

**Proves d'accés a la universitat****Matemàtiques****Serie 5**

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas e indíquela en la portada.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar las páginas en blanco del final del cuaderno para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

[2,5 puntos en total]

Considere la parábola $y = f(x)$, con $f(x) = -x^2 + 5x$ y la hipérbola $y = g(x)$ con

$$g(x) = 8 - \frac{8}{x+1}.$$

1.1. ¿En cuántos puntos se cortan las gráficas de estas dos funciones? Calcúlelos todos.

[0.75 puntos]

1.2. Calcule el área de la región situada entre las dos curvas desde $x=1$ hasta $x=3$.

[1 punto]

1.3. Compruebe que $f(x)$ tiene sus raíces en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=5$, y que la ordenada del vértice de la parábola $y = f(x)$ es $y = 6.25$. Justifique que $y = f(x)$ es la única parábola que existe con estas dos propiedades. [0.75 puntos]

Ejercicio 2

[2,5 puntos en total]

Considere las matrices $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde k es un número real

cualquiera.

2.1. Calcule los valores de k para los cuales MN es invertible. [0.75 puntos]

2.2. Calcule los valores de k para los cuales NM es invertible. [0.75 puntos]

2.3. Estudie para qué valores reales de m , n y k el sistema $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ es compatible

indeterminado. [1 punto]

Ejercicio 3

[2,5 puntos en total]

En una ciudad se ha estudiado la relación entre los hábitos de lectura y la práctica de deporte entre el alumnado de bachillerato. Para ello, se han formulado las dos preguntas siguientes al alumnado de esta etapa educativa: «¿Lees como mínimo dos libros al mes?» y «¿Practicas algún deporte al menos cuatro horas por semana?». De los resultados de la encuesta, se desprende que el 60 % leen como mínimo dos libros al mes, de los cuales el 70 % practican algún deporte un mínimo de cuatro horas por semana. También se observa que, de entre los que no leen un mínimo de dos libros al mes, el 50 % hacen menos de cuatro horas semanales de deporte. Si se elige al azar un alumno/a de bachillerato de esta ciudad:

3.1. ¿Cuál es la probabilidad de que haga deporte al menos cuatro horas semanales? [0,75 puntos]

3.2. Si se sabe que este alumno/a hace deporte menos de cuatro horas semanales, ¿cuál es la probabilidad de que lea al menos dos libros al mes? [0,75 puntos]

Alba es una estudiante de bachillerato que ha ido anotando durante todo el curso cuántas horas dedicaba a la semana a leer y cuántas a hacer deporte. Para cada semana tiene apuntado un número real x que corresponde a la cantidad de horas de lectura y que oscila entre 1 y 6, y un número real y que corresponde a la cantidad de horas de práctica deportiva. Ha observado que la relación $y = 7 - x + \ln(2x - 1)$ se ajusta bastante bien a los datos que ha anotado.

3.3. Calcule, según este modelo, cuál es el máximo y el mínimo de horas por semana que Alba ha dedicado a practicar deporte. [1 punto]

Ejercicio 4

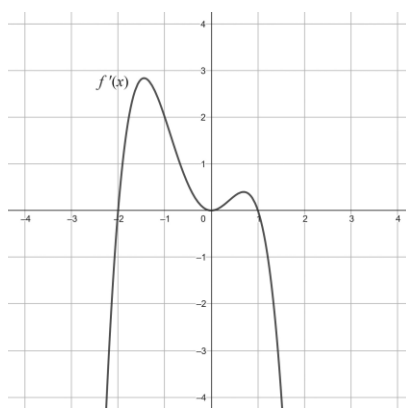
[2,5 puntos en total]

Escoja UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

Indique en la portada del examen la opción elegida.

