



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques aplicades a las ciencias sociales

Serie 2

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas e indíquela en la portada.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. La redacción de la respuesta debe hacerse de forma coherente, con corrección y claridad, empleando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar la página en blanco del final del cuaderno para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

[2,5 puntos en total]

Una empresa comercializa un accesorio tecnológico. Según varios estudios de mercado, la relación entre el precio de venta p (en euros) y la cantidad demandada semanal $d(p)$ (en unidades) viene dada por la función $d(p) = 500 - 10p - p^2$, $0 < p < 15$.

Se define también el ingreso semanal de la empresa como $I(p) = p \cdot d(p)$.

- 1.1. Determine el precio p que maximiza el ingreso semanal $I(p)$. Para este precio, calcule la cantidad demandada semanal correspondiente y el valor del ingreso máximo.

[1,5 puntos]

- 1.2. El concepto de la elasticidad de la demanda con respecto al precio mide, como indica su nombre, la sensibilidad de la cantidad demandada ante los cambios relativos en el precio, y se utiliza para analizar cómo responden los consumidores a las variaciones de precios. Para funciones derivables, la elasticidad de la demanda con respecto al precio viene dada por la expresión $E(p) = \frac{p}{d(p)} d'(p)$, en la que $d'(p)$ denota la derivada de la función $d(p)$.

Calcule la expresión de la elasticidad de la demanda respecto al precio $E(p)$ y determine su valor para un precio de 5 € y para un precio de 10 €.

[1 punto]

Ejercicio 2

[2,5 puntos en total]

En el Instituto La Closa se ha organizado un viaje a Roma para el alumnado de segundo de bachillerato, pero no todos los alumnos han querido ir. Algunos alumnos han organizado, por su cuenta, un viaje alternativo a Londres, mientras que otros han decidido no viajar a ninguna parte. Se sabe que en segundo de bachillerato hay un total de 84 alumnos y que el número de alumnos que no han ido a ninguna parte es el triple del número de alumnos que han ido a Londres.

2.1. Plantee y estudie el sistema de ecuaciones correspondiente. ¿Se puede determinar el número de alumnos que han ido a cada viaje y el número de alumnos que no han ido a ninguna parte? Justifique la respuesta.

[0,75 puntos]

2.2. Resuelva el sistema anterior en función del número de alumnos que han ido a Londres. Deduzca que el número de alumnos que no han ido a ninguna parte es un múltiplo de 3 y que el número de alumnos que han ido a Roma es un múltiplo de 4.

[0,75 puntos]

2.3. Se dispone ahora de una nueva información: si 4 alumnos de los que no han ido a ninguna parte se hubieran apuntado al viaje a Roma, entonces el número de alumnos que habría ido a Roma habría sido el doble del número de alumnos que han ido a Londres y de los que no habrían ido a ninguna parte conjuntamente. ¿Se puede determinar ahora cuántos alumnos han ido a cada viaje y cuántos no han ido a ninguna parte? Justifique la respuesta y, si es posible, encuentre estas cantidades.

[1 punto]

Ejercicio 3

[2,5 puntos en total]

En una asignatura de un máster de dos años, el 70 % de los estudiantes son de primer curso y el resto son de segundo curso. Según datos de cursos anteriores, la probabilidad de aprobar la asignatura es del 60 % para los estudiantes de primer curso y del 85 % para los de segundo curso.

FÓRMULAS PARA RESOLVER EL EJERCICIO:

- $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ y $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$

- Intervalos de confianza con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$

- para la proporción (muestras grandes):

$$\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

- para la media (muestras normales con varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- para la media (muestras grandes con la varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

3.1. Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe la asignatura? Si se sabe que un estudiante ha aprobado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que sea de primer curso?

[1.25 puntos]

3.2. El profesor quiere estimar la nueva proporción de estudiantes que aprueban la asignatura después de introducir un nuevo método de enseñanza. Para ello, selecciona una muestra aleatoria de $n = 80$ estudiantes y observa que 55 de ellos han aprobado.

