

Instrucciones: (si fuesen necesarias para la elección de preguntas o para la resolución del examen, en caso contrario suprimir estas líneas)

Pregunta 1 (2 puntos): OBLIGATORIA. Sentido estocástico

1. Una empresa de alquiler de patinetes eléctricos ha realizado un estudio que indica que la duración media de las baterías se encuentra entre 171 y 201 minutos, con una confianza del 98%. Además, de acuerdo con los datos técnicos del fabricante, la desviación típica de la duración de las baterías es de 42,7 minutos.
 - a) **(0,75 puntos)** Calcula el tamaño de la muestra utilizada.
 - b) **(0,75 puntos)** Para tener más información la empresa decide hacer un nuevo estudio. Para ello escoge una muestra de 50 patinetes, obteniendo una duración media de 190 minutos. Suponiendo que se mantiene la desviación típica dada por el fabricante, calcula el nuevo intervalo de confianza para la duración media de las baterías con una confianza del 95%.
 - c) **(0,5 puntos)** Si suponemos que la media poblacional coincide con el valor medio del apartado anterior, calcula la probabilidad de que la duración media de las baterías de una muestra de 50 patinetes supere las 3 horas.

Solución:

a) $\bar{x} = \frac{171+201}{2} = 186, \sigma = 42,7$

$$1 - \alpha = 0,98 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,01 \Leftrightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 0,99 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} = 2,33$$

$$\bar{x} + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 201 \Leftrightarrow 186 + 2,33 \frac{42,7}{\sqrt{n}} = 201 \Leftrightarrow n = \left(\frac{2,33 \cdot 42,7}{15} \right)^2 \approx 43,9931$$

El tamaño de la muestra fue de 44 patinetes

b) $\bar{x} = 190, \sigma = 42,7$

$$1 - \alpha = 0,95 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Leftrightarrow P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,975 \Leftrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

Como $n \geq 30$, el intervalo será: $\left[\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \Leftrightarrow \left[190 \pm 1,96 \frac{42,7}{\sqrt{50}}\right] \Leftrightarrow [178,1642; 201,83588]$

Por tanto, la duración media de las baterías estará entre aproximadamente entre 178 y 202 minutos, con una confianza del 95%.

c) Sea $X =$ tiempo en minutos de duración de una batería $\sim N(\mu = 190, \sigma = 42,7)$

Como $n \geq 30$, $\bar{X} \sim N\left(190, \frac{42,7}{\sqrt{50}}\right) = N(\mu = 190, \sigma = 6,0387)$. Asimismo 3 horas = 180 min, y por tanto:

$$P(\bar{X} > 180) = P\left(Z > \frac{180 - 190}{6,0387}\right) \approx P(Z > -1,66) = P(Z < 1,66) = 0,9515.$$

Pregunta 2 (3 puntos): OBLIGATORIA. Sentido de la medida

2. Se ha medido el aprendizaje de vocabulario de una lengua extranjera que se obtiene con un nuevo método de enseñanza. El número de palabras aprendidas viene dado por la función $V(t)$, donde t son las horas de ejercitación, y tiene la siguiente expresión:

$$V(t) = \begin{cases} 27t, & \text{si } 0 \leq t < 10 \\ 300\left(1 - \frac{1}{t}\right), & \text{si } t \geq 10 \end{cases}$$

- a) **(1,25 puntos)** ¿Es continua esta función? ¿Y derivable? Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- b) **(0,5 puntos)** Dibuja la función.
- c) **(0,75 puntos)** Si un estudiante se ejercita cinco horas semanales, ¿cuántas palabras nuevas aprende durante la cuarta semana? ¿Existe un máximo de palabras a retener con este nuevo método?
- d) **(0,5 puntos)** ¿En qué momento supera las 280 palabras?

Solución.

