MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Comunidad de ANDALUCÍA



PAU 2017 a 2026

(36 exámenes resueltos)

WWW.EBAUMATEMATICAS.COM

En este cuaderno de ejercicios se recopilan los enunciados y las soluciones de 36 exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad de Andalucía desde el año 2017 al 2026. Juan Antonio Martínez García es el autor de estas soluciones. Ha sido profesor de matemáticas en Educación Secundaria.
En la web www.ebaumatematicas.com hay más exámenes resueltos de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II en Andalucía. También hay exámenes resueltos de otras comunidades autónomas de España.

PAU 2026 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II 3
PAU 2026 Extraordinaria (suplente 1) Matemáticas CC.SS. II 16
PAU 2026 Extraordinaria (suplente 2) Matemáticas CC.SS. II 31
PAU 2026 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II 45
PAU 2026 Ordinaria (suplente 1) Matemáticas CC.SS. II 60
PAU 2026 Ordinaria (suplente 2) Matemáticas CC.SS. II 75
PAU 2025 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II 88
PAU 2025 Extraordinaria Suplente 1 Matemáticas CC.SS. II 101
PAU 2025 Extraordinaria Suplente 2 Matemáticas CC.SS. II 114
PAU 2025 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II 129
PAU 2025 Ordinaria Suplente 1 Matemáticas CC.SS. II 145
PAU 2025 Ordinaria Suplente 2 Matemáticas CC.SS. II 162
PevAU 2024 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II 177
PevAU 2024 Extraordinaria (suplente) Matemáticas CC.SS. II 196
PevAU 2024 Extraordinaria (reserva) Matemáticas CC.SS. II 213
PevAU 2024 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II 231
PevAU 2024 Ordinaria (suplente) Matemáticas CC.SS. II 249
PevAU 2024 Ordinaria (reserva) Matemáticas CC.SS. II 265
PevAU 2023 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II 280
PevAU 2023 Extraordinaria (suplente) Matemáticas CC.SS. II 298
PevAU 2023 Extraordinaria (reserva) Matemáticas CC.SS. II 314
PevAU 2023 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II 331
PevAU 2023 Ordinaria (suplente) Matemáticas CC.SS. II 347
PevAU 2023 Ordinaria (reserva) Matemáticas CC.SS. II 362
PevAU 2022 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II 379
PevAU 2022 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II 397
PevAU 2021 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II 411
PevAU 2021 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II 425
PevAU 2020 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II 439
PevAU 2020 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II 453
PevAU 2019 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II 466
PevAU 2019 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II 478
PevAU 2018 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II 493
PevAU 2018 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II 507
PevAU 2017 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II 519
PevAU 2017 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II 532

PAU 2026 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** **CURSO 2025-2026**	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Esta prueba consta de 4 ejercicios.
c) En algunos ejercicios se da la posibilidad de elegir entre apartado A) o B). Responda sólo el apartado **que elija. En caso contrario, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar**
d) En cada ejercicio o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
e) Todos los resultados deben estar **suficientemente justificados**.
f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos.
g) La valoración de la corrección gramatical, léxica y ortográfica, así como la presentación del texto no será superior al 10 %.

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & m & 0\\ -1 & m & 2\\ 0 & m & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$

a) **(0.75 puntos)** Calcule los valores de *m* para que el rango de la matriz A sea 3.
b) **(1.75 puntos)** Para $m=1$, resuelva la ecuación matricial $A^t\cdot X-B^2=2\cdot X$.
c) **(0.5 puntos)** ¿Es posible encontrar una matriz D que satisfaga $C^t\cdot A=B\cdot D$?

EJERCICIO 2 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) Los ingresos (en miles de euros) de una empresa que opera en mercados financieros en los últimos años vienen dados por la función

$$f(t)=-t^3+\frac{21}{2}t^2-30t+80;\ \ 1\le t\le 6$$

siendo t el tiempo medido en años.

a) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de tiempo en los que los ingresos aumentaron y los intervalos en los que disminuyeron.
b) **(0.75 puntos)** Calcule los momentos en los que la empresa obtuvo el mayor y el menor ingreso, así como los valores correspondientes.
c) **(1.5 puntos)** Estudie la evolución de los ingresos de la empresa, obteniendo sus puntos de inflexión, realizando su gráfica e interpretándola.

B) El coste en euros de producción de *x* toneladas de un determinado producto en una factoría es

$$C(x)=0.2x^2+40x+5000$$

El ingreso por venta es de 150 euros por tonelada. Se vende todo lo que se produce.

a) **(0.25 puntos)** Calcule la función *B(x)* que expresa el beneficio obtenido al vender *x* toneladas del producto.
b) **(1 punto)** Halle la cantidad de toneladas de producto que debe venderse para maximizar el beneficio. Obtenga dicho beneficio.

c) **(1.25 puntos)** Obtenga el beneficio cuando no hay producción y calcule para qué valores de la producción el beneficio es positivo. ¿Para qué producción se obtiene un beneficio de 4000 €?
d) **(0.5 puntos)** Estudie cuando los beneficios van aumentando y cuándo van disminuyendo.

EJERCICIO 3 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) Una urna contiene bolas de tres colores, siendo el 30% rojas, el 20% blancas y el resto azules. Algunas bolas están premiadas: de cada 4 bolas rojas 1 contiene un premio de 20 €, de cada 2 bolas blancas 1 contiene un premio de 10 €, todas las bolas azules tienen premio (de cada 3 bolas azules 2 contienen un premio de 20 € y el resto contiene un premio de 10 €). Si se extrae una bola al azar, calcule la probabilidad de que:
a) **(0.75 puntos)** La bola contenga 20 € de premio.
b) **(0.5 puntos)** La bola sea blanca o no contenga premio.
c) **(0.75 puntos)** La bola no contenga premio, sabiendo que no es azul.

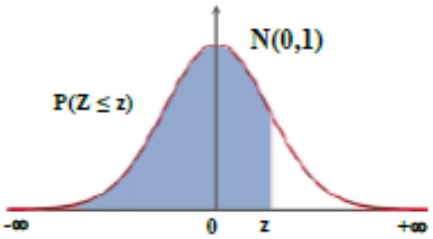
B) Con el propósito de estudiar el precio medio del litro de gasoil en una provincia andaluza un determinado día, se seleccionan al azar 16 estaciones de servicio, obteniéndose que el precio medio del litro de gasoil es 1.458 €. Se sabe que el precio del litro de gasoil en esa provincia sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 0.08 €.
a) **(1 punto)** Calcule un intervalo con un nivel de confianza del 97.5% para estimar el precio medio del litro de gasoil en dicha provincia. ¿Qué error máximo de estimación se obtiene?
b) **(1 punto)** Suponiendo que el precio medio del litro de gasoil en esa provincia es de 1.44 € y considerando muestras aleatorias de 7 estaciones de servicio, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria precio medio muestral del litro de gasoil? ¿Cuál es la probabilidad de que el precio medio muestral del litro de gasoil en esa provincia esté comprendido entre 1.383 € y 1.4523 €?

EJERCICIO 4
Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo experimento aleatorio de los que se sabe que

$$P\left(A \cap B^C\right) = 0.3;\ P\left(A^C\right) = 0.35;\ P\left(B\right) = 0.55$$

a) Calcule la probabilidad de que;
   i) **(0.75 puntos)** Suceda al menos uno de ellos.
   ii) **(0.5 puntos)** Ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A.
b) Se realiza este experimento aleatorio 11 veces, calcule:
   i) **(0.5 puntos)** La probabilidad de que el suceso B ocurra exactamente 8 veces.
   ii) **(0.25 puntos)** El número esperado de veces que ocurre el suceso B.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & m & 0\\ -1 & m & 2\\ 0 & m & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$

a) **(0.75 puntos)** Calcule los valores de *m* para que el rango de la matriz A sea 3.

b) **(1.75 puntos)** Para $m=1$, resuelva la ecuación matricial $A^t\cdot X-B^2=2\cdot X$.

c) **(0.5 puntos)** ¿Es posible encontrar una matriz D que satisfaga $C^t\cdot A=B\cdot D$?

a) Para que el rango de la matriz A (cuadrada de orden 3) sea 3 su determinante debe ser distinto de cero. Obtenemos la expresión del determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & m & 0\\ -1 & m & 2\\ 0 & m & 1\end{vmatrix}=2m+0+0-0+m-4m=-m$$

El rango de la matriz A es 3 cuando *m* es distinto de 0.

b) Despejamos X en la ecuación matricial planteada.

$$A^t\cdot X-2\cdot X=B^2\Rightarrow\left(A^t-2I\right)X=B^2\Rightarrow X=\left(A^t-2I\right)^{-1}B^2$$

Para $m=1$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Hallamos la inversa de la matriz A^t-2I.

$$A^t-2I=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\left|A^t-2I\right|=\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=0+0+0-0-1-0=-1\neq 0$$

$$\left(A^t-2I\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A^t-2I\right)^T\right)}{\left|A^t-2I\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\left(A^t-2I\right)^{-1}=-\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&0&0\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}$$

Terminamos de hallar la matriz X.

$$B^2=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2&0&2+2\\1&1&1+1\\1+1&0&2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&4\\1&1&2\\2&0&3\end{pmatrix}$$

$$X=\left(A^t-2I\right)^{-1}B^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&4\\1&1&2\\2&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+1+2&1&4+2+3\\-3&0&-4\\-6-2&0&-8-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1&9\\-3&0&-4\\-8&0&-11\end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X=\begin{pmatrix}6&1&9\\-3&0&-4\\-8&0&-11\end{pmatrix}$.

c) Nos planteamos si es posible realizar los productos indicados en $C^t\cdot A=B\cdot D$.

$$\begin{array}{ccc} C^t\cdot A & = & B\cdot D \\ 1\times\boxed{3\cdot 3}\times 3 & & 3\times\boxed{3\cdot 3}\times 3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1\times 3 & \neq & 3\times 3 \end{array}$$

Si es posible realizar los productos $C^t\cdot A$ y $B\cdot D$, pero las matrices que se obtienen al realizar dichos productos son de distintas dimensiones: la matriz $C^t\cdot A$ tiene 1 fila y la matriz $B\cdot D$ tiene 3 filas. No es posible resolver la igualdad planteada.

EJERCICIO 2

A) Los ingresos (en miles de euros) de una empresa que opera en mercados financieros en los últimos años vienen dados por la función

$$f(t) = -t^3 + \frac{21}{2}t^2 - 30t + 80;\ \ 1 \le t \le 6$$

siendo t el tiempo medido en años.

a) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de tiempo en los que los ingresos aumentaron y los intervalos en los que disminuyeron.

b) **(0.75 puntos)** Calcule los momentos en los que la empresa obtuvo el mayor y el menor ingreso, así como los valores correspondientes.

c) **(1.5 puntos)** Estudie la evolución de los ingresos de la empresa, obteniendo sus puntos de inflexión, realizando su gráfica e interpretándola.

a) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(t) = -t^3 + \frac{21}{2}t^2 - 30t + 80 \Rightarrow f'(t) = -3t^2 + 21t - 30$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 21t - 30 = 0 \Rightarrow t^2 - 7t + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = \boxed{5 = t} \\ \frac{7-3}{2} = \boxed{2 = t} \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos $t = 2$ y $t = 5$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $[1,2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale
  $f'(1.5) = -3 \cdot 1.5^2 + 21 \cdot 1.5 - 30 = -5.25 < 0$. La función decrece en $[1,2)$.
- En el intervalo $(2,5)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale
  $f'(3) = -3 \cdot 3^2 + 21 \cdot 3 - 30 = 6 > 0$. La función crece en $(2,5)$.
- En el intervalo $(5,6]$ tomamos $x = 5.5$ y la derivada vale
  $f'(5.5) = -3 \cdot 5.5^2 + 21 \cdot 5.5 - 30 = -5.25 < 0$. La función decrece en $(5,6]$.

Los ingresos aumentaron del segundo al quinto año. Disminuyeron del primero al segundo y del quinto al sexto año.

b) Por lo estudiado en el apartado anterior podemos afirmar que la función tiene un mínimo relativo en $t = 2$ y un máximo relativo en $t = 5$.
Valoramos la función en estos valores y en los extremos del intervalo de definición para establecer el máximo y el mínimo absoluto.

$$f(1) = -1^3 + \frac{21}{2} \cdot 1^2 - 30 \cdot 1 + 80 = 59.5$$

$$f(2) = -2^3 + \frac{21}{2} \cdot 2^2 - 30 \cdot 2 + 80 = 54 \ \textit{Mínimo}$$

$$f(5) = -5^3 + \frac{21}{2} \cdot 5^2 - 30 \cdot 5 + 80 = 67.5 \ \textit{Máximo}$$

$$f(6) = -6^3 + \frac{21}{2} \cdot 6^2 - 30 \cdot 6 + 80 = 62$$

Los ingresos mínimos son de 54000 euros y se obtienen al cabo de los 2 años.
Los ingresos máximos son de 67500 euros y se obtienen al cabo de los 5 años.

c) Hallamos la segunda derivada y averiguamos cuando se anula.

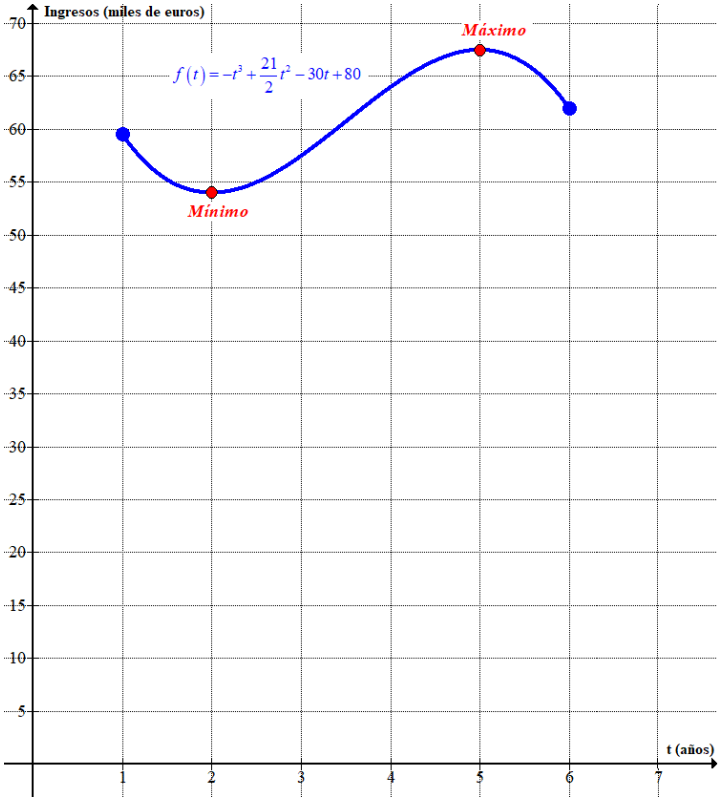
$$f'(t) = -3t^2 + 21t - 30 \Rightarrow f''(t) = -6t + 21$$

$$f''(t) = 0 \Rightarrow -6t + 21 = 0 \Rightarrow 6t = 21 \Rightarrow \boxed{t = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5}$$

$$f'''(t) = -6 \Rightarrow f'''(3.5) = -6 \neq 0$$

En $t = 3.5$ la segunda derivada se anula y la tercera toma un valor distinto de cero. La función presenta un punto de inflexión en $t = 3.5$.
Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

t	$f(t) = -t^3 + \frac{21}{2}t^2 - 30t + 80$
1	59.5
2	54
3	57.5
3.5	60.75
5	67.5
6	62



Los ingresos comenzaron disminuyendo los dos primeros años, alcanzando un valor mínimo de 54000 euros. Luego aumentaron hasta alcanzar un valor máximo de 67500 euros en el quinto año, volviendo a disminuir del quinto al sexto año. A los 3 años y medio hubo un cambio de tendencia y el aumento disminuyó de intensidad.

EJERCICIO 2

B) El coste en euros de producción de *x* toneladas de un determinado producto en una factoría es

$$C(x)=0.2x^2+40x+5000$$

El ingreso por venta es de 150 euros por tonelada. Se vende todo lo que se produce.

a) **(0.25 puntos)** Calcule la función *B(x)* que expresa el beneficio obtenido al vender *x* toneladas del producto.

b) **(1 punto)** Halle la cantidad de toneladas de producto que debe venderse para maximizar el beneficio. Obtenga dicho beneficio.

c) **(1.25 puntos)** Obtenga el beneficio cuando no hay producción y calcule para qué valores de la producción el beneficio es positivo. ¿Para qué producción se obtiene un beneficio de 4000 €?

d) **(0.5 puntos)** Estudie cuando los beneficios van aumentando y cuándo van disminuyendo.

a) El beneficio es la diferencia entre los ingresos y el coste.

$$B(x)=I(x)-C(x)=150x-\left(0.2x^2+40x+5000\right)=-0.2x^2+110x-5000$$

El beneficio obtenido al vender *x* toneladas del producto viene dado por la expresión $B(x)=-0.2x^2+110x-5000$.

b) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$B(x)=-0.2x^2+110x-5000\Rightarrow B'(x)=-0.4x+110$$

$$B'(x)=0\Rightarrow -0.4x+110=0\Rightarrow 0.4x=110\Rightarrow \boxed{x=\frac{110}{0.4}=275}$$

Sustituimos $x=275$ en la segunda derivada.

$$B'(x)=-0.4x+110\Rightarrow B''(x)=-0.4\Rightarrow B''(275)=-0.4<0$$

Para $x=275$ se anula la derivada de la función y la segunda derivada toma valor negativo.
La función tiene un máximo relativo en $x=275$.
Como $B(275)=-0.2\cdot 275^2+110\cdot 275-5000=10125$ el beneficio máximo que se puede obtener es de 10125 euros con la producción de 275 toneladas de producto.

c) Nos piden determinar $B(0)$.

$$B(0)=-0.2\cdot 0^2+110\cdot 0-5000=-5000$$

Sin producción se producen unas pérdidas de 5000 euros.
Hallamos cuando el beneficio es nulo.

$$B(x)=0\Rightarrow -0.2x^2+110x-5000=0\Rightarrow x^2-550+25000=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{550\pm\sqrt{(-550)^2-4\cdot 25000}}{2}=\frac{550\pm 450}{2}=\begin{cases}\dfrac{550+450}{2}=\boxed{500=x}\\ \dfrac{550-450}{2}=\boxed{50=x}\end{cases}$$

El beneficio es nulo para una producción de 50 o de 500 toneladas.
Analizamos que pasa antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(0,50)$ consideramos $x=10$ y el beneficio es $B(10)=-0.2\cdot 10^2+110\cdot 10-5000=-3920<0$. El beneficio es negativo en $(0,50)$.
- En el intervalo $(50,500)$ consideramos $x=100$ y el beneficio es $B(100)=-0.2\cdot 100^2+110\cdot 100-5000=4000>0$. El beneficio es positivo en $(50,500)$
- En el intervalo $(500,+\infty)$ consideramos $x=1000$ y el beneficio es $B(1000)=-0.2\cdot 1000^2+110\cdot 1000-5000=-95000<0$. El beneficio es negativo en $(500,+\infty)$.

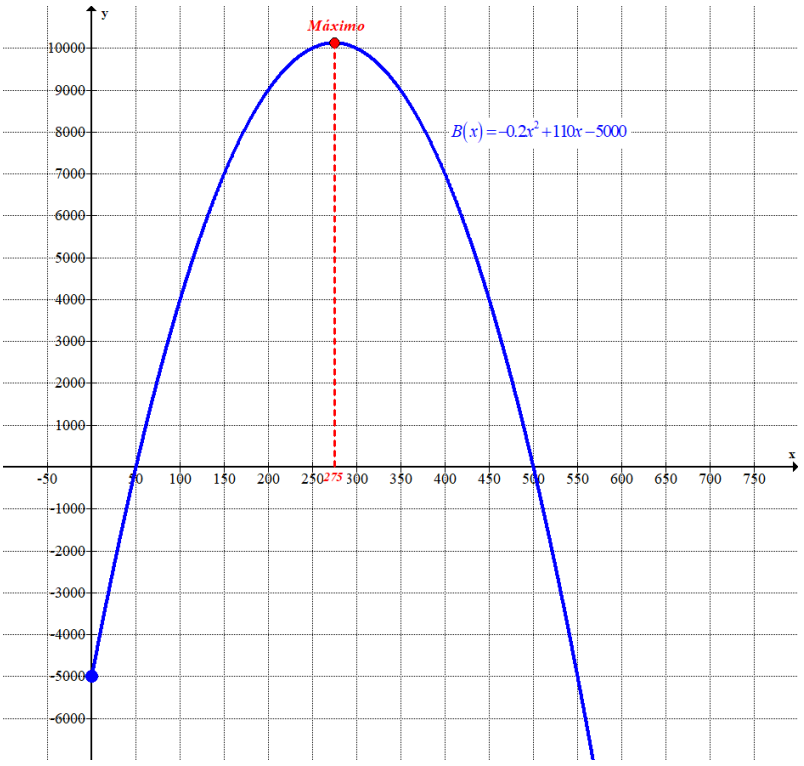
El beneficio es positivo para una producción entre 50 y 500 toneladas.
¿Para qué producción se obtiene un beneficio de 4000 €?

$$B(x)=4000\Rightarrow -0.2x^2+110x-5000=4000\Rightarrow -0.2x^2+110x-9000=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-550x+45000=0\Rightarrow x=\frac{550\pm\sqrt{(-550)^2-4\cdot 45000}}{2}=\frac{550\pm 350}{2}=\begin{cases}\frac{550+350}{2}=450\\ \frac{550-350}{2}=100\end{cases}$$

Con una producción de 100 o 450 toneladas se obtiene un beneficio de 4000 €.

d) Hemos visto en el primer apartado que con la producción de 275 toneladas se obtiene el máximo beneficio. El beneficio aumenta para una producción entre 0 y 275 toneladas y disminuye para una producción superior a 275 toneladas.



EJERCICIO 3 A) Una urna contiene bolas de tres colores, siendo el 30% rojas, el 20% blancas y el resto azules. Algunas bolas están premiadas: de cada 4 bolas rojas 1 contiene un premio de 20 €, de cada 2 bolas blancas 1 contiene un premio de 10 €, todas las bolas azules tienen premio (de cada 3 bolas azules 2 contienen un premio de 20 € y el resto contiene un premio de 10 €). Si se extrae una bola al azar, calcule la probabilidad de que:
a) **(0.75 puntos)** La bola contenga 20 € de premio.
b) **(0.5 puntos)** La bola sea blanca o no contenga premio.
c) **(0.75 puntos)** La bola no contenga premio, sabiendo que no es azul.

Pasamos estos datos porcentuales a valores absolutos considerando una cantidad concreta de bolas contenidas en la urna. Los resultados serán independientes de la cifra elegida. Consideramos una cifra que nos dé resultados enteros, por ejemplo 3000 bolas.
Si el 30% rojas, el 20% blancas y el resto azules entonces tendremos en la urna $0.3 \cdot 3000 = 900$ bolas rojas, $0.2 \cdot 3000 = 600$ blancas y $3000 - 900 - 600 = 1500$ azules.

De cada 4 bolas rojas 1 contiene un premio de 20 € → $\frac{900}{4} = 225$ bolas rojas contienen un premio de 20 €.

De cada 2 bolas blancas 1 contiene un premio de 10 € → $\frac{600}{2} = 300$ bolas blancas contienen un premio de 10 €.

Todas las bolas azules tienen premio (de cada 3 bolas azules 2 contienen un premio de 20 € y el resto contiene un premio de 10 €) → $\frac{2}{3} \cdot 1500 = 1000$ bolas azules tienen un premio de 20 € y $1500 - 1000 = 500$ bolas azules tienen un premio de 10 €.
Ponemos todos estos datos en una tabla.

	Premio de 10 €	Premio de 20 €	Sin premio	TOTALES
Bolas rojas	0	225		900
Bolas blancas	300	0		600
Bolas azules	500	1000		1500
TOTALES				3000

Completamos la tabla.

	Premio de 10 €	Premio de 20 €	Sin premio	TOTALES
Bolas rojas	0	225	**675**	900
Bolas blancas	300	0	**300**	600
Bolas azules	500	1000	**0**	1500
TOTALES	**800**	**1225**	**975**	3000

a) De las 3000 bolas de la urna hay 1225 con un premio de 20 €. La probabilidad de que la bola elegida al azar tenga un premio de 20 € vale $\frac{1225}{3000} = \frac{49}{120} \simeq 0.4083$.

b) De las 3000 bolas de la urna hay 600 bolas blancas y 675 rojas sin premio. La probabilidad de que la bola elegida al azar sea blanca o no contenga premio vale $\frac{600+675}{3000} = \frac{17}{40} = 0.425$.

c) En la urna hay 900 bolas rojas y 600 blancas. Hay 900 + 600 = 1500 bolas que no son azules. Hay 675 bolas rojas sin premio y 300 bolas blancas sin premio. La probabilidad de que la bola elegida al azar que sabemos que no es azul no contenga un premio vale $\frac{675+300}{1500} = \frac{13}{20} = 0.65$.

EJERCICIO 3

B) Con el propósito de estudiar el precio medio del litro de gasoil en una provincia andaluza un determinado día, se seleccionan al azar 16 estaciones de servicio, obteniéndose que el precio medio del litro de gasoil es 1.458 €. Se sabe que el precio del litro de gasoil en esa provincia sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 0.08 €.

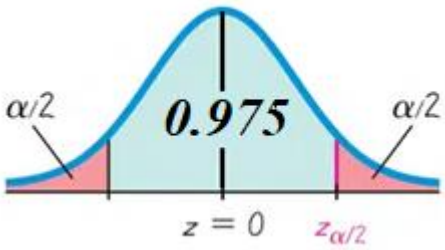
a) **(1 punto)** Calcule un intervalo con un nivel de confianza del 97.5% para estimar el precio medio del litro de gasoil en dicha provincia. ¿Qué error máximo de estimación se obtiene?

b) **(1 punto)** Suponiendo que el precio medio del litro de gasoil en esa provincia es de 1.44 € y considerando muestras aleatorias de 7 estaciones de servicio, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria precio medio muestral del litro de gasoil? ¿Cuál es la probabilidad de que el precio medio muestral del litro de gasoil en esa provincia esté comprendido entre 1.383 € y 1.4523 €?

a) Consideramos X = el precio del litro de gasoil en una provincia andaluza. $X = N(\mu, 0.08)$

El tamaño de la muestra es n = 16 y la media muestral es $\bar{x} = 1,458$ €/l.

Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 97.5%.



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838
2,2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9875

$$1-\alpha = 0.975 \rightarrow \alpha = 0.025 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0125 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.9875 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{matrix} Miramos\ en\ la \\ tabla\ N(0,1) \end{matrix} \right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.24$$

Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.24 \cdot \frac{0.08}{\sqrt{16}} = 0.0448$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(1.458 - 0.0448,\ 1.458 + 0.0448\right) = \left(1.4132,\ 1.5028\right)$$

b) La variable aleatoria X = el precio del litro de gasoil en una provincia andaluza sigue una distribución normal: $X = N(1.44,\ 0.08)$. La variable aleatoria precio medio muestral del litro de gasoil en muestras de tamaño 7 sigue una distribución normal con la misma media que la variable X y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.08}{\sqrt{7}} \simeq 0.03$ euros. $\overline{X_7} = N(1.44, 0.03)$

Debemos calcular $P(1.383 \le \overline{X_7} \le 1.4523)$.

$$P(1.383 \le \overline{X_7} \le 1.4523) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{\overline{X_7} - 1.44}{0.03} \end{matrix} \right\} = P\left(\frac{1.383 - 1.44}{0.03} \le Z \le \frac{1.4523 - 1.44}{0.03} \right) =$$

$$= P(-1.9 \le Z \le 0.41) = P(Z \le 0.41) - P(Z \le -1.9) = P(Z \le 0.41) - P(Z \ge 1.9) =$$

$$== P(Z \le 0.41) - \left[1 - P(Z \le 1.9)\right] = \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} = 0.6591 - 1 + 0.9713 = \boxed{0.6304}$$

z	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186
1,0	0,8413	0,8438
1,1	0,8643	0,8665
1,2	0,8849	0,8869
1,3	0,9032	0,9049
1,4	0,9192	0,9207
1,5	0,9332	0,9345
1,6	0,9452	0,9463
1,7	0,9554	0,9564
1,8	0,9641	0,9649
1,9	0,9713	0,9719

La probabilidad de que el precio medio muestral (en muestras de 7 estaciones de servicio) del litro de gasoil en esa provincia esté comprendido entre 1.383 € y 1.4523 € vale 0.6304.

EJERCICIO 4

Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo experimento aleatorio de los que se sabe que

$$P\left(A\cap B^C\right)=0.3;\ P\left(A^C\right)=0.35;\ P\left(B\right)=0.55$$

a) Calcule la probabilidad de que;

i) **(0.75 puntos)** Suceda al menos uno de ellos.

ii) **(0.5 puntos)** Ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A.

b) Se realiza este experimento aleatorio 11 veces, calcule:

i) **(0.5 puntos)** La probabilidad de que el suceso B ocurra exactamente 8 veces.

ii) **(0.25 puntos)** El número esperado de veces que ocurre el suceso B.

a.i) Nos piden calcular $P\left(A\cup B\right)$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P\left(A\right)=1-P\left(A^C\right)=1-0.35=0.65$$

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)-P\left(A\cap B^C\right)=0.65-0.3=0.35$$

$$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)=0.65+0.55-0.35=\boxed{0.85}$$

La probabilidad de que suceda al menos uno de ellos vale 0.85.

a.ii) Debemos calcular $P\left(B/A^C\right)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P\left(B/A^C\right)=\frac{P\left(B\cap A^C\right)}{P\left(A^C\right)}=\frac{P\left(B\right)-P\left(B\cap A\right)}{P\left(A^C\right)}=\frac{0.55-0.35}{0.35}=\boxed{\frac{4}{7}\simeq 0.5714}$$

La probabilidad de que ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A vale 0.5714.

b.i) Consideramos la variable X = Número de veces que ocurre el suceso B en 11 repeticiones del experimento. Esta variable es una binomial de parámetros n = 11 y p = probabilidad de que ocurra B = 0.55. X = B(11, 0.55).

Debemos calcular $P\left(X=8\right)$.

$$P\left(X=8\right)=\binom{11}{8}0.55^8\cdot 0.45^3=\frac{11\cdot 10\cdot 9}{3\cdot 2}\cdot 0.55^8\cdot 0.45^3=165\cdot 0.55^8\cdot 0.45^3=\boxed{0.1259}$$

La probabilidad de que en 11 repeticiones del experimento el suceso B ocurra exactamente 8 veces vale 0.1259.

b.ii) El número esperado de veces que ocurre el suceso B es el valor de $n\cdot p=11\cdot 0.55=6.05$. Se espera que ocurra 6 veces.

PAU 2026 Extraordinaria (suplente 1) Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** **CURSO 2025-2026**	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Esta prueba consta de 4 ejercicios.
c) En algunos ejercicios se da la posibilidad de elegir entre apartado A) o B). Responda sólo el apartado **que elija. En caso contrario, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar**
d) En cada ejercicio o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
e) Todos los resultados deben estar **suficientemente justificados**.
f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos.
g) La valoración de la corrección gramatical, léxica y ortográfica, así como la presentación del texto no será superior al 10 %.

EJERCICIO 1

(3 puntos) Una empresa comercializa dos especias a granel: orégano y pimienta. Para elaborar un kilo de orégano se requieren 2 horas de secado y 2 horas de envasado, mientras que para elaborar un kilo de pimienta se requieren 1 hora de secado y 5 horas de envasado. La empresa dispone de un horno para secado que funciona 24 horas al día de lunes a viernes. Para el envasado hay 4 empleados que trabajan 40 horas a la semana como máximo cada uno. La empresa tiene el compromiso contractual de producir a la semana al menos 35 kilogramos contabilizando ambas especias. El precio de venta del orégano es de 50€ el kilogramo y el de la pimienta es de 70€ el kilogramo. Sabiendo que el coste de producción de cada kilogramo de orégano y pimienta es de 5€ y 7€ respectivamente, ¿cuántos kilogramos de cada especia deben producirse semanalmente para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál sería dicho beneficio?

EJERCICIO 2

Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) a) **(1 punto)** Calcule los valores de a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{x-1} & si\ x\le 0\\ x^2+bx+3 & si\ x>0\end{cases}$$

sea continua y derivable en $x=0$.

b) **(1.25 puntos)** Dada la función $g(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$, calcule las asíntotas, los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y esboce la gráfica de la función.

c) **(0.75 puntos)** Calcule el área del recinto acotado limitado por el eje de abscisas y la gráfica de la función $h(x)=x^2-x-6$.

B) Sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x+2 & si\ 0<x\le 3\\ \dfrac{10}{a-x} & si\ x>3\end{cases}$$

siendo a un número real.

a) **(0.5 puntos)** Determine el valor de a para el que f es continua en $x=3$.

b) Para $a = 4$:

i) **(1 punto)** Determine las ecuaciones de las asíntotas de f, si existen.

ii) **(1.5 puntos)** Estudie la derivabilidad y monotonía de f.

EJERCICIO 3

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral que verifican:
- La probabilidad de que ocurra el suceso A es 0.5.
- La probabilidad de que ocurra A y no ocurra B es 0.35.
- La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es 0.35.

a) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurran los dos sucesos a la vez.

b) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra B sabiendo que A no ha ocurrido.

c) **(0.4 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra uno y solo uno de los dos.

d) **(0.4 puntos)** ¿Son dependientes los sucesos A y B? ¿Son incompatibles?

EJERCICIO 4 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) La probabilidad de que Paco gane un partido de bádminton es 0.8.

a) En un torneo participan 10 jugadores (incluido Paco) y cada jugador juega un partido con cada uno de los restantes jugadores. Calcule la probabilidad de que Paco:

i) **(0.5 puntos)** Gane exactamente 8 partidos.

ii) **(0.5 puntos)** Gane como mucho 8 partidos.

b) **(1 punto)** Si a lo largo de un año Paco juega 80 partidos, ¿cuál es la probabilidad de que pierda más de 10 pero menos de 20 partidos ese año?

B) Para estimar en Andalucía la proporción de personas que practican natación como hábito deportivo, se ha seleccionado una muestra de 400 personas, de las que 106 practican natación.

a) **(0.75 puntos)** Con un nivel de confianza del 98.5%, calcule un intervalo de confianza para estimar la proporción de personas que practican natación como hábito deportivo en Andalucía.

b) **(0.5 puntos)** A la vista del intervalo obtenido, razone si se puede admitir que en Andalucía el 4% de las personas practican natación como hábito deportivo.

c) **(0.75 puntos)** Si mantenemos la misma proporción muestral, ¿cuántas personas, como mínimo, tendrían que formar parte de la muestra seleccionada para que, con un nivel de confianza del 97%, el error cometido en la estimación de la proporción poblacional de quienes practican natación como hábito deportivo en Andalucía fuese como máximo del 3%?

EJERCICIO 1

(3 puntos) Una empresa comercializa dos especias a granel: orégano y pimienta. Para elaborar un kilo de orégano se requieren 2 horas de secado y 2 horas de envasado, mientras que para elaborar un kilo de pimienta se requieren 1 hora de secado y 5 horas de envasado. La empresa dispone de un horno para secado que funciona 24 horas al día de lunes a viernes. Para el envasado hay 4 empleados que trabajan 40 horas a la semana como máximo cada uno. La empresa tiene el compromiso contractual de producir a la semana al menos 35 kilogramos contabilizando ambas especias. El precio de venta del orégano es de 50€ el kilogramo y el de la pimienta es de 70€ el kilogramo. Sabiendo que el coste de producción de cada kilogramo de orégano y pimienta es de 5€ y 7€ respectivamente, ¿cuántos kilogramos de cada especia deben producirse semanalmente para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál sería dicho beneficio?

Llamamos "x" a los kilos de orégano e "y" a los kilos de pimienta que se elaboran a la semana. El beneficio es la diferencia entre los ingresos y el coste. Con la venta de 1 kilo de orégano obtengo 50 € – 5€ = 45 €. Con la venta de 1 kilo de pimienta obtengo 70€ – 7€ = 63€.
Elaboramos una tabla con los datos del problema.

	Horas de secado	Horas de envasado	Beneficio
Kilos de orégano (x)	2x	2x	45x
Kilos de pimienta (y)	y	5y	63y
TOTALES	$2x+y$	$2x+5y$	$45x+63y$

La función que queremos maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x,y)=45x+63y$.

Las restricciones son las siguientes.

La empresa dispone de un horno para secado que funciona 24 horas al día de lunes a viernes (5 días). → $2x+y\le 24\cdot 5\rightarrow 2x+y\le 120$

Para el envasado hay 4 empleados que trabajan 40 horas a la semana como máximo cada uno. → $2x+5y\le 4\cdot 40\rightarrow 2x+5y\le 160$.

La empresa tiene el compromiso contractual de producir a la semana al menos 35 kilogramos contabilizando ambas especias → $x+y\ge 35$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}2x+y\le 120\\2x+5y\le 160\\x+y\ge 35\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+y=120$

x	$y=120-2x$
0	120
55	10
60	0

$2x+5y=160$

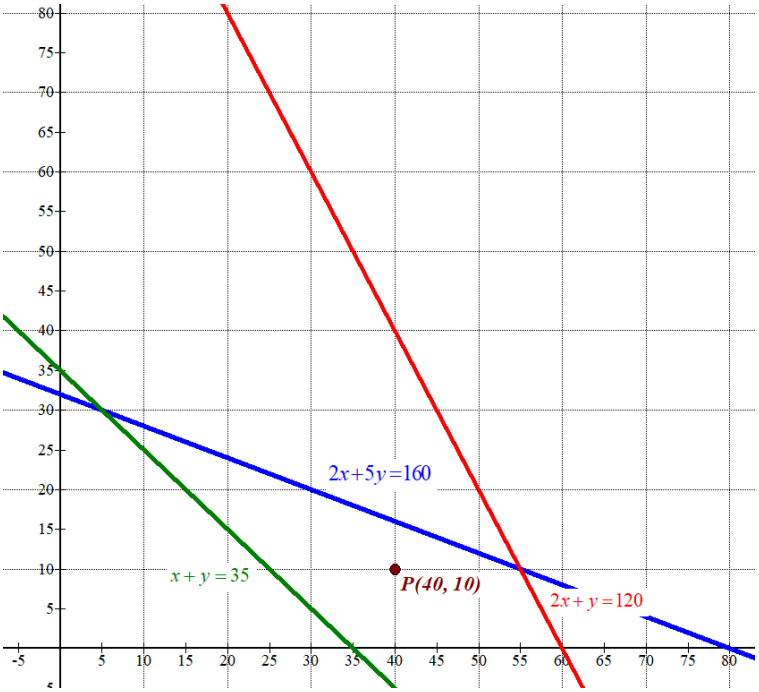
x	$y=\frac{160-2x}{5}$
0	32
5	30
55	10
80	0

$x+y=35$

x	$y=35-x$
0	35
5	30
35	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

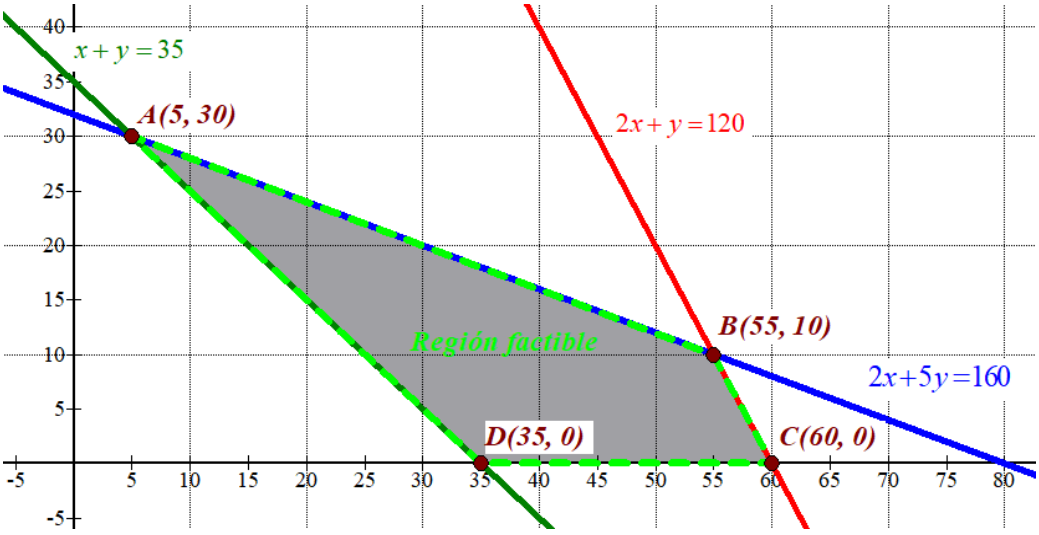
Primer cuadrante



La región factible está situada en el primer cuadrante por debajo de las rectas roja y azul, y por encima de la recta verde. Comprobamos que el punto P(40, 10) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 40+10\le 120 \\ 2\cdot 40+5\cdot 10\le 160 \\ 40+10\ge 35 \\ 40\ge 0;\ 10\ge 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 80+10\le 120 \\ 80+50\le 160 \\ 40+10\ge 35 \\ 40\ge 0;\ 10\ge 0 \end{array}\right\}$$ ¡Se cumplen todas!

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función beneficio $B(x,y)=45x+63y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

A(5, 30) → $B(5,30) = 45 \cdot 5 + 63 \cdot 30 = 2115$

B(55, 10) → $B(55,10) = 45 \cdot 55 + 63 \cdot 10 = 3105$ *Máximo*

C(60, 0) → $B(60,0) = 45 \cdot 60 + 63 \cdot 0 = 2700$

D(35, 0) → $B(35,0) = 45 \cdot 35 + 63 \cdot 0 = 1575$

El valor máximo es 3105 y se alcanza en el vértice D(55, 10).
El máximo beneficio que se puede conseguir es de 3105 euros con la elaboración de 55 kilos de orégano y 10 kilos de pimienta.

EJERCICIO 2 **A)** a) **(1 punto)** Calcule los valores de a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{x-1} & si\ x\le 0\\ x^2+bx+3 & si\ x>0\end{cases}$$

sea continua y derivable en $x=0$.

b) **(1.25 puntos)** Dada la función $g(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$, calcule las asíntotas, los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y esboce la gráfica de la función.

c) **(0.75 puntos)** Calcule el área del recinto acotado limitado por el eje de abscisas y la gráfica de la función $h(x)=x^2-x-6$.

a) La función debe ser continua en $x=0$, eso implica que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{0-a}{0-1}=a\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-a}{x-1}=a\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+bx+3=0^2+b\cdot 0+3=3\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=3}$$

La función es continua en $x=0$ para $a=3$ y queda $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x-1} & si\ x\le 0\\ x^2+bx+3 & si\ x>0\end{cases}$.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$. Su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1\cdot(x-1)-1\cdot(x-3)}{(x-1)^2}=\dfrac{x-1-x+3}{(x-1)^2}=\dfrac{2}{(x-1)^2} & si\ x<0\\ 2x+b\ \ si\ x>0\end{cases}$$

La función debe ser derivable en $x=0$, por lo que las derivadas laterales deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2}{(x-1)^2}=\dfrac{2}{(0-1)^2}=2\\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x+b=2\cdot 0+b=b\\ f'(0^-)=f'(0^+)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{b=2}$$

Los valores buscados son $a=3$ y $b=2$.

b) El dominio de la función $g(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$ es $\mathbb{R}-\{1\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x-1}=\frac{1-3}{1-1}=\frac{-2}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-3}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1-2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x-1}-\frac{2}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}1-\frac{2}{x-1}=1-\frac{2}{\infty}=1-0=\boxed{1}$$

La recta $y=1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal la función no puede tener asíntota oblicua.

Calculamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=\dfrac{x-3}{x-1} \\ Eje\,OX \to y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=\frac{x-3}{x-1} \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow \boxed{A(3,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=\dfrac{x-3}{x-1} \\ Eje\,OY \to x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0)=\frac{0-3}{0-1}=3 \Rightarrow \boxed{B(0,3)}$$

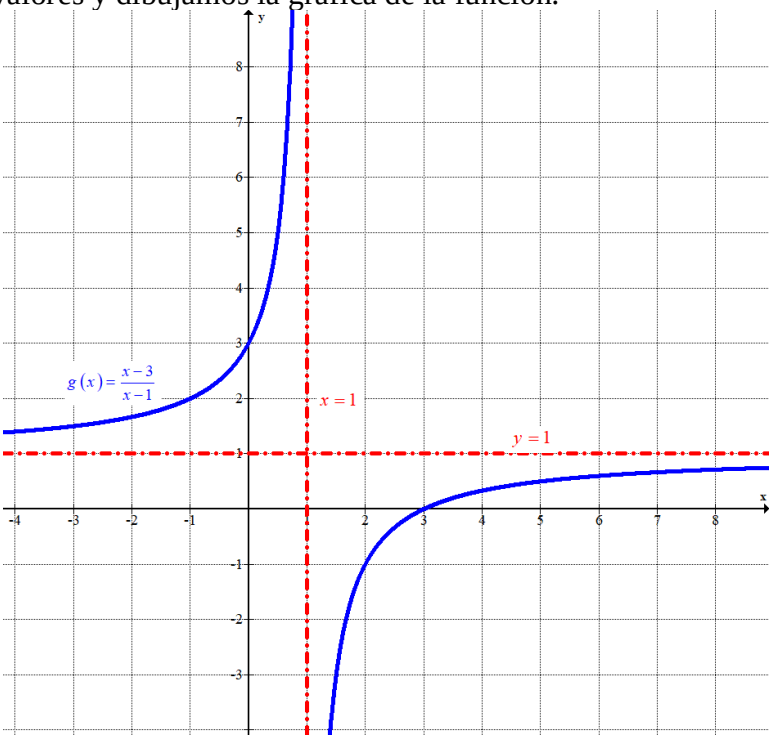
Los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes son A(3, 0) y B(0,3).

Estudiamos la monotonía de la función. La expresión de la derivada de la función es:

$$g'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-1\cdot(x-3)}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x+3}{(x-1)^2}=\frac{2}{(x-1)^2}$$

Esta expresión de la derivada siempre es positiva, por lo que la función siempre es creciente.
Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$g(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$
−1	2
0	3
0.5	5
1.5	−3
11	0.8



c) Averiguamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas ($y=0$).

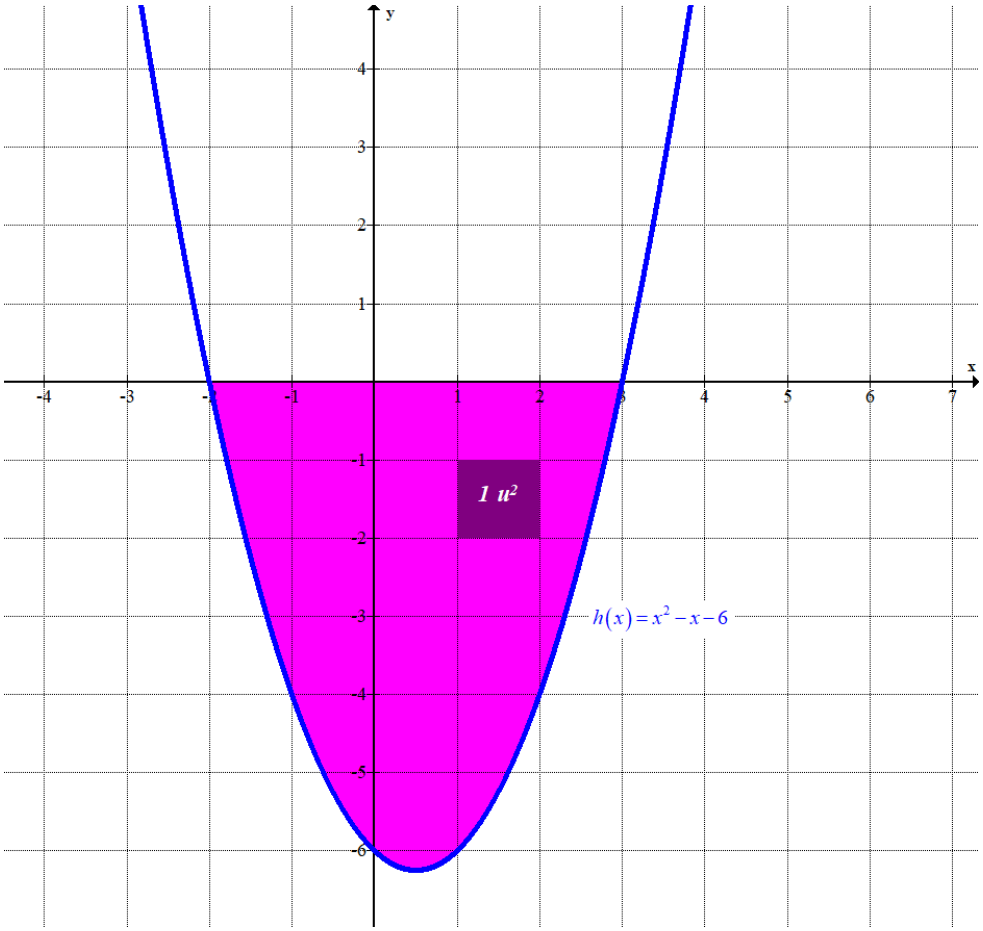
$$h(x)=0 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-6)}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{1+5}{2}=\boxed{3=x}\\ \frac{1-5}{2}=\boxed{-2=x}\end{cases}$$

La función corta el eje de abscisas en $x=-2$ y $x=3$. El área del recinto acotado limitado por el eje de abscisas y la gráfica de la función $h(x)=x^2-x-6$ es el valor absoluto de la integral definida de –2 a 3 de la función.

$$\int_{-2}^{3} h(x)\,dx=\int_{-2}^{3} x^2-x-6dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-2}^{3}=\left[\frac{3^3}{3}-\frac{3^2}{2}-6\cdot 3\right]-$$

$$-\left[\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}-6(-2)\right]=9-4.5-18+\frac{8}{3}+2-12=\boxed{\frac{-125}{6}\simeq -20.63}$$

El área tiene un valor de $\frac{125}{6}\simeq 20.63$ unidades cuadradas.



EJERCICIO 2 B) Sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x+2 & si\ 0<x\le 3 \\ \dfrac{10}{a-x} & si\ x>3 \end{cases}$$

siendo *a* un número real.

a) **(0.5 puntos)** Determine el valor de *a* para el que f es continua en $x=3$.

b) Para $a=4$:

i) **(1 punto)** Determine las ecuaciones de las asíntotas de f, si existen.

ii) **(1.5 puntos)** Estudie la derivabilidad y monotonía de f.

a) Para que la función sea continua deben coincidir los límites laterales con el valor de la función en $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=3^3-3\cdot 3+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x^3-3x+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{10}{a-x}=\dfrac{10}{a-3} \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{10}{a-3}=2 \Rightarrow 10=2a-6 \Rightarrow 2a=16 \Rightarrow \boxed{a=8}$$

La función es continua en $x=3$ para $a=8$.

b.i) Para $a=4$ la función queda con la expresión $f(x)=\begin{cases} x^3-3x+2 & si\ 0<x\le 3 \\ \dfrac{10}{4-x} & si\ x>3 \end{cases}$.

La función no es continua en $x=3$. La función no existe para $x=4$, pues este valor anula el denominador de la expresión $\dfrac{10}{4-x}$. El dominio de la función es $(0,4)\cup(4,+\infty)$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=4$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{10}{4-x}=\frac{10}{4-4}=\frac{10}{0}=\infty$$

$x=4$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

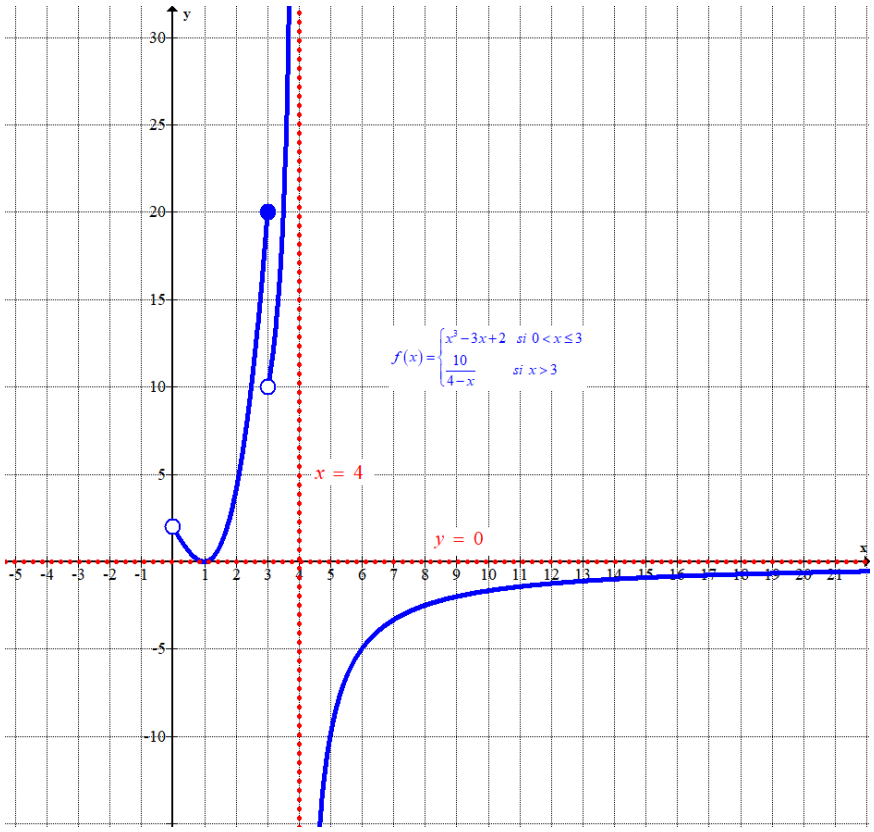
Estudiamos lo que ocurre cuando *x* tiende a $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{4-x}=\frac{10}{-\infty}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal cuando *x* tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal la función no puede tener asíntota oblicua.



b.ii) La función no es continua en $x=3$, por lo tanto, no es derivable en este valor. La función no existe para $x=4$, por lo que tampoco es derivable en dicho valor.
La función es derivable en $(0,3)\cup(3,4)\cup(4,+\infty)$. Calculamos su derivada.

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x+2 & si\ 0<x\leq 3 \\ \dfrac{10}{4-x} & si\ x>3 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 3x^2-3 & si\ 0<x<3 \\ \dfrac{10}{(4-x)^2} & si\ x>3, x\neq 4 \end{cases}$$

Estudiamos su monotonía.
En el intervalo $(0,3)$ la función derivada es $f'(x)=3x^2-3$. Averiguamos cuando se anula.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \rightarrow x^2-1=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\sqrt{1}=1\in(0,3)$$

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x=0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=3\cdot 0.5^2-3=-2.25<0$. La función decrece en $(0,1)$.
- En el intervalo $(1,3)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=3\cdot 2^2-3=9>0$ la función crece en $(1,3)$.

En el intervalo $(3,4)\cup(4,+\infty)$ la función derivada es $f'(x)=\dfrac{10}{(4-x)^2}$ que es una expresión positiva. La función crece en $(3,4)\cup(4,+\infty)$.

Conclusión: La función decrece en $(0,1)$ y crece en $(1,3)\cup(3,4)\cup(4,+\infty)$.

EJERCICIO 3 Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral que verifican:
- La probabilidad de que ocurra el suceso A es 0.5.
- La probabilidad de que ocurra A y no ocurra B es 0.35.
- La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es 0.35.

a) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurran los dos sucesos a la vez.
b) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra B sabiendo que A no ha ocurrido.
c) **(0.4 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra uno y solo uno de los dos.
d) **(0.4 puntos)** ¿Son dependientes los sucesos A y B? ¿Son incompatibles?

Nos dicen que $P(A)=0.5$, $P\left(A\cap\overline{B}\right)=0.35$ *y* $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0.35$.

a) Debemos calcular $P(A\cap B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=0.5 \\ P\left(A\cap\overline{B}\right)=0.35 \\ P(A)=P(A\cap B)+P\left(A\cap\overline{B}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.5=P(A\cap B)+0.35 \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=0.15}$$

b) Debemos calcular $P\left(B/\overline{A}\right)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P\left(B/\overline{A}\right)=\frac{P\left(B\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{P\left(\overline{A}\right)-P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)}{1-P(A)}=\frac{1-P(A)-P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)}{1-P(A)}=\frac{1-0.5-0.35}{1-0.5}=\boxed{0.3}$$

c) Debemos calcular $P\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)$. Como son dos sucesos incompatibles tenemos que $P\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap B\right)$.

$$P\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap B\right)=0.35+P\left(\overline{A}\right)-P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)=$$

$$=0.35+1-P(A)-P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)=0.35+1-0.5-0.35=\boxed{0.5}$$

d) Para que los sucesos sean independientes debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0.35\Rightarrow P\left(\overline{A\cup B}\right)=0.35\Rightarrow P(A\cup B)=1-0.35=0.65$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0.65=0.5+P(B)-0.15\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(B)=0.65-0.5+0.15=0.3$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.15 \\ P(A)P(B)=0.5\cdot 0.3 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)=0.15=P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B son independientes.
Para que los sucesos A y B sean incompatibles su intersección debe ser vacía y la probabilidad de $A \cap B$ debe ser 0, pero esta probabilidad vale 0.15 distinto de cero.
Los sucesos A y B no son incompatibles, es decir, son compatibles.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO.
Ponemos los datos del ejercicio en una tabla de probabilidades.
$P(A)=0.5,\ P\left(A \cap \overline{B}\right)=0.35\ y\ P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)=0.35$

	B	$\overline{B}$	
A		0.35	0.5
$\overline{A}$		0.35	
			1

Completamos la tabla.

	B	$\overline{B}$	
A	0.15	0.35	0.5
$\overline{A}$	0.15	0.35	0.5
	0.3	0.7	1

Con los datos de la tabla respondemos a las preguntas planteadas.

a) Debemos calcular $P(A \cap B)$. Observamos en la tabla que $P(A \cap B)=0.15$

b) Debemos calcular $P\left(B/\overline{A}\right)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P\left(B/\overline{A}\right)=\frac{P\left(B \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{0.15}{0.5}=\boxed{0.3}$$

c) Debemos calcular $P\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right)$. Como son dos sucesos incompatibles tenemos que $P\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right)=P\left(A \cap \overline{B}\right)+P\left(\overline{A} \cap B\right)$.

$$P\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right)=P\left(A \cap \overline{B}\right)+P\left(\overline{A} \cap B\right)=0.35+0.15=\boxed{0.5}$$

d) Para que los sucesos sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B)=0.15 \\ P(A)P(B)=0.5 \cdot 0.3=0.15 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap B)=0.15=P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B son independientes.
Como $P(A \cap B)=0.15 \neq 0$ los sucesos A y B son compatibles.

EJERCICIO 4 A) La probabilidad de que Paco gane un partido de bádminton es 0.8.

a) En un torneo participan 10 jugadores (incluido Paco) y cada jugador juega un partido con cada uno de los restantes jugadores. Calcule la probabilidad de que Paco:

i) **(0.5 puntos)** Gane exactamente 8 partidos.

ii) **(0.5 puntos)** Gane como mucho 8 partidos.

b) **(1 punto)** Si a lo largo de un año Paco juega 80 partidos, ¿cuál es la probabilidad de que pierda más de 10 pero menos de 20 partidos ese año?

Paco debe jugar 9 partidos contra cada uno de los restantes 9 participantes en el torneo, siendo la probabilidad de que gane un partido de 0.8. Consideramos la variable aleatoria X que cuente los partidos que gana Paco en el torneo.

Esta variable es una binomial de parámetros p = probabilidad de que Paco gane un partido = 0.8 y n = número de repeticiones = 9. $X = B(9, 0.8)$

a.i) Nos piden calcular $P(X = 8)$.

$$P(X = 8) = \binom{9}{8} 0.8^8 \cdot 0.2^1 = 9 \cdot 0.8^8 \cdot 0.2 \simeq \boxed{0.302}$$

La probabilidad de que Paco gane exactamente 8 partidos en el torneo vale 0.302.

a.ii) Debemos calcular $P(X \leq 8)$. Utilizamos el suceso contrario.

$$P(X \leq 8) = 1 - P(X = 9) = 1 - \binom{9}{9} 0.8^9 \cdot 0.2^0 = 1 - 0.8^9 \simeq \boxed{0.8658}$$

La probabilidad de que Paco gane como mucho 8 partidos en el torneo vale 0.8658.

b) Consideramos la variable aleatoria Y que cuenta los partidos que pierde Paco en un año.

Esta variable es una binomial de parámetros p = probabilidad de que Paco pierda un partido = 1 – 0.8 = 0.2 y n = número de repeticiones = 80. $Y = B(80, 0.2)$.

Como el número de repeticiones es muy alto aproximamos la binomial a una normal Y´ de media $\mu = np = 80 \cdot 0.2 = 16$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \simeq 3.5777$.

$Y' = N\left(16, \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)$. Esta aproximación es buena pues $np = 64 > 5$ y $nq = 80 \cdot 0.2 = 16 > 5$.