Encuentre un intervalo de confianza del 95 % para la proporción p de aprobados con el nuevo método. ¿El intervalo obtenido permite afirmar que el nuevo método ha mejorado la tasa de aprobados respecto de la situación anterior? Razone la respuesta.

[1.25 puntos]

Ejercicio 4

[2,5 puntos en total]

Tres amigos —Carme, Saïd y Martí— crearon hace unos años una pequeña asociación dedicada a la divulgación de las matemáticas. En esta asociación, organizan talleres para familias, visitan escuelas e institutos de todo el país, e imparten seminarios en línea.

El curso pasado llevaron a cabo un total de 240 actividades, repartidas en 96 talleres familiares, 84 charlas en escuelas o institutos y 60 seminarios en línea. Los dos primeros tipos de actividades son presenciales, mientras que los seminarios en línea, evidentemente, no lo son.

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

Indique en la portada del examen la opción elegida.

OPCIÓN A

4.1. Este curso, durante una semana concreta, el formulario de inscripción del web de la asociación recibe 15 inscripciones independientes, cada una de las cuales corresponde a uno de los tres tipos de actividades. Suponiendo que la distribución de las inscripciones se mantiene como el curso pasado, calcule la probabilidad de que exactamente 10 de las 15 inscripciones sean para actividades presenciales. Determine el número esperado de inscripciones a actividades presenciales de esa semana.

[1.5 puntos]

4.2. El curso pasado, para llevar a cabo las 240 actividades, los tres amigos decidieron organizarse de forma que cada actividad fuera realizada por una sola persona; es decir, no había actividades desarrolladas por más de uno de ellos. Si se sabe que Carme participó en 30 actividades más que Martí y que Saïd participó en 18 actividades más que Martí, ¿de cuántas actividades se encargó cada uno de los tres amigos?

[1 punto]

OPCIÓN B

4.1. Para estudiar el efecto de una campaña de promoción de los talleres familiares de este curso,

los tres amigos modelizan el número de familias inscritas mediante la función $f(t) = \frac{100t}{t^2 + 4}$,

en la que t representa el número de días desde el inicio de la campaña y $f(t)$ corresponde al número de familias inscritas ese día. ¿Hay algún día en que el número de familias inscritas sea exactamente 20? En caso afirmativo, indique cuál. ¿En qué día se logra el número máximo de familias inscritas? ¿Cuál es este número máximo?

[1.5 puntos]

4.2. Los tres amigos también quieren analizar cómo se reparten entre ellos el trabajo de preparación de las actividades. Para ello, revisan cómo se han organizado durante una semana concreta. En total, en este período han dedicado 24 horas a la preparación de talleres familiares, 21 horas a la preparación de charlas en centros educativos y 15 horas a la preparación de seminarios en línea.

La distribución del trabajo de preparación de cada uno de los tres tipos de actividades es la siguiente:

- Carme se encarga del 50 % de la preparación de los talleres familiares, del 30 % de la preparación de las charlas en centros educativos y del 20 % de la preparación de los seminarios en línea;
- Saïd se encarga del 30 % de la preparación de los talleres familiares, del 50 % de la preparación de las charlas en centros educativos y del 20 % de la preparación de los seminarios en línea;

- Martí se encarga del 20 % de la preparación de los talleres familiares, del 20 % de la preparación de las charlas en centros educativos y del 60 % de la preparación de los seminarios en línea.

Se agrupa esta información en las siguientes matrices:

$$R = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.30 & 0.20 \\ 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.20 & 0.60 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}$$

que corresponden a la matriz de reparto porcentual y al vector de horas totales dedicadas a la preparación de cada tipo de actividad, respectivamente.

Calcule el vector $R \cdot h$ e interprete su significado.

¿Cuál de los tres amigos ha dedicado más horas a la preparación de actividades?

[1 punto]

SOLUCIONES

Ejercicio 1

[2.5 puntos en total]

Una empresa comercializa un accesorio tecnológico. Según varios estudios de mercado, la relación entre el precio de venta p (en euros) y la cantidad demandada semanal $d(p)$ (en unidades) viene dada por la función $d(p) = 500 - 10p - p^2$, $0 < p < 15$.

