



SÈRIE 2

Exercici 1

[2,5 punts en total]

1.1

El domini d'aquesta funció són tots els nombres reals, ja que el denominador no s'anul·la mai. La derivada és

$$f'(x) = \frac{5(x^2+1)-5x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-5x^2+5}{(x^2+1)^2}.$$

Els candidats a màxim i mínim d'aquesta funció són els zeros de la derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -5x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Per tant, els únics possibles màxims o mínims són aquests dos punts. Ara estudiem la monotonía de la funció, mirant el signe de la derivada: el denominador és sempre positiu i el numerador, $-5x^2 + 5$, és negatiu a $(-\infty, -1)$ i a $(1, +\infty)$, mentre que és positiu a $(-1, 1)$. Per tant, $f'(x) < 0$ i la funció f és decreixent a $(-\infty, -1)$ i a $(1, +\infty)$, mentre que $f'(x) > 0$ i la funció f és creixent a l'interval $(-1, 1)$. Per tant, la funció té un màxim a $x = 1$ i un mínim a $x = -1$.

1.2

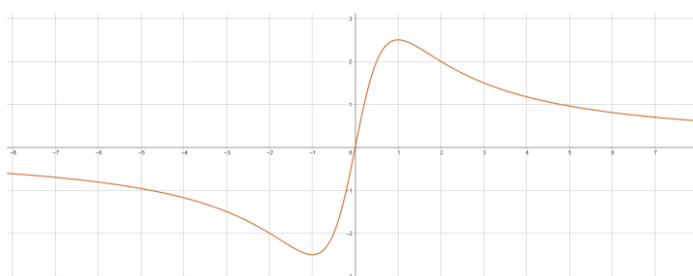
La funció no tindrà asímptotes verticals perquè el denominador mai s'anul·la. Sí que té asímptotes horitzontals, ja que $f(x) \rightarrow 0$ quan $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5/x}{1 + 1/x^2} = \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

Alternativament, també es pot argumentar per la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{2x} = \frac{5}{\pm\infty} = 0.$$

Amb la informació que tenim podem fer un esbós de la gràfica de la funció f :





1.3

Com que $f(2) = \frac{5 \cdot 2}{2^2 + 1} = \frac{10}{5} = 2$, es tracta del punt $(2, 2)$. El pendent en aquest punt és $f'(2) = \frac{-5 \cdot 2^2 + 5}{(2^2 + 1)^2} = \frac{-15}{25} = -\frac{3}{5}$, per tant, la recta normal, que és perpendicular a la tangent, tindrà pendent $\frac{5}{3}$ i es tracta de

$$y - 2 = \frac{5}{3}(x - 2) \rightarrow y = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}.$$



Exercici 2

[2,5 punts en total]

2.1

Considerem la matriu de coeficients, A , i la matriu ampliada del sistema, A^* ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & k & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculant el determinant de la matriu A , tenim

$$|A| = 4 - 1 + 2k - 2 - 4 + k = 3k - 3,$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow 3k - 3 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

Per tant, si $k \neq 1$, $\text{rang}(A) = 3$ i $\text{rang}(A^*) = 3$ i, pel teorema de Rouché-Frobenius, el sistema és compatible determinat perquè té 3 incògnites.

D'altra banda, si $k = 1$, $|A| = 0$ i, com que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, deduïm que $\text{rang}(A) = 2$.

Per a estudiar el rang de la matriu A^* veiem que

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 + 1 - 6 - 2 + 2 = 0$$

i, pel mètode de l'orlat, $\text{rang}(A^*) = 2$. Com que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 < \text{número d'incògnites}$, el teorema de Rouché-Frobenius ens assegura que el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

2.2

En l'apartat anterior hem vist que per a $k \neq 1$, el sistema és compatible determinat; és a dir, que té una solució única (que, en principi, depèn de k). Per a resoldre'l, fem servir el mètode de Cramer:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & k & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3k - 3} = \frac{6 + 1 + 4k - 4 - 6 - k}{3k - 3} = \frac{3k - 3}{3k - 3} = 1,$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3k - 3} = \frac{2 - 2 + 6 - 1 - 8 + 3}{3k - 3} = 0.$$

Per a calcular z podem continuar amb Cramer o fer servir una de les equacions:

$$z = 2 - x - y = 2 - 1 - 0 = 1.$$



Per tant, la solució del sistema per a $k \neq 1$ és el punt $(x, y, z) = (1, 0, 1)$. Efectivament, tal com indica l'enunciat, aquest punt solució NO depèn del valor de k .

2.3

Geomètricament, cadascuna de les equacions del sistema representa un pla a l'espai. Els plans que corresponen a la segona i tercera equacions estan fixos i es tallen en una recta r (són equacions independents). En canvi, el primer pla varia en funció del valor de k . Quan $k = 1$, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat, la qual cosa significa que els tres plans es tallen en una recta; forçosament, ha de ser la recta r , que estarà, per tant, continguda també dins el primer pla. En canvi, quan $k \neq 1$, el sistema és compatible determinat i els tres plans es tallen només en un sol punt, que és $(1,0,1)$; com que aquest punt no depèn de k , el primer pla varia en funció de k , però contenint sempre el punt $(1,0,1)$ —que també ha d'estar dins la recta r , ja que $(1,0,1)$ també és solució del sistema per a $k = 1$.



