



Universidad de Oviedo

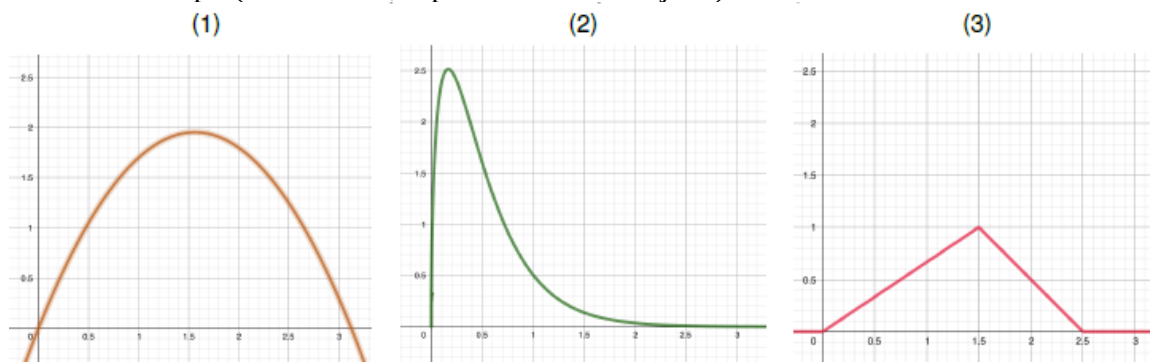
Prueba de acceso a la Universidad (PAU)

Curso 2025-2026

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- Responde en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste **una única opción**, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Opción A. Un comportamiento habitual de los fenómenos «virales» en las redes sociales es que incrementen muy rápidamente el número de visualizaciones hasta alcanzar su pico de popularidad; tras alcanzarlo, disminuye el interés público (y, por lo tanto, las visualizaciones) primero rápida y después más paulatina y lentamente. En las tres gráficas siguientes se representa en el eje Y el número de visualizaciones (en cientos de miles) como una función del tiempo (en semanas, representado en el eje X).



- a) Empareja cada gráfica con la función (A), (B) o (C) que le corresponda y, después, explica cuál de las tres representa el comportamiento del fenómeno viral descrito. **(1 punto)**

$$(A) f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3} & \text{si } x \leq 1.5 \\ -x + 2.5 & \text{si } 1.5 < x \leq 2.5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (B) f(x) = -x(0.8x - 2.5) \quad (C) f(x) = \frac{9}{0.89} x^{-\frac{1}{2}} e^{-3x}$$

- b) Considera la función $g(x) = e^{-x} + 1$. ¿Para qué valores de x está definida $g(x)$? ¿A partir de qué valor de x decrece $g(x)$? ¿Será alguna vez $g(x)$ menor que 1.5? ¿Y menor que 1? **(1 punto)**
- c) Basándote en el estudio de la función, explica si te parece razonable utilizar $g(x)$ para representar las visualizaciones (en cientos de miles) de un fenómeno viral, en función de las semanas (x). **(0.5 puntos)**

Pregunta 1. Opción B. Las ventas (v , en miles de euros) de una empresa en función del tiempo (t , en meses) se pueden modelar mediante la siguiente función:

$$v(t) = \begin{cases} 2t + 5, & \text{si } 0 < t < 3 \\ -t^2 + 10t + k, & \text{si } 3 \leq t < 8 \\ -k - 4, & \text{si } 8 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

- a) Determina el valor de la constante k para que la función v sea continua en todo su dominio. **(0.5 puntos)**

- b) Con el valor de k obtenido en el apartado anterior, ¿en qué momento se alcanza el mayor importe de las ventas? ¿Cuál sería ese importe? ¿En qué momento o momentos aumentan las ventas? **(1 punto)**
- c) Las ventas totales en un intervalo de tiempo se obtienen calculando la integral entre los dos extremos de ese intervalo, ¿cuál es el importe total (en miles de euros) de las ventas entre el quinto y el noveno mes? (utiliza el valor de k obtenido en el primer apartado). **(1 punto)**

Pregunta 2. Opción A. Observa la siguiente secuencia de figuras, que consisten en construir hexágonos adyacentes hechos con palitos:

Figura 1

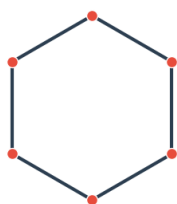


Figura 2

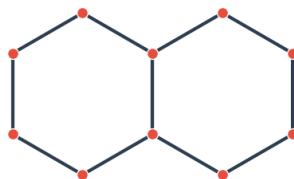
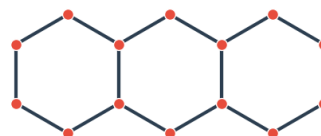


Figura 3

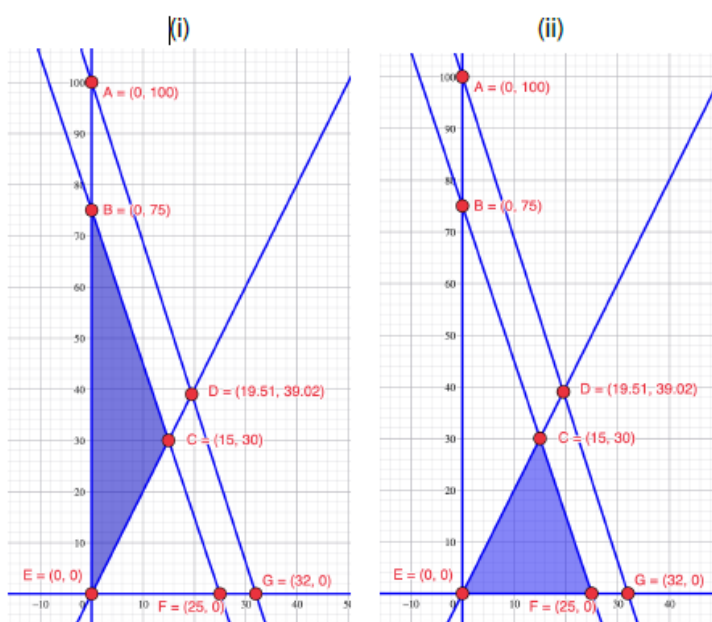


- a) Determina cuántos palitos serán necesarios para construir la figura número 16. ¿Cuántos vértices tendrá esa figura? Encuentra una fórmula que relacione el número de figura con el número de palitos y explica cómo has llegado a ella. **(2 puntos)**
- b) ¿Puede existir una figura con 206 palitos? En caso afirmativo, ¿cuántos vértices tendría? Si no es posible, explica por qué. **(0.5 puntos)**

Pregunta 2. Opción B. Una empresa de mobiliario de oficina debe cargar un furgón con un pedido que consiste en mesas (x) y sillas (y). El furgón tiene una capacidad máxima de carga de 800 kg y un volumen útil de 15 m^3 .