OPCIÓN A

De una función $f(x)$, se sabe que pasa por el punto $(-1, -1)$ y que la gráfica de su función derivada es la siguiente:



4.1. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(-1, -1)$. [1 punto]

4.2. Estudie si $f(x)$ tiene puntos críticos (puntos donde $f'(x) = 0$) y, en caso de tenerlos, determine sus abscisas y clasifíquelos según sean máximos, mínimos o puntos de inflexión de $f(x)$. [1 punto]

4.3. Sabiendo, además, que $f(0) = -0.2$, calcule el área entre la gráfica de $f'(x)$ y el eje de abscisas, desde $x = -1$ hasta $x = 0$. [0.5 puntos]

OPCIÓN B

En una industria se usan brazos robóticos con sensores para medir con precisión determinadas piezas metálicas y comprobar si tienen irregularidades. Las piezas se colocan sobre la superficie determinada por el plano $\pi : (x, y, z) = (6, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 0, 1)$ y, por encima de ella, un brazo robótico desplaza un sensor desde el punto $A = (1, 2, 3)$ hasta el punto $B = (5, 3, 7)$ en línea recta (las unidades de los tres ejes de coordenadas están expresadas en centímetros).

4.1. ¿Qué distancia ha recorrido el sensor? [0,5 puntos]

4.2. Al acabar el movimiento, ¿a qué distancia de la superficie se encuentra el sensor? [1 punto]

4.3. Si el sensor siguiera moviéndose en la misma línea recta y en el mismo sentido, ¿en qué punto chocaría con la superficie? [1 punto]

SOLUCIONES

Ejercicio 1

[2,5 puntos en total]

Considere la parábola $y = f(x)$, con $f(x) = -x^2 + 5x$ y la hipérbola $y = g(x)$ con $g(x) = 8 - \frac{8}{x+1}$.

1.1. ¿En cuántos puntos se cortan las gráficas de estas dos funciones? Calcúlelos todos.

[0.75 puntos]

1.2. Calcule el área de la región situada entre las dos curvas desde $x=1$ hasta $x=3$.

[1 punto]

1.3. Compruebe que $f(x)$ tiene sus raíces en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=5$, y que la ordenada del vértice de la parábola $y = f(x)$ es $y = 6.25$. Justifique que $y = f(x)$ es la única parábola que existe con estas dos propiedades. [0.75 puntos]

1.1. Hallamos los puntos de corte de las dos gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 8 - \frac{8}{x+1} = -x^2 + 5x \Rightarrow 8(x+1) - 8 = (x+1)(-x^2 + 5x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x + 8 - 8 = -x^3 + 5x^2 - x^2 + 5x \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = x \\ \frac{4-2}{2} = 1 = x \end{cases} \end{cases}$$

$$f(0) = -0^2 + 5 \cdot 0 = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

$$f(1) = -1^2 + 5 \cdot 1 = 4 \Rightarrow B(1, 4)$$

$$f(3) = -3^2 + 5 \cdot 3 = 6 \Rightarrow C(3, 6)$$

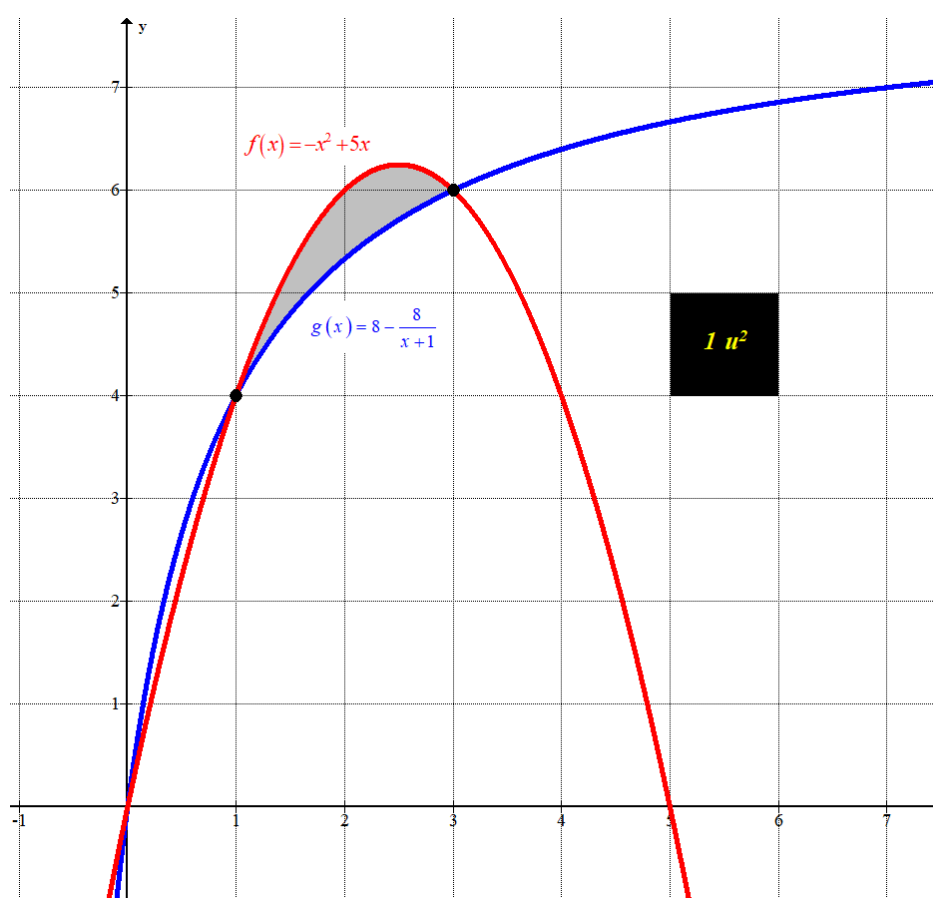
Las gráficas se cortan en tres puntos: A(0, 0), B(1, 4) y C(3, 6).

