

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. Un virus estomacal presenta como síntomas diarreas y fiebres en un 95 % de los infectados. En un momento de presión asistencial en la Comunidad de Madrid, 40 de cada mil habitantes están infectados por dicho virus. Por otro lado, un 0.5 % de la población no infectada por el virus presenta los mismos síntomas por otras causas.

- a) (1 punto) Una persona tiene los síntomas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté infectado por el virus estomacal?
- b) (1 punto) Dadas dos personas que tienen los síntomas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas tenga el virus?

Pregunta 2. La potencia instantánea en el momento t , $P(t)$, es la derivada de la energía producida hasta el momento t . Una instalación fotovoltaica doméstica en un día despejado genera una potencia en kilovatios (kW) que se modeliza por la siguiente función con respecto a la hora del día $t \in [0, 24)$:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ 3 + 3 \sin\left(\frac{\pi}{8}(t - 12)\right) & \text{si } 8 \leq t \leq 20 \\ 0 & \text{si } 20 < t < 24 \end{cases}.$$

- a) (1 punto) Determine cuándo esa potencia aumenta y cuándo disminuye. ¿Cuál es el momento del día en que la instalación entrega su potencia máxima?
- b) (1 punto) Halle la energía producida a lo largo del día en kilovatios hora (kWh).

Pregunta 3. Sea S el conjunto formado por todas las matrices reales 2×2 triangulares superiores para las que el elemento que ocupa el lugar $(2, 2)$ de la matriz es la suma de los elementos de su primera fila, es decir,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \mid \text{con } a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

- a) (1 punto) Pruebe que si A y B son dos matrices cualesquiera del conjunto S , AB está en S .
- b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 - b1) Determine para qué valores de a y b las matrices de S son invertibles. Pruebe que si una matriz de S tiene inversa, esta es también una matriz de S .
 - b2) Calcule todas las matrices A de S tales que $A^2 = A$.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 4.1. Sean la recta $r \equiv (x, y, z) = (1 + t, 1 + t, 1 + t), t \in \mathbb{R}$, y el plano $\pi : x + y + z = 0$.

- a) (1 punto) Determine la posición relativa de la recta r y el plano π .
- b) (1 punto) Halle los puntos de la recta r que se encuentran a distancia $\sqrt{3}$ del plano π .

Pregunta 4.2. Sea la recta $r \equiv (x, y, z) = (t, 1, t), t \in \mathbb{R}$. Se pide:

- a) (1 punto) Hallar dos planos que se corten en la recta r , que formen entre sí un ángulo de 90° y uno de ellos pase por el punto $(0, 0, 1)$.
- b) (1 punto) Justificar que todas las rectas contenidas en los dos planos obtenidos en el apartado anterior que no tienen puntos en común con la recta r son necesariamente paralelas entre sí.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 5.1. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - a}$, donde a es un parámetro real.

- a) (1 punto) Halle el valor de a para que la gráfica de $f(x)$ presente una asíntota vertical en $x = 2$. Para dicho valor, estudie el resto de asíntotas de la gráfica.
- b) (1 punto) Obtenga los valores de a para los cuales la gráfica de la función no presenta asíntotas verticales.

Pregunta 5.2. (2 puntos) Para la función $f(x) = \sin(\pi|x^2 - 1|)$, calcule

$$\int_0^2 x f(x) dx .$$

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

1.

a) Identificación de datos: 0.3 puntos (0.1 puntos por cada probabilidad correcta). Identificación del suceso: 0.1 puntos. Probabilidad total: 0.3 puntos (uso de la fórmula: 0.2 puntos, respuesta correcta: 0.1 puntos). Probabilidad condicionada: 0.3 puntos (uso de la fórmula: 0.2 puntos, respuesta correcta: 0.1 puntos).

b) Identificación de la binomial: 0.1 puntos. Parámetros correctos de la binomial: 0.2 puntos. Identificación del suceso: 0.3 puntos. Cálculo de la probabilidad: 0.4 puntos (planteamiento: 0.2 puntos, respuesta correcta: 0.2 puntos). (Si el valor hallado en **a)** es erróneo, las calificaciones se otorgan en **b)** para dicho valor).