Se define también el ingreso semanal de la empresa como $I(p) = p \cdot d(p)$.

1.1. Determine el precio p que maximiza el ingreso semanal $I(p)$. Para este precio, calcule la cantidad demandada semanal correspondiente y el valor del ingreso máximo.

[1.5 puntos]

1.2. El concepto de la elasticidad de la demanda con respecto al precio mide, como indica su nombre, la sensibilidad de la cantidad demandada ante los cambios relativos en el precio, y se utiliza para analizar cómo responden los consumidores a las variaciones de precios. Para funciones derivables, la elasticidad de la demanda con respecto al precio viene dada por la expresión $E(p) = \frac{p}{d(p)} d'(p)$, en la que $d'(p)$ denota la derivada de la función $d(p)$. Calcule

la expresión de la elasticidad de la demanda respecto al precio $E(p)$ y determine su valor para un precio de 5 € y para un precio de 10 €.

[1 punto]

1.1. Hallamos la expresión de la función ingreso semanal.

$$I(p) = p \cdot d(p) = p(500 - 10p - p^2) = 500p - 10p^2 - p^3, \quad 0 < p < 15$$

Derivamos la función y averiguamos cuando se anula.

$$I(p) = 500p - 10p^2 - p^3 \Rightarrow I'(p) = 500 - 20p - 3p^2$$

$$I'(p) = 0 \Rightarrow 500 - 20p - 3p^2 = 0 \Rightarrow p = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(-3)500}}{2 \cdot (-3)} =$$

$$= \frac{20 \pm 80}{-6} = \begin{cases} \frac{20+80}{-6} = \frac{-50}{3} \text{ No es válido} \\ \frac{20-80}{-6} = \boxed{10 = p} \end{cases}$$

El valor negativo no tiene sentido y solo utilizamos el precio positivo $p = 10$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$I'(p) = 500 - 20p - 3p^2 \Rightarrow I''(p) = -20 - 6p \Rightarrow I''(10) = -20 - 6 \cdot 10 = -80 < 0$$

Para $p = 10$ la primera derivada se anula y la segunda toma valor negativo.

La función tiene un máximo relativo para $p = 10$.

Los ingresos son máximos para un precio de 10 €.

Para este precio la cantidad demandada será de $d(10) = 500 - 10 \cdot 10 - 10^2 = 300$ unidades.

Con un precio de 10 € por unidad de producto se obtienen unos ingresos semanales máximos de un importe de $I(10) = 5000 - 10 \cdot 10^2 - 10^3 = 3000$ euros

1.2. Hallamos la expresión de la función elasticidad.

$$d(p) = 500 - 10p - p^2 \Rightarrow d'(p) = -10 - 2p = -2(5 + p)$$

$$E(p) = \frac{p}{d(p)} d'(p) = \frac{p}{500 - 10p - p^2} \cdot (-2(5 + p)) = \frac{-2p(5 + p)}{500 - 10p - p^2}, \quad 0 < p < 15$$

Hallamos el valor de la elasticidad para un precio de 5 €.

$$E(5) = \frac{-2 \cdot 5(5 + 5)}{500 - 10 \cdot 5 - 5^2} = \frac{-100}{425} = \frac{-4}{17}$$

Hallamos el valor de la elasticidad para un precio de 10 €.

$$E(10) = \frac{-2 \cdot 10(5 + 10)}{500 - 10 \cdot 10 - 10^2} = \frac{-300}{300} = -1$$

La elasticidad de la demanda es de -0.2353 para un precio de 5 € y de -1 para un precio de 10 €.

Ejercicio 2

En el Instituto La Closa se ha organizado un viaje a Roma para el alumnado de segundo de bachillerato, pero no todos los alumnos han querido ir. Algunos alumnos han organizado, por su cuenta, un viaje alternativo a Londres, mientras que otros han decidido no viajar a ninguna parte. Se sabe que en segundo de bachillerato hay un total de 84 alumnos y que el número de alumnos que no han ido a ninguna parte es el triple del número de alumnos que han ido a Londres.

