PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Esta prueba consta de 4 ejercicios.
c) En algunos ejercicios se da la posibilidad de elegir entre apartado A) o B). Responda sólo el apartado **que elija. En caso contrario, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar**
d) En cada ejercicio o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
e) Todos los resultados deben estar **suficientemente justificados**.
f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos.
g) La valoración de la corrección gramatical, léxica y ortográfica, así como la presentación del texto no será superior al 10 %.

EJERCICIO 1 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 4x-7y+5z=9 \\ -2x+3y-z=-4 \\ 6x-11y+9z=14 \end{cases}$$

a) **(1.5 puntos)** Clasifique el sistema de ecuaciones y, si es posible, resuélvalo.
b) **(0.75 puntos)** ¿Existe alguna solución donde la incógnita y es el doble de z? En caso afirmativo, obténgala.
c) **(0.75 puntos)** Indique si existe alguna solución del sistema en la que $y=-4$. En caso afirmativo, obténgala.

B) Consideremos el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$3x-4y\le 6;\ x+y\le 9;\ x+4y\le 24;\ 3x+2y\ge 6;\ x\ge 0$$

a) **(1.75 puntos)** Represente gráficamente el recinto y calcule sus vértices.
b) **(0.5 puntos)** Indique razonadamente si los puntos $P(3,\ 0.9)$ y $Q(1,\ 5.9)$ pertenecen al recinto.
c) **(0.75 puntos)** Obtenga el valor máximo y mínimo de la función objetivo $F(x,y)=2x+3y-2$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.

EJERCICIO 2

Una nueva plataforma de streaming realiza una prueba de funcionamiento durante un trimestre (13 semanas). Se estima que el índice de aceptación de esta plataforma evolucionará de acuerdo con la función

$$I(t)=\frac{1}{100}\cdot 2^t;\ 0\le t\le 13$$

siendo t el tiempo transcurrido (en semanas) desde su inicio.

a) **(0.75 puntos)** Obtenga el intervalo en el que el índice va aumentando.
b) **(0.75 puntos)** ¿En cuántas semanas se obtendrá un índice de aceptación de 10.24?
c) **(0.75 puntos)** Calcule la tasa de crecimiento instantánea transcurridas 5 semanas.
d) **(0.75 puntos)** ¿Es posible alcanzar un índice de aceptación de 90 durante el trimestre?

EJERCICIO 3

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral que verifican:
- La probabilidad de que ocurra el suceso A es 0.6.
- La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es 0.15.
- La probabilidad de que ocurra el suceso B sabiendo que ha ocurrido el suceso A es 0.3.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.
b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurran los dos sucesos a la vez.
c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra uno y solo uno de los sucesos.
d) **(0.25 puntos)** ¿Son dependientes los sucesos A y B?

EJERCICIO 4 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) El tiempo, en minutos, que tardan los autobuses de cierta ciudad en recorrer la ruta principal, sigue una distribución Normal de media 40 y desviación típica 5. La empresa clasifica un viaje como "rápido" si el autobús tarda menos de 33.6 minutos en recorrer el trayecto.

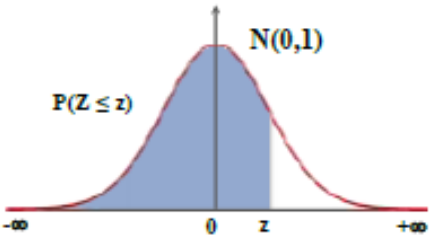
a) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que un viaje sea "rápido".
b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que al menos 3 de 5 trayectos seleccionados de esta ruta hayan sido "rápidos".
c) **(0.75 puntos)** Seleccionados 80 trayectos de esta ruta, calcule la probabilidad de que a lo sumo 15 sean "rápidos".