1.2. $x=1$ y $x=3$ son dos puntos de corte consecutivos de las dos gráficas. El área de la región situada entre las dos curvas desde $x=1$ hasta $x=3$ es el valor absoluto de la integral definida de 1 a 3 de la diferencia de las dos funciones. Como $g(2) = 8 - \frac{8}{2+1} = \frac{16}{3} \approx 5.33$ y $f(2) = -2^2 + 5 \cdot 2 = 6$ tomamos la diferencia $f(x) - g(x)$.

$$\int_1^3 f(x) - g(x) dx = \int_1^3 -x^2 + 5x - \left(8 - \frac{8}{x+1}\right) dx = \int_1^3 -x^2 + 5x - 8 + \frac{8}{x+1} dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 8x + 8\ln(x+1) \right]_1^3 = \left[\frac{-3^3}{3} + \frac{5 \cdot 3^2}{2} - 8 \cdot 3 + 8\ln(3+1) \right] - \\
 &- \left[\frac{-1^3}{3} + \frac{5 \cdot 1^2}{2} - 8 \cdot 1 + 8\ln(1+1) \right] = -9 + \frac{45}{2} - 24 + 8\ln 4 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 8 - 8\ln 2 = \\
 &= -25 + \frac{1}{3} + \frac{40}{2} + 8\ln 2^2 - 8\ln 2 = \frac{1}{3} - 5 + 16\ln 2 - 8\ln 2 = \boxed{\frac{-14}{3} + 8\ln 2 \approx 0.8785 \text{ u}^2}
 \end{aligned}$$

El área de la región situada entre las dos curvas desde $x=1$ hasta $x=3$ tiene un valor de $\frac{-14}{3} + 8\ln 2 \approx 0.8785$ unidades cuadradas.



1.3. Hallamos las raíces de la parábola.

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 5x = 0 \Rightarrow -x(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 \end{cases}$$

La parábola $f(x)$ tiene sus raíces en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=5$.

Como $f(0) = f(5) = 0$ el vértice de la parábola está situado en el punto medio

$$x = \frac{5-0}{2} = 2.5.$$

Para la abscisa $x = 2.5$ su ordenada es $f(2.5) = -2.5^2 + 5 \cdot 2.5 = 6.25$.

La ordenada del vértice de la parábola es $y = 6.25$.

Justificamos que la función $f(x) = -x^2 + 5x$ es la única parábola que cumple lo pedido.

Que una parábola tenga las dos raíces en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 5$ significa que la parábola debe tener ecuación $h(x) = m(x-0)(x-5) = m(x^2 - 5x)$.

Pero además sabemos que el vértice de la parábola está en el punto de abscisa intermedio entre 0 y 5, por lo que el vértice de la parábola está situado en $x = 2.5$. Si debe tener ordenada $y = 6.25$ entonces debe ser $h(2.5) = 6.25$.

$$\left. \begin{array}{l} h(2.5) = 6.25 \\ h(x) = m(x^2 - 5x) \end{array} \right\} \Rightarrow 6.25 = m(2.5^2 - 5 \cdot 2.5) \Rightarrow 6.25 = m \cdot (-6.25) \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

La parábola que cumple todo es $h(x) = -1(x^2 - 5x) = -x^2 + 5x = f(x)$.

