



SÈRIE 5

1.

- 1.1. Anomenarem x , y i z la quantitat d'aigua emmagatzemada als embassaments de Boadella, Sau i la Baells, respectivament.

Sabem que entre els tres hi ha emmagatzemats 112 hm^3 d'aigua, per tant

$$x + y + z = 112.$$

D'altra banda, l'embassament de la Baells conté la mateixa quantitat que els embassaments de Sau i Boadella, per tant,

$$z = x + y.$$

Aplicant el mètode de reducció de Gauss al sistema de dues equacions amb tres incògnites obtenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 112 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 112 \\ 0 & 0 & 2 & 112 \end{array} \right) \Rightarrow 2z = 112 \Rightarrow z = 56.$$

Observem que el sistema plantejat és compatible indeterminat per haver-hi més incògnites que equacions. Per tant no podem conèixer l'aigua embassada a cada embassaments. Però sí que sabem que la quantitat d'aigua embassada a la Baells és de 56 hm^3 .

- 1.2 Amb la informació addicional obtenim la següent equació addicional

$$0,1x + 0,2y + 0,3z = 27,2$$

multiplicant l'equació per 10 obtenim

$$x + 2y + 3z = 272.$$

Tenim un sistema de tres equacions i tres incògnites que podem resoldre

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 112 \\ x + 2y + 3z = 272 \\ z = 56 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 112 - 56 \\ x + 2y = 272 - 3 \cdot 56 \end{array} \right\} \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 56 \\ x + 2y = 104 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 56 \\ y = 48 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 56 - 48 = 8.$$

Així doncs, la quantitat d'aigua a l'embassament de Boadella és de 8 hm^3 , la quantitat d'aigua a l'embassament de Sau és de 48 hm^3 i la quantitat d'aigua a l'embassament de les Baells és de 56 hm^3 .



Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Si no és el cas es pot descomptar fins a un màxim de 0,25 punts.

- 1.1 Plantejament del sistema: 0,25 punts per cada equació. Resolució del sistema i raonament de que és un sistema compatible indeterminat: 0,5 punts.
Determinar la quantitat d'aigua de l'embassament de la Baells: 0,25 punts.
- 1.2 Plantejament de l'equació addicional: 0,25 punts. Resolució del sistema: 0,5 punts. Determinar la quantitat d'aigua a Sau i Boadella: 0,5 punts.



2.

2.1. Considerem els esdeveniments

J = l'alumne utilitza la T-jove per arribar al campus.

T = l'alumne accedeix al campus en tren.

B = l'alumne accedeix al campus en bus.

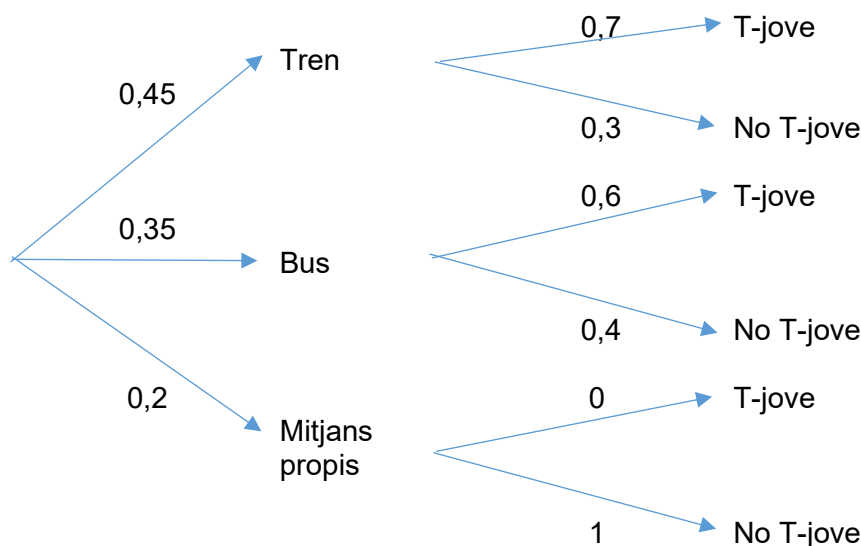
M = l'alumne accedeix al campus per mitjans propis.