Cada mesa pesa 25 kg y cada silla pesa 8 kg. El embalaje de cada mesa ocupa 0.6 m^3 y el de cada silla 0.2 m^3 , y se pueden apilar de forma que se ocupe todo el volumen disponible o parte de él. El cliente ha solicitado que se entreguen al menos 2 sillas por cada mesa. El margen de beneficio que obtiene la empresa por envío es de 35 € por mesa y 10 € por silla.

- a) Explica qué imagen (i o ii) se corresponde con la región factible para el problema: ¿Cuántas mesas y sillas puede enviar la empresa en ese furgón? **(1 punto)**
- b) El peso máximo que puede transportar el furgón ¿limita la solución? Explica si $(x, y) = (1.15, 2.3)$ tiene sentido como solución en el contexto de este problema. **(1 punto)**
- c) ¿Qué cantidad de mesas y de sillas debe enviar la empresa para maximizar el beneficio? **(0.5 puntos)**



Pregunta 3. Opción A. Las variables x e y representan, respectivamente, las horas semanales de fisioterapia y de asistencia doméstica que los servicios sociales deben asignar a una persona. Se realizan dos valoraciones independientes para intentar determinar las horas correspondientes, obteniéndose una ecuación a partir de cada valoración. La valoración depende del parámetro a :

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ ax + 6y = 15 \end{cases}$$

- Encuentra el valor de a para que existan infinitas soluciones a este problema. Expresa, a modo de ejemplo, cuántas horas de fisioterapia (x) y de ayuda domiciliaria (y) recibiría una persona en una de estas soluciones. **(1 punto)**
- Asume que $a = 1$, encuentra la solución y analiza si tiene sentido en el contexto del problema. **(1.5 puntos)**

Pregunta 3. Opción B. Dado el parámetro m y las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- A partir de $A \cdot B \cdot C = 2(D + E)$ plantea un sistema de dos ecuaciones, con incógnitas x e y . **(1 punto)**
- Explica si existe algún valor de m para el que el sistema no tenga solución. Si existe, di cuál es. **(0.5 puntos)**
- Elige un valor de m para el que el sistema tenga solución única y resuélvelo. **(1 punto)**

Pregunta 4. Opción A. En una universidad pública el 20% del alumnado pertenece al estrato socioeconómico más alto, el 50% al estrato medio y el resto al estrato socioeconómico más bajo. En el estrato más alto, la probabilidad de abandonar los estudios es del 5 %, en el medio del 15% y en el más bajo alcanza el 30 %.

- Si se elige al azar a una persona que ha abandonado esta universidad, ¿a qué estrato socioeconómico es más probable que pertenezca? **(1.5 puntos)**
- ¿Hay relación entre el abandono y el estrato socioeconómico? **(0.5 puntos)**
- La universidad ofrece un servicio de orientación. Solo el 12% del alumnado que acude a ese servicio abandona sus estudios. Sabiendo esta información, ¿hay argumentos probabilísticos para afirmar que el servicio de orientación influye en la probabilidad de abandono? **(0.5 puntos)**

Pregunta 4. Opción B. Un estudio afirma que el 70% de las personas jóvenes adquieren ropa en plataformas de segunda mano, mientras que el resto lo hace en tiendas tradicionales. El estudio también afirma que el 60% de quienes compran en plataformas de segunda mano realiza donaciones de ropa a ONG, porcentaje que baja al 20% entre quienes compran en tiendas tradicionales.

- Si se selecciona al azar una persona joven de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que compre en plataformas de segunda mano y no realice donaciones de ropa? **(1 punto)**
- ¿Se puede afirmar que donar ropa es independiente de donde se compra la ropa? **(0.5 puntos)**
- Si la persona seleccionada realiza donaciones de ropa, ¿cuál es la probabilidad de que compre en tiendas tradicionales? **(1 punto)**

Pregunta 5. Opción A.* El ayuntamiento de una gran ciudad está analizando el éxito de sus presupuestos participativos.

- Para estimar la verdadera proporción que apoya los presupuestos participativos, el ayuntamiento encuestó a una muestra aleatoria de 800 residentes y obtuvo un intervalo de confianza al 95% que resultó (0.6169, 0.6831). ¿Cuántas personas de las 800 que formaban la

- muestra respondieron que sí apoyan los presupuestos participativos? ¿Qué proporción de personas en la muestra apoyaba los presupuestos participativos? **(1 punto)**
- b) El ayuntamiento quiere estar seguro de que más de dos tercios de la población apoya los presupuestos participativos. Con los datos del apartado anterior, ¿puede el ayuntamiento estar seguro de ello con una confianza de, al menos, el 95%? **(0.5 puntos)**
- c) Utilizando la misma muestra de 800 personas del apartado anterior, otro equipo de análisis presentó un informe donde el intervalo para la proporción de apoyo era más amplio: (0.6107, 0.6893). ¿Cuál fue el nivel de confianza que utilizó este segundo equipo para calcular su intervalo? **(1 punto)**

Pregunta 5. Opción B.* Un estudio sociológico analiza el gasto mensual en alquiler de las personas jóvenes (en €). Se asume que ese gasto sigue una distribución normal, con una desviación típica de 150 €.

- a) Si se quiere estimar el gasto medio mensual en alquiler de las personas jóvenes, ¿cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para que el error de estimación máximo sea de 20 €, con un nivel de confianza del 95%? **(1 punto)**
- b) En la misma población se tomó una muestra aleatoria de 900 personas jóvenes y se obtuvo un intervalo de confianza al 90% para el gasto medio mensual que resultó ser (741.77, 758.23), ¿cuál fue el gasto medio mensual obtenido en esta muestra de 900 personas? **(0.5 puntos)**
- c) Se realizó una nueva encuesta con un tamaño muestral mucho mayor que el del apartado anterior. Si se determina el intervalo de confianza al nivel del 90 %, ¿el error de estimación será mayor o menor que en el caso anterior? ¿El error dependerá del valor de la media muestral $\bar{x}$ que se obtenga? Explica razonadamente tu respuesta. **(1 punto)**

*Algunos valores de la función de distribución F de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:

$$F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 \text{ y } F(2.58) = 0.995.$$

