PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Esta prueba consta de 4 ejercicios.
c) En algunos ejercicios se da la posibilidad de elegir entre apartado A) o B). Responda sólo el apartado **que elija. En caso contrario, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar**
d) En cada ejercicio o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
e) Todos los resultados deben estar **suficientemente justificados**.
f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos.
g) La valoración de la corrección gramatical, léxica y ortográfica, así como la presentación del texto no será superior al 10 %.

EJERCICIO 1

(3 puntos) Una empresa comercializa dos especias a granel: orégano y pimienta. Para elaborar un kilo de orégano se requieren 2 horas de secado y 2 horas de envasado, mientras que para elaborar un kilo de pimienta se requieren 1 hora de secado y 5 horas de envasado. La empresa dispone de un horno para secado que funciona 24 horas al día de lunes a viernes. Para el envasado hay 4 empleados que trabajan 40 horas a la semana como máximo cada uno. La empresa tiene el compromiso contractual de producir a la semana al menos 35 kilogramos contabilizando ambas especias. El precio de venta del orégano es de 50€ el kilogramo y el de la pimienta es de 70€ el kilogramo. Sabiendo que el coste de producción de cada kilogramo de orégano y pimienta es de 5€ y 7€ respectivamente, ¿cuántos kilogramos de cada especia deben producirse semanalmente para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál sería dicho beneficio?

EJERCICIO 2

Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) a) **(1 punto)** Calcule los valores de a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{x-1} & si\ x\le 0\\ x^2+bx+3 & si\ x>0\end{cases}$$

sea continua y derivable en $x=0$.

b) **(1.25 puntos)** Dada la función $g(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$, calcule las asíntotas, los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y esboce la gráfica de la función.

c) **(0.75 puntos)** Calcule el área del recinto acotado limitado por el eje de abscisas y la gráfica de la función $h(x)=x^2-x-6$.

B) Sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x+2 & si\ 0<x\le 3\\ \dfrac{10}{a-x} & si\ x>3\end{cases}$$

siendo a un número real.

a) **(0.5 puntos)** Determine el valor de a para el que f es continua en $x=3$.

b) Para $a=4$:

i) **(1 punto)** Determine las ecuaciones de las asíntotas de f, si existen.

ii) **(1.5 puntos)** Estudie la derivabilidad y monotonía de f.

EJERCICIO 3

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral que verifican:
- La probabilidad de que ocurra el suceso A es 0.5.
- La probabilidad de que ocurra A y no ocurra B es 0.35.
- La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es 0.35.

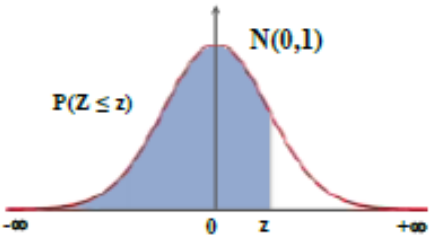
a) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurran los dos sucesos a la vez.
b) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra B sabiendo que A no ha ocurrido.
c) **(0.4 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra uno y solo uno de los dos.
d) **(0.4 puntos)** ¿Son dependientes los sucesos A y B? ¿Son incompatibles?

EJERCICIO 4 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) La probabilidad de que Paco gane un partido de bádminton es 0.8.
a) En un torneo participan 10 jugadores (incluido Paco) y cada jugador juega un partido con cada uno de los restantes jugadores. Calcule la probabilidad de que Paco:
   i) **(0.5 puntos)** Gane exactamente 8 partidos.
   ii) **(0.5 puntos)** Gane como mucho 8 partidos.
b) **(1 punto)** Si a lo largo de un año Paco juega 80 partidos, ¿cuál es la probabilidad de que pierda más de 10 pero menos de 20 partidos ese año?

B) Para estimar en Andalucía la proporción de personas que practican natación como hábito deportivo, se ha seleccionado una muestra de 400 personas, de las que 106 practican natación.
a) **(0.75 puntos)** Con un nivel de confianza del 98.5%, calcule un intervalo de confianza para estimar la proporción de personas que practican natación como hábito deportivo en Andalucía.
b) **(0.5 puntos)** A la vista del intervalo obtenido, razone si se puede admitir que en Andalucía el 4% de las personas practican natación como hábito deportivo.
c) **(0.75 puntos)** Si mantenemos la misma proporción muestral, ¿cuántas personas, como mínimo, tendrían que formar parte de la muestra seleccionada para que, con un nivel de confianza del 97%, el error cometido en la estimación de la proporción poblacional de quienes practican natación como hábito deportivo en Andalucía fuese como máximo del 3%?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

EJERCICIO 1

(3 puntos) Una empresa comercializa dos especias a granel: orégano y pimienta. Para elaborar un kilo de orégano se requieren 2 horas de secado y 2 horas de envasado, mientras que para elaborar un kilo de pimienta se requieren 1 hora de secado y 5 horas de envasado. La empresa dispone de un horno para secado que funciona 24 horas al día de lunes a viernes. Para el envasado hay 4 empleados que trabajan 40 horas a la semana como máximo cada uno. La empresa tiene el compromiso contractual de producir a la semana al menos 35 kilogramos contabilizando ambas especias. El precio de venta del orégano es de 50€ el kilogramo y el de la pimienta es de 70€ el kilogramo. Sabiendo que el coste de producción de cada kilogramo de orégano y pimienta es de 5€ y 7€ respectivamente, ¿cuántos kilogramos de cada especia deben producirse semanalmente para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál sería dicho beneficio?