Debemos calcular $P(10 < Y < 20)$.

$$P(10 < Y < 20) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(10.5 \leq Y' \leq 19.5) = \left\{\begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \frac{Y' - 16}{8\sqrt{5}/5} \end{matrix}\right\} =$$

$$= P\left(\frac{10.5 - 16}{8\sqrt{5}/5} \leq Z \leq \frac{19.5 - 16}{8\sqrt{5}/5}\right) = P(-1.54 \leq Z \leq 0.98) =$$

$$= P(Z \leq 0.98) - P(Z \leq -1.54) = P(Z \leq 0.98) - P(Z \geq 1.54) =$$

$$= P(Z \leq 0.98) - \left[1 - P(Z \leq 1.54)\right] = \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix}\right\} = 0.8365 - 1 + 0.9382 = \boxed{0.7747}$$

EJERCICIO 4 B) Para estimar en Andalucía la proporción de personas que practican natación como hábito deportivo, se ha seleccionado una muestra de 400 personas, de las que 106 practican natación.

a) **(0.75 puntos)** Con un nivel de confianza del 98.5%, calcule un intervalo de confianza para estimar la proporción de personas que practican natación como hábito deportivo en Andalucía.

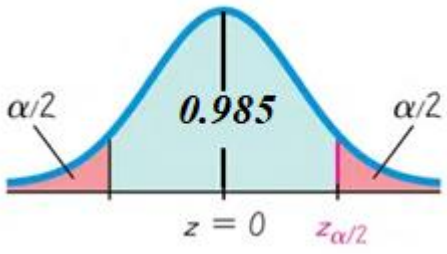
b) **(0.5 puntos)** A la vista del intervalo obtenido, razone si se puede admitir que en Andalucía el 4% de las personas practican natación como hábito deportivo.

c) **(0.75 puntos)** Si mantenemos la misma proporción muestral, ¿cuántas personas, como mínimo, tendrían que formar parte de la muestra seleccionada para que, con un nivel de confianza del 97%, el error cometido en la estimación de la proporción poblacional de quienes practican natación como hábito deportivo en Andalucía fuese como máximo del 3%?

a) La proporción de personas que practican natación como hábito deportivo es $p=\frac{106}{400}=0.265$. El tamaño de la muestra es $n=400$.

Averiguamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza el 98.5 %.

$$1-\alpha=0.985\rightarrow\alpha=0.015\rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.0075\rightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0.9925\rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Busco en la}\\\text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}\rightarrow z_{\alpha/2}=2.43$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901
2,4				0,9925
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* y tenemos

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\left(1-p\right)}{n}}=2.43\cdot\sqrt{\frac{0.265\left(1-0.265\right)}{400}}\simeq0.0536$$

Con un nivel de confianza del 98.5%, el intervalo de confianza para la proporción de personas que practican natación como hábito deportivo en Andalucía es:

$$\left(p-Error,\ p+Error\right)=\left(0.265-0.0536,\ 0.265+0.0536\right)=\left(0.2114,\ 0.3186\right)$$

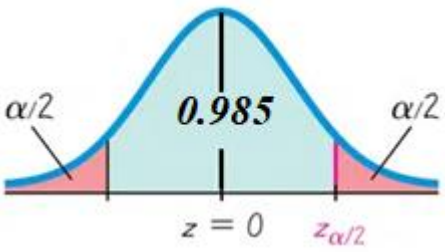
Con un nivel de confianza del 98.5%, el porcentaje de personas que practican natación como hábito deportivo en Andalucía está situado entre el 21.14% y el 31.86%.

b) El 4% se corresponde con una proporción de 0.04. Este valor no pertenece al intervalo de confianza obtenido en el apartado anterior $(0.2114,\ 0.3186)$.

A la vista del intervalo obtenido, no se puede admitir que en Andalucía el 4% de las personas practican natación como hábito deportivo.

c) Averiguamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza el 97 %.

$$1-\alpha=0.97\rightarrow\alpha=0.03\rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.015\rightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0.985\rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Busco en la}\\\text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}\rightarrow z_{\alpha/2}=2.17$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	
2,1								0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* , lo igualamos a 0.03 y despejamos *n*.

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\left(1-p\right)}{n}}\Rightarrow0.03=2.17\cdot\sqrt{\frac{0.265\left(1-0.265\right)}{n}}\Rightarrow\frac{0.03}{2.17}=\sqrt{\frac{0.265\cdot0.735}{n}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{0.03}{2.17}\right)^2=\frac{0.265\cdot0.735}{n}\Rightarrow n=\frac{0.265\cdot0.735}{\left(\frac{0.03}{2.17}\right)^2}\simeq1019.084$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero superior al obtenido. Se debe tomar una muestra de un mínimo de 1020 personas.

PAU 2026 Extraordinaria (suplente 2) Matemáticas CC.SS. II

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Esta prueba consta de 4 ejercicios.
c) En algunos ejercicios se da la posibilidad de elegir entre apartado A) o B). Responda sólo el apartado **que elija. En caso contrario, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar**
d) En cada ejercicio o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
e) Todos los resultados deben estar **suficientemente justificados**.
f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos.
g) La valoración de la corrección gramatical, léxica y ortográfica, así como la presentación del texto no será superior al 10 %.

EJERCICIO 1 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 4x-7y+5z=9 \\ -2x+3y-z=-4 \\ 6x-11y+9z=14 \end{cases}$$

a) **(1.5 puntos)** Clasifique el sistema de ecuaciones y, si es posible, resuélvalo.
b) **(0.75 puntos)** ¿Existe alguna solución donde la incógnita y es el doble de z? En caso afirmativo, obténgala.
c) **(0.75 puntos)** Indique si existe alguna solución del sistema en la que $y=-4$. En caso afirmativo, obténgala.

B) Consideremos el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$3x-4y\le 6;\ x+y\le 9;\ x+4y\le 24;\ 3x+2y\ge 6;\ x\ge 0$$

a) **(1.75 puntos)** Represente gráficamente el recinto y calcule sus vértices.
b) **(0.5 puntos)** Indique razonadamente si los puntos $P(3,\ 0.9)$ y $Q(1,\ 5.9)$ pertenecen al recinto.
c) **(0.75 puntos)** Obtenga el valor máximo y mínimo de la función objetivo $F(x,y)=2x+3y-2$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.

EJERCICIO 2

Una nueva plataforma de streaming realiza una prueba de funcionamiento durante un trimestre (13 semanas). Se estima que el índice de aceptación de esta plataforma evolucionará de acuerdo con la función

$$I(t)=\frac{1}{100}\cdot 2^t;\ 0\le t\le 13$$

siendo t el tiempo transcurrido (en semanas) desde su inicio.

a) **(0.75 puntos)** Obtenga el intervalo en el que el índice va aumentando.
b) **(0.75 puntos)** ¿En cuántas semanas se obtendrá un índice de aceptación de 10.24?
c) **(0.75 puntos)** Calcule la tasa de crecimiento instantánea transcurridas 5 semanas.

d) **(0.75 puntos)** ¿Es posible alcanzar un índice de aceptación de 90 durante el trimestre?

EJERCICIO 3

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral que verifican:
- La probabilidad de que ocurra el suceso A es 0.6.
- La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es 0.15.
- La probabilidad de que ocurra el suceso B sabiendo que ha ocurrido el suceso A es 0.3.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.
b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurran los dos sucesos a la vez.
c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra uno y solo uno de los sucesos.
d) **(0.25 puntos)** ¿Son dependientes los sucesos A y B?

EJERCICIO 4 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) El tiempo, en minutos, que tardan los autobuses de cierta ciudad en recorrer la ruta principal, sigue una distribución Normal de media 40 y desviación típica 5. La empresa clasifica un viaje como "rápido" si el autobús tarda menos de 33.6 minutos en recorrer el trayecto.

a) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que un viaje sea "rápido".
b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que al menos 3 de 5 trayectos seleccionados de esta ruta hayan sido "rápidos".
c) **(0.75 puntos)** Seleccionados 80 trayectos de esta ruta, calcule la probabilidad de que a lo sumo 15 sean "rápidos".

B) Un estudio sobre la diabetes en analítica de sangre, determina que la cantidad de hemoglobina glicosilada en sangre, en porcentaje, sigue una ley Normal de varianza 0.09. Se eligen de forma aleatoria 10 analíticas de sangre y se anota la hemoglobina glicosilada, obteniéndose:

6.6, 5.9, 6.2, 5.7, 5.8, 6.4, 6.4, 6.3, 5.7, 6.0

a) **(0.75 puntos)** Con un nivel de confianza del 97%, calcule un intervalo de confianza para estimar la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional.
b) **(0.5 puntos)** A la vista del intervalo obtenido, razone si se puede admitir que la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional es 6.5.
c) **(0.75 puntos)** ¿Cuántas analíticas, como mínimo, tendrían que formar parte de la muestra seleccionada para que, con un nivel de confianza del 98%, el error cometido en la estimación de la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional sea como máximo de 0.1?

EJERCICIO 1 A) Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 4x-7y+5z=9 \\ -2x+3y-z=-4 \\ 6x-11y+9z=14 \end{cases}$$

a) **(1.5 puntos)** Clasifique el sistema de ecuaciones y, si es posible, resuélvalo.
b) **(0.75 puntos)** ¿Existe alguna solución donde la incógnita y es el doble de z? En caso afirmativo, obténgala.
c) **(0.75 puntos)** Indique si existe alguna solución del sistema en la que $y=-4$. En caso afirmativo, obténgala.

a) El sistema tiene la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 6 & -11 & 9 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 & 9 \\ -2 & 3 & -1 & -4 \\ 6 & -11 & 9 & 14 \end{pmatrix}$.

Triangulamos la matriz ampliada usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 & 9 \\ -2 & 3 & -1 & -4 \\ 6 & -11 & 9 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot \text{Fila } 2^{\text{a}} + \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ -4 \quad 6 \quad -2 \quad -8 \\ 4 \quad -7 \quad 5 \quad 9 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 3 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot \text{Fila } 3^{\text{a}} - 3\cdot \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ 12 \quad -22 \quad 18 \quad 28 \\ -12 \quad 21 \quad -15 \quad -27 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 3 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Fila } 3^{\text{a}} - \text{Fila } 2^{\text{a}} \\ 0 \quad -1 \quad 3 \quad 1 \\ 0 \quad 1 \quad -3 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{4 & -7 & 5 & 9}^{A/B} \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes A y de la matriz ampliada A/B es 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Resolvemos el sistema, a partir de la matriz equivalente obtenida.

$$\begin{pmatrix} \overbrace{4 & -7 & 5 & 9}^{A/B} \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4x-7y+5z=9 \\ -y+3z=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4x-7y+5z=9 \\ 3z-1=y \end{matrix} \Rightarrow 4x-7(3z-1)+5z=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-21z+7+5z=9 \Rightarrow 4x=2+16z \Rightarrow x=\frac{1}{2}+4z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ y=3\alpha-1 \ ; \ \alpha\in\mathbb{R} \\ z=\alpha \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema planteado son $\begin{cases} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ y=3\alpha-1 \ ; \ \alpha\in\mathbb{R} \\ z=\alpha \end{cases}$.

b) Añadimos la ecuación $y=2z$ a la expresión de las soluciones y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ y=3\alpha-1 \\ z=\alpha \\ y=2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ y=3\alpha-1 \\ z=\alpha \\ y=2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ 2\alpha=3\alpha-1 \\ z=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ 1=\alpha \\ z=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4=4.5 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}\right\}}$$

Existe una solución que cumple lo pedido: $x=4.5, \quad y=2, \quad z=1$.

c) Añadimos la ecuación $y=-4$ a la expresión de las soluciones y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ y=3\alpha-1 \\ z=\alpha \\ y=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ -4=3\alpha-1 \\ z=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ -3=3\alpha \\ z=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+4\alpha \\ -1=\alpha \\ z=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}-4=-3.5 \\ y=-4 \\ z=-1 \end{array}\right\}}$$

Existe una solución que cumple lo pedido: $x=-3.5, \quad y=-4, \quad z=-1$

EJERCICIO 1 B) Consideremos el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$3x-4y\le 6;\ x+y\le 9;\ x+4y\le 24;\ 3x+2y\ge 6;\ x\ge 0$$

a) **(1.75 puntos)** Represente gráficamente el recinto y calcule sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** Indique razonadamente si los puntos $P(3,\ 0.9)$ y $Q(1,\ 5.9)$ pertenecen al recinto.

c) **(0.75 puntos)** Obtenga el valor máximo y mínimo de la función objetivo $F(x,y)=2x+3y-2$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x-4y=6$

x	$y=\dfrac{3x-6}{4}$
−2	−3
2	0
6	3

$x+y=9$

x	$y=9-x$
0	9
4	5
6	3

$x+4y=24$

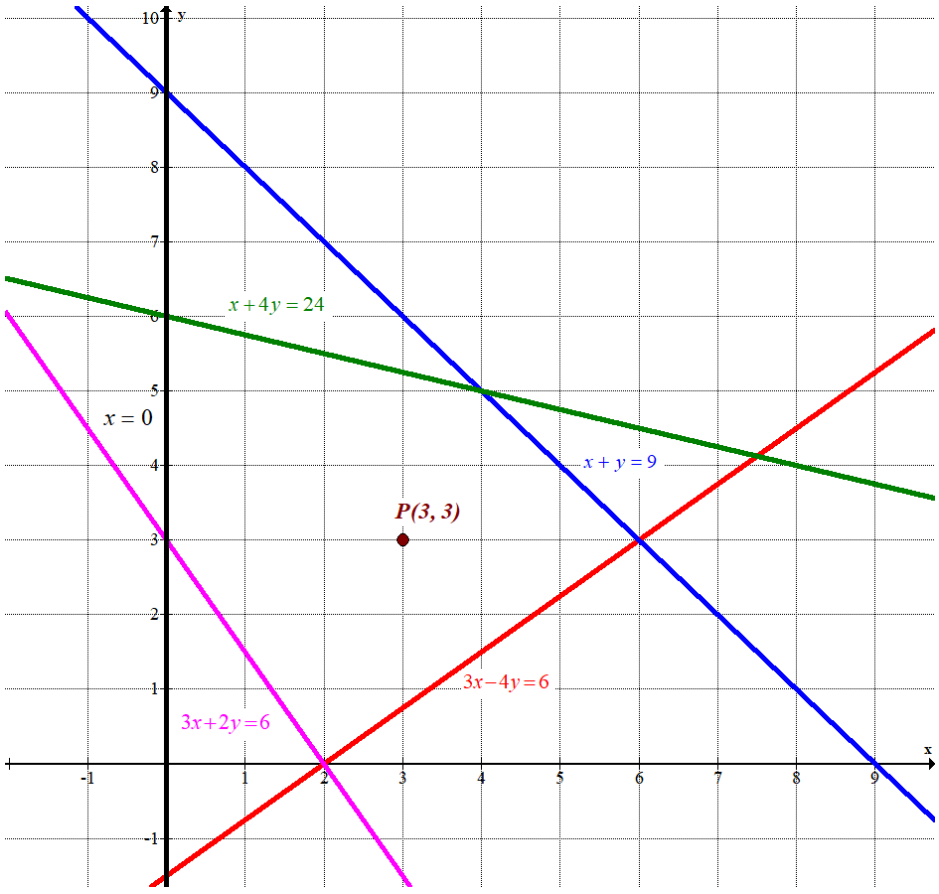
x	$y=\dfrac{24-x}{4}$
0	6
4	5
24	0

$3x+2y=6$

x	$y=\dfrac{6-3x}{2}$
−2	6
0	3
2	0

$x=0$

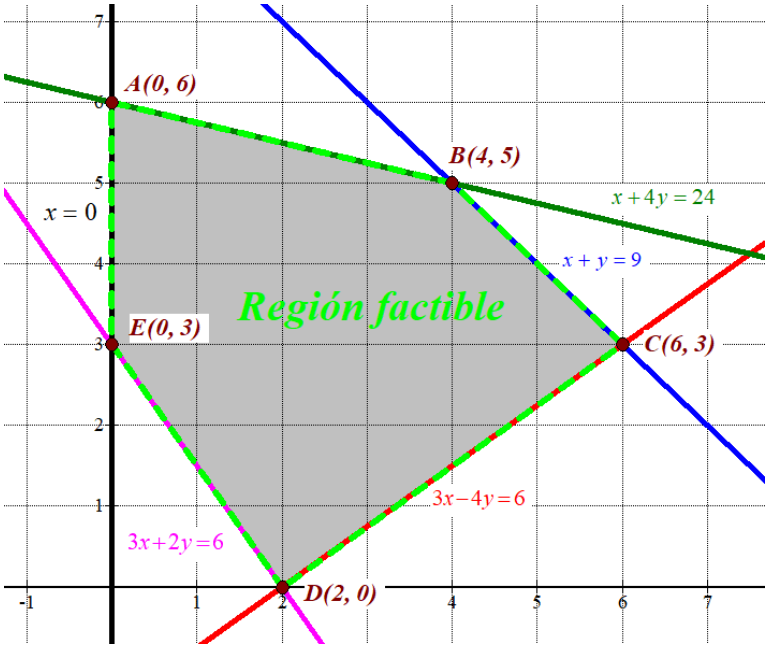
Eje OY



La región factible está situada por debajo de las rectas verde y azul, a la derecha del eje OY y por encima de las rectas rosa y roja. Comprobamos que el punto P(3, 3) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot 3-4\cdot 3\le 6 \\ 3+3\le 9 \\ 3+4\cdot 3\le 24 \\ 3\cdot 3+2\cdot 3\ge 6 \\ 3\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9-12\le 6 \\ 3+3\le 9 \\ 3+12\le 24 \\ 9+6\ge 6 \\ 3\ge 0 \end{array}\right\}$$ ¡Se cumplen todas!

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible se observan en el dibujo del recinto y se pueden obtener de las tablas de valores de las rectas que delimitan la región. Los vértices son los puntos de coordenadas A(0, 6), B(4, 5), C(6, 3), D(2, 0) y E(0, 3).

b) Comprobamos si el punto $P(3,\ 0.9)$ cumple las restricciones planteadas.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot 3-4\cdot 0.9\le 6 \\ 3+0.9\le 9 \\ 3+4\cdot 0.9\le 24 \\ 3\cdot 3+2\cdot 0.9\ge 6 \\ 3\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9-3.6\le 6 \\ 3.9\le 9 \\ 3+3.6\le 24 \\ 9+1.8\ge 6 \\ 3\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5.4\le 6 \\ 3.9\le 9 \\ 6.6\le 24 \\ 10.8\ge 6 \\ 3\ge 0 \end{array}\right\}$$ **¡Se cumplen todas!**

El punto $P(3,\ 0.9)$ pertenece a la región factible.

Comprobamos si el punto $Q(1,\ 5.9)$ cumple las restricciones planteadas.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot 1-4\cdot 5.9\le 6 \\ 1+5.9\le 9 \\ 1+4\cdot 5.9\le 24 \\ 3\cdot 1+2\cdot 5.9\ge 6 \\ 1\ge 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3-23.6\le 6 \\ 6.9\le 9 \\ 1+23.6\le 24 \\ 3+11.8\ge 6 \\ 3\ge 0 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -20.6\le 6 \\ 6.9\le 9 \\ 24.6\le 24 \text{ ¡}NO\text{!} \\ 14.8\ge 6 \\ 3\ge 0 \end{array}\right\} \textbf{¡No se cumplen todas!}$$

El punto $Q(1,\ 5.9)$ no pertenece a la región factible.

c) Valoramos la función beneficio $F(x,y)=2x+3y-2$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo y mínimo.

A(0, 6) → $F(0,6)=2\cdot 0+3\cdot 6-2=16$

B(4, 5) → $F(4,5)=2\cdot 4+3\cdot 5-2=21$ *Máximo*

C(6, 3) → $F(6,3)=2\cdot 6+3\cdot 3-2=19$

D(2, 0) → $F(2,0)=2\cdot 2+3\cdot 0-2=2$ *Mínimo*

E(0, 3) → $F(0,3)=2\cdot 0+3\cdot 3-2=7$

El valor máximo es 21 y se alcanza en el vértice B(4, 5).
El valor mínimo es 2 y se alcanza en el vértice D(2, 0).

EJERCICIO 2

Una nueva plataforma de streaming realiza una prueba de funcionamiento durante un trimestre (13 semanas). Se estima que el índice de aceptación de esta plataforma evolucionará de acuerdo con la función

$$I(t)=\frac{1}{100}\cdot 2^t;\ 0\le t\le 13$$

siendo *t* el tiempo transcurrido (en semanas) desde su inicio.

a) **(0.75 puntos)** Obtenga el intervalo en el que el índice va aumentando.

b) **(0.75 puntos)** ¿En cuántas semanas se obtendrá un índice de aceptación de 10.24?

c) **(0.75 puntos)** Calcule la tasa de crecimiento instantánea transcurridas 5 semanas.

d) **(0.75 puntos)** ¿Es posible alcanzar un índice de aceptación de 90 durante el trimestre?

a) Calculamos la derivada de la función.

$$I(t)=\frac{1}{100}\cdot 2^t \Rightarrow I'(t)=\frac{1}{100}\cdot 2^t\cdot \ln 2=\frac{\ln 2}{100}\cdot 2^t$$

Como $\frac{\ln 2}{100}\simeq 0069>0$ y $2^t>0$ para cualquier valor de *t*, la expresión de la derivada siempre es positiva. El índice de aceptación crece durante las 13 semanas.

b) Buscamos el valor de *t* para el que $I(t)=10.24$.

$$I(t)=10.24\Rightarrow \frac{1}{100}\cdot 2^t=10.24\Rightarrow 2^t=1024\Rightarrow 2^t=2^{10}\Rightarrow \boxed{t=10}$$

Al cabo de la décima semana el índice de aceptación es de 10.24.

c) Debemos calcular $I'(5)$.

$$I'(5)=\frac{\ln 2}{100}\cdot 2^5=0.2218$$

La tasa de crecimiento instantánea transcurridas 5 semanas es de 0.2218.

d) El índice de aceptación crece durante el trimestre. Determinamos el índice de aceptación al cabo de las 13 semanas que será el más alto conseguido en todo el trimestre.

$$I(13)=\frac{1}{100}\cdot 2^{13}=81.92$$

El índice de aceptación más alto que se llega a conseguir en el trimestre es de 81.92, que es menor de 90.

No es posible alcanzar un índice de aceptación de 90 durante el trimestre.

EJERCICIO 3

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral que verifican:
- La probabilidad de que ocurra el suceso A es 0.6.
- La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es 0.15.
- La probabilidad de que ocurra el suceso B sabiendo que ha ocurrido el suceso A es 0.3.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.
b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurran los dos sucesos a la vez.
c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra uno y solo uno de los sucesos.
d) **(0.25 puntos)** ¿Son dependientes los sucesos A y B?

Nos dicen que $P(A)=0.6$, $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0.15$ y $P(B/A)=0.3$.

a) Debemos calcular $P(A\cup B)$. Aplicamos una de las leyes de Morgan.

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=0.15\Rightarrow P(\overline{A\cup B})=0.15\Rightarrow 1-P(A\cup B)=0.15\Rightarrow \boxed{P(A\cup B)=0.85}$$

La probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos vale 0.85.

b) Debemos calcular $P(A\cap B)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=0.6 \\ P(B/A)=0.3 \\ P(B/A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} \end{array}\right\}\Rightarrow 0.3=\frac{P(B\cap A)}{0.6}\Rightarrow P(B\cap A)=0.6\cdot 0.3=\boxed{0.18}$$

La probabilidad de que ocurran los dos sucesos a la vez vale 0.18.

c) Debemos calcular $P\left((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right)$. Como son dos sucesos incompatibles tenemos que $P\left((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right)=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)$.

$$P\left((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right)=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=$$

$$=\left[P(A)-P(A\cap B)\right]+\left[P(\overline{A})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\right]=$$

$$=\left[P(A)-P(A\cap B)\right]+\left[1-P(A)-P(\overline{A}\cap\overline{B})\right]=$$

$$=0.6-0.18+1-0.6-0.15=\boxed{0.67}$$

La probabilidad de que ocurra uno y solo uno de los sucesos vale 0.67.

d) Para que los sucesos sean independientes debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

Calculamos primero el valor de $P(B)$ usando la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cup B)=0.85\\P(A)=0.6\\P(A\cap B)=0.18\\P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\end{array}\right\}\Rightarrow 0.85=0.6+P(B)-0.18\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B)=0.85-0.6+0.18=0.43$$

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=0.18\\P(A)P(B)=0.6\cdot 0.43=0.258\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0.18\neq 0.258=P(A)P(B)$$

La igualdad no se cumple y los sucesos A y B son dependientes.

EJERCICIO 4 A) El tiempo, en minutos, que tardan los autobuses de cierta ciudad en recorrer la ruta principal, sigue una distribución Normal de media 40 y desviación típica 5. La empresa clasifica un viaje como "rápido" si el autobús tarda menos de 33.6 minutos en recorrer el trayecto.
a) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que un viaje sea "rápido".
b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que al menos 3 de 5 trayectos seleccionados de esta ruta hayan sido "rápidos".
c) **(0.75 puntos)** Seleccionados 80 trayectos de esta ruta, calcule la probabilidad de que a lo sumo 15 sean "rápidos".

a) Consideramos X la variable aleatoria que nos da el tiempo, en minutos, que tarda un autobús en recorrer la ruta principal. $X = N(40,5)$.

Para que el viaje sea "rápido" debe tardar menos de 33.6 minutos. Debemos hallar el valor de $P(X < 33.6)$

$$P(X<33.6)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-40}{5}\end{matrix}\right\}=P\left(Z<\frac{33.6-40}{5}\right)=P(Z<-1.28)=$$

$$=P(Z>1.28)=1-P(Z<1.28)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la tabla}\\ \text{de la N(0,1)}\end{matrix}\right\}=1-0.8997=\boxed{0.1003}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,
1,2									0,8997	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,

b) Consideramos Y la variable aleatoria que cuenta el número de viajes que son "rápidos" de un grupo de 5. Esta variable es una binomial siendo n = número de repeticiones = 5 y p = probabilidad de que un viaje sea "rápido" = 0.1003. $Y = B(5, 0.1003)$

Nos piden calcular $P(Y \geq 3)$.

$$P(Y\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$$

$$=\binom{5}{3}0.1003^3\cdot 0.8997^2+\binom{5}{4}0.1003^4\cdot 0.8997^1+\binom{5}{5}0.1003^5\cdot 0.8997^0=$$

$$=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2}\cdot 0.1003^3\cdot 0.8997^2+5\cdot 0.1003^4\cdot 0.8997+1\cdot 0.1003^5\simeq \boxed{0.0086}$$

La probabilidad de que al menos 3 de 5 trayectos seleccionados de esta ruta hayan sido "rápidos" vale 0.0086.

c) Consideramos la variable aleatoria Y´ que cuenta el número de viajes que son "rápidos" de un grupo de 80. Esta variable es una binomial siendo n = número de repeticiones = 80 y p = probabilidad de que un viaje sea "rápido" = 0.1003. $Y' = B(80,\ 0.1003)$

Como el número de repeticiones es muy alto aproximamos la binomial a una normal Y´´ de media $\mu = np = 80 \cdot 0.1003 = 8.024$ y desviación típica

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80 \cdot 0.1003 \cdot 0.8997} \simeq 2.6869$. $Y'' = N(8.024,\ 2.6869)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 8.024 > 5$ y $nq = 80 \cdot 0.8997 = 71.976 > 5$.

Nos piden calcular $P(Y' \leq 15)$.

$$P(Y' \leq 15) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y'' \leq 15.5) = \left\{\begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{Y' - 8.024}{2.6869} \end{matrix}\right\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{15.5 - 8.024}{2.6869}\right) = P(Z \leq 2.78) = \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix}\right\} = \boxed{0.99728}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	
	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	
2,7									0,99728
	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	

De los 80 trayectos la probabilidad de que a lo sumo 15 sean "rápidos" vale 0.99728.

EJERCICIO 4 B) Un estudio sobre la diabetes en analítica de sangre, determina que la cantidad de hemoglobina glicosilada en sangre, en porcentaje, sigue una ley Normal de varianza 0.09. Se eligen de forma aleatoria 10 analíticas de sangre y se anota la hemoglobina glicosilada, obteniéndose:

6.6, 5.9, 6.2, 5.7, 5.8, 6.4, 6.4, 6.3, 5.7, 6.0

a) **(0.75 puntos)** Con un nivel de confianza del 97%, calcule un intervalo de confianza para estimar la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional.

b) **(0.5 puntos)** A la vista del intervalo obtenido, razone si se puede admitir que la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional es 6.5.

c) **(0.75 puntos)** ¿Cuántas analíticas, como mínimo, tendrían que formar parte de la muestra seleccionada para que, con un nivel de confianza del 98%, el error cometido en la estimación de la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional sea como máximo de 0.1?

a) Consideramos X la variable aleatoria que nos da la cantidad de hemoglobina glicosilada en sangre en una analítica de sangre. Como la varianza es 0.09 entonces la desviación típica vale $\sigma = \sqrt{0.09} = 0.3$. $X = N(\mu, 0.3)$

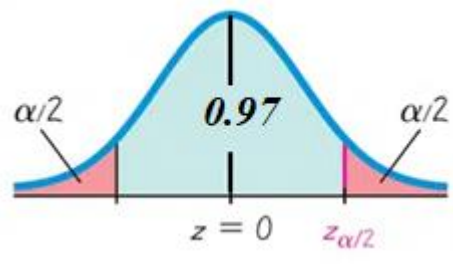
El tamaño de la muestra es $n = 10$.

Obtenemos el valor de la media muestral.

$$\bar{x} = \frac{6.6 + 5.9 + 6.2 + 5.7 + 5.8 + 6.4 + 6.4 + 6.3 + 5.7 + 6.0}{10} = 6.1$$

Averiguamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza el 97 %.

$$1-\alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Busco en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	
2,1								0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{0.3}{\sqrt{10}} \simeq 0.2059$$

Con un nivel de confianza del 97%, el intervalo de confianza para estimar la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional es:

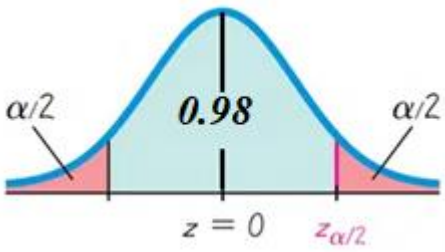
$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(6.1 - 0.2059,\ 6.1 + 0.2059\right) = \left(5.8941,\ 6.3059\right)$$

Con un nivel de confianza del 97%, la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional tiene un valor entre 5.8941 y 6.3059.

b) El valor 6.5 no se encuentra contenido dentro del intervalo de confianza obtenido en el apartado anterior, $(5.8941,\ 6.3059)$. Con una confianza del 97% no se puede admitir que la cantidad media de hemoglobina glicosilada poblacional es 6.5.

c) Averiguamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza el 98 %.

$$1-\alpha=0.98\rightarrow\alpha=0.02\rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.01\rightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0.99\rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Busco en la}\\\text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}\rightarrow z_{\alpha/2}=2.33$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871
2,3				0,9901
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error*, lo igualamos a 0.1 y despejamos *n*.

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow0.1=2.33\cdot\frac{0.3}{\sqrt{n}}\Rightarrow\frac{0.1}{2.33}=\frac{0.3}{\sqrt{n}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{0.3}{0.1/2.33}\Rightarrow n=\left(\frac{0.3}{0.1/2.33}\right)^2\simeq48.86$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero superior al obtenido. Se debe tomar una muestra de un mínimo de 49 analíticas.

PAU 2026 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Esta prueba consta de 4 ejercicios.
c) En algunos ejercicios se da la posibilidad de elegir entre apartado A) o B). Responda sólo el apartado **que elija. En caso contrario, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar**
d) En cada ejercicio o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
e) Todos los resultados deben estar **suficientemente justificados**.
f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos.
g) La valoración de la corrección gramatical, léxica y ortográfica, así como la presentación del texto no será superior al 10 %.

EJERCICIO 1 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) En un festival de cine con tres sesiones se venden tres tipos de entradas: Estándar, Premium y VIP. En la sesión inaugural se vendieron 5 entradas Premium, 20 Estándar y 20 VIP, obteniéndose una recaudación de 1800€. En la sesión nocturna se vendieron 10 VIP, 10 Estándar y 5 Premium, recaudándose 1000€. El día de la proyección de clausura, el número de entradas Premium superó en 4 al resto de entradas, que fueron 12 VIP y 4 Estándar, arrojando una recaudación de 1560€.

a) **(2.25 puntos)** Calcule el precio de cada tipo de entrada y la recaudación total obtenida.
b) **(0.75 puntos)** Determine el tipo de entrada con la que se obtuvo una mayor recaudación y el valor de dicha recaudación.

B) (3 puntos) Una empresa maderera fabrica tableros de dos tipos, DM y aglomerado, a partir de madera triturada. Para producir 1 m^2 de tablero DM se consumen 10 m^3 de madera triturada y se obtiene un beneficio de 10€. Para producir 1 m^2 de tablero aglomerado se consumen 30 m^3 de madera triturada y se obtiene un beneficio de 20€. La empresa puede fabricar diariamente como máximo 12 m^2 de tableros DM y 18 m^2 de tableros de aglomerado. Además, la capacidad total de la empresa limita la producción conjunta a 26 m^2 diarios y dispone de 600 m^3 de madera triturada al día. Determine cuántos metros cuadrados de cada tipo de tablero deben producirse diariamente para maximizar el beneficio total y calcule cuál es ese beneficio.

EJERCICIO 2

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{20} & si\ 0\le x<20\\ a+bx & si\ 20\le x<50\\ 36-\dfrac{x^2}{100} & si\ 50\le x\le 60\end{cases}$$

siendo a y b números reales.

a) **(0.75 puntos)** Determine los valores de a y b para que la función f sea continua en todo su dominio.

b) Para $a = 26$ y $b=-\dfrac{3}{10}$:

i) **(0.75 puntos)** Calcule los extremos relativos de f.
ii) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente f.
iii) **(1 punto)** Calcule el área del recinto acotado limitado por el eje OX y la gráfica de la función f.

EJERCICIO 3 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) a) **(1 punto)** Dada la población $\{-5, -2, 13, 18, 20\}$, se consideran todas las muestras de tamaño 3 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de la variable media muestral.
b) **(1 punto)** Dados dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral, se sabe que $P(A) = 0.75$, $P(B^c) = 0.8$ y $P(A/B) = 0.6$. Calcule las siguientes probabilidades:

$$P(A \cap B),\ P(B - A),\ P(A \cup B),\ P(A^c - B)$$

B) Sean A y B dos sucesos del espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Se sabe que $P(A)$ es el doble de $P(B)$, $P(B^c/A) = 0.75$ y $P(A \cap B) = 0.2$.
a) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra B.
b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que no ocurra ni A ni B. ¿Son los sucesos A^c y B^c incompatibles?
c) Si el experimento se realiza 1350 veces de forma independiente:
i) **(0.25 puntos)** Determine la distribución de la variable aleatoria X: "Número de veces que ocurre B".
ii) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que B ocurra a lo sumo 580 veces, pero más de 499 veces.

EJERCICIO 4
Una empresa de transporte contrata una consultora para optimizar sus recursos. La consultora estudia la distancia en kilómetros que recorren en cada viaje los camiones de la empresa, sabiendo que la variable que mide dicha distancia se distribuye según una Normal de varianza 225 km^2 y media desconocida. Para ello, toma aleatoriamente una muestra de 49 viajes y obtiene una media de 325 km recorridos por viaje.
a) **(0.75 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 97% para que la consultora pueda estimar la distancia media que recorren por viaje los camiones de la empresa.
b) **(0.5 puntos)** A la vista del intervalo obtenido, razone si la consultora puede considerar que los camiones de la empresa recorren por término medio 310 km por viaje que realizan.
c) **(0.75 puntos)** ¿Cuántos viajes, como mínimo, tendría que seleccionar aleatoriamente la consultora para estimar la distancia media que recorren por viaje los camiones de la empresa mediante un intervalo de confianza del 99% que tuviera una amplitud inferior a 4 km?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

A) En un festival de cine con tres sesiones se venden tres tipos de entradas: Estándar, Premium y VIP. En la sesión inaugural se vendieron 5 entradas Premium, 20 Estándar y 20 VIP, obteniéndose una recaudación de 1800€. En la sesión nocturna se vendieron 10 VIP, 10 Estándar y 5 Premium, recaudándose 1000€. El día de la proyección de clausura, el número de entradas Premium superó en 4 al resto de entradas, que fueron 12 VIP y 4 Estándar, arrojando una recaudación de 1560€.

a) **(2.25 puntos)** Calcule el precio de cada tipo de entrada y la recaudación total obtenida.

b) **(0.75 puntos)** Determine el tipo de entrada con la que se obtuvo una mayor recaudación y el valor de dicha recaudación.

a) Llamamos "x" al precio de una entrada Estándar, "y" al de una entrada Premium y "z" al de una entrada VIP.

"En la sesión inaugural se vendieron 5 entradas Premium, 20 Estándar y 20 VIP, obteniéndose una recaudación de 1800€" → $20x+5y+20z=1800$

"En la sesión nocturna se vendieron 10 VIP, 10 Estándar y 5 Premium, recaudándose 1000€" → $10x+5y+10z=1000$

"El día de la proyección de clausura, el número de entradas Premium superó en 4 al resto de entradas, que fueron 12 VIP y 4 Estándar, arrojando una recaudación de 1560€" → "El día de la proyección de clausura, el número de entradas Premium fueron 20, 12 VIP y 4 Estándar, arrojando una recaudación de 1560€" → $4x+20y+12z=1560$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix}20x+5y+20z=1800\\10x+5y+10z=1000\\4x+20y+12z=1560\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}4x+y+4z=360\\2x+y+2z=200\\x+5y+3z=390\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}4x+y+4z=360\\y=200-2x-2z\\x+5y+3z=390\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}4x+200-2x-2z+4z=360\\x+5\left(200-2x-2z\right)+3z=390\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2x+2z=160\\x+1000-10x-10z+3z=390\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}x+z=80\\-9x-7z=-610\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x=80-z\\9x+7z=610\end{matrix}\right\}\Rightarrow 9\left(80-z\right)+7z=610\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 720-9z+7z=610\Rightarrow -2z=-110\Rightarrow\boxed{z=\frac{110}{2}=55}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{x=80-55=25}\Rightarrow\boxed{y=200-2\cdot 25-2\cdot 55=40}$$

Cada entrada estándar cuesta 25 euros, cada entrada premium cuesta 40 euros y cada entrada VIP cuesta 55 euros. La recaudación total fue de 1800 + 1560 = 3360 €.

b) En total se obtuvo una recaudación de 1800 + 1000 + 1560 = 4360 euros.
Se vendieron 20 + 10 + 4 = 34 entradas estándar obteniendo con ellas un importe de 34 · 25 = 850 euros.
Se vendieron 5 + 5 + 20 = 30 entradas premium obteniendo con ellas un importe de 30 · 40 = 1200 euros.
Se vendieron 20 + 10 + 12 = 42 entradas VIP obteniendo con ellas un importe de 42 · 55 = 2310 euros.
Se obtuvo mayor recaudación con las entradas VIP con un importe de 2310 euros.

EJERCICIO 1

B) (3 puntos) Una empresa maderera fabrica tableros de dos tipos, DM y aglomerado, a partir de madera triturada. Para producir 1 m^2 de tablero DM se consumen 10 m^3 de madera triturada y se obtiene un beneficio de 10€. Para producir 1 m^2 de tablero aglomerado se consumen 30 m^3 de madera triturada y se obtiene un beneficio de 20€. La empresa puede fabricar diariamente como máximo 12 m^2 de tableros DM y 18 m^2 de tableros de aglomerado. Además, la capacidad total de la empresa limita la producción conjunta a 26 m^2 diarios y dispone de 600 m^3 de madera triturada al día. Determine cuántos metros cuadrados de cada tipo de tablero deben producirse diariamente para maximizar el beneficio total y calcule cuál es ese beneficio.

Llamamos "x" a los metros cuadrados de DM que se fabrican al día e "y" a los metros cuadrados de aglomerado.

La función que queremos maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x,y)=10x+20y$.

Las restricciones son las siguientes.

La empresa puede fabricar diariamente como máximo 12 m^2 de tableros DM y 18 m^2 de tableros de aglomerado → $x\le 12;\ y\le 18$

La capacidad total de la empresa limita la producción conjunta a 26 m^2 diarios y dispone de 600 m^3 de madera triturada al día → $x+y\le 26;\ 10x+30y\le 600$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x\le 12 \\ y\le 18 \\ x+y\le 26 \\ 10x+30y\le 600 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\le 12 \\ y\le 18 \\ x+y\le 26 \\ x+3y\le 60 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x=12$

$x=12$	y
12	0
12	10
12	14

$y=18$

x	$y=18$
0	18
6	18
12	18

$x+y=26$

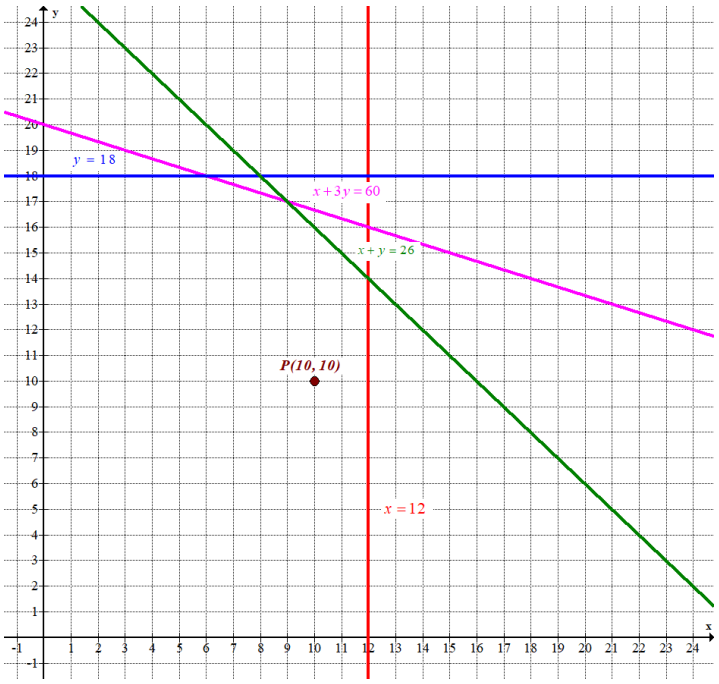
x	$y=26-x$
0	26
9	17
12	14

$x+3y=60$

x	$y=\frac{60-x}{3}$
0	20
6	18
9	17

$x\ge 0;\ y\ge 0$

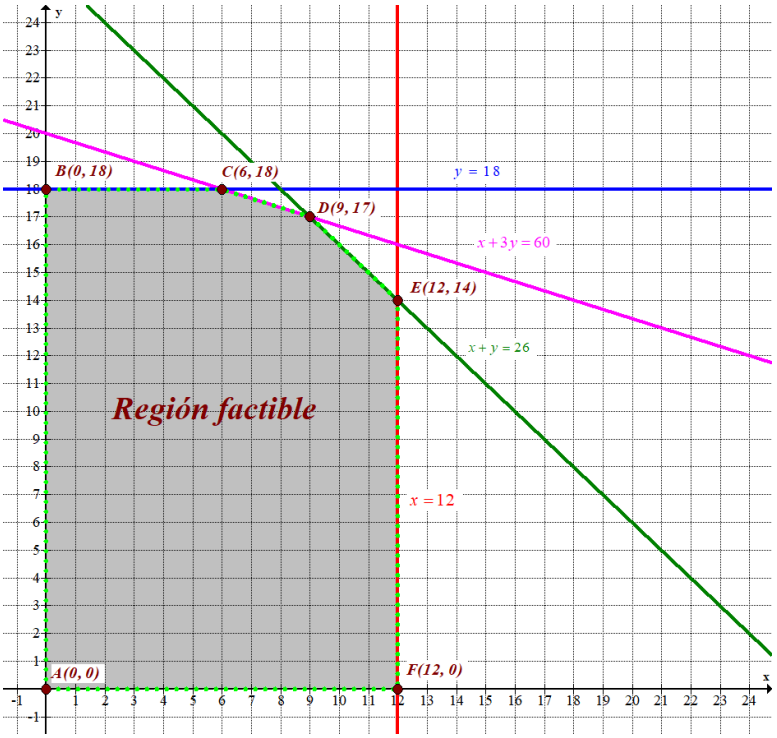
Primer cuadrante



La región factible está situada en el primer cuadrante por debajo de la recta horizontal azul, a la izquierda de la recta vertical roja y por debajo de las rectas oblicuas rosa y verde. Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \le 12 \\ 10 \le 18 \\ 10+10 \le 26 \\ 10+3\cdot 10 \le 60 \\ 10 \ge 0;\ 10 \ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función beneficio $B(x,y)=10x+20y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 18) → $B(0,18)=10\cdot 0+20\cdot 18=360$

C(6, 18) → $B(6,18)=10\cdot 6+20\cdot 18=420$

D(9, 17) → $B(9,17)=10\cdot 9+20\cdot 17=430$ *Máximo*

E(12, 14) → $B(12,14)=10\cdot 12+20\cdot 14=400$

F(12, 0) → $B(12,0)=10\cdot 12+20\cdot 0=120$

El valor máximo es 430 € y se alcanza en el vértice D(9, 17).
El máximo beneficio que se puede conseguir es de 430 euros con la fabricación de 9 m^2 de tablero DM y 17 m^2 de tablero aglomerado.
.

EJERCICIO 2

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{20} & si\ 0\le x<20\\ a+bx & si\ 20\le x<50\\ 36-\dfrac{x^2}{100} & si\ 50\le x\le 60\end{cases}$$

siendo a y b números reales.

a) **(0.75 puntos)** Determine los valores de a y b para que la función f sea continua en todo su dominio.

b) Para $a = 26$ y $b=-\dfrac{3}{10}$:

i) **(0.75 puntos)** Calcule los extremos relativos de f.

ii) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente f.

iii) **(1 punto)** Calcule el área del recinto acotado limitado por el eje OX y la gráfica de la función f.

a) En el intervalo $[0,20)$ la función tiene la expresión $f(x)=\dfrac{x^2}{20}$, que es una expresión polinómica y por tanto continua.

En el intervalo $(20,50)$ la función tiene la expresión $f(x)=a+bx$, que es una expresión polinómica y por tanto continua.

En el intervalo $(50,60]$ la función tiene la expresión $f(x)=36-\dfrac{x^2}{100}$, que es una expresión polinómica y por tanto continua.

Comprobamos la continuidad en los cambios de definición.

La función debe ser continua en $x=20$.

$$\left.\begin{array}{l} f(20)=a+20b\\ \lim\limits_{x\to 20^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 20^+} a+bx=a+20b\\ \lim\limits_{x\to 20^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 20^-} \dfrac{x^2}{20}=\dfrac{20^2}{20}=20\\ \lim\limits_{x\to 20^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 20^-} f(x)=f(20)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a+20b=20}$$

La función debe ser continua en $x=50$.

$$\left.\begin{array}{l} f(50)=36-\dfrac{50^2}{100}=36-25=11\\ \lim\limits_{x\to 50^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 50^+} 36-\dfrac{x^2}{100}=11\\ \lim\limits_{x\to 50^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 50^-} a+bx=a+50b\\ \lim\limits_{x\to 50^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 50^-} f(x)=f(50)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a+50b=11}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a+50b=11 \\ a+20b=20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+50b=11 \\ a=20-20b \end{array}\right\} \Rightarrow 20-20b+50b=11 \Rightarrow 30b=-9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b=\frac{-9}{30}=\frac{-3}{10}} \Rightarrow \boxed{a=20-20\cdot\frac{-3}{10}=20+6=26}$$

Para $a=26$ y $b=\frac{-3}{10}$ la función es continua.

b) Para $a = 26$ y $b=-\frac{3}{10}$ la función es continua y queda $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{20} & si\ 0\le x<20 \\ 26-\frac{3x}{10} & si\ 20\le x<50 \\ 36-\frac{x^2}{100} & si\ 50\le x\le 60 \end{cases}$.

i) Obtenemos la derivada de la función en $[0,20)\cup(20,50)\cup(50,60]$.

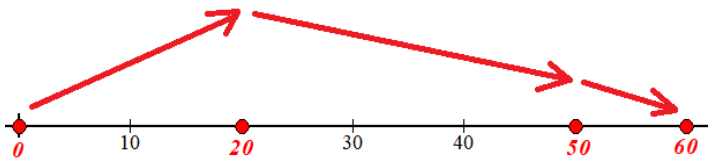
$$f'(x)=\begin{cases} \frac{2x}{20}=\frac{x}{10} & si\ 0\le x<20 \\ -\frac{3}{10} & si\ 20<x<50 \\ -\frac{2x}{100}=\frac{-x}{50} & si\ 50<x\le 60 \end{cases}$$

En el intervalo $[0,20)$ la derivada se anula para $x=0$. En el resto de valores del intervalo la derivada es positiva y por tanto la función es creciente. La función tiene un mínimo relativo en $x=0$.

En el intervalo $(20,50)$ la derivada es negativa y la función decrece en dicho intervalo. La función tiene un máximo relativo en $x=20$.

En el intervalo $(50,60]$ la derivada siempre es negativa por lo que la función decrece. La función tiene un mínimo relativo en $x=60$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente.



Para $x=0$ la función vale 0. El mínimo relativo tiene coordenadas (0, 0).

Para $x=20$ la función vale $26-\frac{3}{10}\cdot 20=20$. El máximo relativo tiene coordenadas (20, 20).

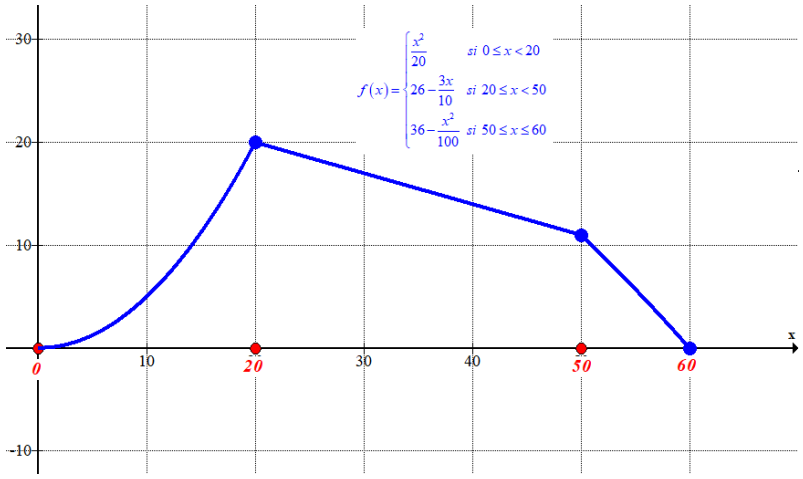
Para $x=60$ la función vale $36-\frac{60^2}{100}=0$. El mínimo relativo tiene coordenadas (60, 0).

ii) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

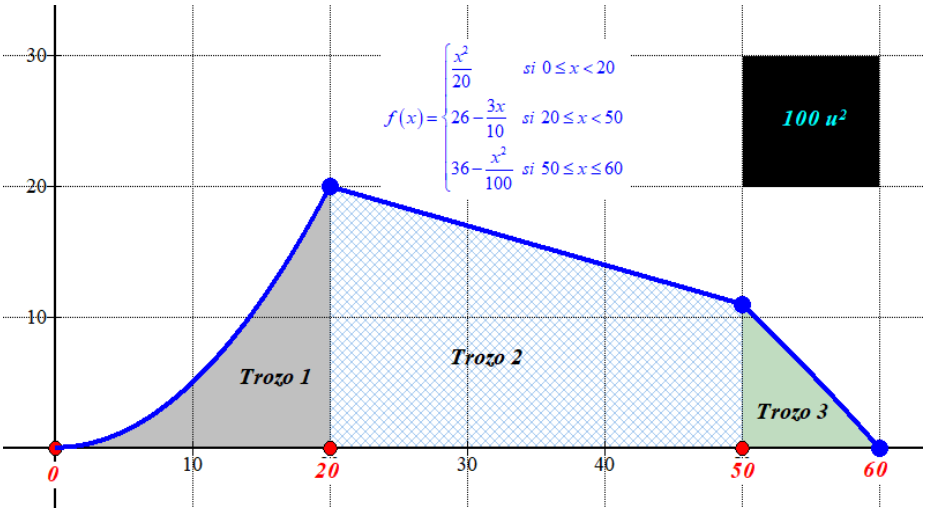
x	$y=\frac{x^2}{20}$
0	0
10	5
15	11.25

x	$y=26-\frac{3x}{10}$
20	20
30	17
45	12.5

x	$y=36-\frac{x^2}{100}$
50	11
60	0



ii) El área del recinto acotado limitado por el eje OX y la gráfica de la función f lo calculamos con tres integrales definidas. El área será la suma de las tres áreas.



$$Área=\int_0^{20}\frac{x^2}{20}dx+\int_{20}^{50}26-\frac{3x}{10}dx+\int_{50}^{60}36-\frac{x^2}{100}dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{60}\right]_0^{20}+\left[26x-\frac{3x^2}{20}\right]_{20}^{50}+\left[36x-\frac{x^3}{300}\right]_{50}^{60}=\left(\frac{20^3}{60}-\frac{0^3}{60}\right)+$$

$$+\left(\left[26\cdot 50-\frac{3\cdot 50^2}{20}\right]-\left[26\cdot 20-\frac{3\cdot 20^2}{20}\right]\right)+\left(\left[36\cdot 60-\frac{60^3}{300}\right]-\left[36\cdot 50-\frac{50^3}{300}\right]\right)=$$

$$=\frac{400}{3}+465+\frac{170}{3}=\boxed{655u^2}$$

EJERCICIO 3

A) a) **(1 punto)** Dada la población {−5, −2, 13, 18, 20}, se consideran todas las muestras de tamaño 3 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de la variable media muestral.

b) **(1 punto)** Dados dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral, se sabe que $P(A) = 0.75$, $P(B^c) = 0.8$ y $P(A/B) = 0.6$. Calcule las siguientes probabilidades:

$P(A \cap B)$, $P(B - A)$, $P(A \cup B)$, $P(A^c - B)$

a) La media de las muestras de tamaño 3 es igual que la media de la distribución.

$$Media = \frac{-5-2+13+18+20}{5} = 8.8$$

Calculamos la varianza poblacional.

$$\sigma_X{}^2 = \frac{(-5)^2+(-2)^2+13^2+18^2+20^2}{5} - 8.8^2 = 106.96$$

La varianza de la distribución de la variable media muestral de tamaño 3 vale:

$$Varianza = \frac{\sigma_X{}^2}{3} = \frac{106.96}{3} = 35.6533$$

b) La probabilidad del suceso B vale $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0.8 = 0.2$.

Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0.6 = \frac{P(A \cap B)}{0.2} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.6 \cdot 0.2 = 0.12}$$

Calculamos $P(B - A) = P(B \cap A^c)$.

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) \Rightarrow 0.2 = 0.12 + P(B \cap A^c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(B \cap A^c) = 0.2 - 0.12 = 0.08}$$

Calculamos $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.75 + 0.2 - 0.12 = \boxed{0.83}$$

Obtenemos el valor de $P(A^c - B) = P(A^c \cap B^c)$.

$$P(A^c - B) = P(A^c \cap B^c) = P\left((A \cup B)^C\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.83 = \boxed{0.17}$$

EJERCICIO 3

B) Sean A y B dos sucesos del espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Se sabe que $P(A)$ es el doble de $P(B)$, $P(B^c/A) = 0.75$ y $P(A \cap B) = 0.2$.

a) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra B.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que no ocurra ni A ni B. ¿Son los sucesos A^c y B^c incompatibles?

c) Si el experimento se realiza 1350 veces de forma independiente:

i) **(0.25 puntos)** Determine la distribución de la variable aleatoria X: "Número de veces que ocurre B".

ii) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que B ocurra a lo sumo 580 veces, pero más de 499 veces.

a) Si $P(B) = p$ nos dicen que $P(A) = 2p$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(B^c / A) = 1 - P(B / A) \Rightarrow 0.75 = 1 - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1 - 0.75 = 0.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.2}{2p} = 0.25 \Rightarrow 0.2 = 0.25 \cdot 2p = 0.5p \Rightarrow \boxed{p = \frac{0.2}{0.5} = 0.4}$$

Hemos obtenido que $P(B) = 0.4$.

b) Sabemos que $P(A) = 2 \cdot P(B) = 2 \cdot 0.4 = 0.8$. Debemos calcular $P(A^c \cap B^c)$.

$$P(A^c \cap B^c) = P\left((A \cup B)^c\right) = 1 - P(A \cup B) =$$

$$= 1 - \left[P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right] = 1 - [0.8 + 0.4 - 0.2] = \boxed{0}$$

Al ser la probabilidad de la intersección de los sucesos nula la intersección de los sucesos es vacía. Los sucesos A^c y B^c son incompatibles.

c) i) La variable aleatoria X es una variable binomial, siendo n = número de repeticiones = 1350 y p = probabilidad de que ocurra B = 0.4. $X = B(1350,\ 0.4)$.

ii) Como el número de repeticiones es muy alto hallamos la probabilidad pedida aproximando la distribución binomial a una distribución normal Y de media $\mu = np = 1350 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 540$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1350 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = 18$.

$Y = N(540, 18)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 540 > 5$ y $nq = 1350 \cdot 0.6 = 810 > 5$.

Calculamos la probabilidad pedida $P(499 < X \leq 580)$.

$$P(499 < X \leq 580) = P(X \leq 580) - P(X \leq 499) = \{Corrección\ de\ Yates\} =$$

$$= P(Y \le 580.5) - P(Y \le 499.5) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{Y - 540}{18} \end{matrix} \right\} =$$

$$= P\left(Z \le \frac{580.5 - 540}{18} \right) - P\left(Z \le \frac{499.5 - 540}{18} \right) = P(Z \le 2.25) - P(Z \le -2.25) =$$

$$= P(Z \le 2.25) - P(Z \ge 2.25) = P(Z \le 2.25) - \left[1 - P(Z \le 2.25) \right] =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} = 0.9878 - 1 + 0.9878 = \boxed{0.9756}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160		
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557		
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948		
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331		
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700		
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054		
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389		
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704		
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995		
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264		
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508		
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729		
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925		
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099		
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251		
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382		
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495		
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591		
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671		
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738		
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793		
	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838		
2,2						0,9878	
	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904		

La probabilidad de que *B* ocurra a lo sumo 580 veces, pero más de 499 veces tiene un valor de 0.9756.

EJERCICIO 4

Una empresa de transporte contrata una consultora para optimizar sus recursos. La consultora estudia la distancia en kilómetros que recorren en cada viaje los camiones de la empresa, sabiendo que la variable que mide dicha distancia se distribuye según una Normal de varianza 225 km^2 y media desconocida. Para ello, toma aleatoriamente una muestra de 49 viajes y obtiene una media de 325 km recorridos por viaje.

a) **(0.75 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 97% para que la consultora pueda estimar la distancia media que recorren por viaje los camiones de la empresa.

b) **(0.5 puntos)** A la vista del intervalo obtenido, razone si la consultora puede considerar que los camiones de la empresa recorren por término medio 310 km por viaje que realizan.

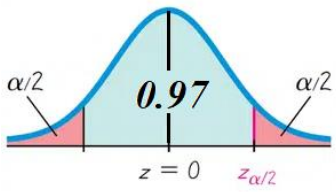
c) **(0.75 puntos)** ¿Cuántos viajes, como mínimo, tendría que seleccionar aleatoriamente la consultora para estimar la distancia media que recorren por viaje los camiones de la empresa mediante un intervalo de confianza del 99% que tuviera una amplitud inferior a 4 km?

X = la distancia en kilómetros que recorren en cada viaje los camiones de la empresa.

$X = N\left(\mu, \sqrt{225}\right) \rightarrow X = N\left(\mu, 15\right)$.

a) El tamaño de la muestra es n = 49. La media muestral es $\bar{x} = 325$ km.

Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 97%.



$$1-\alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow \left\{\begin{matrix} Miramos\ en\ la \\ tabla\ N(0,1) \end{matrix}\right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

Hallamos el error.

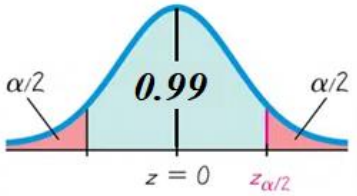
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{15}{\sqrt{49}} = 4.65$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(325 - 4.65,\ 325 + 4.65\right) = \left(320.35,\ 329.65\right)$$

b) 310 kilómetros no pertenece al intervalo de confianza obtenido en el apartado anterior. No se puede aceptar esa media de kilometraje por viaje.

c) Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 99%.



$$1-\alpha=0.99\rightarrow\alpha=0.01\rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.005\rightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0.995\rightarrow$$

$$\rightarrow\left\{\begin{matrix}Miramos\,en\,la\\tabla\,N(0,1)\end{matrix}\right\}\rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{2.57+2.58}{2}=2.575$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239			
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636			
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026			
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406			
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772			
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123			
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454			
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764			
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051			
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315			
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554			
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770			
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962			
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131			
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279			
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406			
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515			
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608			
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686			
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750			
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803			
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846			
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881			
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909			
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931			
2,5								0,9949	0,9951	
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961			

Como la amplitud del intervalo debe ser como máximo 4 km entonces el error debe ser como máximo la mitad: 2 km.
Utilizamos la fórmula del error para despejar *n*.

$$\left.\begin{matrix}Error=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\\Error=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow2=2.575\cdot\frac{15}{\sqrt{n}}\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{2.575\cdot15}{2}\Rightarrow n=\left(\frac{2.575\cdot15}{2}\right)^2=372.97$$

El tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria para poder estimar la media poblacional con un error inferior a 2 km y un nivel de confianza del 99% es de 373 viajes.

