, siendo a y b dos parámetros reales. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El punto de intersección de la recta r y el plano π cuando $a = -b = 1$. (2'5 puntos)
 b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $a = b = 4$. (2'5 puntos)
 c) La posición relativa de la recta r y del plano π en función de los valores de los parámetros a y b . (5 puntos)

- a) Cuando $a = -b = 1$ el plano tiene ecuación $\pi: 2x - y - z = 0$ y la recta queda $r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

Pasamos la ecuación continua de la recta a ecuaciones paramétricas y resolvemos el sistema formado con las ecuaciones de plano y recta.

$$r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, 0, 1) \\ \vec{v}_r = (4, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

$$\pi: 2x - y - z = 0 \quad \left. \begin{matrix} r: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2(1 + 4\lambda) - \lambda - (1 - \lambda) = 0 \Rightarrow 2 + 8\lambda - \lambda - 1 + \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 4 \cdot \frac{-1}{8} = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{8} \\ z = 1 - \frac{-1}{8} = \frac{9}{8} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{9}{8}\right)$$

El punto de intersección de recta y plano tiene coordenadas $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{9}{8}\right)$.

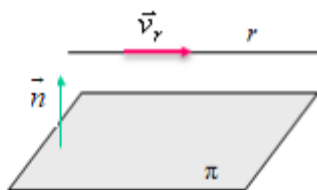
- b) Cuando $a = b = 4$ la recta queda $r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi: 2x - y + 4z = 0$.

Estudiamos la posición relativa de recta y plano.

La recta tiene como vector director $\vec{v}_r = (4, 4, -1)$ y el plano tiene como vector normal el vector $\vec{n} = (2, -1, 4)$. Comprobamos si el producto escalar de ambos vectores es nulo.

$$\left. \begin{matrix} \vec{v}_r = (4, 4, -1) \\ \vec{n} = (2, -1, 4) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = (4, 4, -1)(2, -1, 4) = 8 - 4 - 4 = 0$$

Al ser el producto escalar nulo la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. Calculamos la distancia de recta a plano.



Al ser la recta paralela al plano la distancia de recta a plano es el valor de la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x - y + 4z = 0 \\ P_r(1, 0, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 0 + 4 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{6}{\sqrt{21}} \text{ unidades}$$

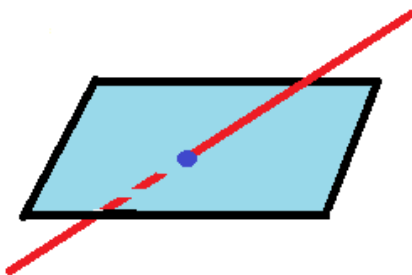
Al ser la distancia no nula la recta y el plano son paralelos situándose la recta a una distancia de $\frac{6}{\sqrt{21}}$ unidades del plano.

- c) Si el producto escalar del vector director de la recta y el normal del plano es no nulo la recta y el plano son secantes (coinciden en un punto). Si el producto es nulo recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} r : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1} \rightarrow \vec{v}_r = (4, a, -1) \\ \pi : 2x - y + bz = 0 \rightarrow \vec{n} = (2, -1, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = (4, a, -1) \cdot (2, -1, b) = 8 - a - b$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow 8 - a - b = 0 \Rightarrow \boxed{8 - b = a}$$

Si $a \neq 8 - b$ recta y plano son secantes.



Si $a = 8 - b$ recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. Para que la recta esté contenida en el plano basta con que un punto de la recta pertenezca al plano.

$$\left. \begin{array}{l} r : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{8-b} = \frac{z-1}{-1} \rightarrow P_r = (1, 0, 1) \\ \pi : 2x - y + bz = 0 \\ P_r \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 0 + b \cdot 1 = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

Aparecen dos situaciones distintas:

