



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 2

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas e indíquela en la portada.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar las páginas en blanco del final del cuaderno para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

[2,5 puntos en total]

Considere la función $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 1}$,

- 1.1. Estudie su dominio y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus posibles máximos y mínimos locales. [1 punto]
- 1.2. Calcule las ecuaciones de todas las asíntotas de esta función (si tiene) y dibuje un esbozo de su gráfica. [0.75 puntos]
- 1.3. Calcule la ecuación de la recta normal (es decir, la recta perpendicular a la tangente) a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. [0.75 puntos]

Ejercicio 2

[2,5 puntos en total]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 2x + ky + z &= 3 \\ -x + 2y + 2z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

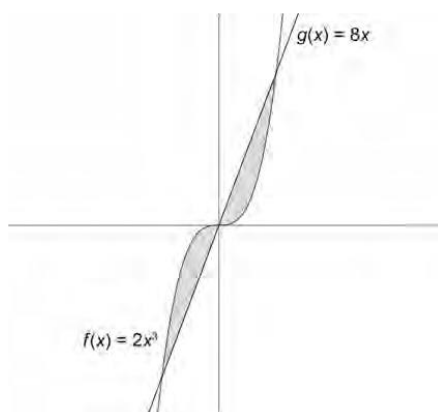
donde k es un parámetro real.

- 2.1. Discuta el sistema en función del parámetro k . [1 punto]
- 2.2. Resuelva el sistema para todos los valores de k y compruebe que, para $k \neq 1$, la solución no depende de k . [1 punto]
- 2.3. Interprete geoméricamente el resultado de los apartados anteriores. [0,5 puntos]

Ejercicio 3

[2,5 puntos en total]

Se quiere construir un parque eólico en el Solsonès, formado por 10 aerogeneradores. La empresa que los construirá está diseñando las palas según el esquema siguiente, donde x y $f(x)$ están medidos en metros (el dibujo no está a escala):



Se ha calculado que cada uno de los 10 aerogeneradores tendrá una potencia de 100 MW. Debido a varios factores, cada uno tiene una probabilidad del 10 % de estar parado, independientemente del resto de aerogeneradores.

- 3.1. ¿Cuál es la probabilidad de que se llegue a los 1 000 MW de potencia total en el parque? [0,75 puntos]
- 3.2. ¿Cuál es la probabilidad de que la potencia total del parque supere los 150 MW? [0,75 puntos]
- 3.3. Calcule el área de las palas de uno de estos aerogeneradores (parte sombreada en el gráfico). [1 punto]

Ejercicio 4

[2,5 puntos en total]

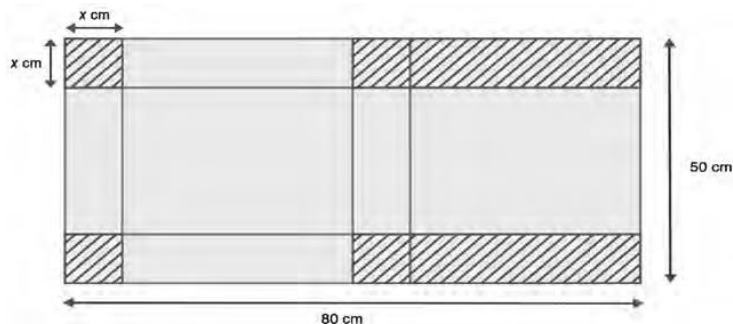
Aina quiere construir una caja de cartón en forma de prisma rectangular con tapa, para guardar la tableta y el cargador.

Escoja UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

Indique en la portada del examen la opción elegida.

OPCIÓN A

Aina construirá la caja a partir de un cartón rectangular de 80 cm $\times$ 50 cm. En la siguiente figura se muestra el desarrollo de la caja; las zonas rayadas son las partes que Aina recortará y retirará para poder montarla:



- 4.1. Compruebe que el volumen de la caja resultante es $V(x) = 2x^3 - 130x^2 + 2000x$, donde x es la longitud del lado del cuadrado que hay que recortar de las esquinas para poder montarla. [1 punto]
- 4.2. Calcule las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo. ¿Cuál es este volumen máximo? [1.5 puntos]

OPCIÓN B

Aina quiere hacer un croquis en 3D de la caja utilizando un programa informático. Para empezar, sitúa un lado de la tapa desde el vértice $A(1, 1, 1)$ hasta el vértice $B(4, 1, 5)$, y el otro lado de la tapa desde el vértice A hasta el vértice $C(1, 10, 1)$.

