



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- Duración: 1 hora y 30 minutos**
- Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- Este examen consta de seis ejercicios distribuidos en una parte con dos ejercicios obligatorios y una parte con dos bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- Se deben resolver los dos ejercicios obligatorios y solamente un ejercicio de cada uno de los dos bloques con optatividad. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque optativo, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos. En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- Se proporciona la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

PARTE OBLIGATORIA. Resuelve los dos ejercicios siguientes:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

En un jardín botánico se desea crear un recinto floral con forma de triángulo rectángulo. Por la disposición del recinto y las características del terreno, la hipotenusa ha de medir 20 metros. ¿Qué longitudes han de tener los catetos del triángulo rectángulo para que su área sea lo mayor posible y cuál es el valor de esta área?

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Discutir el sistema $AX - mX = B$, según los valores del parámetro m .

PARTE OPTATIVA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin(x^2)}{1 - \cos(x)}$$

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera la función $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \cos(x)$.

a) [2 puntos] Calcula $\int_0^{\pi} f(x) dx$

b) [0.5 puntos] Estudia la simetría de la función f y deduce de ella la relación que existe entre $\int_0^{\pi} f(x) dx$ y $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(0, -1, 1)$ y $D(1, 1, 1)$.

a) [1,5 puntos] Calcula la longitud de la altura del tetraedro de vértices A , B , C , D trazada desde el vértice D .

b) [1 punto] Determina el ángulo que forma la recta que pasa por A y D con el plano que contiene a los puntos A , B y C .

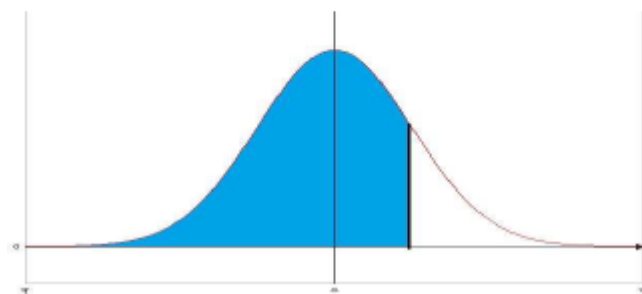
EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

Dos laboratorios, Virex y Borez, elaboran las dosis de la vacuna contra la gripe A. Para mejorar la efectividad de dicha vacuna necesitamos dos inoculaciones. En la farmacia disponen de seis dosis de Virex y dos de Borez. Se sabe que las dosis se sirven de manera aleatoria y consecutiva.

a) [1,25 puntos] Halla la probabilidad de que la segunda dosis sea del laboratorio Virex.

b) [1,25 puntos] Si la segunda dosis es del laboratorio Virex, halla la probabilidad de que la primera hubiese sido de Borez.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $N(0, 1)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

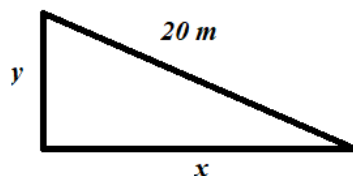
Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

En un jardín botánico se desea crear un recinto floral con forma de triángulo rectángulo. Por la disposición del recinto y las características del terreno, la hipotenusa ha de medir 20 metros. ¿Qué longitudes han de tener los catetos del triángulo rectángulo para que su área sea lo mayor posible y cuál es el valor de esta área?

Hacemos un dibujo de la situación planteada.



Si aplicamos el teorema de Pitágoras obtenemos:

$$x^2 + y^2 = 20^2 \Rightarrow y^2 = 400 - x^2 \Rightarrow y = +\sqrt{400 - x^2}$$

Deseamos que el área del triángulo sea máxima.

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = \frac{xy}{2} \\ y = \sqrt{400 - x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = \frac{x\sqrt{400 - x^2}}{2} = \frac{\sqrt{400x^2 - x^4}}{2}$$

La función área tiene la expresión $A(x) = \frac{\sqrt{400x^2 - x^4}}{2}$, con $0 < x < 20$.

Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$A(x) = \frac{1}{2}\sqrt{400x^2 - x^4} \Rightarrow A'(x) = \frac{1}{2} \frac{800x - 4x^3}{2\sqrt{400x^2 - x^4}} = \frac{1}{4} \frac{4x(200 - x^2)}{x\sqrt{400 - x^2}} = \frac{200 - x^2}{\sqrt{400 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{200 - x^2}{\sqrt{400 - x^2}} = 0 \Rightarrow 200 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 200 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}}$$

Solo tiene sentido la raíz positiva. Tenemos un punto crítico del área para $x = 10\sqrt{2}$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(0, 10\sqrt{2})$ tomamos $x=1$ y la derivada vale

$$A'(1) = \frac{200 - 1^2}{\sqrt{400 - 1^2}} = \frac{199}{\sqrt{399}} > 0. \text{ La función crece en } (0, 10\sqrt{2}).$$

- En el intervalo $(10\sqrt{2}, 20)$ tomamos $x=19$ y la derivada vale

$$A'(19) = \frac{200 - 19^2}{\sqrt{400 - 19^2}} \simeq -25.8 < 0. \text{ La función decrece en } (10\sqrt{2}, 20).$$

La función crece antes de $x = 10\sqrt{2}$ y decrece después. La función tiene un máximo relativo para $x = 10\sqrt{2}$.

Obtenemos la longitud del otro cateto.

$$x = 10\sqrt{2} \Rightarrow y = +\sqrt{400 - (10\sqrt{2})^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

Obtenemos el área máxima que podemos conseguir.

$$A(10\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{400(10\sqrt{2})^2 - (10\sqrt{2})^4}}{2} = 100$$

El triángulo rectángulo con 20 metros de longitud de la hipotenusa con área máxima tiene los dos catetos de longitud $10\sqrt{2} \approx 14.14$ metros. Este área máxima tiene un valor de 100 metros cuadrados.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Discutir el sistema $AX - mX = B$, según los valores del parámetro m .

Obtenemos la expresión del sistema planteado.

$$AX - mX = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 3y+z \\ -2x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} mx \\ my \\ mz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (1-m)x+2y+z \\ (3-m)y+z \\ -2x-mz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-m)x+2y+z=3 \\ (3-m)y+z=3 \\ -2x-mz=1 \end{cases}$$

Este sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1-m & 2 & 1 \\ 0 & 3-m & 1 \\ -2 & 0 & -m \end{pmatrix}$ y como matriz

ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1-m & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3-m & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -m & 1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-m & 2 & 1 \\ 0 & 3-m & 1 \\ -2 & 0 & -m \end{vmatrix} = -m(1-m)(3-m) - 4 + 2(3-m) =$$

$$-m(1-m)(3-m) - 4 + 6 - 2m = -m(1-m)(3-m) + 2 - 2m =$$

$$= -m(1-m)(3-m) + 2(1-m) = (1-m)[-m(3-m) + 2] =$$

$$= (1-m)(-3m + m^2 + 2) = (1-m)(m^2 - 3m + 2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (1-m)(m^2 - 3m + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-m=0 \rightarrow \boxed{m=1} \\ m^2 - 3m + 2 = 0 \rightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \\ = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2=m} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1=m} \end{cases} \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq 2$

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3 e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada

queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene la primera y segunda fila iguales. El

rango de A y de A/B es menor de 3. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar las columnas primera y segunda, y la fila primera su determinante vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0.$$

El rango de A y de A/B es 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $m = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Aplicamos el método de Gauss

para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad 0 \quad -2 \quad 1 \\ \hline 2 \quad -4 \quad -2 \quad -6 \\ 0 \quad -4 \quad -4 \quad -5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 4 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -4 \quad -4 \quad -5 \\ 0 \quad 4 \quad 4 \quad 12 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 7 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{-1 \quad 2 \quad 1 \quad 3}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 7 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $m = 2$ el sistema es incompatible (sin solución).