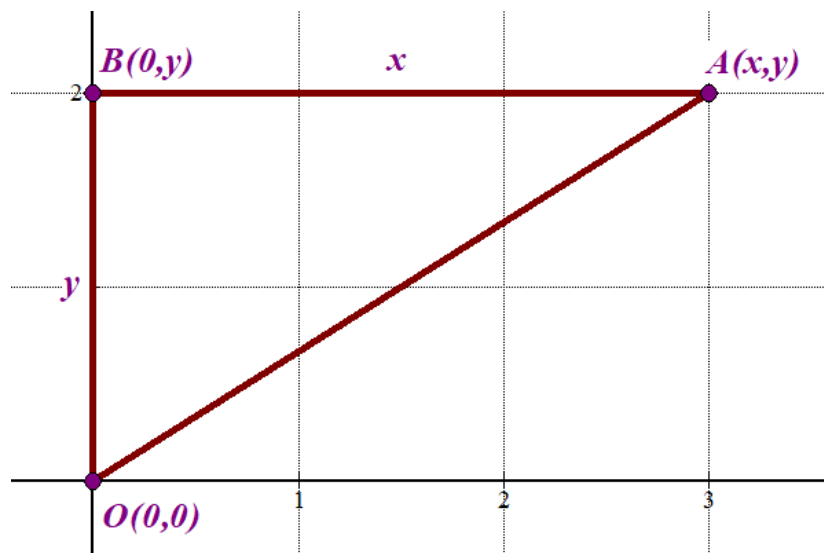
Si $a = 8 - b$ y $b = -2$ la recta está contenida en el plano. Si $a = 8 - b$ y $b \neq -2$ la recta es paralela al plano.

Resumiendo: Si $a \neq 8 - b$ recta y plano son secantes, si $a = 8 - b$ y $b = -2$ la recta está contenida en el plano y si $a = 8 - b$ y $b \neq -2$ la recta es paralela al plano.

PROBLEMA B.3. Se considera el triángulo T de vértices $O = (0, 0)$, $A = (x, y)$ y $B = (0, y)$, siendo $x > 0$, $y > 0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) El área del triángulo T en función de x . (3 puntos)
 b) El valor de x para el que dicha área es máxima. (5 puntos)
 c) El valor de dicha área máxima. (2 puntos)

a) Dibujamos un ejemplo de la situación planteada tomando $x = 3$ e $y = 2$.



Si aplicamos el teorema de Pitágoras tenemos:

$$OA^2 = OB^2 + AB^2 \Rightarrow OA^2 = y^2 + x^2 \Rightarrow OA = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Como la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros tenemos:

$$OA + AB = 30 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x = 30 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 30 - x \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = (30 - x)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 900 + x^2 - 60x \Rightarrow y^2 = 900 - 60x \Rightarrow y = \sqrt{900 - 60x}$$

El triángulo OAB es rectángulo en el vértice B . Su área es la mitad del producto de la base por la altura.

$$\text{Área } T = \frac{xy}{2} = \frac{x\sqrt{900 - 60x}}{2} = x\sqrt{225 - 15x} \Rightarrow A(x) = x\sqrt{225 - 15x}$$

b) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$A(x) = x\sqrt{225 - 15x} = \sqrt{225x^2 - 15x^3} \Rightarrow A'(x) = \frac{450x - 45x^2}{2\sqrt{225x^2 - 15x^3}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{450x - 45x^2}{2\sqrt{225x^2 - 15x^3}} = 0 \Rightarrow 450x - 45x^2 = 0 \Rightarrow 10x - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(10 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 10 - x = 0 \rightarrow x = 10 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 10$.

- En el intervalo $(0, 10)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale

$$A'(5) = \frac{450 \cdot 5 - 45 \cdot 5^2}{2\sqrt{225 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5^3}} = \frac{1125}{+} > 0. \text{ El área crece en el intervalo } (0, 10).$$

- En el intervalo $(10, 30)$ tomamos $x = 15$ y la derivada vale

$$A'(15) = \frac{450 \cdot 15 - 45 \cdot 15^2}{2\sqrt{225 \cdot 15^2 - 15 \cdot 15^3}} = \frac{-3375}{+} < 0. \text{ El área decrece en el intervalo } (10, 30).$$

La función Área crece antes de $x = 10$ y decrece a partir de este valor por lo que el área es máxima para $x = 10$.

