

	Prueba de acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II	EJERCICIO Nº Páginas: 4
---	---	--	-----------------------------------

APARTADO 1 (Bloques A+C)

1. En una industria alimentaria se planifica la supervisión que se va a realizar a los lotes producidos el próximo mes. Se han establecido dos protocolos de revisión, la revisión normal y la exhaustiva. Los recursos humanos y materiales de esa supervisión limitan el número de lotes que se pueden revisar.

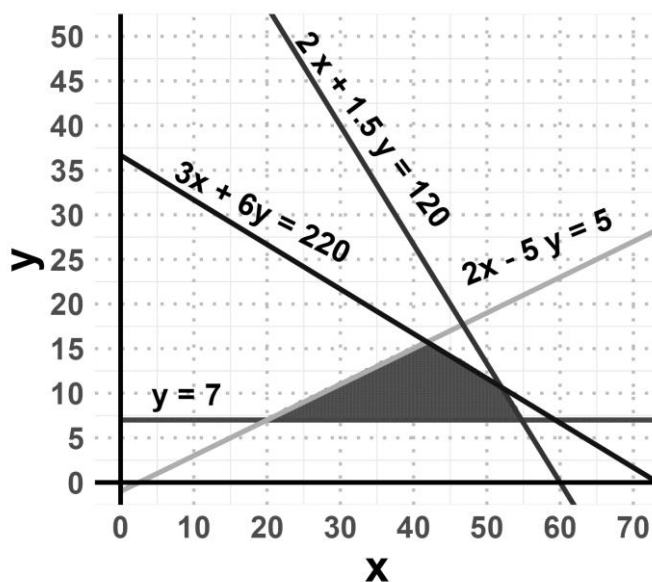
Responder a uno de los siguientes problemas (1.1, 1.2):

1.1 Se sabe que una revisión exhaustiva de un lote consume 6 horas del departamento de envasado y 2 horas en el de etiquetado, mientras que una revisión normal de un lote consume 3 horas del departamento de envasado y 1.5 horas en el de etiquetado. En esta planificación de la supervisión se fija que, como mínimo, 5 revisiones deben ser exhaustivas y, al menos la mitad, con el protocolo normal. Se disponen de un máximo de 180 horas en el departamento de envasado y un máximo de 80 horas en el de etiquetado.

a) [1.5 puntos] Determinar el sistema de restricciones y representar la región factible, utilizando técnicas de programación lineal.

b) [1.5 puntos] Determinar, utilizando técnicas de programación lineal, cuál es el número máximo total de revisiones normales y exhaustivas que se pueden realizar con los recursos disponibles, así como el número de ambas revisiones para las que se alcanza este máximo.

1.2 En la siguiente figura se muestra sombreada la región factible de un problema de programación lineal planteado para decidir el número de revisiones normales y el número de revisiones exhaustivas.



a) [1.5 puntos] Escribir matemáticamente el conjunto de restricciones que corresponden a este problema. Escribir una solución de la región factible y otra de fuera de la región factible.

b) [1.5 puntos] Determinar, utilizando técnicas de programación lineal, y teniendo en cuenta la región factible dada en el apartado anterior, cuál es el número máximo total de revisiones normales y exhaustivas que se pueden realizar, así como el número de ambas revisiones para las que se alcanza este máximo.

APARTADO 2 (Bloque B)

2. Un centro deportivo permanece abierto las 24 horas del día. Para modelizar la afluencia de usuarios de un día determinado, se define la función $f(t)$ que indica el número aproximado de personas dentro del centro a la hora t , con $0 \leq t \leq 24$

$$f(t) = \begin{cases} 10 + 2t^2 + a & \text{si } 0 \leq t < 6 \\ 130 - (t-12)^2 & \text{si } 6 \leq t < 18 \\ 80 - \frac{1}{2}t^2 + 9t + b & \text{si } 18 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

Responder a las siguientes cuestiones (2.1, 2.2):

2.1 [1.5 puntos] Determinar el valor de a y b para que la función anterior sea continua.

2.2 [1.5 puntos] Si $a = b = 0$, ¿en qué momento del día se encuentran 105 personas dentro del centro deportivo según esta función? ¿A qué hora del día se produce la máxima afluencia y cuántos usuarios estaban en su interior?

APARTADO 3 (Bloque D)

3. Se ha realizado un estudio sobre los estudiantes de un Instituto de Educación Secundaria, recogiendo distinta información, que se presenta a continuación.

Responda a dos de los siguientes problemas (3.1, 3.2, 3.3):

3.1. De los 1000 estudiantes matriculados en el instituto, 450 son hombres, de los cuales un 12% son repetidores, mientras que, entre las mujeres, hay un 10 % de repetidoras.

a) [1 punto] Escribir la información anterior en términos de sucesos y sus probabilidades asociadas. Hallar el porcentaje de estudiantes repetidores en el instituto.

b) [1 punto] Si se selecciona una persona repetidora, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

3.2. El equipo de profesores de Matemáticas Aplicadas a la Ciencias Sociales II ha calculado que el tiempo invertido por los estudiantes en hacer un examen sigue una distribución normal de media 100 minutos y desviación típica igual a 10 minutos.

a) [1 punto] ¿Qué proporción de estudiantes realiza el examen en más de dos horas?

b) [1 punto] ¿Cuánto tiempo tarda un estudiante en hacer el examen si el 88.1% de sus compañeros tardan menos que él?

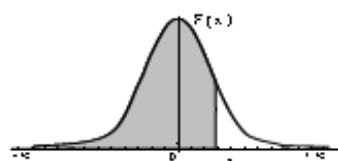
3.3. La dirección del instituto desea conocer cuál es el rendimiento medio de sus alumnos. Para ello, selecciona una muestra aleatoria de 100 expedientes de estudiantes, obteniendo una calificación media muestral de 6.5 puntos. Asumiendo que la calificación sigue una distribución normal de media μ y desviación igual a 1 punto, se pide:

a) [1 punto] ¿Entre qué valores se encuentra la calificación media μ de los estudiantes del instituto, con un nivel de confianza del 98%?

b) [1 punto] Para un nivel de confianza del 99%, ¿qué tamaño de muestra sería necesario para que el error cometido al estimar la media poblacional μ no sea superior a los 0.5 puntos?