2.

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento: 0.5 puntos. Tiempo de potencia máxima: 0.5 puntos.

b) Planteamiento de la integral: 0.2 puntos. Primitiva correcta: 0.3 puntos. Regla de Barrow: 0.3 puntos. Respuesta correcta: 0.2 puntos.

3.

a) Elección de dos matrices generales de S : 0.2 puntos. Multiplicación AB : 0.3 puntos. Probar que AB está en S : 0.5 puntos. Si toman $A = B$ y comprueban correctamente que AB está en S se otorgan como máximo 0.4 puntos.

b1) Determinación de los valores a y b : 0.2 puntos. Cálculo de la inversa: 0.5 puntos. Comprobar que la matriz inversa está en S : 0.3 puntos.

b2) Matriz nula: 0.2 puntos. Matriz identidad: 0.2 puntos. Para las otras dos matrices: 0.3 puntos cada matriz (planteamiento: 0.2 puntos, resolución: 0.1 puntos).

4.1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Utilización de la fórmula de la distancia de un punto al plano: 0.2 puntos. Ecuación con valor absoluto: 0.2 puntos. Obtención de las dos ecuaciones a resolver: 0.2 puntos. Cada valor de t : 0.1 puntos. Cada punto correcto: 0.1 puntos.

4.2.

a) Justificación de que el vector director de la recta r está en ambos planos: 0.2 puntos. Determinación de los otros dos vectores directores para obtener los planos: 0.2 puntos por vector. Ecuación de los planos: 0.2 puntos por plano (planteamiento: 0.1 puntos, respuesta correcta: 0.1 puntos).

b) Justificación de que cada recta descrita de los planos es paralela a r : 0.5 puntos. Justificación de paralelismo entre las rectas: 0.5 puntos.

5.1.

a) Planteamiento para la obtención de a : 0.3 puntos. Obtención de a : 0.2 puntos. Justificación de que solo puede haber otra asíntota y esta es oblicua: 0.1 puntos. Obtención de la pendiente de la asíntota oblicua: 0.2 puntos. Obtención de la ordenada del origen: 0.2 puntos.

b) Justificación: 0.4 puntos. Obtención de algún valor de a : 0.4 puntos. Obtención del otro valor de a : 0.2 puntos.

5.2.

Integral a resolver escrita como suma de dos integrales: 0.8 puntos. Primitivas correctas: 0.8 puntos. Regla de Barrow: 0.2 puntos. Respuesta correcta: 0.2 puntos.

MATEMÁTICAS II-SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

1.

a) Sea V el suceso tener el virus, S tener los síntomas, $\bar{V}$ no tener el virus. De los datos se sabe que $P(V) = 0.04$, $P(S|V) = 0.95$, $P(\bar{V}) = 0.96$, $P(S|\bar{V}) = 0.005$. Por el Teorema de Probabilidad Total se halla la probabilidad de tener los síntomas:

$$P(S) = P(S|V) \cdot P(V) + P(S|\bar{V}) \cdot P(\bar{V}) = 0.0428.$$

Por la definición de probabilidad condicionada:

$$P(V|S) = \frac{P(V \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S|V) \cdot P(V)}{P(S)} \approx 0.8879.$$

b) Sea $X \sim B(2, p)$ con $p = 0.8879$, se tiene que calcular $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^2 \approx 0.9874$.