- c) Sustituimos el valor $x = 10$ en la función Área y obtenemos el valor máximo del área del triángulo T.

$$A(10) = 10\sqrt{225 - 150} = 50\sqrt{3} \approx 86.6 \text{ unidades cuadradas}$$

PAU Junio 2017 Matemáticas II



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2017	CONVOCATORIA: JUNIO 2017
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Se da el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} -x + ay + 2z = a \\ 2x + ay - z = 2 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}$$
 dependiente del parámetro

real a . Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La solución del sistema cuando $a = 2$. (3 puntos)
- Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado. (3 puntos)
- El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado (2 puntos)
y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a . (2 puntos)

PROBLEMA A.2. Se dan el punto $P = (1, 1, 1)$, la recta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ y el plano

$\pi: x + y + z = 1$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, las ecuaciones de:

- El plano que contiene al punto P y a la recta r . (2 puntos)
- La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π , la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta s con el plano π . (2+2+2 puntos)
- El plano σ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π . (2 puntos)

PROBLEMA A.3. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P , situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N . Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M = (0, 6)$, $P = (x, 0)$ y $N = (18, 0)$. El cable MP tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable PN es de 5 €/m.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- El costo total C de los dos cables en función de la abscisa x del punto P , cuando $0 \leq x \leq 18$. (3 puntos)
- El valor de x , con $0 \leq x \leq 18$, para el que el costo total C es mínimo. (4 puntos)
- El valor de dicho costo total mínimo. (3 puntos)

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3×3 . (2,5 puntos)
 y el valor de la matriz C^4 . (2,5 puntos)
- b) El valor del determinante de la matriz $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1 . (3 puntos)
- c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $BB = B$. (2 puntos)

PROBLEMA B.2. Sea T un tetraedro de vértices $O = (0,0,0)$, $A = (1,1,1)$, $B = (3,0,0)$ y $C = (0,3,0)$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos A , B y C . (1 punto)
 y las ecuaciones de la recta h_0 perpendicular a π que pasa por O . (2 puntos)
- b) El punto de intersección de la altura h_0 y el plano π . (3 puntos)
- c) El área de la cara cuyos vértices son los puntos A , B y C , (2 puntos)
 y el volumen del tetraedro T . (2 puntos)

PROBLEMA B.3. Dada la función f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, para cualquier valor real $x \neq 0$, se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f , (2 puntos)
 y los extremos relativos de la función f . (1 punto)
- b) Las asíntotas de la curva $y = f(x)$. (3 puntos)
- c) El área de la región plana limitada por la curva $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $1 \leq x \leq e$, el segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(e,0)$, y las rectas $x = 1$ y $x = e$. (4 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Se da el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} -x + ay + 2z = a \\ 2x + ay - z = 2 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}$$
 dependiente del parámetro

real a . Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La solución del sistema cuando $a = 2$. (3 puntos)
 b) Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado. (3 puntos)
 c) El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado (2 puntos)
 y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a . (2 puntos)

a) Cuando $a = 2$ el sistema queda
$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases}$$
. Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 2}^a \\ 2x & -y & +2z & = 2 \\ -2x & -2y & +z & = -2 \\ \hline & -3y & +3z & = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación 2}^a + 2 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 2x & +2y & -z & = 2 \\ -2x & +4y & +4z & = 4 \\ \hline & 6y & +3z & = 6 \end{cases} \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2z = 2 \\ 6y + 3z = 6 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2z = 2 \\ 2y + z = 2 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2z = 2 \\ 2y + z = 2 \\ z = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2y = 2 \\ 2y + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 4y = 2 \\ 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 4y = 2 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow -x + 4 \cdot \frac{2}{3} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x = 2 - \frac{8}{3} = \frac{-2}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{z = \frac{2}{3}}$$

La solución es $x = y = z = \frac{2}{3}$.