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Distribución Binomial $p(X=r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$

n \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
2	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2601	0,2500
1	0,0198	0,0975	0,1900	0,2775	0,3600	0,4375	0,5100	0,5556	0,5775	0,6400	0,6975	0,7399	0,7500
0	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1111	0,1225	0,1600	0,2025	0,2401	0,2500
3	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2983	0,2746	0,2160	0,1664	0,1327	0,1250
2	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4440	0,4444	0,4436	0,4320	0,4084	0,3823	0,3750
1	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2222	0,2389	0,2880	0,3341	0,3674	0,3750
0	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0370	0,0429	0,0640	0,0911	0,1176	0,1250
4	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0677	0,0625
3	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951	0,3845	0,3456	0,2995	0,2600	0,2500
2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2983	0,3105	0,3456	0,3675	0,3747	0,3750
1	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0988	0,1115	0,1536	0,2005	0,2400	0,2500
0	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0123	0,0150	0,0256	0,0410	0,0576	0,0625
5	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
4	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3951	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1583
3	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
2	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3080	0,3125
1	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1583
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313
6	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0176	0,0156
5	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2437	0,1866	0,1359	0,1014	0,0938
4	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110	0,2780	0,2436	0,2344
3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2195	0,2355	0,2765	0,3032	0,3121	0,3125
2	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0823	0,0951	0,1382	0,1861	0,2249	0,2344
1	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0165	0,0205	0,0369	0,0609	0,0884	0,0938
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0014	0,0018	0,0041	0,0083	0,0138	0,0156
7	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0090	0,0078
6	0,0659	0,2573	0,3720	0,3980	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1306	0,0872	0,0604	0,0547
5	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,3073	0,2985	0,2613	0,2140	0,1740	0,1641
4	0,0000	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2561	0,2679	0,2903	0,2918	0,2786	0,2734
3	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1280	0,1442	0,1935	0,2388	0,2676	0,2734
2	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0384	0,0466	0,0774	0,1172	0,1543	0,1641
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0064	0,0084	0,0172	0,0320	0,0494	0,0547
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0006	0,0016	0,0037	0,0068	0,0078
8	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0046	0,0039
7	0,0746	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1561	0,1373	0,0896	0,0548	0,0352	0,0313
6	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2731	0,2587	0,2090	0,1569	0,1183	0,1094
5	0,0001	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2731	0,2786	0,2787	0,2568	0,2273	0,2188
4	0,0000	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1707	0,1875	0,2322	0,2627	0,2730	0,2734
3	0,0000	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0683	0,0808	0,1239	0,1719	0,2098	0,2188
2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0171	0,0217	0,0413	0,0703	0,1008	0,1094
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0024	0,0033	0,0079	0,0164	0,0277	0,0313
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0007	0,0017	0,0033	0,0039
9	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0023	0,0020
8	0,0830	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
7	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
6	0,0001	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2731	0,2716	0,2508	0,2119	0,1739	0,1641
5	0,0000	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2048	0,2194	0,2508	0,2600	0,2506	0,2461
4	0,0000	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1024	0,1181	0,1672	0,2128	0,2408	0,2461
3	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0341	0,0424	0,0743	0,1160	0,1542	0,1641
2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0073	0,0098	0,0212	0,0407	0,0635	0,0703
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0009	0,0013	0,0035	0,0083	0,0153	0,0176
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,0016	0,0020
10	0,9044	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0012	0,0010
9	0,0914	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0867	0,0725	0,0403	0,0207	0,0114	0,0098
8	0,0042	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1951	0,1757	0,1209	0,0763	0,0494	0,0439
7	0,0001	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2522	0,2150	0,1665	0,1267	0,1172
6	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,2384	0,2130	0,2051
5	0,0000	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1366	0,1536	0,2007	0,2340	0,2456	0,2461
4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0569	0,0689	0,1115	0,1596	0,1986	0,2051
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0163	0,0212	0,0425	0,0746	0,1080	0,1172
2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0030	0,0043	0,0106	0,0229	0,0389	0,0439
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0005	0,0016	0,0042	0,0083	0,0098
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0010

SOLUCIONES

1. En una industria alimentaria se planifica la supervisión que se va a realizar a los lotes producidos el próximo mes. Se han establecido dos protocolos de revisión, la revisión normal y la exhaustiva. Los recursos humanos y materiales de esa supervisión limitan el número de lotes que se pueden revisar.

Responder a uno de los siguientes problemas (1.1, 1.2):

1.1 Se sabe que una revisión exhaustiva de un lote consume 6 horas del departamento de envasado y 2 horas en el de etiquetado, mientras que una revisión normal de un lote consume 3 horas del departamento de envasado y 1.5 horas en el de etiquetado. En esta planificación de la supervisión se fija que, como mínimo, 5 revisiones deben ser exhaustivas y, al menos la mitad, con el protocolo normal. Se disponen de un máximo de 180 horas en el departamento de envasado y un máximo de 80 horas en el de etiquetado.

a) [1.5 puntos] Determinar el sistema de restricciones y representar la región factible, utilizando técnicas de programación lineal.

b) [1.5 puntos] Determinar, utilizando técnicas de programación lineal, cuál es el número máximo total de revisiones normales y exhaustivas que se pueden realizar con los recursos disponibles, así como el número de ambas revisiones para las que se alcanza este máximo.

1.1.a) Llamamos “x” al número de revisiones normales e “y” al número de revisiones exhaustivas.

Realizamos una tabla con la información proporcionada.

	Horas de envasado	Horas de etiquetado
Nº revisiones normales (x)	3x	1.5x
Nº revisiones exhaustivas (y)	6y	2y
TOTAL	3x + 6y	1.5x + 2y

Obtenemos las inecuaciones que expresan las restricciones del problema.

Se disponen de un máximo de 180 horas en el departamento de envasado y un máximo de 80 horas en el de etiquetado $\rightarrow 3x + 6y \leq 180$; $1.5x + 2y \leq 80$.

