



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques aplicades a las ciencias sociales

Serie 5

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas e indíquela en la portada.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. La redacción de la respuesta debe hacerse de forma coherente, con corrección y claridad, empleando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar la página en blanco del final del cuaderno para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

[2.5 puntos en total]

Después de una serie de lluvias torrenciales se ha realizado un estudio de la capacidad de agua almacenada en tres embalses: el de Darnius Boadella, el de Sau y el de la Baells. Se sabe que el agua almacenada en los tres embalses es de 112 hm^3 y que el de la Baells contiene la misma cantidad que el de Sau y el de Darnius Boadella juntos.

1.1. Con esta información, ¿se puede saber cuánta agua contiene cada embalse? Razone la respuesta. ¿Cuántos hectómetros cúbicos de agua contiene el embalse de la Baells?

[1.25 puntos]

1.2. Si además se sabe que el 10 % del agua que contiene el embalse de Darnius Boadella más el 20 % del agua que contiene el embalse de Sau más el 30 % del agua que hay en el de la Baells suman $27,2 \text{ hm}^3$, ¿qué cantidad de agua contiene cada embalse?

[1.25 puntos]

Ejercicio 2

[2,5 puntos en total]

En el campus de una universidad, el 45 % del alumnado llega en tren, el 35 % en autobús y el resto utilizando medios propios. Entre los usuarios del tren, el 70 % utiliza la T-joven, mientras que el 30 % restante usa otros tipos de billetes. Entre los usuarios del autobús, el 60 % utiliza la T-joven y el 40 % usa otros tipos de billetes. Entre los que llegan al campus por medios propios, ninguno utiliza la T-joven.

FÓRMULAS PARA RESOLVER EL EJERCICIO:

- $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ y $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$
- Intervalos de confianza con un nivel de confianza $\gamma \in (0, 1)$

- para la proporción (muestras grandes):

$$\left[p - z_{\gamma} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\gamma} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

- para la media (muestras normales con varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_{\gamma} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\gamma} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- para la media (muestras grandes con la varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

2.1. Si se escoge un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la T-joven para llegar al campus? Si se sabe que un alumno usa la T-joven para llegar al campus, ¿cuál es la probabilidad de que lo haga en tren?

[1,25 puntos]

2.2. Se quiere realizar un estudio para saber cuánto tiempo tarda el alumnado en llegar al campus de la universidad desde que sale por la puerta de su casa. Por eso se pidió a una muestra de 300 estudiantes que calcularan este dato un día determinado. Se obtuvo que estos 300 estudiantes de media habían tardado 53 minutos en llegar al campus, y que la desviación típica era de 8 minutos. Encuentre un intervalo de confianza del 95 % para el tiempo que tardan los alumnos en llegar al campus.

[1.25 puntos]

Ejercicio 3

[2,5 puntos en total]

En una localidad costera han abierto un nuevo local de ocio nocturno con varias pistas de baile y zonas de descanso. Para acceder al recinto hay que comprar una entrada que incluye una consumición. Después de unas cuantas semanas, los propietarios se han dado cuenta de que si el precio de la entrada es de 15 €, acuden 180 clientes. También se han dado cuenta de que la relación entre el precio de la entrada y el número de clientes es lineal, de forma que por cada euro de más en el precio de la entrada pierden 20 clientes. El aforo del local es de 320 personas.

3.1. Compruebe que el número de personas que acuden al local en función del precio viene dado por la función $f(x) = 480 - 20x$. ¿A partir de qué precio se tiene que vender la entrada para conseguir llenar el local? ¿A qué precio no acudirá nadie?

[0.75 puntos]

3.2. Encuentre una función que determine los ingresos obtenidos con las entradas en función del precio de la entrada. ¿Cuáles son los ingresos cuando el precio de la entrada es de 15 €? ¿Y cuando es de 18 €?

[0.75 puntos]

3.3. ¿A qué precio se tiene que poner la entrada para obtener el máximo de ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos?