- b) Para que el sistema sea compatible y determinado la matriz de coeficientes y la matriz ampliada deben tener rango 3, mismo valor que el número de incógnitas.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & a & -1 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 & a \\ 2 & a & -1 & 2 \\ a & -1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

Comprobamos cuando el determinante de la matriz A se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & a & -1 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2a - a^2 - 4 - 2a^2 - 4a + 1 = -3a^2 - 6a - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3a^2 - 6a - 3 = 0 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Para $a = -1$ el determinante de A se anula y su rango es menor de 3.

Para $a \neq -1$ el determinante de A no se anula y el rango de la matriz A es 3. El rango de la matriz ampliada A/B también es 3 e igual que el número de incógnitas.

Para $a \neq -1$ el sistema es compatible y determinado.

- c) En el apartado anterior hemos visto que para $a = -1$ el determinante de A se anula. Estudiamos el rango de A y el de la matriz ampliada A/B para este valor. Para ello utilizamos el método de Gauss para triangular la matriz A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad -1 \quad 2 \quad -1 \\ \hline 1 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad 4 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{A/B} & & \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \underbrace{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3).

Para $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado.

Obtenemos las soluciones partiendo del sistema triangular obtenido.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x - y + 2z = -1 \\ -3y + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x - y + 2z = -1 \\ y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x - y + 2z = -1 \\ \boxed{y = z} \end{array} \right\} \Rightarrow -x - z + 2z = -1 \Rightarrow -x + z = -1 \Rightarrow \boxed{x = 1 + z}$$

Las soluciones del sistema para $a = -1$ son $x = 1 + \lambda$; $y = \lambda$; $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA A.2. Se dan el punto $P = (1, 1, 1)$, la recta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x + y + z = 1$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, las ecuaciones de:

- a) El plano que contiene al punto P y a la recta r. (2 puntos)
 b) La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π , la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta s con el plano π . (2+2+2 puntos)
 c) El plano σ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π . (2 puntos)

a) Obtenemos un punto y un vector director de la recta r.

$$r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y + z - 1 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow -y + z - 1 + 2y - z - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 2} \Rightarrow x = -2 + z - 1 = -3 + z \Rightarrow r: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(-3, 2, 0) \\ \vec{v}_r = (1, 0, 1) \end{cases}$$

El plano π' que contiene al punto P y a la recta r tiene como vectores directores el vector director de la recta: $\vec{v}_r = (1, 0, 1)$ y el vector que une el punto P y el punto P_r de la recta.

$$\pi': \begin{cases} P = (1, 1, 1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{PP_r} = (-3, 2, 0) - (1, 1, 1) = (-4, 1, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 - y + 1 + 0 - z + 1 + 4y - 4 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x + 3y - z - 3 = 0}$$

b) Si la recta s es perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: x + y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1)$$

$$s: \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{n} = (1, 1, 1) \\ P(1, 1, 1) \in s \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Hallamos la distancia del punto P al plano π .

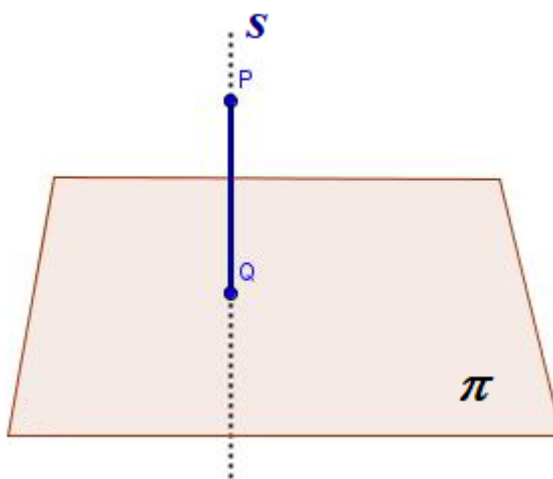
$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + y + z - 1 = 0 \\ P(1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|1 + 1 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ unidades}$$

Hallamos el punto Q intersección de la recta s con el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + y + z = 1 \\ s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda + 1 + \lambda + 1 + \lambda = 1 \Rightarrow 3\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = \frac{-2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Podemos comprobar que la distancia del punto P al plano π es la distancia de P a Q. Esta es una segunda forma de obtener la distancia de P al plano.



$$\left. \begin{matrix} P(1,1,1) \\ Q\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - (1,1,1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} u$$

Este valor obtenido es la distancia del punto P al plano π .