Llamamos "x" a los kilos de orégano e "y" a los kilos de pimienta que se elaboran a la semana.

El beneficio es la diferencia entre los ingresos y el coste. Con la venta de 1 kilo de orégano obtengo 50 € – 5€ = 45 €. Con la venta de 1 kilo de pimienta obtengo 70€ – 7€ = 63€.

Elaboramos una tabla con los datos del problema.

	Horas de secado	Horas de envasado	Beneficio
Kilos de orégano (x)	2x	2x	45x
Kilos de pimienta (y)	y	5y	63y
TOTALES	$2x+y$	$2x+5y$	$45x+63y$

La función que queremos maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x,y)=45x+63y$.

Las restricciones son las siguientes.

La empresa dispone de un horno para secado que funciona 24 horas al día de lunes a viernes (5 días). → $2x+y\le 24\cdot 5\rightarrow 2x+y\le 120$

Para el envasado hay 4 empleados que trabajan 40 horas a la semana como máximo cada uno. → $2x+5y\le 4\cdot 40\rightarrow 2x+5y\le 160$.

La empresa tiene el compromiso contractual de producir a la semana al menos 35 kilogramos contabilizando ambas especias → $x+y\ge 35$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y\le 120 \\ 2x+5y\le 160 \\ x+y\ge 35 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+y=120$

x	$y=120-2x$
0	120
55	10
60	0

$2x+5y=160$

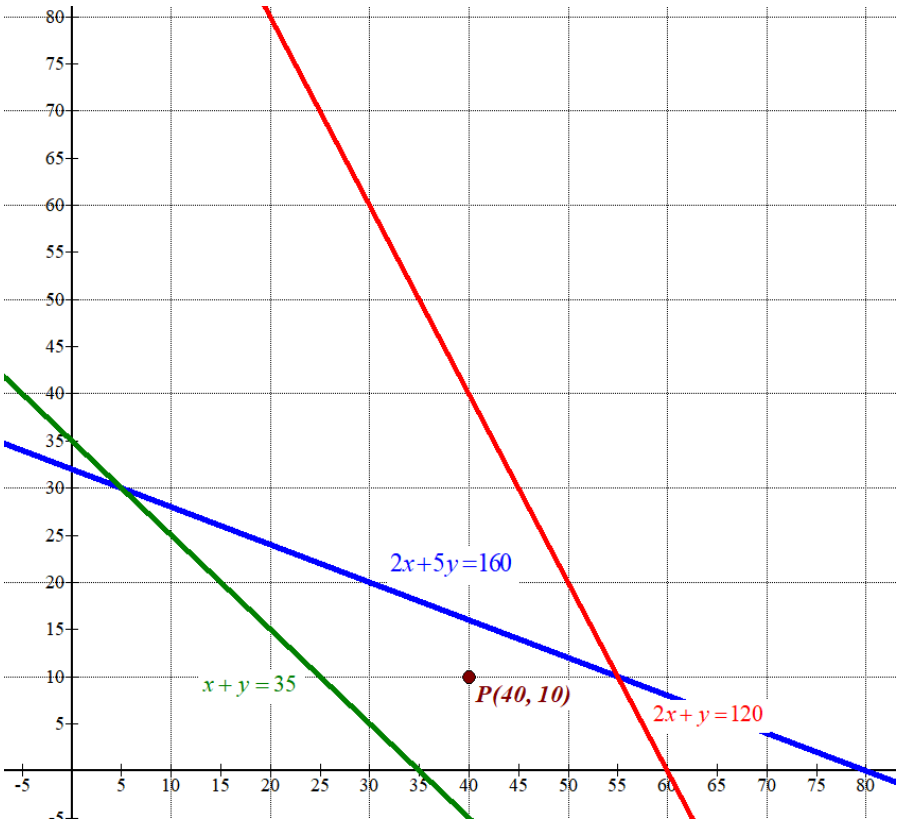
x	$y=\frac{160-2x}{5}$
0	32
5	30
55	10
80	0