2.

a) A partir de la gráfica de $P(t)$ o de su derivada se deduce que la potencia crece de (8, 16) horas, decrece (16, 20). La máxima potencia se obtiene a las 16 horas.

b) La energía producida al día es

$$E = \int_8^{20} \left(3 + 3 \sin \left(\frac{\pi}{8}(t - 12) \right) \right) dt = \left[3t - \frac{24}{\pi} \cos \left(\frac{\pi}{8}(t - 12) \right) \right]_8^{20} = 36 + \frac{24}{\pi} \approx 43.6394 \text{ kWh}.$$

3.

a) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c+d \end{pmatrix}$, se tiene $AB = \begin{pmatrix} ac & ad+bc+bd \\ 0 & ac+ad+bc+bd \end{pmatrix}$ que es una matriz de S .

b1) Las matrices de S que tienen inversa son aquellas para las que $a \neq 0$ y $a \neq -b$. En ese caso, la inversa es $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a(a+b)} \\ 0 & \frac{1}{a+b} \end{pmatrix}$, que es una matriz de S puesto que $\frac{1}{a} - \frac{b}{a(a+b)} = \frac{1}{a+b}$.

b2) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(2a+b) \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$. Para que $A = A^2$, se tienen que dar las condiciones $a^2 = a$, $(a+b)^2 = a+b$ y $b = b(2a+b)$. De la última ecuación se deduce que $b = 0$ o $2a+b = 1$. Para $b = 0$, se obtienen las matrices nula e identidad (a debe ser 1 o 0). Si $2a+b = 1$, como $a = 0$ o 1, se obtienen las matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.1.

a) El vector director de la recta r es $(1, 1, 1)$, que coincide con el vector normal del plano π . Por tanto, la recta y el plano se cortan en punto que es el $(0, 0, 0)$.

b) La distancia de un punto de r , $(1+t, 1+t, 1+t)$, al plano es $\frac{3|1+t|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow |1+t| = 1 \Rightarrow t = 0$ o $t = -2$. Los puntos son $(1, 1, 1)$ y $(-1, -1, -1)$.

4.2.

a) Uno de los planos, π_1 , tendrá como primer vector director al de la recta $(1, 0, 1)$, y como segundo vector director a $(0, 0, 1) - (0, 1, 0) = (0, -1, 1)$. El vector normal a π_1 se obtiene como el producto vectorial $\vec{n}_1 = (0, -1, 1) \times (1, 0, 1) = (-1, 1, 1)$. Dado que el plano pasa por el punto $(0, 1, 0)$ de r su ecuación es $-x + y + z = 1$. El segundo plano pasa también por el punto $(0, 1, 0)$ de la recta y tiene como vector normal $\vec{n}_2 = (-1, 1, 1) \times (1, 0, 1) = (1, 2, -1)$, por lo que su ecuación es $x + 2y - z = 2$.

b) Sean π_1 y π_2 los dos planos del apartado anterior. Si r_1 es una recta contenida en π_1 , como la recta r está también contenida en π_1 y no tiene puntos en común con r_1 , entonces r_1 y r son paralelas. De la misma manera si r_2 es una recta contenida en π_2 , esta tiene que ser paralela a r . Por lo tanto r_1 es paralela a r_2 puesto que ambas son paralelas a r .

5.1.

a) Para que exista una asíntota vertical en $x = 2$, el denominador debe anularse en ese punto (y el numerador debe ser distinto de cero). Luego, $3 \cdot 2 - a = 0$ y $a = 6$. No hay más asíntotas verticales. Asíntotas horizontales no tiene. Asíntotas oblicuas, sí tiene: $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3}$ y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \frac{2}{3}$, es decir, $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

b) Para que no haya asíntota vertical, el numerador $(x^2 - 1)$ debe anularse donde lo hace el denominador, es decir, en $x = a/3$. Las raíces del numerador son $x = 1$ y $x = -1$, luego basta con que el denominador se anule en uno de estos puntos para tener una discontinuidad evitable, es decir, a puede tomar los valores 3 y -3 .

5.2.

Como función a trozos en el intervalo $[0, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi(1 - x^2)) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \operatorname{sen}(\pi(x^2 - 1)) & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^2 x f(x) dx &= \int_0^1 x \operatorname{sen}(\pi(1 - x^2)) dx + \int_1^2 x \operatorname{sen}(\pi(x^2 - 1)) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2\pi} \cos(\pi(1 - x^2)) \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2\pi} \cos(\pi(x^2 - 1)) \right]_1^2 = \frac{1}{2\pi}(1 - (-1)) - \frac{1}{2\pi}(-1 - 1) \\ &= \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$