PAU 2026 Ordinaria (suplente 1) Matemáticas CC.SS. II

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Esta prueba consta de 4 ejercicios.
c) En algunos ejercicios se da la posibilidad de elegir entre apartado A) o B). Responda sólo el apartado **que elija. En caso contrario, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar**
d) En cada ejercicio o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
e) Todos los resultados deben estar **suficientemente justificados**.
f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos.
g) La valoración de la corrección gramatical, léxica y ortográfica, así como la presentación del texto no será superior al 10 %.

EJERCICIO 1

Una empresa fabrica dos productos, P_1 y P_2, a partir de tres recursos productivos: mano de obra, energía y capital. La disponibilidad anual de energía y de capital son 3500 unidades y 1300 unidades respectivamente. Para poder optar a una ayuda del gobierno para el fomento del empleo, la empresa va a contratar, al menos, 4200 horas anuales. Cada unidad de P_1 necesita para su fabricación 10 horas de mano de obra, 10 unidades de energía y 5 unidades de capital; siendo el precio de cada unidad de P_1 800 euros. Cada unidad de P_2 necesita para su fabricación 20 horas de mano de obra y 5 unidades de energía; vendiéndose a 400 euros la unidad de P_2.

La empresa vende todo lo que produce y quiere maximizar sus ingresos anuales por la venta de los dos productos.

a) **(2.5 puntos)** ¿Cuántas unidades de cada producto han de fabricarse anualmente para maximizar los ingresos? ¿Cuál es dicho ingreso óptimo?
b) **(0.5 puntos)** ¿Es posible alcanzar el máximo elaborando un único producto?

EJERCICIO 2

Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) Sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+9x & si\ x<3 \\ \dfrac{bx+18}{x+1} & si\ x\geq 3 \end{cases}$$

siendo a y b números reales.

a) **(1 punto)** Determine los valores de a y b para que f sea continua en su dominio y su gráfica pase por el punto (2, 2).
b) Para $a=b=-6$:
   i) **(0.5 puntos)** Determine las asíntotas de f, en el caso de que existan.
   ii) **(0.75 puntos)** Estudie la monotonía de f y calcule sus extremos relativos.
   iii) **(0.75 puntos)** Esboce la gráfica de f.

B) Se considera la función $f(x)=1-\dfrac{x-6}{2+x}$.

a) **(0.75 puntos)** Halle su dominio y determine sus asíntotas.

b) **(1 punto)** Estudie la monotonía y la curvatura, calculando los extremos relativos y los puntos de inflexión.
c) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente *f*.
d) **(0.75 puntos)** Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de en todos aquellos puntos donde la pendiente de dicha recta vale –8.

EJERCICIO 3 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) Sea una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 2.
a) **(1 punto)** Se selecciona una muestra de tamaño 81 resultando una media de 20. Calcule un intervalo de confianza al 98.5% para estimar la media poblacional. ¿Qué error máximo se comete en la estimación?
b) **(0.75 puntos)** Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿qué tamaño mínimo debería tener una nueva muestra para que la amplitud del intervalo para la media fuese inferior a 2.16?
c) **(0.25 puntos)** Razone qué efecto produciría sobre la amplitud del intervalo una disminución del nivel de confianza.

B) Sean *A* y *B* dos sucesos del espacio muestral tales que:

$$P(A)=0.4,\ P\left(B^C\right)=0.7,\ P(A\cup B)=0.58$$

a) **(0.5 puntos)** ¿Son *A* y *B* independientes? ¿Son incompatibles?
b) Calcule la probabilidad de que:
i) **(0.5 puntos)** Ocurra alguno de los sucesos contrarios.
ii) **(0.5 puntos)** Ocurra *B* sabiendo que no ha ocurrido *A*.
iii) **(0.5 puntos)** Ocurra uno y solo uno de los dos sucesos.

EJERCICIO 4
Una empresa de alquiler de patinetes eléctricos quiere analizar el comportamiento de sus usuarios durante la hora punta de la mañana en una determinada ciudad. La duración del trayecto de cada usuario (en minutos) se distribuye según una ley Normal con media 18 y desviación típica 4.
a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un usuario tarde menos de 15 minutos en hacer su trayecto?
b) **(1.25 puntos)** Se sabe que cada usuario que desbloquea un patinete tiene una probabilidad de 0.9 de completar su trayecto sin incidencias. Si 120 usuarios desbloquean un patinete para moverse por la ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 110 completen el trayecto sin incidencias?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Una empresa fabrica dos productos, P_1 y P_2, a partir de tres recursos productivos: mano de obra, energía y capital. La disponibilidad anual de energía y de capital son 3500 unidades y 1300 unidades respectivamente. Para poder optar a una ayuda del gobierno para el fomento del empleo, la empresa va a contratar, al menos, 4200 horas anuales. Cada unidad de P_1 necesita para su fabricación 10 horas de mano de obra, 10 unidades de energía y 5 unidades de capital; siendo el precio de cada unidad de P_1 800 euros. Cada unidad de P_2 necesita para su fabricación 20 horas de mano de obra y 5 unidades de energía; vendiéndose a 400 euros la unidad de P_2.

La empresa vende todo lo que produce y quiere maximizar sus ingresos anuales por la venta de los dos productos.

a) **(2.5 puntos)** ¿Cuántas unidades de cada producto han de fabricarse anualmente para maximizar los ingresos? ¿Cuál es dicho ingreso óptimo?

b) **(0.5 puntos)** ¿Es posible alcanzar el máximo elaborando un único producto?

a) Llamamos "x" a las unidades de P_1 que se producen al año e "y" a las unidades de P_2 que se producen al año. Hacemos una tabla con los datos.

	Energía	Mano de obra	Capital	Ingresos
Producto P_1 (x)	10x	10x	5x	800x
Producto P_2 (y)	5y	20y		400y
TOTALES	$10x+5y$	$10x+20y$	$5x$	$800x+400y$

La función que queremos maximizar son los ingresos que vienen dados por la expresión $I(x,y)=800x+400y$.

Las restricciones son las siguientes.

La disponibilidad anual de energía y de capital son 3500 unidades y 1300 unidades respectivamente → $10x+5y\le 3500;\ 5x\le 1300$

Para poder optar a una ayuda del gobierno para el fomento del empleo, la empresa va a contratar, al menos, 4200 horas anuales → $10x+20y\ge 4200$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10x+20y\ge 4200 \\ 10x+5y\le 3500 \\ 5x\le 1300 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y\ge 420 \\ 2x+y\le 700 \\ x\le 260 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+2y=420$

x	$y=\dfrac{420-x}{2}$
0	210
260	80
420	0

$2x+y=700$

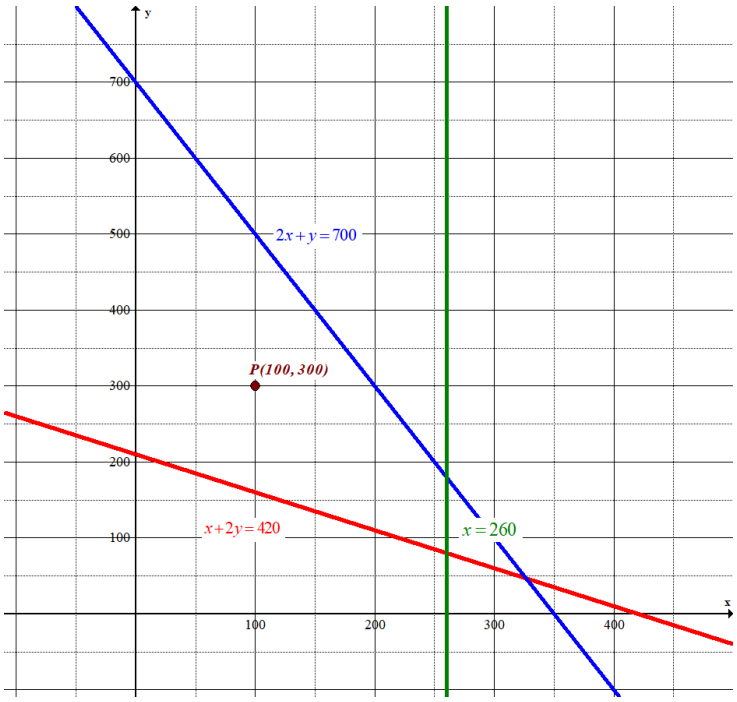
x	$y=700-2x$
0	700
260	180
350	0

$x=260$

$x=260$	y
260	0
260	80
260	180

$x\ge 0;\ y\ge 0$

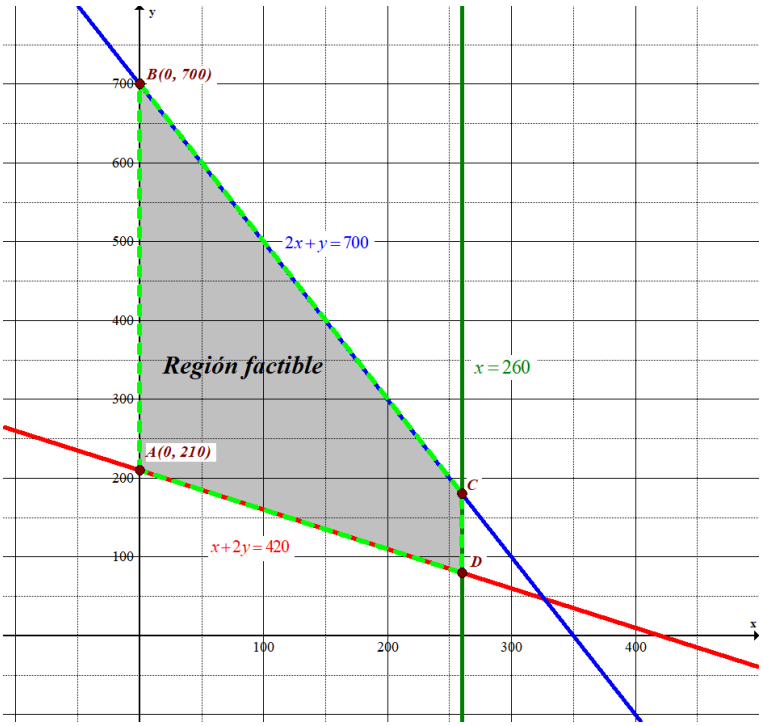
Primer cuadrante



La región factible está situada en el primer cuadrante por debajo de la recta azul, a la izquierda de la recta vertical verde y por encima de la recta oblicua roja.
Comprobamos que el punto P(100, 300) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 100+2\cdot 300 \geq 420 \\ 2\cdot 100+300 \leq 700 \\ 100 \leq 260 \\ 100 \geq 0;\ 300 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 100+600 \geq 420 \\ 200+300 \leq 700 \\ 100 \leq 260 \\ 100 \geq 0;\ 300 \geq 0 \end{array}\right\}$$ ¡Se cumplen todas!

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$\left.\begin{matrix} 2x+y=700 \\ x=260 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\cdot 260+y=700 \Rightarrow y=700-520=180 \Rightarrow C(260,180)$$

$$\left.\begin{matrix} x+2y=420 \\ x=260 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 260+2y=420 \Rightarrow 2y=160 \Rightarrow y=80 \Rightarrow D(260,80)$$

Valoramos la función ingresos $I(x,y)=800x+400y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

A(0, 210) → $I(0,210)=800\cdot 0+400\cdot 210=84000$

B(0, 700) → $I(0,700)=800\cdot 0+400\cdot 700=280000$ *Máximo*

C(260, 180) → $I(260,180)=800\cdot 260+400\cdot 180=280000$ *Máximo*

D(260, 80) → $I(260,80)=800\cdot 260+400\cdot 80=240000$

El valor máximo es 280000 € y se alcanza en los vértices B(0, 700) y C(260, 180).
El máximo ingreso de 280000 € se consigue en todos los puntos con coordenadas enteras del segmento BC: B(0, 700), (1, 698), (2, 696), (3, 694), ……., (257, 186), (258, 184), (259, 182), C(260, 180).

b) Es posible alcanzar los máximos ingresos fabricando solo 700 unidades del producto P_2.

EJERCICIO 2

A) Sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+9x & si\ x<3 \\ \dfrac{bx+18}{x+1} & si\ x\geq 3 \end{cases}$$

siendo a y b números reales.

a) **(1 punto)** Determine los valores de a y b para que f sea continua en su dominio y su gráfica pase por el punto (2, 2).

b) Para $a=b=-6$:

i) **(0.5 puntos)** Determine las asíntotas de f, en el caso de que existan.

ii) **(0.75 puntos)** Estudie la monotonía de f y calcule sus extremos relativos.

iii) **(0.75 puntos)** Esboce la gráfica de f.

a) Para que la gráfica pase por el punto (2, 2) debe ser $f(2)=2$.

$$f(2)=2\Rightarrow 2^3+a\cdot 2^2+9\cdot 2=2\Rightarrow 8+4a+18=2\Rightarrow 4a=-24\Rightarrow \boxed{a=-6}$$

La función queda $f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+9x & si\ x<3 \\ \dfrac{bx+18}{x+1} & si\ x\geq 3 \end{cases}$.

La función debe ser continua en $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=\dfrac{3b+18}{3+1}=\dfrac{3b+18}{4} \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{bx+18}{x+1}=\dfrac{3b+18}{4} \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x^3-6x^2+9x=3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3) \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{3b+18}{4}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3b+18=0\Rightarrow 3b=-18\Rightarrow \boxed{b=-6}$$

Los valores buscados son $a=b=-6$.

b) Para $a=b=-6$ la función es continua y queda $f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+9x & si\ x<3 \\ \dfrac{-6x+18}{x+1} & si\ x\geq 3 \end{cases}$.

i) **Asíntotas verticales.** $x=a$.

El dominio de la función es $\mathbb{R}$. La función no tiene asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3-6x^2+9x=-\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-6x+18}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-6x}{x}+\frac{18}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-6+\frac{18}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-6+\frac{18}{+\infty}}{1+\frac{1}{+\infty}} = \frac{-6+0}{1+0} = -6$$

La recta $y=-6$ es asíntota horizontal de la función cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Cuando x tiende a $+\infty$ la función tiene asíntota horizontal, por lo que no tiene asíntota oblicua.

Estudiamos la función cuando x tiende a $-\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-6x^2+9x}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2-6x+9 = +\infty$$

La función no tiene asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

ii) Obtenemos la derivada de la función en $\mathbb{R}-\{3\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2-12x+9 & si\ x<3 \\ \dfrac{-6(x+1)-1\cdot(-6x+18)}{(x+1)^2} = \dfrac{-6x-6+6x-18}{(x+1)^2} = \dfrac{-24}{(x+1)^2} & si\ x>3 \end{cases}$$

En el intervalo $(3,+\infty)$ la derivada tiene la expresión $f'(x)=\dfrac{-24}{(x+1)^2}$, que es siempre negativa. La función decrece en $(3,+\infty)$.

En el intervalo $(-\infty,3)$ la derivada tiene la expresión $f'(x)=3x^2-12x+9$. Averiguamos cuando se anula.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12x+9=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow$$

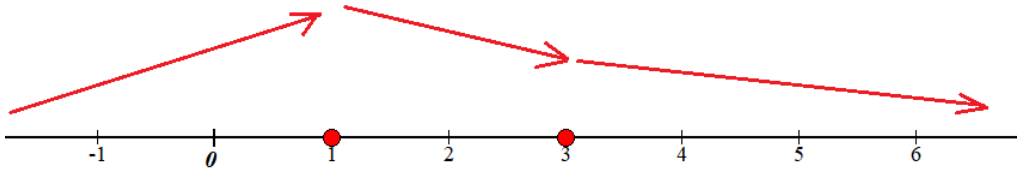
$$\Rightarrow x = \frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot3}}{2} = \frac{4\pm2}{2} = \begin{cases} \dfrac{4-2}{2} = \boxed{1=x} \\ \dfrac{4+2}{2} = \boxed{3=x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=3\cdot0^2-12\cdot0+9=9>0$. La función crece en $(-\infty,1)$.
- En el intervalo $(1,3)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=3\cdot2^2-12\cdot2+9=-3<0$. La función decrece en $(1,3)$.

La función crece en $(-\infty,1)$ y decrece en $(1,+\infty)$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente:



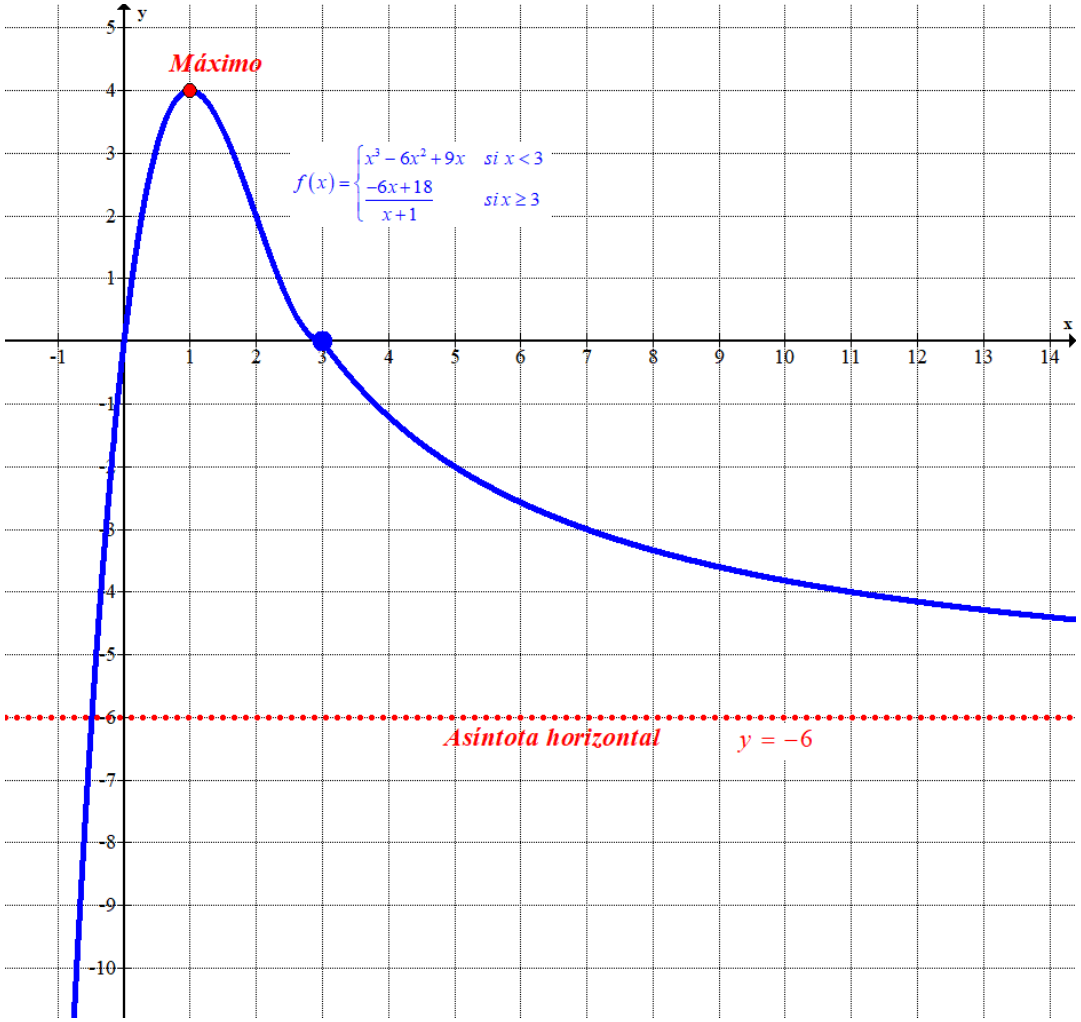
La función tiene un máximo relativo en $x=1$.

Como $f(1)=1^3-6\cdot1^2+9\cdot1=4$ el máximo relativo y absoluto tiene coordenadas (1, 4).

iii) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$y=x^3-6x^2+9x$
-1	-16
0	0
1	4
2	2

x	$y=\dfrac{-6x+18}{x+1}$
3	0
5	-2
7	-3
11	-4



EJERCICIO 2

B) Se considera la función $f(x)=1-\dfrac{x-6}{2+x}$.

a) **(0.75 puntos)** Halle su dominio y determine sus asíntotas.
b) **(1 punto)** Estudie la monotonía y la curvatura, calculando los extremos relativos y los puntos de inflexión.
c) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente *f*.
d) **(0.75 puntos)** Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de en todos aquellos puntos donde la pendiente de dicha recta vale –8.

a) El denominador de la fracción se anula para $x=-2$. El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-2\}$.

Asíntotas verticales. $x=a$.

¿$x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\left(1-\frac{x-6}{2+x}\right)=1-\frac{-2-6}{2-2}=1+\frac{8}{0}=\infty$$

$x=-2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}1-\frac{x-6}{2+x}=\lim_{x\to\infty}1-\frac{\frac{x}{x}-\frac{6}{x}}{\frac{2}{x}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}1-\frac{1-\frac{6}{x}}{\frac{2}{x}+1}=1-\frac{1-\frac{6}{\infty}}{\frac{2}{\infty}+1}=1-\frac{1-0}{0+1}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal la función no puede tener asíntota oblicua.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x)=1-\frac{x-6}{2+x}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1\cdot(2+x)-1\cdot(x-6)}{(2+x)^2}=-\frac{2+x-x+6}{(2+x)^2}=\frac{-8}{(2+x)^2}$$

Esta derivada siempre es negativa. La función decrece en todo su dominio. La función no tiene extremos relativos.
Averiguamos cuando se anula la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{-8}{(2+x)^2}=-8(2+x)^{-2}\Rightarrow f''(x)=-8(-2)(2+x)^{-3}=\frac{16}{(2+x)^3}$$

Esta derivada segunda nunca se anula. La función no tiene puntos de inflexión.
Estudiamos el signo de la segunda derivada antes y después de $x=-2$.

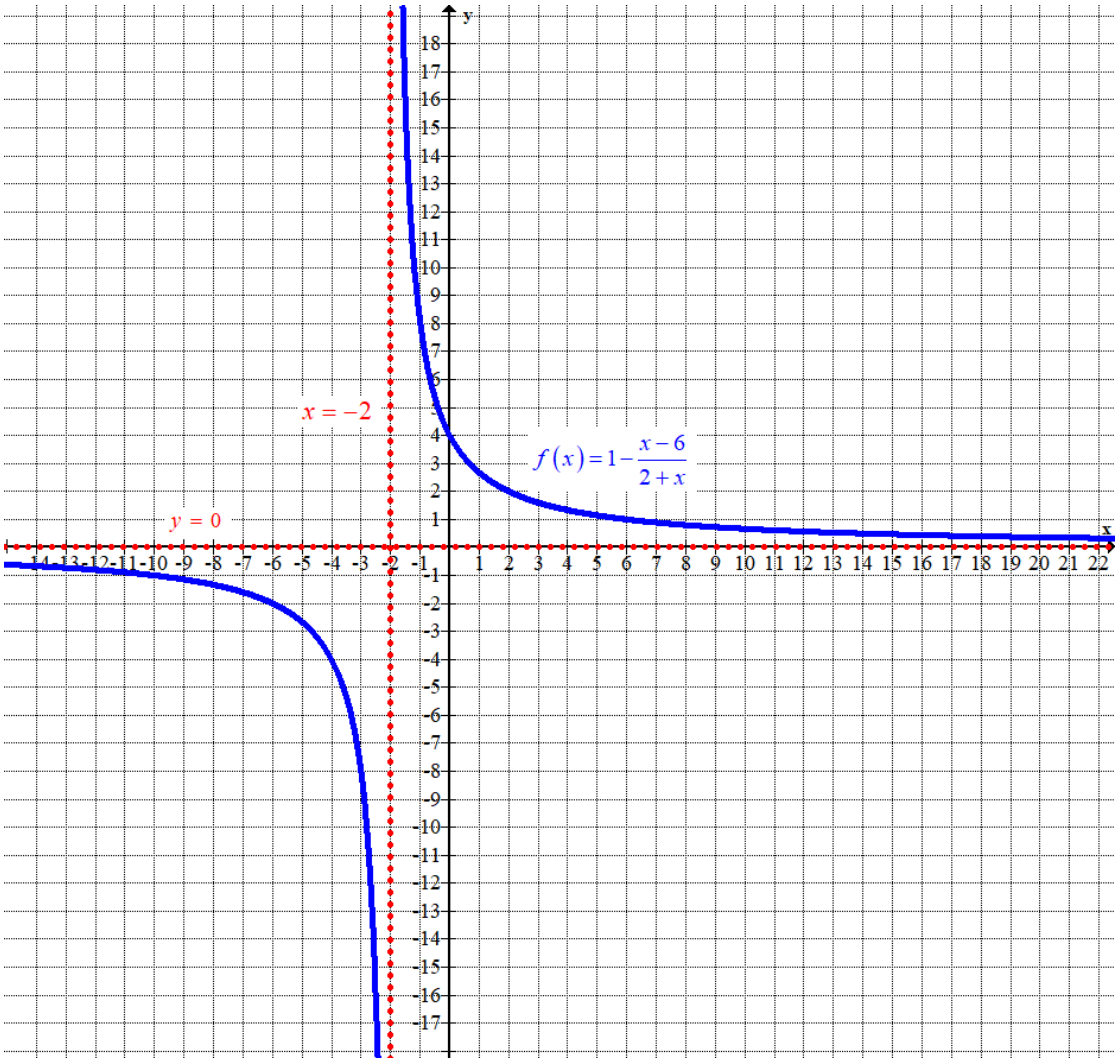
- En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos $x=-3$ y la derivada segunda vale

  $f''(-3)=\dfrac{16}{(2-3)^3}=-16<0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty,-2)$.

- En el intervalo $(-2,+\infty)$ tomamos $x=0$ y la derivada segunda vale $f''(0)=\dfrac{16}{(2+0)^3}=2>0$. La función es convexa (∪) en $(-2,+\infty)$.

c) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

x	$f(x)=1-\dfrac{x-6}{2+x}$
–10	–1
–3	–8
0	4
8	0.8



d) La pendiente de la recta tangente en $x=a$ es el valor de la derivada en dicho valor $f'(a)$.

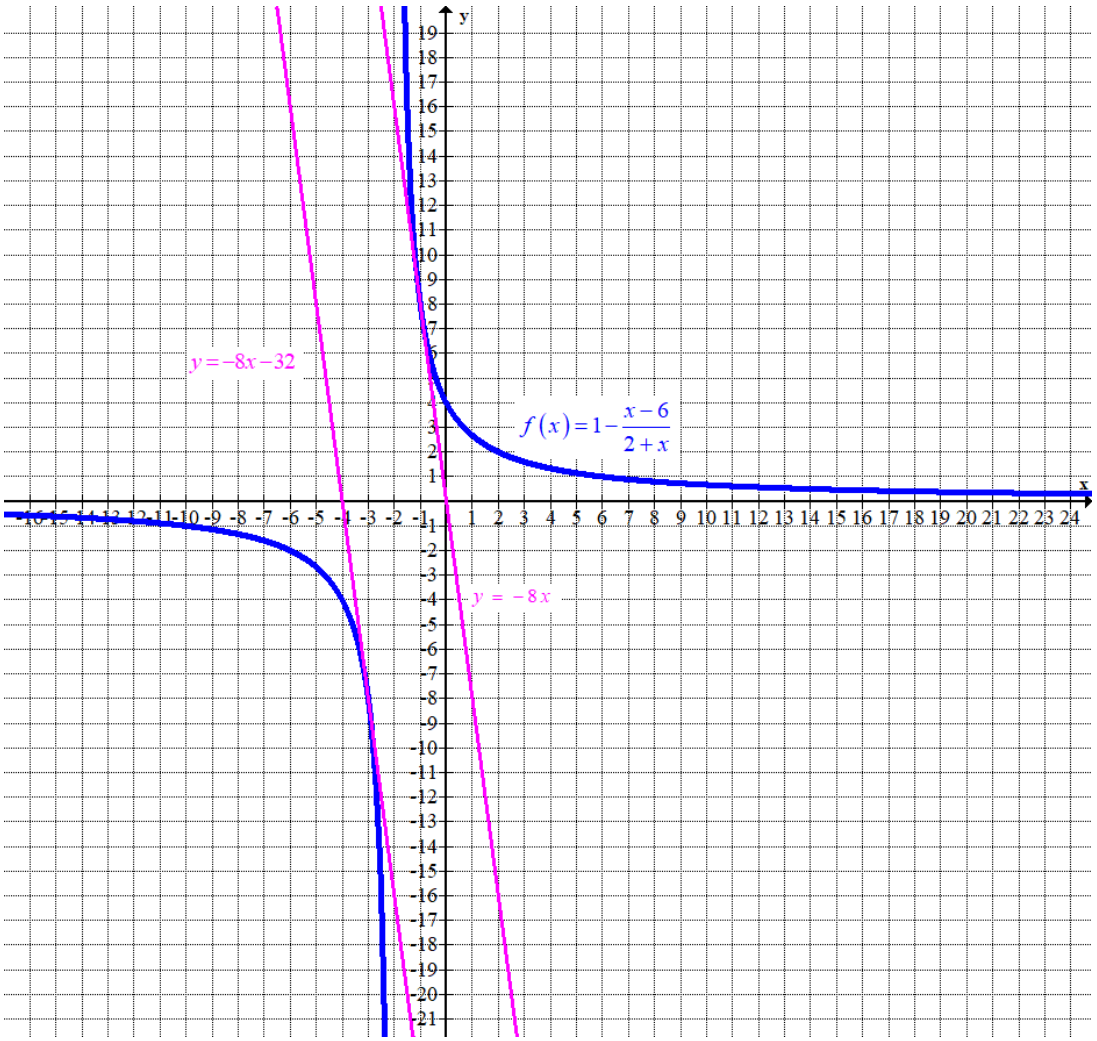
Averiguamos cuando la derivada de la función vale –8.

$$f'(x)=-8\Rightarrow\frac{-8}{(2+x)^2}=-8\Rightarrow(2+x)^2=1\Rightarrow 2+x=\pm1\Rightarrow\begin{cases}2+x=-1\rightarrow\boxed{x=-3}\\2+x=1\rightarrow\boxed{x=-1}\end{cases}$$

Hallamos las rectas tangentes a la gráfica de la función en $x=-1$ y en $x=-3$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=1-\dfrac{-1-6}{2-1}=8 \\ f'(-1)=-8 \\ y-f(-1)=f'(-1)(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-8=-8(x+1) \Rightarrow y-8=-8x-8 \Rightarrow \boxed{y=-8x}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-3)=1-\dfrac{-3-6}{2-3}=-8 \\ f'(-3)=-8 \\ y-f(-3)=f'(-3)(x+3) \end{array}\right\} \Rightarrow y+8=-8(x+3) \Rightarrow y=-8x-24-8 \Rightarrow \boxed{y=-8x-32}$$



La recta tangente a la gráfica en $x=-1$ tiene ecuación $y=-8x$.
La recta tangente a la gráfica en $x=-3$ tiene ecuación $y=-8x-32$.

EJERCICIO 3

A) Sea una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 2.

a) **(1 punto)** Se selecciona una muestra de tamaño 81 resultando una media de 20. Calcule un intervalo de confianza al 98.5% para estimar la media poblacional. ¿Qué error máximo se comete en la estimación?

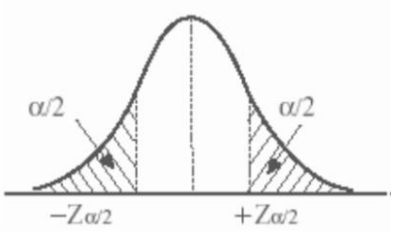
b) **(0.75 puntos)** Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿qué tamaño mínimo debería tener una nueva muestra para que la amplitud del intervalo para la media fuese inferior a 2.16?

c) **(0.25 puntos)** Razone qué efecto produciría sobre la amplitud del intervalo una disminución del nivel de confianza.

a) Tamaño de la muestra n = 81. La media muestral es $\bar{x} = 20$.
Con un nivel de confianza del 98.5 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}985 \rightarrow \propto = 0{,}015 \rightarrow \propto/2 = 0{,}0075 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}9925 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}43}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.43 \cdot \frac{2}{\sqrt{81}} = 0.54$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(20 - 0.54,\ 20 + 0.54\right) = \left(19.46,\ 20.54\right)$$

b) Si la amplitud del intervalo para la media es inferior a 2 entonces el error debe ser menor que 1. Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 2.43 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 4.86 \Rightarrow n = 4.86^2 = 23.61$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 24.

c) Si disminuimos el nivel de confianza $1-\alpha$ entonces el valor de $z_{\alpha/2}$ también disminuye.

Como la fórmula del error es $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ al disminuir el valor de $z_{\alpha/2}$ disminuye el valor del error. La amplitud del intervalo es el doble del error, por lo que la amplitud del intervalo disminuye al disminuir el nivel de confianza.

EJERCICIO 3

B) Sean A y B dos sucesos del espacio muestral tales que:

$$P(A)=0.4,\ P(B^C)=0.7,\ P(A\cup B)=0.58$$

a) **(0.5 puntos)** ¿Son A y B independientes? ¿Son incompatibles?

b) Calcule la probabilidad de que:

i) **(0.5 puntos)** Ocurra alguno de los sucesos contrarios.

ii) **(0.5 puntos)** Ocurra B sabiendo que no ha ocurrido A.

iii) **(0.5 puntos)** Ocurra uno y solo uno de los dos sucesos.

a) Tenemos que $P(B)=1-P(B^C)=1-0.7=0.3$

Como $P(A\cup B)=0.58$ aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\P(A\cup B)=0.58\\P(A)=0.4\\P(B)=0.3\end{array}\right\}\Rightarrow 0.58=0.4+0.3-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=0.7-0.58=0.12}$$

Dos sucesos son independientes si cumplen la igualdad $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=0.12\\P(A)P(B)=0.4\cdot 0.3=0.12\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.12$$

Se cumple la igualdad y los sucesos A y B son independientes.

Para que dos sucesos sean incompatibles su intersección debe ser vacía, pero hemos visto que $P(A\cap B)=0.12\neq 0$, por lo que $A\cap B\neq\varnothing$.

b) i) Debemos hallar $P(A^C\cup B^C)$. Aplicamos una de las leyes de Morgan.

$$P(A^C\cup B^C)=P\left((A\cap B)^C\right)=1-P(A\cap B)=1-0.12=\boxed{0.88}$$

ii) Debemos hallar $P(B/A^C)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A^C)=\frac{P(B\cap A^C)}{P(A^C)}=\frac{P(B)-P(B\cap A)}{1-P(A)}=\frac{0.3-0.12}{1-0.4}=\boxed{0.3}$$

iii) Debemos hallar $P\left((A^C\cap B)\cup(A\cap B^C)\right)$.

$$P\left((A^C\cap B)\cup(A\cap B^C)\right)=P(A^C\cap B)+P(A\cap B^C)=$$

$$=P(B)-P(A\cap B)+P(A)-P(A\cap B)=0.3-0.12+0.4-0.12=\boxed{0.46}$$

OTRA FORMA DE HACERLO
Construimos una tabla con las probabilidades que conocemos.

	B	B^C	
A	0.12		0.4
A^C			0.6
	0.3	0.7	1

Completamos la tabla.

	B	B^C	
A	0.12	**0.28**	0.4
A^C	**0.18**	0.42	0.6
	0.3	0.7	1

La probabilidad de que ocurra uno y solo uno de los dos sucesos vale 0.18 + 0.28 = 0.46.

EJERCICIO 4

Una empresa de alquiler de patinetes eléctricos quiere analizar el comportamiento de sus usuarios durante la hora punta de la mañana en una determinada ciudad. La duración del trayecto de cada usuario (en minutos) se distribuye según una ley Normal con media 18 y desviación típica 4.

a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un usuario tarde menos de 15 minutos en hacer su trayecto?

b) **(1.25 puntos)** Se sabe que cada usuario que desbloquea un patinete tiene una probabilidad de 0.9 de completar su trayecto sin incidencias. Si 120 usuarios desbloquean un patinete para moverse por la ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 110 completen el trayecto sin incidencias?

a) X = La duración del trayecto de cada usuario (en minutos). $X = N(18,4)$.

Debemos calcular $P(X<15)$.

$$P(X<15)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-18}{4}\end{matrix}\right\}=P\left(Z<\frac{15-18}{4}\right)=P(Z<-0.75)=P(Z>0.75)=$$

$$=1-P(Z\le 0.75)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}=1-0.7734=\boxed{0.2266}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734

La probabilidad de que un usuario tarde menos de 15 minutos en hacer su trayecto es de 0.2266.

b) Consideramos X´ la variable aleatoria que cuenta el número de patinetes que completan su trayecto sin incidencias de un grupo de 120. Esta variable es una binomial de parámetros n = número de repeticiones = 120 y p = probabilidad de que un usuario complete un trayecto sin incidencias = 0.9. $X' = B(120,\ 0.9)$.

El número de repeticiones es muy alto. Aproximamos esta variable a una normal Y de media $np = 120\cdot 0.9 = 108$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{120\cdot 0.9\cdot 0.1} \simeq 3.29$.

$Y = N(108,\ 3.29)$. Esta aproximación es buena pues $np = 108 > 5$ y $nq = 120\cdot 0.1 = 12 > 5$.

Calculamos $P(X'\ge 110)$.

$$P(X'\ge 110)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(Y\ge 109.5)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{Y-108}{3.29}\end{matrix}\right\}=$$

$$=P\left(Z\ge\frac{109.5-108}{3.29}\right)=P(Z\ge 0.46)=1-P(Z\le 0.46)=1-0.6772=\boxed{0.3228}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123

La probabilidad de que al menos 110 completen el trayecto sin incidencias es de 0.3228.

PAU 2026 Ordinaria (suplente 2) Matemáticas CC.SS. II

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Esta prueba consta de 4 ejercicios.
c) En algunos ejercicios se da la posibilidad de elegir entre apartado A) o B). Responda sólo el apartado **que elija. En caso contrario, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar**
d) En cada ejercicio o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
e) Todos los resultados deben estar **suficientemente justificados**.
f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos.
g) La valoración de la corrección gramatical, léxica y ortográfica, así como la presentación del texto no será superior al 10 %.

EJERCICIO 1 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, siendo m un número real.

a) **(0.75 puntos)** Halle los valores de m para que el rango de A sea 3.
b) **(0.25 puntos)** Calcule los valores de m para los que A no tiene inversa.
c) **(1.25 puntos)** Para $m=2$, calcule A^{-1} y resuelva la ecuación $X\cdot A=C$.
d) **(0.75 puntos)** Para $m=1$, clasifique el sistema $A\cdot Y=B$ atendiendo al número de soluciones que tiene.

B) Se considera la función $f(x,y)=2x+y$ cuando (x,y) pertenece a la región factible delimitada por las inecuaciones:

$$4x+2y\geq 5;\quad 2x+5y\leq 9;\quad x+y\leq 3;\quad y\geq 0$$

a) **(1.5 puntos)** Dibuje la región factible y obtenga sus vértices.
b) **(0.5 puntos)** Obtenga algún punto de la región factible con abscisa $x=1$.
c) **(1 punto)** ¿Para qué valores de x e y se alcanza el máximo de la función f? ¿Cuánto vale dicho máximo? Análogamente para el mínimo.

EJERCICIO 2

El peso en kilogramos (kg) de una persona que inicia un determinado régimen alimenticio viene dado por la función:

$$P(t)=75-\frac{15t}{t+120};\ t\geq 0$$

Siendo t el tiempo, en días, que lleva haciendo la dieta.

a) **(1 punto)** Compruebe que, si la persona sigue de manera continuada el régimen alimenticio, irá reduciendo peso paulatinamente. ¿Cuál es el peso mínimo que podría llegar a alcanzar si pudiera seguir la dieta indefinidamente?
b) **(0.75 puntos)** ¿Cuántos días debe hacer de régimen para llegar a un peso de 64 kg?

c) **(1.25 puntos)** El índice de masa corporal viene dado por la función $i(t)=\frac{P(t)}{h^2}$, siendo h la estatura, en metros, de la persona. Se considera que la persona tiene sobrepeso si el índice de masa corporal es superior a 25 kg/m^2. Si la persona mide 1.68 m, determine si ha tenido sobrepeso durante la dieta, y en caso afirmativo, calcule los días que han de transcurrir para dejar de tenerlo.

EJERCICIO 3 Elija sólo uno de los apartados A) o B):

A) De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:
- La probabilidad de que ocurra alguno de ellos es 0.82.
- La probabilidad de que ocurran simultáneamente es 0.38.
- La probabilidad de que no ocurra A es 0.35.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra B sabiendo que no ocurre A.
b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.
c) **(0.75 puntos)** Si repetimos el experimento en 10 ocasiones, halle la probabilidad de que el suceso A ocurra al menos 2 veces.

B) Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media 16 y varianza 4. Se pide:
a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores comprendidos entre 14.5 y 16.2.
b) **(0.5 puntos)** Halle el valor de a para el que $P(X \geq a)=0.25$.
c) **(0.75 puntos)** Se consideran muestras de tamaño 64, ¿qué distribución sigue la variable media muestral? ¿Qué probabilidad hay de que, elegida una muestra al azar, la media sea superior a 16.3?

EJERCICIO 4
Una comunidad autónoma está analizando el rendimiento de sus estudiantes en la última convocatoria de la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU) en una determinada materia. De los 20000 estudiantes presentados, 12000 cursaron bachillerato en un centro público, 6000 lo hicieron en un centro concertado y el resto en un centro privado no concertado. Para estimar la proporción de estudiantes que suspenden la materia en la PAU, se extrae una muestra aleatoria de 500 estudiantes que han realizado el examen.
a) **(0.4 puntos)** Determine el tamaño de la muestra que se debe de tomar de cada tipo de centro para realizar un muestreo con afijación proporcional.
b) Tras realizar el muestreo se obtuvo que 200 de los 500 estudiantes seleccionados suspendieron la asignatura.
   i) **(1 punto)** Calcule un intervalo de confianza al 99%, para determinar la proporción de estudiantes que suspenden la materia entre todos los presentados. Basándonos en este intervalo, ¿puede afirmarse que el porcentaje de estudiantes que suspenden el examen de esta materia en la PAU no es del 43%?
   ii) **(0.6 puntos)** Con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuántos estudiantes, como mínimo, habría que seleccionar de forma aleatoria para que el error de estimación fuese inferior al 4%?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

A) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, siendo m un número real.

a) **(0.75 puntos)** Halle los valores de m para que el rango de A sea 3.

b) **(0.25 puntos)** Calcule los valores de m para los que A no tiene inversa.

c) **(1.25 puntos)** Para $m=2$, calcule A^{-1} y resuelva la ecuación $X\cdot A=C$.

d) **(0.75 puntos)** Para $m=1$, clasifique el sistema $A\cdot Y=B$ atendiendo al número de soluciones que tiene.

a) Para que el rango de A sea 3 el determinante de la matriz A debe ser distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & m+1 \end{vmatrix}=m(m+1)+0+0-2-0-0=m^2+m-2$$

$$|A|=0\Rightarrow m^2+m-2=0\Rightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{-1-3}{2}=\boxed{-2=m}\\ \frac{-1+3}{2}=\boxed{1=m}\end{cases}$$

Para cualquier valor de m distinto de –2 y 1 el determinante de A es distinto de cero y por tanto su rango es 3.

b) Hemos visto en el apartado anterior que para $m=1$ y $m=-2$ el determinante de A es nulo y no tiene inversa.

c) Para $m=2$ existe la inversa de A. La calculamos.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=2^2+2-2=4\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{4}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinamos la matriz X que cumple la igualdad $X\cdot A=C$.

$$X\cdot A=C\Rightarrow X=CA^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&4&0\\-2&0&2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3+0-4&0+0+0&-1+0+4\\0+0-6&0+4+0&0+0+6\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3\quad\cdot\quad 3}\times 3\longrightarrow 2\times 3$$

$$X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&0&3\\-6&4&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/4&0&3/4\\-3/2&1&3/2\end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X=\begin{pmatrix}-1/4&0&3/4\\-3/2&1&3/2\end{pmatrix}$.

d) Para $m=1$ la matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$. El sistema $A\cdot Y=B$ tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$ y como matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&0&2\\2&0&2&6\end{pmatrix}$.

Obtenemos un sistema triangular equivalente al inicial usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&0&2\\2&0&2&6\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{a}-2\cdot\text{Fila } 1^{a}\\ 2\quad 0\quad 2\quad 6\\ \hline -2\quad 0\quad -2\quad -6\\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad 0\rightarrow\text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{1&0&1}^{A}&3\\0&1&0&2\\\underbrace{0&0&0}_{A}&0\end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

EJERCICIO 1

B) Se considera la función $f(x,y)=2x+y$ cuando (x,y) pertenece a la región factible delimitada por las inecuaciones:

$$4x+2y\geq 5;\quad 2x+5y\leq 9;\quad x+y\leq 3;\quad y\geq 0$$

a) **(1.5 puntos)** Dibuje la región factible y obtenga sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** Obtenga algún punto de la región factible con abscisa $x=1$.

c) **(1 punto)** ¿Para qué valores de *x* e *y* se alcanza el máximo de la función *f*? ¿Cuánto vale dicho máximo? Análogamente para el mínimo.

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$4x+2y=5$

x	$y=\frac{5-4x}{2}$
0	2.5
0.5	1.5
1.25	0

$2x+5y=9$

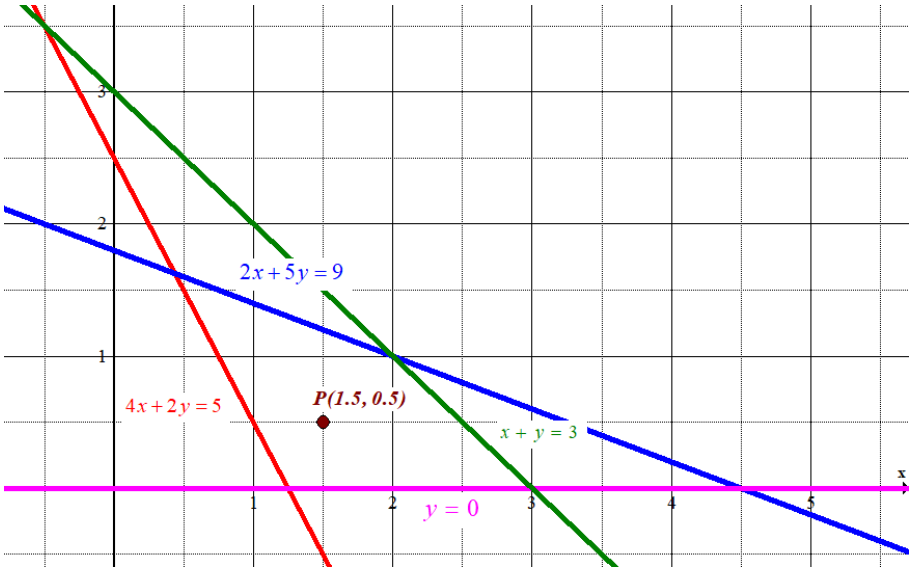
x	$y=\frac{9-2x}{5}$
2	1
4	0.2
4.5	0

$x+y=3$

x	$y=3-x$
0	3
2	1
3	0

$y=0$

x	$y=0$
0	0
1.25	0
3	0

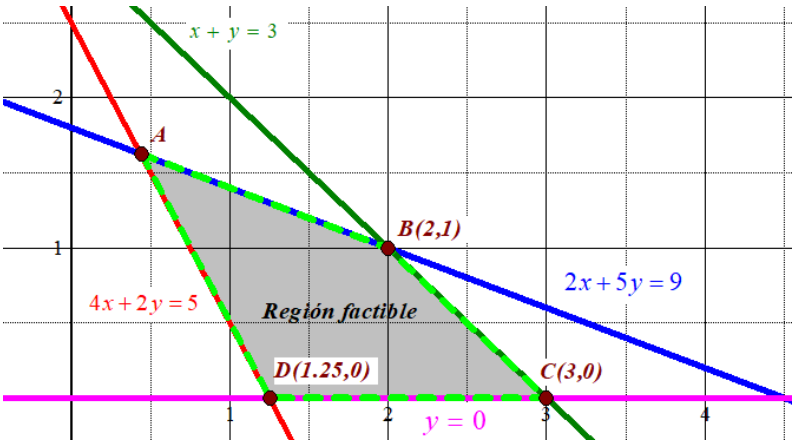


La región factible está situada por debajo de las rectas azul y verde y por encima de la recta roja y la recta horizontal rosa.

Comprobamos que el punto P(1.5, 0.5) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 4\cdot 1.5+2\cdot 0.5\geq 5 \\ 2\cdot 1.5+5\cdot 0.5\leq 9 \\ 1.5+0.5\leq 3 \\ 0.5\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6+1\geq 5 \\ 3+2.5\leq 9 \\ 2\leq 3 \\ 0.5\geq 0 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Hallamos las coordenadas del vértice A.

$$\left.\begin{matrix}4x+2y=5\\2x+5y=9\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}4x+2y=5\\\times(-2)\rightarrow -4x-10y=-18\end{matrix}\right\}$$

$$-8y=-13\Rightarrow y=\frac{13}{8}\Rightarrow 2x+5\frac{13}{8}=9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=9-\frac{65}{8}=\frac{7}{8}\Rightarrow x=\frac{7}{16}\Rightarrow \boxed{A\left(\frac{7}{16},\frac{13}{8}\right)}$$

Los vértices de la región factible son $A\left(\frac{7}{16},\frac{13}{8}\right)$, B(2, 1). C(3, 0) y D(1.25, 0).

b) Con abscisa $x=1$ tenemos el punto Q(1, 0.5) que pertenece a la recta $4x+2y=5$.

$$\left.\begin{matrix}4x+2y=5\\x=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow 4+2y=5\Rightarrow 2y=1\Rightarrow y=\frac{1}{2}=0.5\Rightarrow \boxed{Q(1,0.5)}$$

c) Valoramos la función $f(x,y)=2x+y$ en cada uno de los vértices en busca de los valores máximo y mínimo.

$A\left(\frac{7}{16},\frac{13}{8}\right)$ → $f\left(\frac{7}{16},\frac{13}{8}\right)=2\cdot\frac{7}{16}+\frac{13}{8}=\frac{20}{8}=2.5$ *Mínimo*

B(2, 1) → $f(2,1)=2\cdot 2+1=5$

C(3, 0) → $f(3,0)=2\cdot 3+0=6$ *Máximo*

D(1.25, 0) → $f(1.25,0)=2\cdot 1.25+0=2.5$ *Mínimo*

El valor mínimo de la función es 2.5 y se alcanza en los vértices $A\left(\frac{7}{16},\frac{13}{8}\right)$ y D(1.25, 0). El valor mínimo se alcanza en todos los puntos del segmento AD: $A\left(\frac{7}{16},\frac{13}{8}\right)$, (0.75, 1), Q(1, 0.5),….., D(1.25, 0).

El valor máximo de la función es 6 y se alcanza en el vértice C(3, 0), es decir, para $x=3$ e $y=0$.

EJERCICIO 2

El peso en kilogramos (kg) de una persona que inicia un determinado régimen alimenticio viene dado por la función:

$$P(t)=75-\frac{15t}{t+120};\ t\geq 0$$

Siendo *t* el tiempo, en días, que lleva haciendo la dieta.

a) **(1 punto)** Compruebe que, si la persona sigue de manera continuada el régimen alimenticio, irá reduciendo peso paulatinamente. ¿Cuál es el peso mínimo que podría llegar a alcanzar si pudiera seguir la dieta indefinidamente?

b) **(0.75 puntos)** ¿Cuántos días debe hacer de régimen para llegar a un peso de 64 kg?

c) **(1.25 puntos)** El índice de masa corporal viene dado por la función $i(t)=\frac{P(t)}{h^2}$, siendo *h* la estatura, en metros, de la persona. Se considera que la persona tiene sobrepeso si el índice de masa corporal es superior a 25 kg/m^2. Si la persona mide 1.68 *m*, determine si ha tenido sobrepeso durante la dieta, y en caso afirmativo, calcule los días que han de transcurrir para dejar de tenerlo.

a) Obtenemos la derivada de la función.

$$P(t)=75-\frac{15t}{t+120}\Rightarrow P(t)=-\frac{15(t+120)-15t\cdot 1}{(t+120)^2}=-\frac{15t+1800-15t}{(t+120)^2}=\frac{-1800}{(t+120)^2}$$

En esta expresión el numerador es una constante negativa y el denominador es positivo. La derivada siempre es negativa y el peso disminuye de forma continuada.

Calculamos el límite de la función cuando *t* tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty}P(t)=\lim_{t\to+\infty}75-\frac{15t}{t+120}=\lim_{t\to+\infty}75-\frac{\frac{15t}{t}}{\frac{t}{t}+\frac{120}{t}}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}75-\frac{15}{1+\frac{120}{t}}=75-\frac{15}{1+\frac{120}{+\infty}}=75-\frac{15}{1+0}=\boxed{60}$$

Si pudiera seguir la dieta indefinidamente alcanzaría un peso de 60 kg.

b) Averiguamos el valor de *t* para el que $P(t)=64$.

$$P(t)=64\Rightarrow 75-\frac{15t}{t+120}=64\Rightarrow 11-\frac{15t}{t+120}=0\Rightarrow 11t+1320-15t=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1320-4t=0\Rightarrow 4t=1320\Rightarrow \boxed{t=\frac{1320}{4}=330}$$

Debe seguir la dieta durante 330 días para alcanzar un peso de 64 kg.

c) Si la persona mide 1.68 *m* el índice de masa corporal es $i(t)=\frac{P(t)}{1.68^2}=\frac{1}{1.68^2}\left(75-\frac{15t}{t+120}\right)$.

Averiguamos cuando el índice es mayor de 25.

$$i(t)\geq 25\Rightarrow \frac{1}{1.68^2}\left(75-\frac{15t}{t+120}\right)\geq 25\Rightarrow 75-\frac{15t}{t+120}\geq 70.56\Rightarrow 4.44\geq \frac{15t}{t+120}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{t\geq 0\rightarrow t+120>0\}\Rightarrow 4.44(t+120)\geq 15t\Rightarrow 4.44t+532.8\geq 15t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 532.8\geq 10.56t\Rightarrow \frac{532.8}{10.56}\geq t\Rightarrow \boxed{t\leq 50.4545}$$

La persona tuvo sobrepeso durante los primeros 50 días del régimen. A partir del día 51 desde el inicio del régimen su índice corporal está por debajo de 25 kg/m^2.

EJERCICIO 3

A) De dos sucesos *A* y *B* de un mismo espacio muestral se sabe que:
- La probabilidad de que ocurra alguno de ellos es 0.82.
- La probabilidad de que ocurran simultáneamente es 0.38.
- La probabilidad de que no ocurra *A* es 0.35.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra *B* sabiendo que no ocurre *A*.
b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.
c) **(0.75 puntos)** Si repetimos el experimento en 10 ocasiones, halle la probabilidad de que el suceso *A* ocurra al menos 2 veces.

a) Nos dan los siguientes datos: $P(A\cup B)=0.82$, $P(A\cap B)=0.38$ y $P(\overline{A})=0.35$.

Podemos deducir la probabilidad de que ocurra A: $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.35=0.65$.

Podemos deducir la probabilidad de que ocurra B.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=0.82 \\ P(A)=0.65 \\ P(A\cap B)=0.38 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.82=0.65+P(B)-0.38 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.82-0.65+0.38=P(B) \Rightarrow \boxed{P(B)=0.55}$$

Debemos calcular $P(B/\overline{A})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/\overline{A})=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(B\cap A)}{P(\overline{A})}=\frac{0.55-0.38}{0.35}=\boxed{\frac{17}{35}\simeq 0.4857}$$

b) Calculamos $P\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)$.

$$P\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap B\right)=$$

$$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=0.65-0.38+0.55-0.38=\boxed{0.44}$$

c) Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de ocasiones que ocurre A en 10 repeticiones del experimento. Esta es una variable binomial con parámetros n = número de repeticiones = 10 y p = probabilidad de que ocurra A = 0.65. X = B(10, 0.65).
Nos piden calcular el valor de $P(X\geq 2)$.

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]=$$

$$=1-\left[\binom{10}{0}0.65^0\cdot 0.35^{10}+\binom{10}{1}0.65^1\cdot 0.35^9\right]=1-\left[0.35^{10}+10\cdot 0.65\cdot 0.35^9\right]=\boxed{0.9995}$$

EJERCICIO 3

B) Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media 16 y varianza 4. Se pide:

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores comprendidos entre 14.5 y 16.2.

b) **(0.5 puntos)** Halle el valor de a para el que $P(X \geq a) = 0.25$.

c) **(0.75 puntos)** Se consideran muestras de tamaño 64, ¿qué distribución sigue la variable media muestral? ¿Qué probabilidad hay de que, elegida una muestra al azar, la media sea superior a 16.3?

a) La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{4} = 2$. $X = N(16, 2)$

Debemos calcular $P(14.5 \leq X \leq 16.2)$.

$$P(14.5 \leq X \leq 16.2) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X - 16}{2} \end{matrix} \right\} = P\left(\frac{14.5 - 16}{2} \leq Z \leq \frac{16.2 - 16}{2} \right) =$$

$$= P(-0.75 \leq Z \leq 0.1) = P(Z \leq 0.1) - P(Z \leq -0.75) = P(Z \leq 0.1) - P(Z \geq 0.75) =$$

$$= P(Z \leq 0.1) - \left[1 - P(Z \leq 0.75)\right] = \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} = 0.5398 - 1 + 0.7734 = \boxed{0.3132}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734

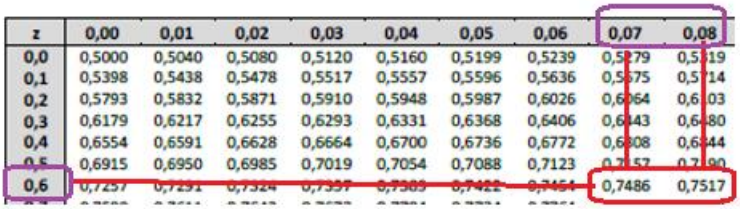
La probabilidad de que la variable aleatoria tome valores comprendidos entre 14.5 y 16.2 es de 0.3132.

b)

$$P(X \geq a) = 0.25 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X - 16}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 16}{2} \right) = 0.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 16}{2} \right) = 0.25 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 16}{2} \right) = 0.75 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a - 16}{2} = \frac{0.67 + 0.68}{2} = 0.675 \Rightarrow a - 16 = 1.35 \Rightarrow \boxed{a = 17.35}$$



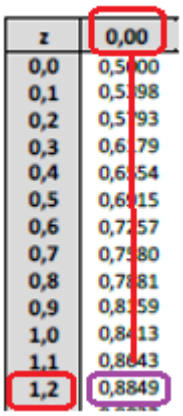
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517

c) La variable media muestral de muestras de tamaño 64: $\overline{X_{64}}$ sigue una distribución normal con la misma media 16 y con desviación típica $\sigma = \frac{2}{\sqrt{64}} = 0.25$. $\overline{X_{64}} = N(16, 0.25)$

Debemos calcular $P\left(\overline{X_{64}} > 16.3\right)$.

$$P\left(\overline{X_{64}} > 16.3\right) = \left\{\begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{\overline{X_{64}} - 16}{0.25} \end{matrix}\right\} = P\left(Z > \frac{16.3-16}{0.25}\right) = P\left(Z > 1.2\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq 1.2\right) = \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix}\right\} = 1 - 0.8849 = \boxed{0.1151}$$



z	0,00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915
0,6	0,7257
0,7	0,7580
0,8	0,7881
0,9	0,8159
1,0	0,8413
1,1	0,8643
1,2	0,8849

La probabilidad de que, elegida una muestra al azar, la media sea superior a 16.3 es de 0.1151.

EJERCICIO 4

Una comunidad autónoma está analizando el rendimiento de sus estudiantes en la última convocatoria de la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU) en una determinada materia. De los 20000 estudiantes presentados, 12000 cursaron bachillerato en un centro público, 6000 lo hicieron en un centro concertado y el resto en un centro privado no concertado. Para estimar la proporción de estudiantes que suspenden la materia en la PAU, se extrae una muestra aleatoria de 500 estudiantes que han realizado el examen.

a) **(0.4 puntos)** Determine el tamaño de la muestra que se debe de tomar de cada tipo de centro para realizar un muestreo con afijación proporcional.

b) Tras realizar el muestreo se obtuvo que 200 de los 500 estudiantes seleccionados suspendieron la asignatura.

i) **(1 punto)** Calcule un intervalo de confianza al 99%, para determinar la proporción de estudiantes que suspenden la materia entre todos los presentados. Basándonos en este intervalo, ¿puede afirmarse que el porcentaje de estudiantes que suspenden el examen de esta materia en la PAU no es del 43%?

ii) **(0.6 puntos)** Con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuántos estudiantes, como mínimo, habría que seleccionar de forma aleatoria para que el error de estimación fuese inferior al 4%?

a) La proporción de alumnos a elegir en el total es $\frac{500}{20000}=\frac{1}{40}$.