Como mínimo, 5 revisiones deben ser exhaustivas y, al menos la mitad, con el protocolo normal $\rightarrow y \geq 5$; $x \geq \frac{x+y}{2}$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 6y \leq 180 \\ 1.5x + 2y \leq 80 \\ y \geq 5 \\ x \geq \frac{x+y}{2} \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 60 \\ 3x + 4y \leq 160 \\ y \geq 5 \\ 2x \geq x + y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 60 \\ 3x + 4y \leq 160 \\ y \geq 5 \\ x \geq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + 2y = 60$

x	$y = \frac{60-x}{2}$
0	30
20	20
40	10

$3x + 4y = 160$

x	$y = \frac{160-3x}{4}$
0	40
20	25
40	10

$y = 5$

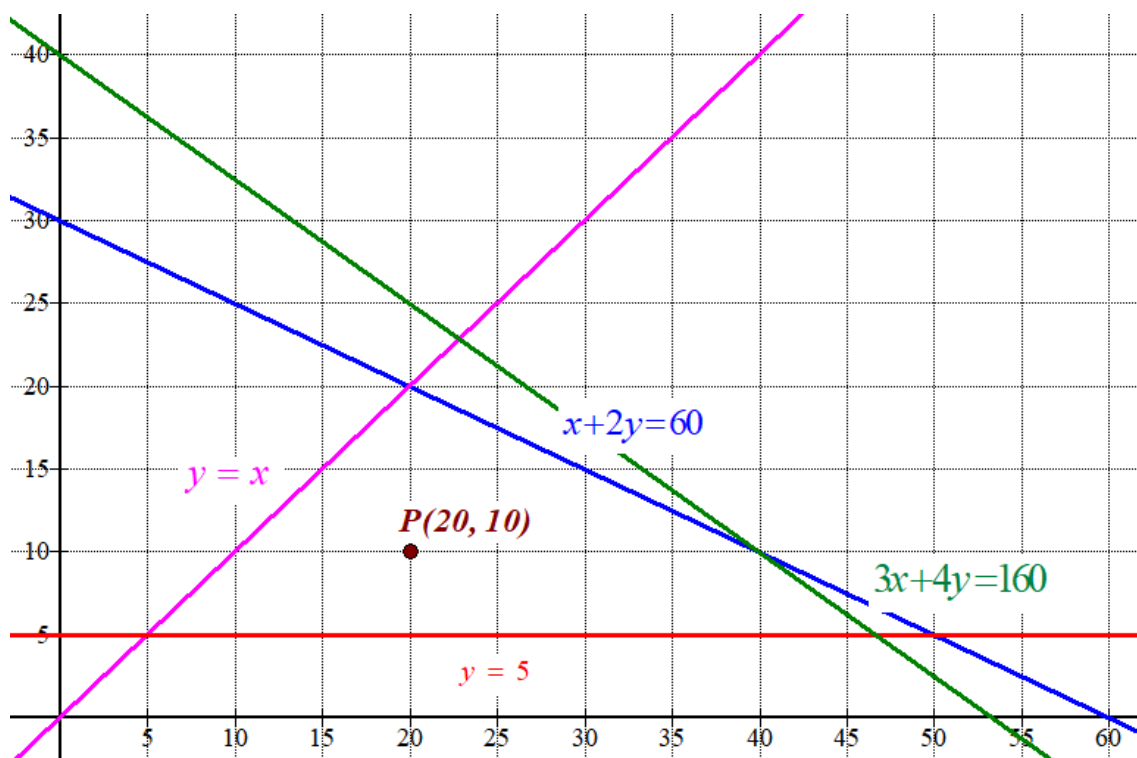
x	y = 5
0	5
5	5
10	5

$y = x$

x	y = x
0	0
5	5
10	10

$x \geq 0; y \geq 0$

Primer
cuadrante

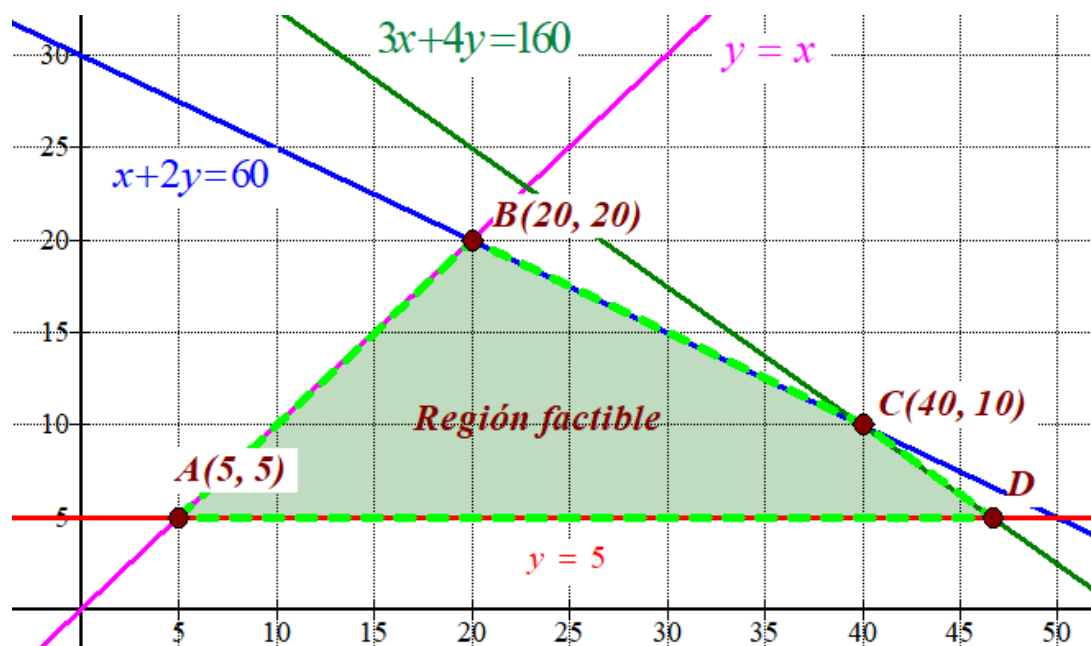


Las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 60 \\ 3x + 4y \leq 160 \\ y \geq 5 \\ x \geq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$. La región factible es la región del primer cuadrante

situada por encima de la recta horizontal roja y por debajo de las rectas rosa, azul y verde. Comprobamos que el punto $P(20, 10)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 + 2 \cdot 10 \leq 60 \\ 3 \cdot 20 + 4 \cdot 10 \leq 160 \\ 10 \geq 5 \\ 20 \geq 10 \\ 20 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible e indicamos las coordenadas de los vértices.