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)100\%$, para la media poblacional de una variable con distribución normal de varianza conocida, a partir de una muestra de tamaño n:

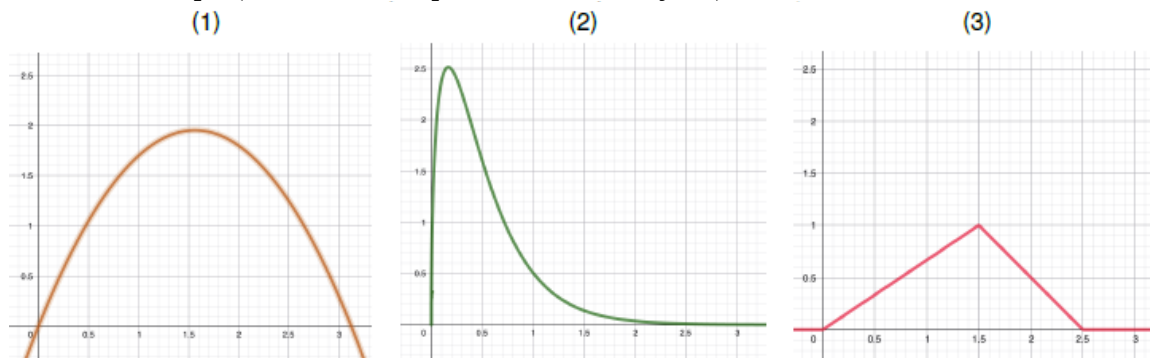
$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \text{ con } F(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha / 2$$

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)100\%$, para la proporción poblacional, a partir de una muestra de tamaño n suficientemente grande (habitualmente se considera $n \geq 100$):

$$\left(p - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) \text{ con } F(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha / 2$$

SOLUCIONES

Pregunta 1. Opción A. Un comportamiento habitual de los fenómenos «virales» en las redes sociales es que incrementen muy rápidamente el número de visualizaciones hasta alcanzar su pico de popularidad; tras alcanzarlo, disminuye el interés público (y, por lo tanto, las visualizaciones) primero rápida y después más paulatina y lentamente. En las tres gráficas siguientes se representa en el eje Y el número de visualizaciones (en cientos de miles) como una función del tiempo (en semanas, representado en el eje X).



- a) Empareja cada gráfica con la función (A), (B) o (C) que le corresponda y, después, explica cuál de las tres representa el comportamiento del fenómeno viral descrito. **(1 punto)**

$$(A) f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3} & \text{si } x \leq 1.5 \\ -x + 2.5 & \text{si } 1.5 < x \leq 2.5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (B) f(x) = -x(0.8x - 2.5) \quad (C) f(x) = \frac{9}{0.89} x^{\frac{1}{2}} e^{-3x}$$

- b) Considera la función $g(x) = e^{-x} + 1$. ¿Para qué valores de x está definida $g(x)$? ¿A partir de qué valor de x decrece $g(x)$? ¿Será alguna vez $g(x)$ menor que 1.5? ¿Y menor que 1? **(1 punto)**
- c) Basándote en el estudio de la función, explica si te parece razonable utilizar $g(x)$ para representar las visualizaciones (en cientos de miles) de un fenómeno viral, en función de las semanas (x). **(0.5 puntos)**

- a) La función (A) es una función a trozos que a partir de $x = 2.5$ vale 0. Además, tiene un cambio de definición en 1.5 donde pasa de una función lineal (recta) creciente a ser lineal (recta) decreciente (hay un cambio brusco). Por estos motivos su gráfica es la (3). A pesar de que no coincide la gráfica para $x < 0$, pues en la gráfica vale 0 y en la función vale negativo.

La función (B) tiene la expresión $f(x) = -x(0.8x - 2.5) = -0.8x^2 + 2.5x$ que es una función parabólica simétrica respecto del vértice de la parábola. Esta función (B) se corresponde con la gráfica (1).

Por eliminación la función (C) se corresponde con la gráfica (2). La función (C) tiene la

expresión $f(x) = \frac{9}{0.89e^{3x}\sqrt{x}}$ y esta función crece y decrece muy rápido, siendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{0.89e^{3x}\sqrt{x}} = \frac{9}{+\infty} = 0 \text{ igual que se observa en la gráfica. También se}$$

observa en la gráfica que su dominio es $(0, +\infty)$ igual que el dominio de la función (C), pues tiene una raíz cuadrada en su expresión.

Resumiendo: (A) $\rightarrow$ (3), (B) $\rightarrow$ (1) y (C) $\rightarrow$ (2).

El crecimiento inicial rápido y, a continuación, un descenso primero rápido y después, más lento y paulatino se corresponde con la gráfica (2) que viene expresada por la función (C).

En la (1) el ascenso y el descenso son con la misma intensidad y en la (3) el descenso es igual hasta llegar a 0. No puede ser ni la (1) ni la (3).

b) La expresión de la función es una exponencial que está definida para cualquier valor real.

La derivada de la función es $g'(x) = -e^{-x} = \frac{-1}{e^x}$. Esta expresión de la derivada es siempre negativa, pues el numerador es negativo y el denominador siempre es positivo. La función decrece en todo su dominio $\mathbb{R}$.

Resolvemos la inecuación $g(x) < 1.5$.

$$g(x) < 1.5 \Rightarrow e^{-x} + 1 < 1.5 \Rightarrow e^{-x} < 0.5 \Rightarrow \frac{1}{e^x} < \frac{1}{2} \Rightarrow e^x > 2 \Rightarrow \ln e^x > \ln 2 \Rightarrow \boxed{x > \ln 2}$$

La función $g(x)$ es menor que 1.5 para $x > \ln 2$.

Intentamos resolver la inecuación $g(x) < 1$.

$$g(x) < 1 \Rightarrow e^{-x} + 1 < 1 \Rightarrow e^{-x} < 0$$

Esto no es posible, dado que la función exponencial siempre es positiva.

La función $g(x)$ nunca es menor que 1.

c) No es adecuada la función $g(x) = e^{-x} + 1$ para describir un fenómeno viral pues esta función siempre decrece. Y la función siempre está por encima de 1, por lo que no acaba en 0.