De los 12000 alumnos que cursaron bachillerato en un centro público hay que elegir $12000\cdot\frac{1}{40}=300$ alumnos.

De los 6000 que lo hicieron en un centro concertado hay que elegir $6000\cdot\frac{1}{40}=150$ alumnos.

De los alumnos que estudiaron en un centro privado no concertado hay que elegir a los restantes 500 – 300 – 150 = 50 alumnos.

b) i) La proporción muestral de suspensos es $p=\frac{200}{500}=0.4$. El tamaño de la muestra es n = 500.

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 99 %

$$1-\alpha=0.99\rightarrow\alpha=0.01\rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.005\rightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0.995\rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Busco en la}\\\text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}\rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=2.575$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\left(1-p\right)}{n}} = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{500}} \simeq 0.0564$$

El intervalo de confianza para la proporción real de los alumnos que suspenden es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.4 - 0.0564,\ 0.4 + 0.0564\right) = \left(0.3436,\ 0.4564\right)$$

¿puede afirmarse que el porcentaje de estudiantes que suspenden el examen de esta materia en la PAU no es del 43%?
El porcentaje del 43% se corresponde con una proporción de 0.43, que pertenece al intervalo de confianza obtenido. No podemos afirmar que el porcentaje no pueda ser el 43%.

ii) Tenemos que la proporción muestral es $p = 0.4$. El valor de $z_{\frac{\alpha}{2}} = 0.2575$.

Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de *n*

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\left(1-p\right)}{n}} \Rightarrow 0.04 = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{n}} \Rightarrow 0.04\sqrt{n} = 2.575 \cdot \sqrt{0.24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.575 \cdot \sqrt{0.24}}{0.04} \Rightarrow n = \left(\frac{2.575 \cdot \sqrt{0.24}}{0.04}\right)^2 \simeq 994.594$$

Para que el error sea menor del 4% el tamaño de la muestra debe ser superior a 995 alumnos.

PAU 2025 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Debe resolver 4 ejercicios, uno de cada bloque. Elija solo un ejercicio en los tres bloques donde tiene posibilidad de elección. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

a) **(1.75 puntos)** Un fabricante de paneles fotovoltaicos está analizando la eficiencia de tres modelos de placas (A, B y C). En un día determinado se realizaron tres pruebas. En la primera, utilizando 2 placas del modelo A, 1 placa del modelo B y 3 placas del modelo C, se generó una potencia efectiva total de 2960W. En la segunda, al combinar 1 placa del modelo A, 3 placas del modelo B y 2 placas del modelo C, se obtuvo una potencia efectiva total de 2990W. En la tercera, una configuración con 3 placas del modelo A, 2 placas del modelo B y 1 placa del modelo C produjo una potencia efectiva total de 2870W. Exprese el problema en forma matricial y discuta, a partir de la matriz del sistema, si se puede obtener la potencia efectiva que generó individualmente cada modelo de placa fotovoltaica. En caso afirmativo, obtenga dichas potencias efectivas.

b) **(0.75 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $2X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un agricultor cultiva dos tipos de lechuga: iceberg y romana. Por razones de demanda, en cada ciclo de cultivo, la cantidad de iceberg debe ser al menos la mitad de la de romana, pero no puede superar las 1500 unidades. Además, deben cultivarse en total entre 900 y 2400 lechugas. El cultivo de iceberg requiere 15 litros de agua por unidad, mientras que el de romana necesita 18 litros de agua por unidad. ¿Cuántas unidades de cada tipo de lechuga deben cultivarse para minimizar el consumo total de agua?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Trinidad, una persona ahorradora, deposita 5000 € en un fondo de inversión y el capital final que obtiene cuando transcurren *t* años viene dado por la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} 5000 \cdot (1 + 0.05t) & 0 \le t \le 1 \\ 5000 \cdot 1.05^t & t > 1 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** ¿Cuánto tiempo debe mantener invertido el dinero si el capital final que se obtiene es de 5931.10 €?
b) **(0.5 puntos)** Calcule los intereses que obtiene Trinidad entre el año 2 y el año 4, si se conoce que los intereses que genera esta inversión entre el año t_1 y el año t_2 vienen dados por $I = f(t_2) - f(t_1)$.
c) **(0.75 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f*.
d) **(0.5 puntos)** Estudie la monotonía de la función *f* y esboce su gráfica.

BLOQUE C

EJERCICIO 4
En un determinado centro educativo, el 50% del alumnado aprueba Historia, el 70% aprueba Matemáticas y el 30% aprueba ambas asignaturas. Si se elige un alumno al azar:
a) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que apruebe solo una de las dos asignaturas.
b) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que no apruebe más de una asignatura.
c) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que apruebe Historia si ha suspendido Matemáticas.
d) **(0.5 puntos)** Determine si los sucesos "Aprobar Matemáticas" y "Aprobar Historia" son independientes. ¿Son incompatibles?

EJERCICIO 5
Los alumnos de un colegio de una localidad andaluza van a realizar una excursión a la estación de esquí de Sierra Nevada desplazándose en tres autobuses A, B y C. En el autobús A se desplazan cuatro novenos de los alumnos de la excursión, en el B se desplaza la tercera parte y el resto van en el autobús C. Se sabe que el 65% de los alumnos que viajan en el autobús A y el 40% de los del autobús B no sabe esquiar y todos los del autobús C sí que saben esquiar. Se escoge al azar a uno de los alumnos de la excursión. Calcule la probabilidad de que:
a) (1 punto) Sepa esquiar.
b) (0.75 puntos) Viaje en el autobús C, si sabe esquiar.
c) (0.75 puntos) Sepa esquiar y no viaje en el autobús B.

BLOQUE D

EJERCICIO 6
A partir de un estudio muestral se sabe que, con un nivel de confianza del 95%, la proporción de estudiantes de una universidad que tienen carnet de conducir pertenece al intervalo (0.5616, 0.7184)
a) **(0.5 puntos)** Calcule la proporción muestral de estudiantes que tienen carnet de conducir.
b) **(0.5 puntos)** Calcule el error máximo cometido en la estimación de la proporción poblacional.
c) **(1 punto)** Calcule el tamaño de la muestra seleccionada.
d) **(0.5 puntos)** Razone qué efecto producirá sobre la amplitud del intervalo un aumento del tamaño muestral

EJERCICIO 7
El tiempo de adaptación a la guardería, en días, de los menores de dos años andaluces, sigue una distribución Normal de media 10.5 días y desviación típica 1.5 días.
a) **(1.25 puntos)** Se toma una muestra aleatoria de 25 menores de estas características. ¿Qué distribución sigue la media muestral del tiempo de adaptación? ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de adaptación de esta muestra supere los 10 días?
b) **(1.25 puntos)** ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 nos proporcionará un tiempo medio de adaptación entre 8 y 11 días?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

a) **(1.75 puntos)** Un fabricante de paneles fotovoltaicos está analizando la eficiencia de tres modelos de placas (A, B y C). En un día determinado se realizaron tres pruebas. En la primera, utilizando 2 placas del modelo A, 1 placa del modelo B y 3 placas del modelo C, se generó una potencia efectiva total de 2960W. En la segunda, al combinar 1 placa del modelo A, 3 placas del modelo B y 2 placas del modelo C, se obtuvo una potencia efectiva total de 2990W. En la tercera, una configuración con 3 placas del modelo A, 2 placas del modelo B y 1 placa del modelo C produjo una potencia efectiva total de 2870W. Exprese el problema en forma matricial y discuta, a partir de la matriz del sistema, si se puede obtener la potencia efectiva que generó individualmente cada modelo de placa fotovoltaica. En caso afirmativo, obtenga dichas potencias efectivas.

b) **(0.75 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $2X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Colocamos toda la información del problema en una matriz.

$$\begin{matrix} & \textit{placas } A & B & C \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Prueba } 1 \rightarrow & 2 & 1 & 3 \\ \text{Prueba } 2 \rightarrow & 1 & 3 & 2 \\ \text{Prueba } 3 \rightarrow & 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Expresamos la producción de W de cada prueba en forma matricial.

$$\begin{matrix} \text{Prueba } 1 \rightarrow \\ \text{Prueba } 2 \rightarrow \\ \text{Prueba } 3 \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 2960 \\ 2990 \\ 2870 \end{pmatrix}$$

Llamamos x, y, z a la producción de cada placa del modelo A, B y C respectivamente.

$$\begin{matrix} & \textit{placas } A & B & C \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Prueba } 1 \rightarrow & 2 & 1 & 3 \\ \text{Prueba } 2 \rightarrow & 1 & 3 & 2 \\ \text{Prueba } 3 \rightarrow & 3 & 2 & 1 \end{matrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2960 \\ 2990 \\ 2870 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \rightarrow \text{Prueba } 1 \\ \rightarrow \text{Prueba } 2 \\ \rightarrow \text{Prueba } 3 \end{matrix}$$

La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 6 - 27 - 1 - 8 = -18 \neq 0$$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero la matriz tiene rango 3, por lo que la matriz ampliada también tiene rango 3 que coincide con el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

Hallamos su solución usando el método de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2960 & 1 & 3\\ 2990 & 3 & 2\\ 2870 & 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}}=\left\{\begin{matrix}Fila\,2^{a}-Fila\,1^{a}\\ Fila\,1^{a}-Fila\,3^{a}\end{matrix}\right\}=\frac{\begin{vmatrix}90 & -1 & 2\\ 30 & 2 & -1\\ 2870 & 2 & 1\end{vmatrix}}{-18}=$$

$$=\frac{180+2870+120-11480+30+180}{-18}=450$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2960 & 3\\ 1 & 2990 & 2\\ 3 & 2870 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}}=\left\{\begin{matrix}Fila\,2^{a}-Fila\,1^{a}\\ Fila\,1^{a}-Fila\,3^{a}\end{matrix}\right\}=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 90 & 2\\ -1 & 30 & -1\\ 3 & 2870 & 1\end{vmatrix}}{-18}=$$

$$=\frac{-30-270-5740-180+90-2870}{-18}=500$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 2960\\ 1 & 3 & 2990\\ 3 & 2 & 2870\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}}=\left\{\begin{matrix}Fila\,2^{a}-Fila\,1^{a}\\ Fila\,1^{a}-Fila\,3^{a}\end{matrix}\right\}=\frac{\begin{vmatrix}-1 & -1 & 90\\ -1 & 2 & 30\\ 3 & 2 & 2870\end{vmatrix}}{-18}=$$

$$=\frac{-5740-90-180-540-2870+60}{-18}=520$$

Cada placa del modelo A generó 450 W, cada placa del modelo B generó 500 W y cada placa del modelo C generó 520 W.

b) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{2}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 1-1\\ 0+0 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$2X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{2}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1/2\end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1/2\end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un agricultor cultiva dos tipos de lechuga: iceberg y romana. Por razones de demanda, en cada ciclo de cultivo, la cantidad de iceberg debe ser al menos la mitad de la de romana, pero no puede superar las 1500 unidades. Además, deben cultivarse en total entre 900 y 2400 lechugas. El cultivo de iceberg requiere 15 litros de agua por unidad, mientras que el de romana necesita 18 litros de agua por unidad. ¿Cuántas unidades de cada tipo de lechuga deben cultivarse para minimizar el consumo total de agua?

Llamemos x = "número de lechugas iceberg", y = "número de lechugas romana".

Deseamos minimizar el consumo de agua que viene expresado como $C(x,y)=15x+18y$.
Las restricciones del problema son:

"La cantidad de iceberg debe ser al menos la mitad de la de romana, pero no puede superar las 1500 unidades" → $x \geq \frac{y}{2};\ x \leq 1500$

"Deben cultivarse en total entre 900 y 2400 lechugas" → $900 \leq x+y \leq 2400$

"Las cantidades deben ser positivas" → $x \geq 0;\ y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x \geq \frac{y}{2} \\ x \leq 1500 \\ 900 \leq x+y \leq 2400 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x \geq y \\ x \leq 1500 \\ 900 \leq x+y \leq 2400 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$y = 2x$

x	$y=2x$
0	0
300	600
800	1600

$x = 1500$

$x=1500$	y
1500	0
1500	900
1500	1000

$x + y = 900$

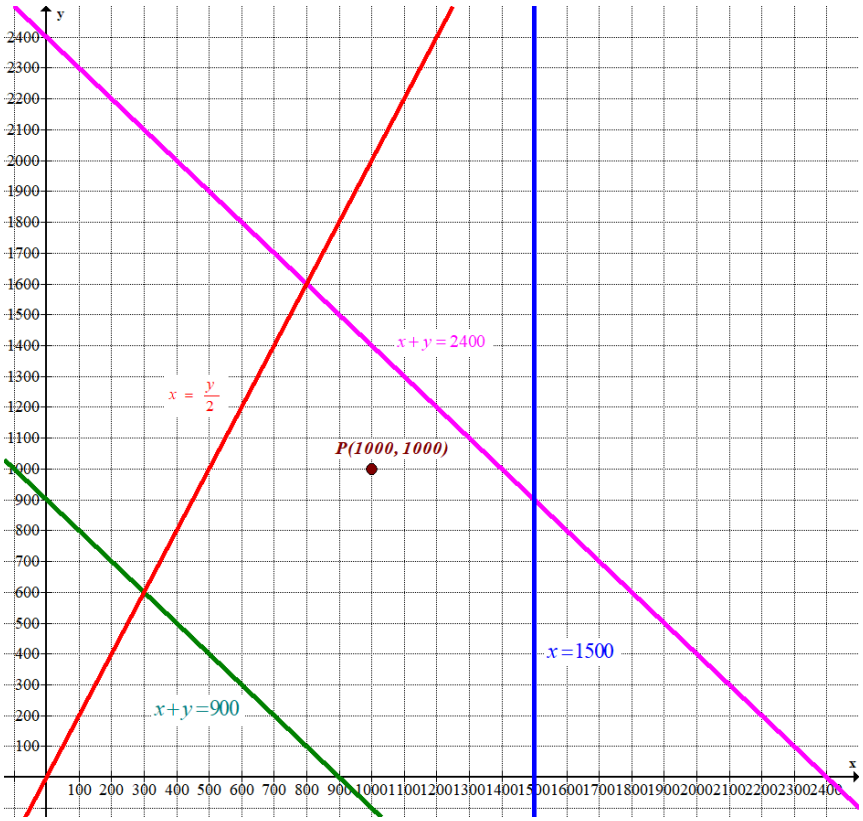
x	$y=900-x$
0	900
300	600
900	0

$x + y = 2400$

x	$y=2400-x$
0	2400
800	1600
1500	900

$x \geq 0;\ y \geq 0$

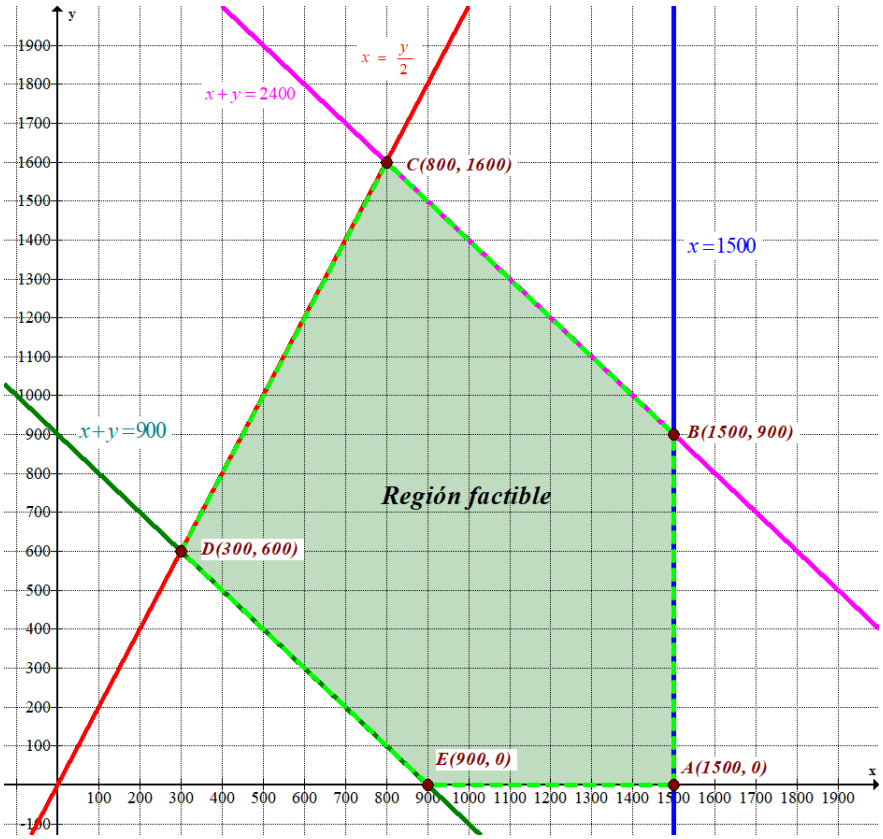
Primer *cuadrante*



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x \geq y \\ x \leq 1500 \\ 900 \leq x+y \leq 2400 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y rosa, por encima de la recta verde y a la izquierda de la recta vertical azul. Lo comprobamos viendo si el punto P(1000, 1000) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3000 \geq 1000 \\ 1000 \leq 1500 \\ 900 \leq 1000+1000 \leq 2400 \\ 1000 \geq 0;\ 1000 \geq 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos los ingresos $C(x,y)=15x+18y$ en cada vértice en busca del valor mínimo.

A(1500, 0) → $C(1500,0)=15\cdot1500+18\cdot0=22500$

B(1500, 900) → $C(1500,0)=15\cdot1500+18\cdot900=38700$

C(800, 1600) → $C(800,1600)=15\cdot800+18\cdot1600=40800$

D(300, 600) → $C(300,600)=15\cdot300+18\cdot600=15300$

E(900, 0) → $C(900,0)=15\cdot900+18\cdot0=13500$ *Mínimo*

El mínimo es 13500 y se alcanza en el vértice E(900, 0). El gasto mínimo de agua cumpliendo con las restricciones es de 13500 litros y se consigue cultivando 900 lechugas iceberg y 0 lechugas romana

EJERCICIO 3

Trinidad, una persona ahorradora, deposita 5000 € en un fondo de inversión y el capital final que obtiene cuando transcurren *t* años viene dado por la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases}5000\cdot(1+0.05t) & 0\le t\le 1\\ 5000\cdot 1.05^t & t>1\end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** ¿Cuánto tiempo debe mantener invertido el dinero si el capital final que se obtiene es de 5931.10 €?

b) **(0.5 puntos)** Calcule los intereses que obtiene Trinidad entre el año 2 y el año 4, si se conoce que los intereses que genera esta inversión entre el año t_1 y el año t_2 vienen dados por $I=f(t_2)-f(t_1)$.

c) **(0.75 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f*.

d) **(0.5 puntos)** Estudie la monotonía de la función *f* y esboce su gráfica.

a) Buscamos el valor de *t* para que *f(t) = 5931.1*.

$$f(t)=5931.1\Rightarrow\begin{cases}5000\cdot(1+0.05t)=5931.1\to 1+0.05t=\dfrac{5931.1}{5000}=1.18622\to\\ \to 0.05t=0.18622\to t=\dfrac{0.18622}{0.05}=3.7244\notin[0,1]\\ \\ 5000\cdot 1.05^t=5931.1\to 1.05^t=\dfrac{5931.1}{5000}=1.18622\to\\ \to \ln 1.05^t=\ln 1.18622\to t\cdot\ln 1.05=\ln 1.18622\to \boxed{t=\dfrac{\ln 1.18622}{\ln 1.05}=3.5}\end{cases}$$

Debe mantener invertido el dinero 3 años y medio.

b) Entre el año 2 y el año 4 la función tiene la expresión $f(t)=5000\cdot 1.05^t$.

$$I=f(4)-f(2)=5000\cdot 1.05^4-5000\cdot 1.05^2=565.03125$$

Los intereses que obtiene Trinidad entre el año 2 y el año 4 son de 565.03125 €.

c) La función es continua y derivable en $[0,1)\cup(1,+\infty)$ pues tiene una expresión polinómica y exponencial.

Estudiamos la continuidad en $t=1$.

$$\left.\begin{array}{l}f(1)=5000\cdot(1+0.05)=5250\\ \lim\limits_{t\to 1^-}f(t)=\lim\limits_{t\to 1^-}5000\cdot(1+0.05t)=5250\\ \lim\limits_{t\to 1^+}f(t)=\lim\limits_{t\to 1^+}5000\cdot 1.05^t=5000\cdot 1.05=5250\end{array}\right\}\Rightarrow f(1)=\lim_{t\to 1^-}f(t)=\lim_{t\to 1^+}f(t)=5250$$

La función es continua en $t=1$.

Estudiamos la derivabilidad en $t=1$.

La derivada de la función en $[0,1)\cup(1,+\infty)$ es $f'(t)=\begin{cases}5000\cdot 0.05=250 & 0\le t<1\\ 5000\cdot 1.05^t\cdot\ln 1.05 & t>1\end{cases}$.

Comprobamos si coinciden las derivadas laterales en $t=1$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{t\to 1^-} f'(t)=\lim\limits_{t\to 1^-} 250=250 \\ f'(1^+)=\lim\limits_{t\to 1^+} f'(t)=\lim\limits_{t\to 1^+} 5000\cdot 1.05^t\cdot\ln 1.05=5000\cdot 1.05\cdot\ln 1.05=256.15\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1^-)=250\neq 256.15=f'(1^+)$$

La función no es derivable en $t=1$.

La función es continua en $[0,+\infty)$ y derivable en $[0,1)\cup(1,+\infty)$.

d) En el intervalo $[0,1)$ la derivada de la función es $f'(t)=250>0$ que es constante y positiva. La función crece en el intervalo $[0,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ la derivada de la función es $f'(t)=(5000\cdot\ln 1.05)\cdot 1.05^t$ que es positiva, pues $5000\cdot\ln 1.05=243.95>0$ y la función exponencial siempre es positiva. La función crece en el intervalo $(1,+\infty)$.

La función crece en todo su dominio.

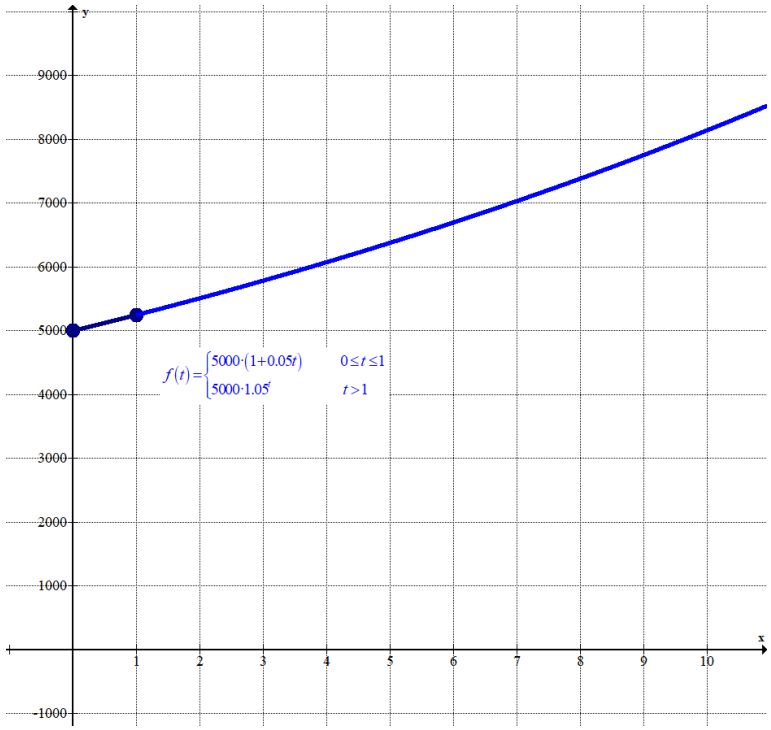
Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

$0\le t\le 1$

t	$f(t)=5000\cdot(1+0.05t)$
0	5000
0.5	5125
1	5250

$t>1$

t	$f(t)=5000\cdot 1.05^t$
1.5	5379.6
2	5512.5
5	6381.4
10	8144.4



EJERCICIO 4

En un determinado centro educativo, el 50% del alumnado aprueba Historia, el 70% aprueba Matemáticas y el 30% aprueba ambas asignaturas. Si se elige un alumno al azar:

a) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que apruebe solo una de las dos asignaturas.

b) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que no apruebe más de una asignatura.

c) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que apruebe Historia si ha suspendido Matemáticas.

d) **(0.5 puntos)** Determine si los sucesos "Aprobar Matemáticas" y "Aprobar Historia" son independientes. ¿Son incompatibles?

Realizamos una tabla de contingencia.

	Aprueba Matemáticas	No aprueba Matemáticas	
Aprueba Historia	30		50
No aprueba Historia			
	70		100

Completamos la tabla.

	Aprueba Matemáticas	No aprueba Matemáticas	
Aprueba Historia	30	**20**	50
No aprueba Historia	**40**	**10**	**50**
	70	**30**	100

a) Hay un 40% del alumnado que aprueban Matemáticas y no aprueba Historia y un 20% que aprueba Historia y no aprueba Matemáticas. Hay un 40 + 20 = 60% del alumnado que aprueba solo una de las dos asignaturas. La probabilidad de que el alumno elegido al azar apruebe solo una de las dos asignaturas vale 0.6.

b) Hay un 30% del alumnado que aprueba las dos asignaturas. El restante 100 – 30 = 70 % no aprueba más de una asignatura. La probabilidad de que el alumno elegido al azar no apruebe más de una asignatura vale 0.7.

c) Hay un 30% del alumnado que ha suspendido Matemáticas y de estos un 20% ha aprobado Historia. La probabilidad de que el alumno elegido al azar apruebe Historia si ha suspendido Matemáticas vale $\frac{20}{30}=\frac{2}{3}\simeq 0.6667$.

d) Llamamos M al suceso "aprobar Matemáticas" y H a "aprobar Historia". Para que sean independientes los sucesos M y H debe cumplirse $P(M\cap H)=P(M)P(H)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(M\cap H)=0.3 \\ P(M)P(H)=0.7\cdot 0.5=0.35 \end{array}\right\}\Rightarrow P(M\cap H)=0.3\neq 0.35=P(M)P(H)$$

Los sucesos no son independientes.

Para que los sucesos sean incompatibles debe cumplirse que $M\cap H=\varnothing$ → $P(M\cap H)=0$.

Como $P(M\cap H)=0.3\neq 0$ los sucesos no son incompatibles.

EJERCICIO 5

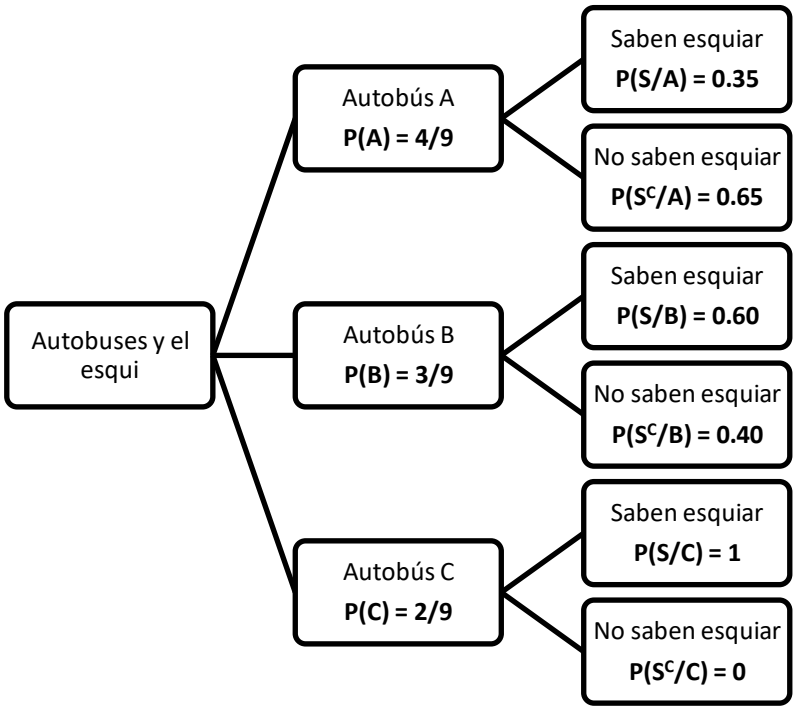
Los alumnos de un colegio de una localidad andaluza van a realizar una excursión a la estación de esquí de Sierra Nevada desplazándose en tres autobuses A, B y C. En el autobús A se desplazan cuatro novenos de los alumnos de la excursión, en el B se desplaza la tercera parte y el resto van en el autobús C. Se sabe que el 65% de los alumnos que viajan en el autobús A y el 40% de los del autobús B no sabe esquiar y todos los del autobús C sí que saben esquiar. Se escoge al azar a uno de los alumnos de la excursión. Calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) Sepa esquiar.

b) (0.75 puntos) Viaje en el autobús C, si sabe esquiar.

c) (0.75 puntos) Sepa esquiar y no viaje en el autobús B.

En el autobús A van $\frac{4}{9}$ de los alumnos, en el B van $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$ de los alumnos y en el C van el restante $1-\frac{4}{9}-\frac{3}{9}=\frac{2}{9}$ del alumnado.



a) Nos piden calcular $P(S)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(S)=P(A)P(S/A)+P(B)P(S/B)+P(C)P(S/C)=\frac{4}{9}\cdot 0.35+\frac{3}{9}\cdot 0.6+\frac{2}{9}\cdot 1=\boxed{\frac{26}{45}\simeq 0.5778}$$

b) Nos piden calcular $P(C/S)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/S)=\frac{P(C\cap S)}{P(S)}=\frac{P(C)P(S/C)}{P(S)}=\frac{\frac{2}{9}\cdot 1}{\frac{26}{45}}=\boxed{\frac{5}{13}\simeq 0.3846}$$

c) Nos piden calcular $P(S\cap B^C)$.

$$P(S\cap B^C)=P(S)-P(S\cap B)=P(S)-P(B)P(S/B)=\frac{26}{45}-\frac{1}{3}\cdot 0.6=\boxed{\frac{17}{45}\simeq 0.3778}$$

EJERCICIO 6

A partir de un estudio muestral se sabe que, con un nivel de confianza del 95%, la proporción de estudiantes de una universidad que tienen carnet de conducir pertenece al intervalo (0.5616, 0.7184)

a) **(0.5 puntos)** Calcule la proporción muestral de estudiantes que tienen carnet de conducir.

b) **(0.5 puntos)** Calcule el error máximo cometido en la estimación de la proporción poblacional.

c) **(1 punto)** Calcule el tamaño de la muestra seleccionada.

d) **(0.5 puntos)** Razone qué efecto producirá sobre la amplitud del intervalo un aumento del tamaño muestral.

a) La proporción muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$p = \frac{0.5616 + 0.7184}{2} = 0.64$$

La proporción muestral de estudiantes que tienen carnet de conducir es de 0.64.

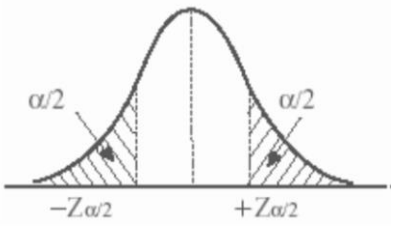
b) El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{0.7184 - 0.5616}{2} = 0.0784$$

c) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0{,}025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.0784 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.64(1-0.64)}{n}} \Rightarrow \frac{0.0784}{1.96} = \sqrt{\frac{0.2304}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.0784}{1.96}\right)^2 = \frac{0.2304}{n} \Rightarrow n = \frac{0.2304}{\left(\frac{0.0784}{1.96}\right)^2} = 144$$

El tamaño de la muestra seleccionada es de 144 estudiantes.

d) La amplitud del intervalo de confianza depende del error y el error lo obtenemos con la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$. Si aumentamos el valor del tamaño muestral = n entonces disminuye el error y por tanto disminuye la amplitud del intervalo de confianza.

EJERCICIO 7

El tiempo de adaptación a la guardería, en días, de los menores de dos años andaluces, sigue una distribución Normal de media 10.5 días y desviación típica 1.5 días.

a) **(1.25 puntos)** Se toma una muestra aleatoria de 25 menores de estas características. ¿Qué distribución sigue la media muestral del tiempo de adaptación? ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de adaptación de esta muestra supere los 10 días?

b) **(1.25 puntos)** ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 nos proporcionará un tiempo medio de adaptación entre 8 y 11 días?

Sea X = El tiempo de adaptación a la guardería, en días, de los menores de dos años andaluces.
X = N(10.5. 1.5)

a) Tamaño muestral n = 25. La media muestral del tiempo de adaptación sigue una ley Normal con la misma media y con desviación típica $\frac{1.5}{\sqrt{25}} = 0.3$. $\overline{X_{25}} = N(10.5, 0.3)$.

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{25}} > 10\right)$.

$$P\left(\overline{X_{25}} > 10\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{10-10.5}{0.3}\right) = P\left(Z > -1.67\right) =$$

$$= P\left(Z \leq 1.67\right) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} = \boxed{0.9525}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616

b) Calculamos $P\left(8 \leq \overline{X_{25}} \leq 11\right)$.

$$P\left(8 \leq \overline{X_{25}} \leq 11\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{8-10.5}{0.3} \leq Z \leq \frac{11-10.5}{0.3}\right) =$$

$$= P\left(-8.33 \leq Z \leq 1.67\right) = P\left(Z \leq 1.67\right) - P\left(Z \leq -8.33\right) = \quad .$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 0.9525 - 0 = \boxed{0.9525}$$

El porcentaje de muestras de tamaño 25 que nos proporcionará un tiempo medio de adaptación entre 8 y 11 días es del 95.25%.

PAU 2025 Extraordinaria Suplente 1 Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2024-2025	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Debe resolver 4 ejercicios, uno de cada bloque. Elija solo un ejercicio en los tres bloques donde tiene posibilidad de elección. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

En una empresa de diseño gráfico, tres personas empleadas, Ana, Bruno y Carla, trabajan en un proyecto conjunto.

a) **(1.75 puntos)** Se sabe que Ana ha dedicado un tercio del total de horas que ha necesitado el proyecto. Además, la suma de las horas trabajadas por Ana y Bruno excede en 6 horas a las que ha dedicado Carla, quien a su vez ha trabajado 4 horas más que Bruno. ¿Cuántas horas ha trabajado cada persona involucrada en el proyecto?

b) **(0.75 puntos)** Si la empresa paga 25 € por cada hora de trabajo en el proyecto y de seguros sociales el 23.60% del salario, ¿cuánto tiene que abonar la empresa para pagar los costes de este proyecto?

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una agricultora vende en su tienda online frutas y hortalizas envasándolas en cajas de dos tipos diferentes. La caja "El regalo de la tierra" la vende a 19.75 € y contiene 3 kg de frutas y 3.5 kg de hortalizas. La caja "El tesoro de la huerta" contiene 2 kg de frutas y 4 kg de hortalizas y la vende a 18.50 €. La agricultora dispone semanalmente de 210 kg de hortalizas y 150 kg de frutas. Debe vender al menos 12 cajas de "El regalo de la tierra" y no menos de 15 cajas de "El tesoro de la huerta". ¿Cuántas cajas de cada tipo debe vender a la semana para que el ingreso por la venta sea máximo? ¿A cuánto asciende este ingreso?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Un grupo de emprendedores valora crear una empresa y, para ello, ha encargado un estudio de mercado en el que se estima que los beneficios para los próximos 10 años, en millones de euros, vendrán dados por la función:

$$B(t)=\frac{3t}{t+2}-1,\quad 0\le t\le 10$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura de la empresa.

a) **(0.5 puntos)** ¿En qué intervalo de tiempo la empresa no tendrá beneficios?

b) **(0.75 puntos)** ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio y a cuánto asciende su valor?

c) **(0.75 puntos)** ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que la empresa obtenga un beneficio de 800 000 €?

d) **(0.5 puntos)** Si la función de beneficios se mantuviera y transcurrieran los años de manera indefinida, ¿A que valor tendería el beneficio de la empresa?

EJERCICIO 4

Las ventas de un producto (en miles de euros), en los 6 primeros años desde que se lanzó una campaña de publicidad, evolucionan de acuerdo con la siguiente función:

$$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100; \quad 0 \le t \le 6$$

Siendo t el tiempo transcurrido en años.

a) **(1.25 puntos)** Estudie el crecimiento y decrecimiento de las ventas a lo largo de los 6 años. Calcule los extremos.

b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente la función V.

c) **(0.75 puntos)** Calcule el área de la región limitada por la gráfica de V, la recta $t = 6$ y los ejes de coordenadas.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

En un estudio sobre la presencia de mujeres en las empresas tecnológicas se observa que el 20 % de los operarios, el 40 % de los ingenieros y el 30 % de los directivos son mujeres. Se sabe que en estas empresas el 20 % de las plantillas son directivos, el 35 % son ingenieros y el resto son operarios. Se elige un trabajador al azar de una de estas empresas.

a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que no sea un operario y sea mujer?

b) **(0.5 puntos)** Si el trabajador elegido no es un operario, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) **(1 punto)** Si el trabajador elegido es hombre, ¿a qué colectivo es más probable que pertenezca?

BLOQUE D

EJERCICIO 6

Una industria conservera envasa latas de anchoas cuyo peso en gramos sigue una distribución Normal con media poblacional desconocida y desviación típica 1 g. Para estimar la media poblacional, se selecciona al azar una muestra de 30 latas que dan un peso total de 2404.5 g.

a) **(1 punto)** Determine un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99%, para estimar el peso medio de las latas envasadas por la conservera.

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de una nueva muestra para que, manteniendo el mismo nivel de confianza, el error máximo de estimación de la media poblacional sea menor que 0.3 g.

c) **(0.5 puntos)** Explique, razonadamente, el efecto que tendría sobre el error máximo de estimación un aumento del número de latas seleccionadas en la muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza, y explique también qué ocurriría con dicho error si se aumentara el nivel de confianza manteniendo el mismo tamaño muestral.

EJERCICIO 7

a) **(1.25 puntos)** Dada la población $\{-4, -2, 1, 4, 6\}$, calcule la varianza de la distribución de las medias muestrales de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple.

b) **(1.25 puntos)** Una empresa multinacional con 10000 empleados desea realizar un estudio sobre la brecha salarial de género en su organización. La empresa está dividida en tres niveles jerárquicos, en los que se tiene 1000 empleados de nivel ejecutivo, siendo el 30% mujeres, 3000 empleados de nivel medio, de los cuales el 55% son hombres, y el resto empleados de nivel operativo, de los que el 55% son mujeres. Se quiere seleccionar una muestra estratificada de 2000 empleados, manteniendo la proporción de cada nivel jerárquico y la distribución de género dentro de cada nivel. ¿Cuántos empleados deben seleccionarse en cada nivel jerárquico? y dentro de cada uno, ¿cuántos hombres y cuántas mujeres deben seleccionarse?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

En una empresa de diseño gráfico, tres personas empleadas, Ana, Bruno y Carla, trabajan en un proyecto conjunto.

a) **(1.75 puntos)** Se sabe que Ana ha dedicado un tercio del total de horas que ha necesitado el proyecto. Además, la suma de las horas trabajadas por Ana y Bruno excede en 6 horas a las que ha dedicado Carla, quien a su vez ha trabajado 4 horas más que Bruno. ¿Cuántas horas ha trabajado cada persona involucrada en el proyecto?

b) **(0.75 puntos)** Si la empresa paga 25 € por cada hora de trabajo en el proyecto y de seguros sociales el 23.60% del salario, ¿cuánto tiene que abonar la empresa para pagar los costes de este proyecto?

a) Llamamos "x", "y", "z" al número de horas que han dedicado el proyecto Ana, Bruno y Carla respectivamente.

Ana ha dedicado un tercio del total de horas que ha necesitado el proyecto → $x = \frac{x+y+z}{3}$

.

La suma de las horas trabajadas por Ana y Bruno excede en 6 horas a las que ha dedicado Carla → $x + y = z + 6$.

Carla ha trabajado 4 horas más que Bruno → $z = y + 4$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{x+y+z}{3} \\ x+y = z+6 \\ z = y+4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x = x+y+z \\ x+y = z+6 \\ z = y+4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x = y+z \\ x+y = z+6 \\ z = y+4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x = y+y+4 \\ x+y = y+4+6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x = 2y+4 \\ \boxed{x = 10} \end{array}\right\} \Rightarrow 20 = 2y+4 \Rightarrow 2y = 16 \Rightarrow \boxed{y = 8} \Rightarrow \boxed{z = 8+4 = 12}$$

Ana ha dedicado 10 horas al proyecto, Bruno ha dedicado 8 horas y Carla 12 horas.

b) Al proyecto se han dedicado 10 + 8 + 12 = 30 horas. Si la empresa paga 25 € por cada hora de trabajo en el proyecto debe pagar 30 · 25 = 750 euros. Debemos añadirle el 23.6 % de los seguros sociales: 750 · 0.236 = 177 euros.
La empresa debe pagar por el proyecto un total de 750 + 177 = 927 euros.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una agricultora vende en su tienda online frutas y hortalizas envasándolas en cajas de dos tipos diferentes. La caja "El regalo de la tierra" la vende a 19.75 € y contiene 3 kg de frutas y 3.5 kg de hortalizas. La caja "El tesoro de la huerta" contiene 2 kg de frutas y 4 kg de hortalizas y la vende a 18.50 €. La agricultora dispone semanalmente de 210 kg de hortalizas y 150 kg de frutas. Debe vender al menos 12 cajas de "El regalo de la tierra" y no menos de 15 cajas de "El tesoro de la huerta". ¿Cuántas cajas de cada tipo debe vender a la semana para que el ingreso por la venta sea máximo? ¿A cuánto asciende este ingreso?

Llamamos x = "número de cajas "El regalo de la tierra" que vende a la semana" e y = "número de cajas "El tesoro de la tierra" que vende".

- La caja "El regalo de la tierra" contiene 3 kg de frutas y la caja "El tesoro de la huerta" contiene 2 kg de frutas. Dispone semanalmente de 150 kg de frutas. → $3x+2y\le 150$.
- La caja "El regalo de la tierra" contiene 3.5 kg de hortalizas y la caja "El tesoro de la huerta" contiene 4 kg de hortalizas. Dispone semanalmente de 210 kg de hortalizas. → $3.5x+4y\le 210$.
- Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Las restricciones del problema son:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y\le 150 \\ 3.5x+4y\le 210 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y\le 150 \\ 7x+8y\le 420 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

La caja "El regalo de la tierra" la vende a 19.75 € y la caja "El tesoro de la huerta" la vende a 18.50 €. Lo ingresos vienen expresados por la función $I(x,y)=19.75x+18.5y$. Deseamos maximizar los ingresos.

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$3x+2y=150$

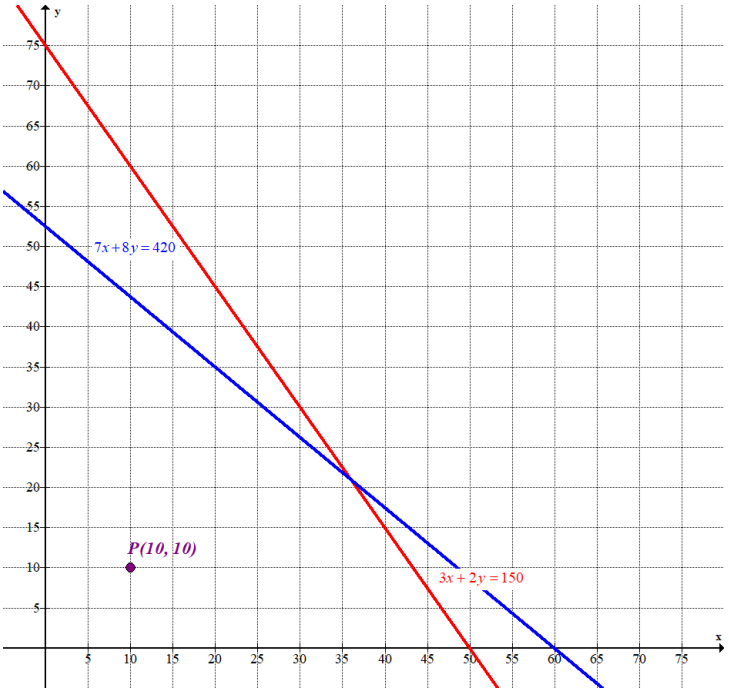
x	$y=\frac{150-3x}{2}$
0	75
20	45
36	21
50	0

$7x+8y=420$

x	$y=\frac{420-7x}{8}$
0	52.5
20	35
36	21
60	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

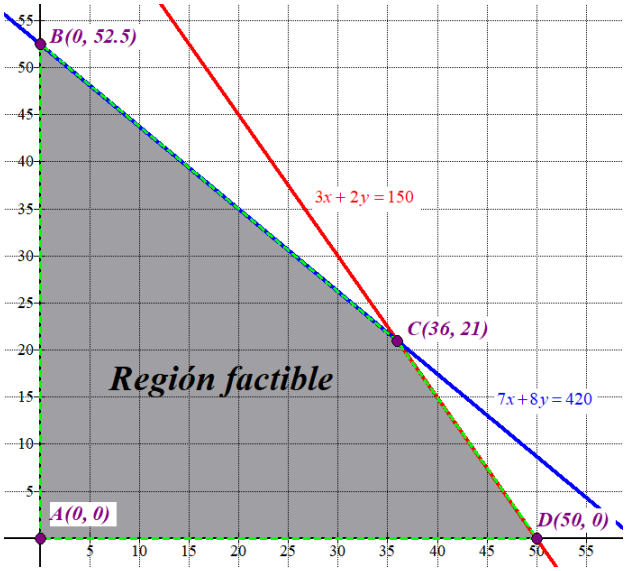
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 3x+2y\le 150 \\ 7x+8y\le 420 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul y roja. Lo comprobamos viendo si el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 30+20\le 150 \\ 70+80\le 420 \\ 10\ge 0;\ 10\ge 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Determinamos las coordenadas del vértice C.

$$C\rightarrow \left.\begin{array}{l} 7x+8y=420 \\ 3x+2y=150 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 7x+8y=420 \\ -12x-8y=-600 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$-5x = -180 \Rightarrow x=\frac{180}{5}=36\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot 36+2y=150\Rightarrow 2y=42\Rightarrow y=\frac{42}{2}=21\Rightarrow \boxed{C(36,21)}$$

Valoramos los ingresos $I(x,y)=19.75x+18.5y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$

B(0, 52.5) → $I(0,52.5)=19.75\cdot 0+18.5\cdot 52.5=971.25$

C(36, 21) → $I(36,21)=19.75\cdot 36+18.5\cdot 21=1099.5$ Máximo

D(50, 0) → $I(50,0)=19.75\cdot 50+18.5\cdot 0=987.5$

Los ingresos máximos son de 1099.5 € y se consiguen en el vértice C(36, 21).
Los ingresos máximos de 1099.5 se consiguen con la preparación semanal de 36 cajas de "El regalo de la tierra" y 21 cajas de "El tesoro de la huerta".

EJERCICIO 3

Un grupo de emprendedores valora crear una empresa y, para ello, ha encargado un estudio de mercado en el que se estima que los beneficios para los próximos 10 años, en millones de euros, vendrán dados por la función:

$$B(t)=\frac{3t}{t+2}-1,\quad 0\le t\le 10$$

donde *t* representa los años transcurridos desde la apertura de la empresa.

a) **(0.5 puntos)** ¿En qué intervalo de tiempo la empresa no tendrá beneficios?

b) **(0.75 puntos)** ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio y a cuánto asciende su valor?

c) **(0.75 puntos)** ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que la empresa obtenga un beneficio de 800 000 €?

d) **(0.5 puntos)** Si la función de beneficios se mantuviera y transcurrieran los años de manera indefinida, ¿A qué valor tendería el beneficio de la empresa?

a) Buscamos cuando $B(t)=0$.

$$B(t)=0\Rightarrow\frac{3t}{t+2}-1=0\Rightarrow\frac{3t}{t+2}=1\Rightarrow 3t=t+2\Rightarrow 2t=2\Rightarrow \boxed{t=1}$$

La función es continua pues el denominador se anula para $t=-2$ que no pertenece al intervalo de definición.

Como $B(0)=\frac{3\cdot 0}{0+2}-1=-1<0$ podemos afirmar que la empresa empieza con pérdidas y no tiene beneficios hasta pasado el primer año. A partir de entonces si tiene beneficios.

b) Calculamos la primera derivada.

$$B(t)=\frac{3t}{t+2}-1\Rightarrow B'(t)=\frac{3(t+2)-1\cdot 3t}{(t+2)^2}=\frac{3t+6-3t}{(t+2)^2}=\frac{6}{(t+2)^2}$$

Esta expresión de la derivada siempre es positiva, pues el numerador y el denominador siempre son positivos. La función crece en todo su dominio.

Al ser la función siempre creciente el máximo beneficio se alcanza en $t=10$.

Como $B(10)=\frac{30}{10+2}-1=1.5$ el beneficio máximo que se puede alcanzar en los 10 primeros años es de 1.5 millones de euros. Este beneficio máximo se consigue el décimo año.

c) Buscamos cuando $B(t)=0.8$.

$$B(t)=0.8\Rightarrow\frac{3t}{t+2}-1=0.8\Rightarrow\frac{3t}{t+2}=1.8\Rightarrow 3t=1.8t+3.6\Rightarrow 1.2t=3.6\Rightarrow \boxed{t=3}$$

Al tercer año se consiguen unos beneficios de 800 000 €.

d) Calculamos el límite de la función beneficios cuando *t* tiende a +∞.

$$\lim_{t\to+\infty}B(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{3t}{t+2}-1=\lim_{t\to+\infty}\frac{3t-t-2}{t+2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2t-2}{t+2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{t}=\boxed{2}$$

Los beneficios de la empresa con el paso de los años tienden a ser de 2 millones de euros.

EJERCICIO 4

Las ventas de un producto (en miles de euros), en los 6 primeros años desde que se lanzó una campaña de publicidad, evolucionan de acuerdo con la siguiente función:

$$V(t)=4t^3-24t^2+36t+100;\ \ 0\le t\le 6$$

Siendo t el tiempo transcurrido en años.

a) **(1.25 puntos)** Estudie el crecimiento y decrecimiento de las ventas a lo largo de los 6 años. Calcule los extremos.

b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente la función V.

c) **(0.75 puntos)** Calcule el área de la región limitada por la gráfica de V, la recta $t=6$ y los ejes de coordenadas.

a) Calculamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$V(t)=4t^3-24t^2+36t+100\Rightarrow V'(t)=12t^2-48t+36$$

$$V'(t)=0\Rightarrow 12t^2-48t+36=0\Rightarrow t^2-4t+3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{4-2}{2}=\boxed{1=t}\\ \frac{4+2}{2}=\boxed{3=t}\end{cases}$$

La función ventas presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $[0,1)$ tomamos $t=0.5$ y la derivada vale $V'(0.5)=12\cdot 0.5^2-48\cdot 0.5+36=15>0$. La función crece en $[0,1)$.
- En el intervalo $(1,3)$ tomamos $t=2$ y la derivada vale $V'(2)=12\cdot 2^2-48\cdot 2+36=-12<0$. La función decrece en $(1,3)$,
- En el intervalo $(3,6]$ tomamos $t=4$ y la derivada vale $V'(4)=12\cdot 4^2-48\cdot 4+36=36>0$. La función crece en $(3,6]$,

La función crece en $[0,1)\cup(3,6]$ y decrece en $(1,3)$.

Las ventas crecen hasta el primer año, decrecen entre el primer y tercer año y crecen a partir del tercer año.

Valoramos las ventas en los puntos críticos y en los extremos del intervalo de definición para averiguar en que momento se producen el máximo y mínimo absoluto de las ventas.

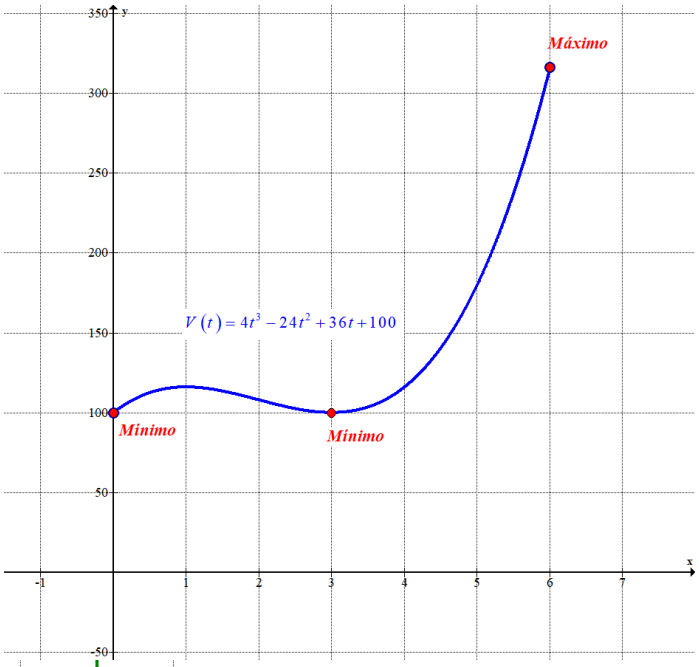
$$\left.\begin{aligned}V(0)&=4\cdot 0^3-24\cdot 0^2+36\cdot 0+100=100\ \text{Mínimo}\\ V(1)&=4\cdot 1^3-24\cdot 1^2+36\cdot 1+100=116\\ V(3)&=4\cdot 3^3-24\cdot 3^2+36\cdot 3+100=100\ \text{Mínimo}\\ V(6)&=4\cdot 6^3-24\cdot 6^2+36\cdot 6+100=316\ \ \text{Máximo}\end{aligned}\right\}$$

Las máximas ventas se producen en el sexto año con un importe de 316 000 €.

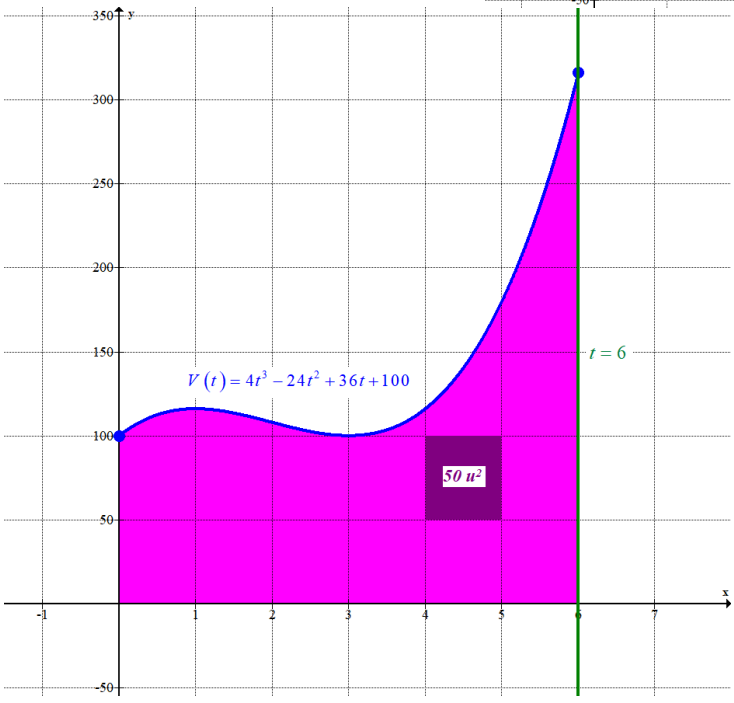
Las mínimas ventas se producen al comenzar y al tercer año con un importe de 100 000 €.

b) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función ventas.

t	$V(t)=4t^3-24t^2+36t+100$
0	100
1	116 Máximo relativo
3	100
6	316 Máximo absoluto



c) Nos piden calcular el área de la región del plano coloreada de rosa en el siguiente dibujo.



El área va a tener un valor muy grande. Hemos marcado el cuadrado que tiene 50 unidades cuadradas de área. El área de la región indicada es el valor de la integral definida entre 0 y 6 de la función de ventas.

$$\int_0^6 V(t)\,dt=\int_0^6 4t^3-24t^2+36t+100\,dt=\left[t^4-8t^3+18t^2+100t\right]_0^6=$$

$$=\left[6^4-8\cdot 6^3+18\cdot 6^2+100\cdot 6\right]-\left[0^4-8\cdot 0^3+18\cdot 0^2+100\cdot 0\right]=\boxed{816}$$

El área de la región limitada por la gráfica de V, la recta $t=6$ y los ejes de coordenadas tiene un valor de 816 unidades cuadradas.

EJERCICIO 5

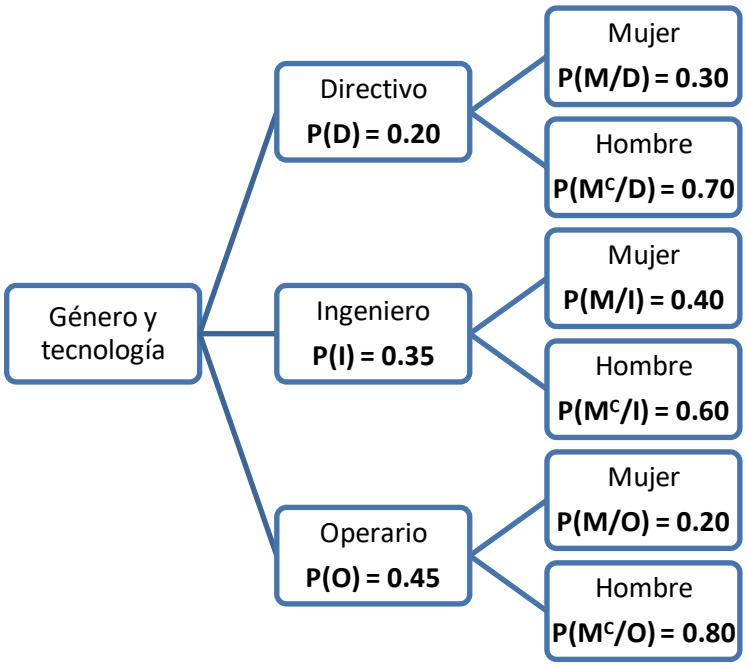
En un estudio sobre la presencia de mujeres en las empresas tecnológicas se observa que el 20 % de los operarios, el 40 % de los ingenieros y el 30 % de los directivos son mujeres. Se sabe que en estas empresas el 20 % de las plantillas son directivos, el 35 % son ingenieros y el resto son operarios. Se elige un trabajador al azar de una de estas empresas.

a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que no sea un operario y sea mujer?

b) **(0.5 puntos)** Si el trabajador elegido no es un operario, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) **(1 punto)** Si el trabajador elegido es hombre, ¿a qué colectivo es más probable que pertenezca?

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P\left(O^C \cap M\right)$.

$$P\left(O^C \cap M\right) = P\left(I \cap M\right) + P\left(D \cap M\right) = P\left(I\right)P\left(M / I\right) + P\left(D\right)P\left(M / D\right) =$$

$$= 0.35 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.3 = \boxed{0.2}$$

La probabilidad de que al elegir al azar un trabajador no sea un operario y sea mujer vale 0.2.

b) Nos piden calcular $P\left(M / O^C\right)$.

$$P\left(M / O^C\right) = \frac{P\left(M \cap O^C\right)}{P\left(O^C\right)} = \frac{P\left(M \cap D\right) + P\left(M \cap I\right)}{1 - P\left(O\right)} =$$

$$= \frac{P\left(D\right)P\left(M / D\right) + P\left(I\right)P\left(M / I\right)}{1 - P\left(O\right)} = \frac{0.2 \cdot 0.3 + 0.35 \cdot 0.4}{1 - 0.45} = \boxed{\frac{4}{11} \simeq 0.3636}$$

La probabilidad de que al elegir un trabajador que no es operario este sea mujer vale $\frac{4}{11} \simeq 0.3636$.

c) Calculamos $P\left(D / M^C\right)$, $P\left(I / M^C\right)$ y $P\left(O / M^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(D / M^C\right) = \frac{P\left(D \cap M^C\right)}{P\left(M^C\right)} = \frac{P(D) P\left(M^C / D\right)}{P(D) P\left(M^C / D\right) + P(I) P\left(M^C / I\right) + P(O) P\left(M^C / O\right)} =$$

$$= \frac{0.2 \cdot 0.7}{0.2 \cdot 0.7 + 0.35 \cdot 0.6 + 0.45 \cdot 0.8} = \frac{0.14}{0.71} = \boxed{\frac{14}{71} \simeq 0.1972}$$

$$P\left(I / M^C\right) = \frac{P\left(I \cap M^C\right)}{P\left(M^C\right)} = \frac{P(I) P\left(M^C / I\right)}{P\left(M^C\right)} = \frac{0.35 \cdot 0.6}{0.71} = \boxed{\frac{21}{71} \simeq 0.2958}$$

$$P\left(O / M^C\right) = \frac{P\left(O \cap M^C\right)}{P\left(M^C\right)} = \frac{P(O) P\left(M^C / O\right)}{P\left(M^C\right)} = \frac{0.45 \cdot 0.8}{0.71} = \boxed{\frac{36}{71} \simeq 0.507}$$

La probabilidad más alta es la del grupo de operarios. Es más probable que el hombre elegido pertenezca al grupo de operarios.