[1 punto]

Ejercicio 4

[2,5 puntos en total]

Bernat ha sido contratado como gerente de una empresa que fabrica paraguas después de que el anterior gerente fuera despedido por no guardar convenientemente la documentación. Esta empresa fabrica dos modelos de paraguas: paraguas plegables y paraguas bastón.

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

Indique en la portada del examen la opción elegida.

OPCIÓN A

4.1. Haciendo un análisis económico del último ejercicio, Bernat ha descubierto que la empresa tuvo unos ingresos totales de 42.500 € por la venta de paraguas. Aun así, no hay ningún documento que indique cuántos paraguas de cada tipo se vendieron; solo que el precio de venta de cada paraguas plegable era de 25 € y el del paraguas bastón era de 15 €. Revolviendo entre la documentación, también ha encontrado que se usó un total de 2.375 m² de tela impermeable. Para fabricar un paraguas plegable, se necesita 1 m² de esta tela, mientras que para un paraguas bastón se necesitan 1,5 m². Sabiendo que no quedó ningún paraguas en el almacén al finalizar la temporada, ¿cuántos paraguas de cada modelo se vendieron?

[1.25 puntos]

4.2. Teniendo en cuenta el coste de fabricar y almacenar los paraguas plegables, la función que determina el beneficio, en miles de euros, que resulta de fabricar este producto es $p(x) = x(3 - x)$, donde x representa el número de paraguas fabricados, en cientos de unidades. Considerando los mismos factores, la función de beneficio de los paraguas bastón

$$\text{es } b(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 2x$$

. ¿Qué beneficios se obtendrán en total si se fabrican 100 paraguas de cada tipo? Para cada modelo de paraguas, calcule entre qué valores tiene que estar comprendida la variable x para que la empresa no tenga pérdidas.

[1.25 puntos]

OPCIÓN B

4.1. Teniendo en cuenta el coste de fabricar y almacenar los paraguas plegables, la función que expresa el beneficio, en miles de euros, que resulta de fabricar este producto es $p(x) = x(3 - x)$, donde x representa el número de paraguas fabricados, en cientos de unidades. Considerando los mismos factores, la función de beneficio de los paraguas bastón

$$\text{es } b(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 2x. \text{ La empresa fabricará el número de paraguas de cada tipo que maximice}$$

su función de beneficios.

¿Con cuál de los dos productos se necesita una menor cantidad de paraguas para lograr el máximo de beneficios? ¿Con cuál de los dos productos se obtienen mayores beneficios?

[1.25 puntos]

4.2. Un día llegan a la empresa dos lotes de paraguas bastón que había encargado el anterior gerente para analizar dos formas diferentes de tratar la tela impermeable: mediante la impregnación con un nuevo producto químico o mediante un recubrimiento de teflón. Entre los dos lotes, hay 60 paraguas con la tela recubierta de teflón y 80 paraguas impermeabilizados con el método de impregnación. Se sabe que un 98 % de los paraguas con recubrimiento de teflón aguantan bien la lluvia, pero solo el 95 % de los que han recibido el tratamiento de impregnación la aguantan bien.

Al salir del trabajo, cae un aguacero repentino y Bernat coge uno de los nuevos paraguas, pero tiene la mala suerte de que es uno de los defectuosos y queda completamente empapado. ¿Cuál es la probabilidad de que el paraguas que ha cogido sea de los que están recubiertos de teflón?

[1.25 puntos]

SOLUCIONES

Ejercicio 1

[2.5 puntos en total]

Después de una serie de lluvias torrenciales se ha realizado un estudio de la capacidad de agua almacenada en tres embalses: el de Darnius Boadella, el de Sau y el de la Baells. Se sabe que el agua almacenada en los tres embalses es de 112 hm^3 y que el de la Baells contiene la misma cantidad que el de Sau y el de Darnius Boadella juntos.

1.1. Con esta información, ¿se puede saber cuánta agua contiene cada embalse? Razone la respuesta. ¿Cuántos hectómetros cúbicos de agua contiene el embalse de la Baells?

[1.25 puntos]

1.2. Si además se sabe que el 10 % del agua que contiene el embalse de Darnius Boadella más el 20 % del agua que contiene el embalse de Sau más el 30 % del agua que hay en el de la Baells suman $27,2 \text{ hm}^3$, ¿qué cantidad de agua contiene cada embalse?