A partir de les dades de l'enunciat sabem que $P(T) = 0,45$, $P(B) = 0,35$ i $P(M) = 0,2$. Sabem també que $P(J|T) = 0,7$, $P(J|B) = 0,6$ i $P(J|M) = 0$.

Aleshores, per la fórmula de les probabilitats totals,

$$P(J) = P(J \cap T) + P(J \cap B) + P(J \cap M) = P(T) \cdot P(J|T) + P(B) \cdot P(J|B) + P(M) \cdot P(J|M) = 0,45 \cdot 0,7 + 0,35 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0 = 0,525.$$

També el podem resoldre mitjançant un diagrama d'arbre:



Així doncs, la probabilitat que arribi al campus utilitzant la T-jove és de 0,525.

Ara ens demanen que calculem la probabilitat que arribi en tren si sabem que utilitza la T-jove. Per tant,

$$P(T|J) = \frac{P(T \cap J)}{P(J)} = \frac{P(T) \cdot P(J|T)}{P(J)} = \frac{0,45 \cdot 0,7}{0,525} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Si sabem que utilitza la T-jove per arribar al campus, la probabilitat que hi arribi en tren és 0.6.



- 2.2. La mida de la mostra és $n = 300$. L'estimació puntual de la mitjana i la desviació típica en la mostra han estat $\bar{x} = 53$ i $S = 8$.

Quan la mida de la mostra és gran, l'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma \in (0,1)$ s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} \right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal $(0,1)$, $P(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma) = \gamma$.

Per tant tenim que els extrems de l'interval són

$$\bar{x} - z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 53 - 1,96 \frac{8}{\sqrt{300}} = 52,0947$$

i

$$\bar{x} + z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 53 + 1,96 \frac{8}{\sqrt{300}} = 53,9053.$$

L'interval de confiança demanat és $[52,0947, 53,9053]$. Per tant, amb una confiança del 95% sabem que la mitjana de temps que triguen els alumnes per arribar des de la porta de casa seva al campus està entre 52,0947 i 53,9053 minuts.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Si no és el cas es pot descomptar fins a un màxim de 0,25 punts.

- 2.1 Assignació correcta d'esdeveniments: 0.25 punts. Càlcul de la primera probabilitat demanada: 0,5 punts. Càlcul de la segona probabilitat demanada: 0.5 punts.
- 2.2 Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,5 punts. Resultat final: 0,75 punts.



3

- 3.1. Denotem per x el preu de l'entrada i per $f(x)$ la funció que dona el nombre de persones que accedeixen al local. Sabem que $f(x)$ és una funció lineal de pendent -20 i que passa pel punt (15, 180). D'això deduïm que

$$f(x) - 180 = -20(x - 15), \text{ és a dir que, } f(x) = 480 - 20x.$$

Per saber a quin preu s'omple tot l'aforament de la sala cal resoldre $f(x) = 320$ i s'obté $x = 8$. És a dir, si baixen el preu de l'entrada a 8 euros hi assistiran 320 persones. Per saber ara a quin preu no ve ningú al local resolem $f(x) = 0$ i obtenim $x = 24$ euros.

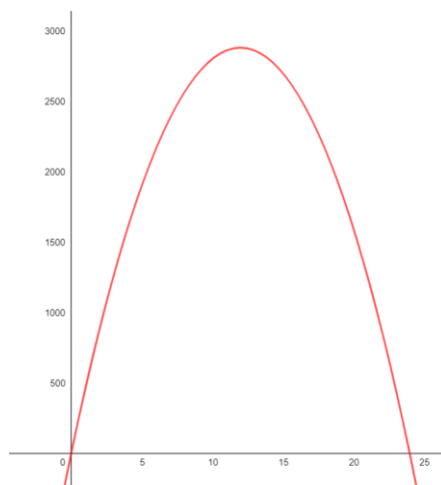
- 3.2. Els ingressos s'obtenen multiplicant el nombres de persones que assisteixen a la sala pel preu de l'entrada

$$I(x) = (480 - 20x) \cdot x = -20x^2 + 480x.$$

Si el preu és de 15 euros s'obtenen uns ingressos de $I(15) = 2700$ euros i per a 18 euros de $I(18) = 2160$ euros.