$x+y=35$

x	$y=35-x$
0	35
5	30
35	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

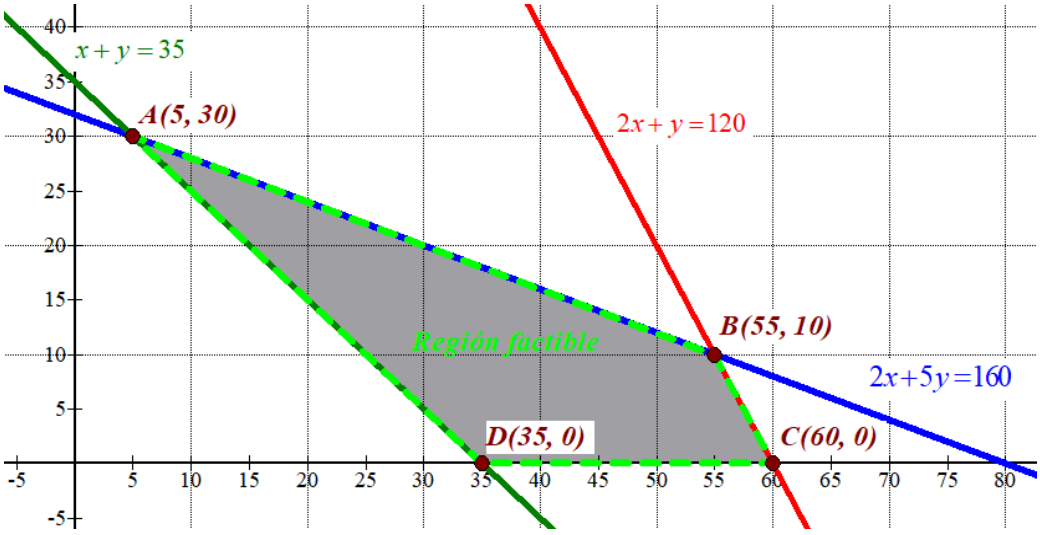
Primer cuadrante



La región factible está situada en el primer cuadrante por debajo de las rectas roja y azul, y por encima de la recta verde. Comprobamos que el punto P(40, 10) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 40+10\le 120 \\ 2\cdot 40+5\cdot 10\le 160 \\ 40+10\ge 35 \\ 40\ge 0;\ 10\ge 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 80+10\le 120 \\ 80+50\le 160 \\ 40+10\ge 35 \\ 40\ge 0;\ 10\ge 0 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función beneficio $B(x,y)=45x+63y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

A(5, 30) → $B(5,30) = 45\cdot 5 + 63\cdot 30 = 2115$

B(55, 10) → $B(55,10) = 45\cdot 55 + 63\cdot 10 = 3105$ *Máximo*

C(60, 0) → $B(60,0) = 45\cdot 60 + 63\cdot 0 = 2700$

D(35, 0) → $B(35,0) = 45\cdot 35 + 63\cdot 0 = 1575$

El valor máximo es 3105 y se alcanza en el vértice D(55, 10).
El máximo beneficio que se puede conseguir es de 3105 euros con la elaboración de 55 kilos de orégano y 10 kilos de pimienta.

EJERCICIO 2 A) a) **(1 punto)** Calcule los valores de a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{x-1} & si\ x\le 0\\ x^2+bx+3 & si\ x>0\end{cases}$$

sea continua y derivable en $x=0$.

b) **(1.25 puntos)** Dada la función $g(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$, calcule las asíntotas, los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y esboce la gráfica de la función.

c) **(0.75 puntos)** Calcule el área del recinto acotado limitado por el eje de abscisas y la gráfica de la función $h(x)=x^2-x-6$.

a) La función debe ser continua en $x=0$, eso implica que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{0-a}{0-1}=a\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-a}{x-1}=a\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+bx+3=0^2+b\cdot 0+3=3\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=3}$$

La función es continua en $x=0$ para $a=3$ y queda $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x-1} & si\ x\le 0\\ x^2+bx+3 & si\ x>0\end{cases}$.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$. Su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1\cdot(x-1)-1\cdot(x-3)}{(x-1)^2}=\dfrac{x-1-x+3}{(x-1)^2}=\dfrac{2}{(x-1)^2} & si\ x<0\\ 2x+b\ \ si\ x>0\end{cases}$$

La función debe ser derivable en $x=0$, por lo que las derivadas laterales deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2}{(x-1)^2}=\dfrac{2}{(0-1)^2}=2\\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x+b=2\cdot 0+b=b\\ f'(0^-)=f'(0^+)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{b=2}$$

Los valores buscados son $a=3$ y $b=2$.

b) El dominio de la función $g(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$ es $\mathbb{R}-\{1\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x-1}=\frac{1-3}{1-1}=\frac{-2}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-3}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1-2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x-1}-\frac{2}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}1-\frac{2}{x-1}=1-\frac{2}{\infty}=1-0=\boxed{1}$$

La recta $y=1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal la función no puede tener asíntota oblicua.

Calculamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=\dfrac{x-3}{x-1} \\ Eje\,OX\ \to y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=\frac{x-3}{x-1}\Rightarrow x-3=0\Rightarrow x=3\Rightarrow \boxed{A(3,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=\dfrac{x-3}{x-1} \\ Eje\,OY\ \to x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0)=\frac{0-3}{0-1}=3\Rightarrow \boxed{B(0,3)}$$

Los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes son A(3, 0) y B(0,3).

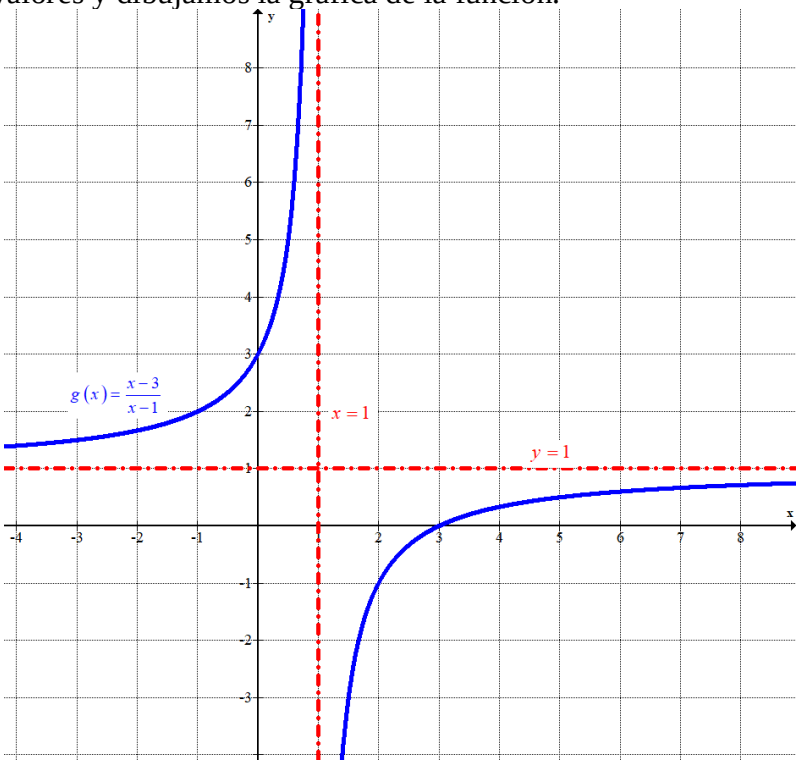
Estudiamos la monotonía de la función. La expresión de la derivada de la función es:

$$g'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-1\cdot(x-3)}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x+3}{(x-1)^2}=\frac{2}{(x-1)^2}$$

Esta expresión de la derivada siempre es positiva, por lo que la función siempre es creciente.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$g(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$
−1	2
0	3
0.5	5
1.5	−3
11	0.8



c) Averiguamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas ($y=0$).

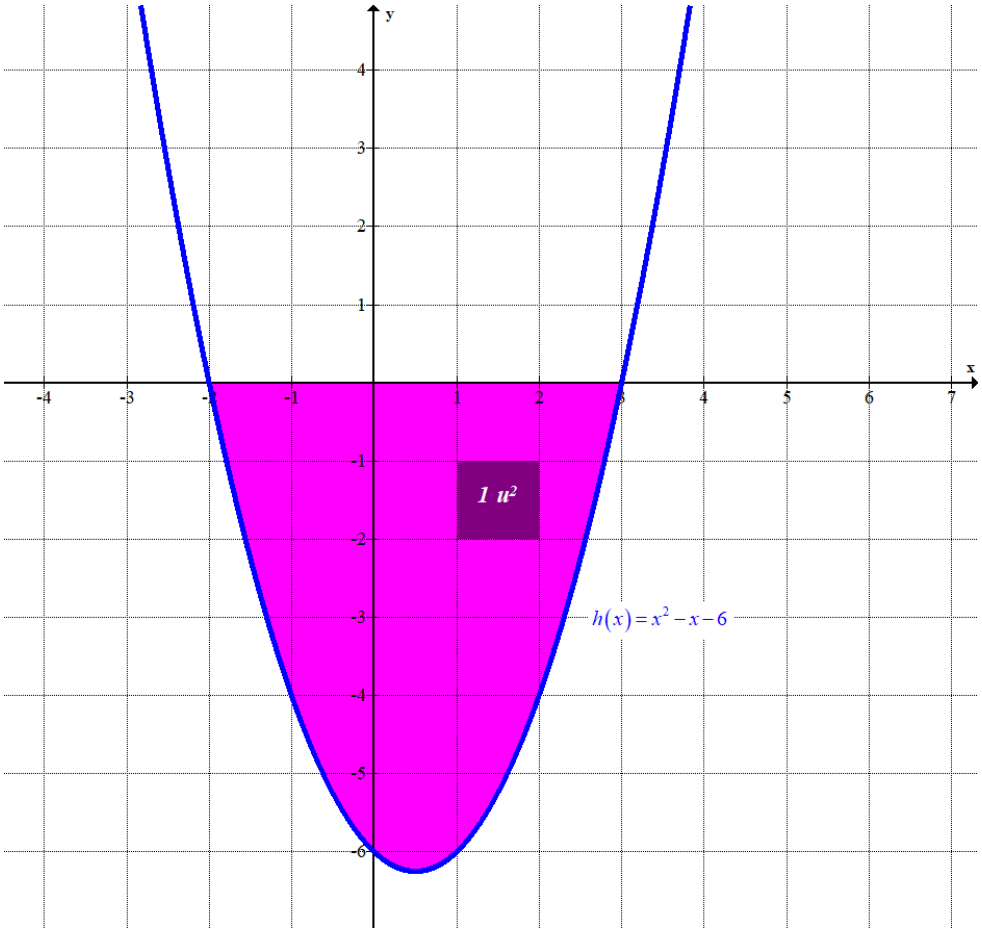
$$h(x)=0 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-6)}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{1+5}{2}=\boxed{3=x}\\ \frac{1-5}{2}=\boxed{-2=x}\end{cases}$$