Hallamos las coordenadas del punto D.

$$\left. \begin{array}{l} y=5 \\ 3x+4y=160 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x+20=160 \Rightarrow 3x=140 \Rightarrow x=\frac{140}{3} \Rightarrow D\left(\frac{140}{3}, 5\right)$$

Los vértices de la región factible son $A(5, 5)$, $B(20, 20)$, $C(40, 10)$ y $D\left(\frac{140}{3}, 5\right)$.

1.1.b) La función que deseamos maximizar es el número total de revisiones que viene dada por la expresión $r(x, y) = x + y$. Valoramos esta función en cada uno de los vértices en busca del valor más alto.

$$A(5, 5) \rightarrow r(5, 5) = 5 + 5 = 10$$

$$B(20, 20) \rightarrow r(20, 20) = 20 + 20 = 40$$

$$C(40, 10) \rightarrow r(40, 10) = 40 + 10 = 50$$

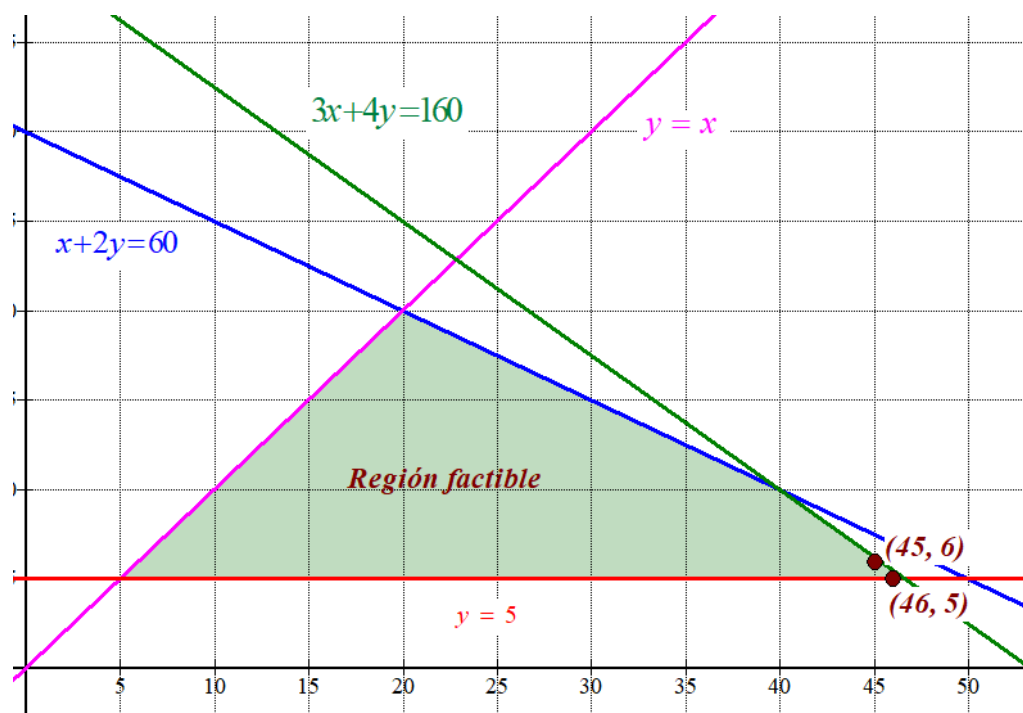
$$D\left(\frac{140}{3}, 5\right) \rightarrow r\left(\frac{140}{3}, 5\right) = 46.6 + 5 = 51.66 \text{ Máximo}$$

Como el punto D tiene coordenadas decimales no nos sirve como resultado. Tomamos el valor entero más próximo e incluido en la región factible (46, 5). El número máximo de revisiones cumpliendo con las restricciones se consigue con 46 revisiones normales y 5 exhaustivas. Pero esta no es la única solución.

$$\left. \begin{array}{l} 45 + 2 \cdot 6 \leq 60 \\ 3 \cdot 45 + 4 \cdot 6 \leq 160 \\ \text{¿}(45, 6) \text{ está en la región factible?} \rightarrow 6 \geq 5 \\ 45 \geq 6 \\ 45 \geq 0; 6 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas y también nos}$$

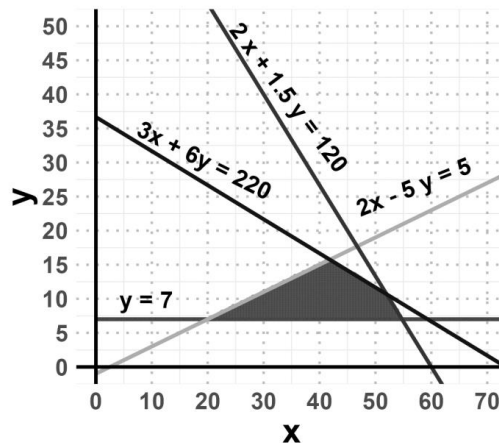
sirve como solución 45 revisiones normales y 6 exhaustivas.

$$\begin{array}{l}
 46 + 2 \cdot 5 \leq 60 \\
 3 \cdot 46 + 4 \cdot 5 \leq 160 \\
 \text{¿}(46, 5) \text{ está en la región factible?} \rightarrow 5 \geq 5 \\
 46 \geq 5 \\
 46 \geq 0; 5 \geq 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 46 + 2 \cdot 5 \leq 60 \\ 3 \cdot 46 + 4 \cdot 5 \leq 160 \\ 5 \geq 5 \\ 46 \geq 5 \\ 46 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array}} \right\} \text{Se cumplen todas.}$$



Cumpliendo las restricciones el número máximo de revisiones que se pueden hacer es de 51, habiendo dos formas distintas para hacerlo: 46 revisiones normales y 5 exhaustivas o bien 45 revisiones normales y 6 exhaustivas.

1.2 En la siguiente figura se muestra sombreada la región factible de un problema de programación lineal planteado para decidir el número de revisiones normales y el número de revisiones exhaustivas.



- a) [1.5 puntos]** Escribir matemáticamente el conjunto de restricciones que corresponden a este problema. Escribir una solución de la región factible y otra de fuera de la región factible.
- b) [1.5 puntos]** Determinar, utilizando técnicas de programación lineal, y teniendo en cuenta la región factible dada en el apartado anterior, cuál es el número máximo total de revisiones normales y exhaustivas que se pueden realizar, así como el número de ambas revisiones para las que se alcanza este máximo.

1.2.a) La región factible está situada por encima de la recta horizontal $y = 7 \rightarrow y \geq 7$.