B) Un estudio sobre la diabetes en analítica de sangre, determina que la cantidad de hemoglobina glicosilada en sangre, en porcentaje, sigue una ley Normal de varianza 0.09. Se eligen de forma aleatoria 10 analíticas de sangre y se anota la hemoglobina glicosilada, obteniéndose:

6.6, 5.9, 6.2, 5.7, 5.8, 6.4, 6.4, 6.3, 5.7, 6.0

a) **(0.75 puntos)** Con un nivel de confianza del 97%, calcule un intervalo de confianza para estimar la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional.
b) **(0.5 puntos)** A la vista del intervalo obtenido, razone si se puede admitir que la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional es 6.5.
c) **(0.75 puntos)** ¿Cuántas analíticas, como mínimo, tendrían que formar parte de la muestra seleccionada para que, con un nivel de confianza del 98%, el error cometido en la estimación de la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional sea como máximo de 0.1?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

EJERCICIO 1 A) Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 4x-7y+5z=9 \\ -2x+3y-z=-4 \\ 6x-11y+9z=14 \end{cases}$$

a) **(1.5 puntos)** Clasifique el sistema de ecuaciones y, si es posible, resuélvalo.
b) **(0.75 puntos)** ¿Existe alguna solución donde la incógnita y es el doble de z? En caso afirmativo, obténgala.
c) **(0.75 puntos)** Indique si existe alguna solución del sistema en la que $y=-4$. En caso afirmativo, obténgala.

a) El sistema tiene la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 6 & -11 & 9 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 & 9 \\ -2 & 3 & -1 & -4 \\ 6 & -11 & 9 & 14 \end{pmatrix}$.

Triangulamos la matriz ampliada usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 & 9 \\ -2 & 3 & -1 & -4 \\ 6 & -11 & 9 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot \text{Fila } 2^{\text{a}} + \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ -4 \quad 6 \quad -2 \quad -8 \\ 4 \quad -7 \quad 5 \quad 9 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 3 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot \text{Fila } 3^{\text{a}} - 3\cdot \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ 12 \quad -22 \quad 18 \quad 28 \\ -12 \quad 21 \quad -15 \quad -27 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 3 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Fila } 3^{\text{a}} - \text{Fila } 2^{\text{a}} \\ 0 \quad -1 \quad 3 \quad 1 \\ 0 \quad 1 \quad -3 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{4 & -7 & 5 & 9}^{A/B} \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes A y de la matriz ampliada A/B es 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Resolvemos el sistema, a partir de la matriz equivalente obtenida.

$$\begin{pmatrix} \overbrace{4 & -7 & 5 & 9}^{A/B} \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4x-7y+5z=9 \\ -y+3z=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4x-7y+5z=9 \\ 3z-1=y \end{matrix} \Rightarrow 4x-7(3z-1)+5z=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-21z+7+5z=9 \Rightarrow 4x=2+16z \Rightarrow x=\frac{1}{2}+4z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ y=3\alpha-1 \ ; \ \alpha\in\mathbb{R} \\ z=\alpha \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema planteado son $\begin{cases} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ y=3\alpha-1 \ ; \ \alpha\in\mathbb{R} \\ z=\alpha \end{cases}$.

b) Añadimos la ecuación $y=2z$ a la expresión de las soluciones y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ y=3\alpha-1 \\ z=\alpha \\ y=2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ y=3\alpha-1 \\ z=\alpha \\ y=2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ 2\alpha=3\alpha-1 \\ z=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ 1=\alpha \\ z=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4=4.5 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}\right\}}$$

Existe una solución que cumple lo pedido: $x=4.5, \quad y=2, \quad z=1$.

c) Añadimos la ecuación $y=-4$ a la expresión de las soluciones y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ y=3\alpha-1 \\ z=\alpha \\ y=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ -4=3\alpha-1 \\ z=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ -3=3\alpha \\ z=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ -1=\alpha \\ z=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}-4=-3.5 \\ y=-4 \\ z=-1 \end{array}\right\}}$$

Existe una solución que cumple lo pedido: $x=-3.5, \quad y=-4, \quad z=-1$

EJERCICIO 1 B) Consideremos el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$3x-4y\le 6;\ x+y\le 9;\ x+4y\le 24;\ 3x+2y\ge 6;\ x\ge 0$$

a) **(1.75 puntos)** Represente gráficamente el recinto y calcule sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** Indique razonadamente si los puntos $P(3,\ 0.9)$ y $Q(1,\ 5.9)$ pertenecen al recinto.