Pregunta 1. Opción B. Las ventas (v , en miles de euros) de una empresa en función del tiempo (t , en meses) se pueden modelar mediante la siguiente función:

$$v(t) = \begin{cases} 2t + 5, & \text{si } 0 < t < 3 \\ -t^2 + 10t + k, & \text{si } 3 \leq t < 8 \\ -k - 4, & \text{si } 8 \leq t \leq 12 \end{cases} :$$

- a) Determina el valor de la constante k para que la función v sea continua en todo su dominio. **(0.5 puntos)**
- b) Con el valor de k obtenido en el apartado anterior, ¿en qué momento se alcanza el mayor importe de las ventas? ¿Cuál sería ese importe? ¿En qué momento o momentos aumentan las ventas? **(1 punto)**
- c) Las ventas totales en un intervalo de tiempo se obtienen calculando la integral entre los dos extremos de ese intervalo, ¿cuál es el importe total (en miles de euros) de las ventas entre el quinto y el noveno mes? (utiliza el valor de k obtenido en el primer apartado). **(1 punto)**

- a) La función es definida a trozos, siendo su gráfica un trozo de recta creciente, un trozo de parábola y un trozo de recta horizontal. Por lo que para ser continua debe serlo en los cambios de definición.

La función debe ser continua en $t = 3$.

$$\left. \begin{aligned} v(3) &= -3^2 + 10 \cdot 3 + k = k + 21 \\ \lim_{t \rightarrow 3^+} v(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^+} -t^2 + 10t + k = 21 + k \\ \lim_{t \rightarrow 3^-} v(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^-} 2t + 5 = 2 \cdot 3 + 5 = 11 \\ \lim_{t \rightarrow 3^+} v(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^-} v(t) = v(3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 21 + k = 11 \Rightarrow \boxed{k = -10}$$

Para $k = -10$ la función es continua en $t = 3$ y tiene la expresión

$$v(t) = \begin{cases} 2t + 5, & \text{si } 0 < t < 3 \\ -t^2 + 10t - 10, & \text{si } 3 \leq t < 8 \\ 10 - 4 = 6, & \text{si } 8 \leq t \leq 12 \end{cases} . \text{ Comprobamos que la función es continua en } t = 8.$$

$$\left. \begin{aligned} v(8) &= 6 \\ \lim_{t \rightarrow 8^+} v(t) &= \lim_{t \rightarrow 8^+} 6 = 6 \\ \lim_{t \rightarrow 8^-} v(t) &= \lim_{t \rightarrow 8^-} -t^2 + 10t - 10 = -8^2 + 10 \cdot 8 - 10 = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 8^+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 8^-} v(t) = v(8) = 6$$

Para $k = -10$ la función es continua en todo su dominio

- b) Para $k = -10$ la función es continua y tiene la expresión $v(t) = \begin{cases} 2t + 5, & \text{si } 0 < t < 3 \\ -t^2 + 10t - 10, & \text{si } 3 \leq t < 8 \\ 6, & \text{si } 8 \leq t \leq 12 \end{cases} .$

$$\text{Su derivada es } v'(t) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 < t < 3 \\ -2t + 10, & \text{si } 3 < t < 8 \\ 0, & \text{si } 8 < t \leq 12 \end{cases} .$$

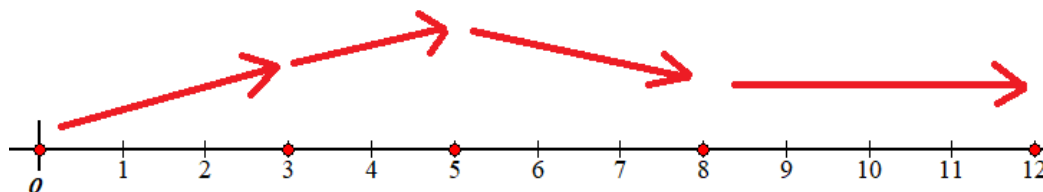
En el intervalo $(0,3)$ la derivada es $2 > 0$ por lo que la función crece en $(0,3)$.

En el intervalo $(3,8)$ la derivada se anula para $t=5$, siendo positiva en $(3,5)$ y negativa en $(5,8)$. La función crece en $(3,5)$ y decrece en $(5,8)$.

$$\left. \begin{aligned} v'(4) &= -2 \cdot 4 + 10 = 2 > 0 \\ v'(6) &= -2 \cdot 6 + 10 = -2 < 0 \end{aligned} \right\}$$

En el intervalo $(8,12)$ la derivada vale 0 y la función es constante.

La función sigue el esquema siguiente.



El mayor importe de las ventas se alcanza $t=5$. Como $v(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 - 10 = 15$ el importe más alto de las ventas es de 15000 € en el quinto mes. Las ventas crecen durante los primeros cinco meses.

- c) La función de ventas en el intervalo $(5,8)$ tiene la expresión $v(t) = -t^2 + 10t - 10$ y en el intervalo $(8,9)$ tiene la expresión $v(t) = 6$. Calculamos $\int_5^9 v(t) dt$.

$$\int_5^9 v(t) dt = \int_5^8 -t^2 + 10t - 10 dt + \int_8^9 6 dt = \left[-\frac{t^3}{3} + 5t^2 - 10t \right]_5^8 + [6t]_8^9 =$$

$$= \left[-\frac{8^3}{3} + 5 \cdot 8^2 - 10 \cdot 8 \right] - \left[-\frac{5^3}{3} + 5 \cdot 5^2 - 10 \cdot 5 \right] + 6 \cdot 9 - 6 \cdot 8 =$$

$$= \frac{-512}{3} + 320 - 80 + \frac{125}{3} - 125 + 50 + 54 - 48 = \boxed{42}$$

Pregunta 2. Opción A. Observa la siguiente secuencia de figuras, que consisten en construir hexágonos adyacentes hechos con palitos:

Figura 1

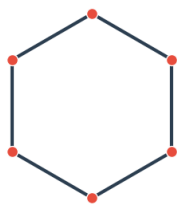


Figura 2

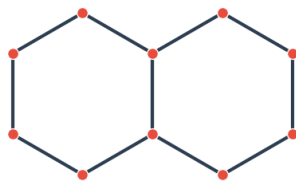
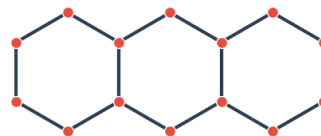


Figura 3



- a) Determina cuántos palitos serán necesarios para construir la figura número 16. ¿Cuántos vértices tendrá esa figura? Encuentra una fórmula que relacione el número de figura con el número de palitos y explica cómo has llegado a ella. **(2 puntos)**
- b) ¿Puede existir una figura con 206 palitos? En caso afirmativo, ¿cuántos vértices tendría? Si no es posible, explica por qué. **(0.5 puntos)**

- a) La secuencia de palitos en cada figura es:

Figura 1 $\rightarrow 6$

Figura 2 $\rightarrow 6 + 5 = 6 + 1 \cdot 5$

Figura 3 $\rightarrow 6 + 5 + 5 = 6 + 2 \cdot 5 = 6 + (3 - 1) \cdot 5, \dots$

En la figura 4 habrán $6 + (4 - 1) \cdot 5$

En la figura 5 habrán $6 + (5 - 1) \cdot 5$.