[1.25 puntos]

1.1. Llamamos x, y, z a la cantidad de agua, en hm^3 , almacenada en los embalses de Darnius Boadella, de Sau y de la Baells, respectivamente.

El agua almacenada en los tres embalses es de $112 \text{ hm}^3 \rightarrow x + y + z = 112$.

El de la Baells contiene la misma cantidad que el de Sau y el de Darnius Boadella juntos $\rightarrow z = x + y$

Disponemos de 2 ecuaciones y 3 incógnitas, por lo que el sistema va a ser compatible indeterminado. Intentamos resolver el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 112 \\ z = x + y \end{array} \right\} \Rightarrow x + y + x + y = 112 \Rightarrow 2x + 2y = 112 \Rightarrow x + y = 56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 56 - y \Rightarrow z = 56 - y + y = 56 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 56 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = 56 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}; 0 \leq \alpha \leq 56}$$

Solo se puede obtener la cantidad de agua almacenada en el embalse de la Baells que tiene 56 hm^3 . De los otros dos embalses sabemos que juntos tienen otros 56 hm^3 .

2.2. Añadimos la ecuación que podemos obtener de la información nueva proporcionada.

El 10 % del agua que contiene el embalse de Darnius Boadella más el 20 % del agua que contiene el embalse de Sau más el 30 % del agua que hay en el de la Baells suman $27,2 \text{ hm}^3 \rightarrow 0.10x + 0.20y + 0.3 \cdot 56 = 27.2$

$$\begin{aligned} 0.10x + 0.20y + 0.3 \cdot 56 &= 27.2 \Rightarrow 0.1x + 0.2y + 16.8 = 27.2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0.1x + 0.2y &= 10.4 \Rightarrow x + 2y = 104 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 56 - \alpha \\ y = \alpha \\ x + 2y = 104 \end{array} \right\} \Rightarrow 56 - \alpha + 2\alpha = 104 \Rightarrow \alpha = 48 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 56 - 48 = 8 \\ y = 48 \end{cases}}$$

El embalse de Boadella contiene 8 hm^3 , el de Sau 48 hm^3 y el de la Baells 56 hm^3 .

Ejercicio 2

En el campus de una universidad, el 45 % del alumnado llega en tren, el 35 % en autobús y el resto utilizando medios propios. Entre los usuarios del tren, el 70 % utiliza la T-joven, mientras que el 30 % restante usa otros tipos de billetes. Entre los usuarios del autobús, el 60 % utiliza la T-joven y el 40 % usa otros tipos de billetes. Entre los que llegan al campus por medios propios, ninguno utiliza la T-joven.

FÓRMULAS PARA RESOLVER EL EJERCICIO:

• $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ y $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$

• Intervalos de confianza con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$

- para la proporción (muestras grandes):

$$\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

- para la media (muestras normales con varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- para la media (muestras grandes con la varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

2.1. Si se escoge un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la T-joven para llegar al campus? Si se sabe que un alumno usa la T-joven para llegar al campus, ¿cuál es la probabilidad de que lo haga en tren?

[1,25 puntos]

2.2. Se quiere realizar un estudio para saber cuánto tiempo tarda el alumnado en llegar al campus de la universidad desde que sale por la puerta de su casa. Por eso se pidió a una muestra de 300 estudiantes que calcularan este dato un día determinado. Se obtuvo que estos 300 estudiantes de media habían tardado 53 minutos en llegar al campus, y que la desviación típica era de 8 minutos. Encuentre un intervalo de confianza del 95 % para el tiempo que tardan los alumnos en llegar al campus.