La región factible está por debajo de todas las rectas oblicuas $\rightarrow 3x + 6y \leq 220$;

$2x + 1.5y \leq 120$; $2x - 5y \geq 5$.

Reunimos las inecuaciones en un sistema.

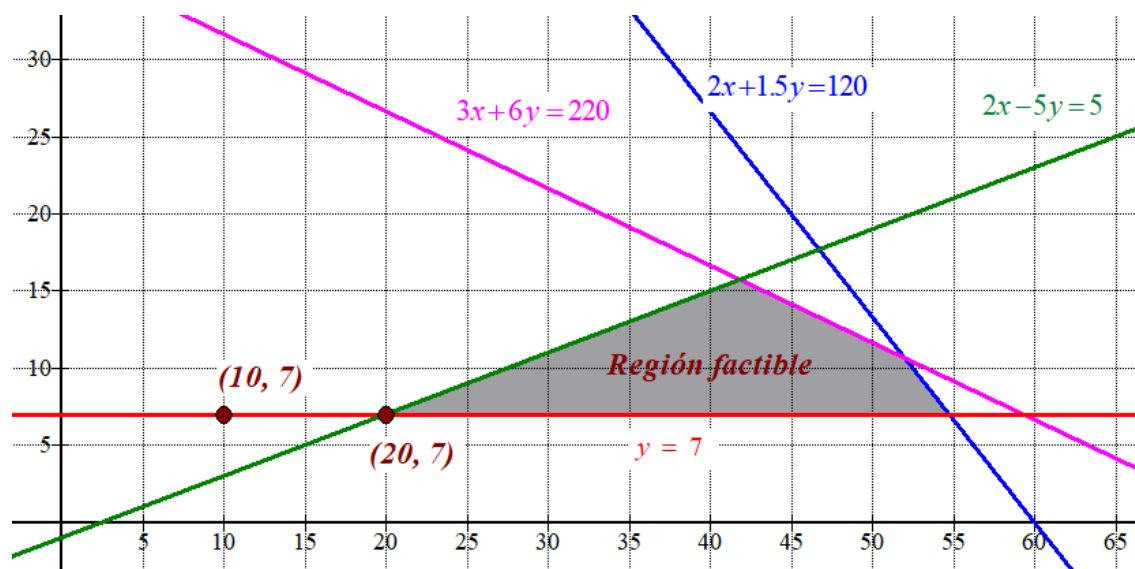
$$\left. \begin{array}{l} y \geq 7 \\ 3x + 6y \leq 220 \\ 2x + 1.5y \leq 120 \\ 2x - 5y \geq 5 \end{array} \right\}$$

En la región factible está situado el punto (20, 7). Lo comprobamos.

$$\left. \begin{array}{l} 7 \geq 7 \\ 3 \cdot 20 + 6 \cdot 7 \leq 220 \\ 2 \cdot 20 + 1.5 \cdot 7 \leq 120 \\ 2 \cdot 20 - 5 \cdot 7 \geq 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7 \geq 7 \\ 60 + 42 \leq 220 \\ 40 + 10.5 \leq 120 \\ 40 - 35 \geq 5 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Fuera de la región factible está situado el punto (10, 7). Lo comprobamos.

$$\left. \begin{array}{l} 7 \geq 7 \\ 3 \cdot 10 + 6 \cdot 7 \leq 220 \\ 2 \cdot 10 + 1.5 \cdot 7 \leq 120 \\ 2 \cdot 10 - 5 \cdot 7 \geq 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7 \geq 7 \\ 30 + 42 \leq 220 \\ 20 + 10.5 \leq 120 \\ 20 - 35 \geq 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7 \geq 7 \\ 72 \leq 220 \\ 30.5 \leq 120 \\ \text{¡¡¡} -15 \geq 5 \text{!!!} \end{array} \right\} \text{ ¡No se cumplen todas!}$$



1.2.b) Hallamos las coordenadas de los vértices de la región factible.

$$\left. \begin{array}{l} y = 7 \\ 2x - 5y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 35 = 5 \Rightarrow 2x = 40 \Rightarrow x = 20 \Rightarrow A(20, 7)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 6y = 220 \\ 2x - 5y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 6x + 12y = 440 \\ -6x + 15y = -15 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 27y = 425 \Rightarrow y = \frac{425}{27} \Rightarrow 2x - 5 \frac{425}{27} = 5 \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x = 5 + \frac{2125}{27} = \frac{2260}{27} \Rightarrow x = \frac{1130}{27} \Rightarrow B\left(\frac{1130}{27}, \frac{425}{27}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 6y = 220 \\ 2x + 1.5y = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 6x + 12y = 440 \\ -6x - 4.5y = -360 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 7.5y = 80 \Rightarrow y = \frac{80}{7.5} = \frac{32}{3} \Rightarrow 2x + 16 = 120 \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x = 104 \Rightarrow x = \frac{104}{2} = 52 \Rightarrow C\left(\frac{32}{3}, 52\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 7 \\ 2x + 1.5y = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 10.5 = 120 \Rightarrow 2x = 109.5 \Rightarrow x = \frac{109.5}{2} = \frac{219}{4} \Rightarrow D\left(\frac{219}{4}, 7\right)$$

La función que deseamos maximizar es el número total de revisiones que viene dada por la expresión $r(x, y) = x + y$. Valoramos esta función en cada uno de los vértices en busca del valor más alto.