2.1. Plantee y estudie el sistema de ecuaciones correspondiente. ¿Se puede determinar el número de alumnos que han ido a cada viaje y el número de alumnos que no han ido a ninguna parte? Justifique la respuesta.

[0,75 puntos]

2.2. Resuelva el sistema anterior en función del número de alumnos que han ido a Londres. Deduzca que el número de alumnos que no han ido a ninguna parte es un múltiplo de 3 y que el número de alumnos que han ido a Roma es un múltiplo de 4.

[0,75 puntos]

2.3. Se dispone ahora de una nueva información: si 4 alumnos de los que no han ido a ninguna parte se hubieran apuntado al viaje a Roma, entonces el número de alumnos que habría ido a Roma habría sido el doble del número de alumnos que han ido a Londres y de los que no habrían ido a ninguna parte conjuntamente. ¿Se puede determinar ahora cuántos alumnos han ido a cada viaje y cuántos no han ido a ninguna parte? Justifique la respuesta y, si es posible, encuentre estas cantidades.

[1 punto]

2.1. Llamamos “x” al número de alumnos de segundo de bachillerato que desean ir a Roma, “y” al número de alumnos que desean ir a Londres y “z” al número de alumnos que no desean viajar. Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada.

En segundo de bachillerato hay un total de 84 alumnos $\rightarrow x + y + z = 84$.

El número de alumnos que no han ido a ninguna parte es el triple del número de alumnos que han ido a Londres $\rightarrow z = 3y$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 84 \\ z = 3y \end{array} \right\}$$

Disponemos de 2 ecuaciones y 3 incógnitas, por lo que el sistema va a ser compatible indeterminado (nos falta información para obtener con precisión los tres valores).

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 84 \\ z = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow x + y + 3y = 84 \Rightarrow x = 84 - 4y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 3(84 - 4y) = 12(21 - y) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 84 - 4\alpha \\ y = \alpha \\ z = 12(21 - \alpha) \end{array} ; \alpha \in \mathbb{N}; \alpha \leq 21}$$

No se puede determinar el número de alumnos que han ido a cada viaje ni el número de alumnos que no han ido a ninguna parte.

2.2. Hemos resuelto el sistema en el apartado anterior. Las posibles soluciones del problema

$$\text{tienen la expresión } \begin{cases} x = 84 - 4\alpha = 4(21 - \alpha) \\ y = \alpha \\ z = 12(21 - \alpha) = 3(84 - 4\alpha) \end{cases}, \text{ siendo } \alpha \text{ un número natural menor o igual}$$

que 21. El número de alumnos que no han ido a ninguna parte es $3(84 - 4\alpha)$ que es múltiplo de 3 y el número de alumnos que han ido a Roma es $4(21 - \alpha)$ que un múltiplo de 4.

2.3. Obtenemos una tercera ecuación con la información proporcionada.

Si 4 alumnos de los que no han ido a ninguna parte se hubieran apuntado al viaje a Roma (los alumnos que no viajan sería $z - 4$), entonces el número de alumnos que habría ido a Roma ($x + 4$) habría sido el doble del número de alumnos que han ido a Londres y de los que no habrían ido a ninguna parte conjuntamente $\rightarrow x + 4 = 2(y + (z - 4))$. Añadimos esta ecuación al sistema anterior e intentamos resolverlo.

$$x + 4 = 2(y + (z - 4)) \Rightarrow x + 4 = 2y + 2z - 8 \Rightarrow x - 2y - 2z + 12 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 84 \\ z = 3y \\ x - 2y - 2z + 12 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 3y = 84 \\ x - 2y - 6y + 12 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 4y = 84 \\ x - 8y + 12 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 84 - 4y \\ x - 8y + 12 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 84 - 4y - 8y + 12 = 0 \Rightarrow -12y = -96 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{96}{12} = 8} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 84 - 4 \cdot 8 = 52} \\ \boxed{z = 3 \cdot 8 = 24} \end{cases}$$

Con la nueva información proporcionada se puede determinar el número de alumnos que viajan a Roma o a Londres y el número de alumnos que no viajan.