La función corta el eje de abscisas en $x=-2$ y $x=3$. El área del recinto acotado limitado por el eje de abscisas y la gráfica de la función $h(x)=x^2-x-6$ es el valor absoluto de la integral definida de –2 a 3 de la función.

$$\int_{-2}^{3} h(x)\,dx=\int_{-2}^{3} x^2-x-6dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-2}^{3}=\left[\frac{3^3}{3}-\frac{3^2}{2}-6\cdot 3\right]-$$

$$-\left[\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}-6(-2)\right]=9-4.5-18+\frac{8}{3}+2-12=\boxed{\frac{-125}{6}\simeq -20.63}$$

El área tiene un valor de $\frac{125}{6}\simeq 20.63$ unidades cuadradas.



EJERCICIO 2 B) Sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x+2 & si\ 0<x\le 3 \\ \dfrac{10}{a-x} & si\ x>3 \end{cases}$$

siendo *a* un número real.

a) **(0.5 puntos)** Determine el valor de *a* para el que f es continua en $x=3$.

b) Para $a=4$:

i) **(1 punto)** Determine las ecuaciones de las asíntotas de f, si existen.

ii) **(1.5 puntos)** Estudie la derivabilidad y monotonía de f.

a) Para que la función sea continua deben coincidir los límites laterales con el valor de la función en $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=3^3-3\cdot 3+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x^3-3x+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{10}{a-x}=\dfrac{10}{a-3} \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{10}{a-3}=2\Rightarrow 10=2a-6\Rightarrow 2a=16\Rightarrow \boxed{a=8}$$

La función es continua en $x=3$ para $a=8$.

b.i) Para $a=4$ la función queda con la expresión $f(x)=\begin{cases} x^3-3x+2 & si\ 0<x\le 3 \\ \dfrac{10}{4-x} & si\ x>3 \end{cases}$.

La función no es continua en $x=3$. La función no existe para $x=4$, pues este valor anula el denominador de la expresión $\dfrac{10}{4-x}$. El dominio de la función es $(0,4)\cup(4,+\infty)$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=4$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{10}{4-x}=\frac{10}{4-4}=\frac{10}{0}=\infty$$

$x=4$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

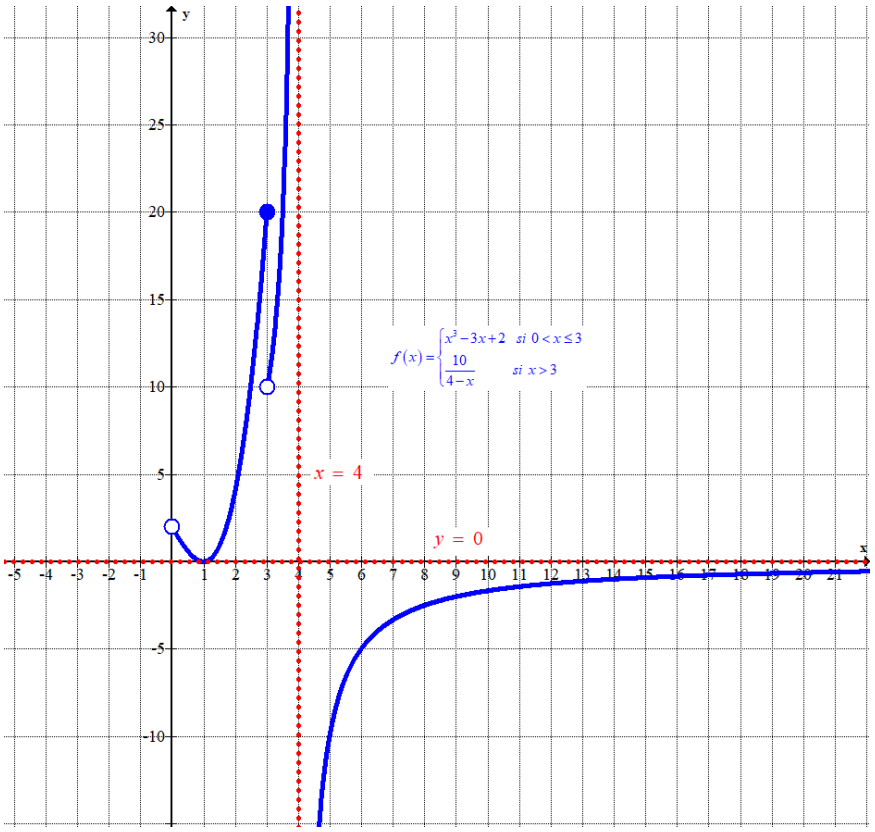
Estudiamos lo que ocurre cuando *x* tiende a $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{4-x}=\frac{10}{-\infty}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal cuando *x* tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal la función no puede tener asíntota oblicua.