- e) La primera expresión de V es una función lineal y por tanto continua y derivable. La segunda es racional que solo tendrá problemas para $t=0$ y no está en el intervalo donde es válida esa expresión. Por lo tanto V será continua y derivable en todo su dominio salvo tal vez cuando cambia de expresión, para $t=10$. Estudiemos para ese punto:

$$V(10) = 300(1 - 1/10) = 270$$

$$\lim_{t \rightarrow 10^-} V(t) = 27 \cdot 10 = 270$$

Por tanto la función es continua en todo su dominio $[0, \infty)$

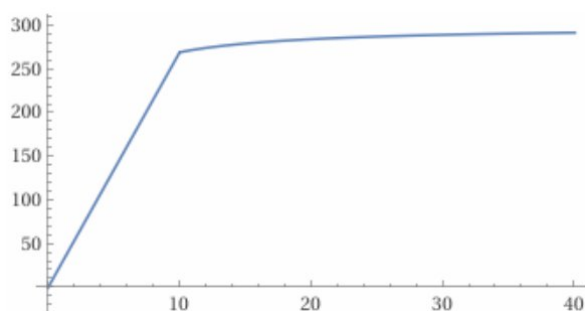
$$\lim_{t \rightarrow 10^-} V'(t) = 27$$

$$\lim_{t \rightarrow 10^+} V'(t) = 300 (1/t^2) = 3$$

Por lo tanto la función es derivable en todo su dominio salvo para $t=10$: $[0,10) \cup (10, \infty)$

Además la derivada en ambos tramos es siempre positiva, por lo que la función es siempre creciente. Su mínimo absoluto se encuentra por tanto para el valor más pequeño de t , esto es $t=0$, donde vale $V(0)=0$, esto es, el mínimo número de palabras se produce al principio del aprendizaje, cuando no se conoce ninguna.

f)



- g) Durante la cuarta semana aprende $V(20) - V(15) = 300(1/20 - 1/15) = 5$ palabras. El número máximo de palabras retenidas es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 300\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 300$$

- h) La función es creciente en el primer tramo, y sus valores en el mismo están en el intervalo $[0,270)$. Por tanto el valor 280 se alcanza en el segundo tramo:

$$300\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 280 \Rightarrow 1 - \frac{1}{t} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15} \Rightarrow \frac{1}{t} = 1 - \frac{14}{15} = \frac{1}{15} \Rightarrow t = 15.$$

Las 280 palabras se superan tras 15 horas de estudio.

Pregunta 3 (2 puntos): ELEGIR UNA OPCIÓN ENTRE 3.1 Y 3.2. Sentido estocástico

3.1 Durante los primeros meses de 2026 las Islas Canarias registraron un número de días con lluvia superior a lo habitual, lo que dio lugar al desbordamiento del 40% de las presas y embalses situadas en los barrancos de las islas.

- a) **(1 punto)** En la provincia de Santa Cruz de Tenerife hay registradas un total de 90 presas/embalses. Si el año que viene vuelve a llover como este año, ¿cuál es la probabilidad de que se desborden entre 30 y 40 presas/embalses?
- b) **(1 punto)** Aparte de las presas/embalses, las islas cuentan con numerosos estanques de tamaño mediano donde se recoge agua para uso agrícola. En una muestra aleatoria de 200 estanques se encontró que 54 de ellos se habían llenado este año hasta su capacidad máxima. Estima la proporción de estanques que no alcanzaron su capacidad máxima este año utilizando un intervalo de confianza al 99%.

Solución:

- a) Sea X = número de presas/embalses que se desbordan $\sim Bi(n = 90, p = 0,4)$

Como $n \cdot p = 90 \cdot 0,4 = 36 \geq 5$ y $n \cdot q = 90 \cdot 0,6 = 54 \geq 5$ se puede aproximar por la normal:

$$X \approx X' \sim N(\mu = np, \sigma = \sqrt{npq}) = N(36, 4,6476)$$

$$\begin{aligned} P(30 < X < 40) &\approx P(30 < X' < 40) = P\left(\frac{30 - 36}{4,6476} < Z < \frac{40 - 36}{4,6476}\right) \approx P(-1,29 < Z < 0,86) \\ &= 0,8051 - (1 - 0,9015) = 0,7066. \end{aligned}$$

O, utilizando la corrección de Yates:

$$\begin{aligned} P(30 < X < 40) &\approx P(30,5 < X < 39,5) = P\left(\frac{30,5 - 36}{4,6476} < Z < \frac{39,5 - 36}{4,6476}\right) \approx P(-1,18 < Z < 0,75) \\ &= 0,7734 - (1 - 0,8810) = 0,6544. \end{aligned}$$