EJERCICIO 6

Una industria conservera envasa latas de anchoas cuyo peso en gramos sigue una distribución Normal con media poblacional desconocida y desviación típica 1 g. Para estimar la media poblacional, se selecciona al azar una muestra de 30 latas que dan un peso total de 2404.5 g.

a) **(1 punto)** Determine un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99%, para estimar el peso medio de las latas envasadas por la conservera.

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de una nueva muestra para que, manteniendo el mismo nivel de confianza, el error máximo de estimación de la media poblacional sea menor que 0.3 g.

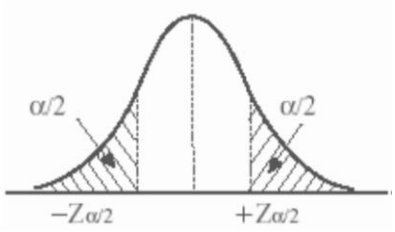
c) **(0.5 puntos)** Explique, razonadamente, el efecto que tendría sobre el error máximo de estimación un aumento del número de latas seleccionadas en la muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza, y explique también qué ocurriría con dicho error si se aumentara el nivel de confianza manteniendo el mismo tamaño muestral.

a) Sea X = El peso en gramos de una lata de anchoas de una industria conservera. $X = N(\mu,1)$

Tamaño de la muestra es $n = 30$ latas. La media muestral es $\bar{x} = \frac{2404.5}{30} = 80.15$ g.

Con un nivel de confianza del 99 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}99 \rightarrow \propto = 0{,}01 \rightarrow \propto/2 = 0{,}005 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \simeq 0.47$$

El intervalo de confianza para la media de peso de una lata es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(80.15 - 0.47,\ \ 80.15 + 0.47\right) = \left(79.68,\ 80.62\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 99 % tenemos $z_{\alpha/2}$ **= 2.575.**

Hallamos el tamaño de la muestra mínimo para que el error máximo sea 0.3.

$$Error < 0.03 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.3 \Rightarrow 2.575 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} < 0.3 \Rightarrow 2.575 < 0.3\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2.575}{0.3} < \sqrt{n} \Rightarrow \boxed{n > \left(\frac{2.575}{0.3}\right)^2 \simeq 73.67}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 74 latas de anchoas.

c) El error máximo viene dado por la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si mantenemos el nivel de confianza no cambia el valor de $z_{\alpha/2}$ y si aumentamos el valor de n = número de latas seleccionadas disminuirá el error.

Si mantenemos el valor de n = tamaño de la muestra y aumentamos el nivel de confianza entonces aumenta el valor de $z_{\alpha/2}$ y aumentará el error.

EJERCICIO 7

a) **(1.25 puntos)** Dada la población $\{-4,-2,1,4,6\}$, calcule la varianza de la distribución de las medias muestrales de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple.

b) **(1.25 puntos)** Una empresa multinacional con 10000 empleados desea realizar un estudio sobre la brecha salarial de género en su organización. La empresa está dividida en tres niveles jerárquicos, en los que se tiene 1000 empleados de nivel ejecutivo, siendo el 30% mujeres, 3000 empleados de nivel medio, de los cuales el 55% son hombres, y el resto empleados de nivel operativo, de los que el 55% son mujeres. Se quiere seleccionar una muestra estratificada de 2000 empleados, manteniendo la proporción de cada nivel jerárquico y la distribución de género dentro de cada nivel. ¿Cuántos empleados deben seleccionarse en cada nivel jerárquico? y dentro de cada uno, ¿cuántos hombres y cuántas mujeres deben seleccionarse?

a) La media de la distribución de las medias muestrales coincide con la media poblacional.

$$\bar{x} = \frac{-4-2+1+4+6}{5} = 1.2$$

Calculamos la varianza poblacional.

$$Varianza\,(X) = \frac{\sum (x_i)^2}{5} - \left(\bar{x}\right)^2 = \frac{16+4+1+16+36}{5} - 1.2^2 = 13.16$$

La varianza de la distribución de las medias muestrales es la varianza poblacional dividida entre el tamaño de las muestras (2) → $\frac{13.16}{2} = 6.58$.

b) El tamaño total de la muestra es de 2000 empleados. Llamamos n_1 al tamaño de la muestra en el estrato de 1000 personas, n_2 al tamaño de la muestra en el estrato de 3000 personas y n_3 al tamaño de la muestra en el estrato de 10000 – 1000 – 3000 = 6000 personas.

$$\frac{2000}{10000} = \frac{n_1}{1000} = \frac{n_2}{3000} = \frac{n_3}{6000}$$

De esta expresión vamos separando por parejas y determinando el tamaño correspondiente a cada estrato.

$$\frac{2000}{10000} = \frac{n_1}{1000} \Rightarrow n_1 = \frac{1000 \cdot 2000}{10000} = 200$$

$$\frac{2000}{10000} = \frac{n_2}{3000} \Rightarrow n_2 = \frac{3000 \cdot 2000}{10000} = 600$$

$$\frac{2000}{10000} = \frac{n_3}{6000} \Rightarrow n_1 = \frac{6000 \cdot 2000}{10000} = 1200$$

Del nivel ejecutivo se eligen 200, del nivel medio se eligen 600 y del nivel operativo se eligen 1200 empleados.

Para mantener la proporción de mujeres y hombres en la selección se debe elegir en el nivel ejecutivo el 30% de 200 = 0.3 · 200 = 60 mujeres y 140 hombres. En el nivel medio se deben elegir un 55% de hombres = 600 · 0.55 = 330 hombres y 270 mujeres. En el nivel operativo se deben elegir el 55% de mujeres = 1200 · 0.55 = 660 mujeres y 540 hombres.

PAU 2025 Extraordinaria Suplente 2 Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2024-2025	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Debe resolver 4 ejercicios, uno de cada bloque. Elija solo un ejercicio en los tres bloques donde tiene posibilidad de elección. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

a) **(1.5 puntos)** La suma de tres números naturales es 113; al dividir el mayor entre el menor se obtiene de cociente 6 y resto 4 y al dividir el mayor entre el intermedio se obtiene de cociente 2 y resto 6. Halle dichos números.

b) **(1 punto)** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, compruebe si la inversa de la suma de dichas matrices coincide con la suma de las inversas de cada una.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un fabricante produce mensualmente dos tipos de abonos ecológicos, A y B, que vende en su totalidad, obteniendo unos beneficios de 15 y 10 euros por kilogramo (kg), respectivamente. La producción de abono del tipo A no puede superar los 200 kg; el doble de la producción de B menos el triple de la producción de A es a lo sumo 100 kg. Además, la producción de A más el doble de la producción de B es como mucho de 500 kg. Obtenga las cantidades que este fabricante debe producir de sendos abonos para obtener el máximo beneficio e indique el valor de este beneficio.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

El Cesio 137 es un elemento radioactivo que se usa, entre otros, para tratamientos de radioterapia. La cantidad (en mg) de Cesio 137 que queda en el lugar de almacenamiento, transcurrido un número de años *t*, viene dada por la función:

$$f(t)=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}};\quad t\geq 0$$

a) **(0.5 puntos)** Calcule los años que deben pasar para que la cantidad de Cesio 137 que quede en el almacén sea la mitad de la que había al inicio.
b) **(1.25 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f*, en el punto de abscisa $t=10$.
c) **(0.75 puntos)** Indique si la función tiene asíntotas horizontales y verticales. En caso afirmativo, calcúlelas.

BLOQUE C

EJERCICIO 4

Una empresa de tecnología fabrica tres modelos de teléfonos móviles: *Básico*, *Intermedio* y *Premium*. Cada modelo puede estar fabricado con uno de los siguientes tipos de pantalla: A o B. El 35% de los móviles fabricados por esta empresa son del modelo *Básico*, el 45% son del *Intermedio* y el resto son *Premium*. Se sabe que el 80% de los móviles fabricados del modelo *Básico* tienen una pantalla del tipo A, mientras que en el modelo *Premium* solo un 5% dispone de esta pantalla. Finalmente, el 53% de los teléfonos producidos tienen pantalla del tipo A. Se selecciona un teléfono al azar de la línea de producción. Determine la probabilidad de que:

a) **(1.5 puntos)** Tenga una pantalla del tipo A sabiendo que es del modelo *Intermedio*.

b) **(1 punto)** Sea del modelo *Intermedio* sabiendo que tiene pantalla del tipo A.

EJERCICIO 5

El 20% de los estudiantes de danza de una localidad andaluza están matriculados en la escuela A y el resto en la B. En estas escuelas se practica danza clásica y moderna y cada estudiante solo se puede matricular en una de estas dos especialidades. De los matriculados en A, el 70% practica danza clásica y el resto danza moderna. Se sabe también que el 32% de los estudiantes de danza son de la escuela B y practican danza clásica. Elegido al azar un estudiante de danza de la localidad, calcule la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Practique danza clásica.

b) **(0.5 puntos)** Practique danza moderna si es de la escuela B.

c) **(0.5 puntos)** Estudie en la escuela B si resulta ser un estudiante de danza moderna.

d) **(0.5 puntos)** Sea de la escuela A, practique danza clásica y realice un Máster, sabiendo que el 80% de los estudiantes de danza clásica de la escuela A realiza un Máster.

BLOQUE D

EJERCICIO 6

Se selecciona una muestra aleatoria de 600 familias a las que se les pregunta si tienen mascota, resultando que 240 de esas familias contestaron afirmativamente. Con un nivel de confianza del 95%,

a) **(1.25 puntos)** Obtenga el correspondiente intervalo de confianza para estimar la proporción poblacional de familias que tienen mascota. ¿Puede suponerse que la mitad de las familias de esta población tiene mascota?

b) **(0.75 puntos)** ¿Qué tamaño muestral mínimo se debe tomar para que el error máximo al estimar esta proporción sea 0.025?

c) **(0.5 puntos)** Explique razonadamente el efecto que tendría sobre la amplitud del intervalo de confianza de la proporción poblacional el aumento del tamaño de la muestra elegida.

EJERCICIO 7

Se ha realizado un estudio para analizar el peso, en kilogramos, de las mochilas de los estudiantes de ESO de los institutos de una localidad. Para ello, se seleccionó una muestra aleatoria de 13 mochilas, obteniéndose los siguientes datos:

4.5, 5.3, 4.9, 5.2, 5.5, 5.5, 5.7, 4.8, 5.6, 4.7, 4.2, 5.8, 4.6

El peso de las mochilas se distribuye según una ley Normal de desviación típica 0.9 kg y media desconocida.

a) **(1.25 puntos)** Halle un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 98.5%, para estimar el peso medio de las mochilas escolares.

b) **(0.75 puntos)** Para el mismo nivel de confianza, ¿qué tamaño muestral mínimo se debería tomar para que el error cometido al estimar el peso medio de estas mochilas sea inferior al 10%?

c) **(0.5 puntos)** El peso medio de las mochilas de los estudiantes de ESO de esa localidad es de 4.9 kg y tomando una muestra aleatoria de 36 mochilas, ¿qué distribución sigue la variable que mide el peso medio de estas 36 mochilas? ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio no supere los 5.2 kg?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

a) **(1.5 puntos)** La suma de tres números naturales es 113; al dividir el mayor entre el menor se obtiene de cociente 6 y resto 4 y al dividir el mayor entre el intermedio se obtiene de cociente 2 y resto 6. Halle dichos números.

b) **(1 punto)** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, compruebe si la inversa de la suma de dichas matrices coincide con la suma de las inversas de cada una.

a) Llamamos "x", "y", "z" a los tres números naturales ordenados de menor a mayor.

La suma de tres números naturales es 113 → $x+y+z=113$.

Al dividir el mayor entre el menor se obtiene de cociente 6 y resto 4 → $\frac{z}{x}=6+\frac{4}{x}$.

Al dividir el mayor entre el intermedio se obtiene de cociente 2 y resto 6 → $\frac{z}{y}=2+\frac{6}{y}$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=113\\ \frac{z}{x}=6+\frac{4}{x}\\ \frac{z}{y}=2+\frac{6}{y}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=113\\ z=6x+4\\ z=2y+6\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+2y+6=113\\ 2y+6=6x+4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+3y=107\\ 2y-6x=-2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=107-3y\\ y-3x=-1\end{array}\right\}\Rightarrow y-3(107-3y)=-1\Rightarrow y-321+9y=-1\Rightarrow 10y=320\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{y=\frac{320}{10}=32}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=107-3\cdot 32=11}\\ \boxed{z=2\cdot 32+6=70}\end{cases}$$

Los números naturales que cumplen lo pedido son 11, 32 y 70.

b) Hallamos las inversas de las dos matrices.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3+2=5\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}}{5}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/5 & 1/5\\ -2/5 & 1/5\end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos también la inversa de la matriz A + B.

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A+B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 \neq 0$$

$$(A+B)^{-1} = \frac{Adj\left((A+B)^T\right)}{|A+B|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si se cumple que $A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1}$.

$$\left.\begin{array}{l} A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 & 7/10 \\ 3/5 & 1/5 \end{pmatrix} \\ (A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1/4 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1} + B^{-1} \neq (A+B)^{-1}$$

No se cumple que la inversa de la suma de dichas matrices coincida con la suma de las inversas de cada una.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un fabricante produce mensualmente dos tipos de abonos ecológicos, A y B, que vende en su totalidad, obteniendo unos beneficios de 15 y 10 euros por kilogramo (kg), respectivamente. La producción de abono del tipo A no puede superar los 200 kg; el doble de la producción de B menos el triple de la producción de A es a lo sumo 100 kg. Además, la producción de A más el doble de la producción de B es como mucho de 500 kg. Obtenga las cantidades que este fabricante debe producir de sendos abonos para obtener el máximo beneficio e indique el valor de este beneficio.

Llamamos x = "Kilos de abono A que produce mensualmente un fabricante" e y = "Kilos de abono B que produce mensualmente un fabricante".

La producción de abono del tipo A no puede superar los 200 kg → $x \le 200$.

El doble de la producción de B menos el triple de la producción de A es a lo sumo 100 kg → $2y - 3x \le 100$.

La producción de A más el doble de la producción de B es como mucho de 500 kg → $x + 2y \le 500$.

Las cantidades deben ser positivas → $x \ge 0;\ y \ge 0$

Las restricciones del problema son:

$$\left.\begin{array}{l} x \le 200 \\ 2y - 3x \le 100 \\ x + 2y \le 500 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Vende en su totalidad el abono producido, obteniendo unos beneficios de 15 y 10 euros por kilogramo de abono A y B, respectivamente. Los beneficios vienen expresados por la función $B(x, y) = 15x + 10y$. Deseamos maximizar los beneficios.

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$x = 200$

$x = 200$	y
200	150
200	350

$x \ge 0;\ y \ge 0$

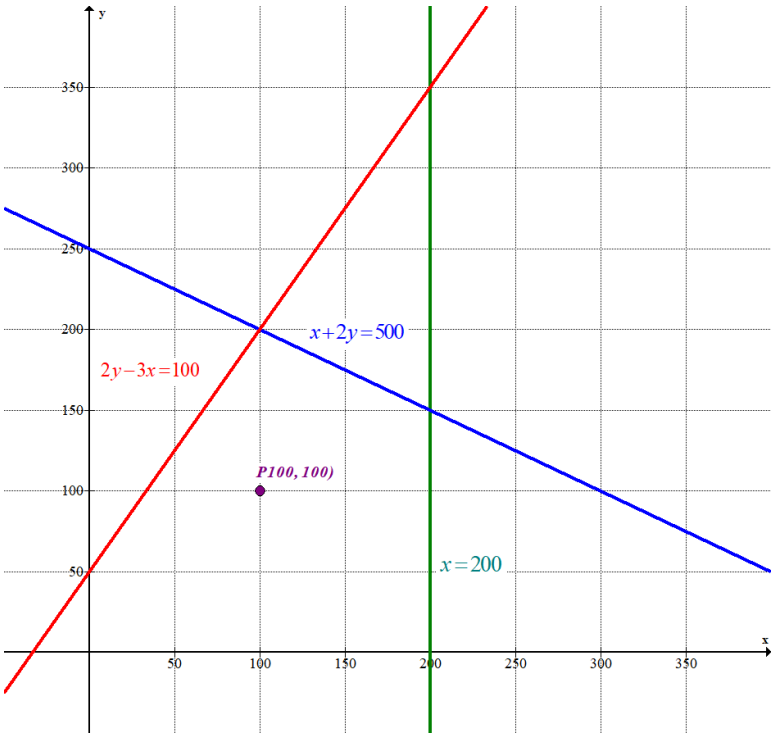
Primer cuadrante

$2y - 3x = 100$

x	$y = \frac{100 + 3x}{2}$
0	50
100	200
200	350

$x + 2y = 500$

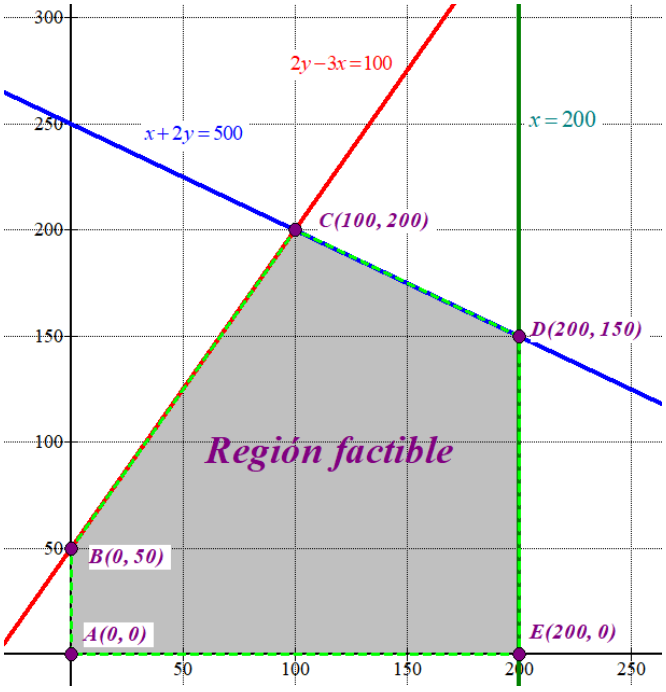
x	$y = \frac{500 - x}{2}$
0	250
100	200
200	150
500	0



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \le 200 \\ 2y - 3x \le 100 \\ x + 2y \le 500 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul y roja, y a la izquierda de la recta vertical verde. Lo comprobamos viendo si el punto P(100, 100) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 100 \le 200 \\ 200 - 300 \le 100 \\ 100 + 200 \le 500 \\ 100 \ge 0;\ 100 \ge 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos los beneficios $B(x, y) = 15x + 10y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0) = 0$

B(0, 50) → $B(0,50) = 15 \cdot 0 + 10 \cdot 50 = 500$

C(100, 200) → $B(100,200) = 15 \cdot 100 + 10 \cdot 200 = 3500$

D(200, 150) → $B(200,150) = 15 \cdot 200 + 10 \cdot 150 = 4500$ Máximo

E(200, 0) → $B(200,0) = 15 \cdot 200 + 10 \cdot 0 = 3000$

El beneficio máximo tiene un valor de 4500 € y se consiguen en el vértice D(200, 150).
El beneficio máximo de 4500 € se consigue con la preparación mensual de 200 kg de abono A y 150 kg de abono B.

EJERCICIO 3

El Cesio 137 es un elemento radioactivo que se usa, entre otros, para tratamientos de radioterapia. La cantidad (en mg) de Cesio 137 que queda en el lugar de almacenamiento, transcurrido un número de años *t*, viene dada por la función:

$$f(t)=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}};\quad t\geq 0$$

a) **(0.5 puntos)** Calcule los años que deben pasar para que la cantidad de Cesio 137 que quede en el almacén sea la mitad de la que había al inicio.

b) **(1.25 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f*, en el punto de abscisa $t=10$.

c) **(0.75 puntos)** Indique si la función tiene asíntotas horizontales y verticales. En caso afirmativo, calcúlelas.

a) Calculamos la cantidad inicial de Cesio 137: $f(0)=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0}{30}}=10\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=10$.

Debemos buscar el valor de *t* para el que $f(t)=5$.

$$f(t)=5\Rightarrow 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}=5\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\Rightarrow\frac{t}{30}=1\Rightarrow\boxed{t=30}$$

Deben pasar 30 años para que la cantidad de Cesio 137 que quede en el almacén sea la mitad de la que había al inicio.

b) La recta tangente a la gráfica de la función *f*, en el punto de abscisa $t=10$ tiene ecuación $y-f(10)=f'(10)(t-10)$.

$$f(t)=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}\Rightarrow f'(t)=10\cdot\frac{1}{30}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\left(2^{-1}\right)}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}=\frac{-\ln 2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(10)=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{30}}=10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{10}{\sqrt[3]{2}} \\ f'(10)=\frac{-\ln 2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{30}}=\frac{-\ln 2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{-\ln 2}{3\sqrt[3]{2}} \\ y-f(10)=f'(10)(t-10) \end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{10}{\sqrt[3]{2}}=\frac{-\ln 2}{3\sqrt[3]{2}}(t-10)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{-\ln 2}{3\sqrt[3]{2}}t+\frac{10\cdot\ln 2}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{10}{\sqrt[3]{2}}\Rightarrow\boxed{y=\frac{-\ln 2}{3\sqrt[3]{2}}t+\frac{10\cdot\ln 2+30}{3\sqrt[3]{2}}}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f*, en el punto de abscisa $t=10$ es $y=\frac{-\ln 2}{3\sqrt[3]{2}}t+\frac{10\cdot\ln 2+30}{3\sqrt[3]{2}}$.

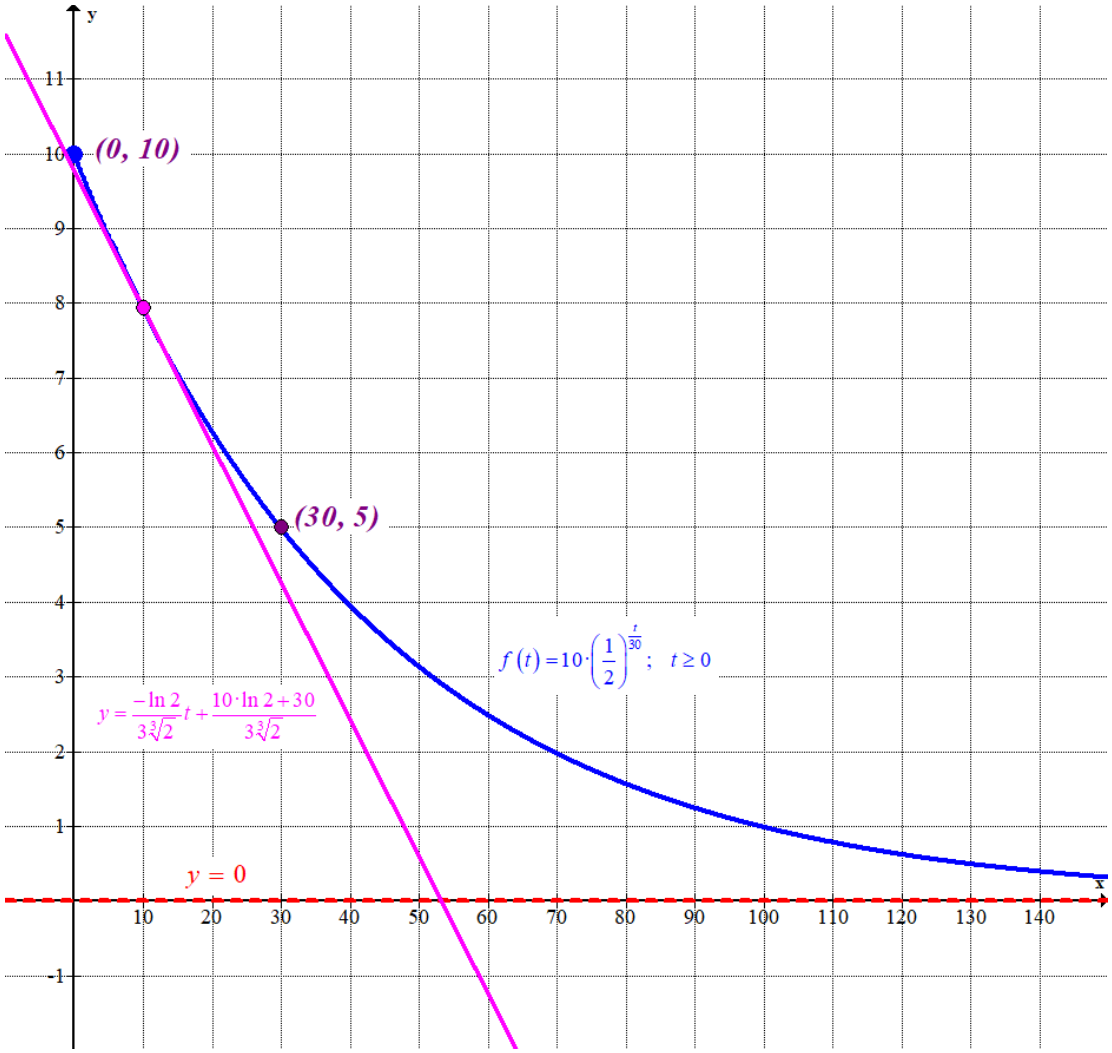
c) **Asíntota vertical.** $x = a$

El dominio de la función $f(t) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$ son todos los números reales. La función no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 10 \cdot 0 = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.



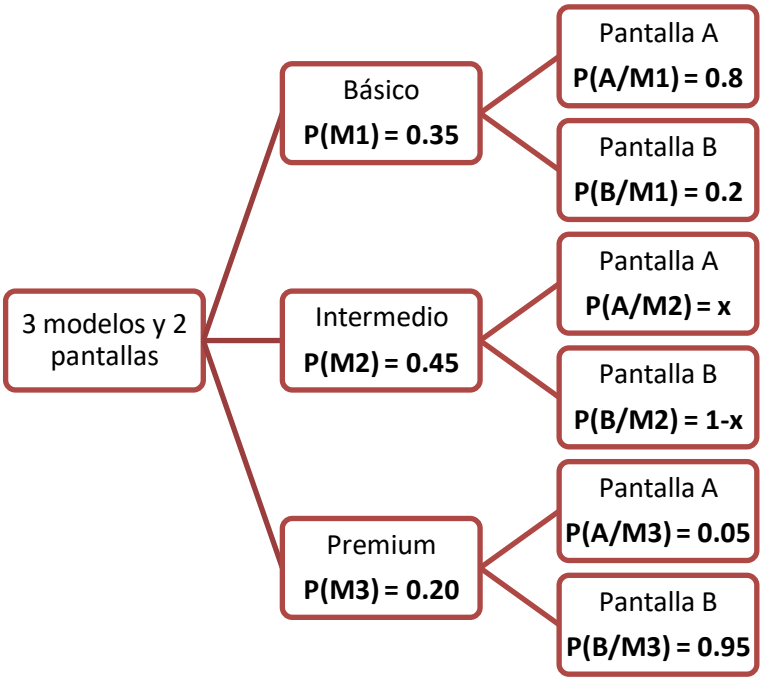
EJERCICIO 4

Una empresa de tecnología fabrica tres modelos de teléfonos móviles: *Básico*, *Intermedio* y *Premium*. Cada modelo puede estar fabricado con uno de los siguientes tipos de pantalla: A o B. El 35% de los móviles fabricados por esta empresa son del modelo *Básico*, el 45% son del *Intermedio* y el resto son *Premium*. Se sabe que el 80% de los móviles fabricados del modelo *Básico* tienen una pantalla del tipo A, mientras que en el modelo *Premium* solo un 5% dispone de esta pantalla. Finalmente, el 53% de los teléfonos producidos tienen pantalla del tipo A. Se selecciona un teléfono al azar de la línea de producción. Determine la probabilidad de que:

a) **(1.5 puntos)** Tenga una pantalla del tipo A sabiendo que es del modelo *Intermedio*.

b) **(1 punto)** Sea del modelo *Intermedio* sabiendo que tiene pantalla del tipo A.

Si el 35% de los móviles fabricados por esta empresa son del modelo *Básico*, el 45% son del *Intermedio* y el resto son *Premium* tenemos que 100 – 45 – 35 = 20% son *Premium*.
Colocamos toda la información proporcionada en el ejercicio en un diagrama de árbol.



a) Debemos calcular $P(A/M2)$. Nos dicen que el 53% de los teléfonos producidos tienen pantalla del tipo A, es decir, $P(A)=0.53$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total para determinar el valor de $P(A/M2)$.

$$P(A)=P(M1)P(A/M1)+P(M2)P(A/M2)+P(M3)P(A/M3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.53=0.35\cdot 0.8+0.45x+0.2\cdot 0.05\Rightarrow 0.45x=0.53-0.35\cdot 0.8-0.2\cdot 0.05\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.45x=0.24\Rightarrow \boxed{x=\frac{0.24}{0.45}=\frac{8}{15}\simeq 0.5333}$$

Hemos visto que $P(A/M2)=\frac{8}{15}$.

b) Nos piden calcular $P(M2/A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M2/A)=\frac{P(M2\cap A)}{P(A)}=\frac{P(M2)P(A/M2)}{P(A)}=\frac{0.45\cdot\frac{8}{15}}{0.53}=\boxed{\frac{24}{53}\simeq 0.4528}$$

La probabilidad de que sea del modelo *Intermedio* sabiendo que tiene pantalla del tipo A vale $\frac{24}{53}\simeq 0.4528$.

EJERCICIO 5

El 20% de los estudiantes de danza de una localidad andaluza están matriculados en la escuela A y el resto en la B. En estas escuelas se practica danza clásica y moderna y cada estudiante solo se puede matricular en una de estas dos especialidades. De los matriculados en A, el 70% practica danza clásica y el resto danza moderna. Se sabe también que el 32% de los estudiantes de danza son de la escuela B y practican danza clásica. Elegido al azar un estudiante de danza de la localidad, calcule la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Practique danza clásica.

b) **(0.5 puntos)** Practique danza moderna si es de la escuela B.

c) **(0.5 puntos)** Estudie en la escuela B si resulta ser un estudiante de danza moderna.

d) **(0.5 puntos)** Sea de la escuela A, practique danza clásica y realice un Máster, sabiendo que el 80% de los estudiantes de danza clásica de la escuela A realiza un Máster.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Danza clásica	Danza moderna	
Escuela A	$0.70 \cdot 20 = 14$		20
Escuela B	32		
			100

Completamos la tabla.

	Danza clásica	Danza moderna	
Escuela A	14	**6**	20
Escuela B	32	**48**	**80**
	46	**54**	100

a) Un 46% de los alumnos practican danza clásica. La probabilidad de que el alumno elegido al azar practique danza clásica vale 0.46.

b) Un 80% de los estudiantes son de la escuela B y un 48% son de la escuela B y practican danza moderna. La probabilidad de que un alumno elegido en la escuela B practique danza moderna vale $\frac{48}{80} = 0.6$.

c) Un 54% de los alumnos practican danza moderna y un 48% del alumnado son de la escuela B y practican danza moderna.
La probabilidad de que al elegir un alumno que practica danza moderna este sea de la escuela B vale $\frac{48}{54} = \frac{8}{9} \simeq 0.8889$.

d) Un 14 % del alumnado es de la escuela A y practica danza clásica. Un 80 % de estos alumnos realiza un master, es decir, $0.80 \cdot 14 = 11.2\%$ del alumnado es de la escuela A, practica danza clásica y realiza un master. La probabilidad pedida es 0.112.

EJERCICIO 6

Se selecciona una muestra aleatoria de 600 familias a las que se les pregunta si tienen mascota, resultando que 240 de esas familias contestaron afirmativamente. Con un nivel de confianza del 95%,

a) **(1.25 puntos)** Obtenga el correspondiente intervalo de confianza para estimar la proporción poblacional de familias que tienen mascota. ¿Puede suponerse que la mitad de las familias de esta población tiene mascota?

b) **(0.75 puntos)** ¿Qué tamaño muestral mínimo se debe tomar para que el error máximo al estimar esta proporción sea 0.025?

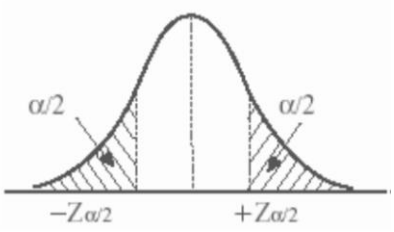
c) **(0.5 puntos)** Explique razonadamente el efecto que tendría sobre la amplitud del intervalo de confianza de la proporción poblacional el aumento del tamaño de la muestra elegida.

a) Tamaño de la muestra es $n = 600$ familias. La proporción muestral de familias que tienen mascota es $p = \frac{240}{600} = 0.4$.

Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0{,}025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{600}} = 0.0392$$

El intervalo de confianza para la proporción de familias que tienen mascota es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.4 - 0.0392,\quad 0.4 + 0.0392\right) = \left(0.3608,\ 0.4392\right)$$

La proporción 0.5 no pertenece al intervalo de confianza obtenido. Con un nivel de confianza del 95% no puede suponerse que la mitad de las familias tienen mascota.

b) Utilizamos la fórmula del error.

$$Error < 0.025 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} < 0.025 \Rightarrow 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{n}} < 0.025 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{n}} < \frac{0.025}{1.96} \Rightarrow \frac{0.24}{n} < \left(\frac{0.025}{1.96}\right)^2 \Rightarrow \frac{0.24}{\left(\frac{0.025}{1.96}\right)^2} < n \Rightarrow \boxed{n > 1475.17}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 1476 familias.

c) La amplitud del intervalo de confianza de la proporción poblacional nos lo da el error. El error máximo viene dado por la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$. Si mantenemos el nivel de confianza no cambia el valor de $z_{\alpha/2}$ y si aumentamos el valor de n = número de familias seleccionadas disminuirá el error y por tanto, la amplitud del intervalo de confianza será menor.

EJERCICIO 7

Se ha realizado un estudio para analizar el peso, en kilogramos, de las mochilas de los estudiantes de ESO de los institutos de una localidad. Para ello, se seleccionó una muestra aleatoria de 13 mochilas, obteniéndose los siguientes datos:

4.5, 5.3, 4.9, 5.2, 5.5, 5.5, 5.7, 4.8, 5.6, 4.7, 4.2, 5.8, 4.6

El peso de las mochilas se distribuye según una ley Normal de desviación típica 0.9 kg y media desconocida.

a) **(1.25 puntos)** Halle un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 98.5%, para estimar el peso medio de las mochilas escolares.

b) **(0.75 puntos)** Para el mismo nivel de confianza, ¿qué tamaño muestral mínimo se debería tomar para que el error cometido al estimar el peso medio de estas mochilas sea inferior al 10%?

c) **(0.5 puntos)** El peso medio de las mochilas de los estudiantes de ESO de esa localidad es de 4.9 kg y tomando una muestra aleatoria de 36 mochilas, ¿qué distribución sigue la variable que mide el peso medio de estas 36 mochilas? ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio no supere los 5.2 kg?

a) X = El peso, en kilogramos, de las mochilas de los estudiantes de ESO de los institutos de una localidad. X = N(μ , 0.9).

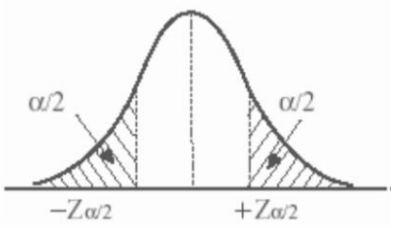
Calculamos la media muestral.

$$\bar{x} = \frac{4.5+5.3+4.9+5.2+5.5+5.5+5.7+4.8+5.6+4.7+4.2+5.8+4.6}{13} = 5.1 \text{ kg}$$

Con un nivel de confianza del 98.5 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}985 \rightarrow \propto = 0{,}015 \rightarrow \propto/2 = 0{,}0075 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}9925 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}43}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.43 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{13}} \simeq 0.6066 \text{ kg}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(5.1 - 0.6066,\ 5.1 + 0.6066\right) = \left(4.4934,\ 5.7066\right)$$

b) El 10% de la media muestral es $0.10 \cdot 5.1 = 0.51$
Utilizamos la fórmula del error para 0.51 y despejamos *n*.

$$Error < 0.51 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.51 \Rightarrow 2.43 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{n}} < 0.51 \Rightarrow 2.43 \cdot 0.9 < 0.51\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} > \frac{2.43 \cdot 0.9}{0.51} \Rightarrow \boxed{n > \left(\frac{2.43 \cdot 0.9}{0.51}\right)^2 \simeq 18.38}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 19 familias.

c) X = El peso, en kilogramos, de las mochilas de los estudiantes de ESO de los institutos de una localidad. X = N(4.9, 0.9).
La distribución de las medias muestrales de tamaño 36 sigue una ley normal con la misma media (4.9 kg) y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.9}{\sqrt{36}} = 0.15$. $\overline{X_{36}} = N\left(4.9, 0.15\right)$.
Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{36}} \le 5.2\right)$.

$$P\left(\overline{X_{36}} \le 5.2\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \le \frac{5.2 - 4.9}{0.15}\right) =$$

$$= P\left(Z \le 2\right) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} = \boxed{0.9772}$$

z	0.00
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643
1.2	0.8849
1.3	0.9032
1.4	0.9192
1.5	0.9332
1.6	0.9452
1.7	0.9554
1.8	0.9641
1.9	0.9713
2.0	0.9772
2.1	0.9821

PAU 2025 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2024-2025	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Debe resolver 4 ejercicios, uno de cada bloque. Elija solo un ejercicio en los tres bloques donde tiene posibilidad de elección. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

a) **(1.75 puntos)** Plantee y resuelva el siguiente problema de forma matricial:
El gerente de una empresa de productos hospitalarios desea introducir un nuevo producto en el mercado nacional. Para ello contrata a 3 vendedores que se han encargado de las zonas A, B y C del país, respectivamente. El vendedor de la zona A ha trabajado 40 horas, ha realizado 10 demostraciones y 5 viajes para dicha promoción. El vendedor de la zona B ha trabajado el doble de horas que el de la zona A, realizando 15 demostraciones y 8 viajes. En cuanto al vendedor de la zona C, ha trabajado 100 horas, ha realizado 25 demostraciones y 10 viajes. El gerente debe abonarles 75€ por hora trabajada, 300€ por demostración y 250€ por viaje realizado. Teniendo en cuenta que, además, debe aplicárseles una retención en concepto del impuesto del IRPF del 15% si la cantidad a abonar al vendedor es menor de diez mil euros y del 18% en caso contrario, determine la cantidad final que cobrará cada vendedor.

b) **(0.75 puntos)** Sea $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & a-1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ¿Para qué valores de a es la matriz A invertible?

BLOQUE B

EJERCICIO 2

Un periódico digital ha publicado una noticia de última hora. El número de personas que han visto la noticia t horas después de su lanzamiento viene modelado por la función:

$$N(t)=500000\cdot\left(1-e^{-0.2t}\right);\ t>0$$

a) **(0.8 puntos)** Estudie la monotonía y curvatura de la función N.
b) **(0.7 puntos)** Represente gráficamente la función N y describa su tendencia a lo largo del tiempo.
c) **(0.5 puntos)** ¿Cuánto tiempo ha debido de pasar para que la noticia haya sido vista por 450000 personas?
d) **(0.5 puntos)** La velocidad de difusión de la noticia (número de personas por hora que han visto la publicación) es $N'(t)$. ¿Qué conclusión se obtiene al comparar $N'(t)$ en los instantes $t=1$ y $t=10$?

EJERCICIO 3

A un paciente con diabetes se le monitoriza durante un día completo, suministrándole un medicamento a mediodía para observar su reacción. La función que aproxima la cantidad de glucosa en sangre (mg/dl) del paciente, en cada instante t (horas), es**:**

$$f(t)=\begin{cases}\frac{5}{6}\left(\frac{t^3}{3}-12t^2+108t+108\right) & 0\le t\le 12\\ t^2-40t+546 & 12<t\le 24\end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Halle en qué periodos de tiempo el nivel de glucosa va aumentando.

b) **(1 punto)** ¿En qué momentos del día el paciente tiene los niveles más alto y más bajo de glucosa en sangre y a cuánto ascienden?

c) **(0.75 puntos)** ¿En qué momentos, después del mediodía, el paciente tiene 155 mg/dl?

BLOQUE C

EJERCICIO 4

En una casa con trastero viven tres personas y cada una tiene un llavero con las llaves de la casa. El primer llavero contiene 7 llaves, el segundo 8 y el tercero 5. En cada uno de los llaveros hay una única llave que abre el trastero. Otra persona necesita abrir el trastero y, para ello, selecciona un llavero al azar y, de este, elige una llave aleatoriamente e intenta abrirlo. Calcule la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** No haya acertado con la llave seleccionada.

b) **(0.5 puntos)** El llavero sea el tercero y la llave abra el trastero.

c) **(0.5 puntos)** Sabiendo que la llave elegida abre el trastero, esta pertenezca al primer o al tercer llavero.

d) **(0.5 puntos)** Si la llave no abre el trastero, esta no pertenezca al primer llavero.

EJERCICIO 5

Una empresa de marketing ha lanzado una campaña publicitaria para promocionar un nuevo servicio de energía solar para hogares. Según estudios previos, se estima que el 20% de las personas que ven el anuncio terminan contratando el servicio. Para analizar más en profundidad la efectividad de la campaña, se seleccionan aleatoriamente a 20 personas que han visto el anuncio.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que exactamente 10 personas contraten el servicio.

b) **(0.75 puntos)** Determine la probabilidad de que al menos 2 personas contraten el servicio.

c) **(0.5 puntos)** Determine el valor esperado del número de personas que contratarán el servicio de entre las seleccionadas.

d) **(0.5 puntos)** ¿Cuántas personas, de entre las que han visto el anuncio, se deberían seleccionar para que el número esperado de personas que contraten el servicio sea mayor o igual a 13?

BLOQUE D

EJERCICIO 6

El tiempo de estudio semanal de los estudiantes andaluces, medido en horas, se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 5 horas. A partir de una muestra de 81 estudiantes se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media poblacional es (10.794, 13.206), con un nivel de confianza del 97%.

a) **(0.5 puntos)** Obtenga el tiempo medio de estudio de esa muestra de estudiantes.

b) **(0.5 puntos)** Si se amplía el tamaño de la muestra, razone si manteniendo el nivel de confianza, la amplitud del intervalo de confianza aumenta o disminuye.

c) **(0.75 puntos)** Si se desea reducir la amplitud del intervalo de confianza, razone si manteniendo el tamaño muestral, ha de reducirse o aumentarse el nivel de confianza.

d) **(0.75 puntos)** Si la media de la población es de 10.2 horas y sabiendo que la media muestral es de 12 horas, calcule el tamaño máximo de la muestra para obtener un intervalo de confianza que contenga la media poblacional, manteniendo el 97% de confianza.

EJERCICIO 7

Los desajustes sobre el horario previsto de llegada de los trenes de alta velocidad, medidos en minutos, sigue una ley Normal con media 0 y desviación típica 2.2.

a) **(0.5 puntos)** Calcule el porcentaje de trenes que tienen un desajuste máximo de un minuto.

b) Elegidos al azar 15 trenes de alta velocidad, los desajustes han sido:

$$0,\ 1.3,\ -2.1,\ -1.5,\ 2,\ 0.8,\ 5,\ 2.1,$$
$$-3,\ 1.8,\ 3.1,\ 4,\ -0.7,\ 1.6,\ -5.4$$

b1) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 96%, para la media poblacional. ¿Cuál es el error máximo que se comete en la estimación de esta media? Con este nivel de confianza y a partir de los datos obtenidos, ¿puede afirmarse que un tren tenga un retraso de 2 minutos?

b2) **(0.75 puntos)** Con un nivel de confianza del 98%, ¿cuántos trenes de alta velocidad deberían elegirse, como mínimo, para que la diferencia entre la media poblacional y su estimación muestral sea como máximo de 1.1 minutos?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

a) **(1.75 puntos)** Plantee y resuelva el siguiente problema de forma matricial:
El gerente de una empresa de productos hospitalarios desea introducir un nuevo producto en el mercado nacional. Para ello contrata a 3 vendedores que se han encargado de las zonas A, B y C del país, respectivamente. El vendedor de la zona A ha trabajado 40 horas, ha realizado 10 demostraciones y 5 viajes para dicha promoción. El vendedor de la zona *B* ha trabajado el doble de horas que el de la zona A, realizando 15 demostraciones y 8 viajes. En cuanto al vendedor de la zona C, ha trabajado 100 horas, ha realizado 25 demostraciones y 10 viajes. El gerente debe abonarles 75€ por hora trabajada, 300€ por demostración y 250€ por viaje realizado. Teniendo en cuenta que, además, debe aplicárseles una retención en concepto del impuesto del IRPF del 15% si la cantidad a abonar al vendedor es menor de diez mil euros y del 18% en caso contrario, determine la cantidad final que cobrará cada vendedor.

b) **(0.75 puntos)** Sea $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 3 & a-1 & 2\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix}$ ¿Para qué valores de a es la matriz A invertible?

a) Colocamos toda la información del trabajo de cada vendedor en una matriz.

$$\begin{matrix} & \text{horas} & \text{demos} & \text{viajes}\\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$
$$\begin{matrix}\text{Zona } A\rightarrow\\ \text{Zona } B\rightarrow\\ \text{Zona } C\rightarrow\end{matrix}\begin{pmatrix}40 & 10 & 5\\ 80 & 15 & 8\\ 100 & 25 & 10\end{pmatrix}$$

Expresamos el coste de cada concepto en forma matricial.

$$\begin{matrix}\text{€ / hora}\rightarrow\\ \text{€ / demostración}\rightarrow\\ \text{€ / viaje}\rightarrow\end{matrix}\begin{pmatrix}75\\ 300\\ 250\end{pmatrix}$$

Multiplicamos la matriz de trabajos por la matriz de costes obteniendo lo que cobra cada uno antes de retener el IRPF.

$$\begin{matrix} & \text{horas} & \text{demos} & \text{viajes}\\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$
$$\begin{matrix}\text{Zona } A\rightarrow\\ \text{Zona } B\rightarrow\\ \text{Zona } C\rightarrow\end{matrix}\begin{pmatrix}40 & 10 & 5\\ 80 & 15 & 8\\ 100 & 25 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{matrix}\begin{pmatrix}75\\ 300\\ 250\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\rightarrow\text{€ / hora}\\ \rightarrow\text{€ / demos}\\ \rightarrow\text{€ / viaje}\end{matrix}\end{matrix}=\begin{pmatrix}40\cdot75+10\cdot300+5\cdot250\\ 80\cdot75+15\cdot300+8\cdot250\\ 100\cdot75+25\cdot300+10\cdot250\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{matrix}\begin{pmatrix}7250\\ 12500\\ 17500\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\leftarrow \text{Zona } A\\ \leftarrow \text{Zona } B\\ \leftarrow \text{Zona } C\end{matrix}\end{matrix}$$

Solo el vendedor de la zona A cobra menos de 10000 €, por lo que se le descuenta un 15% de IRPF y se le debe pagar el 85% → $0.85 \cdot 7250 = 6162.5$ €.
Los vendedores de las zonas B y C superan los 10000 euros y deben pagar un 18% de IRPF, por lo que cobran el 82%. El vendedor de la zona B cobra $0.82 \cdot 12500 = 10250$ € y el vendedor de la zona C cobra $0.82 \cdot 17500 = 14350$ €.

El vendedor A cobra 6162.5 €, el B cobra 10250 € y el C cobra 14350 €.

b) Para que la matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero. Calculamos el determinante de la matriz A y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & a-1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6(a-1) + 16 + 0 - 4(a-1) - 18 - 0 =$$

$$= -6a + 6 + 16 - 4a + 4 - 18 = -10a + 8$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -10a + 8 = 0 \Rightarrow 10a = 8 \Rightarrow \boxed{a = \frac{8}{10} = 0.8}$$

El determinante de la matriz A se anula para $a = 0.8$.
La matriz A es invertible para cualquier valor de a distinto de 0.8.

EJERCICIO 2

Un periódico digital ha publicado una noticia de última hora. El número de personas que han visto la noticia t horas después de su lanzamiento viene modelado por la función:

$$N(t)=500000\cdot\left(1-e^{-0.2t}\right);\ t>0$$

a) **(0.8 puntos)** Estudie la monotonía y curvatura de la función N.

b) **(0.7 puntos)** Represente gráficamente la función N y describa su tendencia a lo largo del tiempo.

c) **(0.5 puntos)** ¿Cuánto tiempo ha debido de pasar para que la noticia haya sido vista por 450000 personas?

d) **(0.5 puntos)** La velocidad de difusión de la noticia (número de personas por hora que han visto la publicación) es $N'(t)$. ¿Qué conclusión se obtiene al comparar $N'(t)$ en los instantes $t=1$ y $t = 10$?

a) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$N(t)=500000\cdot\left(1-e^{-0.2t}\right)\Rightarrow N'(t)=500000\cdot\left(-(-0.2)e^{-0.2t}\right)=100000\cdot e^{-0.2t}=\frac{10000}{e^{0.2t}}$$

Esta expresión de la derivada $N'(t)=\frac{10000}{e^{0.2t}}$ nunca se anula y siempre es positiva, por lo que la función es creciente en su dominio de definición $(0,+\infty)$ y no presenta máximos ni mínimos.

Obtenemos la derivada segunda para analizar la curvatura de la función.

$$N'(t)=100000\cdot e^{-0.2t}\Rightarrow N'(t)=100000\cdot(-0.2)e^{-0.2t}=-20000e^{-0.2t}=\frac{-20000}{e^{-0.2t}}$$

La segunda derivada es siempre negativa por lo que la función es cóncava (∩) en todo su dominio.

b) Hallamos el límite de la función cuando el valor de t se hace muy grande.

$$\lim_{t\to+\infty}N(t)=\lim_{t\to+\infty}500000\cdot\left(1-e^{-0.2t}\right)=\lim_{t\to+\infty}500000\cdot\left(1-\frac{1}{e^{0.2t}}\right)=$$

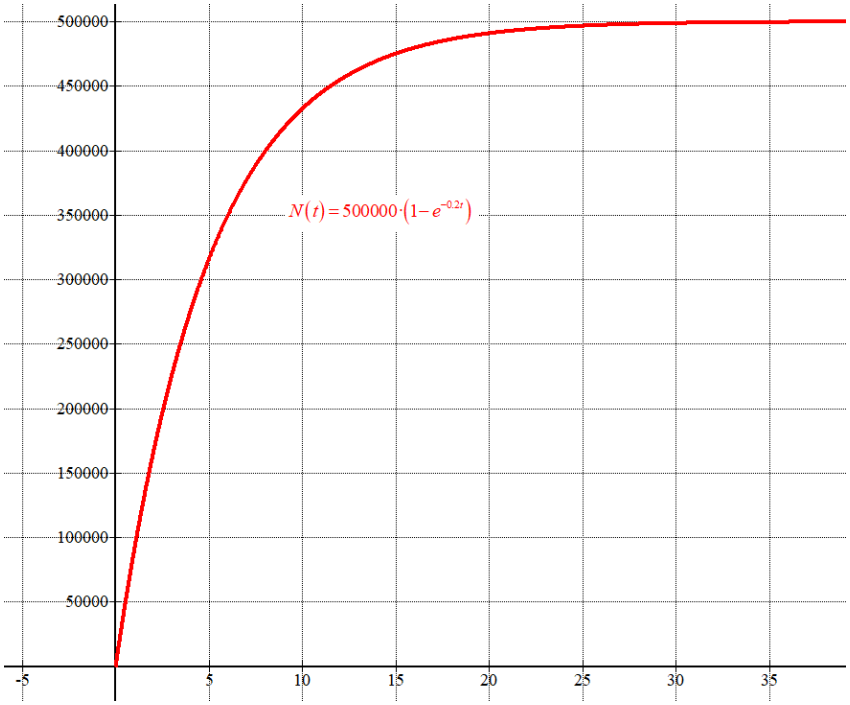
$$=500000\cdot\left(1-\frac{1}{e^{+\infty}}\right)=500000\cdot\left(1-\frac{1}{+\infty}\right)=500000\cdot(1-0)=\boxed{500000}$$

Hallamos el límite de la función cuando el valor de t se hace muy pequeño.

$$\lim_{t\to0}N(t)=\lim_{t\to0}500000\cdot\left(1-e^{-0.2t}\right)=500000\cdot\left(1-e^{0}\right)=500000\cdot(1-1)=\boxed{0}$$

Cuando la noticia se hace pública el número de personas que ha visto la noticia es 0 y cuando pasa mucho tiempo la tendencia es que vean la noticia 500000 personas.
Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

t	$N(t)=500000\cdot\left(1-e^{-0.2t}\right)$
0.01	999
0.1	9900
1	90634
10	432332
100	499999



c) Buscamos el valor de t para el que $N(t)=450000$.

$$\left.\begin{array}{l} N(t)=450000 \\ N(t)=500000\cdot\left(1-e^{-0.2t}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 450000=500000\cdot\left(1-e^{-0.2t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-e^{-0.2t}=\frac{450000}{500000}=0.9 \Rightarrow 0.1=e^{-0.2t} \Rightarrow \ln 0.1=-0.2t \Rightarrow \boxed{t=\frac{-\ln 0.1}{0.2}\simeq 11.51}$$

Al cabo de 11 horas y media se alcanzan las 450 000 personas.

d) Calculamos el valor de la derivada de la función en $t=1$ y $t=10$.

$$\left.\begin{array}{l} N'(1)=\dfrac{10000}{e^{0.2}}=8187.3 \\ N'(10)=\dfrac{10000}{e^{2}}\simeq 1353.35 \end{array}\right\} \Rightarrow N'(1)=8187.3<1353.35=N'(10)$$

El número de personas que ven la noticia crece con más rapidez en la primera hora que en la décima.

EJERCICIO 3

A un paciente con diabetes se le monitoriza durante un día completo, suministrándole un medicamento a mediodía para observar su reacción. La función que aproxima la cantidad de glucosa en sangre (mg/dl) del paciente, en cada instante t (horas), es:

$$f(t)=\begin{cases}\frac{5}{6}\left(\frac{t^3}{3}-12t^2+108t+108\right) & 0\le t\le 12\\ t^2-40t+546 & 12<t\le 24\end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Halle en qué periodos de tiempo el nivel de glucosa va aumentando.
b) **(1 punto)** ¿En qué momentos del día el paciente tiene los niveles más alto y más bajo de glucosa en sangre y a cuánto ascienden?
c) **(0.75 puntos)** ¿En qué momentos, después del mediodía, el paciente tiene 155 mg/dl?

a) Analizamos lo que ocurre antes del mediodía.

$$f(t)=\frac{5}{6}\left(\frac{t^3}{3}-12t^2+108t+108\right)\ 0\le t\le 12\Rightarrow f'(t)=\frac{5}{6}\left(t^2-24t+108\right)$$

$$f'(t)=0\Rightarrow\frac{5}{6}\left(t^2-24t+108\right)=0\Rightarrow t^2-24t+108=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{24\pm\sqrt{(-24)^2-4\cdot 108}}{2}=\frac{24\pm 12}{2}=\begin{cases}\frac{24+12}{2}=18\notin[0,12]\\ \frac{24-12}{2}=6\in[0,12]\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada en $[0,6)$ y en $(6,12]$.

- En el intervalo $[0,6)$ tomamos $t=1$ y la derivada vale

  $f'(1)=\frac{5}{6}\left(1^2-24+108\right)=\frac{425}{6}>0$. La glucosa aumenta hasta las 6 horas.

- En el intervalo $(6,12]$ tomamos $t=10$ y la derivada vale

  $f'(10)=\frac{5}{6}\left(10^2-240+108\right)=\frac{-80}{3}<0$. La glucosa disminuye desde las 6 hasta las 12 horas.

Analizamos lo que ocurre después del mediodía.

$$f(t)=t^2-40t+546\quad 12<t\le 24\Rightarrow f'(t)=2t-40$$

$$f'(t)=0\Rightarrow 2t-40=0\Rightarrow 2t=40\Rightarrow \boxed{t=20}\in(12,24]$$

Estudiamos el signo de la derivada en $(12,20)$ y en $(20,24]$.

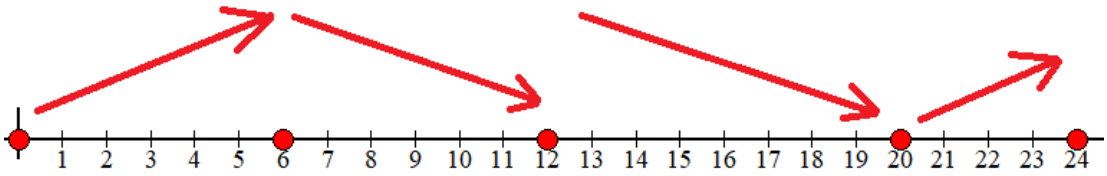
- En el intervalo $(12,20)$ tomamos $t=13$ y la derivada vale

  $f'(13)=2\cdot 13-40=-14<0$. La glucosa disminuye desde las 12 hasta las 20 horas.

- En el intervalo $(20,24]$ tomamos $t=21$ y la derivada vale $f'(21)=2\cdot 21-40=2>0$. La glucosa aumenta desde las 20 hasta las 24 horas.

La glucosa aumenta de las 0 hasta las 6 horas y desde las 20 a las 24 horas.

b) Hemos visto que la glucosa sigue el esquema siguiente.



Valoramos la función en los puntos extremos y en los puntos de cambio.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{5}{6}\left(\dfrac{0^3}{3}-12\cdot 0^2+108\cdot 0+108\right)=90 \text{ Nivel bajo} \\ f(6)=\dfrac{5}{6}\left(\dfrac{6^3}{3}-12\cdot 6^2+108\cdot 6+108\right)=330 \text{ Nivel alto} \\ f(12)=\dfrac{5}{6}\left(\dfrac{12^3}{3}-12\cdot 12^2+108\cdot 12+108\right)=210 \\ f(20)=20^2-40\cdot 20+546=146 \\ f(24)=24^2-40\cdot 24+546=162 \end{array}\right\}$$

El nivel más alto es de 330 mg/dl y se produce a las 6 horas.
El nivel más bajo es de 90 mg/dl y se produce a las 0 horas.

c) Después del mediodía la función es $f(t)=t^2-40t+546 \quad 12<t\leq 24$.

Buscamos el valor de t para el que $f(t)=155$.

$$\left.\begin{array}{l} f(t)=155 \\ f(t)=t^2-40t+546 \end{array}\right\} \Rightarrow t^2-40t+546=155 \Rightarrow t^2-40t+391=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{40\pm\sqrt{(-40)^2-4\cdot 391}}{2}=\frac{40\pm 6}{2}=\begin{cases}\dfrac{40+6}{2}=23\in(12,24] \\ \dfrac{40-6}{2}=17\in(12,24]\end{cases}$$

Después del mediodía, el paciente tiene un nivel de glucosa de 155 mg/dl a las 17 y a las 23 horas.