- c) El plano σ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π contiene al punto $P_r(-3, 2, 0)$ de la recta r y tiene como vectores directores el vector director de la recta $\vec{v}_r = (1, 0, 1)$ y el vector normal del plano π : $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

$$\left. \begin{matrix} P_r(-3, 2, 0) \in \sigma \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (1, 0, 1) \\ \vec{v} = \vec{n} = (1, 1, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sigma: \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0 + y - 2 + z - 0 - y + 2 - x - 3 = 0 \Rightarrow$$

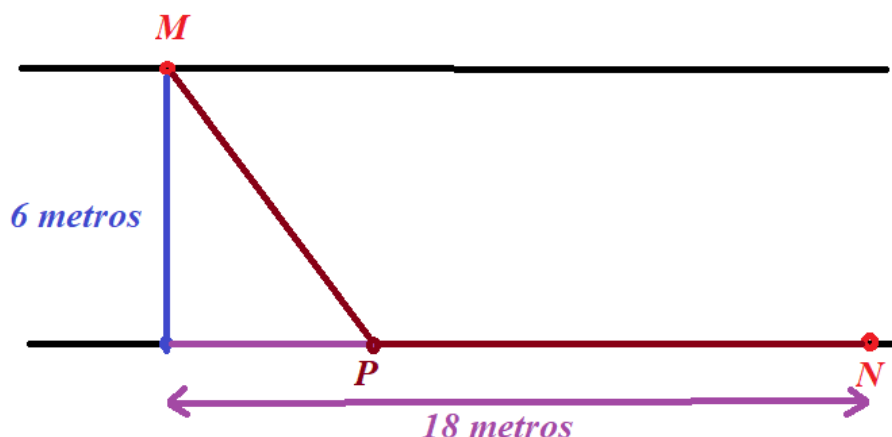
$$\Rightarrow -x + z - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma: x - z + 3 = 0}$$

PROBLEMA A.3. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N. Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M = (0, 6)$, $P = (x, 0)$ y $N = (18, 0)$. El cable MP tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable PN es de 5 €/m.

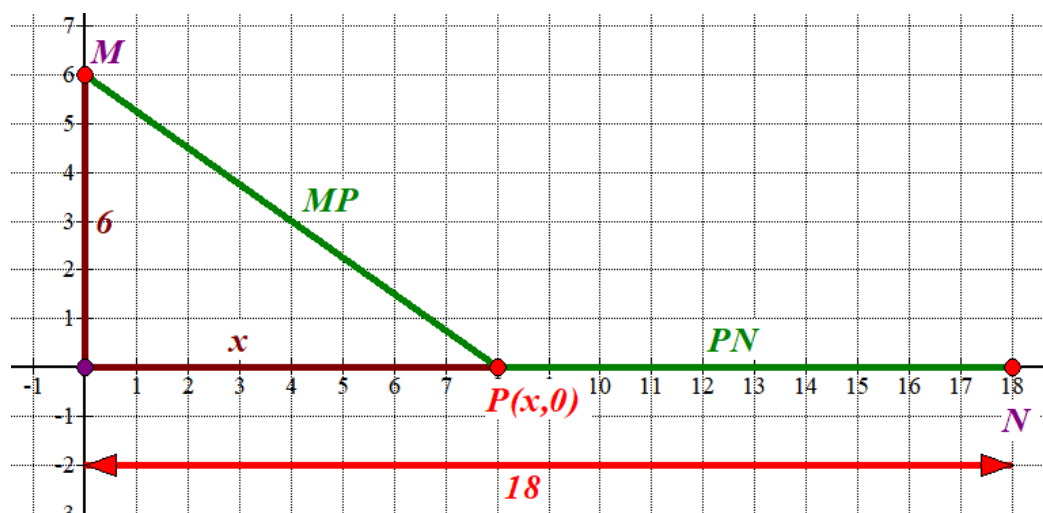
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- El costo total C de los dos cables en función de la abscisa x del punto P, cuando $0 \leq x \leq 18$. (3 puntos)
- El valor de x, con $0 \leq x \leq 18$, para el que el costo total C es mínimo. (4 puntos)
- El valor de dicho costo total mínimo. (3 puntos)

a) Realizamos un dibujo descriptivo de la situación planteada.