c) **(0.75 puntos)** Obtenga el valor máximo y mínimo de la función objetivo $F(x,y)=2x+3y-2$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x-4y=6$

x	$y=\dfrac{3x-6}{4}$
−2	−3
2	0
6	3

$x+y=9$

x	$y=9-x$
0	9
4	5
6	3

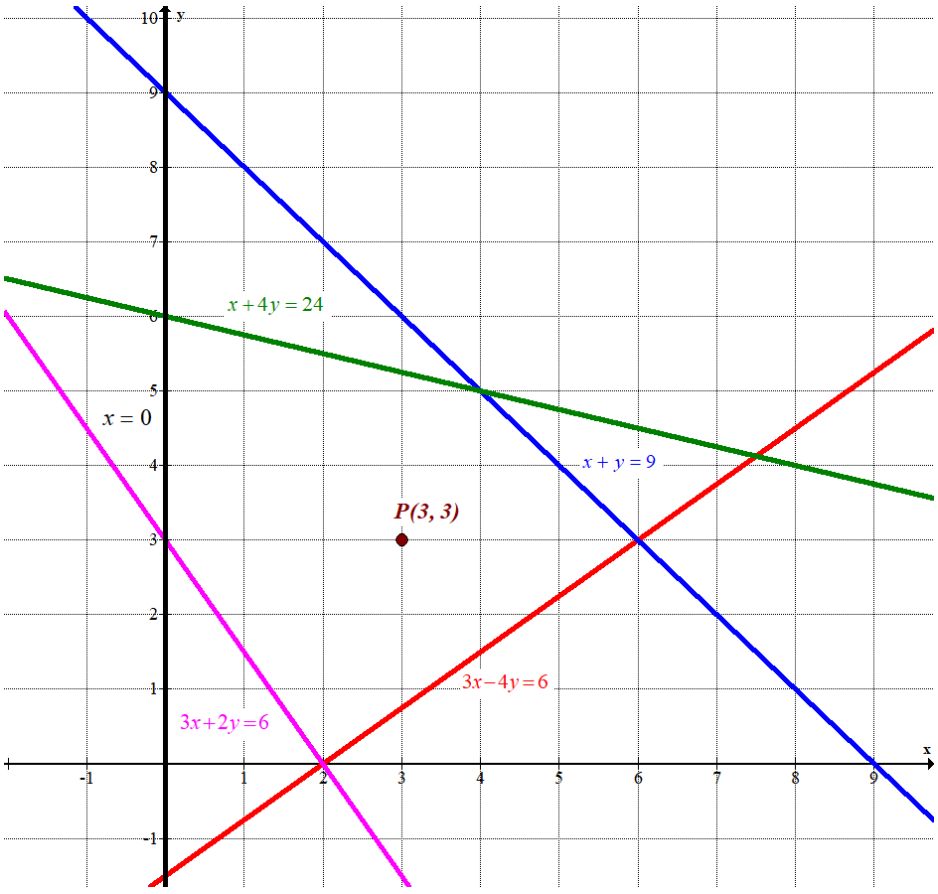
$x+4y=24$

x	$y=\dfrac{24-x}{4}$
0	6
4	5
24	0

$3x+2y=6$

x	$y=\dfrac{6-3x}{2}$
−2	6
0	3
2	0

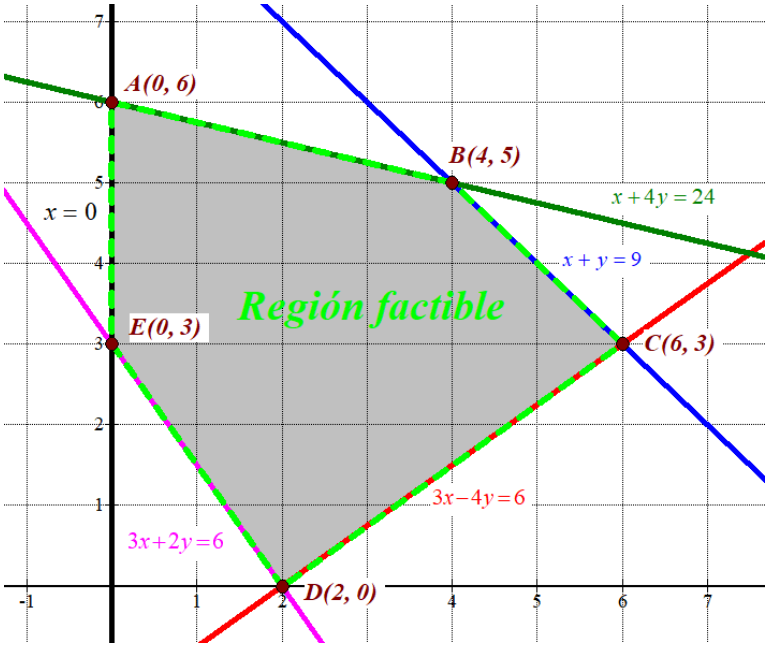
$x=0$ *Eje OY*



La región factible está situada por debajo de las rectas verde y azul, a la derecha del eje OY y por encima de las rectas rosa y roja. Comprobamos que el punto P(3, 3) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot 3-4\cdot 3\le 6 \\ 3+3\le 9 \\ 3+4\cdot 3\le 24 \\ 3\cdot 3+2\cdot 3\ge 6 \\ 3\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9-12\le 6 \\ 3+3\le 9 \\ 3+12\le 24 \\ 9+6\ge 6 \\ 3\ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible se observan en el dibujo del recinto y se pueden obtener de las tablas de valores de las rectas que delimitan la región. Los vértices son los puntos de coordenadas A(0, 6), B(4, 5), C(6, 3), D(2, 0) y E(0, 3).

b) Comprobamos si el punto $P(3,\ 0.9)$ cumple las restricciones planteadas.