EJERCICIO 4

En una casa con trastero viven tres personas y cada una tiene un llavero con las llaves de la casa. El primer llavero contiene 7 llaves, el segundo 8 y el tercero 5. En cada uno de los llaveros hay una única llave que abre el trastero. Otra persona necesita abrir el trastero y, para ello, selecciona un llavero al azar y, de este, elige una llave aleatoriamente e intenta abrirlo. Calcule la probabilidad de que:

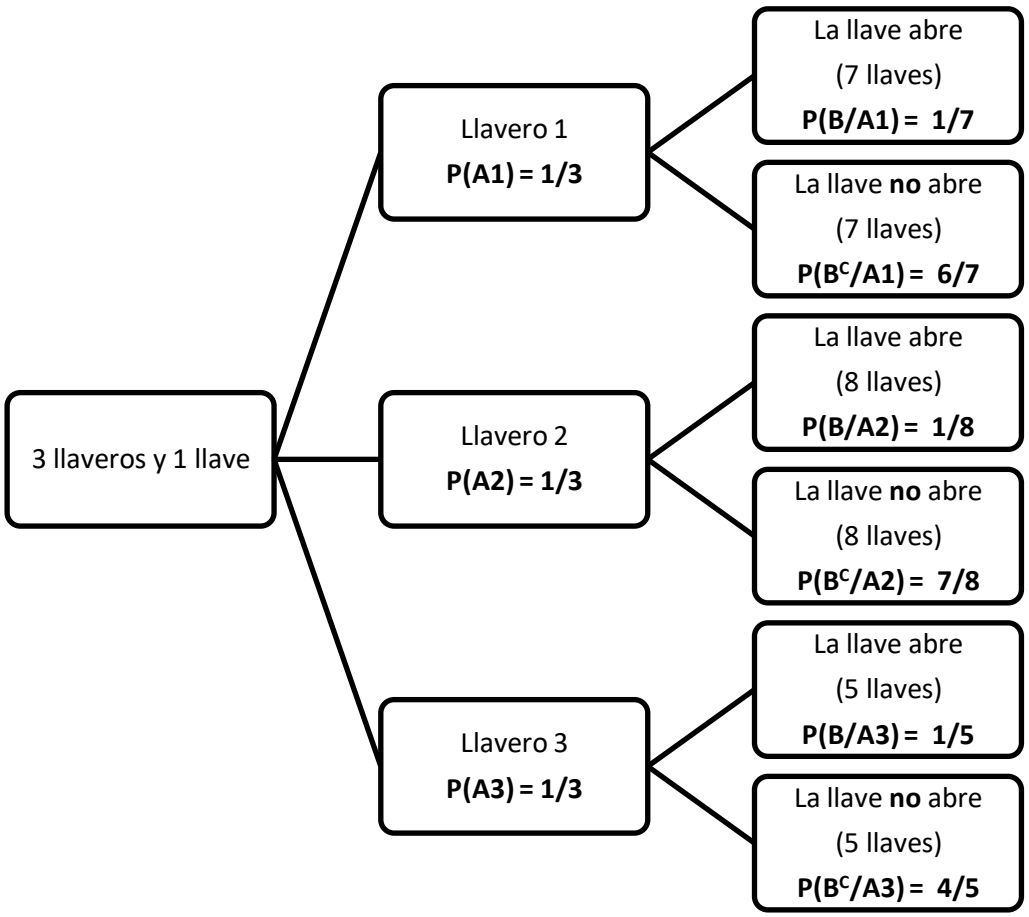
a) **(1 punto)** No haya acertado con la llave seleccionada.

b) **(0.5 puntos)** El llavero sea el tercero y la llave abra el trastero.

c) **(0.5 puntos)** Sabiendo que la llave elegida abre el trastero, esta pertenezca al primer o al tercer llavero.

d) **(0.5 puntos)** Si la llave no abre el trastero, esta no pertenezca al primer llavero.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden hallar $P\left(B^C\right)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(B^C\right)=P\left(A1\right)P\left(B^C/A1\right)+P\left(A2\right)P\left(B^C/A2\right)+P\left(A3\right)P\left(B^C/A3\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\boxed{\frac{709}{840}\simeq 0.844}$$

b) Nos piden hallar $P\left(A3\cap B\right)$.

$$P(A3\cap B)=P(A3)P(B/A3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\boxed{\frac{1}{15}\simeq 0.0667}$$

c) Hallamos la probabilidad de $P(A2/B)$ que es el suceso contrario del que nos hablan en el enunciado. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A2/B)=\frac{P(A2\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A2)P(B/A2)}{1-P(B^C)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}}{1-\frac{709}{840}}=\frac{35}{131}\simeq 0.2672$$

Sabiendo que si la llave elegida abre el trastero, la probabilidad de que esta pertenezca al primer o al tercer llavero vale $1-\frac{35}{131}=\frac{96}{131}\simeq 0.7328$.

d) Hallamos la probabilidad del suceso contrario al que nos piden: $P(A1/B^C)$.

$$P(A1/B^C)=\frac{P(A1\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{P(A1)P(B^C/A1)}{P(B^C)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}}{\frac{709}{840}}=\frac{240}{709}\simeq 0.3385$$

Sabiendo que la llave elegida no abre el trastero, la probabilidad de que esta **no** pertenezca al primer llavero vale $1-\frac{240}{709}=\frac{469}{709}\simeq 0.6615$.

EJERCICIO 5

Una empresa de marketing ha lanzado una campaña publicitaria para promocionar un nuevo servicio de energía solar para hogares. Según estudios previos, se estima que el 20% de las personas que ven el anuncio terminan contratando el servicio. Para analizar más en profundidad la efectividad de la campaña, se seleccionan aleatoriamente a 20 personas que han visto el anuncio.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que exactamente 10 personas contraten el servicio.

b) **(0.75 puntos)** Determine la probabilidad de que al menos 2 personas contraten el servicio.

c) **(0.5 puntos)** Determine el valor esperado del número de personas que contratarán el servicio de entre las seleccionadas.

d) **(0.5 puntos)** ¿Cuántas personas, de entre las que han visto el anuncio, se deberían seleccionar para que el número esperado de personas que contraten el servicio sea mayor o igual a 13?

Sea X = Número de personas que contratan el servicio de una muestra de 20 personas.
Esta variable aleatoria sigue una ley binomial siendo el tamaño de la muestra $n = 20$ y la probabilidad de que una persona contrate el servicio vale $p = 0.20$. X = B(20, 0.2).

a) Nos piden calcular $P(X=10)$.

$$P(X=10)=\binom{20}{10}0.2^{10}\cdot 0.8^{10}=\frac{\cancel{20}\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot \cancel{12}\cdot 11}{\cancel{10}\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2}}0.2^{10}\cdot 0.8^{10}=$$

$$=184756\cdot 0.2^{10}\cdot 0.8^{10}\simeq \boxed{0.002}$$

b) Calculamos la probabilidad pedida haciendo uso del suceso contrario.

$$P(X\geq 2)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]=1-\left[\binom{20}{0}0.2^{0}\cdot 0.8^{20}+\binom{20}{1}0.2^{1}\cdot 0.8^{19}\right]=$$

$$=1-\left[0.8^{20}+20\cdot 0.2\cdot 0.8^{19}\right]\simeq \boxed{0.9308}$$

c) El valor esperado del número de personas que contratarán el servicio de entre las seleccionadas es el valor de la media de la distribución binomial.

$$Media = np = 20\cdot 0.2 = 4$$

Del grupo de 20 personas se espera que hayan 4 que contraten el servicio.

d) Hallamos el valor de *n* necesario para que la media sea mayor o igual a 13.

$$Media = np \Rightarrow 13 = n\cdot 0.2 \Rightarrow n = \frac{13}{0.2} = 65$$

Con una muestra de 65 personas el número de personas que se espera contraten el servicio es de 13. Si tomamos una muestra mayor de 65 personas el número de personas que se espera contraten el servicio será mayor de 13.

EJERCICIO 6

El tiempo de estudio semanal de los estudiantes andaluces, medido en horas, se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 5 horas. A partir de una muestra de 81 estudiantes se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media poblacional es (10.794, 13.206), con un nivel de confianza del 97%.

a) **(0.5 puntos)** Obtenga el tiempo medio de estudio de esa muestra de estudiantes.

b) **(0.5 puntos)** Si se amplía el tamaño de la muestra, razone si manteniendo el nivel de confianza, la amplitud del intervalo de confianza aumenta o disminuye.

c) **(0.75 puntos)** Si se desea reducir la amplitud del intervalo de confianza, razone si manteniendo el tamaño muestral, ha de reducirse o aumentarse el nivel de confianza.

d) **(0.75 puntos)** Si la media de la población es de 10.2 horas y sabiendo que la media muestral es de 12 horas, calcule el tamaño máximo de la muestra para obtener un intervalo de confianza que contenga la media poblacional, manteniendo el 97% de confianza.

Sea X = El tiempo de estudio semanal de los estudiantes andaluces, medido en horas. X = N(μ,5).

a) El tiempo medio de la muestra es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{10.794 + 13.206}{2} = 12$$

El tiempo medio de estudio de esa muestra de estudiantes es de 12 horas de estudio semanal.

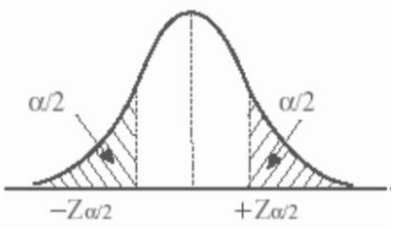
b) El error es la medida de la amplitud del intervalo de confianza. Este valor del error se obtiene con la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si no cambiamos el nivel de confianza no cambia el valor de $z_{\alpha/2}$ y si aumentamos el tamaño de la muestra (n está en el denominador) disminuye el error = amplitud del intervalo de confianza.

c) En la fórmula del error si mantenemos el tamaño muestral (n) y deseamos reducir dicho error se debe disminuir el nivel de confianza, pues esto acarrea una disminución del valor de $z_{\alpha/2}$

d) La diferencia entre la media muestral y la media de la población es 12 – 10.2 = 1.8 horas.
El error del intervalo de confianza debe ser mayor de 1.8 para que dicho intervalo contenga la media poblacional.
Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0{,}015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884



Hallamos el tamaño de la muestra máximo para que el error sea superior a 1.8 horas.

$$Error > 1.8 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > 1.8 \Rightarrow 2.17 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} > 1.8 \Rightarrow 2.17 \cdot 5 > 1.8\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2.17 \cdot 5}{1.8} > \sqrt{n} \Rightarrow n < \left(\frac{2.17 \cdot 5}{1.8} \right)^2 \simeq 36.33$$

El tamaño de la muestra debe ser inferior o igual a 36 estudiantes.

EJERCICIO 7

Los desajustes sobre el horario previsto de llegada de los trenes de alta velocidad, medidos en minutos, sigue una ley Normal con media 0 y desviación típica 2.2.

a) (0.5 puntos) Calcule el porcentaje de trenes que tienen un desajuste máximo de un minuto.

b) Elegidos al azar 15 trenes de alta velocidad, los desajustes han sido:

$$0,\ 1.3,\ -2.1,\ -1.5,\ 2,\ 0.8,\ 5,\ 2.1,$$
$$-3,\ 1.8,\ 3.1,\ 4,\ -0.7,\ 1.6,\ -5.4$$

b1) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 96%, para la media poblacional. ¿Cuál es el error máximo que se comete en la estimación de esta media? Con este nivel de confianza y a partir de los datos obtenidos, ¿puede afirmarse que un tren tenga un retraso de 2 minutos?

b2) **(0.75 puntos)** Con un nivel de confianza del 98%, ¿cuántos trenes de alta velocidad deberían elegirse, como mínimo, para que la diferencia entre la media poblacional y su estimación muestral sea como máximo de 1.1 minutos?

Sea X = El desajuste sobre el horario previsto de llegada de los trenes de alta velocidad, medidos en minutos. X = N(0. 2.2)

a) Nos piden calcular $P(X<1)$.

$$P(X<1)=\{Tipificamos\}=P\left(Z<\frac{1-0}{2.2}\right)=P(Z<0.45)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}=\boxed{0.6736}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.52
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.56
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.60
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.64
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.67

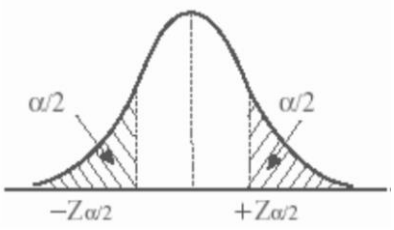
b1) Hallamos la media muestral.

$$\bar{x}=\frac{0+1.3-2.1-1.5+2+0.8+5+2.1-3+1.8+3.1+4-0.7+1.6-5.4}{15}=0.6\,\text{minutos}$$

Con un nivel de confianza del 96 % tenemos

$$1-\propto=0,96\rightarrow\propto=0,04\rightarrow\propto/2=0,02\rightarrow1-\propto/2=0,98\rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{2.05+2.06}{2}=2.055$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846



Determinamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{2.2}{\sqrt{15}} \simeq 1.17$$

Determinamos el intervalo de confianza.

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(0.6 - 1.17,\ 0.6 + 1.17\right) = \left(-0.57,\ 1.77\right)$$

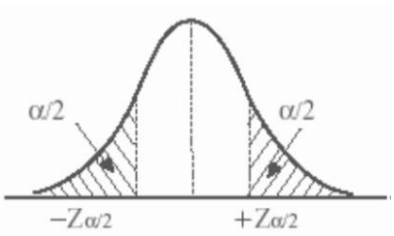
El error máximo que se comete es de 1.17 minutos.

¿puede afirmarse que un tren tenga un retraso de 2 minutos?
2 minutos de desajuste horario es mayor de 1.77 minutos y por lo tanto no entra dentro del intervalo de confianza por lo que no se puede afirmar dicho retraso.

b2) Con un nivel de confianza del 98 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}98 \rightarrow \propto = 0{,}02 \rightarrow \propto/2 = 0{,}01 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.33$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871
2.3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9901
	0.9918	0.9920	0.9922	



El error debe ser menor de 1.1 minutos.

$$Error < 1.1 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1.1 \Rightarrow 2.33 \cdot \frac{2.2}{\sqrt{n}} < 1.1 \Rightarrow 2.33 \cdot 2.2 < 1.1\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2.33 \cdot 2.2}{1.1} < \sqrt{n} \Rightarrow \left(\frac{2.33 \cdot 2.2}{1.1}\right)^2 < n \Rightarrow n > 21.71$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 22 trenes de alta velocidad.

PAU 2025 Ordinaria Suplente 1 Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2024-2025	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Debe resolver 4 ejercicios, uno de cada bloque. Elija solo un ejercicio en los tres bloques donde tiene posibilidad de elección. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

a) **(1.75 puntos)** Resuelva el sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left(A+I_3\right)\cdot X+Y=A-I_3 \qquad X-Y=I_3$$

b) **(0.75 puntos)** Halle el rango de las matrices $A+I_3$ y $A-I_3$. ¿Son matrices invertibles?

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa de catering dispone semanalmente de 58 horas de cocina, 50 horas de empaquetado y 60 dm^3 de almacenamiento en cámaras frigoríficas para elaborar dos tipos de menús: *premium* y *estándar*. Ambos menús requieren tiempo, tanto de preparación como de empaquetado, y espacio de almacenamiento en frigoríficos. Concretamente, el menú *premium* requiere de 2 horas de cocina, 2 horas de empaquetado y ocupa 1 dm^3 en frigoríficos. Por su parte, el menú *estándar* requiere de 3 horas de cocina, 1 hora de empaquetado y ocupa 4 dm^3 en frigoríficos. El beneficio obtenido por cada menú *premium* es de 10.50 € y por cada menú *estándar* es de 5.50 €. La empresa sabe que venderá todos los menús producidos. Determine cuántos menús de cada tipo deben elaborarse semanalmente para maximizar el beneficio total y a cuánto asciende este beneficio.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.2 puntos)** Se considera la función

$$f\left(x\right)=\begin{cases}a\cdot e^{x+1} & x\le -1\\ x^2-2 & -1<x<2\\ b\cdot\log\left(12-x\right) & 2\le x<12\end{cases}$$

siendo a y *b* números reales. Determine los valores de *a* y *b* para que la función *f* sea continua en su dominio.

b) **(1.3 puntos)** Represente el recinto acotado, limitado por la recta $y=-x+3$ y la parábola $y=-x^2+5$. Calcule el área del recinto.

EJERCICIO 4

El nivel de concentración de un alumno universitario durante un examen viene dado por la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases}-t^2+2t+10 & 0\le t\le 2.5\\ t^2+at+b & 2.5<t\le 5\end{cases}$$

donde t es el tiempo en horas y a y b números reales.

a) **(1.25 puntos)** ¿Con qué nivel de concentración el alumno comienza el examen? Determine los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $t=2.5$.

b) **(1.25 puntos)** Para $a=-8$ y $b=22.5$, esboce la gráfica de la función f, estudiando previamente la monotonía y calculando en qué momentos se alcanzan los niveles máximo y mínimo de concentración.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Un nuevo servicio de streaming utiliza un algoritmo para recomendar películas a sus usuarios en función de las películas vistas anteriormente. Como la plataforma es de reciente creación, solo tiene disponibles tres géneros: ciencia ficción, terror y musicales. El 62 % de las películas disponibles son de ciencia ficción, la cuarta parte son de terror y el resto musicales. De las películas de ciencia ficción, el algoritmo hace una recomendación correcta en el 70 % de las ocasiones, de las de terror, el 75 % de las veces y de los musicales, el 15 %. Un usuario selecciona al azar una película de su lista de recomendaciones:

a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el algoritmo haya hecho una recomendación correcta?

b) **(0.75 puntos)** Si no ha sido recomendada correctamente, ¿qué probabilidad hay de que la película sea de terror?

c) **(0.5 puntos)** De las recomendaciones correctas del género de ciencia ficción, el usuario queda satisfecho con la elección de la película en el 55 % de las ocasiones. ¿Qué probabilidad hay de que la película sea de ciencia ficción, esté recomendada correctamente y el usuario haya quedado satisfecho?

BLOQUE D

EJERCICIO 6

El tiempo que tardan los usuarios de un sistema de salud en conseguir una cita en Atención Primaria sigue una distribución Normal con media desconocida y desviación típica 4.2 días.

a) **(1.75 puntos)** Elegidos al azar 30 usuarios, se obtiene que el tiempo medio que tardan en obtener cita en Atención Primaria es de 11.3 días. Determine un intervalo de confianza para estimar la media poblacional, con un nivel de confianza del 97 %.

La gerencia del sistema de salud asegura que el promedio de días para obtener una cita en Atención Primaria es de 9.8 días. Según el intervalo obtenido ¿podría asumirse la afirmación de la gerencia como posible?

b) **(0.75 puntos)** ¿Cuántos usuarios como mínimo se deberían seleccionar en una nueva muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error máximo en el intervalo de la media poblacional sea de 0.6 días.

EJERCICIO 7

Se desea estimar la proporción de personas de una determinada localidad que se muestran favorables a la celebración de las fiestas locales durante el mes de mayo. Para ello, se ha tomado una muestra aleatoria de 200 personas resultando que 130 de ellas están a favor.

a) **(1 punto)** Obtenga un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 96.5 %, para estimar la proporción de personas de esta localidad que está a favor de celebrar las fiestas locales durante el mes de mayo.

b) **(1 punto)** Manteniendo la misma proporción muestral y con un nivel de confianza del 99 %, ¿cuál es el número mínimo de personas que deberán seleccionarse aleatoriamente para que la proporción muestral y la poblacional no difieran en más de un 2%?

c) **(0.5 puntos)** Manteniendo el tamaño de la muestra y la proporción muestral, si se aumenta el nivel de confianza, razone cómo influye en el error máximo de estimación.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&2\\2&2&2\end{pmatrix}$.

a) **(1.75 puntos)** Resuelva el sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left(A+I_3\right)\cdot X+Y=A-I_3 \qquad X-Y=I_3$$

b) **(0.75 puntos)** Halle el rango de las matrices $A+I_3$ y $A-I_3$. ¿Son matrices invertibles?

a) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{matrix}\left(A+I_3\right)\cdot X+Y=A-I_3\\X-Y=I_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\left(A+I_3\right)\cdot X+Y=A-I_3\\X-I_3=Y\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(A+I_3\right)\cdot X+X-I_3=A-I_3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(A+I_3\right)\cdot X+X=A\Rightarrow AX+I_3X+X=A\Rightarrow AX+X+X=A\Rightarrow AX+2X=A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(A+2I_3\right)X=A\Rightarrow X=\left(A+2I_3\right)^{-1}A$$

Comprobamos que la matriz $A+2I_3$ tiene inversa y la calculamos.

$$A+2I_3=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&2\\2&2&2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2&1&0\\0&1+2&2\\2&2&2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1&0\\0&3&2\\2&2&4\end{pmatrix}$$

$$\left|A+2I_3\right|=\begin{vmatrix}4&1&0\\0&3&2\\2&2&4\end{vmatrix}=48+4+0-0-0-16=36\neq0$$

$$\left(A+2I_3\right)^{-1}=\frac{Adj\left(A+2I_3\right)^T}{\left|A+2I_3\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}4&0&2\\1&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}}{36}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}3&2\\2&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\0&4\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&2\\2&4\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}4&2\\0&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}4&0\\0&2\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&2\\3&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}4&2\\1&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}4&0\\1&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\left(A+2I_3\right)^{-1}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}8&-4&2\\4&16&-8\\-6&-6&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/9&-1/9&1/18\\1/9&4/9&-2/9\\-1/6&-1/6&1/3\end{pmatrix}$$

Terminamos de resolver el sistema.

$$X=\left(A+2I_3\right)^{-1}A=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}8&-4&2\\4&16&-8\\-6&-6&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&2\\2&2&2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}16+4&8-4+4&-8+4\\8-16&4+16-16&32-16\\-12+24&-6-6+24&-12+24\end{pmatrix}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}20&8&-4\\-8&4&16\\12&12&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/9&2/9&-1/9\\-2/9&1/9&4/9\\1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y=X-I_3=\begin{pmatrix}5/9&2/9&-1/9\\-2/9&1/9&4/9\\1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4/9&2/9&-1/9\\-2/9&-8/9&4/9\\1/3&1/3&-2/3\end{pmatrix}$$

La solución del sistema es $X=\begin{pmatrix}5/9&2/9&-1/9\\-2/9&1/9&4/9\\1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5&2&-1\\-2&1&4\\3&3&3\end{pmatrix}$ e

$Y=\begin{pmatrix}-4/9&2/9&-1/9\\-2/9&-8/9&4/9\\1/3&1/3&-2/3\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-4&2&-1\\-2&-8&4\\3&3&-6\end{pmatrix}$.

b) Obtenemos la expresión de las matrices $A+I_3$ y $A-I_3$.

$$A+I_3=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&2\\2&2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&2&2\\2&2&3\end{pmatrix}$$

$$A-I_3=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&2\\2&2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\2&2&1\end{pmatrix}$$

Comprobamos si sus determinantes son nulos o no.

$$\left|A+I_3\right|=\begin{vmatrix}3&1&0\\0&2&2\\2&2&3\end{vmatrix}=18+4+0-0-0-12=10\neq 0$$

$$\left|A-I_3\right|=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&2\\2&2&1\end{vmatrix}=0+4+0-0-0-4=0$$

El determinante de $A+I_3$ es no nulo y es invertible. Su rango es 3.

El determinante de $A-I_3$ es nulo y no es invertible. Su rango es menor de 3. Si consideramos el menor que resulta de quitar la primera fila y la primera columna → $\begin{vmatrix}0&2\\2&1\end{vmatrix}=0-4=-4\neq 0$. El rango de $A-I_3$ es 2.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa de catering dispone semanalmente de 58 horas de cocina, 50 horas de empaquetado y 60 dm^3 de almacenamiento en cámaras frigoríficas para elaborar dos tipos de menús: *premium* y *estándar*. Ambos menús requieren tiempo, tanto de preparación como de empaquetado, y espacio de almacenamiento en frigoríficos. Concretamente, el menú *premium* requiere de 2 horas de cocina, 2 horas de empaquetado y ocupa 1 dm^3 en frigoríficos. Por su parte, el menú *estándar* requiere de 3 horas de cocina, 1 hora de empaquetado y ocupa 4 dm^3 en frigoríficos. El beneficio obtenido por cada menú *premium* es de 10.50 € y por cada menú *estándar* es de 5.50 €. La empresa sabe que venderá todos los menús producidos. Determine cuántos menús de cada tipo deben elaborarse semanalmente para maximizar el beneficio total y a cuánto asciende este beneficio.

Llamemos x = "número de menús *premium*", y = "número de menús *estándar*".
Deseamos maximizar los ingresos que vienen expresados como $I(x,y)=10.5x+5.5y$.
Las restricciones del problema son:

"El menú *premium* requiere de 2 horas de cocina, 2 horas de empaquetado y ocupa 1 dm^3 en frigoríficos. Por su parte, el menú *estándar* requiere de 3 horas de cocina, 1 hora de empaquetado y ocupa 4 dm^3 en frigoríficos. Dispone semanalmente de 58 horas de cocina, 50 horas de empaquetado y 60 dm^3 de almacenamiento" →
$2x+3y\le 58;\ 2x+y\le 50;\ x+4y\le 60$

"Las cantidades deben ser positivas" → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y\le 58 \\ 2x+y\le 50 \\ x+4y\le 60 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$2x+3y=58$

x	$y=\frac{58-2x}{3}$
0	58 / 3
20	6
29	0

$2x+y=50$

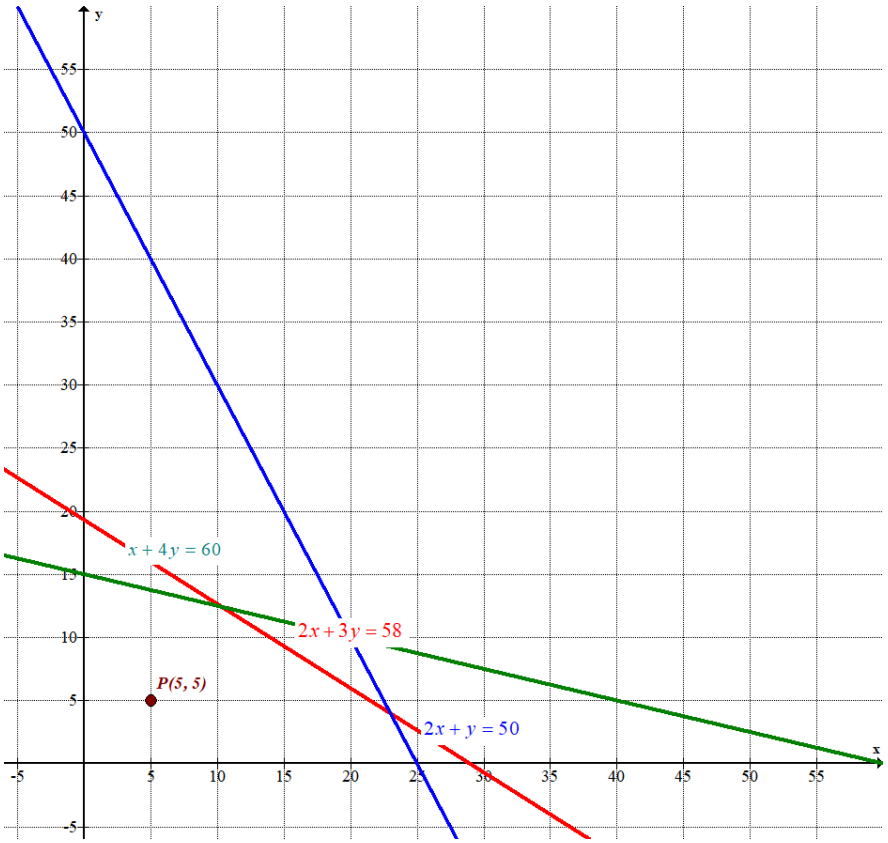
x	$y=50-2x$
0	50
20	10
25	0

$x+4y=60$

x	$y=\frac{60-x}{4}$
0	15
20	10
60	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

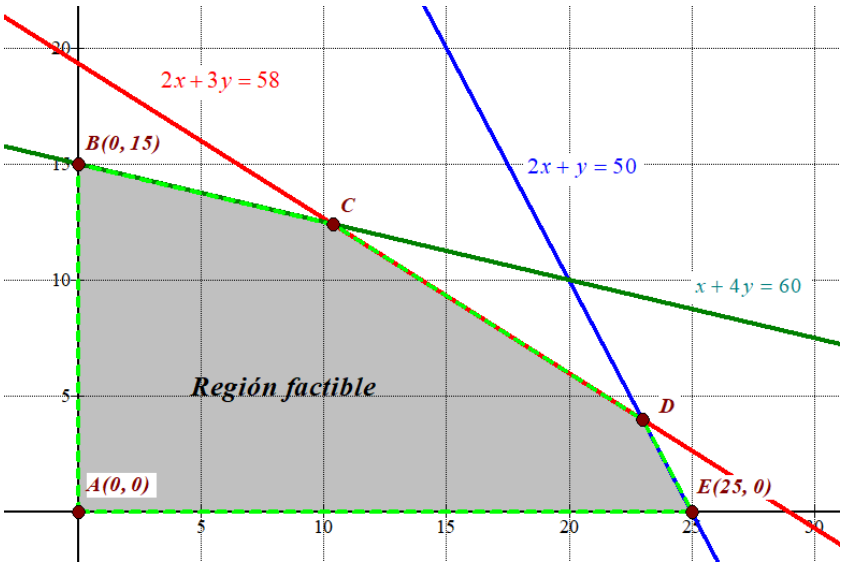
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+3y\le 58 \\ 2x+y\le 50 \\ x+4y\le 60 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las rectas verde, azul y roja. Lo comprobamos viendo si el punto P(5, 5) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 5+3\cdot 5\le 58 \\ 2\cdot 5+5\le 50 \\ 5+4\cdot 5\le 60 \\ 5\ge 0;\ 5\ge 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Determinamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \to \left.\begin{matrix} x+4y=60 \\ 2x+3y=58 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=60-4y \\ 2x+3y=58 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2(60-4y)+3y=58 \Rightarrow 120-8y+3y=58 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y=-62 \Rightarrow y=\frac{62}{5}=12.4 \Rightarrow x=60-4\cdot 12.4=10.4 \Rightarrow \boxed{C(10.4,12.4)}$$

$$D \to \left.\begin{matrix} 2x+3y=58 \\ 2x+y=50 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x+3y=58 \\ y=50-2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x+3(50-2x)=58 \Rightarrow 2x+150-6x=58 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x=-92 \Rightarrow x=\frac{92}{4}=23 \Rightarrow y=50-2\cdot 23=4 \Rightarrow \boxed{D(23,4)}$$

Valoramos los ingresos $I(x,y)=10.5x+5.5y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$
B(0, 15) → $I(0,15)=10.5\cdot 0+5.5\cdot 15=82.5$
C(10.4, 12.4) → $I(10.4,12.4)=10.5\cdot 10.4+5.5\cdot 12.4=177.4$
D(23, 4) → $I(23,4)=10.5\cdot 23+5.5\cdot 4=$ 263.5 Máximo
E(25, 0) → $I(25,0)=10.5\cdot 25+5.5\cdot 0=262.5$

Los ingresos máximos son de 263.5 € y se consiguen en el vértice D(23, 4).
Elaborando semanalmente 23 menús *premium* y 4 menús *estándar* se consiguen unos beneficios máximos de 263.5 €.

EJERCICIO 3

a) **(1.2 puntos)** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot e^{x+1} & x\le -1 \\ x^2-2 & -1<x<2 \\ b\cdot\log(12-x) & 2\le x<12 \end{cases}$$

siendo a y *b* números reales. Determine los valores de *a* y *b* para que la función *f* sea continua en su dominio.

b) **(1.3 puntos)** Represente el recinto acotado, limitado por la recta $y=-x+3$ y la parábola $y=-x^2+5$. Calcule el área del recinto.

a) La función debe ser continúa en los cambios de definición: $x=-1$ y $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=a\cdot e^{x+1}=a\cdot e^{-1+1}=a \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} a\cdot e^{x+1}=a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x^2-2=(-1)^2-2=-1 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1) \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=b\cdot\log(12-2)=b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} b\cdot\log(12-x)=b \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2-2=2^2-2=2 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{b=2}$$

Los valores buscados son $a=-1$ y $b=2$.

b) Averiguamos donde se cortan las gráficas de recta y parábola.

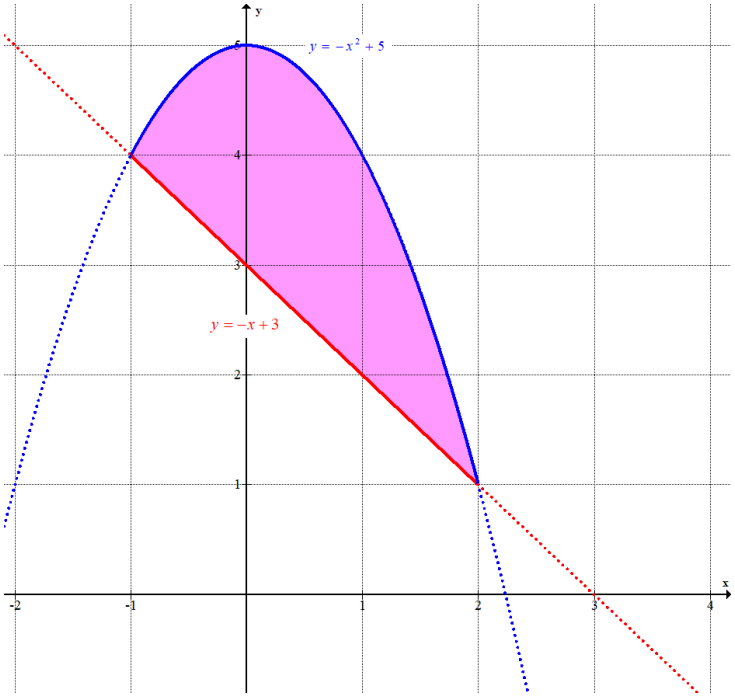
$$\left.\begin{array}{l} y=-x+3 \\ y=-x^2+5 \end{array}\right\}\Rightarrow -x+3=-x^2+5\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=\boxed{2=x} \\ \frac{1-3}{2}=\boxed{-1=x}\end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la región limitada por recta y parábola.

x	$y=-x+3$
-1	4
0	3
1	2
2	1

x	$y=-x^2+5$
-1	4
0	5
1	4
2	1



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada de superficie podemos aproximar el área de la región coloreada. Su valor estará entre 4 y 5 unidades cuadradas.
Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral. El área es el valor de la integral definida entre –1 y 2 de la diferencia de las dos funciones.

$$Área = \int_{-1}^{2} -x^2+5-(-x+3)\,dx = \int_{-1}^{2} -x^2+5+x-3dx = \int_{-1}^{2} -x^2+x+2dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2} = \left[-\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2\cdot 2\right]-\left[-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+2(-1)\right] =$$

$$= -\frac{8}{3}+2+4-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2 = \boxed{4.5\ u^2}$$

El área del recinto acotado, limitado por la recta $y=-x+3$ y la parábola $y=-x^2+5$ tiene un valor de 4.5 unidades cuadradas.

EJERCICIO 4

El nivel de concentración de un alumno universitario durante un examen viene dado por la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases}-t^2+2t+10 & 0\le t\le 2.5\\ t^2+at+b & 2.5<t\le 5\end{cases}$$

donde t es el tiempo en horas y a y b números reales.

a) **(1.25 puntos)** ¿Con qué nivel de concentración el alumno comienza el examen? Determine los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $t=2.5$.

b) **(1.25 puntos)** Para $a=-8$ y $b=22.5$, esboce la gráfica de la función f, estudiando previamente la monotonía y calculando en qué momentos se alcanzan los niveles máximo y mínimo de concentración.

a) Como $f(0)=-0^2+2\cdot 0+10=10$ el nivel de concentración al comenzar el examen es 10.

Para que la función sea continua debe serlo en $t=2.5$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2.5)=-2.5^2+2\cdot 2.5+10=8.75\\ \lim\limits_{t\to 2.5^-} f(x)=\lim\limits_{t\to 2.5^-} -t^2+2t+10=8.75\\ \lim\limits_{t\to 2.5^-} f(x)=\lim\limits_{t\to 2.5^-} t^2+at+b=2.5^2+2.5a+b=6.25+2.5a+b\\ \lim\limits_{t\to 2.5^-} f(x)=\lim\limits_{t\to 2.5^+} f(x)=f(2.5)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8.75=6.25+2.5a+b\Rightarrow \boxed{b=2.5-2.5a}$$

Para que la función sea derivable debe serlo en $t=2.5$. Para ello deben coincidir las derivadas laterales.

La derivada en $[0,2.5)\cup(2.5,5]$ es $f'(t)=\begin{cases}-2t+2 & 0\le t<2.5\\ 2t+a & 2.5<t\le 5\end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(2.5^-)=\lim\limits_{t\to 2.5^-} f'(t)=\lim\limits_{t\to 2.5^-} -2t+2=-3\\ f'(2.5^+)=\lim\limits_{t\to 2.5^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 2.5^+} 2t+a=5+a\\ f'(2.5^-)=f'(2.5^+)\end{array}\right\}\Rightarrow 5+a=-3\Rightarrow \boxed{a=-8}$$

Para $a=-8$ tenemos que $b=2.5-2.5(-8)=22.5$.

Los valores buscados son $a=-8$ y $b=22.5$.

b) Para $a=-8$ y $b=22.5$ sabemos que la función es continua y derivable.

La función queda $f(t)=\begin{cases}-t^2+2t+10 & 0\le t\le 2.5\\ t^2-8t+22.5 & 2.5<t\le 5\end{cases}$.

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función $f'(t)=\begin{cases}-2t+2 & 0\le t\le 2.5\\ 2t-8 & 2.5<t\le 5\end{cases}$.

$$f'(t)=0\Rightarrow\begin{cases}-2t+2=0\to t=1\in[0,2.5]\\ 2t-8=0\to t=4\in(2.5,5]\end{cases}$$

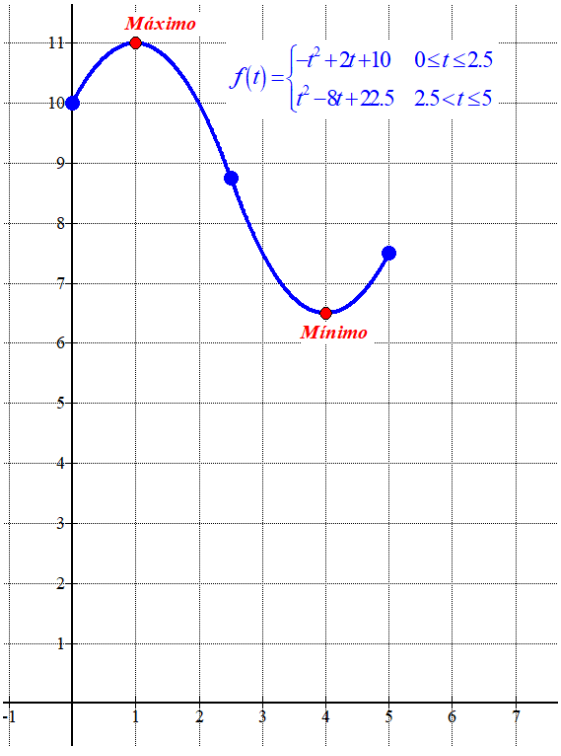
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores. Añadimos $t=2.5$

- En el intervalo $[0,1)$ tomamos $t=0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=-2\cdot 0.5+2=1>0$. La función crece en $[0,1)$.
- En el intervalo $(1,2.5)$ tomamos $t=2$ y la derivada vale $f'(2)=-2\cdot 2+2=-2<0$. La función decrece en $(1,2.5)$.
- En el intervalo $(2.5,4)$ tomamos $t=3$ y la derivada vale $f'(3)=2\cdot 3-8=-2<0$. La función decrece en $(2.5,4)$.
- En el intervalo $(4,5]$ tomamos $t=4.5$ y la derivada vale $f'(4.5)=2\cdot 4.5-8=1>0$. La función crece en $(4,5]$.

La función crece en $[0,1)\cup(4,5]$ y decrece en $(1,4)$.
La función crece antes de $t=1$ y decrece después. En $t=1$ hay un máximo relativo.
La función decrece antes de $t=4$ y crece después. En $t=4$ hay un mínimo relativo.
Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición y en los puntos críticos para establecer los máximos y mínimos absolutos.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-0^2+2\cdot 0+10=10 \\ f(1)=-1^2+2\cdot 1+10=11 \ \textit{Máximo} \\ f(4)=4^2-8\cdot 4+22.5=6.5 \ \textit{Mínimo} \\ f(5)=5^2-8\cdot 5+22.5=7.5 \end{array}\right\}$$

El nivel máximo de concentración es 11 y se consigue al cabo de 1 hora.
El nivel mínimo de concentración es 6.5 y se consigue al cabo de 4 horas.
Representamos la gráfica de la función.



EJERCICIO 5

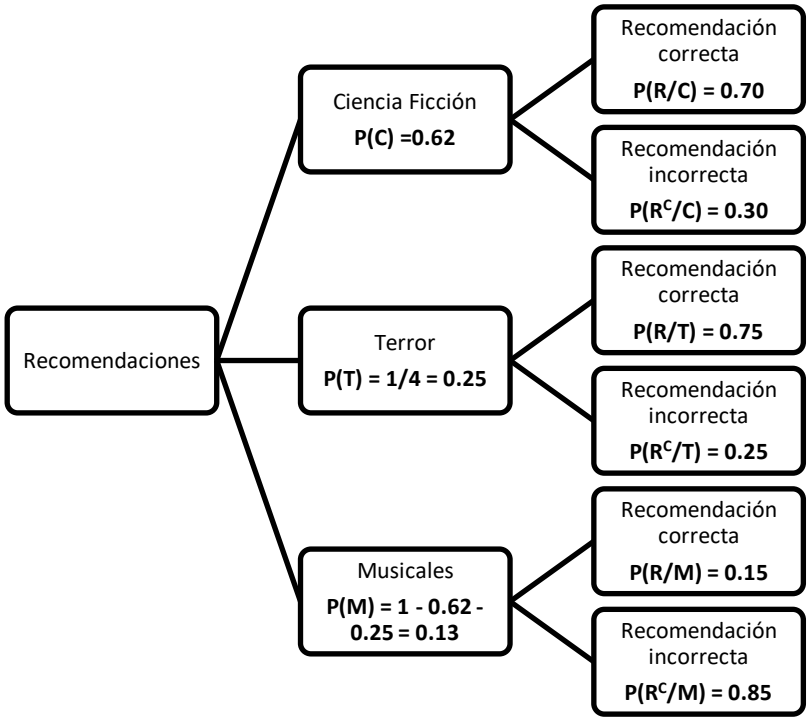
Un nuevo servicio de streaming utiliza un algoritmo para recomendar películas a sus usuarios en función de las películas vistas anteriormente. Como la plataforma es de reciente creación, solo tiene disponibles tres géneros: ciencia ficción, terror y musicales. El 62 % de las películas disponibles son de ciencia ficción, la cuarta parte son de terror y el resto musicales. De las películas de ciencia ficción, el algoritmo hace una recomendación correcta en el 70 % de las ocasiones, de las de terror, el 75 % de las veces y de los musicales, el 15 %. Un usuario selecciona al azar una película de su lista de recomendaciones:

a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el algoritmo haya hecho una recomendación correcta?

b) **(0.75 puntos)** Si no ha sido recomendada correctamente, ¿qué probabilidad hay de que la película sea de terror?

c) **(0.5 puntos)** De las recomendaciones correctas del género de ciencia ficción, el usuario queda satisfecho con la elección de la película en el 55 % de las ocasiones. ¿Qué probabilidad hay de que la película sea de ciencia ficción, esté recomendada correctamente y el usuario haya quedado satisfecho?

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(R)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R)=P(C)P(R/C)+P(T)P(R/T)+P(M)P(R/M)=$$

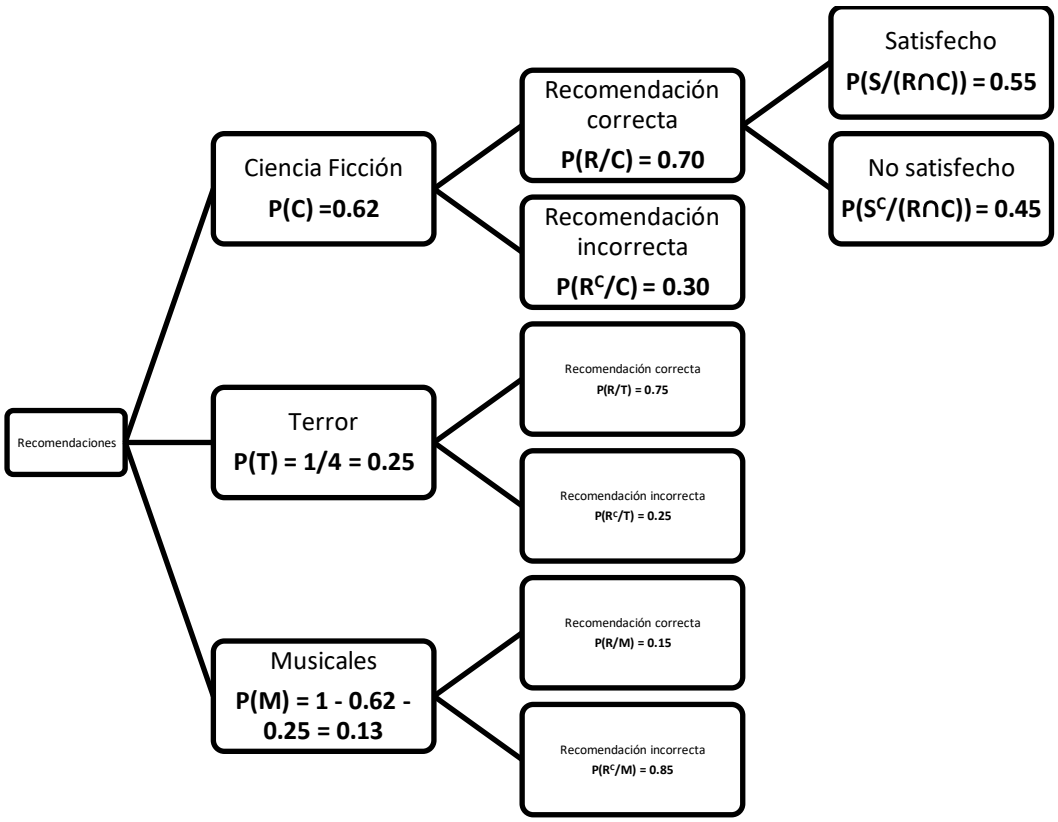
$$=0.62\cdot 0.7+0.25\cdot 0.75+0.13\cdot 0.15=\boxed{0.641}$$

b) Nos piden calcular $P(T/R^C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(T / R^C\right)=\frac{P\left(T \cap R^C\right)}{P\left(R^C\right)}=\frac{P(T) P\left(T / R^C\right)}{1-P(R)}=\frac{0.25 \cdot 0.25}{1-0.641}=\boxed{\frac{125}{718} \simeq 0.1741}$$

c) Llamamos S al suceso "El cliente está satisfecho con la elección de la película". Nos dicen que $P\left(S /\left(R \cap C\right)\right)=0.55$. Nos piden calcular $P\left(C \cap R \cap S\right)$.

$$P\left(C \cap R \cap S\right)=P(C) P(R / C) P\left(S /\left(C \cap R\right)\right)=0.62 \cdot 0.7 \cdot 0.55=\boxed{0.2387}$$



EJERCICIO 6

El tiempo que tardan los usuarios de un sistema de salud en conseguir una cita en Atención Primaria sigue una distribución Normal con media desconocida y desviación típica 4.2 días.

a) **(1.75 puntos)** Elegidos al azar 30 usuarios, se obtiene que el tiempo medio que tardan en obtener cita en Atención Primaria es de 11.3 días. Determine un intervalo de confianza para estimar la media poblacional, con un nivel de confianza del 97 %.

La gerencia del sistema de salud asegura que el promedio de días para obtener una cita en Atención Primaria es de 9.8 días. Según el intervalo obtenido ¿podría asumirse la afirmación de la gerencia como posible?

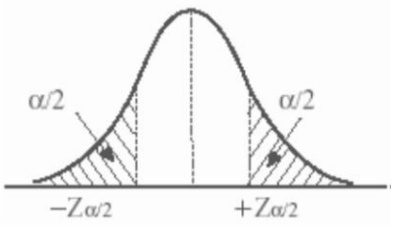
b) **(0.75 puntos)** ¿Cuántos usuarios como mínimo se deberían seleccionar en una nueva muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error máximo en el intervalo de la media poblacional sea de 0.6 días.

Sea X = El tiempo que tardan los usuarios de un sistema de salud en conseguir una cita en Atención Primaria, medido en días. X = N(μ, 4.2).

a) Tamaño de la muestra n = 30 usuarios. El tiempo medio de la muestra es $\bar{x} = 11.3$ días
El tiempo medio de estudio de esa muestra de estudiantes es de 12 horas de estudio semanal.
Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0{,}015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{4.2}{\sqrt{30}} \simeq 1.664 \text{ días}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(11.3 - 1.664,\ 11.3 + 1.664\right) = \left(9.636,\ 12.964\right)$$

"La gerencia del sistema de salud asegura que el promedio de días para obtener una cita en Atención Primaria es de 9.8 días. Según el intervalo obtenido ¿podría asumirse la afirmación de la gerencia como posible?"

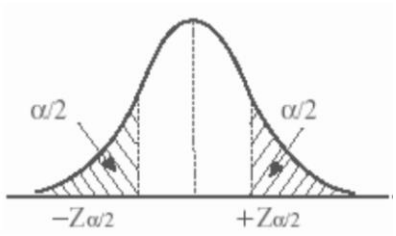
El promedio de 9.8 días pertenece al intervalo de confianza: 9.636 < 9.8 < 12.964, por lo que si se puede asumir esa afirmación con un nivel de confianza del 97 %, aunque se

sitúa muy cerca del límite inferior (es una afirmación política y no va a decir que el promedio es de 12 días).

b) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0{,}025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750



Hallamos el tamaño de la muestra mínimo para que el error máximo sea 0.6 días.

$$Error < 0.6 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.6 \Rightarrow 1.96 \cdot \frac{4.2}{\sqrt{n}} < 0.6 \Rightarrow 1.96 \cdot 4.2 < 0.6\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1.96 \cdot 4.2}{0.6} < \sqrt{n} \Rightarrow n > \left(\frac{1.96 \cdot 4.2}{0.6}\right)^2 \simeq 188.24$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 189 usuarios.

EJERCICIO 7

Se desea estimar la proporción de personas de una determinada localidad que se muestran favorables a la celebración de las fiestas locales durante el mes de mayo. Para ello, se ha tomado una muestra aleatoria de 200 personas resultando que 130 de ellas están a favor.

a) **(1 punto)** Obtenga un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 96.5 %, para estimar la proporción de personas de esta localidad que está a favor de celebrar las fiestas locales durante el mes de mayo.

b) **(1 punto)** Manteniendo la misma proporción muestral y con un nivel de confianza del 99 %, ¿cuál es el número mínimo de personas que deberán seleccionarse aleatoriamente para que la proporción muestral y la poblacional no difieran en más de un 2%?

c) **(0.5 puntos)** Manteniendo el tamaño de la muestra y la proporción muestral, si se aumenta el nivel de confianza, razone cómo influye en el error máximo de estimación.

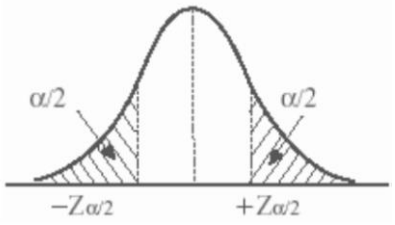
Tamaño de la muestra es $n = 200$ personas. La proporción de personas que se muestran favorables a la celebración de las fiestas locales durante el mes de mayo $pr = \frac{130}{200} = 0.65$;

$qr = 1 - pr = 1 - 0.65 = 0.35$

a) Con un nivel de confianza del 96.5 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}965 \rightarrow \propto = 0{,}035 \rightarrow \propto/2 = 0{,}0175 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}9825 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}11}$$

z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5832
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7611
0.8	0.7881	0.7910
0.9	0.8159	0.8186
1.0	0.8413	0.8438
1.1	0.8643	0.8665
1.2	0.8849	0.8869
1.3	0.9032	0.9049
1.4	0.9192	0.9207
1.5	0.9332	0.9345
1.6	0.9452	0.9463
1.7	0.9554	0.9564
1.8	0.9641	0.9649
1.9	0.9713	0.9719
2.0	0.9772	0.9778
2.1	0.9821	0.9826
	0.9861	0.9864



Hallamos el error.

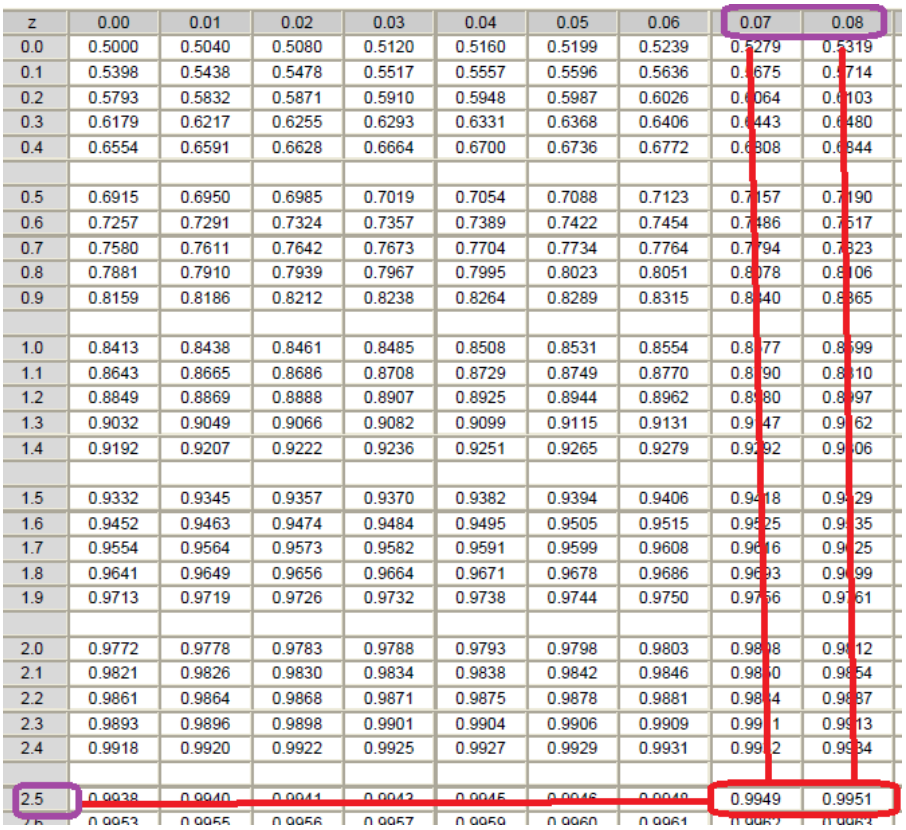
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.11 \cdot \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{200}} \simeq 0.0712$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.65 - 0.0712,\quad 0.65 + 0.0712) = (0.5788, 0.7212)$$

b) Con un nivel de confianza del 99 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}99 \rightarrow \propto = 0{,}01 \rightarrow \propto/2 = 0{,}005 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963

El error máximo es de 0.02, lo sustituimos en la fórmula y despejamos *n*.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.02 = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{n}} \Rightarrow \frac{0.02}{2.575} = \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.02}{2.575}\right)^2 = \frac{0.65 \cdot 0.35}{n} \Rightarrow n = \frac{0.65 \cdot 0.35}{\left(\frac{0.02}{2.575}\right)^2} \simeq 3771.17$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 3772 personas.

c) Si aumentamos el valor del nivel de confianza aumenta el valor de $z_{\alpha/2}$.

Si mantenemos el valor de "*n*" y el valor de *pr* y aumentamos el valor del nivel de confianza en la fórmula del error de estimación $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}}$ observamos que se mantiene constante $\sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}}$ pero aumenta $z_{\alpha/2}$ por lo que **aumenta** el error de estimación.

Manteniendo el tamaño de la muestra y la proporción muestral, si se aumenta el nivel de confianza, aumenta el error máximo de estimación

PAU 2025 Ordinaria Suplente 2 Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2024-2025	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Debe resolver 4 ejercicios, uno de cada bloque. Elija solo un ejercicio en los tres bloques donde tiene posibilidad de elección. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

a) **(1.75 puntos)** En un festival gastronómico gaditano se han vendido entradas para tres eventos culinarios. Concretamente, 120 entradas para un taller de repostería, 50 para una demostración de cocina gourmet y 150 para una cata de vinos de la tierra de Cádiz. El total recaudado por la venta de entradas ha sido de 6460 €. Se sabe que el precio de 10 entradas para el taller de repostería coincide con el coste de la suma de 2 entradas para la cata de vinos y 1 entrada para la demostración de cocina gourmet. Además, el coste de 2 entradas para el taller y 1 entrada para la cata de vinos supera en 6 € al de 2 entradas para la demostración de cocina gourmet. ¿Cuánto cuesta la entrada de cada evento?

b) **(0.75 puntos)** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el rango de A y A^2.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un servicio técnico recibe un encargo para revisar lavadoras y frigoríficos de una empresa de apartahoteles. La revisión de cada lavadora requiere 100 minutos de trabajo, mientras que cada frigorífico requiere 50 minutos. El servicio técnico dispone de 26 horas y 40 minutos para hacer las revisiones. Por política de empresa, no se aceptan encargos de más de 12 lavadoras ni de más de 16 frigoríficos. Sabiendo que las revisiones se pagan a 50 € la hora, en ambos tipos de electrodomésticos, ¿cuántos electrodomésticos de cada clase debe revisar el servicio técnico para maximizar el ingreso con el encargo? ¿A cuánto asciende este ingreso máximo?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** El índice de audiencia de un programa de radio se puede modelizar por una función del tipo:

$$f(t)=at^2+bt+c, \quad t\in[0,60]$$

donde t es el tiempo medido en minutos y $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Se sabe que cuando comienza el programa el índice de audiencia es 20 puntos y que a los 40 minutos se alcanza el máximo índice de audiencia, que es 36 puntos. Determine a, b y c y represente gráficamente la función obtenida.

b) **(1 punto)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x)=\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \qquad h(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$$

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}10+\frac{5x}{2} & x\le -2\\ x^2+1 & -2<x\le 2\\ 10-\frac{5x}{2} & x\ge 2\end{cases}$

a) **(0.5 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de *f* en el punto de abscisa $x=-2$.

b) **(0.75 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* con pendiente –1.

c) **(1.25 puntos)** Represente la región del plano acotada superiormente por la gráfica de *f* e inferiormente por el eje de abscisas. Calcule el área de dicha región.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una encuesta realizada a personas que utilizan productos de cosmética arroja los siguientes datos: el 66% de las personas encuestadas son mujeres y, de estas, el 71% utilizan cosmética natural. Además, se sabe que el 17.86% son hombres que no utilizan cosmética natural. Se selecciona una de estas personas al azar.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea mujer o use cosmética natural.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea hombre y utilice cosmética natural.

c) **(0.75 puntos)** Sabiendo que no usa cosmética natural, calcule la probabilidad de que sea hombre.

d) **(0.5 puntos)** ¿Son sucesos incompatibles "utilizar cosmética natural" y "ser mujer"? ¿Son independientes?

BLOQUE D

EJERCICIO 6

Un tratamiento experimental para tratar una determinada intolerancia alimentaria mejora al 60% de los pacientes a los que se les suministra. Cinco pacientes deciden someterse a dicho tratamiento.

a) **(0.75 puntos)** Indique la distribución que sigue la variable "número de pacientes de entre los 5 que mejoran con este tratamiento". ¿Cuál es la probabilidad de que mejoren cuatro pacientes gracias al tratamiento?

b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que al menos dos pacientes experimenten mejoría tras someterse al tratamiento.

c) **(0.5 puntos)** ¿Cuántos pacientes se espera que mejoren al someterse a ese tratamiento?

d) **(0.5 puntos)** ¿Cuántos pacientes deberían someterse al tratamiento para que el número esperado de pacientes que mejoren sea mayor o igual a 12?

EJERCICIO 7

En un invernadero de Palos de la Frontera (Huelva), se cultivan fresas y frambuesas. Se desea estimar la proporción de fresas y frambuesas que se recolectan. Para ello, se ha tomado una muestra aleatoria de 300 kg, obteniéndose que 180 kg de ellos son fresas y el resto frambuesas.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga, con un nivel de confianza del 97%, un intervalo para estimar la proporción de fresas recolectadas en el invernadero y otro intervalo para estimar la proporción de frambuesas recolectadas.

b) **(1 punto)** Con las proporciones muestrales iniciales y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuántos kilogramos de frutos deberían seleccionarse aleatoriamente como mínimo para que las proporciones muestrales difieran de las proporciones poblacionales a lo sumo en un 2%?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

a) **(1.75 puntos)** En un festival gastronómico gaditano se han vendido entradas para tres eventos culinarios. Concretamente, 120 entradas para un taller de repostería, 50 para una demostración de cocina gourmet y 150 para una cata de vinos de la tierra de Cádiz. El total recaudado por la venta de entradas ha sido de 6460 €. Se sabe que el precio de 10 entradas para el taller de repostería coincide con el coste de la suma de 2 entradas para la cata de vinos y 1 entrada para la demostración de cocina gourmet. Además, el coste de 2 entradas para el taller y 1 entrada para la cata de vinos supera en 6 € al de 2 entradas para la demostración de cocina gourmet. ¿Cuánto cuesta la entrada de cada evento?

b) **(0.75 puntos)** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, calcule el rango de A y A^2.

a) Llamamos "x" al precio de la entrada al taller de repostería, "y" al precio de la entrada a la demostración de cocina gourmet y "z" al precio de la cata de vinos.

Se han vendido 120 entradas para un taller de repostería, 50 para una demostración de cocina gourmet y 150 para una cata de vinos de la tierra de Cádiz. El total recaudado por la venta de entradas ha sido de 6460 € → $120x+50y+150z=6460$.

Se sabe que el precio de 10 entradas para el taller de repostería coincide con el coste de la suma de 2 entradas para la cata de vinos y 1 entrada para la demostración de cocina gourmet → $10x=2z+y$.