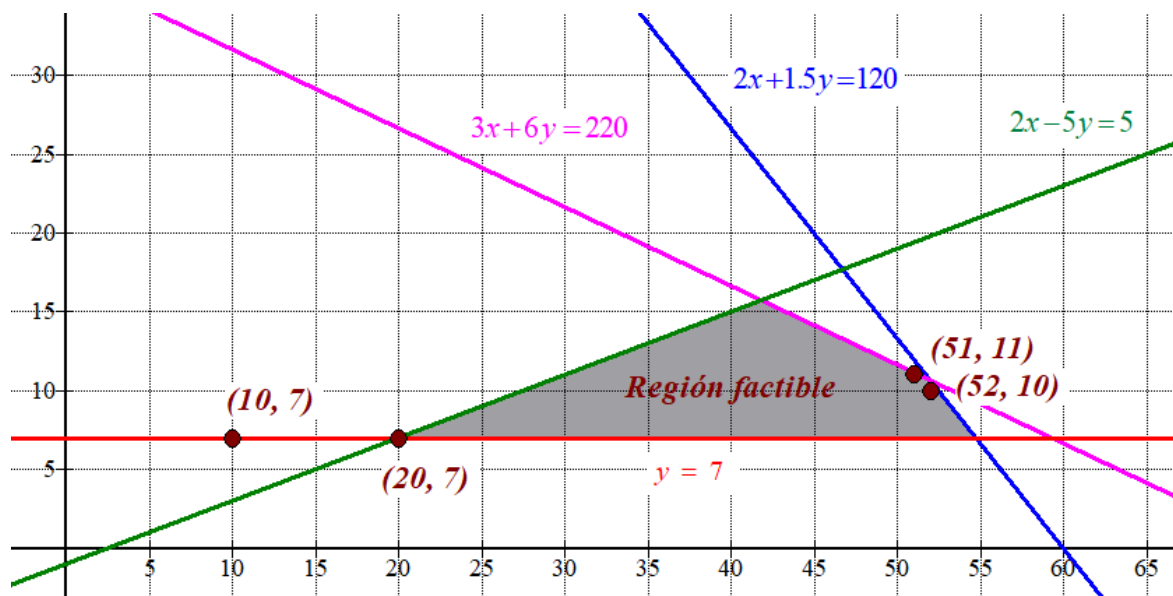
$$A(20, 7) \rightarrow r(20, 7) = 20 + 7 = 27$$

$$B\left(\frac{1130}{27}, \frac{425}{27}\right) \rightarrow r\left(\frac{1130}{27}, \frac{425}{27}\right) = \frac{1130}{27} + \frac{425}{27} = \frac{1555}{27} \approx 57.592$$

$$C\left(\frac{32}{3}, 52\right) \rightarrow r\left(\frac{32}{3}, 52\right) = \frac{32}{3} + 52 = \frac{188}{3} \approx 62,66 \text{ Máximo}$$

$$D\left(\frac{219}{4}, 7\right) \rightarrow r\left(\frac{219}{4}, 7\right) = \frac{219}{4} + 7 = \frac{247}{4} = 61.75$$

El valor máximo se alcanza en el vértice $C\left(\frac{32}{3}, 52\right)$, pero sus coordenadas son decimales. Lo más próximo a este vértice son los puntos E(52, 10) y F(51, 11) que pertenecen a la región factible. El máximo número de revisiones es 62 y se consiguen de dos formas distintas: con 52 revisiones normales y 10 exhaustivas o bien con 51 revisiones normales y 11 exhaustivas.



Comprobamos que ambos puntos pertenecen a la región factible.
E(52, 10) pertenece a la región factible.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \geq 7 \\ 3 \cdot 52 + 6 \cdot 10 \leq 220 \\ 2 \cdot 52 + 1.5 \cdot 10 \leq 120 \\ 2 \cdot 52 - 5 \cdot 10 \geq 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10 \geq 7 \\ 156 + 60 \leq 220 \\ 104 + 15 \leq 120 \\ 104 - 50 \geq 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10 \geq 7 \\ 216 \leq 220 \\ 119 \leq 120 \\ 54 \geq 5 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

F(51, 11) pertenece a la región factible.

$$\left. \begin{array}{l} 11 \geq 7 \\ 3 \cdot 51 + 6 \cdot 11 \leq 220 \\ 2 \cdot 51 + 1.5 \cdot 11 \leq 120 \\ 2 \cdot 51 - 5 \cdot 11 \geq 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 11 \geq 7 \\ 153 + 66 \leq 220 \\ 102 + 16.5 \leq 120 \\ 102 - 55 \geq 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 11 \geq 7 \\ 219 \leq 220 \\ 118.5 \leq 120 \\ 47 \geq 5 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

2. Un centro deportivo permanece abierto las 24 horas del día. Para modelizar la afluencia de usuarios de un día determinado, se define la función $f(t)$ que indica el número aproximado de personas dentro del centro a la hora t , con $0 \leq t \leq 24$

$$f(t) = \begin{cases} 10 + 2t^2 + a & \text{si } 0 \leq t < 6 \\ 130 - (t-12)^2 & \text{si } 6 \leq t < 18 \\ 80 - \frac{1}{2}t^2 + 9t + b & \text{si } 18 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

Responder a las siguientes cuestiones (2.1, 2.2):

2.1 [1.5 puntos] Determinar el valor de a y b para que la función anterior sea continua.

2.2 [1.5 puntos] Si $a = b = 0$, ¿en qué momento del día se encuentran 105 personas dentro del centro deportivo según esta función? ¿A qué hora del día se produce la máxima afluencia y cuántos usuarios estaban en su interior?

2.1 Para que la función sea continua debe serlo en $t = 6$ y en $t = 18$

$$\left. \begin{aligned} f(6) &= 130 - (6-12)^2 = 94 \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^-} 10 + 2x^2 + a = 10 + 2 \cdot 6^2 + a = 82 + a \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^+} 130 - (x-12)^2 = 94 \\ f(6) &= \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 94 = 82 + a \Rightarrow \boxed{a = 12}$$

$$\left. \begin{aligned} f(18) &= 80 - \frac{1}{2} \cdot 18^2 + 9 \cdot 18 + b = 80 + b \\ \lim_{x \rightarrow 18^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 18^-} 130 - (x-12)^2 = 130 - (18-12)^2 = 94 \\ \lim_{x \rightarrow 18^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 18^+} 80 - \frac{1}{2}x^2 + 9x + b = 80 + b \\ f(18) &= \lim_{x \rightarrow 18^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 18^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 80 + b = 94 \Rightarrow \boxed{b = 14}$$

Los valores buscados son $a = 12$ y $b = 14$.

2.2 Si $a = b = 0$ la función queda $f(t) = \begin{cases} 10 + 2t^2 & \text{si } 0 \leq t < 6 \\ 130 - (t-12)^2 & \text{si } 6 \leq t < 18 \\ 80 - \frac{1}{2}t^2 + 9t & \text{si } 18 \leq t \leq 24 \end{cases}$.

Averiguamos los valores de t para los que $f(t) = 105$.

- En el intervalo $[0, 6)$ la función tiene la expresión $f(t) = 10 + 2t^2$. Comprobamos si toma el valor 105.

$$10 + 2t^2 = 105 \rightarrow 2t^2 = 95 \rightarrow t^2 = \frac{95}{2} \rightarrow t = \sqrt{47.5} \approx 6.9 \notin [0, 6)$$

La función no alcanza el valor de 105 en el intervalo $[0, 6)$.