Representamos esta situación en un sistema cartesiano.



La longitud del cable PN es $18 - x$, como cuesta a 5 €/m el coste de este cable es $5(18 - x) = 90 - 5x$.

La longitud del cable MP lo obtenemos usando el teorema de Pitágoras:

$$MP^2 = 6^2 + x^2 \Rightarrow MP = \sqrt{36 + x^2}$$

Como este cable cuesta a 10 €/m el coste del cable MP es $10\sqrt{36 + x^2}$.

El coste total del cable de M a N es la suma de ambos costes:

$$C(x) = 90 - 5x + 10\sqrt{36 + x^2}; \quad 0 \leq x \leq 18$$

b) Derivamos la función coste y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$C(x) = 90 - 5x + 10\sqrt{36 + x^2} \Rightarrow C'(x) = -5 + 10 \frac{2x}{2\sqrt{36 + x^2}} = -5 + \frac{10x}{\sqrt{36 + x^2}}$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow -5 + \frac{10x}{\sqrt{36 + x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{10x}{\sqrt{36 + x^2}} = 5 \Rightarrow 10x = 5\sqrt{36 + x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = \sqrt{36 + x^2} \Rightarrow (2x)^2 = (\sqrt{36 + x^2})^2 \Rightarrow 4x^2 = 36 + x^2 \Rightarrow 3x^2 = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{36}{3} = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} \approx 3.46 \text{ metros}$$

Comprobamos que en $x = \sqrt{12}$ hay un mínimo viendo si la función decrece antes y crece después de este valor.

- Antes de $x = \sqrt{12}$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $C'(2) = -5 + \frac{10 \cdot 2}{\sqrt{36 + 2^2}} \approx -1.84 < 0$.

La función decrece antes de $x = \sqrt{12}$.

- Después de $x = \sqrt{12}$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $C'(4) = -5 + \frac{10 \cdot 4}{\sqrt{36 + 4^2}} \approx 0.34 > 0$.

La función crece después de $x = \sqrt{12}$.

Como la función decrece en el intervalo $(0, \sqrt{12})$ y crece en el intervalo $(\sqrt{12}, 18)$ podemos afirmar que la función tiene un valor mínimo en $x = \sqrt{12}$.

El cable tiene un coste mínimo si elegimos el punto $P(\sqrt{12}, 0)$

c) El coste total mínimo es $C(\sqrt{12}) = 90 - 5\sqrt{12} + 10\sqrt{36 + (\sqrt{12})^2} = 90 + 30\sqrt{3} \approx 141.96 \text{ €}$.

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden

3×3 . (2,5 puntos)

y el valor de la matriz C^4 . (2,5 puntos)

b) El valor del determinante de la matriz $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1 . (3 puntos)

c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $BB = B$. (2 puntos)

a) Calculamos cada miembro de la igualdad y comprobamos que son iguales.

$$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25-8-8 & -20+4+8 & 10-4-2 \\ 10-2-4 & -8+1+4 & 4-1-1 \\ -20+8+4 & 16-4-4 & -8+4+1 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2C - I = 2 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-1 & -8 & 4 \\ 4 & -2-1 & 2 \\ -8 & 8 & -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

La igualdad es cierta.