[1.25 puntos]

2.1. Llamamos J al suceso “el alumno utiliza la T-joven para llegar al campus”, T a “el alumno llega al campus en Tren”, B a “el alumno llega al campus en autobús” y M a “el alumno llega al campus utilizando medios propios”. De los datos proporcionados obtenemos las probabilidades siguientes.

$$P(T) = 0.45, P(B) = 0.35, P(M) = 1 - 0.45 - 0.35 = 0.2,$$

$$P(J/T) = 0.70, P(J/B) = 0.6, P(J/M) = 0$$

Nos piden calcular $P(T)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T) = P(T)P(J/T) + P(B)P(J/B) + P(M)P(J/M) =$$

$$= 0.45 \cdot 0.7 + 0.35 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0 = \boxed{0.525}$$

La probabilidad de que un alumno elegido al azar utilice la T-joven para llegar al campus tiene un valor de 0.525.

También debemos calcular $P(T/J)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T/J) = \frac{P(T \cap J)}{P(J)} = \frac{P(T)P(J/T)}{P(J)} = \frac{0.45 \cdot 0.7}{0.525} = \boxed{0.6}$$

Al elegir un alumno que ha utilizado la T-joven la probabilidad de que haya llegado en tren es de 0.6.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Supongamos que son 200 los alumnos del campus. El 45 % del alumnado llega en tren, es decir, $0.45 \cdot 200 = 90$ alumnos llegan en tren, el 35 % en autobús, es decir, $0.35 \cdot 200 = 70$ alumnos llegan en autobús y el resto utilizando medios propios, es decir $200 - 90 - 70 = 40$ alumnos llegan utilizando medios propios.

Entre los usuarios del tren (90), el 70 % utiliza la T-joven, es decir, $0.7 \cdot 90 = 63$ utiliza la T-joven, mientras que el 30 % restante usa otros tipos de billetes ($90 - 63 = 27$).

Entre los usuarios del autobús (70), el 60 % utiliza la T-joven, es decir, $0.6 \cdot 70 = 42$ utilizan la T-joven y el 40 % usa otros tipos de billetes.

Entre los que llegan al campus por medios propios, ninguno utiliza la T-joven.

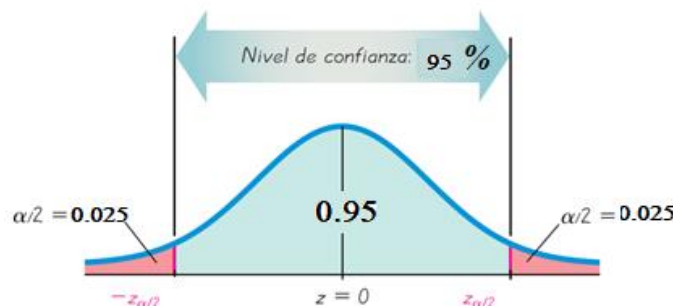
Con estos datos podemos decir que de los 200 alumnos utilizan la T-joven $63 + 42 = 105$ alumnos. La probabilidad de que un alumno elegido al azar utilice la T-joven para llegar al campus tiene un valor de $\frac{105}{200} = 0.525$.

Sabemos que 105 alumnos utilizan la T-joven y de estos son 63 los que llegan en tren.

Al elegir un alumno que ha utilizado la T-joven la probabilidad de que haya llegado en tren es de $\frac{63}{105} = 0.6$.

2.2. El tamaño muestral es $n = 300$. La media muestral es $\bar{x} = 53$ minutos y la desviación típica es $s = 8$ minutos.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Calculamos el error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{8}{\sqrt{300}} \approx 0.9053 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left[\bar{x} - z_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = [53 - 0.9053, 53 + 0.9053] = [52.0947, 53.9053]$$

Con un nivel de confianza del 95% podemos decir que el tiempo que tarda un alumno en llegar al campus se encuentra entre 52.0947 y 53.9053 minutos.

Ejercicio 3

En una localidad costera han abierto un nuevo local de ocio nocturno con varias pistas de baile y zonas de descanso. Para acceder al recinto hay que comprar una entrada que incluye una consumición. Después de unas cuantas semanas, los propietarios se han dado cuenta de que si el precio de la entrada es de 15 €, acuden 180 clientes. También se han dado cuenta de que la relación entre el precio de la entrada y el número de clientes es lineal, de forma que por cada euro de más en el precio de la entrada pierden 20 clientes. El aforo del local es de 320 personas.