Son 52 los alumnos que viajan a Roma, 8 los que viajan a Londres y 24 los que no viajan a ninguna parte.

Ejercicio 3

En una asignatura de un máster de dos años, el 70 % de los estudiantes son de primer curso y el resto son de segundo curso. Según datos de cursos anteriores, la probabilidad de aprobar la asignatura es del 60 % para los estudiantes de primer curso y del 85 % para los de segundo curso.

FÓRMULAS PARA RESOLVER EL EJERCICIO:

• $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ y $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$

• Intervalos de confianza con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$

- para la proporción (muestras grandes):

$$\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

- para la media (muestras normales con varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- para la media (muestras grandes con la varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

3.1. Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe la asignatura? Si se sabe que un estudiante ha aprobado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que sea de primer curso?

[1.25 puntos]

3.2. El profesor quiere estimar la nueva proporción de estudiantes que aprueban la asignatura después de introducir un nuevo método de enseñanza. Para ello, selecciona una muestra aleatoria de $n = 80$ estudiantes y observa que 55 de ellos han aprobado.

Encuentre un intervalo de confianza del 95 % para la proporción p de aprobados con el nuevo método. ¿El intervalo obtenido permite afirmar que el nuevo método ha mejorado la tasa de aprobados respecto de la situación anterior? Razone la respuesta.

[1.25 puntos]

3.1. Llamamos $C1$ a “ser un alumno de master de primer año”, $C2$ a “ser alumno de master de segundo año” y A a “aprobar la asignatura”.

Con los datos proporcionados establecemos las probabilidades siguientes:

$$P(C1) = 0.70, P(C2) = 1 - 0.70 = 0.30, P(A/C1) = 0.60, P(A/C2) = 0.85$$

Nos piden determinar $P(A)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(C1)P(A/C1) + P(C2)P(A/C2) = 0.7 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.85 = \boxed{0.675}$$

La probabilidad de que el alumno elegido al azar apruebe la asignatura es de 0.675.

También nos piden calcular $P(C1/A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C1/A) = \frac{P(C1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(C1)P(A/C1)}{P(A)} = \frac{0.7 \cdot 0.6}{0.675} = \boxed{\frac{28}{45} \approx 0.6222}$$

La probabilidad de que sea de primer curso el alumno elegido que sabemos ha aprobado la asignatura vale 0.6222.

3.2. El tamaño muestral es $n = 80$. La proporción muestral de aprobados vale $p = \frac{55}{80} = 0.6875$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \sqrt{\frac{0.6875(1-0.6875)}{80}} \approx 0.1016$$

El intervalo de confianza es:

$$\left[p - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = [0.6875 - 0.1016, 0.6875 + 0.1016] = [0.5859, 0.7891]$$

¿El intervalo obtenido permite afirmar que el nuevo método ha mejorado la tasa de aprobados respecto de la situación anterior?

Con el intervalo de confianza obtenido podemos decir que la proporción de aprobados se encuentra entre el 58.59 % y el 78.91 % con una confianza del 95%.

La proporción de aprobados antes era del 67.5 % que pertenece al intervalo obtenido. Por lo que, con un nivel de confianza del 95%, no podemos afirmar que el nuevo método haya mejorado el porcentaje de aprobados.

Ejercicio 4

[2,5 puntos en total]

Tres amigos —Carme, Saïd y Martí— crearon hace unos años una pequeña asociación dedicada a la divulgación de las matemáticas. En esta asociación, organizan talleres para familias, visitan escuelas e institutos de todo el país, e imparten seminarios en línea.

El curso pasado llevaron a cabo un total de 240 actividades, repartidas en 96 talleres familiares, 84 charlas en escuelas o institutos y 60 seminarios en línea. Los dos primeros tipos de actividades son presenciales, mientras que los seminarios en línea, evidentemente, no lo son.

OPCIÓN A

4.1. Este curso, durante una semana concreta, el formulario de inscripción del web de la asociación recibe 15 inscripciones independientes, cada una de las cuales corresponde a uno de los tres tipos de actividades. Suponiendo que la distribución de las inscripciones se mantiene como el curso pasado, calcule la probabilidad de que exactamente 10 de las 15 inscripciones sean para actividades presenciales. Determine el número esperado de inscripciones a actividades presenciales de esa semana.