El coste de 2 entradas para el taller y 1 entrada para la cata de vinos supera en 6 € al de 2 entradas para la demostración de cocina gourmet → $2x+z=2y+6$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix}120x+50y+150z=6460\\ 10x=2z+y\\ 2x+z=2y+6\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}12x+5y+15z=646\\ 10x-2z=y\\ 2x+z=2y+6\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}12x+5(10x-2z)+15z=646\\ 2x+z=2(10x-2z)+6\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}12x+50x-10z+15z=646\\ 2x+z=20x-4z+6\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}62x+5z=646\\ -18x+5z=6\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}5z=646-62x\\ -18x+5z=6\end{matrix}\right\}\Rightarrow -18x+646-62x=6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -80x=-640\Rightarrow\boxed{x=\frac{640}{80}=8}\Rightarrow 5z=646-62\cdot 8=150\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{z=\frac{150}{5}=30}\Rightarrow\boxed{y=10\cdot 8-2\cdot 30=20}$$

La entrada al taller de repostería cuesta 8 €, la entrada a la demostración de cocina gourmet cuesta 20 € y la cata de vinos cuesta 30 €.

b) El rango de A puede ser 3, 2 o 1. Obtenemos el determinante de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2+0+2+2-0-6 = 0$$

El rango de A no es 3. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la tercera fila y la tercera columna → $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2-0 = 2 \neq 0$. El rango de A es 2.

Calculamos la expresión de la matriz A^2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0-1 & 0+0-2 & -1+0-1 \\ -1-2+3 & 0+4+6 & 1+6+3 \\ 1-2+1 & 0+4+2 & -1+6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

La matriz A^2 tiene la primera columna nula. El rango de A^2 no es 3.
Observamos que la segunda y tercera columna son iguales. El rango de A^2 no es 2.
La matriz tiene elementos no nulos. El rango de A^2 es 1.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un servicio técnico recibe un encargo para revisar lavadoras y frigoríficos de una empresa de apartahoteles. La revisión de cada lavadora requiere 100 minutos de trabajo, mientras que cada frigorífico requiere 50 minutos. El servicio técnico dispone de 26 horas y 40 minutos para hacer las revisiones. Por política de empresa, no se aceptan encargos de más de 12 lavadoras ni de más de 16 frigoríficos. Sabiendo que las revisiones se pagan a 50 € la hora, en ambos tipos de electrodomésticos, ¿cuántos electrodomésticos de cada clase debe revisar el servicio técnico para maximizar el ingreso con el encargo? ¿A cuánto asciende este ingreso máximo?

Llamemos x = "número de lavadoras que se repasan" e y = "número de frigoríficos que se repasan".

La revisión de cada lavadora requiere 100 minutos de trabajo, mientras que cada frigorífico requiere 50 minutos. Se necesitan $100x+50y$ minutos para repasar los electrodomésticos.

El servicio técnico dispone de 26 horas y 40 minutos para hacer las revisiones. Este tiempo son $26\cdot 60+40=1600$ minutos → $100x+50y\le 1600$.

No se aceptan encargos de más de 12 lavadoras ni de más de 16 frigoríficos → $x\le 12;\ y\le 16$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Las restricciones del problema son:

$$\left.\begin{array}{l} 100x+50y\le 1600 \\ x\le 12;\ y\le 16 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2x+y\le 32 \\ x\le 12;\ y\le 16 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Sabiendo que las revisiones se pagan a 50 € la hora, es decir, $\frac{50}{60}=\frac{5}{6}$ € el minuto, en ambos tipos de electrodomésticos los ingresos que se obtienen son $I(x,y)=\frac{5}{6}(100x+50y)=\frac{250}{3}x+\frac{125}{3}y$. Deseamos maximizar los ingresos.

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$2x+y=32$

x	$y=32-2x$
0	32
8	16
12	8
16	0

$x=12$

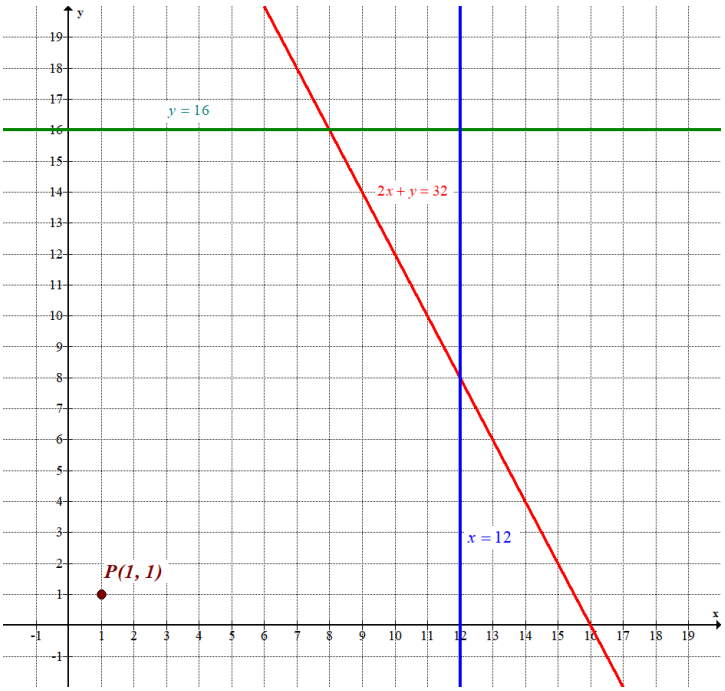
$x=12$	y
12	0
12	8
12	16

$y=16$

x	$y=16$
0	16
8	16
12	16

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+y\le 32 \\ x\le 12;\ y\le 16 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las rectas verde y roja, y a la izquierda de la recta vertical azul. Lo comprobamos viendo si el punto P(1, 1) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2+1\le 32 \\ 1\le 12;\ 1\le 16 \\ 1\ge 0;\ 1\ge 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Determinamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \to \left.\begin{matrix} 2x+y=32 \\ y=16 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x+16=32 \Rightarrow 2x=16 \Rightarrow x=8 \Rightarrow \boxed{C(8,16)}$$

$$D \to \left.\begin{matrix} 2x+y=32 \\ x=12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 24+y=32 \Rightarrow y=8 \Rightarrow \boxed{D(12,8)}$$

Valoramos los ingresos $I(x,y)=\frac{250}{3}x+\frac{125}{3}y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$

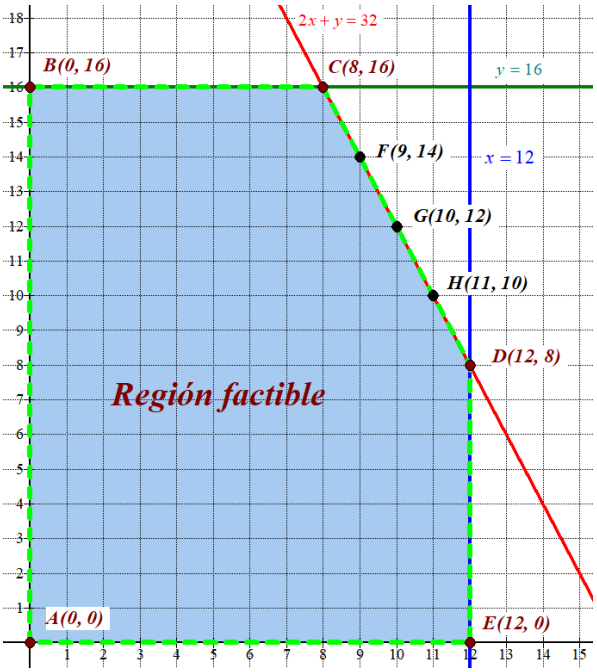
B(0, 16) → $I(0,16)=\frac{250}{3}\cdot 0+\frac{125}{3}\cdot 16=\frac{2000}{3}\simeq 666.667$

C(8, 16) → $I(8,16)=\frac{250}{3}\cdot 8+\frac{125}{3}\cdot 16=\frac{4000}{3}\simeq 1333.33$ Máximo

D(12, 8) → $I(12,8)=\frac{250}{3}\cdot 12+\frac{125}{3}\cdot 8=\frac{4000}{3}\simeq 1333.33$ Máximo

E(12, 0) → $I(12,0)=\frac{250}{3}\cdot 12+\frac{125}{3}\cdot 0=1000$

Los ingresos máximos son de 1333.33 € y se consiguen en los vértices C(8, 16) y D(12, 8). Los ingresos máximos se obtienen en todos los puntos del segmento CD. Como estos valores deben ser enteros los valores máximos de ingresos se obtienen en los puntos C(8, 16), F(9, 14), G(10, 12), H(11, 10) y D(12, 8).



Los ingresos máximos que se pueden conseguir son 1333.33 € y se pueden conseguir repasando 8 lavadoras y 16 frigoríficos o 9 lavadoras y 14 frigoríficos o 10 lavadoras y 12 frigoríficos o 11 lavadoras y 10 frigoríficos o 12 lavadoras y 8 frigoríficos,

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** El índice de audiencia de un programa de radio se puede modelizar por una función del tipo:

$$f(t)=at^2+bt+c,\quad t\in[0,60]$$

donde *t* es el tiempo medido en minutos y $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Se sabe que cuando comienza el programa el índice de audiencia es 20 puntos y que a los 40 minutos se alcanza el máximo índice de audiencia, que es 36 puntos. Determine *a*, *b* y *c* y represente gráficamente la función obtenida.

b) **(1 punto)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x)=\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\qquad\qquad h(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$$

a) Sabemos que $f(0)=20$ y $f(40)=36$. Como hay un máximo en $t=40$ debe anularse la derivada para este valor: $f'(40)=0$.

$$\left.\begin{array}{l}f(t)=at^2+bt+c\\ f(0)=20\\ f(40)=36\\ f'(t)=2at+b\\ f'(40)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}20=a\cdot0^2+b\cdot0+c\\ 36=a\cdot40^2+b\cdot40+c\\ 0=2a\cdot40+b\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\boxed{20=c}\\ 36=1600a+40b+c\\ b=-80a\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36=1600a+40(-80a)+20\Rightarrow 16=1600a-3200a\Rightarrow 16=-1600a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{a=\frac{16}{-1600}=\frac{-1}{100}}\Rightarrow\boxed{b=-80\frac{-1}{100}=\frac{4}{5}}$$

Los valores buscados son $a=\frac{-1}{100}$, $b=\frac{4}{5}$ y $c=20$..

b) Calculamos la primera derivada.

$$g(x)=\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)=\ln(x^2-1)-\ln(x^2+1)\Rightarrow g'(x)=\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2x}{x^2+1}=$$

$$=\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2-1)(x^2+1)}=\boxed{\frac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)}}$$

Calculamos la segunda derivada.

$$h(x)=(2x-1)e^{x^2-x}\Rightarrow h'(x)=2e^{x^2-x}+(2x-1)(2x-1)e^{x^2-x}=$$

$$=2e^{x^2-x}+(4x^2-2x-2x+1)e^{x^2-x}=(2+4x^2-2x-2x+1)e^{x^2-x}=\boxed{(4x^2-4x+3)e^{x^2-x}}$$

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}10+\dfrac{5x}{2} & x\le -2\\ x^2+1 & -2<x<2\\ 10-\dfrac{5x}{2} & x\ge 2\end{cases}$

a) **(0.5 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de *f* en el punto de abscisa $x=-2$.

b) **(0.75 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* con pendiente -1.

c) **(1.25 puntos)** Represente la región del plano acotada superiormente por la gráfica de *f* e inferiormente por el eje de abscisas. Calcule el área de dicha región.

a) Estudiamos la continuidad en $x=-2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=10+\dfrac{5(-2)}{2}=5 \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} 10+\dfrac{5x}{2}=5 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} x^2+1=(-2)^2+1=5 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+} f(x)=f(-2)=5$$

La función es continua en $x=-2$.

Estudiamos la derivabilidad en $x=-2$.

La derivada en $[-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$ es $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{2} & 0\le x<-2\\ 2x & -2<x<2\\ \dfrac{-5}{2} & x>2\end{cases}$.

Comprobamos si coinciden las derivadas laterales en $x=-2$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-)=\lim\limits_{x\to -2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{5}{2}=2.5 \\ f'(-2^+)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} 2x=2(-2)=-4 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(-2^-)=2.5\neq -4=f'(-2^+)$$

Las derivadas laterales no coinciden y la función no es derivable en $x=-2$.

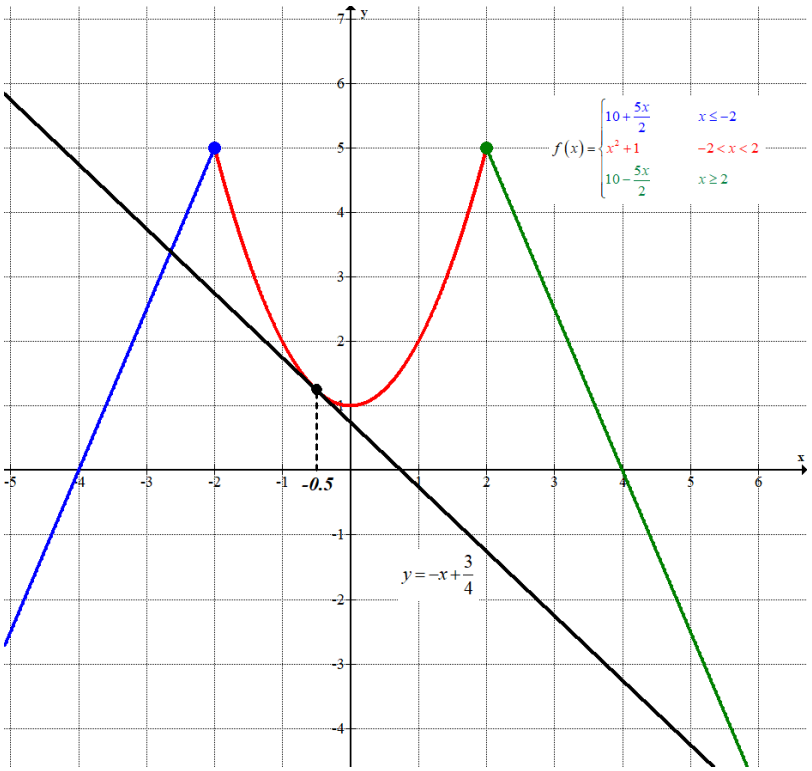
b) La pendiente de la recta tangente en $x=a$ es el valor de la derivada de la función para ese valor. Como la pendiente es -1 se debe cumplir que $f'(a)=-1$.

$$f'(x)=-1\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{2}=1\to \text{Imposible}\\ 2x=-1\to x=\dfrac{-1}{2}\in(-2,2)\\ \dfrac{-5}{2}=1\to \text{Imposible}\end{cases}$$

Debemos hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x=\frac{-1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{-1}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2}\right)^2+1=\frac{5}{4} \\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=-1 \\ y-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{5}{4}=(-1)\left(x-\frac{-1}{2}\right)\Rightarrow \boxed{y=-x+\frac{3}{4}}$$

La recta tangente a la gráfica de la función f con pendiente -1 tiene ecuación $y=-x+\frac{3}{4}$.



c) Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función y el eje de abscisas.

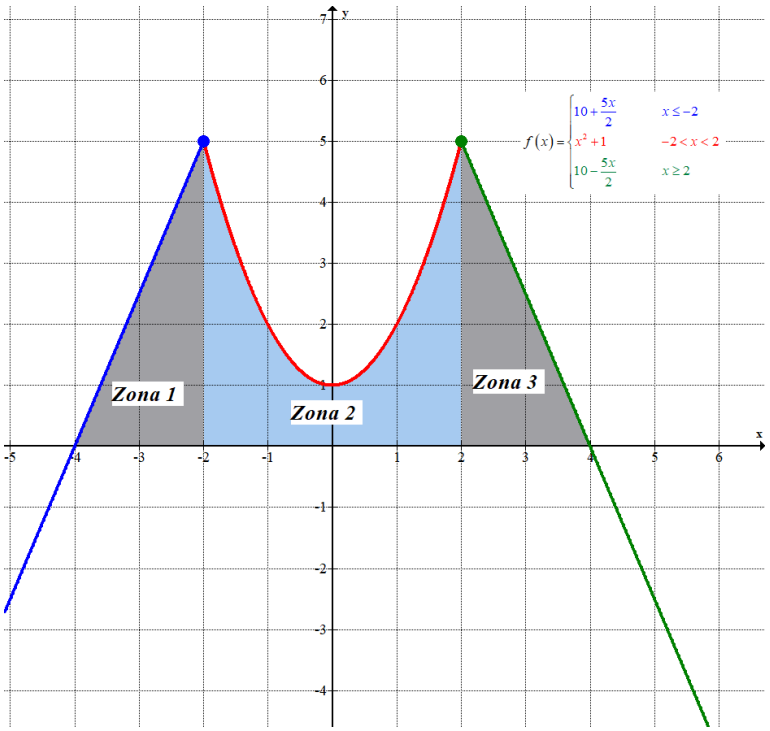
$$f(x)=0\Rightarrow\begin{cases} 10+\frac{5x}{2}=0\to 20+5x=0\to 5x=-20\to \boxed{x=-4}\in(-\infty,-2) \\ x^2+1=0\to x^2=-1\to x=\sqrt{-1}=\text{Imposible} \\ 10-\frac{5x}{2}=0\to 20-5x=0\to 5x=20\to \boxed{x=4}\in(2,+\infty) \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función y el recinto del cual queremos hallar el área.

x	$f(x)=10+\frac{5x}{2}$
-4	0
-2	5

x	$f(x)=x^2+1$
-1	2
0	1
1	2

x	$f(x)=10-\frac{5x}{2}$
2	5
4	0



El área de la zona 1 es el área de un triángulo de base 2 y altura 5 por lo que vale $\frac{5\cdot 2}{2}=5$ unidades cuadradas.
El área de la zona 3 es igual al área de la zona 1, por lo que vale 5 unidades cuadradas.
El área de la zona 2 es el valor de la integral definida entre –2 y 2 de $f(x)=x^2+1$.

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{2} x^2+1dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{2}=\left[\frac{2^3}{3}+2\right]-\left[\frac{(-2)^3}{3}-2\right]=\frac{8}{3}+2+\frac{8}{3}+2=\boxed{\frac{28}{3}}$$

El área de la región del plano acotada superiormente por la gráfica de *f* e inferiormente por el eje de abscisas vale $5+5+\frac{28}{3}=\frac{58}{3}\simeq 19.333$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 5

Una encuesta realizada a personas que utilizan productos de cosmética arroja los siguientes datos: el 66% de las personas encuestadas son mujeres y, de estas, el 71% utilizan cosmética natural. Además, se sabe que el 17.86% son hombres que no utilizan cosmética natural. Se selecciona una de estas personas al azar.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea mujer o use cosmética natural.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea hombre y utilice cosmética natural.

c) **(0.75 puntos)** Sabiendo que no usa cosmética natural, calcule la probabilidad de que sea hombre.

d) **(0.5 puntos)** ¿Son sucesos incompatibles "utilizar cosmética natural" y "ser mujer"? ¿Son independientes?

Realizamos una tabla de contingencia.

	Usa cosmética natural	No usa cosmética natural	
Hombre		17.86	
Mujer	$0.71 \cdot 66 = 46.86$		66
			100

Completamos la tabla.

	Usa cosmética natural	No usa cosmética natural	
Hombre	**16.14**	17.86	**34**
Mujer	$0.71 \cdot 66 = 46.86$	**19.14**	66
	63	**37**	100

a) Hay un 66% de los encuestados que son mujeres y un 16.14% son hombres que usan cosmética natural. La probabilidad de que sea mujer o use cosmética natural vale $0.1614 + 0.66 = 0.8214$.

b) Hay un 16.14% de los encuestados que son hombres que usan cosmética natural. La probabilidad de que sea hombre y utilice cosmética natural vale 0.1614.

c) Hay un 37 % de los encuestados que no usa cosmética natural y un 17.86 % son hombres que no usan cosmética natural. La probabilidad de que al elegir una persona que no usa cosmética natural esta sea hombre vale $\frac{17.86}{37} = \frac{893}{1850} \simeq 0.4827$.

d) Para que sean incompatibles su intersección debe ser vacía, pero sabemos que las mujeres que usan cosmética natural son el 46.86% de los encuestados y no es 0. Los sucesos no son incompatibles.

Llamamos CN al suceso "usar cosmética natural" y M al suceso "ser mujer". Para que los sucesos sean independientes debe cumplirse la igualdad $P(CN \cap M) = P(CN)P(M)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(CN \cap M) = 0.4686 \\ P(CN)P(M) = 0.63 \cdot 0.66 = 0.4158 \end{array}\right\} \Rightarrow P(CN \cap M) = 0.4686 \neq 0.4158 = P(CN)P(M)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos no son independientes.

EJERCICIO 6

Un tratamiento experimental para tratar una determinada intolerancia alimentaria mejora al 60% de los pacientes a los que se les suministra. Cinco pacientes deciden someterse a dicho tratamiento.

a) **(0.75 puntos)** Indique la distribución que sigue la variable "número de pacientes de entre los 5 que mejoran con este tratamiento". ¿Cuál es la probabilidad de que mejoren cuatro pacientes gracias al tratamiento?

b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que al menos dos pacientes experimenten mejoría tras someterse al tratamiento.

c) **(0.5 puntos)** ¿Cuántos pacientes se espera que mejoren al someterse a ese tratamiento?

d) **(0.5 puntos)** ¿Cuántos pacientes deberían someterse al tratamiento para que el número esperado de pacientes que mejoren sea mayor o igual a 12?

a) Sea X = Número de pacientes de entre los 5 que mejoran con este tratamiento.
Esta distribución es binomial. La probabilidad de que cada persona mejore con el tratamiento no depende de lo que les pase a los demás. El número de repeticiones es n = 5 y la probabilidad de que una persona mejore con el tratamiento es p = 0.6. X = B(5, 0.6).
Calculamos el valor de $P(X=4)$.

$$P(X=4)=\binom{5}{4}0.6^4\cdot 0.4^1=5\cdot 0.6^4\cdot 0.4=\boxed{0.2592}$$

b) Debemos calcular el valor de $P(X\geq 2)$.

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-\left(P(X=0)+P(X=1)\right)=$$

$$=1-\left(\binom{5}{0}0.6^0\cdot 0.4^5+\binom{5}{1}0.6^1\cdot 0.4^4\right)=1-\left(0.4^5+5\cdot 0.6\cdot 0.4^4\right)=\boxed{0.91296}$$

d) Si en vez de 5 son "n" los pacientes que sometemos al tratamiento la variable X = "Número de pacientes de entre los "n" que mejoran con este tratamiento" es una variable binomial de parámetros n y p = 0.6. X = B(n, 0.6).
El número esperado de pacientes que mejoren es $np=0.6n$. Buscamos cuando es mayor o igual que 12.

$$0.6n\geq 12\Rightarrow n\geq\frac{12}{0.6}=20$$

Sometiendo a 20 pacientes o más al tratamiento el número esperado de pacientes que mejoren será mayor o igual a 12.

EJERCICIO 7

En un invernadero de Palos de la Frontera (Huelva), se cultivan fresas y frambuesas. Se desea estimar la proporción de fresas y frambuesas que se recolectan. Para ello, se ha tomado una muestra aleatoria de 300 kg, obteniéndose que 180 kg de ellos son fresas y el resto frambuesas.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga, con un nivel de confianza del 97%, un intervalo para estimar la proporción de fresas recolectadas en el invernadero y otro intervalo para estimar la proporción de frambuesas recolectadas.

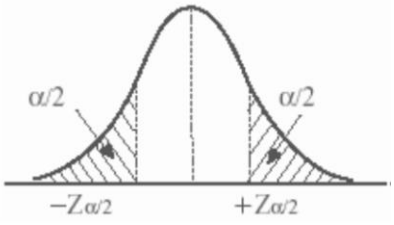
b) **(1 punto)** Con las proporciones muestrales iniciales y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuántos kilogramos de frutos deberían seleccionarse aleatoriamente como mínimo para que las proporciones muestrales difieran de las proporciones poblacionales a lo sumo en un 2%?

Tamaño de la muestra es *n = 300* kilos de frutos. La proporción de fresas que se recolectan es $p = \frac{180}{300} = 0.6$ y la proporción de frambuesas es $q = 1 - p = 1 - 0.6 = 0.4$.

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0{,}015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{300}} \simeq 0.0614$$

El intervalo de confianza para la proporción de fresas recolectadas es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.6 - 0.0614,\quad 0.6 + 0.0614\right) = \left(0.5386,\ 0.6614\right)$$

Para calcular el intervalo de confianza para la proporción de frambuesas recolectadas solo cambia la proporción muestral, siendo el tamaño muestral, $z_{\alpha/2}$ y el error el mismo que con las fresas.

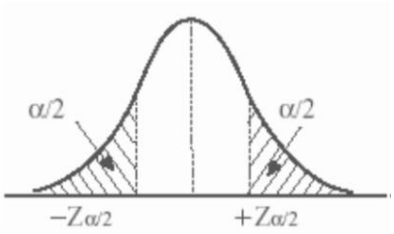
El intervalo de confianza para la proporción de frambuesas recolectadas es:

$$\left(q - Error,\ q + Error\right) = \left(0.4 - 0.0614,\quad 0.4 + 0.0614\right) = \left(0.3386,\ 0.4614\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0{,}025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750



Hallamos el tamaño de la muestra mínimo para que el error máximo sea 0.02.

$$Error < 0.02 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} < 0.02 \Rightarrow 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{n}} < 0.02 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{n}} < \frac{0.02}{1.96} \Rightarrow \frac{0.6 \cdot 0.4}{n} < \left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2 \Rightarrow \frac{0.6 \cdot 0.4}{\left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2} < n \Rightarrow \boxed{n > 2304.96}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 2305 kilos de frutos.

PevAU 2024 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2023-2024	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones: **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.

c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.

d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, resuelva la ecuación $A^2\cdot X+A^4=A$.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa tiene un presupuesto de 78000 € para promocionar un producto y quiere contratar la emisión de anuncios por radio y televisión. El coste de emisión de un anuncio de radio es de 2400 € y de un anuncio de televisión de 3600 €. La empresa quiere que la diferencia entre el número de anuncios emitidos de cada tipo no sea mayor que 10 y que se emitan un mínimo de 10 anuncios en total. Si la emisión de un anuncio de radio llega a 34000 personas y de un anuncio de televisión a 72000 personas, ¿cuántas emisiones de cada tipo debe contratar para que la audiencia sea la mayor posible? ¿A cuánto ascendería dicha audiencia?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Dada la función

$$f(x)=\frac{2x-6}{2-x}$$

a) **(0.75 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de dicha función. Calcule sus asíntotas.
b) **(0.75 puntos)** Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la existencia de extremos relativos.
c) **(1 punto)** Halle los puntos de corte con los ejes de coordenadas y represente gráficamente la función.

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x+3 & si\ x<4\\ 2x-5 & si\ x\geq 4\end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) **(0.75 puntos)** Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.
c) **(1 punto)** Represente la región del plano limitada por la gráfica de *f*, las rectas $x=3$, $x=5$ y el eje de abscisas. Calcule su área.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

El 7% de los habitantes de una ciudad no tienen ni coche ni moto. De entre los que tienen coche el 36% tienen moto y de entre los que no tienen coche el 28% no tienen moto. Se elige al azar un habitante de esa ciudad.
a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que solo tenga uno de los dos vehículos.
b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que al menos tenga uno de los dos vehículos.
c) **(0.5 puntos)** Si tiene coche, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga moto?
d) **(0.5 puntos)** ¿Son independientes los sucesos "tener coche" y "no tener moto"? ¿Son incompatibles?

EJERCICIO 6

Se ha realizado un estudio a personas que están teletrabajando actualmente. De estos, el 72 % trabajan por cuenta ajena con contrato indefinido, el 11 % lo hacen por cuenta ajena con contrato temporal y el resto trabajan por cuenta propia. El 87 % de los que tienen contrato indefinido y el 86% de los que trabajan por cuenta propia piensan que el teletrabajo mejora la conciliación familiar. Además, este estudio ha revelado que el 12.51% de los trabajadores opinan que el teletrabajo no mejora la conciliación familiar. Seleccionado un teletrabajador al azar, determine la probabilidad de que:
a) **(1.5 puntos)** Opine que el teletrabajo si mejora la conciliación familiar sabiendo que tiene un contrato temporal.
b) **(1 punto)** No esté trabajando por cuenta propia sabiendo que opina que el teletrabajo mejora la conciliación familiar.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

La altura de un cierto tipo de plantas de maíz sigue una distribución Normal de media 145 cm y desviación típica 22 cm.
a) **(1 punto)** ¿Qué porcentaje de plantas tiene una altura comprendida entre 135 cm y 155 cm?
b) **(0.5 puntos)** ¿Qué altura, como mínimo, debe tener una planta para estar entre el 50% de las más altas?
c) **(1 punto)** Se selecciona una muestra aleatoria de 16 plantas. Halle la probabilidad de que la altura media de las plantas de esta muestra esté comprendida entre 140 cm y 151 cm.

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de personas que viajan en tren con su mascota. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 300 viajeros, obteniéndose que 12 de ellos viajan con su mascota.
a) **(1.25 puntos)** Obtenga un intervalo, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de personas que viajan con su mascota.
b) **(1.25 puntos)** Manteniendo la misma proporción muestral y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuántas personas que viajan en tren deberán seleccionarse aleatoriamente como mínimo para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 2%?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, resuelva la ecuación $A^2\cdot X+A^4=A$.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A^2\cdot X+A^4=A\Rightarrow A^2\cdot X=A-A^4\Rightarrow A^{-1}A\cdot A\cdot X=A^{-1}A-A^{-1}A\cdot A^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\cdot X=I-A^3\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot I-A^{-1}\cdot A\cdot A^2\Rightarrow X=A^{-1}-A^2$$

Hallamos la A^{-1}, A^2 y determinamos la expresión de la matriz X.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1-8+0-0-0-0=-9\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}}{-9}=\frac{-1}{9}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{9}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 4\\ -4 & 1 & -2\\ -2 & -4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/9 & 2/9 & -4/9\\ 4/9 & -1/9 & 2/9\\ 2/9 & 4/9 & 1/9\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0 & 2-2+0 & 0+4+0\\ 0+0-4 & 0+1+0 & 0-2+2\\ -2+0-2 & -4+0+0 & 0+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ -4 & 1 & 0\\ -4 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}-A^2=\begin{pmatrix}1/9 & 2/9 & -4/9\\ 4/9 & -1/9 & 2/9\\ 2/9 & 4/9 & 1/9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ -4 & 1 & 0\\ -4 & -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8/9 & 2/9 & -40/9\\ 40/9 & -10/9 & 2/9\\ 38/9 & 40/9 & -8/9\end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial es $X=\begin{pmatrix}-8/9 & 2/9 & -40/9\\ 40/9 & -10/9 & 2/9\\ 38/9 & 40/9 & -8/9\end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa tiene un presupuesto de 78000 € para promocionar un producto y quiere contratar la emisión de anuncios por radio y televisión. El coste de emisión de un anuncio de radio es de 2400 € y de un anuncio de televisión de 3600 €. La empresa quiere que la diferencia entre el número de anuncios emitidos de cada tipo no sea mayor que 10 y que se emitan un mínimo de 10 anuncios en total. Si la emisión de un anuncio de radio llega a 34000 personas y de un anuncio de televisión a 72000 personas, ¿cuántas emisiones de cada tipo debe contratar para que la audiencia sea la mayor posible? ¿A cuánto ascendería dicha audiencia?

Llamamos x = "número de anuncios por radio", y = "número de anuncios por televisión". Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Coste	Audiencia
Número de anuncios por radio (x)	2400x	34000x
Número de anuncios por televisión (y)	3600y	72000y
TOTALES	$2400x+3600y$	$34000x+72000y$

Deseamos maximizar la audiencia que viene expresada como $P(x,y)=34000x+72000y$.

Las restricciones del problema son:

"Una empresa tiene un presupuesto de 78000 €" → $2400x+3600y\le 78000$.

"La empresa quiere que la diferencia entre el número de anuncios emitidos de cada tipo no sea mayor que 10" → $x-y\le 10;\ y-x\le 10$.

"que se emitan un mínimo de 10 anuncios en total" → $x+y\ge 10$.

"Las cantidades deben ser positivas" → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}2400x+3600y\le 78000\\ x-y\le 10\\ y-x\le 10\\ x+y\ge 10\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}24x+36y\le 780\\ x-y\le 10\\ \Rightarrow\ y-x\le 10\\ x+y\ge 10\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}2x+3y\le 65\\ x-y\le 10\\ \Rightarrow\ y-x\le 10\\ x+y\ge 10\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$2x+3y=65$

x	$y=\frac{65-2x}{3}$
0	65/3
7	17
19	9

$x-y=10$

x	$y=x-10$
10	0
19	9

$y-x=10$

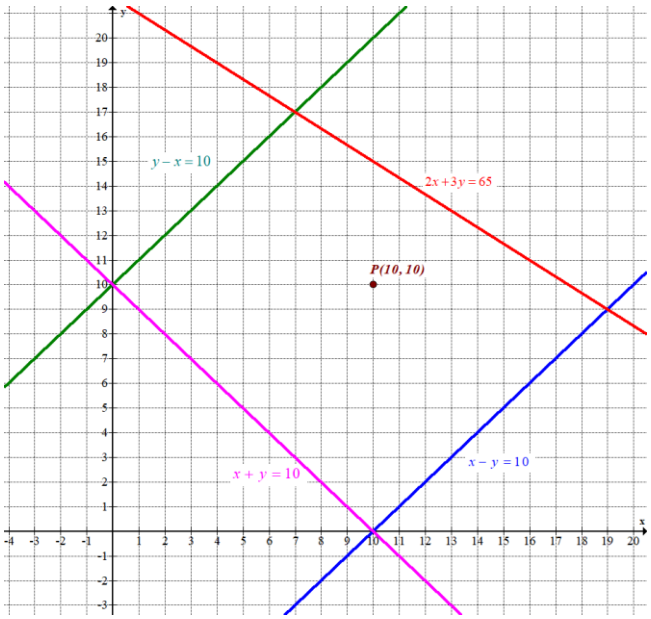
x	$y=10+x$
0	10
7	17

$x+y=10$

x	$y=10-x$
0	10
10	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

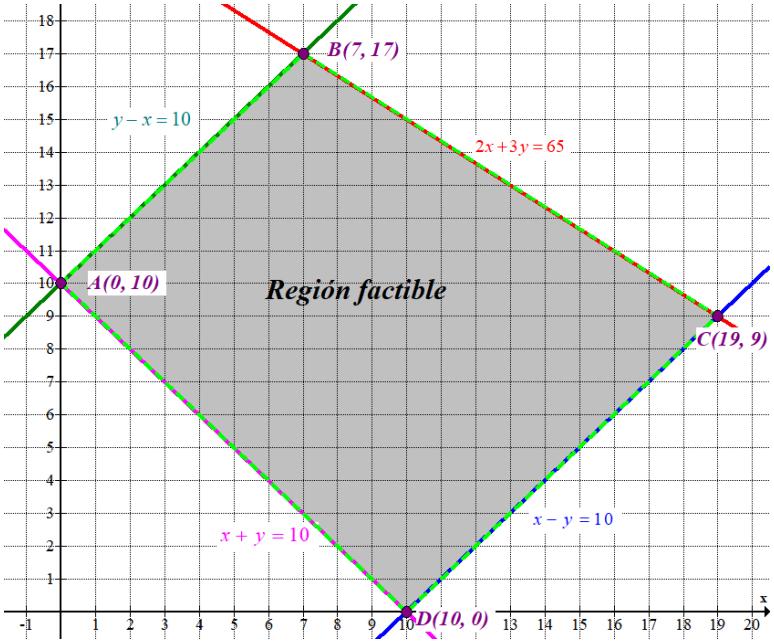
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 4x+6y\le 130 \\ x-y\le 10 \\ y-x\le 10 \\ x+y\ge 10 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las rectas verde y roja y por encima de las rectas rosa y azul. Lo comprobamos viendo si el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 40+60\le 130 \\ 10-10\le 10 \\ 10-10\le 10 \\ 10+10\ge 10 \\ 10\ge 0;\ 10\ge 0 \end{array}\right\}$$ Se cumplen todas

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos la audiencia $P(x, y) = 34000x + 72000y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 10) → $P(0,10) = 34000 \cdot 0 + 72000 \cdot 10 = 720\,000$
B(7, 17) → $P(7,17) = 34000 \cdot 7 + 72000 \cdot 17 = 1462\,000$ ¡Máximo!
C(19, 9) → $P(19,9) = 34000 \cdot 19 + 72000 \cdot 9 = 1294\,000$
D(10, 0) → $P(10,0) = 34000 \cdot 10 + 72000 \cdot 0 = 340\,000$

La máxima audiencia es de 1 462 000 personas y se consigue en el vértice $B(7, 17)$, que significa contratar 7 anuncios por radio y 17 por televisión.

EJERCICIO 3

Dada la función

$$f(x)=\frac{2x-6}{2-x}$$

a) **(0.75 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de dicha función. Calcule sus asíntotas.
b) **(0.75 puntos)** Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la existencia de extremos relativos.
c) **(1 punto)** Halle los puntos de corte con los ejes de coordenadas y represente gráficamente la función.

a) La función existe para todos los números reales menos los que anulan el denominador.
Dominio *f(x)* = $\mathbb{R}-\{2\}$.

La función es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$. Como no es continua en $x = 2$ tampoco es derivable en dicho valor.

Asíntota vertical. $x=a$.

¿$x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x-6}{2-x}=\frac{2\cdot 2-6}{2-2}=\frac{-2}{0}=\infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-6}{2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{6}{x}}{\frac{2}{x}-\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{6}{x}}{\frac{2}{x}-1}=\frac{2-\frac{6}{\infty}}{\frac{2}{\infty}-1}=\frac{2-0}{0-1}=-2$$

$y = -2$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

Al existir asíntota horizontal no existe asíntota oblicua.

b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f'(x)=\frac{2(2-x)-(-1)(2x-6)}{(2-x)^2}=\frac{4-2x+2x-6}{(2-x)^2}=\frac{-2}{(2-x)^2}$$

Esta expresión de la derivada no se anula para ningún valor. Además, siempre es negativa, por lo que la función siempre decrece.
La función decrece en $\mathbb{R}-\{2\}$. La función no tiene extremos relativos.

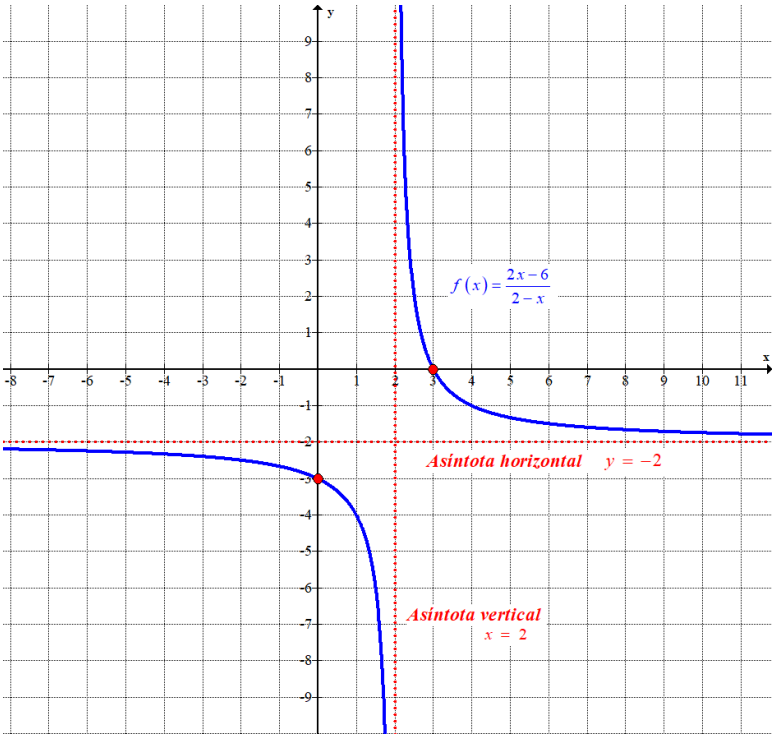
c) Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{2x-6}{2-x} \\ Eje\ OY \to x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{0-6}{2-0}=-3 \Rightarrow \boxed{A(0,-3)}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{2x-6}{2-x} \\ Eje\ OX \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2x-6}{2-x}=0 \Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3 \Rightarrow \boxed{B(3,0)}$$

Obtenemos una tabla de valores de la función y la representamos gráficamente.

x	$f(x)=\dfrac{2x-6}{2-x}$
0	−3
1	−4
1.5	−6
2.5	2
3	0
4	−1



EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x+3 & si\ x<4\\ 2x-5 & si\ x\geq 4\end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) **(0.75 puntos)** Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.
c) **(1 punto)** Represente la región del plano limitada por la gráfica de *f*, las rectas $x=3$, $x=5$ y el eje de abscisas. Calcule su área.

a) La función en el intervalo $(-\infty,4)$ tiene la expresión $f(x)=-x^2+4x+3$, es una función polinómica, por lo que es continua y derivable con derivada $f'(x)=-2x+4$.

La función en el intervalo $(4,+\infty)$ tiene la expresión $f(x)=2x-5$, es una función polinómica, por lo que es continua y derivable con derivada $f'(x)=2$.

Estudiamos la continuidad en *x = 4*.

- Existe $f(4)=2\cdot 4-5=3$
- Existe $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} -x^2+4x+3=-4^2+4\cdot 4+3=3$
- Existe $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} 2x-5=3$
- $f(4)=\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=3$

Se cumplen todas las condiciones y la función es continua en *x = 4*.
La función es continua en $\mathbb{R}$.

Estudiamos la derivabilidad en $x=4$. Para ello comprobamos si las derivadas laterales en dicho valor coinciden.

La derivada de la función es $f'(x)=\begin{cases}-2x+4 & si\ x<4\\ 2 & si\ x>4\end{cases}$

Calculamos las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-)=\lim\limits_{x\to 4^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} 2x-4=8-4=4\\ f'(4^+)=\lim\limits_{x\to 4^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} 2=2\end{array}\right\}\Rightarrow f'(4^-)=4\neq 2=f'(4^+)$$

La función no es derivable en *x = 4*.
La función es derivable en $\mathbb{R}-\{4\}$.

b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

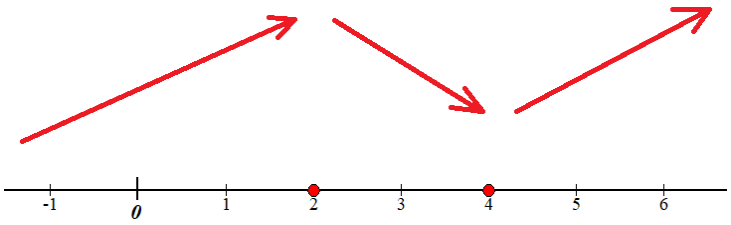
$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}-2x+4=0\to 2x=4\to x=2\in(-\infty,4)\\ 2=0\to \text{¡Imposible!}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de *x = 2* y *x = 4*.

- En el intervalo $(-\infty,2)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=-2\cdot 0+4=4>0$. La función crece en $(-\infty,2)$.

- En el intervalo $(2,4)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = -2\cdot 3 + 4 = -2 < 0$. La función decrece en $(2,4)$
- En el intervalo $(4,+\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5) = 2 > 0$. La función crece en $(4,+\infty)$

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(2,4)$ y crece en $(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 2$ y un mínimo relativo en $x = 4$.

c) Hallamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

$$f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2+4x+3=0 \to x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-1)(3)}}{2(-1)}=\dfrac{-4\pm\sqrt{28}}{-2}= \\ \qquad =\begin{cases}\dfrac{-4+\sqrt{28}}{-2}=2-\sqrt{7}\simeq -0.65 \\ \dfrac{-4-\sqrt{28}}{-2}=2+\sqrt{7}\simeq 4.6\notin(-\infty,4)\end{cases} \\ 2x-5=0\to 2x=5\to x=\dfrac{5}{2}=2.5\notin[4,+\infty)\end{cases}$$

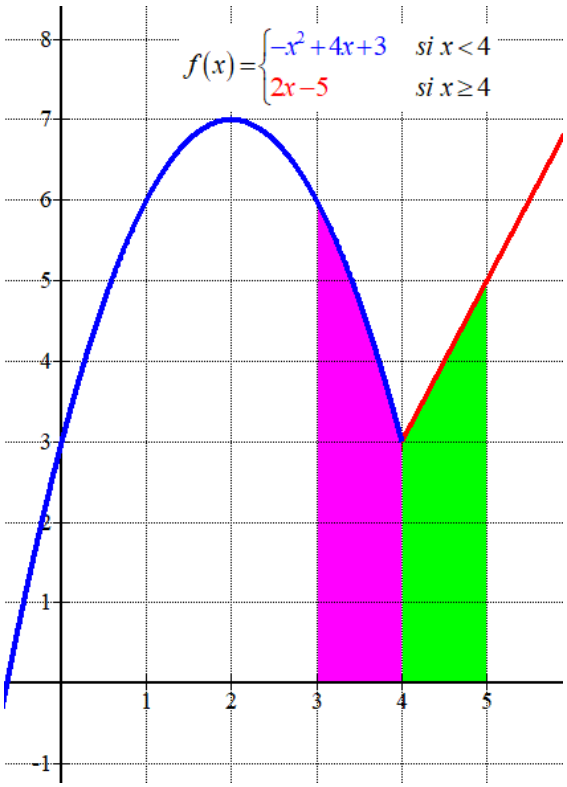
Hacemos una tabla de valores, dibujamos la gráfica de la función y la región de la cual queremos hallar el área.

$x<4$

x	$y=-x^2+4x+3$
0	3
1	6
2	7 Vértice
3	6

$x\geq 4$

x	$y=2x-5$
4	3
5	5
6	7



La función cambia de definición en $x=4$ y el área pedida es la suma de dos integrales definidas: una entre 3 y 4, la otra entre 4 y 5 de la función.

$$\int_3^4 f(x)\,dx=\int_3^4 -x^2+4x+3dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2+3x\right]_3^4=$$

$$=\left[-\frac{4^3}{3}+2\cdot 4^2+3\cdot 4\right]-\left[-\frac{3^3}{3}+2\cdot 3^2+3\cdot 3\right]=\frac{-64}{3}+32+12+9-18-9=\boxed{\frac{14}{3}}$$

$$\int_4^5 f(x)\,dx=\int_4^5 2x-5dx=\left[x^2-5x\right]_4^5=\left[5^2-5\cdot 5\right]-\left[4^2-5\cdot 4\right]=-16+20=\boxed{4}$$

$$Área=\frac{14}{3}+4=\frac{26}{3}\simeq 8.67\ u^2$$

El área de la región del plano limitada por la gráfica de *f*, las rectas $x=3$, $x=5$ y el eje de abscisas tiene un valor aproximado de 8.67 unidades cuadradas.

EJERCICIO 5

El 7% de los habitantes de una ciudad no tienen ni coche ni moto. De entre los que tienen coche el 36% tienen moto y de entre los que no tienen coche el 28% no tienen moto. Se elige al azar un habitante de esa ciudad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que solo tenga uno de los dos vehículos.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que al menos tenga uno de los dos vehículos.

c) **(0.5 puntos)** Si tiene coche, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga moto?

d) **(0.5 puntos)** ¿Son independientes los sucesos "tener coche" y "no tener moto"? ¿Son incompatibles?

Llamamos M al suceso "El habitante tiene moto" y C a "el habitante tiene coche".

Sabemos que $P\left(\overline{M}\cap\overline{C}\right)=0.07$, $P\left(M/C\right)=0.36$ y $P\left(\overline{M}/\overline{C}\right)=0.28$.

Aplicamos las leyes de Morgan.

$$P\left(\overline{M}\cap\overline{C}\right)=0.07\Rightarrow P\left(\overline{M\cup C}\right)=0.07\Rightarrow 1-P\left(M\cup C\right)=0.07\Rightarrow P\left(M\cup C\right)=0.93$$

Aplicamos el teorema de Bayes a $P\left(\overline{M}/\overline{C}\right)=0.28$.

$$P\left(\overline{M}/\overline{C}\right)=0.28\Rightarrow\frac{P\left(\overline{M}\cap\overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)}=0.28\Rightarrow\frac{0.07}{1-P\left(C\right)}=0.28\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.07=0.28-0.28P\left(C\right)\Rightarrow -0.21=-0.28P\left(C\right)\Rightarrow P\left(C\right)=\frac{0.21}{0.28}=\frac{3}{4}=\boxed{0.75}$$

Aplicamos el teorema de Bayes a $P\left(M/C\right)=0.36$.

$$P\left(M/C\right)=0.36\Rightarrow\frac{P\left(M\cap C\right)}{P\left(C\right)}=0.36\Rightarrow\frac{P\left(M\cap C\right)}{0.75}=0.36\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(M\cap C\right)=0.36\cdot 0.75=\boxed{0.27}$$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P\left(M\cup C\right)=0.93\Rightarrow P\left(M\right)+P\left(C\right)-P\left(M\cap C\right)=0.93\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(M\right)+0.75-0.27=0.93\Rightarrow P\left(M\right)=0.93-0.75+0.27=\boxed{0.45}$$

Para ordenar todos los datos obtenidos los ponemos en una tabla de contingencia

	Con coche	Sin coche	
Con moto	27		45
Sin moto		7	
	75		100

Completamos la tabla.

	Con coche	Sin coche	
Con moto	27	**18**	45
Sin moto	**48**	7	**55**
	75	**25**	100

a) De 100 personas hay 18 que tienen moto y no tienen coche, y 48 que tienen coche y no tienen moto. Hay 18 + 48 = 66 personas que solo tienen uno de los dos vehículos.

La probabilidad de que solo tenga uno de los dos vehículos tiene un valor de $\frac{66}{100}=0.66$.

b) Hay 7 personas sin ninguno de los dos vehículos, por lo que hay 100 – 7 = 93 que tienen alguno de los dos vehículos.

La probabilidad de que al menos tenga uno de los dos vehículos vale $\frac{93}{100}=0.93$.

c) De 100 personas hay 75 que tienen coche y 48 que tienen coche y no tienen moto. La probabilidad de que alguien que tiene coche no tenga moto vale $\frac{48}{75}=\frac{16}{25}=0.64$.

d) Para que sean independientes los sucesos C = "tener coche" y $\overline{M}$ = "no tener moto" debe cumplirse que $P\left(C\cap\overline{M}\right)=P(C)\cdot P\left(\overline{M}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} P\left(C\cap\overline{M}\right)=\frac{48}{100}=0.48 \\ P(C)\cdot P\left(\overline{M}\right)=0.75\cdot 0.55=0.4125 \end{array}\right\}\Rightarrow P\left(C\cap\overline{M}\right)=0.48\neq 0.4125=P(C)\cdot P\left(\overline{M}\right)$$

Como no se cumple la igualdad los sucesos "tener coche" y "no tener moto" no son independientes.

Para que sean incompatibles debe cumplirse que $P\left(C\cap\overline{M}\right)=0$ y esto no se cumple pues la probabilidad del suceso intersección la hemos calculado y vale 0.48 distinto de 0.

EJERCICIO 6

Se ha realizado un estudio a personas que están teletrabajando actualmente. De estos, el 72 % trabajan por cuenta ajena con contrato indefinido, el 11 % lo hacen por cuenta ajena con contrato temporal y el resto trabajan por cuenta propia. El 87 % de los que tienen contrato indefinido y el 86% de los que trabajan por cuenta propia piensan que el teletrabajo mejora la conciliación familiar. Además, este estudio ha revelado que el 12.51% de los trabajadores opinan que el teletrabajo no mejora la conciliación familiar. Seleccionado un teletrabajador al azar, determine la probabilidad de que:

a) **(1.5 puntos)** Opine que el teletrabajo si mejora la conciliación familiar sabiendo que tiene un contrato temporal.

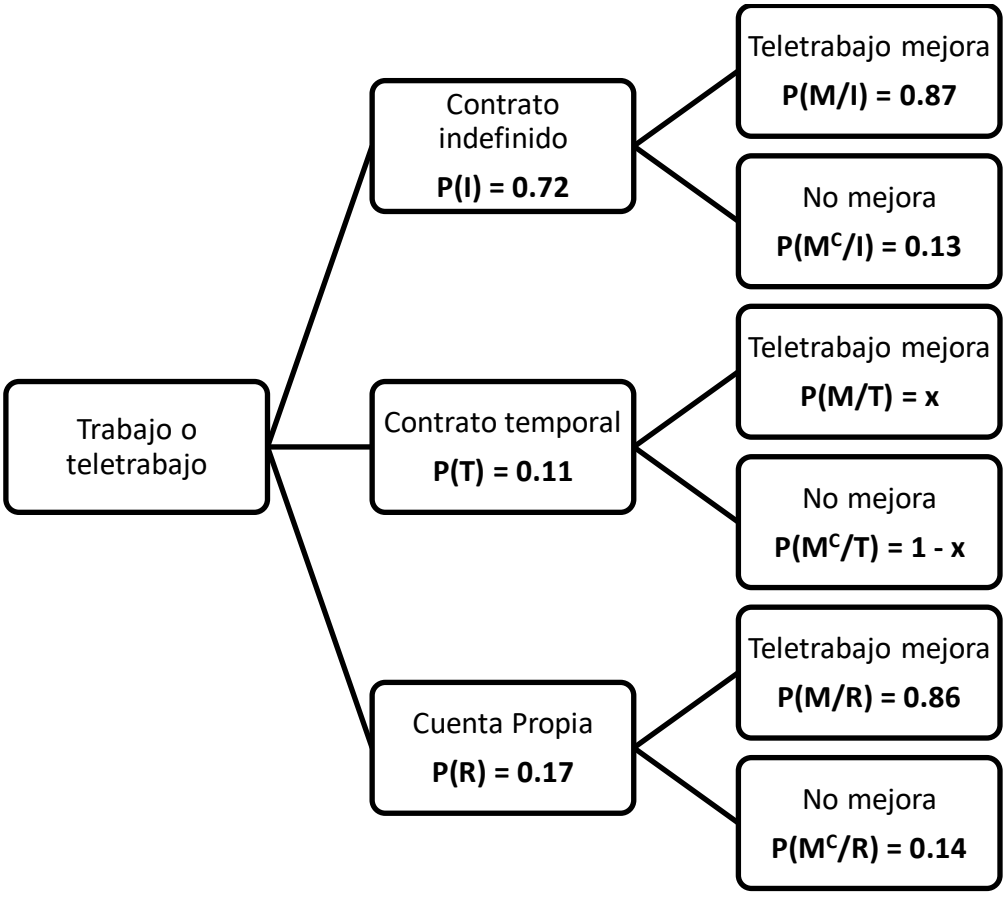
b) **(1 punto)** No esté trabajando por cuenta propia sabiendo que opina que el teletrabajo mejora la conciliación familiar.

Llamamos I al suceso "trabaja por cuenta ajena con contrato indefinido", T a "trabaja por cuenta ajena con contrato temporal" y R a "trabaja por cuenta propia". Llamamos M al suceso "piensa que el teletrabajo mejora la conciliación familiar".

Sabemos que $P(I)=0.72$, $P(T)=0.11$, $P(R)=1-0.72-0.11=0.17$.

Sabemos que $P(M/I)=0.87$, $P(M/R)=0.86$. Falta averiguar el valor de $P(M/T)$.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) El 12.51% de los trabajadores opinan que el teletrabajo no mejora la conciliación familiar, por lo que el restante 100 – 12.51 = 87.49 % piensa que mejora la conciliación familiar.
Tenemos que $P(M)=0.8749$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total y obtenemos el valor de $P(M/T)$.

$$P(M)=P(I)P(M/I)+P(T)P(M/T)+P(R)P(M/R)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.8749 = 0.72 \cdot 0.87 + 0.11 \cdot P(M/T) + 0.17 \cdot 0.86 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.8749 - 0.72 \cdot 0.87 - 0.17 \cdot 0.86 = 0.11 \cdot P(M/T) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(M/T) = \frac{0.1023}{0.11} = 0.93}$$

La probabilidad de que el trabajador elegido al azar opine que el teletrabajo si mejora la conciliación familiar sabiendo que tiene un contrato temporal es de 0.93.

b) Nos piden calcular $P(R^C/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R^C/M) = \frac{P(R^C \cap M)}{P(M)} = \frac{P(I \cap M) + P(T \cap M)}{P(M)} =$$

$$= \frac{P(I)P(M/I) + P(T)P(M/T)}{P(M)} =$$

$$= \frac{0.72 \cdot 0.87 + 0.11 \cdot 0.93}{0.8749} = \boxed{\frac{7287}{8749} \simeq 0.8329}$$

La probabilidad de que el trabajador elegido al azar no esté trabajando por cuenta propia sabiendo que opina que el teletrabajo mejora la conciliación familiar tiene un valor aproximado de 0.8329.

EJERCICIO 7

La altura de un cierto tipo de plantas de maíz sigue una distribución Normal de media 145 cm y desviación típica 22 cm.

a) **(1 punto)** ¿Qué porcentaje de plantas tiene una altura comprendida entre 135 cm y 155 cm?

b) **(0.5 puntos)** ¿Qué altura, como mínimo, debe tener una planta para estar entre el 50% de las más altas?

c) **(1 punto)** Se selecciona una muestra aleatoria de 16 plantas. Halle la probabilidad de que la altura media de las plantas de esta muestra esté comprendida entre 140 cm y 151 cm.

X = La altura de un cierto tipo de plantas de maíz (en centímetros). X = N(145, 22).

a) Nos piden calcular $P(135 \le X \le 155)$.

$$P(135 \le X \le 155) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{135-145}{22} \le Z \le \frac{155-145}{22}\right) =$$

$$= P(-0.455 \le Z \le 0.455) = P(Z \le 0.455) - P(Z \le -0.455) =$$

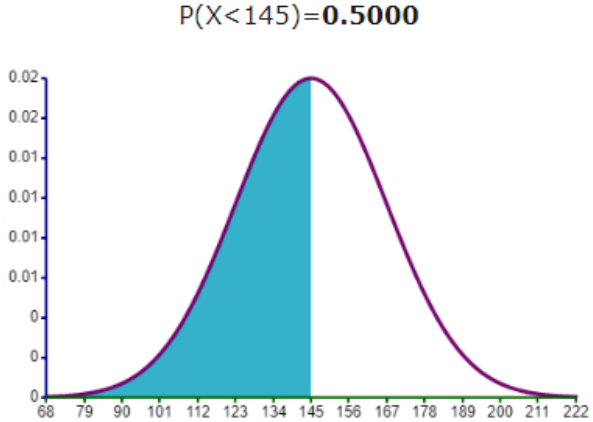
$$= P(Z \le 0.455) - P(Z \ge 0.455) = P(Z \le 0.455) - \left[1 - P(Z \le 0.455)\right] =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} = \frac{0.6736 + 0.6772}{2} - 1 + \frac{0.6736 + 0.6772}{2} = \boxed{0.3508}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7

El porcentaje de plantas que tiene una altura comprendida entre 135 cm y 155 cm es aproximadamente del 35.08%.

b) Nos piden hallar "a" tal que $P(X \le a) = 0.5$. Por la simetría de la distribución normal este valor es la media de la distribución.



La altura que debe tener una planta para estar entre el 50% de las más altas es de, al menos, 145 centímetros.

c) La distribución de las medias muestrales de tamaño 16 sigue una distribución normal con la misma media (145 cm) y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{22}{\sqrt{16}} = 5.5$ centímetros.

$\overline{X_{16}} = N(145, 5.5)$.

Nos piden calcular $P(140 \le \overline{X_{16}} \le 151)$.

$$P(140 \le \overline{X_{16}} \le 151) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{140-145}{5.5} \le Z \le \frac{151-145}{5.5}\right) =$$

$$= P(-0.91 \le Z \le 1.09) = P(Z \le 1.09) - P(Z \le -0.91) =$$

$$= P(Z \le 1.09) - P(Z \ge 0.91) = P(Z \le 1.09) - [1 - P(Z \le 0.91)] =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} = 0.8621 - 1 + 0.8186 = \boxed{0.6807}$$

La probabilidad de que la altura media de las plantas de esta muestra esté comprendida entre 140 cm y 151 cm es de 0.6807.

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de personas que viajan en tren con su mascota. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 300 viajeros, obteniéndose que 12 de ellos viajan con su mascota.

a) **(1.25 puntos)** Obtenga un intervalo, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de personas que viajan con su mascota.

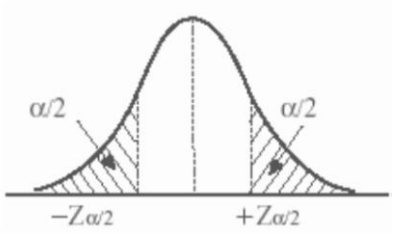
b) **(1.25 puntos)** Manteniendo la misma proporción muestral y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuántas personas que viajan en tren deberán seleccionarse aleatoriamente como mínimo para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 2%?

Tamaño de la muestra es $n = 300$ *viajeros*. $pr = \frac{12}{300} = 0.04$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.04 = 0.96$

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0{,}015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	
2,1								0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	



Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.04 \cdot 0.96}{300}} \simeq 0.0245$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(pr - Error,\ pr + Error\right) = \left(0.04 - 0.0245,\quad 0.04 + 0.0245\right) = \left(0.0155, 0.0645\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0{,}025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	
1,9							0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803

El error máximo es de 0.02, lo sustituimos en la fórmula y despejamos *n*.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.02 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.04 \cdot 0.96}{n}} \Rightarrow \frac{0.02}{1.96} = \sqrt{\frac{0.04 \cdot 0.96}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2 = \frac{0.04 \cdot 0.96}{n} \Rightarrow n = \frac{0.04 \cdot 0.96}{\left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2} \simeq 368.8$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 369 viajeros.