- En el intervalo $[6,18)$ la función tiene la expresión $f(t) = 130 - (t-12)^2$.
Comprobamos si toma el valor 105.

$$130 - (t-12)^2 = 105 \rightarrow 25 = (t-12)^2 \rightarrow t-12 = \pm 5 \rightarrow \begin{cases} t = 12 + 5 = 17 \\ t = 12 - 5 = 7 \end{cases}$$

La función alcanza el valor de 105 en dos momentos: $t = 7$ y $t = 17$.

- En el intervalo $[18,24]$ la función tiene la expresión $f(t) = 80 - \frac{1}{2}t^2 + 9t$.

Comprobamos si toma el valor 105.

$$80 - \frac{1}{2}t^2 + 9t = 105 \rightarrow -\frac{1}{2}t^2 + 9t - 15 = 0 \rightarrow t = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(-0.5)(-15)}}{2(-0.5)} =$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{51}}{-1} = 9 \pm \sqrt{51} = \begin{cases} 9 + \sqrt{51} \approx 16.1 \notin [18,24] \\ 9 - \sqrt{51} \approx 1.85 \notin [18,24] \end{cases}$$

La función no alcanza el valor de 105 en el intervalo $[18,24]$.

El número de asistentes es de 105 personas para $t = 7$ y $t = 17$.

Derivamos la función y estudiamos el signo de la derivada.

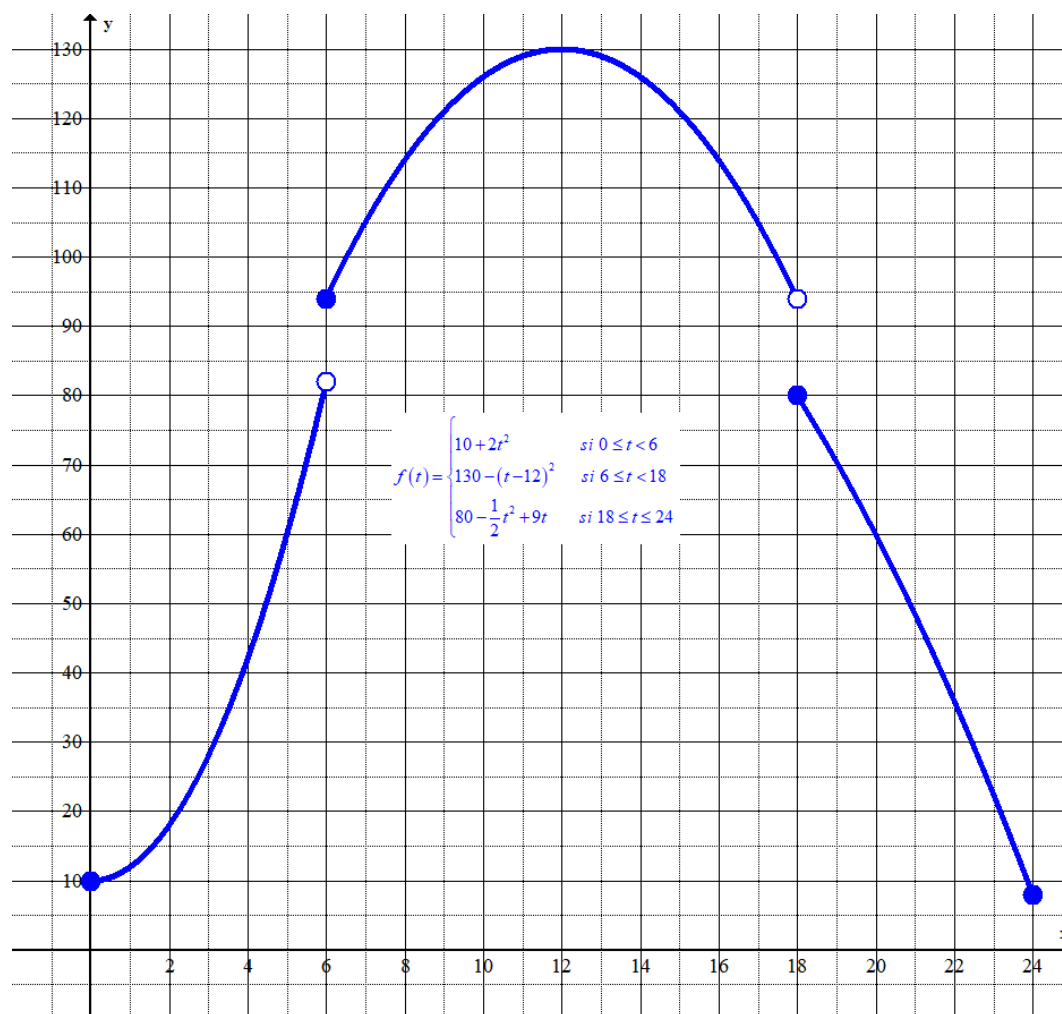
$$f(t) = \begin{cases} 10 + 2t^2 & \text{si } 0 \leq t < 6 \\ 130 - (t-12)^2 & \text{si } 6 \leq t < 18 \\ 80 - \frac{1}{2}t^2 + 9t & \text{si } 18 \leq t \leq 24 \end{cases} \Rightarrow f'(t) = \begin{cases} 4t & \text{si } 0 \leq t < 6 \\ -2(t-12) & \text{si } 6 < t < 18 \\ -t + 9 & \text{si } 18 < t \leq 24 \end{cases}$$

- En el intervalo $[0,6)$ la derivada es $f'(t) = 4t$, que es positiva en todo el intervalo. La función crece en $[0,6)$.
- En el intervalo $(6,18)$ la derivada es $f'(t) = -2(t-12)$, la derivada se anula en $t = 12$, siendo positiva en el intervalo $(6,12)$ y negativa en $(12,18)$. La función crece en $(6,12)$ y decrece en $(12,18)$.
- En el intervalo $[18,24]$ la derivada es $f'(t) = 9 - t$, que se anula para $t = 9$ que no pertenece al intervalo de definición. La derivada es negativa en todo el intervalo. La función decrece en $[18,24]$.