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot 3-4\cdot 0.9\le 6 \\ 3+0.9\le 9 \\ 3+4\cdot 0.9\le 24 \\ 3\cdot 3+2\cdot 0.9\ge 6 \\ 3\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9-3.6\le 6 \\ 3.9\le 9 \\ 3+3.6\le 24 \\ 9+1.8\ge 6 \\ 3\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5.4\le 6 \\ 3.9\le 9 \\ 6.6\le 24 \\ 10.8\ge 6 \\ 3\ge 0 \end{array}\right\} \textbf{¡Se cumplen todas!}$$

El punto $P(3,\ 0.9)$ pertenece a la región factible.

Comprobamos si el punto $Q(1,\ 5.9)$ cumple las restricciones planteadas.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot 1-4\cdot 5.9\le 6 \\ 1+5.9\le 9 \\ 1+4\cdot 5.9\le 24 \\ 3\cdot 1+2\cdot 5.9\ge 6 \\ 1\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3-23.6\le 6 \\ 6.9\le 9 \\ 1+23.6\le 24 \\ 3+11.8\ge 6 \\ 3\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -20.6\le 6 \\ 6.9\le 9 \\ 24.6\le 24\ \ ¡NO! \\ 14.8\ge 6 \\ 3\ge 0 \end{array}\right\} \textbf{¡No se cumplen todas!}$$

El punto $Q(1,\ 5.9)$ no pertenece a la región factible.

c) Valoramos la función beneficio $F(x,y)=2x+3y-2$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo y mínimo.

A(0, 6) → $F(0,6)=2\cdot 0+3\cdot 6-2=16$

B(4, 5) → $F(4,5)=2\cdot 4+3\cdot 5-2=21$ *Máximo*

C(6, 3) → $F(6,3)=2\cdot 6+3\cdot 3-2=19$

D(2, 0) → $F(2,0)=2\cdot 2+3\cdot 0-2=2$ *Mínimo*

E(0, 3) → $F(0,3)=2\cdot 0+3\cdot 3-2=7$

El valor máximo es 21 y se alcanza en el vértice B(4, 5).
El valor mínimo es 2 y se alcanza en el vértice D(2, 0).