En la figura 16 habrán $6 + (16 - 1) \cdot 5 = 6 + 15 \cdot 5 = 81$ palitos.

En la figura n habrán $6 + (n - 1) \cdot 5 = 6 + 5n - 5 = 5n + 1$ palitos.

En la figura 1 hay 6 vértices, en la figura 2 hay $6 + 4 = 10$. En la figura 3 hay $6 + 2 \cdot 4 = 14$, en la figura 16 hay $6 + 15 \cdot 4 = 66$ vértices.

- b) Averiguamos si existe un número natural n tal que $206 = 5n + 1$.

$$206 = 5n + 1 \Rightarrow 5n = 205 \Rightarrow n = \frac{205}{5} = 41$$

La figura 41 tendrá 206 palitos.

Buscamos una regla que siga el número de vértices de cada figura.

En la figura 1 hay 6 vértices

En la figura 2 hay $6 + 1 \cdot 4$ vértices.

En la figura 3 hay $6 + 2 \cdot 4$ vértices.

...

En la figura 41 habrán $6 + (41 - 1) \cdot 4 = 6 + 40 \cdot 4 = 166$ vértices.

Pregunta 2. Opción B. Una empresa de mobiliario de oficina debe cargar un furgón con un pedido que consiste en mesas (x) y sillas (y). El furgón tiene una capacidad máxima de carga de 800 kg y un volumen útil de 15 m³.

Cada mesa pesa 25 kg y cada silla pesa 8 kg. El embalaje de cada mesa ocupa 0.6 m³ y el de cada silla 0.2 m³, y se pueden apilar de forma que se ocupe todo el volumen disponible o parte de él. El cliente ha solicitado que se entreguen al menos 2 sillas por cada mesa. El margen de beneficio que obtiene la empresa por envío es de 35 € por mesa y 10 € por silla.

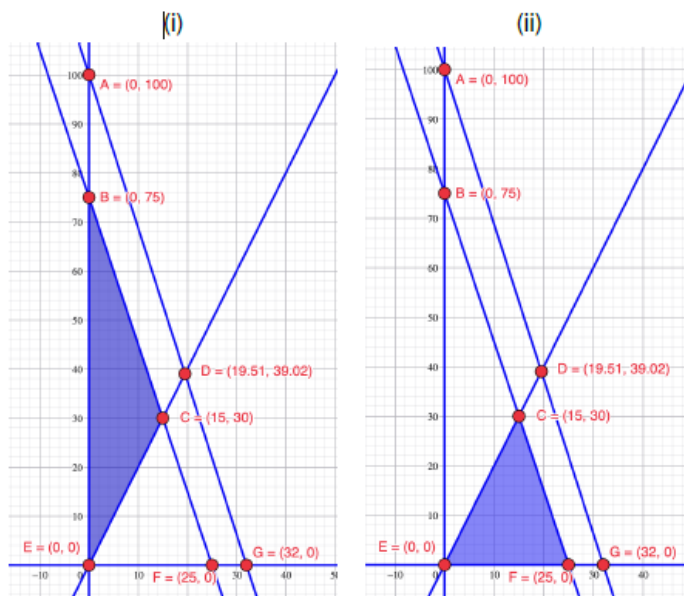
a) Explica qué imagen (i o ii) se corresponde con la región factible para el problema:

¿Cuántas mesas y sillas puede enviar la empresa en ese furgón?

(1 punto)

b) El peso máximo que puede transportar el furgón ¿limita la solución? Explica si $(x, y) = (1.15, 2.3)$ tiene sentido como solución en el contexto de este problema. **(1 punto)**

c) ¿Qué cantidad de mesas y de sillas debe enviar la empresa para maximizar el beneficio? **(0.5 puntos)**



Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Peso	Volumen (m ³)	Beneficio
Número de mesas (x)	25x	0.6x	35x
Número de sillas (y)	8y	0.2y	10y
TOTAL	25x + 8y	0.6x + 0.2y	35x + 10y

“El furgón tiene una capacidad máxima de carga de 800 kg y un volumen útil de 15 m³”
 $\rightarrow 25x + 8y \leq 800; 0.6x + 0.2y \leq 15$

“El cliente ha solicitado que se entreguen al menos 2 sillas por cada mesa” $\rightarrow y \geq 2x$

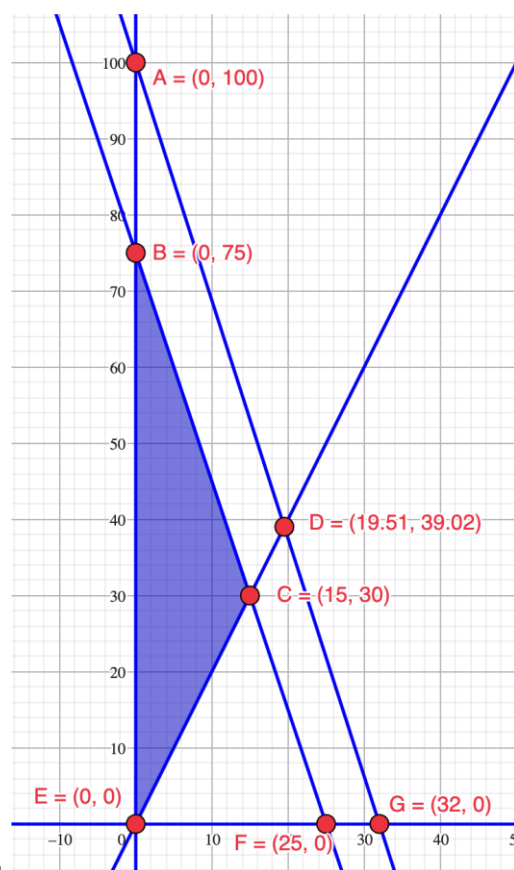
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 25x + 8y \leq 800 \\ 0.6x + 0.2y \leq 15 \\ y \geq 2x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 25x + 8y \leq 800 \\ 3x + y \leq 75 \\ y \geq 2x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