- 4.1.** ¿Cuáles son las coordenadas del cuarto vértice de la tapa? Calcule las longitudes de los dos lados de la tapa. [1 punto]
- 4.2.** Sabiendo que los otros cuatro vértices de la caja están situados en el plano $\pi : -4x + 3z = 24$, calcule las coordenadas de uno de ellos (cualquiera) y la altura de la caja. [1.5 puntos]

SOLUCIONES

Ejercicio 1

[2,5 puntos en total]

Considere la función $f(x) = \frac{5x}{x^2+1}$,

- 1.1. Estudie su dominio y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus posibles máximos y mínimos locales. [1 punto]
- 1.2. Calcule las ecuaciones de todas las asíntotas de esta función (si tiene) y dibuje un esbozo de su gráfica. [0.75 puntos]
- 1.3. Calcule la ecuación de la recta normal (es decir, la recta perpendicular a la tangente) a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. [0.75 puntos]

1.1. La función tiene una expresión racional y su denominador nunca se anula. El dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{5x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{5 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot 5x}{(x^2+1)^2} = \frac{5x^2+5-10x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{5-5x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5-5x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 5-5x^2 = 0 \Rightarrow 5(1-x^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los dos puntos críticos obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{5-5(-2)^2}{((-2)^2+1)^2} = \frac{-15}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{5-5 \cdot 0^2}{(0^2+1)^2} = 5 > 0$. La función crece en $(-1, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{5-5 \cdot 2^2}{(2^2+1)^2} = \frac{-15}{25} < 0$.

La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(-1, 1)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un mínimo relativo en $x=-1$ y un máximo relativo en $x=1$. Como $f(-1)=\frac{5(-1)}{(-1)^2+1}=-2.5$ y $f(1)=\frac{5\cdot 1}{1^2+1}=2.5$ las coordenadas del mínimo relativo son $(-1,-2.5)$ y las del máximo relativo son $(1,2.5)$.

1.2. Asíntota vertical. $x=a$

El dominio de la función es $\mathbb{R}$ y por tanto, no tiene asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{5}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

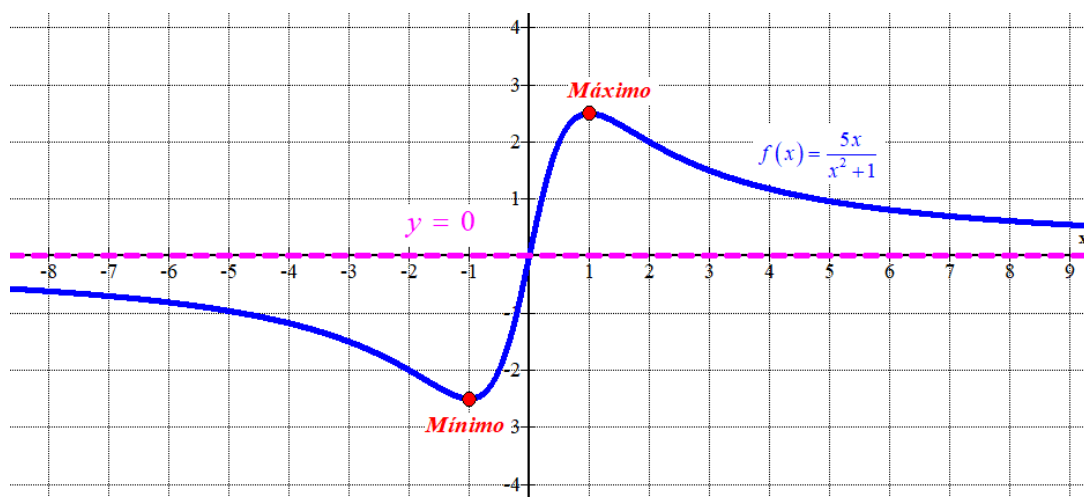
La recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

La función tiene asíntota horizontal y no puede tener asíntota oblicua.

Para dibujar la gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$f(x) = \frac{5x}{x^2+1}$
-3	-1.5
-1	-2.5
0	0
1	2.5
3	1.5



1.3. La recta normal a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$ tiene ecuación

$$y - f(2) = \frac{-1}{f'(2)}(x-2).$$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = \frac{5 \cdot 2}{2^2 + 1} = \frac{10}{5} = 2 \\ f'(2) = \frac{-15}{25} = -0.6 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = \frac{-1}{-0.6}(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}}$$

La recta normal a $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ tiene ecuación $y = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}$.