La parábola que cumple todo lo pedido es única.

Ejercicio 2

[2,5 puntos en total]

Considere las matrices $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde k es un número real

cualquiera.

2.1. Calcule los valores de k para los cuales MN es invertible. [0.75 puntos]**2.2.** Calcule los valores de k para los cuales NM es invertible. [0.75 puntos]

2.3. Estudie para qué valores reales de m , n y k el sistema $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ es compatible

indeterminado. [1 punto]

2.1. Obtenemos la matriz MN .

$$MN = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+3k-3+0 & 3+0+0 \\ 3k-3-k+1+0 & k-1+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k+6 & 3 \\ 2k-2 & k-3 \end{pmatrix}$$

La matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|MN| = \begin{vmatrix} 3k+6 & 3 \\ 2k-2 & k-3 \end{vmatrix} = (3k+6)(k-3) - 3(2k-2) =$$

$$= 3k^2 - 9k + 6k - 18 - 6k + 6 = 3k^2 - 9k - 12$$

$$|MN| = 0 \Rightarrow 3k^2 - 9k - 12 = 0 \Rightarrow k^2 - 3k - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 = k \\ \frac{3-5}{2} = -1 = k \end{cases}$$

La matriz MN es invertible para cualquier valor de k distinto de -1 y 4 .**2.2.** Obtenemos la matriz NM .

$$NM = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+k-1 & 9-1 & 0-1 \\ 3k-3+0 & 3k-3-0 & 0+0 \\ 0+2k-2 & 0-2 & 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 3k-3 & 3k-3 & 0 \\ 2k-2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$\begin{aligned}
 |NM| &= \begin{vmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 3k-3 & 3k-3 & 0 \\ 2k-2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (3k-3) \begin{vmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2k-2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \\
 &= (3k-3)(-2(k+8)+0+2+(2k-2)+16+0) = \\
 &= 3(k-1)(-2k-16+2+2k-2+16) = 0
 \end{aligned}$$

La matriz NM tiene determinante nulo independientemente del valor de k .

La matriz NM no es invertible para ningún valor de k .

2.3. Obtenemos la expresión del sistema planteado.

$$\begin{aligned}
 M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left. \begin{aligned} 3x+3y &= m \\ (k-1)x-y-z &= n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x+y &= \frac{m}{3} \\ (k-1)x-y-z &= n \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Intentamos resolver el sistema.

$$\left. \begin{aligned} x+y &= \frac{m}{3} \\ (k-1)x-y-z &= n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y &= \frac{m}{3} - x \\ (k-1)x-y-z &= n \end{aligned} \right\} \Rightarrow (k-1)x - \left(\frac{m}{3} - x\right) - z = n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kx - x - \frac{m}{3} + x - z = n \Rightarrow kx - z = n + \frac{m}{3} \Rightarrow \boxed{kx - n - \frac{m}{3} = z} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{m}{3} - \lambda \\ z = -n - \frac{m}{3} + k\lambda \end{cases}}$$

El sistema es compatible indeterminado independientemente de los valores de m , n y k ,

$$\text{teniendo sus soluciones la expresión } \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{m}{3} - \lambda \\ z = -n - \frac{m}{3} + k\lambda \end{cases}, \text{ para cualquier valor } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 3

[2,5 puntos en total]

En una ciudad se ha estudiado la relación entre los hábitos de lectura y la práctica de deporte entre el alumnado de bachillerato. Para ello, se han formulado las dos preguntas siguientes al alumnado de esta etapa educativa: «¿Lees como mínimo dos libros al mes?» y «¿Practicas algún deporte al menos cuatro horas por semana?». De los resultados de la encuesta, se desprende que el 60 % leen como mínimo dos libros al mes, de los cuales el 70 % practican algún deporte un mínimo de cuatro horas por semana. También se observa que, de entre los que no leen un mínimo de dos libros al mes, el 50 % hacen menos de cuatro horas semanales de deporte. Si se elige al azar un alumno/a de bachillerato de esta ciudad:

3.1. ¿Cuál es la probabilidad de que haga deporte al menos cuatro horas semanales? [0,75 puntos]

3.2. Si se sabe que este alumno/a hace deporte menos de cuatro horas semanales, ¿cuál es la probabilidad de que lea al menos dos libros al mes?