3.1. Compruebe que el número de personas que acuden al local en función del precio viene dado por la función $f(x) = 480 - 20x$. ¿A partir de qué precio se tiene que vender la entrada para conseguir llenar el local? ¿A qué precio no acudirá nadie?

[0.75 puntos]

3.2. Encuentre una función que determine los ingresos obtenidos con las entradas en función del precio de la entrada. ¿Cuáles son los ingresos cuando el precio de la entrada es de 15 €? ¿Y cuando es de 18 €?

[0.75 puntos]

3.3. ¿A qué precio se tiene que poner la entrada para obtener el máximo de ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos?

[1 punto]

3.1. Sea x el precio de la entrada y $f(x)$ el número de clientes que entran al local con ese precio.

Si el precio de la entrada es de 15 €, acuden 180 clientes $\rightarrow f(15) = 180$.

La relación entre el precio de la entrada y el número de clientes es lineal, de forma que por cada euro de más en el precio de la entrada pierden 20 clientes $\rightarrow$ Si el nuevo precio es x

entonces el precio de la entrada ha subido $x - 15$ euros $\rightarrow f(x) = 180 - 20(x - 15) \rightarrow$

$$f(x) = 180 - 20x + 300 = 480 - 20x.$$

Para llenar el local deben entrar 320 personas. Averiguamos x para el que $f(x) = 320$.

$$f(x) = 320 \Rightarrow 480 - 20x = 320 \Rightarrow 160 = 20x \Rightarrow x = \frac{160}{20} = 8$$

Bajando el precio de la entrada a 8 € se llenaría el local.

Averiguamos x para el que $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 480 - 20x = 0 \Rightarrow 480 = 20x \Rightarrow x = \frac{480}{20} = 24$$

Subiendo el precio de la entrada a 24 € no entra nadie al local.

El dominio de definición de la función $f(x) = 480 - 20x$ es el intervalo $[8, 24]$

3.2. Obtenemos la expresión de la función ingresos $I(x)$.

$$I(x) = x \cdot f(x) = x(480 - 20x) = 480x - 20x^2; \quad 8 \leq x \leq 24$$

Con un precio de la entrada de x euros se obtienen unos ingresos de $I(x) = 480x - 20x^2$.

Con un precio de la entrada de $x = 15$ euros se obtienen unos ingresos de

$$I(15) = 480 \cdot 15 - 20 \cdot 15^2 = 2700 \text{ euros.}$$

Con un precio de la entrada de $x=18$ euros se obtienen unos ingresos de
 $I(18) = 480 \cdot 18 - 20 \cdot 18^2 = 2160$ euros.

3.3. Derivamos la función ingresos y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$I(x) = 480x - 20x^2 \Rightarrow I'(x) = 480 - 40x$$