b.ii) La función no es continua en $x=3$, por lo tanto, no es derivable en este valor. La función no existe para $x=4$, por lo que tampoco es derivable en dicho valor.
La función es derivable en $(0,3)\cup(3,4)\cup(4,+\infty)$. Calculamos su derivada.

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x+2 & si\ 0<x\leq 3 \\ \dfrac{10}{4-x} & si\ x>3 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 3x^2-3 & si\ 0<x<3 \\ \dfrac{10}{(4-x)^2} & si\ x>3, x\neq 4 \end{cases}$$

Estudiamos su monotonía.
En el intervalo $(0,3)$ la función derivada es $f'(x)=3x^2-3$. Averiguamos cuando se anula.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \rightarrow x^2-1=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\sqrt{1}=1\in(0,3)$$

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x=0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=3\cdot 0.5^2-3=-2.25<0$. La función decrece en $(0,1)$.
- En el intervalo $(1,3)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=3\cdot 2^2-3=9>0$ la función crece en $(1,3)$.

En el intervalo $(3,4)\cup(4,+\infty)$ la función derivada es $f'(x)=\dfrac{10}{(4-x)^2}$ que es una expresión positiva. La función crece en $(3,4)\cup(4,+\infty)$.

Conclusión: La función decrece en $(0,1)$ y crece en $(1,3)\cup(3,4)\cup(4,+\infty)$.

EJERCICIO 3 Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral que verifican:
- La probabilidad de que ocurra el suceso A es 0.5.
- La probabilidad de que ocurra A y no ocurra B es 0.35.
- La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es 0.35.

a) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurran los dos sucesos a la vez.
b) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra B sabiendo que A no ha ocurrido.
c) **(0.4 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra uno y solo uno de los dos.
d) **(0.4 puntos)** ¿Son dependientes los sucesos A y B? ¿Son incompatibles?

Nos dicen que $P(A)=0.5$, $P(A\cap\overline{B})=0.35$ *y* $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0.35$.

a) Debemos calcular $P(A\cap B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=0.5 \\ P(A\cap\overline{B})=0.35 \\ P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B}) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.5=P(A\cap B)+0.35 \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=0.15}$$

b) Debemos calcular $P(B/\overline{A})$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(B/\overline{A})=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A})-P(\overline{B}\cap\overline{A})}{1-P(A)}=\frac{1-P(A)-P(\overline{B}\cap\overline{A})}{1-P(A)}=\frac{1-0.5-0.35}{1-0.5}=\boxed{0.3}$$

c) Debemos calcular $P\left((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right)$. Como son dos sucesos incompatibles tenemos que $P\left((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right)=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)$.

$$P\left((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right)=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=0.35+P(\overline{A})-P(\overline{B}\cap\overline{A})=$$

$$=0.35+1-P(A)-P(\overline{B}\cap\overline{A})=0.35+1-0.5-0.35=\boxed{0.5}$$

d) Para que los sucesos sean independientes debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=0.35\Rightarrow P(\overline{A\cup B})=0.35\Rightarrow P(A\cup B)=1-0.35=0.65$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0.65=0.5+P(B)-0.15\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(B)=0.65-0.5+0.15=0.3$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.15 \\ P(A)P(B)=0.5\cdot 0.3 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)=0.15=P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B son independientes.

Para que los sucesos A y B sean incompatibles su intersección debe ser vacía y la probabilidad de $A\cap B$ debe ser 0, pero esta probabilidad vale 0.15 distinto de cero.
Los sucesos A y B no son incompatibles, es decir, son compatibles.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO.

Ponemos los datos del ejercicio en una tabla de probabilidades.

$P(A)=0.5,\ P\left(A\cap\overline{B}\right)=0.35\ y\ P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0.35$

	B	$\overline{B}$	
A		0.35	0.5
$\overline{A}$		0.35	
			1

Completamos la tabla.