- 3.3. Ara hem de trobar el màxim de $I(x)$, que és un polinomi i per tant una funció contínua i derivable a tots els reals. Dins del context del problema té sentit considerar el domini $[8, 24]$. Derivant obtenim $I'(x) = -40x + 480$, i igualant la derivada a zero s'obté com a solució $x = 12$. Podem comprovar fàcilment que és un màxim absolut ja que $I'(x) > 0$ quan $x \in [8, 12]$ i $I'(x) < 0$ quan $x \in (12, 24]$.

Alternativament es pot representar la paràbola definida per $I(x)$ i trobar el vèrtex per obtenir el màxim:



Per tant, el preu que maximitza els ingressos és $x = 12$ euros i els ingressos màxims són $I(12) = 2880$ euros.



Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Si no és el cas es pot descomptar fins a un màxim de 0,25 punts.

- 3.1 Justificació correcta del nombre de persones en funció del preu: 0,25 punts.
Càlcul del preu de l'entrada amb el que s'omple el local: 0,25 punts. Càlcul del preu de l'entrada amb el que no ve ningú: 0,25 punts.
- 3.2 Càlcul de la funció que dona els ingressos en funció del preu: 0,25 punts.
Càlcul dels ingressos amb un preu de 15 euros: 0,25 punts. Càlcul dels ingressos amb un preu de 18 euros: 0,25 punts.
- 3.3 Càlcul de la derivada: 0,25 punts. Obtenció del preu amb el que s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul dels ingressos màxims: 0,25 punts.



4.

OPCIÓ A

- 4.1. Anomenem x al nombre de paraigües bastó venuts, i y al nombre de paraigües plegables venuts. Podem escriure un sistema d'equacions tenint en compte els guanys totals (primera equació) i els metres quadrats de tela usats (segona equació), de la següent manera:

$$\begin{cases} 15x + 25y = 42500 \\ 1,5x + y = 2375 \end{cases}$$

Per trobar les dades demanades, només hem de solucionar aquest sistema. De la segona equació, podem aïllar la variable y

$$y = 2375 - 1,5x$$

I substituint a la primera equació ens queda

$$15x + 25(2375 - 1,5x) = 42500.$$

Que si la resollem obtenim $x = 750$.

Substituint aquesta variable, trobem el valor de y

$$y = 2375 - 1,5x = 2375 - 1,5 \cdot 750 = 1250.$$

Per tant, s'han venut un total de 750 paraigües bastó i 1250 paraigües plegables.

- 4.2. Per saber els beneficis obtinguts si fabriquem 100 paraigües de cada tipus hem de substituir en les funcions que ens donen els beneficis la variable x per 1:

$$p(1) = 2$$

$$b(1) = -\frac{2}{5} + 2 = \frac{8}{5}.$$

Per tant, obtenim un benefici de 2000 euros amb els paraigües plegables i $\frac{8}{5} \cdot 1000 = 1600$ euros pels paraigües bastó. En total obtenim un benefici de 3600 euros.

Per saber entre quins valors no tenim pèrdues hem de buscar els valors de x pels quals les funcions són positives.

Comencem pels paraigües plegables. Tenint en compte que x representa el nombre de paraigües fabricats, la funció $p(x) = x(3 - x)$ està definida per valors de x més grans o iguals que zero. Per tant, per tal que la funció sigui



positiva cal $(3 - x) \geq 0$, és a dir, cal que $x \leq 3$. Així doncs, per no tenir pèrdues, en el cas dels paraigües plegables, cal que $x \in [0,3]$.