Ejercicio 2

[2,5 puntos en total]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + ky + z = 3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

donde k es un parámetro real.**2.1.** Discuta el sistema en función del parámetro k . [1 punto]**2.2.** Resuelva el sistema para todos los valores de k y compruebe que, para $k \neq 1$, la solución no depende de k . [1 punto]**2.3.** Interprete geoméricamente el resultado de los apartados anteriores. [0,5 puntos]

2.1. Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & k & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 2k - 1 - 2 + k - 4 = 3k - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3k - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{k = 1}$$

Estudiamos dos casos diferentes.

CASO 1. $k \neq 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $k = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Observamos que las columnas 2ª y 3ª

son iguales. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la

columna 3ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 3

que resulta de quitar la 2ª columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 - 3 - 6 + 2 - 2 = 0$. El rango de

A/B no es 3. El rango de la matriz ampliada es 2.

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B , pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $k \neq 1$ el sistema es **compatible determinado** y para $k = 1$ el sistema es **compatible indeterminado**.

2.2. Para $k \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + ky + z = 3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + ky + z = 3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x = 2 - y - z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4 - 2y - 2z + ky + z = 3 \\ -2 + y + z + 2y + 2z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (k-2)y - z = -1 \\ 3y + 3z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (k-2)y - z = -1 \\ y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (k-2)y - z = -1 \\ z = 1 - y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k-2)y - 1 + y = -1 \Rightarrow (k-1)y = 0 \Rightarrow \{k \neq 1 \rightarrow k-1 \neq 0\} \Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 1 - 0 = 1} \Rightarrow \boxed{x = 2 - 0 - 1 = 1}$$

La solución es $x=1$, $y=0$, $z=1$. La solución no depende del valor de k .

Para $k=1$ el sistema es compatible indeterminado. Hallamos la expresión de sus soluciones.

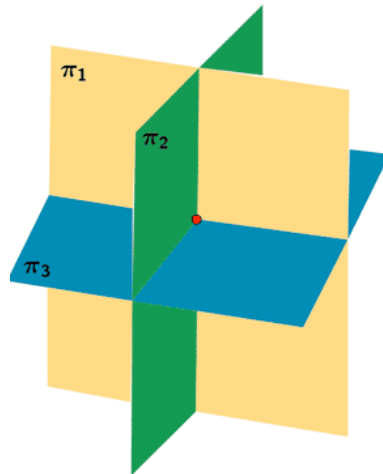
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x = 2 - y - z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4 - 2y - 2z + y + z = 3 \\ -2 + y + z + 2y + 2z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -y - z = -1 \\ 3y + 3z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow y + z = 1 \Rightarrow y = 1 - z \Rightarrow x = 2 - 1 + z - z = 1 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

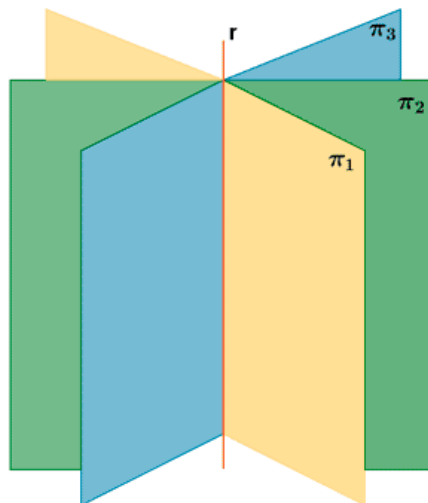
Para $k=1$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

2.3. Considerando cada ecuación como la ecuación de un plano podemos interpretar lo obtenido en el apartado anterior como:

Para $k \neq 1$ los tres planos coinciden en un punto.