EJERCICIO 2

Una nueva plataforma de streaming realiza una prueba de funcionamiento durante un trimestre (13 semanas). Se estima que el índice de aceptación de esta plataforma evolucionará de acuerdo con la función

$$I(t)=\frac{1}{100}\cdot 2^t;\ 0\le t\le 13$$

siendo *t* el tiempo transcurrido (en semanas) desde su inicio.

a) **(0.75 puntos)** Obtenga el intervalo en el que el índice va aumentando.

b) **(0.75 puntos)** ¿En cuántas semanas se obtendrá un índice de aceptación de 10.24?

c) **(0.75 puntos)** Calcule la tasa de crecimiento instantánea transcurridas 5 semanas.

d) **(0.75 puntos)** ¿Es posible alcanzar un índice de aceptación de 90 durante el trimestre?

a) Calculamos la derivada de la función.

$$I(t)=\frac{1}{100}\cdot 2^t \Rightarrow I'(t)=\frac{1}{100}\cdot 2^t\cdot \ln 2=\frac{\ln 2}{100}\cdot 2^t$$

Como $\frac{\ln 2}{100}\simeq 0069>0$ y $2^t>0$ para cualquier valor de *t*, la expresión de la derivada siempre es positiva. El índice de aceptación crece durante las 13 semanas.

b) Buscamos el valor de *t* para el que $I(t)=10.24$.

$$I(t)=10.24\Rightarrow \frac{1}{100}\cdot 2^t=10.24\Rightarrow 2^t=1024\Rightarrow 2^t=2^{10}\Rightarrow \boxed{t=10}$$

Al cabo de la décima semana el índice de aceptación es de 10.24.

c) Debemos calcular $I'(5)$.

$$I'(5)=\frac{\ln 2}{100}\cdot 2^5=0.2218$$

La tasa de crecimiento instantánea transcurridas 5 semanas es de 0.2218.

d) El índice de aceptación crece durante el trimestre. Determinamos el índice de aceptación al cabo de las 13 semanas que será el más alto conseguido en todo el trimestre.

$$I(13)=\frac{1}{100}\cdot 2^{13}=81.92$$

El índice de aceptación más alto que se llega a conseguir en el trimestre es de 81.92, que es menor de 90.

No es posible alcanzar un índice de aceptación de 90 durante el trimestre.

EJERCICIO 3

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral que verifican:
- La probabilidad de que ocurra el suceso A es 0.6.
- La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es 0.15.
- La probabilidad de que ocurra el suceso B sabiendo que ha ocurrido el suceso A es 0.3.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.
b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurran los dos sucesos a la vez.
c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra uno y solo uno de los sucesos.
d) **(0.25 puntos)** ¿Son dependientes los sucesos A y B?

Nos dicen que $P(A)=0.6$, $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0.15$ *y* $P(B/A)=0.3$.

a) Debemos calcular $P(A\cup B)$. Aplicamos una de las leyes de Morgan.

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=0.15\Rightarrow P(\overline{A\cup B})=0.15\Rightarrow 1-P(A\cup B)=0.15\Rightarrow \boxed{P(A\cup B)=0.85}$$

La probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos vale 0.85.

b) Debemos calcular $P(A\cap B)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=0.6 \\ P(B/A)=0.3 \\ P(B/A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} \end{array}\right\}\Rightarrow 0.3=\frac{P(B\cap A)}{0.6}\Rightarrow P(B\cap A)=0.6\cdot 0.3=\boxed{0.18}$$

La probabilidad de que ocurran los dos sucesos a la vez vale 0.18.

c) Debemos calcular $P\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)$. Como son dos sucesos incompatibles tenemos que $P\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap B\right)$.

$$P\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap B\right)=$$

$$=\left[P(A)-P(A\cap B)\right]+\left[P\left(\overline{A}\right)-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\right]=$$

$$=\left[P(A)-P(A\cap B)\right]+\left[1-P(A)-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\right]=$$

$$=0.6-0.18+1-0.6-0.15=\boxed{0.67}$$

La probabilidad de que ocurra uno y solo uno de los sucesos vale 0.67.

d) Para que los sucesos sean independientes debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

Calculamos primero el valor de $P(B)$ usando la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cup B)=0.85\\P(A)=0.6\\P(A\cap B)=0.18\\P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\end{array}\right\}\Rightarrow 0.85=0.6+P(B)-0.18\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B)=0.85-0.6+0.18=0.43$$

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=0.18\\P(A)P(B)=0.6\cdot 0.43=0.258\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0.18\neq 0.258=P(A)P(B)$$

La igualdad no se cumple y los sucesos A y B son dependientes.