Exercici 3

[2,5 punts en total]

3.1

Anomenarem X el nombre d'aerogeneradors en funcionament. Per a arribar als 1 000 MW, han de funcionar necessàriament els 10 aerogeneradors. Com que cadascun funciona, independentment dels altres, amb probabilitat $1 - 0,1 = 0,9$, la probabilitat que això passi és

$$P = 0,9 \cdot 0,9 \cdot \dots \cdot 0,9 = 0,9^{10} = 0,3486 \dots$$

També podem argumentar que el nombre de generadors en funcionament segueix una distribució binomial $X \sim B(n = 10, p = 0,9)$ i arribem al mateix resultat.

3.2

Per tal de superar els 150 MW, el nombre d'aerogeneradors funcionant X ha de ser almenys $X \geq 2$. Això és el contrari del fet que en funcioni només un o cap i, per tant, la probabilitat és

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0,1^{10} - 10 \cdot (0,1)^9 \cdot (1 - 0,1) \\ &= 1 - 0,0000000091 = 0,9999999909. \end{aligned}$$

Per a calcular $P(X = 1)$ podem, o bé argumentar amb la binomial, o bé raonar directament que hem d'escollir un dels deu generadors i imposar que aquest un funcioni i que els altres nou estiguin aturats.

3.3

Per a calcular l'àrea d'una pala, primer trobem els punts de tall entre les dues corbes:

$$2x^3 = 8x \Rightarrow 2x^3 - 8x = 0 \Rightarrow x(2x^2 - 8) = 0.$$

Obtenim les tres solucions $x = -2, 0, 2$. Per a calcular l'àrea, hem de fer les dues integrals següents (o comprovar que les funcions són antisimètriques i fer només una integral):

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 (2x^3 - 8x) dx + \int_0^2 (8x - 2x^3) dx &= \left[\frac{x^4}{2} - 4x^2 \right]_{-2}^0 + \left[4x^2 - \frac{x^4}{2} \right]_0^2 = \\ &= 0 - \frac{(-2)^4}{2} + 4(-2)^2 + 4 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{2} - 0 = 16 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Per tant, l'àrea de cada pala és de 16 metres quadrats.



Exercici 4

[2,5 punts en total]

OPCIÓ A

4.1

Per a saber l'expressió del volum, necessitem primer les dimensions de la caixa. Observant l'esquema de l'enunciat veiem que la base de la caixa serà un rectangle de llargada $\frac{80-2x}{2}$, és a dir, de $40 - x$, i d'amplada $50 - 2x$. Com que la caixa ens quedarà d'alçada x , el seu volum expressat en centímetres cúbics serà

$$V(x) = (40 - x) \cdot (50 - 2x) \cdot x = 2x^3 - 130x^2 + 2000x,$$

tal com indica l'enunciat.

4.2

Per a optimitzar el volum, calculem els extrems relatius d'aquesta funció, igualant la seva derivada a zero:

$$V'(x) = 6x^2 - 260x + 2000 = 0,$$

$$x = \frac{260 \pm \sqrt{67.600 - 48.000}}{12} = \frac{260 \pm 140}{12} = 10, \frac{100}{3}.$$

Calculem la segona derivada per a determinar el màxim $V''(x) = 12x - 260$. Com que $V''(10) < 0$ i $V''\left(\frac{100}{3}\right) > 0$, el màxim es troba en $x = 10$ cm. Això correspon a una caixa de $40 - 10 = 30$ cm de llargada, per $50 - 20 = 30$ cm d'amplada i 10 cm d'alçada, i que té volum $V(10) = 30 \cdot 30 \cdot 10 = 9.000$ cm³.



OPCIÓ B

4.1

Podem trobar el quart vèrtex de la tapa, D , de diverses maneres. Per exemple:

$$D = B + \overrightarrow{AC} = (4, 1, 5) + (0, 9, 0) = (4, 10, 5).$$

La tapa és un rectangle. La llargada serà la distància entre el punt A i el punt B :

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5 \text{ u.}$$

I l'amplada serà la distància entre el punt A i el punt C :

$$d(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + 9^2 + 0^2} = 9 \text{ u.}$$

L'Aina ha fet el croquis d'una caixa rectangular amb dos costats de 5 i 9 unitats, respectivament.

4.2

Sabem que el pla inferior π , paral·lel al pla de la tapa, té per equació $-4x + 3z = 24$. Per tant, l'alçada de la caixa és la distància de qualsevol dels punts de la tapa, per exemple el punt A , al pla π

$$d(A, \pi) = \frac{|-4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 24|}{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{|-25|}{5} = 5 \text{ u.}$$

Per tant, la caixa mesura 5 unitats d'alçada. Per a calcular el vèrtex sota del punt A , només hem de projectar A perpendicularment al pla π : la recta perpendicular a π passant per A és

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-4, 0, 3).$$

Per tant, la projecció A' del punt A al pla π serà la intersecció d'aquesta recta amb el pla π :

$$-4(1 - 4\lambda) + 3(1 + 3\lambda) = 24 \rightarrow 25\lambda - 1 = 24 \rightarrow \lambda = 1.$$

Es tracta, doncs, del punt $A' = (1, 1, 1) + (-4, 0, 3) = (-3, 1, 4)$.