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Calcula el siguiente límite

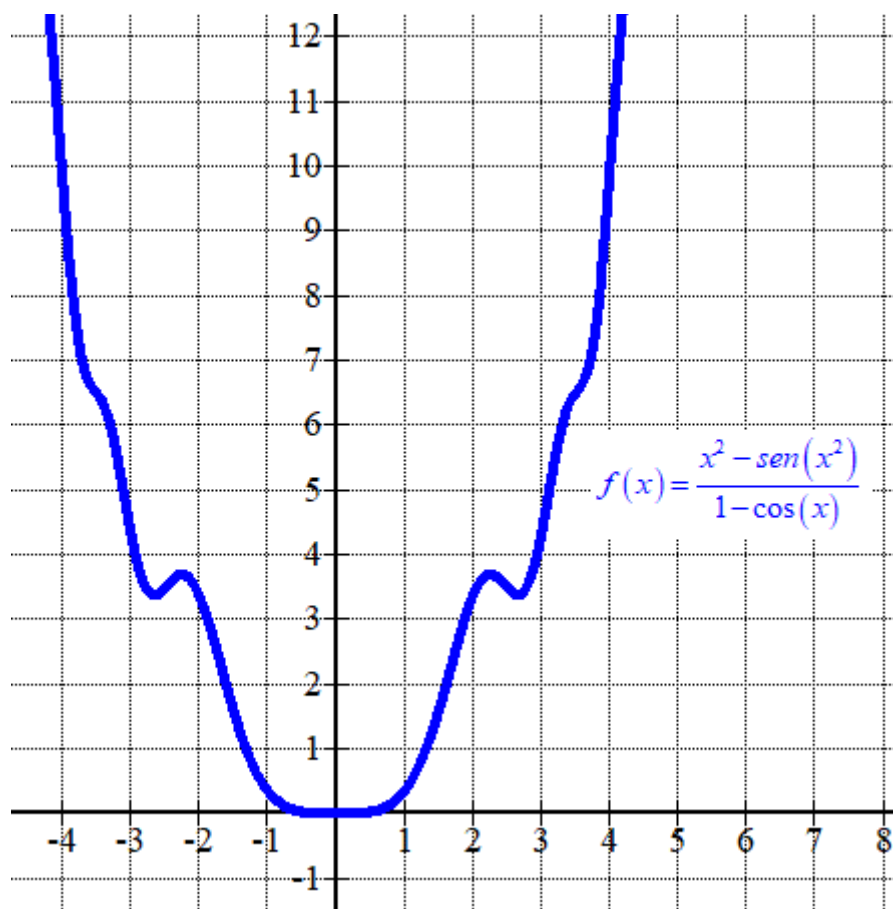
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen}(x^2)}{1 - \cos(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen}(x^2)}{1 - \cos(x)} = \frac{0^2 - \operatorname{sen}(0^2)}{1 - \cos(0)} = \frac{0 - 0}{1 - 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2x \cos(x^2)}{0 - (-\operatorname{sen}(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2x \cos(x^2)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot \cos(0^2)}{\operatorname{sen}(0)} =$$

$$= \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - [2 \cos(x^2) + 2x \cdot 2x (-\operatorname{sen}(x^2))]}{\cos(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos(x^2) + 4x^2 \operatorname{sen}(x^2)}{\cos(x)} = \frac{2 - 2 \cos(0^2) + 4 \cdot 0^2 \operatorname{sen}(0^2)}{\cos(0)} = \frac{2 - 2 + 0}{1} = \boxed{0}$$



EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera la función $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \cos(x)$.