EJERCICIO 4 A) El tiempo, en minutos, que tardan los autobuses de cierta ciudad en recorrer la ruta principal, sigue una distribución Normal de media 40 y desviación típica 5. La empresa clasifica un viaje como "rápido" si el autobús tarda menos de 33.6 minutos en recorrer el trayecto.

a) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que un viaje sea "rápido".

b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que al menos 3 de 5 trayectos seleccionados de esta ruta hayan sido "rápidos".

c) **(0.75 puntos)** Seleccionados 80 trayectos de esta ruta, calcule la probabilidad de que a lo sumo 15 sean "rápidos".

a) Consideramos X la variable aleatoria que nos da el tiempo, en minutos, que tarda un autobús en recorrer la ruta principal. $X = N(40,5)$.

Para que el viaje sea "rápido" debe tardar menos de 33.6 minutos. Debemos hallar el valor de $P(X < 33.6)$

$$P(X<33.6)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-40}{5}\end{matrix}\right\}=P\left(Z<\frac{33.6-40}{5}\right)=P(Z<-1.28)=$$

$$=P(Z>1.28)=1-P(Z<1.28)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la tabla}\\ \text{de la N(0,1)}\end{matrix}\right\}=1-0.8997=\boxed{0.1003}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790		0,
1,2									0,8997	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,

b) Consideramos Y la variable aleatoria que cuenta el número de viajes que son "rápidos" de un grupo de 5. Esta variable es una binomial siendo n = número de repeticiones = 5 y p = probabilidad de que un viaje sea "rápido" = 0.1003. $Y = B(5, 0.1003)$

Nos piden calcular $P(Y \geq 3)$.

$$P(Y\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$$

$$=\binom{5}{3}0.1003^3\cdot 0.8997^2+\binom{5}{4}0.1003^4\cdot 0.8997^1+\binom{5}{5}0.1003^5\cdot 0.8997^0=$$

$$=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2}\cdot 0.1003^3\cdot 0.8997^2+5\cdot 0.1003^4\cdot 0.8997+1\cdot 0.1003^5\simeq \boxed{0.0086}$$

La probabilidad de que al menos 3 de 5 trayectos seleccionados de esta ruta hayan sido "rápidos" vale 0.0086.

c) Consideramos la variable aleatoria Y´ que cuenta el número de viajes que son "rápidos" de un grupo de 80. Esta variable es una binomial siendo n = número de repeticiones = 80 y p = probabilidad de que un viaje sea "rápido" = 0.1003. $Y' = B(80,\ 0.1003)$

Como el número de repeticiones es muy alto aproximamos la binomial a una normal Y´´ de media $\mu = np = 80 \cdot 0.1003 = 8.024$ y desviación típica

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80 \cdot 0.1003 \cdot 0.8997} \simeq 2.6869$. $Y'' = N\left(8.024,\ 2.6869\right)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 8.024 > 5$ y $nq = 80 \cdot 0.8997 = 71.976 > 5$.

Nos piden calcular $P\left(Y' \leq 15\right)$.

$$P\left(Y' \leq 15\right) = \left\{\text{Corrección de Yates}\right\} = P\left(Y'' \leq 15.5\right) = \left\{\begin{matrix} \textit{Tipificamos} \\ Z = \dfrac{Y' - 8.024}{2.6869} \end{matrix}\right\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{15.5 - 8.024}{2.6869}\right) = P\left(Z \leq 2.78\right) = \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix}\right\} = \boxed{0.99728}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	
	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	
2,7									0,99728
	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801

De los 80 trayectos la probabilidad de que a lo sumo 15 sean "rápidos" vale 0.99728.