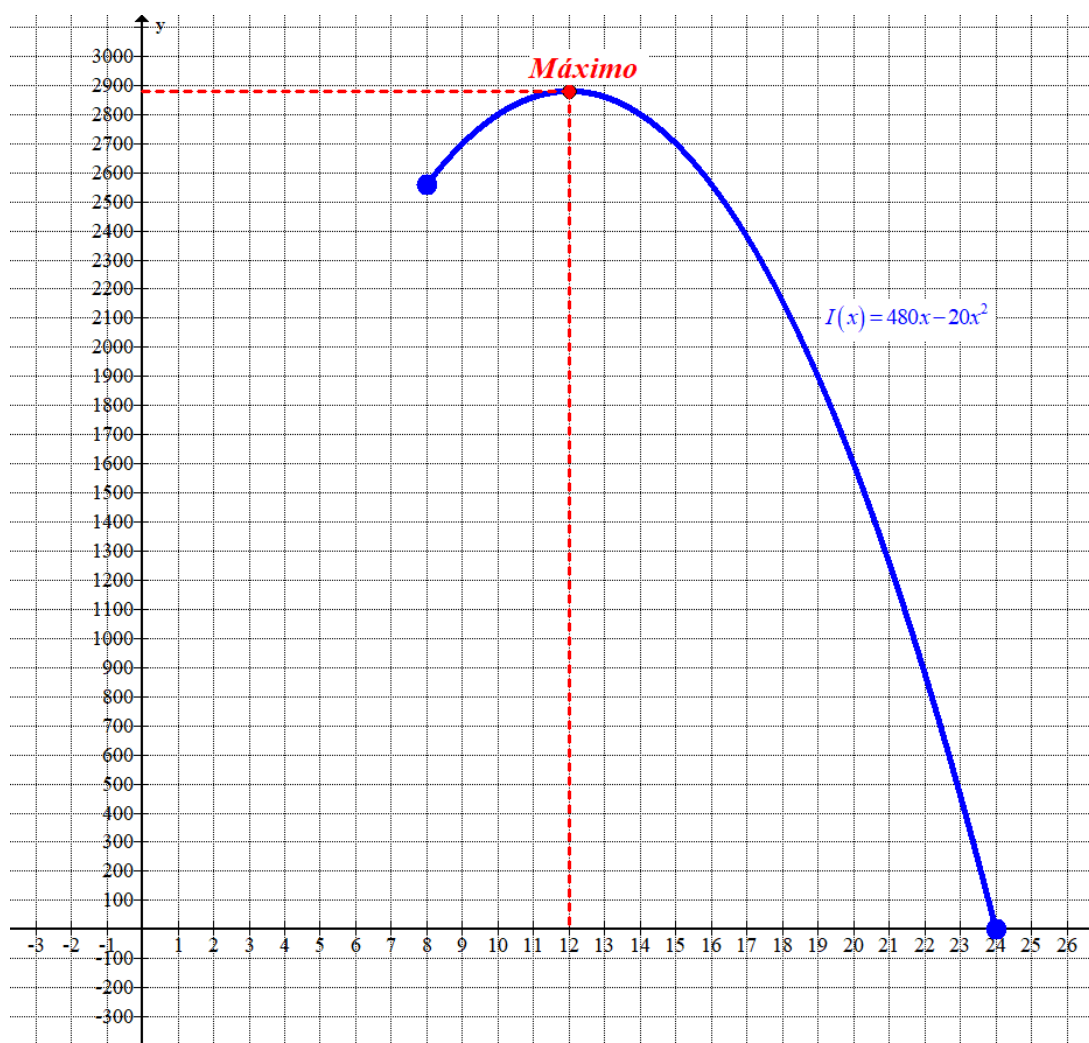
$$I'(x) = 0 \Rightarrow 480 - 40x = 0 \Rightarrow 480 = 40x \Rightarrow x = \frac{480}{40} = 12$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$I'(x) = 480 - 40x \Rightarrow I''(x) = -40 \Rightarrow I''(12) = -40 < 0$$

En $x=12$ la primera derivada se anula y la segunda toma valor negativo. En $x=12$ la función tiene un máximo relativo que también es absoluto.

Los ingresos son máximos con un precio de la entrada de 12 €. Estos ingresos máximos son de un importe de $I(12) = 480 \cdot 12 - 20 \cdot 12^2 = 2880$ euros.



Ejercicio 4

Bernat ha sido contratado como gerente de una empresa que fabrica paraguas después de que el anterior gerente fuera despedido por no guardar convenientemente la documentación. Esta empresa fabrica dos modelos de paraguas: paraguas plegables y paraguas bastón.

OPCIÓN A

4.1. Haciendo un análisis económico del último ejercicio, Bernat ha descubierto que la empresa tuvo unos ingresos totales de 42.500 € por la venta de paraguas. Aun así, no hay ningún documento que indique cuántos paraguas de cada tipo se vendieron; solo que el precio de venta de cada paraguas plegable era de 25 € y el del paraguas bastón era de 15 €. Revolviendo entre la documentación, también ha encontrado que se usó un total de 2.375 m² de tela impermeable. Para fabricar un paraguas plegable, se necesita 1 m² de esta tela, mientras que para un paraguas bastón se necesitan 1,5 m². Sabiendo que no quedó ningún paraguas en el almacén al finalizar la temporada, ¿cuántos paraguas de cada modelo se vendieron?