[0,75 puntos]

Alba es una estudiante de bachillerato que ha ido anotando durante todo el curso cuántas horas dedicaba a la semana a leer y cuántas a hacer deporte. Para cada semana tiene apuntado un número real x que corresponde a la cantidad de horas de lectura y que oscila entre 1 y 6, y un número real y que corresponde a la cantidad de horas de práctica deportiva. Ha observado que la relación $y = 7 - x + \ln(2x - 1)$ se ajusta bastante bien a los datos que ha anotado.

3.3. Calcule, según este modelo, cuál es el máximo y el mínimo de horas por semana que Alba ha dedicado a practicar deporte.

[1 punto]

3.1. Consideramos L al suceso “el estudiante elegido lee como mínimo dos libros al mes” y D a “el estudiante elegido practica algún deporte al menos cuatro horas por semana”.

El 60 % leen como mínimo dos libros al mes $\rightarrow P(L) = 0.6$

El 60 % leen como mínimo dos libros al mes, de los cuales el 70 % practican algún deporte un mínimo de cuatro horas por semana $\rightarrow P(D/L) = 0.7$.

De entre los que no leen un mínimo de dos libros al mes (40%), el 50 % hacen menos de cuatro horas semanales de deporte $\rightarrow P(D^c/L^c) = 0.5$.

Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\left. \begin{array}{l} P(D/L) = 0.7 \\ P(L) = 0.6 \\ P(D/L) = \frac{P(D \cap L)}{P(L)} \end{array} \right\} \Rightarrow 0.7 = \frac{P(D \cap L)}{0.6} \Rightarrow \boxed{P(D \cap L) = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(D^c/L^c) = 0.5 \\ P(L^c) = 1 - 0.6 = 0.4 \\ P(D^c/L^c) = \frac{P(D^c \cap L^c)}{P(L^c)} \end{array} \right\} \Rightarrow 0.5 = \frac{P(D^c \cap L^c)}{0.4} \Rightarrow \boxed{P(D^c \cap L^c) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2}$$

Tenemos que $P(D \cap L) = 0.42$ y $P(D^c \cap L^c) = 0.2$. Aplicamos una de las leyes de Morgan y la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(D^c \cap L^c) = 0.2 \Rightarrow P((D \cup L)^c) = 0.2 \Rightarrow P(D \cup L) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$\left. \begin{array}{l} P(L) = 0.6 \\ P(D \cap L) = 0.42 \\ P(D \cup L) = 0.8 \\ P(D \cup L) = P(D) + P(L) - P(D \cap L) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.8 = P(D) + 0.6 - 0.42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(D) = 0.8 - 0.18 = 0.62}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Supongamos que son 100 los estudiantes. Si el 60 % leen como mínimo dos libros al mes, de los cuales el 70 % practican algún deporte un mínimo de cuatro horas por semana entonces 60 estudiantes leen como mínimo dos libros al mes y $0.7 \cdot 60 = 42$ leen como mínimo dos libros al mes y practican algún deporte un mínimo de 4 horas por semana.

De entre los que no leen un mínimo de dos libros al mes ($100 - 60 = 40$), el 50 % hacen menos de cuatro horas semanales de deporte entonces 20 no leen un mínimo de dos libros al mes y hacen menos de cuatro horas semanales de deporte.

Ponemos los datos proporcionados en una tabla.

	Leen	No leen	
Hacen deporte	42		
No hacen deporte		20	
	60	40	100

Completamos la tabla.

	Leen	No leen	
Hacen deporte	42	20	62
No hacen deporte	18	20	38
	60	40	100

La probabilidad de que el estudiante elegido al azar haga deporte al menos cuatro horas semanales vale $\frac{62}{100} = 0.62$.

3.2. Debemos calcular $P(L / D^c)$.

Obtenemos la probabilidad pedida mirando los datos de la tabla.

Tenemos que hay 38 estudiantes que no hacen deporte y 18 de ellos leen al menos 2 libros al mes. La probabilidad pedida vale $\frac{18}{38} = \frac{9}{19} \approx 0.4737$.