[1.5 puntos]

4.2. El curso pasado, para llevar a cabo las 240 actividades, los tres amigos decidieron organizarse de forma que cada actividad fuera realizada por una sola persona; es decir, no había actividades desarrolladas por más de uno de ellos. Si se sabe que Carme participó en 30 actividades más que Martí y que Saïd participó en 18 actividades más que Martí, ¿de cuántas actividades se encargó cada uno de los tres amigos?

[1 punto]

4.1. El curso pasado de las 240 actividades $96 + 84 = 180$ fueron presenciales y 60 son no presenciales. La probabilidad de que una actividad sea presencial vale $\frac{180}{240} = 0.75$.

Consideramos X la variable aleatoria que cuenta el número de actividades presenciales de un grupo de 15 inscripciones. Esta variable es una binomial, siendo $n =$ número de repeticiones $= 15$ y $p =$ probabilidad de que una actividad sea presencial $= 0.75$. $X = B(15, 0.75)$.

Nos piden calcular el valor de $P(X = 10)$.

$$P(X = 10) = \binom{15}{10} 0.75^{10} \cdot 0.25^5 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} 0.75^{10} \cdot 0.25^5 = \boxed{0.1651}$$

La probabilidad de que exactamente 10 de las 15 inscripciones sean para actividades presenciales tiene un valor aproximado de 0.1651.

El número esperado de inscripciones a actividades presenciales es $n \cdot p = 15 \cdot 0.75 = 11.25$.

Se espera que 11 de las 15 inscripciones sean para actividades presenciales.

4.2. Llamamos x, y, z al número de actividades de las que se encargaron Carme, Saïd y Martí, respectivamente.

Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada.

“Llevan a cabo 240 actividades” $\rightarrow x + y + z = 240$.

“Carme participó en 30 actividades más que Martí” $\rightarrow x = z + 30$.

“Saïd participó en 18 actividades más que Martí” $\rightarrow y = z + 18$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 240 \\ x = z + 30 \\ y = z + 18 \end{array} \right\} \Rightarrow z + 30 + z + 18 + z = 240 \Rightarrow 3z = 192 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{192}{3} = 64} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 64 + 30 = 94} \\ \boxed{y = 64 + 18 = 82} \end{cases}$$

Carme se encargó de 94 actividades, Saïd de 82 y Martí de 64.

Ejercicio 4

[2,5 puntos en total]

Tres amigos —Carme, Saïd y Martí— crearon hace unos años una pequeña asociación dedicada a la divulgación de las matemáticas. En esta asociación, organizan talleres para familias, visitan escuelas e institutos de todo el país, e imparten seminarios en línea.

El curso pasado llevaron a cabo un total de 240 actividades, repartidas en 96 talleres familiares, 84 charlas en escuelas o institutos y 60 seminarios en línea. Los dos primeros tipos de actividades son presenciales, mientras que los seminarios en línea, evidentemente, no lo son.

OPCIÓN B

4.1. Para estudiar el efecto de una campaña de promoción de los talleres familiares de este curso, los tres amigos modelizan el número de familias inscritas mediante la función $f(t) = \frac{100t}{t^2 + 4}$, en

la que t representa el número de días desde el inicio de la campaña y $f(t)$ corresponde al número de familias inscritas ese día. ¿Hay algún día en que el número de familias inscritas sea exactamente 20? En caso afirmativo, indique cuál. ¿En qué día se logra el número máximo de familias inscritas? ¿Cuál es este número máximo?

[1.5 puntos]

4.2. Los tres amigos también quieren analizar cómo se reparten entre ellos el trabajo de preparación de las actividades. Para ello, revisan cómo se han organizado durante una semana concreta. En total, en este período han dedicado 24 horas a la preparación de talleres familiares, 21 horas a la preparación de charlas en centros educativos y 15 horas a la preparación de seminarios en línea.