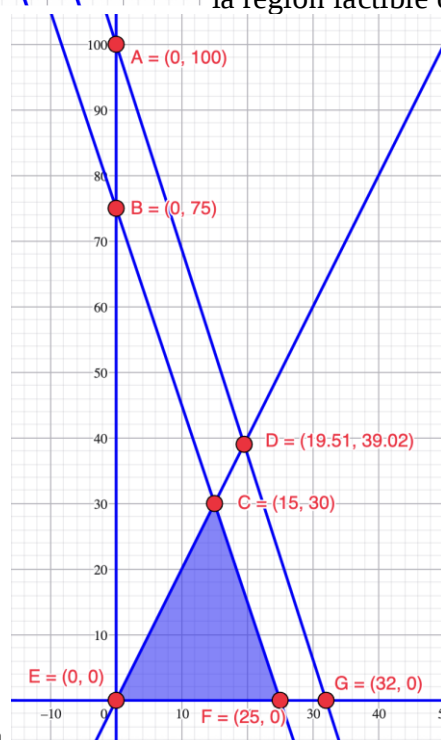
La función objetivo es el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = 35x + 10y$.

Deseamos maximizarlo.



a) En la primera figura

la región factible contiene el



punto (10, 30) y no está en la segunda figura.
Comprobamos si este punto cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 25 \cdot 10 + 8 \cdot 30 \leq 800 \\ 3 \cdot 10 + 30 \leq 75 \\ 30 \geq 2 \cdot 10 \\ 10 \geq 0; 30 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 250 + 240 \leq 800 \\ 30 + 30 \leq 75 \\ 30 \geq 20 \\ 10 \geq 0; 30 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las restricciones y la región factible es la que contiene el punto. La región factible es la que aparece coloreada en la primera figura.

La empresa tiene muchas combinaciones para enviar mesas y sillas: 0 mesas y 0 sillas, 0 mesas y 20 sillas, 15 mesas y 30 sillas, 10 mesas y 30 sillas, etc.... Nos sirve cualquier punto de la región factible con coordenadas enteras.

- b) El peso máximo no limita la solución. El punto $A(0, 100)$ pertenece a la recta $25x + 8y = 800$ y no pertenece a la región factible. Todos los puntos de la región factible cumplen la inecuación $25x + 8y \leq 800$, pero ningún punto de la recta es borde de la región factible.

El punto $(1.15, 2.3)$ tiene coordenadas decimales. No tiene sentido como solución pues las soluciones deben ser cantidades enteras. No podemos dar como solución 1.15 mesas y 2.3 sillas.

- c) Los vértices de la región factible son $E(0, 0)$, $B(0, 75)$ y $C(15, 30)$. Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 35x + 10y$ en cada uno de los vértices en busca del máximo.

$$E(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 75) \rightarrow B(0, 75) = 35 \cdot 0 + 10 \cdot 75 = 750$$

$$C(15, 30) \rightarrow B(15, 30) = 35 \cdot 15 + 10 \cdot 30 = 825 \text{ Máximo}$$

El beneficio máximo que se puede conseguir es de 825 euros y se alcanza con el envío de 15 mesas y 30 sillas.

Pregunta 3. Opción A. Las variables x e y representan, respectivamente, las horas semanales de fisioterapia y de asistencia doméstica que los servicios sociales deben asignar a una persona. Se realizan dos valoraciones independientes para intentar determinar las horas correspondientes, obteniéndose una ecuación a partir de cada valoración. La valoración depende del parámetro a :

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ ax + 6y = 15 \end{cases}$$

- a) Encuentra el valor de a para que existan infinitas soluciones a este problema. Expresa, a modo de ejemplo, cuántas horas de fisioterapia (x) y de ayuda domiciliaria (y) recibiría una persona en una de estas soluciones. **(1 punto)**
- b) Asume que $a = 1$, encuentra la solución y analiza si tiene sentido en el contexto del problema. **(1.5 puntos)**

a) Obtenemos un sistema triangular equivalente al dado.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ ax + 6y = 15 \end{cases} \xRightarrow{(-3) \times} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ ax + 6y = 15 \end{cases} \xRightarrow{(+)} \begin{cases} -3x - 6y = -15 \\ ax + 6y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-3)x = 0 \\ ax + 6y = 15 \end{cases}$$

$$\underline{(a-3)x = 0}$$

Para que el sistema tenga infinitas soluciones debe ser $a - 3 = 0 \rightarrow a = 3$.

Para $a = 3$ el sistema triangular queda con una sola ecuación $3x + 6y = 15 \rightarrow x + 2y = 5 \rightarrow x = 5 - 2y$. Una de estas soluciones la obtenemos con $y = 1$ obteniendo $x = 5 - 2 = 3$.

Un ejemplo de posible solución es 3 horas de fisioterapia y 1 de ayuda domiciliaria.

b) Para $a = 1$ el sistema tiene una única solución. La obtenemos resolviendo el sistema.

$$\begin{cases} (1-3)x = 0 \\ x + 6y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} \\ x + 6y = 15 \end{cases} \Rightarrow 6y = 15 \Rightarrow \boxed{y = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}}$$

Para $a = 1$ la solución es 0 horas de fisioterapia y 2 horas y media de ayuda domiciliaria.

La solución tiene sentido si se acepta un número decimal de horas de ayuda domiciliaria.

Pregunta 3. Opción B. Dado el parámetro m y las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) A partir de $A \cdot B \cdot C = 2(D + E)$ plantea un sistema de dos ecuaciones, con incógnitas x e y . **(1 punto)**
 b) Explica si existe algún valor de m para el que el sistema no tenga solución. Si existe, di cuál es. **(0.5 puntos)**
 c) Elige un valor de m para el que el sistema tenga solución única y resuélvelo. **(1 punto)**

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+m & 1 \\ m^2+2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m & 1 \\ m^2+2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2mx+y \\ (m^2+2)x+my \end{pmatrix}$$

$$2(D + E) = 2 \left[\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \cdot C = 2(D + E) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2mx+y \\ (m^2+2)x+my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} 2mx+y=2 \\ (m^2+2)x+my=4 \end{matrix}}$$

El sistema de ecuaciones es $\left. \begin{matrix} 2mx+y=2 \\ (m^2+2)x+my=4 \end{matrix} \right\}$.

- b) Estudiamos la compatibilidad del sistema analizando el rango de la matriz de coeficientes A . Vemos cuando se anula el determinante de A .

$$A = \begin{pmatrix} 2m & 1 \\ m^2+2 & m \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2m & 1 \\ m^2+2 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - m^2 - 2 = m^2 - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 2 = 0 \Rightarrow m^2 = 2 \Rightarrow \boxed{m = \pm\sqrt{2}}$$

Analizamos las tres situaciones diferentes que se plantean.