También podría ser válido el intervalo incluyendo los valores 30 y 40, pues el enunciado puede prestarse a esa interpretación, en cuyo caso la aproximación de Yates sería:

$$\begin{aligned} P(30 \leq X \leq 40) &\approx P(29,5 \leq X \leq 40,5) = P\left(\frac{29,5 - 36}{4,6476} \leq Z \leq \frac{40,5 - 36}{4,6476}\right) = P(-1,40 \leq Z \leq 0,97) \\ &= 0,8340 - (1 - 0,9192) = 0,7532 \end{aligned}$$

- b) Si p es la proporción de estanques que NO alcanzan su capacidad máxima, entonces:

$$\hat{p} = 1 - \frac{54}{200} = 0,73 \quad \hat{q} = \frac{54}{200} = 0,27 \quad n = 200$$

Para $1 - \alpha = 0,99$, se obtiene $z_{\alpha/2} = 2,575$ y el intervalo de confianza es:

$$\left[\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right] \equiv \left[0,73 \pm 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,73 \cdot 0,27}{200}} \right] \equiv [0,6492, 0,8108]$$

Con una confianza del 99%, la proporción de estanques que no alcanzan su capacidad máxima estará entre, aproximadamente, el 65% y 81%.

3.2. El Gobierno de Canarias a través del Bono Joven de Alquiler ofrece una ayuda de hasta 250€ al mes durante dos años para pagar el alquiler de la vivienda habitual, siempre que el precio no supere los 900€ en municipios del ámbito A (capitales de provincia y zonas tensionadas), los 750€ en municipios del ámbito B (ciudades medianas) y los 600€ en municipios del ámbito C (resto de municipios). En un estudio realizado por el Consejo de la Juventud de Canarias se ha encontrado que en la actualidad el 45% de los anuncios de alquiler ofrecen viviendas en el ámbito A, el 35% en el ámbito B y el resto en el ámbito C. Asimismo, de acuerdo con los precios ofertados, solo pueden acogerse al Bono Joven un 24% de los alquileres del ámbito A, un 46% de los del B y un 66% de los del C.

- (1 punto)** Se elige un anuncio al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que pueda acogerse a la ayuda del Bono Joven?
- (1 punto)** Sabiendo que un anuncio no permite acogerse al Bono Joven, ¿cuál es la probabilidad de que esté en un municipio del ámbito A?

Solución:

- Primero calculamos la probabilidad de encontrar anuncios del ámbito C: $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0,45 - 0,35 = 0,2$, por lo que habremos definido un sistema completo de sucesos (sucesos incompatibles dos a dos cuya unión conforma el espacio muestral total). En estas condiciones podemos aplicar el teorema de la probabilidad total para calcular la probabilidad de poder acogerse al bono joven:

$$\begin{aligned} P(BJ) &= P(BJ|A)P(A) + P(BJ|B)P(B) + P(BJ|C)P(C) \\ &= 0,24 \cdot 0,45 + 0,46 \cdot 0,35 + 0,66 \cdot 0,20 = 0,401. \end{aligned}$$

- En este caso aplicamos el teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P(A|\overline{BJ}) &= \frac{P(\overline{BJ}|A)P(A)}{P(\overline{BJ})} = \frac{(1 - P(BJ|A))P(A)}{1 - P(BJ)} \\ &= \frac{(1 - 0,24) \cdot 0,45}{1 - 0,401} = \frac{0,76 \cdot 0,45}{0,599} = 0,5710. \end{aligned}$$

Pregunta 4 (3 puntos): ELEGIR UNA OPCIÓN ENTRE 4.1 Y 4.2. Sentido numérico y algebraico

4.1 Una empresa informática fabrica placas base de tres categorías: *Lite*, *Estándar* y *Gaming*. El coste de producción por unidad de cada categoría es de 50, 80 y 110 euros respectivamente, con precios de venta al público (antes de impuestos) de 75, 120 y 190 euros. Un cliente ha realizado un pedido que incluye placas de las tres categorías, y en el que las placas *Gaming* representan una quinta parte del total. La empresa ha gastado un total de 12 350€ en

la fabricación de este pedido. Por su parte, el cliente ha pagado 20 758 €, cantidad que incluye el precio de venta más el 7% de IGIC aplicado sobre dicho precio.