[1.25 puntos]

4.2. Teniendo en cuenta el coste de fabricar y almacenar los paraguas plegables, la función que determina el beneficio, en miles de euros, que resulta de fabricar este producto es $p(x) = x(3 - x)$, donde x representa el número de paraguas fabricados, en cientos de unidades.

Considerando los mismos factores, la función de beneficio de los paraguas bastón es

$$b(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 2x$$

. ¿Qué beneficios se obtendrán en total si se fabrican 100 paraguas de cada tipo? Para cada modelo de paraguas, calcule entre qué valores tiene que estar comprendida la variable x para que la empresa no tenga pérdidas.

[1.25 puntos]

4.1. Llamamos “ x ” al número de paraguas plegables vendidos e “ y ” al número de paraguas bastón vendidos. Obtenemos las ecuaciones asociadas a los datos proporcionados.

“Obtiene unos ingresos totales de 42.500 € por la venta de paraguas, siendo el precio de venta de cada paraguas plegable de 25 € y el del paraguas bastón de 15 €.” $\rightarrow 42500 = 25x + 15y$.

“Para la fabricación de los paraguas se usó un total de 2.375 m² de tela impermeable. Para fabricar un paraguas plegable, se necesita 1 m² de esta tela, mientras que para un paraguas bastón se necesitan 1,5 m²” $\rightarrow 1 \cdot x + 1.5 \cdot y = 2375 \rightarrow x + 1.5y = 2375$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 42500 = 25x + 15y \\ x + 1.5y = 2375 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8500 = 5x + 3y \\ x = 2375 - 1.5y \end{array} \right\} \Rightarrow 8500 = 5(2375 - 1.5y) + 3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8500 = 11875 - 7.5y + 3y \Rightarrow -3375 = -4.5y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{3375}{4.5} = 750} \Rightarrow \boxed{x = 2375 - 1.5 \cdot 750 = 1250}$$

Se vendieron 1250 paraguas plegables y 750 paraguas bastón.

4.2. Los beneficios totales son la suma de ambos beneficios: $p(1) + b(1)$.

$$p(1) + b(1) = 1(3-1) - \frac{2}{5}1^2 + 2 \cdot 1 = 4 - \frac{2}{5} = 3.6$$

Los beneficios totales que se obtienen con 100 paraguas de cada modelo son 3600 euros.

Para no tener pérdidas los beneficios deben ser 0 o positivos. Averiguamos cuando la función $p(x) = x(3-x)$ es positiva o cero.

$$p(x) = 0 \Rightarrow x(3-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$x \in [0, 3] \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x(3-x) \geq 0$$

$$x \in (3, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3-x < 0 \end{cases} \Rightarrow x(3-x) < 0$$

Para que la empresa no tenga pérdidas fabricando paraguas plegables debe fabricar cualquier cantidad menor de 300 paraguas.

Averiguamos cuando la función $b(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 2x$ es positiva o cero.

$$b(x) = 0 \Rightarrow -\frac{2}{5}x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{-2}{5}x + 2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{-2}{5}x + 2 = 0 \rightarrow 2 = \frac{2}{5}x \rightarrow x = 5 \end{cases}$$

$$x \in [0, 5] \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{-2}{5}x + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{-2}{5}x + 2\right) \geq 0$$

$$x \in (5, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{-2}{5}x + 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{5}x + 2 < 0$$

Para que la empresa no tenga pérdidas fabricando paraguas bastón debe fabricar cualquier cantidad menor de 500 paraguas.

Ejercicio 4

Bernat ha sido contratado como gerente de una empresa que fabrica paraguas después de que el anterior gerente fuera despedido por no guardar convenientemente la documentación. Esta empresa fabrica dos modelos de paraguas: paraguas plegables y paraguas bastón.

OPCIÓN B

4.1. Teniendo en cuenta el coste de fabricar y almacenar los paraguas plegables, la función que expresa el beneficio, en miles de euros, que resulta de fabricar este producto es $p(x) = x(3-x)$, donde x representa el número de paraguas fabricados, en cientos de unidades. Considerando los mismos factores, la función de beneficio de los paraguas bastón es $b(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 2x$. La empresa fabricará el número de paraguas de cada tipo que maximice su función de beneficios.