	B	$\overline{B}$	
A	0.15	0.35	0.5
$\overline{A}$	0.15	0.35	0.5
	0.3	0.7	1

Con los datos de la tabla respondemos a las preguntas planteadas.

a) Debemos calcular $P(A\cap B)$. Observamos en la tabla que $P(A\cap B)=0.15$

b) Debemos calcular $P\left(B/\overline{A}\right)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P\left(B/\overline{A}\right)=\frac{P\left(B\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{0.15}{0.5}=\boxed{0.3}$$

c) Debemos calcular $P\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)$. Como son dos sucesos incompatibles tenemos que $P\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap B\right)$.

$$P\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap B\right)=0.35+0.15=\boxed{0.5}$$

d) Para que los sucesos sean independientes debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=0.15\\P(A)P(B)=0.5\cdot0.3=0.15\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0.15=P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B son independientes.
Como $P(A\cap B)=0.15\neq0$ los sucesos A y B son compatibles.

EJERCICIO 4 A) La probabilidad de que Paco gane un partido de bádminton es 0.8.
a) En un torneo participan 10 jugadores (incluido Paco) y cada jugador juega un partido con cada uno de los restantes jugadores. Calcule la probabilidad de que Paco:
i) **(0.5 puntos)** Gane exactamente 8 partidos.
ii) **(0.5 puntos)** Gane como mucho 8 partidos.
b) **(1 punto)** Si a lo largo de un año Paco juega 80 partidos, ¿cuál es la probabilidad de que pierda más de 10 pero menos de 20 partidos ese año?

A) Paco debe jugar 9 partidos contra cada uno de los restantes 9 participantes en el torneo, siendo la probabilidad de que gane un partido de 0.8. Consideramos la variable aleatoria X que cuente los partidos que gana Paco en el torneo.
Esta variable es una binomial de parámetros p = 0.8 y n = número de repeticiones = 9.
$X = B(9, 0.8)$

a.i) Nos piden calcular $P(X = 8)$.

$$P(X=8) = \binom{9}{8} 0.8^8 \cdot 0.2^1 = 9 \cdot 0.8^8 \cdot 0.2 \simeq \boxed{0.302}$$

La probabilidad de que Paco gane exactamente 8 partidos en el torneo vale 0.302.

a.ii) Debemos calcular $P(X \leq 8)$. Utilizamos el suceso contrario.

$$P(X \leq 8) = 1 - P(X = 9) = 1 - \binom{9}{9} 0.8^9 \cdot 0.2^0 = 1 - 0.8^9 \simeq \boxed{0.8658}$$

La probabilidad de que Paco gane como mucho 8 partidos en el torneo vale 0.8658.

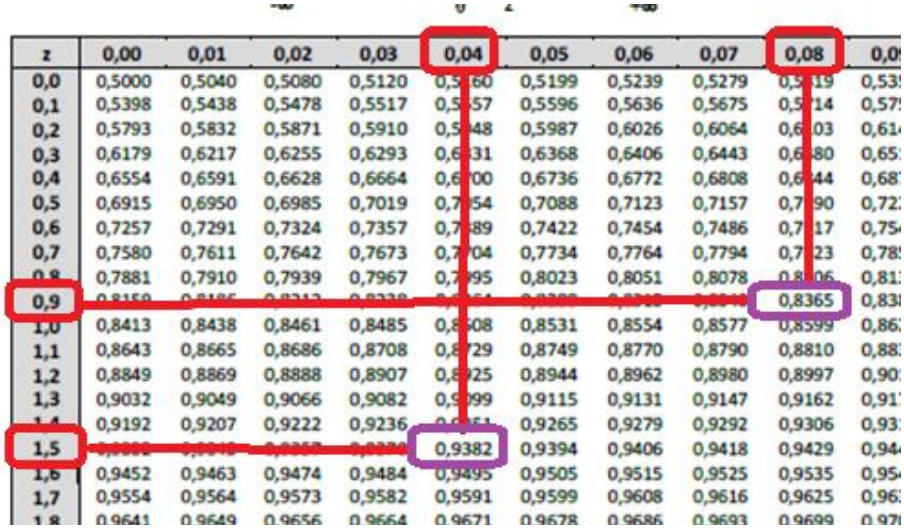
b) Consideramos la variable aleatoria Y que cuenta los partidos que pierde Paco en un año.
Esta variable es una binomial de parámetros p = 0.2 y n = número de repeticiones = 80.
$Y = B(80, 0.2)$.
Como el número de repeticiones es muy alto aproximamos la binomial a una normal Y´ de media $\mu = np = 80 \cdot 0.2 = 16$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \simeq 3.5777$.
$Y' = N\left(16, \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)$. Esta aproximación es buena pues $np = 64 > 5$ y $nq = 80 \cdot 0.2 = 16 > 5$.
Debemos calcular $P(10 < Y < 20)$.