a) [2 puntos] Calcula $\int_0^\pi f(x) dx$

b) [0.5 puntos] Estudia la simetría de la función f y deduce de ella la relación que existe entre $\int_0^\pi f(x) dx$ y $\int_{-\pi}^\pi f(x) dx$

a) Hallamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int x^2 \cos(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = \cos(x) dx \rightarrow v = \int \cos(x) dx = \sin(x) \end{array} \right\} =$$

$$= -x^2 \sin(x) - \int 2x \sin(x) dx = -x^2 \sin(x) - 2 \int x \sin(x) dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \sin(x) dx \rightarrow v = \int \sin(x) dx = -\cos(x) \end{array} \right\} =$$

$$= -x^2 \sin(x) - 2 \left[-x \cos(x) - \int -\cos(x) dx \right] = -x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \int \cos(x) dx =$$

$$= \boxed{-x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + K}$$

Utilizamos este resultado para obtener la integral definida pedida.

$$\int_0^\pi f(x) dx = \left[-x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) \right]_0^\pi =$$

$$= \left[-\pi^2 \sin(\pi) + 2\pi \cos(\pi) - 2 \sin(\pi) \right] - \left[-0^2 \sin(0) + 2 \cdot 0 \cdot \cos(0) - 2 \sin(0) \right] =$$

$$= 0 - 2\pi - 0 - [0 + 0 - 0] = \boxed{-2\pi}$$

b) Estudiamos la simetría de la gráfica de la función.

$$f(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = \left\{ \begin{array}{l} (-x)^2 = x^2 \\ \cos(-x) = \cos(x) \end{array} \right\} = x^2 \cos(x) = f(x)$$

La función es par. Es simétrica respecto del eje de ordenadas.
Esto implica que:

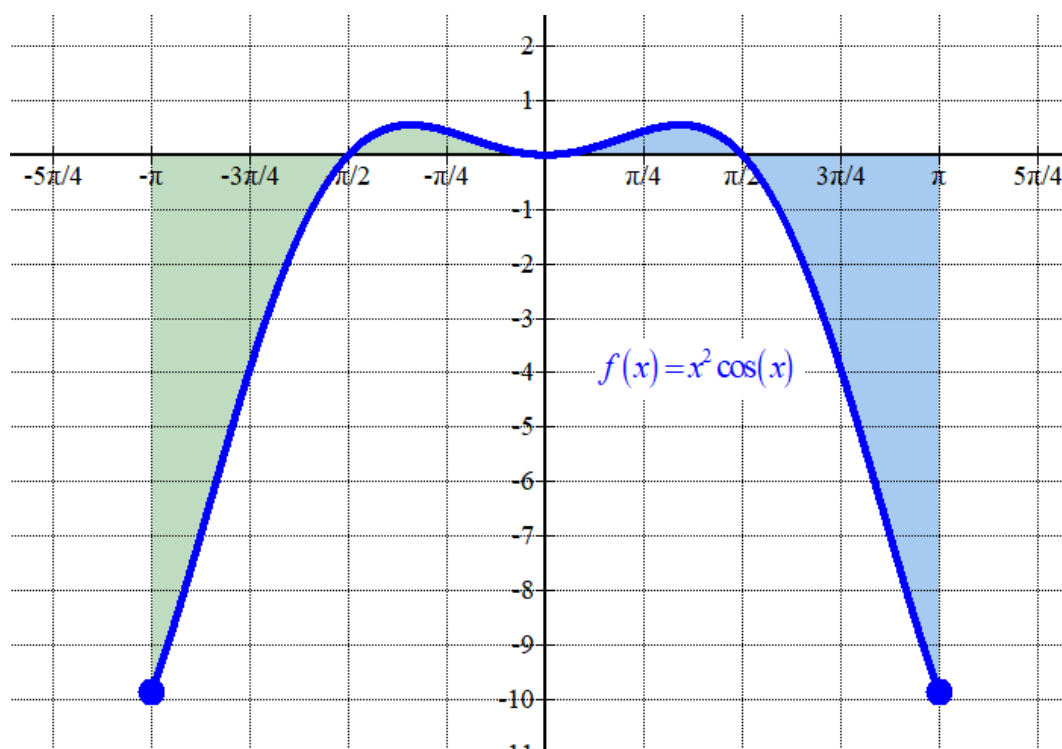
$$\int_{-\pi}^0 f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = -x \rightarrow x = -t \rightarrow dx = -dt \\ f(-t) = f(t) \\ x = -\pi \rightarrow t = \pi \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} = \int_{\pi}^0 f(-t)(-dt) =$$

$$= -\int_{\pi}^0 f(t) dt = -\left(-\int_0^{\pi} f(t) dt\right) = \int_0^{\pi} f(t) dt$$

Y respondiendo a lo planteado en el ejercicio:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx$$

Hemos obtenido que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx$.