- Si $m \neq \pm\sqrt{2}$ el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.
- Si $m = \sqrt{2}$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2.

El sistema queda $\begin{cases} 2\sqrt{2}x + y = 2 \\ 4x + \sqrt{2}y = 4 \end{cases}$. Si multiplicamos la primera ecuación por $\sqrt{2}$ el

sistema equivalente nos queda $\begin{cases} 4x + \sqrt{2}y = 2\sqrt{2} \\ 4x + \sqrt{2}y = 4 \end{cases}$. Las dos igualdades no pueden ocurrir a la vez. El sistema no tiene solución.

Si $m = -\sqrt{2}$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2. El sistema queda $\begin{cases} -2\sqrt{2}x + y = 2 \\ 4x - \sqrt{2}y = 4 \end{cases}$. Si multiplicamos la primera ecuación por $-\sqrt{2}$ el

sistema equivalente nos queda $\begin{cases} 4x - \sqrt{2}y = -2\sqrt{2} \\ 4x - \sqrt{2}y = 4 \end{cases}$. Las dos igualdades no pueden ocurrir a la vez. El sistema no tiene solución.

Respuesta: El sistema no tiene solución para $m = \sqrt{2}$ y para $m = -\sqrt{2}$.

c) El sistema tiene solución única para $m \neq \pm\sqrt{2}$. El sistema es $\begin{cases} 2mx + y = 2 \\ (m^2 + 2)x + my = 4 \end{cases}$.

Si tomamos $m = 0$ el sistema tiene solución única. Lo resolvemos para este valor.

Para $m = 0$ el sistema queda $\begin{cases} y = 2 \\ 2x = 4 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \end{cases}$$

Para $m = 0$ la solución del sistema es $x = y = 2$.

Pregunta 4. Opción A. En una universidad pública el 20% del alumnado pertenece al estrato socioeconómico más alto, el 50% al estrato medio y el resto al estrato socioeconómico más bajo. En el estrato más alto, la probabilidad de abandonar los estudios es del 5 %, en el medio del 15% y en el más bajo alcanza el 30 %.

- a) Si se elige al azar a una persona que ha abandonado esta universidad, ¿a qué estrato socioeconómico es más probable que pertenezca? **(1.5 puntos)**
 b) ¿Hay relación entre el abandono y el estrato socioeconómico? **(0.5 puntos)**
 c) La universidad ofrece un servicio de orientación. Solo el 12% del alumnado que acude a ese servicio abandona sus estudios. Sabiendo esta información, ¿hay argumentos probabilísticos para afirmar que el servicio de orientación influye en la probabilidad de abandono? **(0.5 puntos)**

Si denotamos los sucesos como: A = “El o la estudiante pertenece al estrato alto”, M = “El o la estudiante pertenece al estrato medio”, B = “El o la estudiante pertenece al estrato bajo” y D = “El o la estudiante abandona los estudios”, podemos interpretar la información proporcionada en el enunciado en términos de probabilidad, como:

$$P(A) = 0.2, P(M) = 0.5, P(B) = 1 - 0.2 - 0.5 = 0.3, P(D/A) = 0.05, P(D/M) = 0.15, P(D/B) = 0.3.$$

- a) Determinamos primero la probabilidad de abandonar los estudios: $P(D)$:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P(D/A) + P(M)P(D/M) + P(B)P(D/B) \\ &= 0.2 \cdot 0.05 + 0.5 \cdot 0.15 + 0.3 \cdot 0.3 = 0.175 \end{aligned}$$

Calculamos las probabilidades $P(A/D)$, $P(M/D)$ y $P(B/D)$ y las comparamos.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} = \frac{0.2 \cdot 0.05}{0.175} = \boxed{\frac{10}{175} \approx 0.0571}$$

$$P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{P(M)P(D/M)}{P(D)} = \frac{0.5 \cdot 0.15}{0.175} = \boxed{\frac{75}{175} \approx 0.4286}$$

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.175} = \boxed{\frac{90}{175} \approx 0.5143}$$

$$\text{Tenemos que } \frac{10}{175} < \frac{75}{175} < \frac{90}{175} \Rightarrow P(A/D) < P(M/D) < P(B/D).$$

Si ha dejado los estudios es más probable que sea de estrato socioeconómico más bajo.

- b) Existe relación pues el porcentaje de abandono cambia dependiendo del estrato socioeconómico. Se observa que a estrato socioeconómico menor el porcentaje de abandono es mayor.
 c) Como $P(D) = 0.175$ el porcentaje de abandono de los alumnos en general es del 17.5%. Sin embargo, la tasa de abandono de los alumnos que acuden al servicio de orientación es 12%. Esta tasa de abandono es menor, por lo que el acudir al servicio de orientación influye en la decisión de abandonar los estudios.

Pregunta 4. Opción B. Un estudio afirma que el 70% de las personas jóvenes adquieren ropa en plataformas de segunda mano, mientras que el resto lo hace en tiendas tradicionales. El estudio también afirma que el 60% de quienes compran en plataformas de segunda mano realiza donaciones de ropa a ONG, porcentaje que baja al 20% entre quienes compran en tiendas tradicionales.

- Si se selecciona al azar una persona joven de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que compre en plataformas de segunda mano y no realice donaciones de ropa? **(1 punto)**
- ¿Se puede afirmar que donar ropa es independiente de donde se compra la ropa? **(0.5 puntos)**
- Si la persona seleccionada realiza donaciones de ropa, ¿cuál es la probabilidad de que compre en tiendas tradicionales? **(1 punto)**

Pasamos los datos a valores absolutos suponiendo que son 1000 los jóvenes que se han sometido al estudio. Daría el mismo resultado suponiendo otra cantidad (elegimos 1000 para obtener resultados enteros).

El 70% de las personas jóvenes adquieren ropa en plataformas de segunda mano, mientras que el resto lo hace en tiendas tradicionales $\rightarrow 0.7 \cdot 1000 = 700$ jóvenes compran en plataformas de segunda mano, mientras que el resto ($1000 - 700 = 300$) lo hace en tiendas tradicionales.

El 60% de quienes compran en plataformas de segunda mano (700) realiza donaciones de ropa a ONG ($0.6 \cdot 700 = 420$), porcentaje que baja al 20% entre quienes compran en tiendas tradicionales ($0.2 \cdot 300 = 60$).

Ponemos estos datos en una tabla.