Calculamos la expresión de C^4 .

$$C^4 = C^2 \cdot C^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81-32-32 & -72+24+32 & 36-16-12 \\ 36-12-16 & -32+9+16 & 16-6-6 \\ -72+32+24 & 64-24-24 & -32+16+9 \end{pmatrix}$$

$$C^4 = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

b) Si A una matriz cuadrada de orden 4 también lo es la matriz A^2 y A^4 . Si A es una matriz cuadrada de orden 4 entonces $|3A| = 3^4 |A|$. Otra propiedad es $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

$$\left| (3A^4)(4A^2)^{-1} \right| = |3A^4| \left| (4A^2)^{-1} \right| = 3^4 |A^4| \frac{1}{|4A^2|} = 3^4 |A|^4 \frac{1}{4^4 |A|^2} = \frac{3^4 |A|^4}{4^4 |A|^2} = \frac{3^4 (-1)^4}{4^4 (-1)^2} = \frac{81}{256}$$

c) Multiplicamos en la igualdad por la inversa de B .

$$BB = B \Rightarrow B B \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1} \Rightarrow B \cdot I = I \Rightarrow B = I$$

PROBLEMA B.2. Sea T un tetraedro de vértices $O = (0,0,0)$, $A = (1,1,1)$, $B = (3,0,0)$ y $C = (0,3,0)$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos A , B y C . (1 punto)
 y las ecuaciones de la recta h_0 perpendicular a π que pasa por O . (2 puntos)
 b) El punto de intersección de la altura h_0 y el plano π . (3 puntos)
 c) El área de la cara cuyos vértices son los puntos A , B y C , (2 puntos)
 y el volumen del tetraedro T . (2 puntos)

a) El plano π que contiene a los puntos A , B y C tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\pi : \begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3,0,0) - (1,1,1) = (2,-1,-1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,3,0) - (1,1,1) = (-1,2,-1) \\ B(3,0,0) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-3+y+4z-z+2y+2x-6=0 \Rightarrow 3x+3y+3z-9=0 \Rightarrow \pi : x+y+z-3=0$$

La recta h_0 perpendicular a π tiene como vector director el vector normal al plano.

$$\pi : x+y+z-3=0 \Rightarrow \vec{n} = (1,1,1)$$

$$h_0 : \begin{cases} O(0,0,0) \in h_0 \\ \vec{v} = \vec{n} = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow h_0 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x+y+z-3=0 \\ h_0 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + \lambda + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1,1,1)$$

El punto de corte de recta y plano es el punto $A(1, 1, 1)$.

c) Hallamos el área del triángulo ABC como la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,-1,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,2,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = i + j + 4k - k + 2j + 2i = 3i + 3j + 3k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (3,3,3) \Rightarrow \text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2}}{2} = \frac{\sqrt{27}}{2} u^2$$

El volumen del tetraedro T con vértices en O , A , B y C es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, -1, -1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 2, -1) \\ \overrightarrow{AO} = (0, 0, 0) - (1, 1, 1) = (-1, -1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

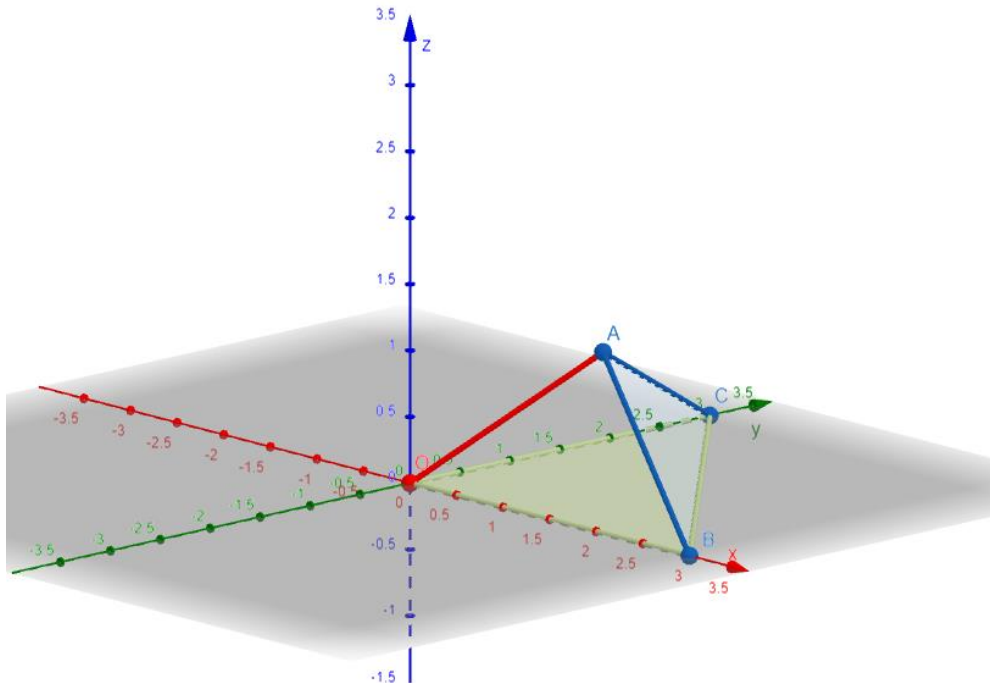
$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}] = -4 - 1 - 1 - 2 + 1 - 2 = -9$$