- a) **(1,5 punto)** Plantea el sistema de ecuaciones para encontrar la composición del pedido.
- b) **(1 punto)** ¿Cuántas placas de cada tipo incluye el pedido?
- c) **(0,5 puntos)** La mano de obra supone un 70% del coste de fabricación de las placas. Del importe destinado a mano de obra, el 15 % se retiene e ingresa en Hacienda en concepto de IRPF de los trabajadores. Asimismo, el impuesto sobre sociedades asciende al 23 % del importe de los beneficios obtenidos en esta operación (precio de venta sin IGIC menos coste). Determina el importe total de los tributos asociados a esta operación (IGIC + IRPF retenido + Impuesto de Sociedades) y calcula qué porcentaje representa sobre la cantidad final pagada por el cliente.

Solución:

a) Las ecuaciones son:

- $G = \frac{L+E+G}{5} \Rightarrow L + E - 4G = 0$
- $50L + 80E + 110G = 12.350$
- $(75L + 120E + 190G) \cdot 1,07 = 20.758 \Rightarrow 75L + 120E + 190G = 19.400$

b) Solución: L=90, E=50, G=35

c) Como el IGIC es un 7% del precio de venta, se tiene que $PV \cdot 1,07 = 20\,758$, de donde se deduce que el precio de venta fue $20\,758/1,07 = 19\,400$. Tenemos entonces:

- Importe del IGIC = $0,07 \cdot 19\,400 = 1\,358€$
- Importe del IRPF = 15% del 70% del coste de producción de las placas, esto es:
$$0,15 \cdot 0,7 \cdot 12\,350 = 1\,296,75€$$
- Beneficio = $19\,400 - 12\,350 = 7\,050€$
- Impuesto de sociedades = 23% del beneficio = $0,23 \cdot 7\,050 = 1\,621,50€$
- Total tributos: $1\,358 + 1\,296,75 + 1\,621,50 = 4\,276,25€$
- Proporción tributos = $100 \cdot \frac{4276,25}{20758} = 20,6\%$

4.2. Una empresa organiza excursiones nocturnas a las Cañadas del Teide para observar el cielo. Atendiendo a las condiciones de su flota de guaguas y al personal disponible, la empresa ofrece dos tipos de excursiones: el tipo A, con 75 plazas básicas (solo transporte) y 100 plazas “estrella” (con un guía especializado en astronomía), y el tipo B, también con 75 plazas básicas y solo 50 plazas estrella. El beneficio que reporta cada tipo de excursión es de 240€ para las del tipo A y de 180€ para las del tipo B. Para la campaña de verano se pueden ofertar, como mucho, un total de 3750 plazas básicas y 4000 plazas estrella. Asimismo, de acuerdo con la experiencia de otros años, el número de excursiones tipo A debe ser menor o igual que el doble de excursiones del tipo B. La empresa desea maximizar su beneficio.

- a) **(1 punto)** Plantear el problema de programación lineal correspondiente.
- b) **(1,5 puntos)** Representa la región factible y determina cuántas excursiones del tipo A y cuántas del tipo B deberían hacerse para obtener el beneficio máximo.
- c) **(0,5 puntos)** Supongamos que finalmente se realizan 28 excursiones del tipo A y 14 del tipo B, y que con respecto a la previsión inicial el beneficio que reporta cada tipo de excursión se incrementa en un 10% para las del tipo A y en un 15% para las del tipo B. ¿Cuál es el beneficio final que obtiene la empresa en este caso?

Solución:

- a) Llamando a y b , respectivamente, a los números de excursiones tipo A y B que se venden, las restricciones son:

$$\begin{cases} r_1: 75a + 75b \leq 3750 \\ r_2: 100a + 50b \leq 4000 \\ r_3: a \leq 2b \Rightarrow a - 2b \leq 0 \end{cases}$$

Función objetivo:

$$f(a,b) = 240a + 180b$$

y por tanto el problema de PL es maximizar esta función sujeta a las restricciones anteriores y la no negatividad de ambas variables ($a, b \geq 0$).