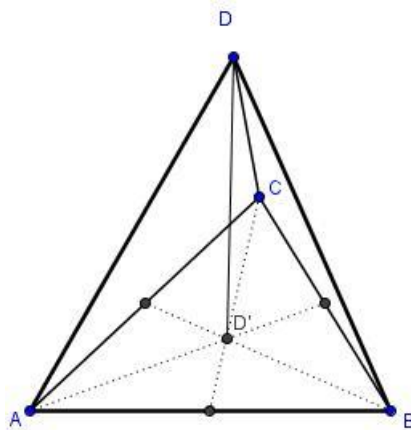
EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(0, -1, 1)$ y $D(1, 1, 1)$.

a) [1,5 puntos] Calcula la longitud de la altura del tetraedro de vértices A, B, C, D trazada desde el vértice D.

b) [1 punto] Determina el ángulo que forma la recta que pasa por A y D con el plano que contiene a los puntos A, B y C.

a) Para hallar la altura del tetraedro hallamos el plano que determinan los puntos A, B y C.



$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,2) \in \pi \\ B(-1,1,0) \in \pi \\ C(0,-1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1,1,0) - (1,0,2) = (-2,1,-2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,-1,1) - (1,0,2) = (-1,-1,-1) \\ C(0,-1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 2y + 2z - 2 - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x + 3z - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - z + 1 = 0}$$

El plano que definen los puntos A, B y C tiene ecuación $\pi : x - z + 1 = 0$. Este plano contiene el triángulo de la base del tetraedro.

La altura pedida es la distancia del punto D al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - z + 1 = 0 \\ D(1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(D, \pi) = \frac{|1 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ unidades}$$

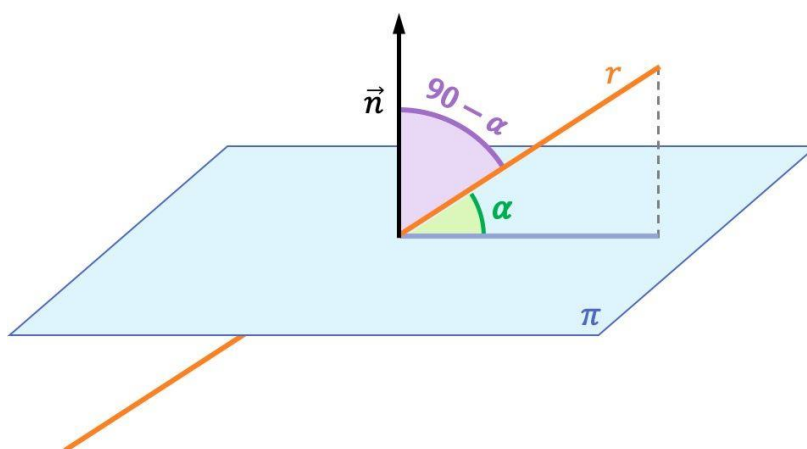
La longitud de la altura del tetraedro de vértices A, B, C, D trazada desde el vértice tiene un valor de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades de longitud.

b) La recta que pasa por A y D tiene como vector director el vector $\overrightarrow{AD}$. Hallamos el ángulo formado entre este vector y el vector normal al plano π hallado en el apartado anterior.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AD} = (1,1,1) - (1,0,2) = (0,1,-1) \\ \pi : x - z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1,0,-1) \\ \cos(\overrightarrow{AD}, \vec{n}) = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AD}| |\vec{n}|} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AD}, \vec{n}) = \frac{(0,1,-1)(1,0,-1)}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2} \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{0+0+1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{AD}, \vec{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ}$$