EJERCICIO 4 B) Un estudio sobre la diabetes en analítica de sangre, determina que la cantidad de hemoglobina glicosilada en sangre, en porcentaje, sigue una ley Normal de varianza 0.09. Se eligen de forma aleatoria 10 analíticas de sangre y se anota la hemoglobina glicosilada, obteniéndose:

6.6, 5.9, 6.2, 5.7, 5.8, 6.4, 6.4, 6.3, 5.7, 6.0

a) **(0.75 puntos)** Con un nivel de confianza del 97%, calcule un intervalo de confianza para estimar la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional.

b) **(0.5 puntos)** A la vista del intervalo obtenido, razone si se puede admitir que la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional es 6.5.

c) **(0.75 puntos)** ¿Cuántas analíticas, como mínimo, tendrían que formar parte de la muestra seleccionada para que, con un nivel de confianza del 98%, el error cometido en la estimación de la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional sea como máximo de 0.1?

a) Consideramos X la variable aleatoria que nos da la cantidad de hemoglobina glicosilada en sangre en una analítica de sangre. Como la varianza es 0.09 entonces la desviación típica vale $\sigma = \sqrt{0.09} = 0.3$. $X = N(\mu, 0.3)$

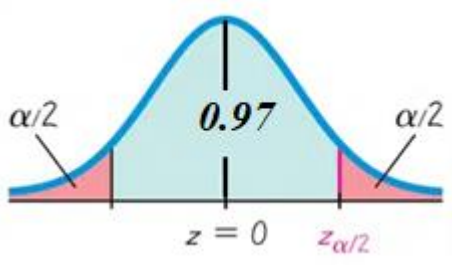
El tamaño de la muestra es $n = 10$.

Obtenemos el valor de la media muestral.

$$\bar{x} = \frac{6.6+5.9+6.2+5.7+5.8+6.4+6.4+6.3+5.7+6.0}{10} = 6.1$$

Averiguamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza el 97 %.

$$1-\alpha = 0.97 \to \alpha = 0.03 \to \frac{\alpha}{2} = 0.015 \to 1-\frac{\alpha}{2} = 0.985 \to \left\{\begin{matrix}\text{Busco en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} \to z_{\alpha/2} = 2.17$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	
2,1								0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{0.3}{\sqrt{10}} \simeq 0.2059$$

Con un nivel de confianza del 97%, el intervalo de confianza para estimar la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional es:

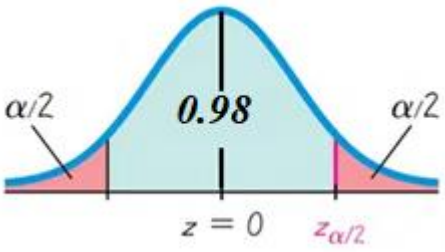
$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(6.1 - 0.2059,\ 6.1 + 0.2059\right) = \left(5.8941,\ 6.3059\right)$$

Con un nivel de confianza del 97%, la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional tiene un valor entre 5.8941 y 6.3059.

b) El valor 6.5 no se encuentra contenido dentro del intervalo de confianza obtenido en el apartado anterior, $(5.8941,\ 6.3059)$. Con una confianza del 97% no se puede admitir que la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional es 6.5.

c) Averiguamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza el 98 %.

$$1-\alpha=0.98\rightarrow\alpha=0.02\rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.01\rightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0.99\rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Busco en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}\rightarrow z_{\alpha/2}=2.33$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871
2,3				0,9901
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error*, lo igualamos a 0.1 y despejamos *n*.

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow0.1=2.33\cdot\frac{0.3}{\sqrt{n}}\Rightarrow\frac{0.1}{2.33}=\frac{0.3}{\sqrt{n}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{0.3}{0.1/2.33}\Rightarrow n=\left(\frac{0.3}{0.1/2.33}\right)^2\simeq48.86$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero superior al obtenido. Se debe tomar una muestra de un mínimo de 49 analíticas.