En el cas dels paraigües bastó, la funció de beneficis és $b(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 2x = x(-\frac{2}{5}x + 2)$. Per tant, per tal de no tenir pèrdues, cal que $-\frac{2}{5}x + 2 \geq 0$, és a dir, $x \leq 5$. Així doncs, cal que $x \in [0,5]$.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Si no és el cas es pot descomptar fins a un màxim de 0,25 punts.

4.1 Escriure cada equació: 0,25 punts cadascuna. Resolució i obtenció del resultat final: 0,75 punts.

4.2 Càlcul dels beneficis per la fabricació de 100 paraigües de cada tipus: 0.75 punts.
Càlcul dels valors de la variable x per als quals no hi ha pèrdues: 0,25 punts per cada tipus de paraigües.



OPCIÓ B

- 4.1. Calculem les funcions derivades per trobar els punts on s'assoleixen el màxim de beneficis de cada un dels dos productes

$$p'(x) = 3 - 2x$$

$$b'(x) = -\frac{4}{5}x + 2$$

Igualant aquestes derivades a 0, trobarem els candidats a màxim, que són

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,5$$

$$b'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2,5$$

Observem que en aquests punts hi ha un màxim perquè si mirem el signe de les derivades la primera passa de ser positiva a negativa en $x = 1,5$ i el mateix passa amb la segona en $x = 2,5$. Per tant les funcions passen de ser creixents a ser decreixents en aquests punts i, per tant, hi ha un màxim.

Per tant, amb els paraigües plegables s'assoleix el màxim de beneficis amb menys paraigües. Caldrà fabricar 150 paraigües plegables i 250 de bastó.

Ara estudiem quin és el valor màxim per les dues funcions, i obtenim

$$p(1,5) = 2,25$$

$$b(2,5) = 2,5$$

Per tant, encara que els paraigües plegables assoleixin el màxim de beneficis amb menys quantitat de paraigües, els beneficis obtinguts amb els paraigües bastó és superior. Concretament obtenim un benefici de 2250 euros amb els paraigües plegables i un benefici de 2500 euros amb els paraigües bastó.

- 4.2. Considerem els esdeveniments

T = el paraigua és de tela recoberta de tefló,

I = el paraigua és de tela impregnada i

D = la tela del paraigua és defectuosa i no protegeix de la pluja.

Per les dades de l'enunciat sabem que $P(T) = \frac{60}{60+80} = \frac{3}{7}$, perquè tenim 60 paraigües de tefló i 80 de tela impregnada entre els dos lots i, de la mateixa manera, $P(I) = \frac{4}{7}$.



També sabem que $P(D|T) = 0.02$ (perquè el 98% de paraigües de tefló aguanten bé la pluja) i que $P(D|I) = 0.05$.

Pel la fórmula de Bayes sabem que la probabilitat demanada es pot calcular de la següent manera

$$P(T|D) = \frac{P(D|T) \cdot P(T)}{P(D)}$$

Ens falta saber la probabilitat del denominador però per la fórmula de les probabilitats totals (o fent un diagrama d'arbre) obtenim que

$$P(D) = P(D|T) \cdot P(T) + P(D|I) \cdot P(I)$$

És a dir,

$$P(D) = 0,02 \cdot \frac{3}{7} + 0,05 \cdot \frac{4}{7} = 0,0371.$$

Per tant,

$$P(T|D) = \frac{0,02 \cdot \frac{3}{7}}{0,037} = 0,2310.$$

És a dir, la probabilitat de que el paraigua defectuós que hem agafat sigui de tela recoberta de tefló és de 0,231.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Si no és el cas es pot descomptar fins a un màxim de 0,25 punts.

4.1 Càlcul de les derivades: 0,25 punts. Obtenció dels punts on s'assoleixen els màxims: 0,25 punts. Justificació de que es tracta de màxims: 0,25 punts. Resposta correcta a la primera pregunta: 0,25 punts. Resposta correcta a la segona pregunta: 0,25 punts.

4.2 Assignació correcta d'esdeveniments: 0.25 punts. Càlcul de la probabilitat que el paraigua sigui defectuós: 0,5 punts. Càlcul de la probabilitat demanada: 0.5 punts.