	Dona a ONG	No dona a ONG	
Plataformas de 2ª mano	420		700
Tiendas tradicionales	60		300
			1000

Completamos la tabla.

	Dona a ONG	No dona a ONG	
Plataformas de 2ª mano	420	280	700
Tiendas tradicionales	60	240	300
	480	520	1000

- De los 1000 jóvenes del estudio son 280 los que compran en plataformas de segunda mano y no realizan donaciones de ropa. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que al escoger un joven del estudio este compre en plataformas de segunda mano y no realice donaciones de

$$\text{ropa vale } \frac{280}{1000} = 0.28$$

- Llamamos S al suceso “comprar ropa en plataformas de 2ª mano” y D a “donar ropa a ONG”. Para que sean independientes el lugar de compra de la donación de ropa debe cumplirse $P(D \cap S) = P(D) \cdot P(S)$.

$$\left. \begin{aligned} P(D \cap S) &= \frac{420}{1000} = 0.42 \\ P(D) \cdot P(S) &= \frac{480}{1000} \cdot \frac{700}{1000} = 0.336 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(D \cap S) = 0.42 \neq 0.336 = P(D) \cdot P(S)$$

Donar ropa NO es independiente de donde se compra la ropa

- c) Son 480 los jóvenes que donan ropa y 60 los jóvenes que donan ropa y la compran en tiendas tradicionales. La probabilidad de que el joven donante de ropa elegido compre en tiendas tradicionales vale $\frac{60}{480} = \frac{1}{8} = 0.125$.

Pregunta 5. Opción A.* El ayuntamiento de una gran ciudad está analizando el éxito de sus presupuestos participativos.

- a) Para estimar la verdadera proporción que apoya los presupuestos participativos, el ayuntamiento encuestó a una muestra aleatoria de 800 residentes y obtuvo un intervalo de confianza al 95% que resultó (0.6169, 0.6831). ¿Cuántas personas de las 800 que formaban la muestra respondieron que sí apoyan los presupuestos participativos? ¿Qué proporción de personas en la muestra apoyaba los presupuestos participativos? **(1 punto)**
- b) El ayuntamiento quiere estar seguro de que más de dos tercios de la población apoya los presupuestos participativos. Con los datos del apartado anterior, ¿puede el ayuntamiento estar seguro de ello con una confianza de, al menos, el 95%? **(0.5 puntos)**
- c) Utilizando la misma muestra de 800 personas del apartado anterior, otro equipo de análisis presentó un informe donde el intervalo para la proporción de apoyo era más amplio: (0.6107, 0.6893). ¿Cuál fue el nivel de confianza que utilizó este segundo equipo para calcular su intervalo? **(1 punto)**

- a) El tamaño de la muestra es $n = 800$. La proporción muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$p = \frac{0.6169 + 0.6831}{2} = 0.65$$

Si multiplico la proporción muestral por el tamaño de la muestra obtenemos el número de personas que apoyan los presupuestos participativos: $0.65 \cdot 800 = 520$ personas apoyan los presupuestos.

La proporción de personas en la muestra que apoyaba los presupuestos participativos es 0.65.

- b) El intervalo de confianza al 95% para la proporción de personas que apoyan los presupuestos es (0.6169, 0.6831). Los dos tercios de la población significa una proporción de $\frac{2}{3} = 0.6666$.

Esta proporción pertenece al intervalo de confianza obtenido. El ayuntamiento puede estar seguro de que dos tercios de la población apoya los presupuestos con una confianza de, al menos, el 95%.

- c) El tamaño de la muestra es $n = 800$. La proporción muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$p = \frac{0.6107 + 0.6893}{2} = 0.65$$

El error del intervalo de confianza es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{0.6893 - 0.6107}{2} = 0.0393$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.0393 = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{800}} \Rightarrow \frac{0.0393}{\sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{800}}} = z_{\alpha/2} \Rightarrow \boxed{z_{\alpha/2} \approx 2.33}$$

Como $F(2.33) = 0.99$ entonces $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99$ y despejando tenemos:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01 \Rightarrow \alpha = 0.02 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.98}$$

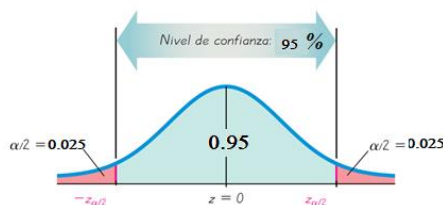
El nivel de confianza utilizado en el intervalo ofrecido en este apartado es del 98%.

Pregunta 5. Opción B.* Un estudio sociológico analiza el gasto mensual en alquiler de las personas jóvenes (en €). Se asume que ese gasto sigue una distribución normal, con una desviación típica de 150 €.

- a) Si se quiere estimar el gasto medio mensual en alquiler de las personas jóvenes, ¿cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para que el error de estimación máximo sea de 20 €, con un nivel de confianza del 95%? **(1 punto)**
- b) En la misma población se tomó una muestra aleatoria de 900 personas jóvenes y se obtuvo un intervalo de confianza al 90% para el gasto medio mensual que resultó ser (741.77, 758.23), ¿cuál fue el gasto medio mensual obtenido en esta muestra de 900 personas? **(0.5 puntos)**
- c) Se realizó una nueva encuesta con un tamaño muestral mucho mayor que el del apartado anterior. Si se determina el intervalo de confianza al nivel del 90 %, ¿el error de estimación será mayor o menor que en el caso anterior? ¿El error dependerá del valor de la media muestral $\bar{x}$ que se obtenga? Explica razonadamente tu respuesta. **(1 punto)**

Consideramos la variable aleatoria X = el gasto mensual en alquiler de las personas jóvenes (en €). $X = N(\mu, 150)$.

- a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; **$F(1,96) = 0,975$** ; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 20 = 1.96 \cdot \frac{150}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 150}{20} \Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 150}{20} \right)^2 = 216.09$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 217 personas jóvenes.

- b) El tamaño muestral es $n = 900$. La media muestral es el valor central del intervalo:

$$\bar{x} = \frac{741.77 + 758.23}{2} = 750 \text{ €}.$$

- c) El error de estimación se obtiene con la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Si mantenemos el nivel de confianza el valor de $z_{\alpha/2}$ no cambia, también se mantiene el valor de la desviación típica σ .

Si aumentamos el tamaño de la muestra será mayor el valor de n . Como el error es inversamente proporcional a n el error de estimación será menor al anterior.

El error no depende de la media muestral $\bar{x}$ que se obtenga. No aparece en la fórmula del error de estimación.