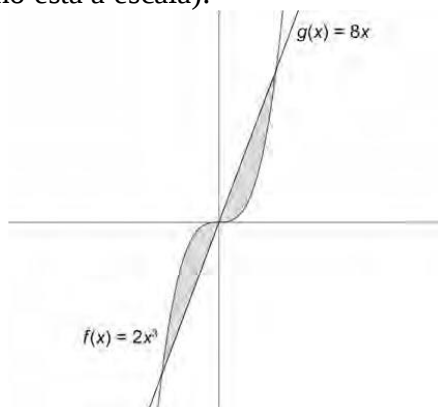
Para $k = 1$ los tres planos coinciden en una recta: $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -\lambda; \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = \lambda \end{cases}$



Ejercicio 3

[2,5 puntos en total]

Se quiere construir un parque eólico en el Solsonès, formado por 10 aerogeneradores. La empresa que los construirá está diseñando las palas según el esquema siguiente, donde x y $f(x)$ están medidos en metros (el dibujo no está a escala):



Se ha calculado que cada uno de los 10 aerogeneradores tendrá una potencia de 100 MW. Debido a varios factores, cada uno tiene una probabilidad del 10 % de estar parado, independientemente del resto de aerogeneradores.

3.1. ¿Cuál es la probabilidad de que se llegue a los 1 000 MW de potencia total en el parque? [0,75 puntos]

3.2. ¿Cuál es la probabilidad de que la potencia total del parque supere los 150 MW? [0,75 puntos]

3.3. Calcule el área de las palas de uno de estos aerogeneradores (parte sombreada en el gráfico). [1 punto]

3.1. Para conseguir 1000 MW deben funcionar los 10 aerogeneradores. La probabilidad pedida es la probabilidad de que estén funcionando los 10 aerogeneradores.

La probabilidad de que un aerogenerador esté funcionando es $1 - 0.10 = 0.9$.

Como el que funcione un aerogenerador es independiente de que funcione otro tenemos que la probabilidad de que funcionen los 10 aerogeneradores es el producto:

$$0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \cdot \dots \cdot 0.9 = 0.9^{10} \approx 0.3487$$

La probabilidad de que se llegue a los 1 000 MW de potencia total en el parque tiene un valor aproximado de 0.3487.

3.2. Llamamos X a la variable que cuenta el número de aerogeneradores que están funcionando de un grupo de 10.

Esta variable es una binomial de parámetros $n = \text{número de repeticiones} = 10$ y $p = \text{probabilidad de que un aerogenerador esté funcionando} = 0.9$. $X = B(10, 0.9)$.

Para superar los 150 MW se deben producir al menos 200 MW, es decir, deben funcionar 2 o más aerogeneradores. Debemos calcular $P(X \geq 2)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = \\ &= 1 - \binom{10}{0} 0.9^0 \cdot 0.1^{10} - \binom{10}{1} 0.9^1 \cdot 0.1^9 = 1 - 0.1^{10} - 10 \cdot 0.9 \cdot 0.1^9 = \\ &= 1 - 0.0000000091 = \boxed{0.9999999909} \end{aligned}$$

La probabilidad de que la potencia total del parque supere los 150 MW vale 0.9999999909.

3.3. Averiguamos los puntos de corte de $f(x) = 2x^3$ y $g(x) = 8x$.

$$2x^3 = 8x \Rightarrow 2x^3 - 8x = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ o \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2} \end{cases}$$

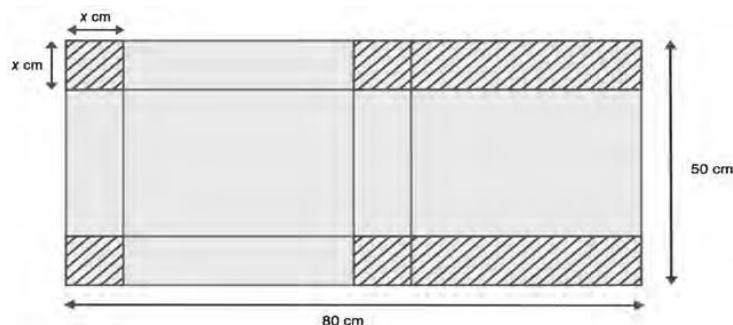
Las palas son simétricas respecto del origen de coordenadas, por lo que el área de una pala es el doble de la integral de 0 a 2 de la diferencia entre las dos funciones $8x - 2x^3$.

$$\int_0^2 8x - 2x^3 dx = \left[8 \frac{x^2}{2} - 2 \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \left[4x^2 - \frac{x^4}{2} \right]_0^2 = \left[4 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{2} \right] - \left[4 \cdot 0^2 - \frac{0^4}{2} \right] = 8$$

El área de un aspa es de $2 \cdot 8 = 16$ metros cuadrados.