$$\text{Volumen } T = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}]}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \text{ unidades cúbicas}$$

OTRA FORMA DE OBTENER EL VOLUMEN DEL TETRAEDRO T

Como hemos hallado el plano π que contiene a los puntos A , B y C , hemos hallado el área del triángulo ABC (base del tetraedro), la recta perpendicular a la base que pasa por el punto O y la distancia de este punto al plano base (altura del tetraedro) podemos calcular el volumen del tetraedro $OABC$ como la tercera parte del área de la base por la altura.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Área base} = \text{Área } ABC = \frac{\sqrt{27}}{2} \\ \text{Altura} = d(O, \pi) = d(O, A) = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Volumen } T = \frac{\frac{\sqrt{27}}{2} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{3}{2} u^3$$



PROBLEMA B.3. Dada la función f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, para cualquier valor real $x \neq 0$, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f , (2 puntos)
 y los extremos relativos de la función f . (1 punto)
 b) Las asíntotas de la curva $y = f(x)$. (3 puntos)
 c) El área de la región plana limitada por la curva $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $1 \leq x \leq e$, el segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(e,0)$, y las rectas $x = 1$ y $x = e$. (4 puntos)

a) Obtenemos la derivada y la igualamos a cero, en busca de sus puntos críticos.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2+1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

La función presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores. Como el dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$, incluimos $x = 0$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{(-2)^2 - 1}{(-2)^2} = \frac{3}{4} > 0$.

La función crece en $(-\infty, -1)$.

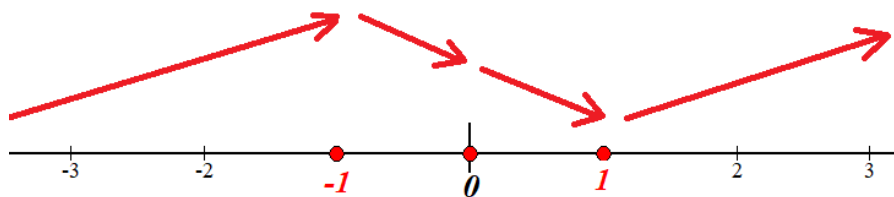
- En el intervalo $(-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = \frac{(-0.5)^2 - 1}{(-0.5)^2} = -3 < 0. \text{ La función decrece en } (-1, 0).$$

- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{0.5^2 - 1}{0.5^2} = -3 < 0$. La función decrece en $(0, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2^2 - 1}{2^2} = \frac{3}{4} > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

- b) El dominio de la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntota vertical. $x = a$ ¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{0^2 + 1}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

 $x = 0$ es asíntota vertical.**Asíntota horizontal.** $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x$.

- c) Dibujamos la región plana limitada por la curva $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, $1 \leq x \leq e$, el segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(e,0)$, y las rectas $x = 1$ y $x = e$.

Mirando el dibujo y contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada se observa que el área pedida valdrá entre 4 y 5 unidades cuadradas.

Calculamos el valor exacto del área como la integral definida de la función entre 1 y e .

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^e \frac{x^2 + 1}{x} dx = \\ &= \int_1^e \left(\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \ln x \right]_1^e = \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{e^2}{2} + \ln e \right] - \left[\frac{1^2}{2} + \ln 1 \right] = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{e^2 + 1}{2} \approx 4.1945 \text{ unidades cuadradas}$$