Obtenemos la probabilidad pedida usando las fórmulas.

$$P(L / D^c) = \frac{P(L \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(L) - P(L \cap D)}{1 - P(D)} = \frac{0.6 - 0.42}{1 - 0.62} = \frac{9}{19} \approx 0.4737$$

3.3. Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$y = 7 - x + \ln(2x - 1) \Rightarrow y' = -1 + \frac{2}{2x-1} = \frac{-2x+1+2}{2x-1} = \frac{3-2x}{2x-1}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{3-2x}{2x-1} = 0 \Rightarrow 3-2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2} = 1.5}$$

Sustituimos el valor del punto crítico obtenido en la segunda derivada.

$$y' = \frac{3-2x}{2x-1} \Rightarrow y'' = \frac{-2 \cdot (2x-1) - 2(3-2x)}{(2x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''(1.5) = \frac{-2 \cdot (2 \cdot 1.5 - 1) - 2(3 - 2 \cdot 1.5)}{(2 \cdot 1.5 - 1)^2} = \frac{-4}{4} = -1 < 0$$

La función tiene un máximo relativo en $x = 1.5$.

Valoramos la función en el punto crítico y en los extremos del intervalo de definición $[1, 6]$.

$$\left. \begin{aligned} y(1) &= 7 - 1 + \ln(2 \cdot 1 - 1) = 6 + \ln 1 = 6 \\ y(1.5) &= 7 - 1.5 + \ln(2 \cdot 1.5 - 1) = 5.5 + \ln 2 \approx \mathbf{6.19 \text{ Máximo}} \\ y(6) &= 7 - 6 + \ln(2 \cdot 6 - 1) = 1 + \ln 11 \approx \mathbf{3.39 \text{ Mínimo}} \end{aligned} \right\}$$

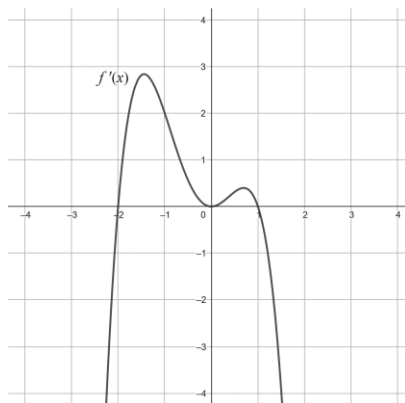
El número mínimo de horas que dedica al deporte son 3.39 horas y el máximo es de 6.19 horas.

Ejercicio 4

[2,5 puntos en total]

OPCIÓN A

De una función $f(x)$, se sabe que pasa por el punto $(-1, -1)$ y que la gráfica de su función derivada es la siguiente:



- 4.1. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(-1, -1)$. [1 punto]
- 4.2. Estudie si $f(x)$ tiene puntos críticos (puntos donde $f'(x) = 0$) y, en caso de tenerlos, determine sus abscisas y clasifíquelos según sean máximos, mínimos o puntos de inflexión de $f(x)$. [1 punto]
- 4.3. Sabiendo, además, que $f(0) = -0.2$, calcule el área entre la gráfica de $f'(x)$ y el eje de abscisas, desde $x = -1$ hasta $x = 0$. [0.5 puntos]

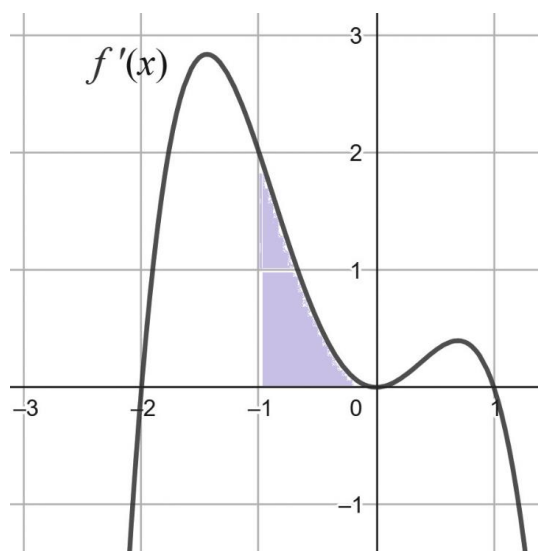
4.1. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(-1, -1)$ es $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$. Sabemos que la gráfica de la función pasa por el punto $(-1, -1)$, por lo que $f(-1) = -1$. La gráfica de la derivada pasa por el punto $(-1, 2)$, por lo que $f'(-1) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} f'(-1) = 2 \\ f(-1) = -1 \\ y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)) \end{array} \right\} \Rightarrow y - (-1) = 2(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = 2x + 1}$$

La recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(-1, -1)$ tiene ecuación $y = 2x + 1$

- 4.2. Observando la gráfica de la derivada de la función sabemos que en $x = -2$, en $x = 0$ y en $x = 1$ la derivada corta el eje de abscisas y se anula.
 En $x = -2$ la función derivada pasa de negativa a positiva, por lo que la función pasa de decrecer a crecer. En $x = -2$ la función tiene un mínimo relativo.
 En $x = 0$ la función derivada no cambia de signo, manteniéndose positiva, por lo que la función es creciente. La función en $x = 0$ no tiene ni un máximo ni un mínimo. La derivada tiene una gráfica que nos indica que pasa de decrecer ($f''(x) < 0$) a crecer ($f''(x) > 0$), por lo que $f''(0) = 0$ y la gráfica de $f(x)$ pasa de cóncava a convexa. En $x = 0$ la función tiene un punto de inflexión.
 En $x = 1$ la función derivada pasa de positiva a negativa, por lo que la función pasa de crecer a decrecer. En $x = 1$ la función tiene un máximo relativo.

- 4.3. El área que debemos calcular tiene un valor menor que 1 unidad cuadrada.



Calculamos su valor exacto haciendo uso del cálculo integral. Este área es el valor de la integral definida de -1 a 0 de $f'(x)$.

$$\text{Área} = \int_{-1}^0 f'(x) dx = [f(x)]_{-1}^0 = f(0) - f(-1) = -0.2 - (-1) = \boxed{0.8 \text{ u}^2}$$

Ejercicio 4

[2,5 puntos en total]

OPCIÓN B

En una industria se usan brazos robóticos con sensores para medir con precisión determinadas piezas metálicas y comprobar si tienen irregularidades. Las piezas se colocan sobre la superficie determinada por el plano $\pi: (x, y, z) = (6, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 0, 1)$ y, por encima de ella, un brazo robótico desplaza un sensor desde el punto $A = (1, 2, 3)$ hasta el punto $B = (5, 3, 7)$ en línea recta (las unidades de los tres ejes de coordenadas están expresadas en centímetros).

4.1. ¿Qué distancia ha recorrido el sensor? [0,5 puntos]

4.2. Al acabar el movimiento, ¿a qué distancia de la superficie se encuentra el sensor? [1 punto]

4.3. Si el sensor siguiera moviéndose en la misma línea recta y en el mismo sentido, ¿en qué punto chocaría con la superficie? [1 punto]

4.1. Hallamos la distancia entre los puntos A y B como el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} A = (1, 2, 3) \\ B = (5, 3, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (5, 3, 7) - (1, 2, 3) = (4, 1, 4)$$

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{33} \text{ cm}$$

El sensor recorre $\sqrt{33} \approx 5.74$ centímetros.

4.2. Hallamos la distancia del punto B al plano donde están situadas las piezas.

$$\pi: (x, y, z) = (6, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 0, 1) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \mu \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 6 = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \mu \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 1 + x - 6 \\ z = 1 + \mu \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: x - y - 5 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} B = (5, 3, 7) \\ \pi: x - y - 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(B, \pi) = \frac{|5 - 3 - 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

Al acabar el movimiento el sensor se encuentra a $\frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2.12$ centímetros de la superficie.

4.3. Hallamos la ecuación de la recta definida por los puntos A y B.

$$\left. \begin{array}{l} A = (1, 2, 3) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (4, 1, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 + 4\alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte del plano π y la recta r .

$$\pi : x - y - 5 = 0$$
$$r : \begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 + 4\alpha \end{cases} \Rightarrow 1 + 4\alpha - 2 - \alpha - 5 = 0 \Rightarrow 3\alpha = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 4 \cdot 2 = 9 \\ y = 2 + 2 = 4 \\ z = 3 + 4 \cdot 2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(9, 4, 11)}$$

El sensor chocaría con la superficie en el punto $P(9, 4, 11)$.