Ejercicio 4 OPCIÓN A

Aina construirá la caja a partir de un cartón rectangular de $80\text{ cm} \times 50\text{ cm}$. En la siguiente figura se muestra el desarrollo de la caja; las zonas rayadas son las partes que Aina recortará y retirará para poder montarla:



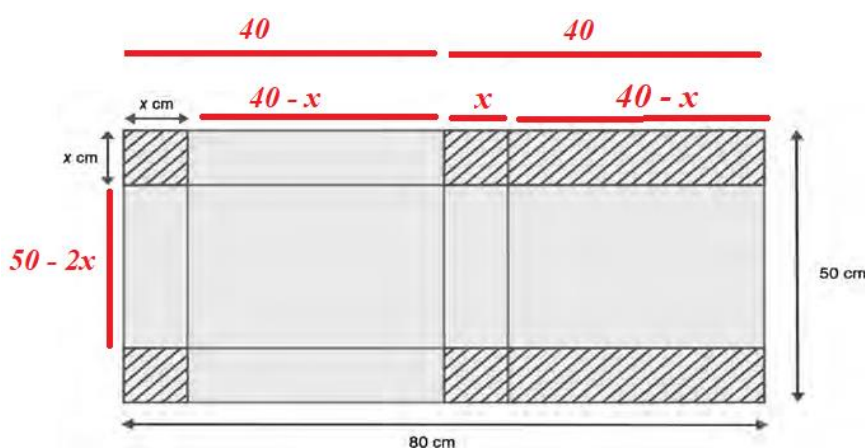
4.1. Compruebe que el volumen de la caja resultante es $V(x) = 2x^3 - 130x^2 + 2000x$, donde x es la longitud del lado del cuadrado que hay que recortar de las esquinas para poder montarla.

[1 punto]

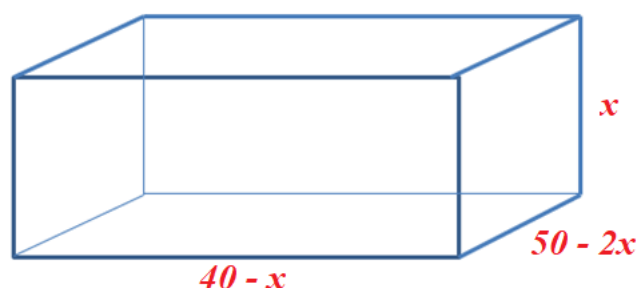
4.2. Calcule las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo. ¿Cuál es este volumen máximo?

[1.5 puntos]

4.1. Añadimos más información al dibujo proporcionado para obtener las dimensiones de la caja una vez esté montada.



La caja quedaría como se indica.



El volumen de la caja es el producto de cada uno de los lados.

$$V(x) = x(50 - 2x)(40 - x) = x(2000 - 50x - 80x + 2x^2) = 2000x - 130x^2 + 2x^3$$

4.2. Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada del volumen.

$$V(x) = 2x^3 - 130x^2 + 2000x \Rightarrow V'(x) = 6x^2 - 260x + 2000$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 260x + 2000 = 0 \Rightarrow x = \frac{260 \pm \sqrt{(-260)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2000}}{2 \cdot 6} =$$

$$= \frac{260 \pm 140}{12} = \begin{cases} \frac{260+140}{12} = \boxed{\frac{100}{3} = x} \\ \frac{260-140}{12} = \boxed{10 = x} \end{cases}$$

Sustituimos $x = 50$ y $x = \frac{100}{3}$ en la segunda derivada.

$$V'(x) = 6x^2 - 260x + 2000 \Rightarrow V''(x) = 12x - 260 \Rightarrow \begin{cases} V''(10) = 12 \cdot 10 - 260 = -140 < 0 \\ V''\left(\frac{100}{3}\right) = 12 \cdot \frac{100}{3} - 260 = 140 > 0 \end{cases}$$

Para $x = 10$ la derivada de la función volumen se anula y la segunda derivada toma valor negativo. El volumen de la caja es máximo cortando un cuadrado de 10 cm.

El volumen máximo que se puede conseguir es $V(10) = 2 \cdot 10^3 - 130 \cdot 10^2 + 2000 \cdot 10 = 9000$ centímetros cúbicos.