El ángulo que forma la recta que pasa por A y D con el plano que contiene a los puntos A, B y C es de $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

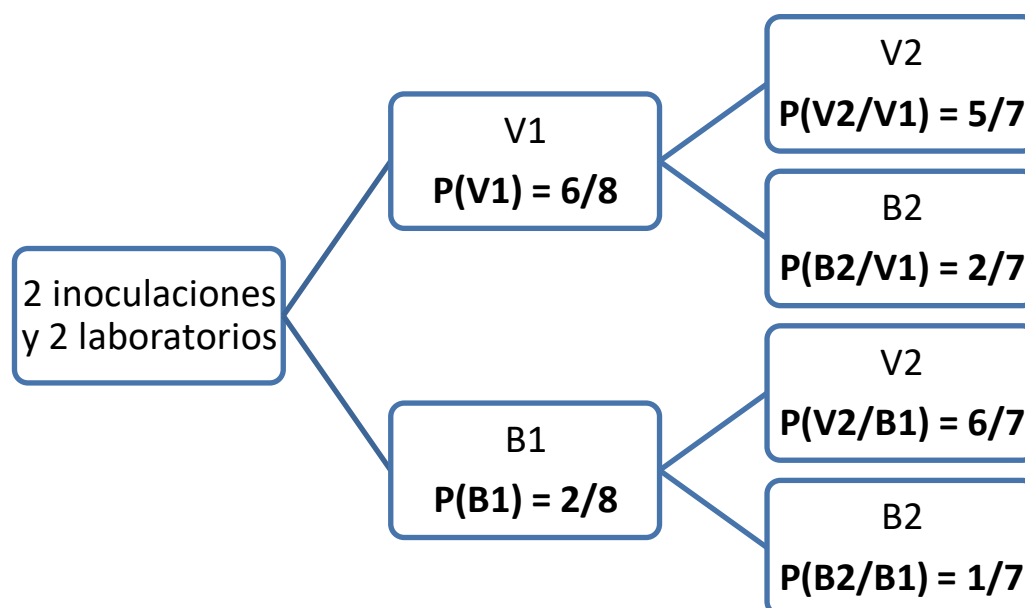


EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

Dos laboratorios, Virex y Borez, elaboran las dosis de la vacuna contra la gripe A. Para mejorar la efectividad de dicha vacuna necesitamos dos inoculaciones. En la farmacia disponen de seis dosis de Virex y dos de Borez. Se sabe que las dosis se sirven de manera aleatoria y consecutiva.

- a) [1,25 puntos] Halla la probabilidad de que la segunda dosis sea del laboratorio Virex.
 b) [1,25 puntos] Si la segunda dosis es del laboratorio Virex, halla la probabilidad de que la primera hubiese sido de Borez.

Llamamos V1 al suceso “La primera dosis es de los laboratorios Virex”, B1 a “La primera dosis es de los laboratorios Borez”, V2 al suceso “La segunda dosis es de los laboratorios Virex” y B2 a “La segunda dosis es de los laboratorios Borez”. Realizamos un diagrama de árbol con la información proporcionada.



- a) Debemos calcular $P(V2)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V2) = P(V1)P(V2/V1) + P(B1)P(V2/B1) = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{42}{56} = \boxed{0.75}$$

La probabilidad de que la segunda dosis sea del laboratorio Virex tiene un valor de 0.75.

- b) Debemos hallar $P(B1/V2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B1/V2) = \frac{P(B1 \cap V2)}{P(V2)} = \frac{P(B1)P(V2/B1)}{P(V2)} = \frac{\frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7}}{0.75} = \boxed{\frac{2}{7} \approx 0.2857}$$

Si la segunda dosis es del laboratorio Virex, la probabilidad de que la primera hubiese sido de Borez tiene un valor aproximado de 0.2857.