La distribución del trabajo de preparación de cada uno de los tres tipos de actividades es la siguiente:

- Carme se encarga del 50 % de la preparación de los talleres familiares, del 30 % de la preparación de las charlas en centros educativos y del 20 % de la preparación de los seminarios en línea;

- Saïd se encarga del 30 % de la preparación de los talleres familiares, del 50 % de la preparación de las charlas en centros educativos y del 20 % de la preparación de los seminarios en línea;

- Martí se encarga del 20 % de la preparación de los talleres familiares, del 20 % de la preparación de las charlas en centros educativos y del 60 % de la preparación de los seminarios en línea.

Se agrupa esta información en las siguientes matrices:

$$R = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.30 & 0.20 \\ 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.20 & 0.60 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}$$

que corresponden a la matriz de reparto porcentual y al vector de horas totales dedicadas a la preparación de cada tipo de actividad, respectivamente.

Calcule el vector $R \cdot h$ e interprete su significado.

¿Cuál de los tres amigos ha dedicado más horas a la preparación de actividades?

[1 punto]

4.1. Intentamos hallar el valor de t para el que $f(t) = 20$.

$$f(t) = 20 \Rightarrow \frac{100t}{t^2 + 4} = 20 \Rightarrow 100t = 20t^2 + 80 \Rightarrow 20t^2 - 100t + 80 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 = t \\ \frac{5-3}{2} = 1 = t \end{cases}$$

El primer y el cuarto día se producen 20 inscripciones.

Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada (puntos críticos).

$$f(t) = \frac{100t}{t^2 + 4} \Rightarrow f'(t) = \frac{100 \cdot (t^2 + 4) - 100t \cdot 2t}{(t^2 + 4)^2} = \frac{100t^2 + 400 - 200t^2}{(t^2 + 4)^2} = \frac{400 - 100t^2}{(t^2 + 4)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow \frac{400 - 100t^2}{(t^2 + 4)^2} = 0 \Rightarrow 400 - 100t^2 = 0 \Rightarrow 100t^2 = 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{400}{100} = 4 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Solo nos sirve el valor positivo $t = 2$ pues $t \geq 0$.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $[0, 2)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{400 - 100 \cdot 1^2}{(1^2 + 4)^2} = 12 > 0$.

La función crece en $[0, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = \frac{400 - 100 \cdot 3^2}{(3^2 + 4)^2} = \frac{-500}{169} < 0. \text{ La función decrece en } (2, +\infty).$$

En $t = 2$ la función cambia de crecer a decrecer. La función tiene un máximo relativo en $t = 2$.

Se logra el número máximo de familias inscritas el segundo día desde el inicio de la campaña,

siendo $f(2) = \frac{200}{2^2 + 4} = 25$ las familias que se han inscrito.

4.2. Hallamos la expresión de $R \cdot h$.

Familiares Charlas Seminarios

↓ ↓ ↓

$$R = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.30 & 0.20 \\ 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.20 & 0.60 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{Carme} \\ \rightarrow \text{Saïd} \\ \rightarrow \text{Martí} \end{matrix},$$

Horas

↓

$$h = \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{Talleres familiares} \\ \rightarrow \text{Charlas en centros} \\ \rightarrow \text{Seminarios en línea} \end{matrix}$$

$$R \cdot h = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.30 & 0.20 \\ 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.20 & 0.60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot 24 + 0.3 \cdot 21 + 0.2 \cdot 15 \\ 0.3 \cdot 24 + 0.5 \cdot 21 + 0.2 \cdot 15 \\ 0.2 \cdot 24 + 0.2 \cdot 21 + 0.6 \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.3 \\ 20.7 \\ 18 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{Carme} \\ \rightarrow \text{Saïd} \\ \rightarrow \text{Martí} \end{matrix}$$

$$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 1 \longrightarrow 3 \times 1$$

La matriz $R \cdot h$ nos da el número total de horas que dedica cada uno de los amigos a la preparación de todas las actividades de las que se encargan.

Carme ha dedicado 21.3 horas a la preparación de actividades y es la que más tiempo ha dedicado.