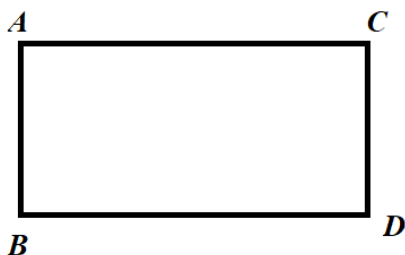
Ejercicio 4 OPCIÓN B

Aina quiere hacer un croquis en 3D de la caja utilizando un programa informático. Para empezar, sitúa un lado de la tapa desde el vértice $A(1, 1, 1)$ hasta el vértice $B(4, 1, 5)$, y el otro lado de la tapa desde el vértice A hasta el vértice $C(1, 10, 1)$.

4.1. ¿Cuáles son las coordenadas del cuarto vértice de la tapa? Calcule las longitudes de los dos lados de la tapa. [1 punto]

4.2. Sabiendo que los otros cuatro vértices de la caja están situados en el plano $\pi: -4x + 3z = 24$, calcule las coordenadas de uno de ellos (cualquiera) y la altura de la caja. [1.5 puntos]

4.1. El vértice D se puede obtener sumando al punto B el vector $\overrightarrow{AC}$ o sumando al punto C el vector $\overrightarrow{AB}$.



$$\overrightarrow{AC} = (1, 10, 1) - (1, 1, 1) = (0, 9, 0)$$

$$D = B + \overrightarrow{AC} = (4, 1, 5) + (0, 9, 0) = (4, 10, 5)$$

El cuarto vértice de la tapa tiene coordenadas $D(4, 10, 5)$.

Los lados de la tapa son el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC} = (1, 10, 1) - (1, 1, 1) = (0, 9, 0) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + 9^2 + 0^2} = 9$$

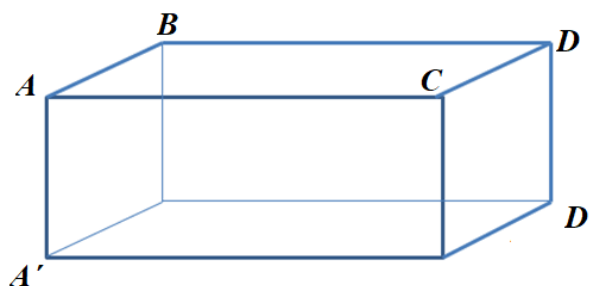
$$\overrightarrow{AB} = (4, 1, 5) - (1, 1, 1) = (3, 0, 4) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$$

La tapa de la caja mide 5 y 9 unidades de longitud.

4.2. La altura de la caja es la distancia del plano a cualquiera de los puntos A , B , C o D .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -4x + 3z - 24 = 0 \\ A(1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, \pi) = \frac{|-4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 24|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

La altura de la caja es de 5 unidades de longitud.



El vértice A' cumple que pertenece al plano $\pi: -4x + 3z = 24$ y que el vector $\overrightarrow{AA'}$ es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} A'(a, b, c) \\ A(1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = (a, b, c) - (1, 1, 1) = (a-1, b-1, c-1)$$

$$A'(a, b, c) \in \pi \Rightarrow -4a + 3c = 24 \Rightarrow 3c = 24 + 4a \Rightarrow \boxed{c = 8 + \frac{4a}{3}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AA'} = (a-1, b-1, c-1) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 9, 0) \\ \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (a-1, b-1, c-1)(0, 9, 0) = 0 \Rightarrow 9(b-1) = 0 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AA'} = (a-1, b-1, c-1) \\ \overrightarrow{AB} = (3, 0, 4) \\ \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (a-1, b-1, c-1)(3, 0, 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(a-1) + 4(c-1) = 0 \Rightarrow 3a - 3 + 4c - 4 = 0 \Rightarrow 4c = 7 - 3a \Rightarrow \boxed{c = \frac{7}{4} - \frac{3a}{4}}$$

Unimos los dos resultados obtenidos en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} c = 8 + \frac{4a}{3} \\ c = \frac{7}{4} - \frac{3a}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow 8 + \frac{4a}{3} = \frac{7}{4} - \frac{3a}{4} \Rightarrow 96 + 16a = 21 - 9a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25a = -75 \Rightarrow \boxed{a = -3} \Rightarrow \boxed{c = 8 + \frac{4(-3)}{3} = 4}$$

El vértice A' de la base tiene coordenadas $A'(-3, 1, 4)$.