$$P(10 < Y < 20) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(10.5 \leq Y' \leq 19.5) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \frac{Y' - 16}{8\sqrt{5}/5} \end{matrix} \right\} = P\left(\frac{10.5 - 16}{8\sqrt{5}/5} \leq Z \leq \frac{19.5 - 16}{8\sqrt{5}/5} \right) = P(-1.54 \leq Z \leq 0.98) =$$

$$= P(Z \leq 0.98) - P(Z \leq -1.54) = P(Z \leq 0.98) - P(Z \geq 1.54) =$$

$$= P(Z \leq 0.98) - \left[1 - P(Z \leq 1.54)\right] = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 0.8365 - 1 + 0.9382 = \boxed{0.7747}$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,53
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,57
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,61
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,65
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,68
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,72
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,75
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,78
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,81
0,9									0,8365	0,83
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,86
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,88
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,90
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,91
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,93
1,5					0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,94
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,95
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,96
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,97

EJERCICIO 4 B) Para estimar en Andalucía la proporción de personas que practican natación como hábito deportivo, se ha seleccionado una muestra de 400 personas, de las que 106 practican natación.

a) **(0.75 puntos)** Con un nivel de confianza del 98.5%, calcule un intervalo de confianza para estimar la proporción de personas que practican natación como hábito deportivo en Andalucía.

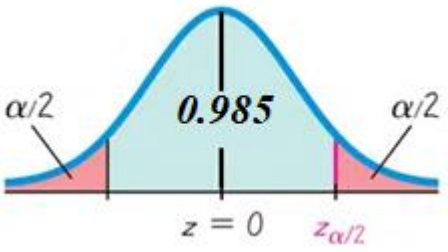
b) **(0.5 puntos)** A la vista del intervalo obtenido, razone si se puede admitir que en Andalucía el 4% de las personas practican natación como hábito deportivo.

c) **(0.75 puntos)** Si mantenemos la misma proporción muestral, ¿cuántas personas, como mínimo, tendrían que formar parte de la muestra seleccionada para que, con un nivel de confianza del 97%, el error cometido en la estimación de la proporción poblacional de quienes practican natación como hábito deportivo en Andalucía fuese como máximo del 3%?

a) La proporción de personas que practican natación como hábito deportivo es $p=\frac{106}{400}=0.265$. El tamaño de la muestra es $n=400$.

Averiguamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza el 98.5 %.

$$1-\alpha=0.985\rightarrow\alpha=0.015\rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.0075\rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.9925\rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Busco en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}\rightarrow z_{\alpha/2}=2.43$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901
2,4				0,9925
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* y tenemos

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\left(1-p\right)}{n}}=2.43\cdot\sqrt{\frac{0.265\left(1-0.265\right)}{400}}\simeq 0.0536$$

Con un nivel de confianza del 98.5%, el intervalo de confianza para la proporción de personas que practican natación como hábito deportivo en Andalucía es:

$$\left(p-Error,\ p+Error\right)=\left(0.265-0.0536,\ 0.265+0.0536\right)=\left(0.2114,\ 0.3186\right)$$

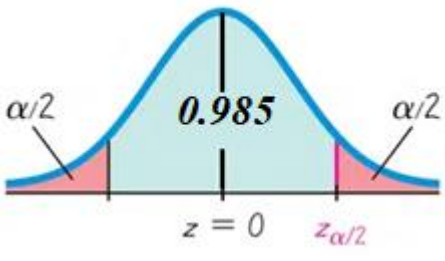
Con un nivel de confianza del 98.5%, el porcentaje de personas que practican natación como hábito deportivo en Andalucía está situado entre el 21.14% y el 31.86%.

b) El 4% se corresponde con una proporción de 0.04. Este valor no pertenece al intervalo de confianza obtenido en el apartado anterior $(0.2114,\ 0.3186)$.

A la vista del intervalo obtenido, no se puede admitir que en Andalucía el 4% de las personas practican natación como hábito deportivo.

c) Averiguamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza el 97 %.

$$1-\alpha=0.97\rightarrow\alpha=0.03\rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.015\rightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0.985\rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Busco en la}\\\text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}\rightarrow z_{\alpha/2}=2.17$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	
	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	
2,1								0,9850
	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* , lo igualamos a 0.03 y despejamos *n*.

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\left(1-p\right)}{n}}\Rightarrow0.03=2.17\cdot\sqrt{\frac{0.265\left(1-0.265\right)}{n}}\Rightarrow\frac{0.03}{2.17}=\sqrt{\frac{0.265\cdot0.735}{n}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{0.03}{2.17}\right)^2=\frac{0.265\cdot0.735}{n}\Rightarrow n=\frac{0.265\cdot0.735}{\left(\frac{0.03}{2.17}\right)^2}\simeq1019.084$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero superior al obtenido. Se debe tomar una muestra de un mínimo de 1020 personas.