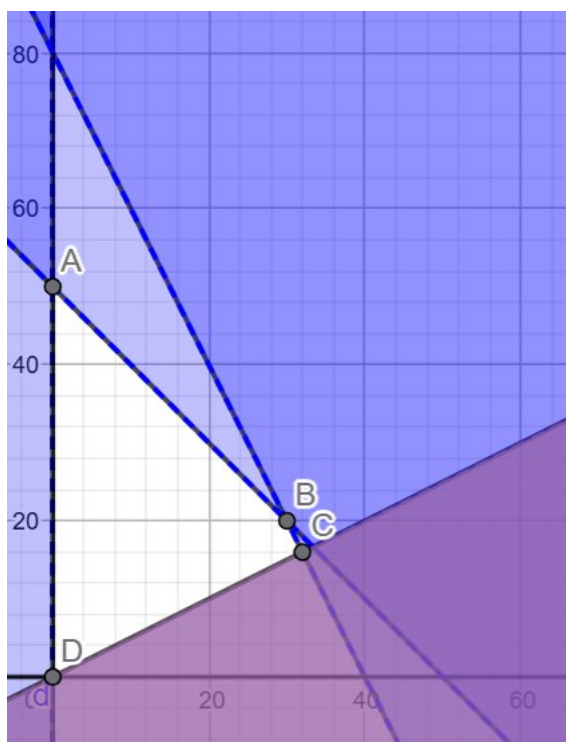
- b) Representación gráfica de la región factible y vértices de la misma:

En la figura siguiente sombreamos los semiplanos que no cumplen con las inecuaciones de forma que la región factible es la que se muestra completamente en blanco.

Para dibujar las rectas que limitan las restricciones seleccionamos los puntos de corte con los ejes:

$r_1: 75a + 75b = 3750$		$r_2: 100a + 50b = 4000$		$r_3: a - 2b = 0$	
$a = 0$	$b = 50$	$a = 0$	$b = 80$	$a = 0$	$b = 0$
$a = 50$	$b = 0$	$a = 40$	$b = 0$	$a = 40$	$b = 20$

Pintamos las restricciones en el plano y nos encontramos que la **región factible** es (en blanco):



La región factible es una **región cerrada delimitada por los puntos A, B, C, D** que describimos a continuación:

- Punto A (0,50) solución del sistema $\left. \begin{array}{l} a = 0 \\ 75a + 75b = 3750 \end{array} \right\}$
- Punto B (30,20), solución del sistema $\left. \begin{array}{l} 75a + 75b = 3750 \\ 100a + 50b = 4000 \end{array} \right\}$
- Punto C (32,16) solución del sistema $\left. \begin{array}{l} 100a + 50b = 4000 \\ a - 2b = 0 \end{array} \right\}$
- Punto D (0,0) solución del sistema $\left. \begin{array}{l} a - 2b = 0 \\ a = 0 \end{array} \right\}$

La solución óptima se encuentra en uno de los vértices. Evaluamos la función objetivo (beneficio) en cada uno de ellos:

- $f(a,b) = 240a + 180b$
- $f(A) = f(0,50) = 240 \cdot 0 + 180 \cdot 50 = 9000$
- $f(B) = f(30,20) = 240 \cdot 30 + 180 \cdot 20 = 10800$
- $f(C) = f(32,16) = 240 \cdot 32 + 180 \cdot 16 = 10560$
- $f(D) = f(0,0) = 240 \cdot 0 + 180 \cdot 0 = 0$

Por tanto, para obtener el máximo beneficio se deben vender 30 excursiones tipo A y 20 excursiones tipo B. El beneficio total asciende a 10 800 euros.

c) El incremento de beneficio para cada tipo de excursión es:

- 110% de 240 = 264€ por cada excursión tipo A
- 115% de 180 = 207€ por cada excursión tipo B
- El beneficio final es, por tanto, $28 \cdot 264 + 14 \cdot 207 = 10\,290\text{€}$