La función no es continua. Valoramos la función en los extremos de los intervalos de definición y en $t = 12$.

$$\left. \begin{aligned} t = 0 &\rightarrow f(0) = 10 \\ t = 6 &\rightarrow f(6) = 130 - (6-12)^2 = 94 \\ t = 12 &\rightarrow f(12) = 130 - (12-12)^2 = 130 \text{ Máximo} \\ t = 18 &\rightarrow f(18) = 80 - \frac{1}{2}18^2 + 9 \cdot 18 = 80 \end{aligned} \right\}$$

La máxima afluencia es de 130 personas a las 12.



3.1. De los 1000 estudiantes matriculados en el instituto, 450 son hombres, de los cuales un 12% son repetidores, mientras que, entre las mujeres, hay un 10 % de repetidoras.

a) [1 punto] Escribir la información anterior en términos de sucesos y sus probabilidades asociadas. Hallar el porcentaje de estudiantes repetidores en el instituto.

b) [1 punto] Si se selecciona una persona repetidora, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

3.1.a) Llamamos H al suceso “el estudiante matriculado es hombre” y R a “el estudiante es repetidor”. El suceso $\overline{H}$ es “el estudiante matriculado es mujer”

Por los datos proporcionados en el ejercicio podemos decir que $P(H) = \frac{450}{1000} = 0.45$,

$$P(R/H) = 0.12, \quad P(R/\overline{H}) = 0.10.$$

El 12% de los 450 hombres son repetidores, es decir, hay $0.12 \cdot 450 = 54$ hombres que son repetidores.

El 10% de las $1000 - 450 = 550$ mujeres son repetidoras, es decir, hay $0.10 \cdot 550 = 55$ mujeres que son repetidoras.

En total hay $54 + 55 = 109$ estudiantes que son repetidores. Como $\frac{109}{1000} = 0.109$ el porcentaje de estudiantes repetidores en el instituto es de 10.9%.

3.1.b) Debemos calcular $P(H/R)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(H/R) = \frac{P(H \cap R)}{P(R)} = \frac{P(H)P(R/H)}{P(R)} = \frac{0.45 \cdot 0.12}{0.109} = \boxed{\frac{54}{109} \approx 0.4954}$$

La probabilidad de que al elegir una persona repetidora esta sea hombre vale $\frac{54}{109} \approx 0.4954$.

OTRA FORMA DE CALCULARLO.

En el instituto hay 109 repetidores, de los cuales 54 son hombres. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al elegir una persona repetidora esta sea hombre vale $\frac{54}{109} \approx 0.4954$.

3.2. El equipo de profesores de Matemáticas Aplicadas a la Ciencias Sociales II ha calculado que el tiempo invertido por los estudiantes en hacer un examen sigue una distribución normal de media 100 minutos y desviación típica igual a 10 minutos.

a) [1 punto] ¿Qué proporción de estudiantes realiza el examen en más de dos horas?

b) [1 punto] ¿Cuánto tiempo tarda un estudiante en hacer el examen si el 88.1% de sus compañeros tardan menos que él?

3.2.a) Llamamos X a la variable aleatoria que nos proporciona el tiempo (en minutos) invertido por los estudiantes en hacer un examen de Matemáticas Aplicadas a la Ciencias Sociales II.
 $X = N(100, 10)$.

Nos piden calcular $P(X > 120)$.

$$P(X > 120) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{120-100}{10}\right) = P(Z > 2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

La proporción de estudiantes que realiza el examen en más de dos horas es de 2.28%.

0,0	0,0000	0,5000
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186
1,0	0,8413	0,8438
1,1	0,8643	0,8665
1,2	0,8849	0,8869
1,3	0,9032	0,9049
1,4	0,9192	0,9208
1,5	0,9332	0,9347
1,6	0,9452	0,9465
1,7	0,9554	0,9565
1,8	0,9641	0,9651
1,9	0,9713	0,9722
2,0	0,9772	0,9779

3.2.b) Nos piden calcular a tal que $P(X < a) = 0.881$.

$$P(X < a) = 0.881 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{a-100}{10}\right) = 0.881 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a-100}{10} = 1.18 \Rightarrow a-100 = 11.8 \Rightarrow a = 111.8$$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810

El estudiante tarda en hacer el examen 1 hora 41 minutos y $0.8 \cdot 60 = 48$ segundos.

3.3. La dirección del instituto desea conocer cuál es el rendimiento medio de sus alumnos. Para ello, selecciona una muestra aleatoria de 100 expedientes de estudiantes, obteniendo una calificación media muestral de 6.5 puntos. Asumiendo que la calificación sigue una distribución normal de media μ y desviación igual a 1 punto, se pide:

a) [1 punto] ¿Entre qué valores se encuentra la calificación media μ de los estudiantes del instituto, con un nivel de confianza del 98%?

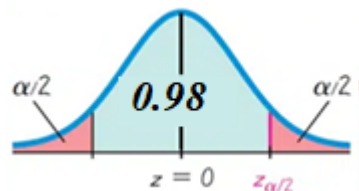
b) [1 punto] Para un nivel de confianza del 99%, ¿qué tamaño de muestra sería necesario para que el error cometido al estimar la media poblacional μ no sea superior a los 0.5 puntos?

3.3.a) Llamamos X a la variable que nos da el rendimiento en puntos de sus alumnos. Esta variable es una normal. $X = N(\mu, 1)$.

El tamaño de la muestra es $n = 100$. La media muestral es $\bar{x} = 6.5$ puntos.

Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 98%.

$$1 - \alpha = 0.98 \Rightarrow \alpha = 0.02 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325$$



	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901

Obtenemos el valor del error.

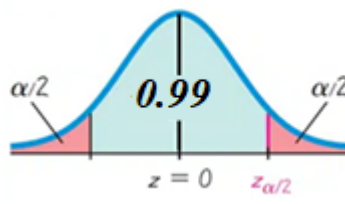
$$Error = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}} \approx 0.2325$$

El intervalo de confianza para el rendimiento de los alumnos es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (6.5 - 0.2325, 6.5 + 0.2325) = (6.2675, 6.7325)$$

3.3.b) Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 99%.

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9947	0,9949	0,9951

El error máximo que se quiere cometer es 0.5 puntos. Utilizamos la fórmula del error y despejamos n .

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 2.575 \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = \frac{2.575}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \cdot 0.5 = 2.575 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.575}{0.5} = 5.15 \Rightarrow \boxed{n = 5.15^2 = 26.5225}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 27 estudiantes.