¿Con cuál de los dos productos se necesita una menor cantidad de paraguas para lograr el máximo de beneficios? ¿Con cuál de los dos productos se obtienen mayores beneficios?

[1.25 puntos]

4.2. Un día llegan a la empresa dos lotes de paraguas bastón que había encargado el anterior gerente para analizar dos formas diferentes de tratar la tela impermeable: mediante la impregnación con un nuevo producto químico o mediante un recubrimiento de teflón. Entre los dos lotes, hay 60 paraguas con la tela recubierta de teflón y 80 paraguas impermeabilizados con el método de impregnación. Se sabe que un 98 % de los paraguas con recubrimiento de teflón aguantan bien la lluvia, pero solo el 95 % de los que han recibido el tratamiento de impregnación la aguantan bien.

Al salir del trabajo, cae un aguacero repentino y Bernat coge uno de los nuevos paraguas, pero tiene la mala suerte de que es uno de los defectuosos y queda completamente empapado. ¿Cuál es la probabilidad de que el paraguas que ha cogido sea de los que están recubiertos de teflón?

[1.25 puntos]

4.1. Averiguamos el máximo de cada una de las funciones beneficio. Como son dos parábolas $p(x) = x(3-x) = -x^2 + 3x$ y $b(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 2x$ con coeficientes principales -1 y $-\frac{2}{5}$ ambos negativos son parábolas cóncavas y su máximo absoluto es el vértice de la parábola.

$$p(x) = -x^2 + 3x \Rightarrow x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(-1)} = 1.5$$

$$b(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 2x \Rightarrow x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot \frac{-2}{5}} = \frac{-10}{-4} = 2.5$$

El máximo beneficio en la fabricación de paraguas plegables se obtiene con la fabricación de 150 paraguas plegables.

El máximo beneficio en la fabricación de paraguas bastón se obtiene con la fabricación de 250 paraguas bastón.

¿Con cuál de los dos productos se necesita una menor cantidad de paraguas para lograr el máximo de beneficios?

Con los paraguas plegables. Solo necesitas fabricar 150 para conseguir el máximo beneficio, con los paraguas bastón hacen falta fabricar 250 para maximizar los beneficios.

¿Con cuál de los dos productos se obtienen mayores beneficios?

Para $x = 1.5$ tenemos que $p(1.5) = 1.5(3-1.5) = 2.25$. Con los paraguas plegables se consiguen unos beneficios máximos de 2250 euros.

Para $x = 2.5$ tenemos que $b(2.5) = -\frac{2}{5} 2.5^2 + 2 \cdot 2.5 = 2.5$. Con los paraguas bastón se consiguen unos beneficios máximos de 2500 euros.
Se consigue mayor beneficio máximo con los paraguas bastón.

4.2. Llamamos T al suceso “el paraguas es de tela recubierta de teflón”, I al suceso “el paraguas es de tela con impregnación” y D a “la tela del paraguas es defectuosa”.

Con los datos proporcionados establecemos las probabilidades siguientes.

$$P(T) = \frac{60}{140} = \frac{3}{7}, P(I) = \frac{80}{140} = \frac{4}{7}, P(D/T) = 1 - 0.98 = 0.02, P(D/I) = 1 - 0.95 = 0.05$$

Debemos calcular $P(T/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(T/D) &= \frac{P(T \cap D)}{P(D)} = \frac{P(T)P(D/T)}{P(T)P(D/T) + P(I)P(D/I)} = \\ &= \frac{\frac{3}{7} \cdot 0.02}{\frac{3}{7} \cdot 0.02 + \frac{4}{7} \cdot 0.05} = \frac{0.06}{0.06 + 0.2} = \boxed{\frac{3}{13} \approx 0.2308} \end{aligned}$$

La probabilidad de que el paraguas que se ha elegido y es defectuoso sea de los que están recubiertos de teflón vale $\frac{3}{13} \approx 0.2308$.