PevAU 2024 Extraordinaria (suplente) Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2023-2024	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones: **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\quad N=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 5 & 2 & 1\\ 7 & 4 & 0\end{pmatrix}\quad \mathrm{V}=\begin{pmatrix}5-a^2\\ a-1\\ a^2\end{pmatrix}$$, siendo a un número real.

a) **(0.75 puntos)** Halle el valor de a para que se verifique que $M^t\cdot V=\begin{pmatrix}5 & 1 & 5\end{pmatrix}^t$.

b) **(1.25 puntos)** Calcule M^{-1} y resuelva la ecuación matricial $X\cdot M-I_3=N$.

c) **(0.5 puntos)** Razone si las operaciones $2\cdot V\cdot N^t$ y $\left(N+M^t\right)\cdot V$ se pueden realizar y, en aquellos casos en que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Para un proyecto de software libre se dispone de 150 desarrolladores de Javascript y 120 de Python. Es necesario formar equipos de trabajo de dos tipos. El primer tipo estará compuesto por 2 desarrolladores de Javascript y 3 de Python, y el segundo tipo por 6 de Javascript y 4 de Python. Se requieren al menos 6 equipos del segundo tipo. Determine cuántos equipos de cada tipo se podrán formar para obtener el mayor número de equipos posible. En tal caso, ¿cuántos desarrolladores de Javascript y Python se utilizarán?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f\left(x\right)=1-\dfrac{4}{3+x}$.

a) **(0.75 puntos)** Halle el dominio de f y los puntos de corte de su gráfica con los ejes de coordenadas.
b) **(0.5 puntos)** Calcule las asíntotas de la función f.
c) **(0.75 puntos)** Obtenga los puntos donde la recta tangente a la gráfica de f tiene pendiente 1.
d) **(0.5 puntos)** Estudie la curvatura de la función f.

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x & si \quad x<2\\ x^2-2x & si \quad x\geq 2\end{cases}$$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y derivabilidad de f.
b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto limitado por las rectas $y=2x$, $x=-1$, $x=1$ y la gráfica de f. Calcule su área.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Un grupo de 15 amigas se van a pasar un fin de semana a una casa rural. Al llegar reparten las tareas: 3 irán al mercado, 2 a comprar leña y el resto se quedarán en la casa. Para realizar el reparto de las tareas se introducen 15 papeletas en una urna de las que 3 tienen la palabra "mercado", 2 la palabra "leña" y el resto la palabra "casa". Cada una coge una papeleta de forma ordenada y sin reposición. Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:
a) **(0.75 puntos)** Las dos primeras papeletas extraídas tienen escrita la palabra "mercado".
b) **(0.75 puntos)** Las dos primeras papeletas extraídas no tienen escrita la palabra "casa".
c) **(1 punto)** Si la segunda papeleta extraída tiene escrita "leña", ¿cuál es la probabilidad de que la primera también tenga escrita "leña"?

EJERCICIO 6

Una empresa ha instalado 50 alarmas de las que 30 son de tipo básico y el resto de tipo superior. Se sabe que el 80% de todas las alarmas no presentan incidencias y que de las de tipo básico un 30% presentan alguna incidencia. Se elige al azar una de estas alarmas. Calcule la probabilidad de que:
a) **(1 punto)** Sea de tipo básico y no presente incidencias.
b) **(0.5 puntos)** No presente incidencias siendo de tipo superior.
c) **(0.5 puntos)** Teniendo incidencias sea de tipo básico.
d) **(0.5 puntos)** Sea de "tipo básico y tenga incidencias" o sea de "tipo superior y no tenga incidencias".

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Una tienda decide evaluar a su empresa de transporte para determinar si está cumpliendo con sus estándares de calidad. Para ello, se analizan 400 de sus envíos y se comprueba que 370 han sido entregados a tiempo.
a) **(1.5 puntos)** Si los estándares de calidad de dicha empresa requieren que al menos el 88% de los envíos sean entregados a tiempo, estime, mediante un intervalo de confianza al 93%, si la empresa de transporte cumple con los estándares de calidad.
b) **(1 punto)** Si se mantiene la misma proporción muestral y se aumenta el nivel de confianza al 95%, ¿cuántos envíos, como mínimo, habrá que analizar para que la amplitud del intervalo de confianza sea inferior a 0.03?

EJERCICIO 8

a) **(1.25 puntos)** El tiempo que un carpintero necesita para fabricar una mesa sigue una distribución Normal de media 60 minutos y desviación típica de 30 minutos. Si en un mes ese carpintero ha fabricado 100 mesas, calcule la probabilidad de que el tiempo medio de fabricación de las mesas de esa muestra sea superior a 54 minutos.
b) **(1.25 puntos)** El tiempo que un carpintero necesita para fabricar una puerta sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica de 20 minutos. En un mes ese carpintero ha fabricado 25 puertas, obteniendo un tiempo medio de fabricación de 40 minutos. Halle un intervalo de confianza para el tiempo medio de fabricación de una puerta con un nivel de confianza del 97%. Determine el error máximo cometido al realizar la estimación.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$M=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\quad N=\begin{pmatrix}3&2&2\\5&2&1\\7&4&0\end{pmatrix}\quad \mathrm{V}=\begin{pmatrix}5-a^2\\a-1\\a^2\end{pmatrix}$$, siendo *a* un número real.

a) **(0.75 puntos)** Halle el valor de *a* para que se verifique que $M^t\cdot V=\begin{pmatrix}5&1&5\end{pmatrix}^t$.

b) **(1.25 puntos)** Calcule M^{-1} y resuelva la ecuación matricial $X\cdot M-I_3=N$.

c) **(0.5 puntos)** Razone si las operaciones $2\cdot V\cdot N^t$ y $\left(N+M^t\right)\cdot V$ se pueden realizar y, en aquellos casos en que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante.

a) Resolvemos el sistema matricial.

$$M^t\cdot V=\begin{pmatrix}5&1&5\end{pmatrix}^t\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5-a^2\\a-1\\a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}5-\cancel{a^2}+2a-2+\cancel{a^2}\\a-1+a^2\\5-\cancel{a^2}+\cancel{a^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}3+2a\\a^2+a-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3+2a=5\\a^2+a-1=1\\5=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a=2\rightarrow\boxed{a=1}\\a^2+a-2=0\end{cases}\Rightarrow 1^2+1-2=0\Rightarrow ¡OK!$$

El valor de *a* que cumple lo pedido es $a=1$.

b) Comprobamos que la matriz M tiene inversa y la calculamos.

$$|M|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=1+0+2-1-0-0=2\neq 0$$

$$M^{-1}=\frac{Adj\left(M^T\right)}{|M|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial y obtenemos su expresión.

$$X\cdot M-I_3=N\Rightarrow X\cdot M=N+I_3\Rightarrow X=\left(N+I_3\right)M^{-1}$$

$$X=\left[\begin{pmatrix}3&2&2\\5&2&1\\7&4&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&2&2\\5&3&1\\7&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4-4+2&4+0-2&-4+4+2\\5-6+1&5+0-1&-5+6+1\\7-8+1&7+0-1&-7+8+1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&2&2\\0&4&2\\0&6&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}$$

c) Comprobamos la viabilidad de las operaciones indicadas. M y N son de dimensión 3×3 y V es de dimensión 3×1.

$$2\cdot V\ \cdot\ N^t$$

$$3\times\boxed{1\cdot3}\times3$$

No es posible realizar el producto de matrices al no coincidir el número de columnas de V con el de filas de N^t.

$$\left(N+M^t\right)\qquad\cdot\ V$$

$$3\times3+3\times3\rightarrow3\times\boxed{3\cdot3}\times1\rightarrow3\times1$$

Es posible realizar la suma pues N y M^t tienen la misma dimensión obteniéndose una matriz 3×3. El producto también es posible al coincidir el número de columnas de $\left(N+M^t\right)$ con el número de filas de V.

Es posible calcular $\left(N+M^t\right)\cdot V$ obteniéndose una matriz de dimensión 3×1 y no es posible calcular $2\cdot V\cdot N^t$.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Para un proyecto de software libre se dispone de 150 desarrolladores de Javascript y 120 de Python. Es necesario formar equipos de trabajo de dos tipos. El primer tipo estará compuesto por 2 desarrolladores de Javascript y 3 de Python, y el segundo tipo por 6 de Javascript y 4 de Python. Se requieren al menos 6 equipos del segundo tipo. Determine cuántos equipos de cada tipo se podrán formar para obtener el mayor número de equipos posible. En tal caso, ¿cuántos desarrolladores de Javascript y Python se utilizarán?

Llamemos x = "número de equipos del primer tipo", y = "número de equipos del segundo tipo". Realizamos una tabla para obtener las restricciones del problema.

	Desarrolladores Javascript	Desarrolladores Python
Nº equipos tipo 1 (x)	2x	3x
Nº equipos tipo 2 (y)	6y	4y
	$2x+6y$	$3x+4y$

Deseamos maximizar el número de equipos que viene expresado como $N(x,y)=x+y$.

Las restricciones son:

"Se dispone de 150 desarrolladores de Javascript y 120 de Python" → $2x+6y\le 150;\ 3x+4y\le 120$.

"Se requieren al menos 6 equipos del segundo tipo" → $y\ge 6$

"Las cantidades deben ser positivas" → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+6y\le 150 \\ 3x+4y\le 120 \\ y\ge 6 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y\le 75 \\ 3x+4y\le 120 \\ y\ge 6 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$x+3y=75$

x	$y=\frac{75-x}{3}$
0	25
12	21
75	0

$3x+4y=120$

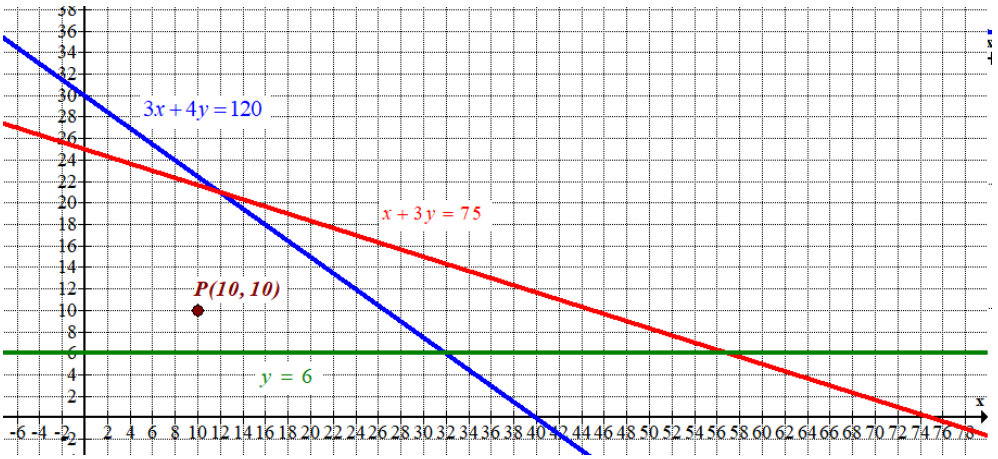
x	$y=\frac{120-3x}{4}$
0	30
12	21
40	0

$y=6$

x	$y=6$
0	6
10	6
32	6

$x\ge 0;\ y\ge 0$

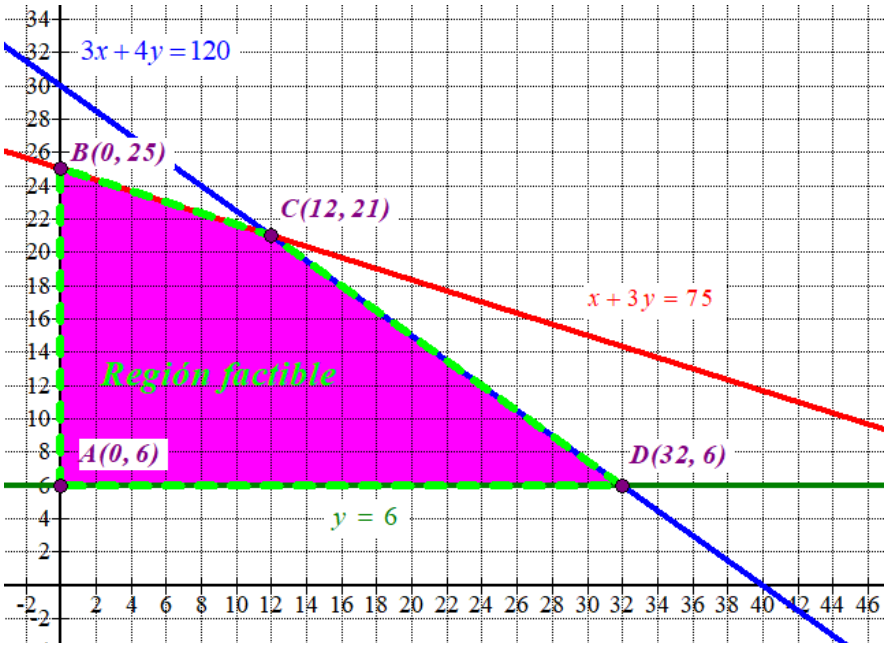
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+3y\le 75 \\ 3x+4y\le 120 \\ y\ge 6 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las dos rectas oblicuas y por encima de la recta horizontal. Lo comprobamos viendo si el punto $P(10,10)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10+30\le 75 \\ 30+40\le 120 \\ 10\ge 6 \\ 10\ge 0;\ 10\ge 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Las coordenadas del vértice C se obtienen de resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} 3x+4y=120 \\ x+3y=75 \end{array}\right\}$.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+4y=120 \\ x=75-3y \end{array}\right\} \Rightarrow 225-9y+4y=120 \Rightarrow -5y=-125 \Rightarrow \boxed{y=21} \Rightarrow \boxed{x=75-63=12}$$

Valoramos el número de equipos $N(x,y)=x+y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

A(0, 6) → $N(0,6)=0+6=6$
B(0, 25) → $N(0,25)=0+25=25$
C(12, 21) → $N(12,21)=12+21=33$
D(32, 6) → $N(32,6)=32+6=38$ ¡Máximo!

El mayor número de equipos que se puede formar cumpliendo con las restricciones es de 38, siendo 32 equipos del primer tipo y 6 del segundo.
Utilizamos $2\cdot 32+6\cdot 6=100$ desarrolladores de Javascript y $3\cdot 32+4\cdot 6=120$ desarrolladores de Python.

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=1-\dfrac{4}{3+x}$.

a) **(0.75 puntos)** Halle el dominio de f y los puntos de corte de su gráfica con los ejes de coordenadas.
b) **(0.5 puntos)** Calcule las asíntotas de la función f.
c) **(0.75 puntos)** Obtenga los puntos donde la recta tangente a la gráfica de f tiene pendiente 1.
d) **(0.5 puntos)** Estudie la curvatura de la función f.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$Dominio = \mathbb{R} - \{-3\}$$

Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes de coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=1-\dfrac{4}{3+x} \\ Eje\,OY \rightarrow x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=1-\frac{4}{3+0}=1-\frac{4}{3}=\frac{-1}{3} \Rightarrow A\left(0,\frac{-1}{3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=1-\dfrac{4}{3+x} \\ Eje\,OX \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-\frac{4}{3+x}=0 \Rightarrow 1=\frac{4}{3+x} \Rightarrow 3+x=4 \Rightarrow x=1 \Rightarrow B(1,0)$$

Los puntos de corte con los ejes de coordenadas son $A\left(0,\dfrac{-1}{3}\right)$ y $B(1,0)$.

b) **Asíntota vertical.** $x=a$

¿$x=-3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3} 1-\frac{4}{3+x}=1-\frac{4}{0}=\infty$$

$x=-3$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty} 1-\frac{4}{3+x}=1-\frac{4}{\infty}=1-0=1$$

La gráfica de la función tiene una asíntota horizontal: $y=1$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

c) Para que la recta tangente a la gráfica de f tenga pendiente 1 la derivada de la función debe valer 1 → $f'(x)=1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=1-\dfrac{4}{3+x} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{-4}{(3+x)^2}=\dfrac{4}{(3+x)^2} \\ f'(x)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{(3+x)^2}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4=(3+x)^2 \Rightarrow 3+x=\sqrt{4}=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} 3+x=-2 \rightarrow \boxed{x=-5} \\ 3+x=2 \rightarrow \boxed{x=-1} \end{cases}$$

Como $f(-1)=1-\dfrac{4}{3-1}=-1$ uno de los puntos que cumple lo pedido es $P(-1,-1)$.

Como $f(-5)=1-\dfrac{4}{3-5}=3$ el otro punto tiene coordenadas $Q(-5,3)$.

d) Averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$f'(x)=\frac{4}{(3+x)^2}=4(3+x)^{-2} \Rightarrow f''(x)=-8(3+x)^{-3}=\frac{-8}{(3+x)^3}$$

Esta expresión de la derivada segunda nunca se anula.
Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x=-3$ (discontinuidad de la función).

- En el intervalo $(-\infty,-3)$ tomamos $x=-4$ y la derivada segunda vale
  $f''(-4)=\dfrac{-8}{(3-4)^3}=8>0$. La función es convexa (∪) en el intervalo $(-\infty,-3)$.
- En el intervalo $(-3,+\infty)$ tomamos $x=-1$ y la derivada segunda vale
  $f''(-1)=\dfrac{-8}{(3-1)^3}=-1<0$. La función es cóncava (∩) en el intervalo $(-3,+\infty)$.

La función es convexa (∪) en el intervalo $(-\infty,-3)$ y cóncava (∩) en el intervalo $(-3,+\infty)$.

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x & si \quad x<2\\ x^2-2x & si \quad x\geq 2\end{cases}$$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y derivabilidad de f.

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto limitado por las rectas $y=2x$, $x=-1$, $x=1$ y la gráfica de f. Calcule su área.

a) En el intervalo $(-\infty,2)$ la función tiene una expresión polinómica $f(x)=-x^2+2x$ que es continua. En el intervalo $(2,+\infty)$ la función tiene una expresión polinómica $f(x)=x^2-2x$, por lo que es continua. Estudiamos la continuidad en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2^2-2\cdot 2=0\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} -x^2+2x=0\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} x^2-2x=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=0$$

La función es continua en $x=2$ y por tanto continua en $\mathbb{R}$.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$ siendo su derivada $f'(x)=\begin{cases}-2x+2 & si \quad x<2\\ 2x-2 & si \quad x>2\end{cases}$.

Estudiamos la derivabilidad en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} -2x+2=-4+2=-2\\ f'(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-2=4-2=2\end{array}\right\}\Rightarrow f'(2^-)=-2\neq 2=f'(2^+)$$

La función no es derivable en $x=2$. La función es derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$.

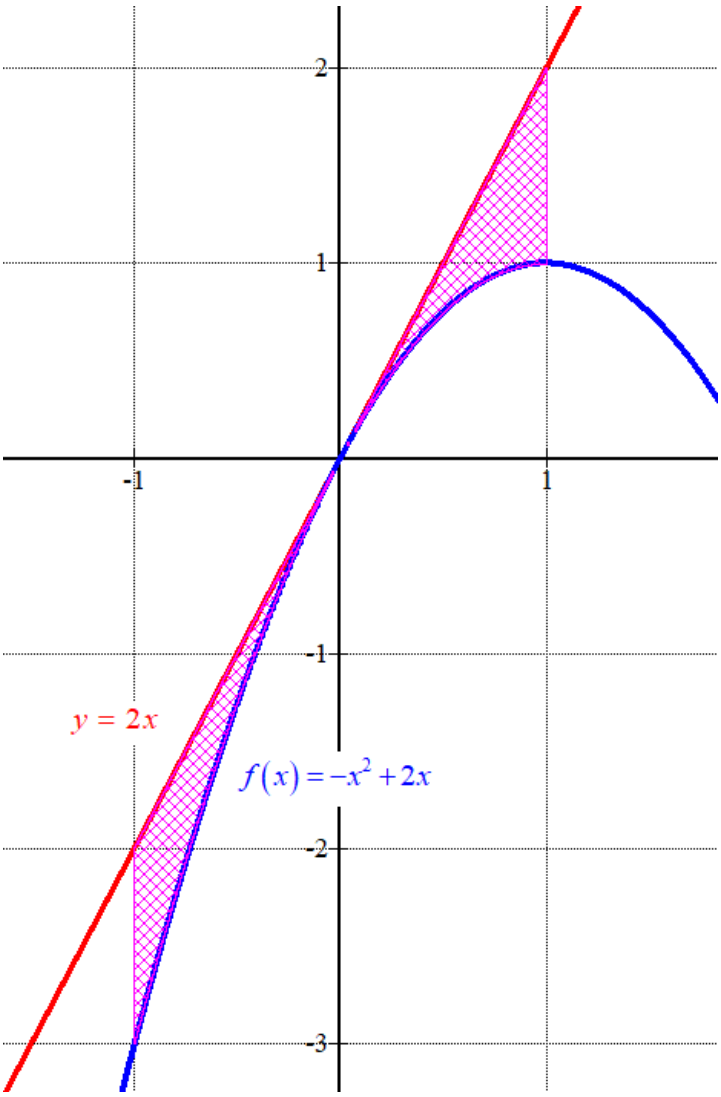
La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$.

b) Entre –1 y 1 la función tiene la expresión $f(x)=-x^2+2x$.

Dibujamos la gráfica de la función, las rectas indicadas en el ejercicio y la región de la cual queremos hallar el área.

x	$f(x)=-x^2+2x$
–1	–3
0	0
1	1

x	$y=2x$
–1	–2
0	0
1	2



El área pedida es el valor de la integral definida de la diferencia entre la recta y la función de –1 a 1.

$$Área = \int_{-1}^{1} 2x - f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 2x - \left(-x^2 + 2x\right)dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3} \simeq 0.6666 u^2$$

EJERCICIO 5

Un grupo de 15 amigas se van a pasar un fin de semana a una casa rural. Al llegar reparten las tareas: 3 irán al mercado, 2 a comprar leña y el resto se quedarán en la casa. Para realizar el reparto de las tareas se introducen 15 papeletas en una urna de las que 3 tienen la palabra "mercado", 2 la palabra "leña" y el resto la palabra "casa". Cada una coge una papeleta de forma ordenada y sin reposición. Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

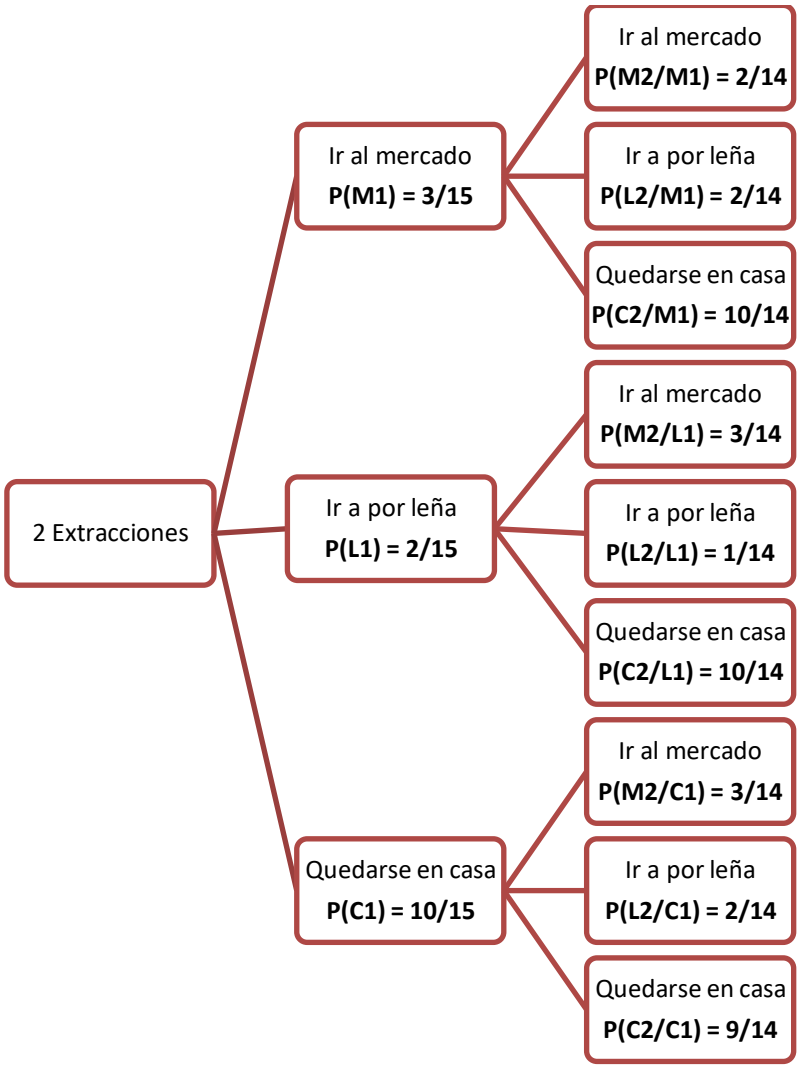
a) **(0.75 puntos)** Las dos primeras papeletas extraídas tienen escrita la palabra "mercado".

b) **(0.75 puntos)** Las dos primeras papeletas extraídas no tienen escrita la palabra "casa".

c) **(1 punto)** Si la segunda papeleta extraída tiene escrita "leña", ¿cuál es la probabilidad de que la primera también tenga escrita "leña"?

Llamamos M1 y M2 a los sucesos "Sacar la papeleta ir al mercado en 1ª o 2ª extracción", L1 y L2 a "sacar la papeleta ir a por leña en 1ª o 2ª extracción" y C1 y C2 a "sacar la papeleta quedarse en casa en 1ª o 2ª extracción".

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Es el suceso que aparece reflejado en la rama superior.

$$P(M1 \cap M2) = P(M1)\,P(M2/M1) = \frac{3}{15}\cdot\frac{2}{14} = \boxed{\frac{1}{35} \simeq 0.0286}$$

b) Este suceso aparece en cuatro de las ramas del diagrama de árbol.

$$P\left(\overline{C1}\cap\overline{C2}\right)=P(M1)P(M2/M1)+P(M1)P(L2/M1)+P(L1)P(M2/L1)+$$

$$+P(L1)P(L2/L1)=\frac{3}{15}\cdot\frac{2}{14}+\frac{3}{15}\cdot\frac{2}{14}+\frac{2}{15}\cdot\frac{3}{14}+\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{14}=\frac{20}{15\cdot 14}=\boxed{\frac{2}{21}\simeq 0.095}$$

c) Nos piden calcular $P(L1/L2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes

$$P(L1/L2)=\frac{P(L1\cap L2)}{P(L2)}=\frac{P(L1)P(L2/L1)}{P(M1)(L2/M1)+P(L1)(L2/L1)+P(C1)(L2/C1)}=$$

$$=\frac{\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{14}}{\frac{3}{15}\cdot\frac{2}{14}+\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{14}+\frac{10}{15}\cdot\frac{2}{14}}=\frac{2}{6+2+20}=\boxed{\frac{1}{14}\simeq 0.0714}$$

EJERCICIO 6

Una empresa ha instalado 50 alarmas de las que 30 son de tipo básico y el resto de tipo superior. Se sabe que el 80% de todas las alarmas no presentan incidencias y que de las de tipo básico un 30% presentan alguna incidencia. Se elige al azar una de estas alarmas. Calcule la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Sea de tipo básico y no presente incidencias.

b) **(0.5 puntos)** No presente incidencias siendo de tipo superior.

c) **(0.5 puntos)** Teniendo incidencias sea de tipo básico.

d) **(0.5 puntos)** Sea de "tipo básico y tenga incidencias" o sea de "tipo superior y no tenga incidencias".

Se sabe que el 80% de todas las alarmas (50) no presentan incidencias, por lo que $0.80 \cdot 50 = 40$ alarmas no presentan incidencias y que de las de tipo básico (30) un 30% presentan alguna incidencia, por lo que $0.30 \cdot 30 = 9$ alarmas de tipo básico presentan incidencias.
Realizamos una tabla de contingencia para obtener todos los datos del problema.

	Con incidencias	Sin incidencias	
Alarmas tipo básico	**9**		**30**
Alarmas tipo superior			
Totales		**40**	**50**

Completamos la tabla.

	Con incidencias	Sin incidencias	
Alarmas tipo básico	**9**	**21**	**30**
Alarmas tipo superior	**1**	**19**	**20**
Totales	**10**	**40**	**50**

a) Hay 50 alarmas, de las cuales 21 son de tipo básico sin incidencias. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al elegir al azar una alarma sea de tipo básico y no presente incidencias es $\frac{21}{50} = 0.42$.

b) Hay 20 alarmas de tipo superior. De las cuales 19 no presentan incidencias. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que al elegir al azar una alarma de entre las de tipo superior esta no presente incidencias es $\frac{19}{20} = 0.95$.

c) Hay 10 alarmas que presentan incidencias, de las cuales 9 son de tipo básico. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que al elegir al azar una alarma de entre las que presentan incidencias esta sea de tipo básico es $\frac{9}{10} = 0.9$.

d) De las 50 alarmas hay 9 que son de "tipo básico y tienen incidencias" y 19 que son de "tipo superior y no tienen incidencias". Aplicando la regla de Laplace la probabilidad pedida vale $\frac{9+19}{50} = 0.56$.

EJERCICIO 7

Una tienda decide evaluar a su empresa de transporte para determinar si está cumpliendo con sus estándares de calidad. Para ello, se analizan 400 de sus envíos y se comprueba que 370 han sido entregados a tiempo.

a) **(1.5 puntos)** Si los estándares de calidad de dicha empresa requieren que al menos el 88% de los envíos sean entregados a tiempo, estime, mediante un intervalo de confianza al 93%, si la empresa de transporte cumple con los estándares de calidad.

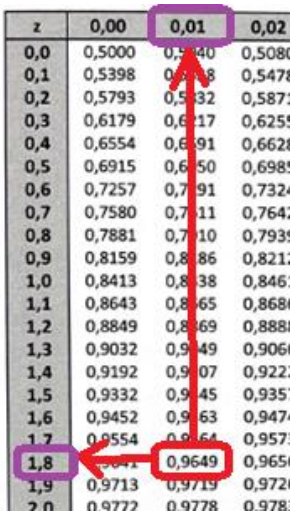
b) **(1 punto)** Si se mantiene la misma proporción muestral y se aumenta el nivel de confianza al 95%, ¿cuántos envíos, como mínimo, habrá que analizar para que la amplitud del intervalo de confianza sea inferior a 0.03?

Tamaño de la muestra $n = 400$ envíos.

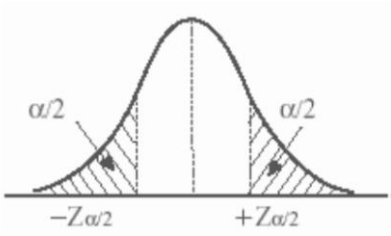
La proporción de envíos que llegan a tiempo es $pr = \frac{370}{400} = 0.925$ y la proporción de los que no llegan a tiempo es $qr = 1 - pr = 1 - 0.925 = 0.075$.

a) Con un nivel de confianza del 93 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}93 \rightarrow \propto = 0{,}07 \rightarrow \propto/2 = 0{,}035 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}965 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}81}$$



z	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8212
1,0	0,8413	0,8438	0,8461
1,1	0,8643	0,8665	0,8686
1,2	0,8849	0,8869	0,8888
1,3	0,9032	0,9049	0,9066
1,4	0,9192	0,9207	0,9222
1,5	0,9332	0,9345	0,9357
1,6	0,9452	0,9463	0,9474
1,7	0,9554	0,9564	0,9573
1,8	[illegible]	0,9649	0,9656
1,9	0,9713	0,9719	0,9726
2,0	0,9772	0,9778	0,9783



Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.81 \cdot \sqrt{\frac{0.925 \cdot 0.075}{400}} \simeq 0.02384$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

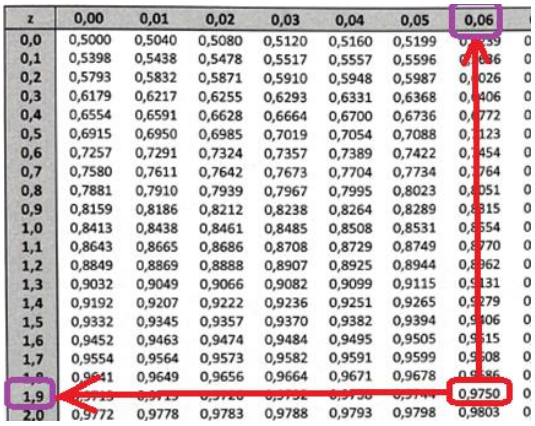
$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.925 - 0.02384,\quad 0.925 + 0.02384) = (0.90116,\ 0.94884)$$

Con un nivel de confianza del 93% se puede decir que el porcentaje de envíos que llegan a tiempo está entre el 90.116% y el 94.884%.

Los estándares de calidad de dicha empresa requieren que al menos el 88% de los envíos sean entregados a tiempo. Se cumplen los estándares de calidad pues el porcentaje de envíos que llegan a tiempo es superior al 88%.

b) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0{,}025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	
1,9							0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803

Para que la amplitud del intervalo de confianza sea inferior a 0.03 el error máximo debe ser la mitad de 0.03, lo sustituimos en la fórmula del error y despejamos n.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.015 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.925 \cdot 0.075}{n}} \Rightarrow \frac{0.015}{1.96} = \sqrt{\frac{0.925 \cdot 0.075}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.015}{1.96}\right)^2 = \frac{0.925 \cdot 0.075}{n} \Rightarrow n = \frac{0.925 \cdot 0.075}{\left(\frac{0.015}{1.96}\right)^2} \simeq 1184.4$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 1185 envíos.

EJERCICIO 8

a) **(1.25 puntos)** El tiempo que un carpintero necesita para fabricar una mesa sigue una distribución Normal de media 60 minutos y desviación típica de 30 minutos. Si en un mes ese carpintero ha fabricado 100 mesas, calcule la probabilidad de que el tiempo medio de fabricación de las mesas de esa muestra sea superior a 54 minutos.

b) **(1.25 puntos)** El tiempo que un carpintero necesita para fabricar una puerta sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica de 20 minutos. En un mes ese carpintero ha fabricado 25 puertas, obteniendo un tiempo medio de fabricación de 40 minutos. Halle un intervalo de confianza para el tiempo medio de fabricación de una puerta con un nivel de confianza del 97%. Determine el error máximo cometido al realizar la estimación.

a) X = El tiempo en minutos que un carpintero necesita para fabricar una mesa.

X = N(60, 30).

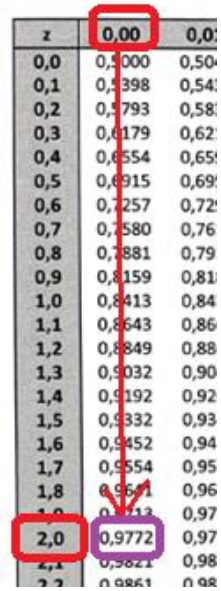
La media muestral de tamaño n sigue una distribución normal que tiene la misma media, pero su desviación típica es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\overline{X_{100}} = N\left(60, \frac{30}{\sqrt{100}}\right) \Rightarrow \overline{X_{100}} = N\left(60, 3\right)$$

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{100}} \geq 54\right)$.

$$P\left(\overline{X_{100}} \geq 54\right) = \left\{\begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \frac{X - 60}{3} \end{matrix}\right\} = P\left(Z \geq \frac{54-60}{3}\right) =$$

$$= P\left(Z \geq -2\right) = P\left(Z \leq 2\right) = \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix}\right\} = \boxed{0.9772}$$



z	0,00	0,0
0,0	0,5000	0,50
0,1	0,5398	0,54
0,2	0,5793	0,58
0,3	0,6179	0,62
0,4	0,6554	0,65
0,5	0,6915	0,69
0,6	0,7257	0,72
0,7	0,7580	0,76
0,8	0,7881	0,79
0,9	0,8159	0,81
1,0	0,8413	0,84
1,1	0,8643	0,86
1,2	0,8849	0,88
1,3	0,9032	0,90
1,4	0,9192	0,92
1,5	0,9332	0,93
1,6	0,9452	0,94
1,7	0,9554	0,95
1,8	0,9641	0,96
1,9	0,9713	0,97
2,0	0,9772	0,97
2,1	0,9821	0,98
2,2	0,9861	0,98

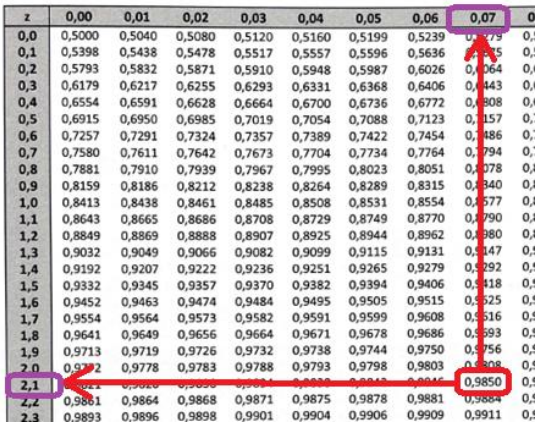
b) X = El tiempo en minutos que un carpintero necesita para fabricar una puerta.

X = N(μ, 20).

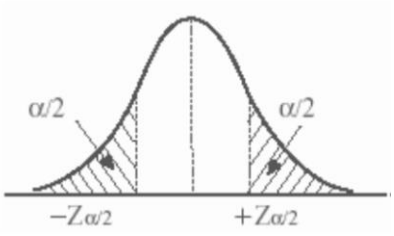
El tamaño de la muestra es n = 25 puertas. La media muestral es $\bar{x} = 40$ minutos.

Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9



Determinamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}} = 8.68 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(40 - 8.68,\ 40 + 8.68\right) = \left(41.32,\ 48.68\right)$$

Según el intervalo obtenido, se puede admitir con una confianza del 97% que el tiempo medio de fabricación de una puerta está entre 41.32 y 48.68 minutos.
El error máximo cometido es de 8.68 minutos.

PevAU 2024 Extraordinaria (reserva) Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2023-2024	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones: **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

a) **(1 punto)** Determine las matrices X e Y que satisfacen simultáneamente las ecuaciones

$$2\cdot X-Y=4\cdot A \; X+Y=B$$

b) **(0.75 puntos)** Calcule la matriz C^{2024}.

c) **(0.75 puntos)** Si D es una matriz de dimensión 2×3, razone si las siguientes operaciones se pueden realizar y, en aquellos casos en los que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante:

$$A^t\cdot B+D\cdot D^t \qquad D\cdot B^t+A \qquad D^t\cdot A^t+D.$$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un joyero desea fabricar dos tipos de pulseras, A y B, y para ello dispone de 50 g de oro, 40 g de platino y 25 g de plata. Para fabricar las del tipo A necesita 1 g de oro y 2 g de platino, mientras que para las del tipo B requiere 2 g de oro, 1 g de platino y 1 g de plata. Cada pulsera del tipo A se vende por 150 € y cada una del tipo B por 200 €. Si se vende toda la producción, ¿cuántas pulseras de cada tipo debe fabricar para maximizar los ingresos y a cuánto ascienden éstos? ¿Qué cantidad de cada metal sobrará cuando se fabrique el número de joyas que proporciona el máximo beneficio?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}x^2+ax-1 & si\ x\le 1\\ \dfrac{b}{x} & si\ 1<x\le 3\\ \dfrac{x-1}{3} & si\ x>3\end{cases}$ con a y b números reales.

a) **(1.5 puntos)** Determine los valores de a y b para que f sea continua. Para dichos valores, estudie la derivabilidad de f.

b) **(1 punto)** Para $a = 5$ y $b = 2$, represente el recinto limitado por la gráfica de f, las rectas $x = 2$, $x = 4$ y el eje OX. Calcule su área.

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x + 1 & si \quad x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad, derivabilidad y monotonía de f. Represente gráficamente dicha función.

b) **(1 punto)** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f, las rectas $x = 0$, $x = 4$ y el eje OX.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

En cierta localidad el 30% de los habitantes profesan la religión A y el 50% profesan otras religiones diferentes de A. De los que profesan la religión A el 40% son mujeres. De las mujeres el 25% profesa la religión A. Se elige un habitante al azar de esa localidad. Calcule la probabilidad de que:

a) **(0.5 puntos)** No profese ninguna religión.

b) **(1 punto)** Sea hombre.

c) **(1 punto)** Solo verifique uno de los siguientes sucesos: "profesa la religión A"; "es mujer".

EJERCICIO 6

En una empresa, el 30% de los empleados ejercen de economistas y el 25% ejercen de abogados. El 75% de los economistas y el 60% de los abogados ocupan puestos directivos, mientras que, de los empleados que no ejercen ni de economistas ni de abogados, el 15% ocupa un puesto directivo.

Seleccionado un empleado al azar de esta empresa, calcule la probabilidad de que:

a) **(1.5 puntos)** No ocupe un puesto directivo.

b) **(1 punto)** Ejerza de economista sabiendo que ocupa un puesto directivo.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

En un invernadero de Almería se realiza un estudio sobre dos de sus productos, melones y sandías.

a) **(1 punto)** De los 4000 melones recolectados en un determinado periodo, 1420 son de la variedad A, 980 de la B, 720 de la C y el resto de la D. Si se selecciona una muestra de 200 de estos melones, ¿cuál debe ser la composición que debe tener dicha muestra si se realiza mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional?

b) El peso de las sandías sigue una distribución Normal de media 3.85 kg y desviación típica 1.32 kg. Se selecciona, de forma aleatoria, una muestra de 121 sandías.

b.1) **(0.5 puntos)** Indique la distribución que sigue la media muestral del peso de las sandías.

b.2) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el peso medio de la muestra esté comprendido entre 3.6 kg y 4 kg.

EJERCICIO 8

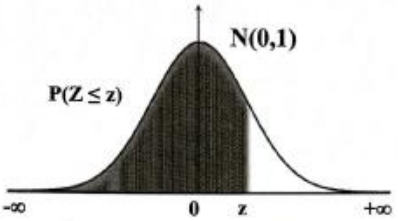
Una empresa farmacéutica desea revisar la efectividad de un nuevo medicamento antipirético (reduce la fiebre). Se conoce que el tiempo en el que este medicamento comienza a hacer efecto sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica de 5 minutos.

Para estimar la media poblacional, se ha seleccionado una muestra aleatoria de 10 individuos con fiebre y tras administrarse el medicamento, se han anotado los tiempos en los que comienza a remitir. Los tiempos obtenidos, en minutos, fueron: 20, 25, 30, 35, 35, 20, 20, 25, 30, 30

a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo, con un nivel de confianza del 98%, para estimar el tiempo medio de respuesta de este medicamento. Según el intervalo obtenido, razone si puede admitirse que el tiempo medio en el que el medicamento comienza a hacer efecto es superior a 35 minutos.

b) **(1 punto)** Un estudio posterior ha revelado que el tiempo de respuesta a este medicamento sigue una ley Normal de media 27.2 minutos y desviación típica de 5 minutos. Determine la probabilidad de que a un paciente con fiebre que ha ingerido el medicamento no le haya hecho efecto hasta pasados 20 minutos.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

a) **(1 punto)** Determine las matrices X e Y que satisfacen simultáneamente las ecuaciones

$$2\cdot X-Y=4\cdot A \; X+Y=B$$

b) **(0.75 puntos)** Calcule la matriz C^{2024}.

c) **(0.75 puntos)** Si D es una matriz de dimensión 2×3, razone si las siguientes operaciones se pueden realizar y, en aquellos casos en los que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante:

$$A^t\cdot B+D\cdot D^t \qquad D\cdot B^t+A \qquad D^t\cdot A^t+D.$$

a) Resolvemos el sistema matricial.

$$\left.\begin{matrix}2\cdot X-Y=4\cdot A\\ X+Y=B\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2\cdot X-Y=4\cdot A\\ Y=B-X\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2X-B+X=4A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3X=4A+B\Rightarrow X=\frac{1}{3}(4A+B)=\frac{1}{3}\left(4\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 6\\ 6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Las matrices solución son $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

b) Calculamos las primeras potencias de la matriz C en busca de alguna regularidad.

$$C^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1+1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$C^3=C^2\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2+1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$C^4=C^3\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3+1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

Se observa que el único elemento que cambia es el situado en la segunda fila y primera columna, obteniéndose un valor igual a la potencia calculada. Por ello sabemos que:

$$C^{2024}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2024 & 1\end{pmatrix}$$

c) Comprobamos la viabilidad de las operaciones indicadas. A, B y C son de dimensión 2×2 y D es de dimensión 2×3.

$$\left.\begin{array}{l} A^t \cdot B + \\ 2\times\boxed{2\cdot 2}\times 2\to 2\times 2 \\ D \cdot D^t \\ 2\times\boxed{3\cdot 3}\times 2\to 2\times 2 \end{array}\right\} \Rightarrow A^t\cdot B + D\cdot D^t \text{ es posible. Es de dimensión } 2\times 2$$

$$\begin{array}{l} D \cdot B^t \\ 2\times\boxed{3\cdot 2}\times 2 \end{array}$$ No es posible realizar el producto y por tanto la operación $D\cdot B^t + A$ no es posible.

$$\left.\begin{array}{l} D^t \cdot A^t \\ 3\times\boxed{2\cdot 2}\times 2\to 3\times 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} D^t\cdot A^t + D \\ 3\times 2 + 2\times 3 \end{array}$$ Es posible realizar el producto, pero no la suma pues no se pueden sumar matrices de distinta dimensión. La operación $D^t\cdot A^t + D$ no es posible.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un joyero desea fabricar dos tipos de pulseras, A y B, y para ello dispone de 50 g de oro, 40 g de platino y 25 g de plata. Para fabricar las del tipo A necesita 1 g de oro y 2 g de platino, mientras que para las del tipo B requiere 2 g de oro, 1 g de platino y 1 g de plata. Cada pulsera del tipo A se vende por 150 € y cada una del tipo B por 200 €. Si se vende toda la producción, ¿cuántas pulseras de cada tipo debe fabricar para maximizar los ingresos y a cuánto ascienden éstos? ¿Qué cantidad de cada metal sobrará cuando se fabrique el número de joyas que proporciona el máximo beneficio?

Llamemos x = "número de pulseras A fabricadas", y = "número de pulseras B fabricadas".

Realizamos una tabla para obtener las restricciones del problema.

	Gramos de oro	Gramos de platino	Gramos de plata	Beneficio
Nº pulseras A (x)	x	2x		150x
Nº pulseras B (y)	2y	y	y	200y
	$x+2y$	$2x+y$	y	$150x+200y$

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x,y)=150x+200y$.
Las restricciones son:

"Dispone de 50 g de oro, 40 g de platino y 25 g de plata" → $x+2y\le 50;\ 2x+y\le 40;\ y\le 25$

"Las cantidades deben ser positivas" → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y\le 50 \\ 2x+y\le 40 \\ y\le 25 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$x+2y=50$

x	$y=\dfrac{50-x}{2}$
0	25
10	20
50	0

$2x+y=40$

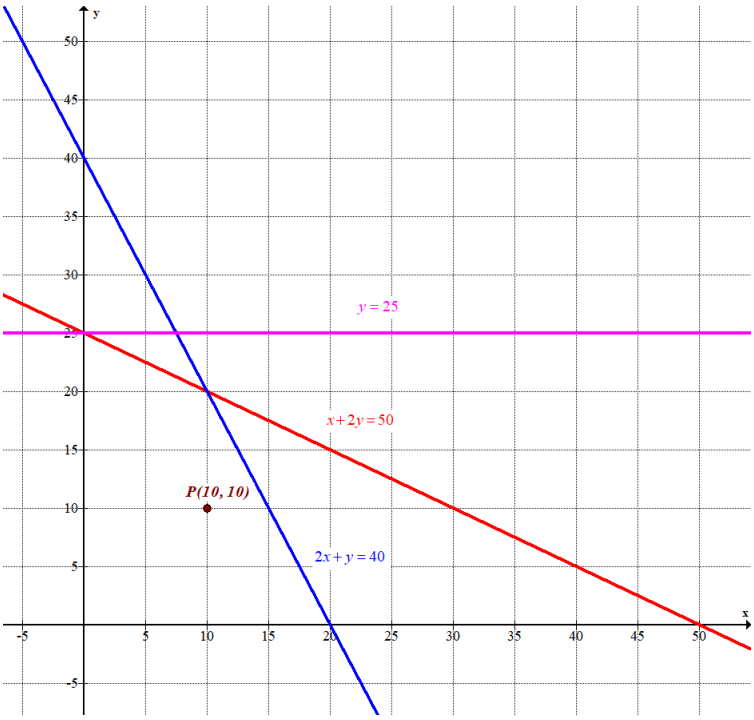
x	$y=40-2x$
0	40
10	20
20	0

$y=25$

x	$y=25$
0	25
10	25
20	25

$x\ge 0;\ y\ge 0$

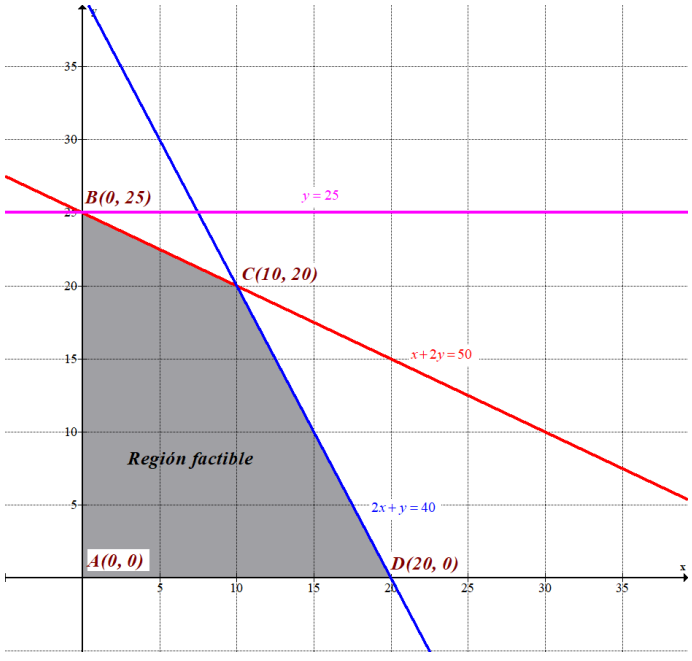
Primer *cuadrante*



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+2y\le 50 \\ 2x+y\le 40 \\ y\le 25 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las tres rectas dibujadas. Lo comprobamos viendo si el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10+20\le 50 \\ 20+10\le 40 \\ 10\le 25 \\ 10\ge 0;\ 10\ge 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos los ingresos $B(x, y) = 150x + 200y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0) = 0$
B(0, 25) → $B(0,25) = 150 \cdot 0 + 200 \cdot 25 = 5000$
C(10, 20) → $B(10,20) = 150 \cdot 10 + 200 \cdot 20 = 5500$ ¡Máximo!
D(20, 0) → $B(20,0) = 150 \cdot 20 + 200 \cdot 0 = 3000$

El beneficio máximo es de 5500 € y se consiguen en el vértice C(10, 20), que significa fabricar y vender 10 pulseras del tipo A y 20 del tipo B.

¿Qué cantidad de cada metal sobrará cuando se fabrique el número de joyas que proporciona el máximo beneficio?

	Gramos de oro	Gramos de platino	Gramos de plata	Beneficio
Nº pulseras A (10)	10	20		1500
Nº pulseras B (20)	40	20	20	4000
	50	40	20	5500

Como se dispone de 50 g de oro, 40 g de platino y 25 g de plata no sobra oro ni platino y sólo sobran 5 gramos de plata.

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax-1 & si\ x\le 1 \\ \dfrac{b}{x} & si\ 1<x\le 3 \\ \dfrac{x-1}{3} & si\ x>3 \end{cases}$ con a y b números reales.

a) **(1.5 puntos)** Determine los valores de a y b para que f sea continua. Para dichos valores, estudie la derivabilidad de f.

b) **(1 punto)** Para $a = 5$ y $b = 2$, represente el recinto limitado por la gráfica de f, las rectas $x=2$, $x=4$ y el eje OX. Calcule su área.

a) Para que la función sea continua debe serlo en $x=1$ y en $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^2+a-1=a \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2+ax-1=a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{b}{x}=b \\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=b}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=\dfrac{b}{3} \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{b}{x}=\dfrac{b}{3} \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{3-1}{3}=\dfrac{2}{3} \\ f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow \boxed{b=2}$$

Para que la función sea continua debe ser $a=b=2$.

Para estos valores la función queda $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & si\ x\le 1 \\ \dfrac{2}{x} & si\ 1<x\le 3 \\ \dfrac{x-1}{3} & si\ x>3 \end{cases}$. La función es derivable en $\mathbb{R}-\{1,3\}$, siendo su derivada $f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & si\ x<1 \\ \dfrac{-2}{x^2} & si\ 1<x<3 \\ \dfrac{1}{3} & si\ x>3 \end{cases}$. Comprobamos si la función es derivable en $x=1$ y en $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x+2=2+2=4 \\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2}{x^2}=\dfrac{-2}{1^2}=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)=4\neq -2=f'(1^+)$$

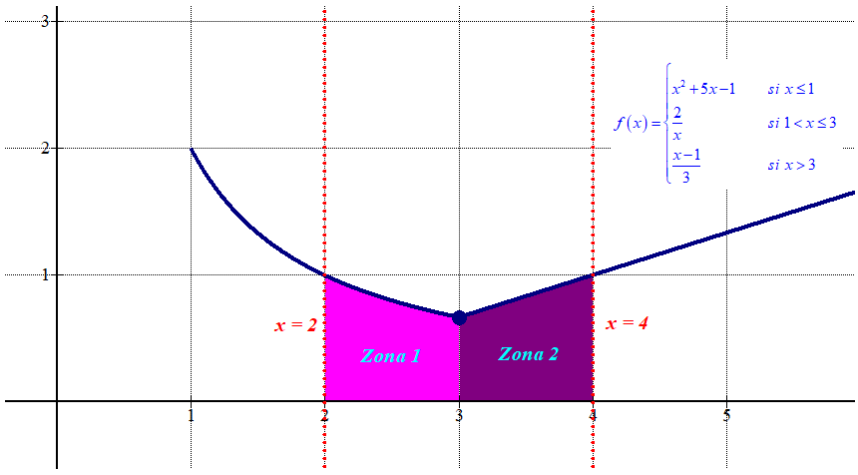
$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-)=\lim\limits_{x\to 3^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-2}{x^2}=\dfrac{-2}{3^2}=\dfrac{-2}{9} \\ f'(3^+)=\lim\limits_{x\to 3^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(3^-)=\dfrac{-2}{9}\neq\dfrac{1}{3}=f'(3^+)$$

La función no es derivable ni en $x=1$ ni en $x=3$. La función es derivable en $\mathbb{R}-\{1,3\}$

b) Para $a=5$ y $b=2$ la función queda $f(x)=\begin{cases} x^2+5x-1 & si\ x\leq 1 \\ \dfrac{2}{x} & si\ 1<x\leq 3 \\ \dfrac{x-1}{3} & si\ x>3 \end{cases}$. Entre 2 y 4 la función cambia de definición dibujamos el recinto dando una tabla de valores.

x	$f(x)=\dfrac{2}{x}$
2	1
3	$\dfrac{2}{3}$

x	$f(x)=\dfrac{x-1}{3}$
3	$\dfrac{2}{3}$ *No incluido*
4	1



Calculamos el área de la zona 1.

$$Área\,1=\int_2^3 f(x)\,dx=\int_2^3 \frac{2}{x}dx=\left[2\ln x\right]_2^3=2\ln 3-2\ln 2=\ln\frac{9}{4}\simeq 0.81u^2$$

Calculamos el área de la zona 2.

$$Área\,2=\int_3^4 f(x)\,dx=\int_3^4 \frac{x-1}{3}dx=\frac{1}{3}\int_3^4 x-1dx=\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_3^4=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\left[\frac{4^2}{2}-4\right]-\left[\frac{3^2}{2}-3\right]\right)=\frac{5}{6}\simeq 0.833u^2$$

El área del recinto limitado por la gráfica de f, las rectas $x=2$, $x=4$ y el eje OX tiene un valor de $\frac{5}{6}+\ln\frac{9}{4}\simeq 1.643$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+x+1 & si \quad x\le 2\\ \frac{1}{x-1} & si \quad x>2\end{cases}$$

a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad, derivabilidad y monotonía de f. Represente gráficamente dicha función.

b) **(1 punto)** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f, las rectas $x = 0$, $x = 4$ y el eje OX.

a) En el intervalo $(-\infty,2)$ la función tiene una expresión polinómica que es continua. En el intervalo $(2,+\infty)$ la función tiene una expresión racional cuyo denominador se anula para $x=1\notin(2,+\infty)$, por lo que es continua. Estudiamos la continuidad en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=-\frac{1}{2}2^2+2+1=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}-\frac{1}{2}x^2+x+1=1\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2-1}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=1$$

La función es continua en $x=2$ y por tanto continua en $\mathbb{R}$.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$ siendo su derivada $f'(x)=\begin{cases}-x+1 & si \quad x<2\\ \frac{-1}{(x-1)^2} & si \quad x>2\end{cases}$.

Estudiamos la derivabilidad en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}-x+1=-2+1=-1\\ f'(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{-1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(2-1)^2}=-1\end{array}\right\}\Rightarrow f'(2^-)=f'(2^+)=-1$$

La función es derivable en $x=2$ y por tanto derivable en $\mathbb{R}$.

Buscamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}-x+1=0\to x=1\in(-\infty,2)\\ \frac{-1}{(x-1)^2}=0 \text{ ¡No es posible!}\end{cases}$$

El único punto crítico es $x=1$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=1$ y $x=2$ (cambio de definición).

- En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=-0+1=1>0$. La función crece en $(-\infty,1)$.

- En el intervalo $(1,2)$ tomamos $x=1.5$ y la derivada vale $f'(1.5)=-1.5+1=-0.5<0$. La función decrece en $(1,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3)=\dfrac{-1}{(3-1)^2}=-0.25<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

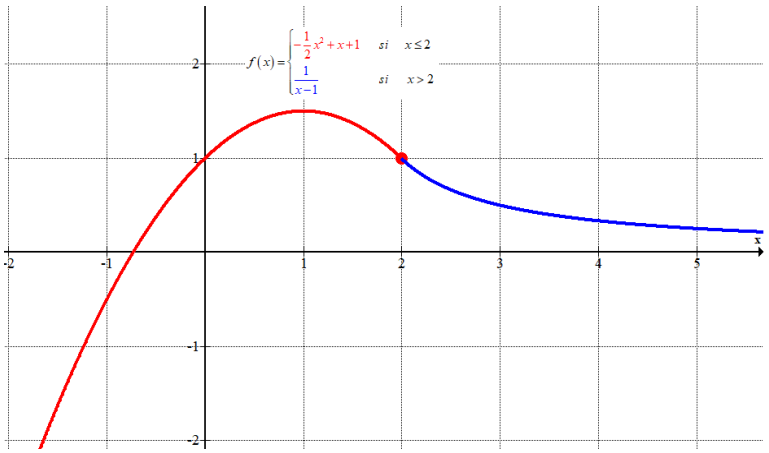
La función crece en $(-\infty,1)$ y decrece en $(1,+\infty)$. La función tiene un máximo relativo en $x=1$.
Obtenemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

$(-\infty,2]$

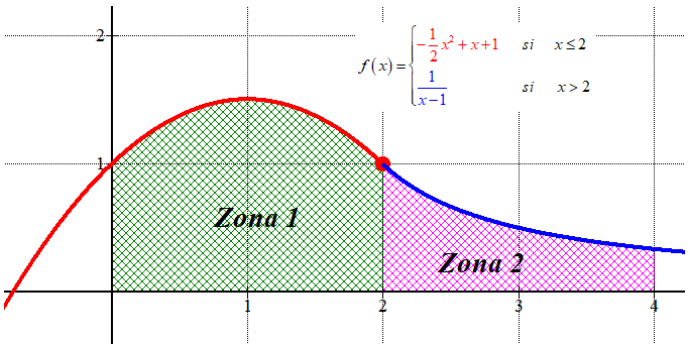
x	$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+1$
0	1
1	1.5
2	1

$(2,+\infty)$

x	$f(x)=\frac{1}{x-1}$
3	0.5
6	0.2
11	0.1



b) Entre 0 y 4 la función cambia de signo. Vemos en la gráfica que esta función no corta el eje de abscisas entre 0 y 4. Dibujamos la región de la cual queremos hallar el área.



El área pedida es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 4 que separamos en suma de dos integrales definidas por el cambio de definición en *x = 2*.

$$Área=\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^2 -\frac{1}{2}x^2+x+1dx+\int_2^4 \frac{1}{x-1}dx=\left[\frac{-x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x\right]_0^2+\left[\ln(x-1)\right]_2^4=$$

$$=\left[\frac{-2^3}{6}+\frac{2^2}{2}+2\right]-\left[\frac{-0^3}{6}+\frac{0^2}{2}+0\right]+\ln(4-1)-\ln(2-1)=\boxed{\frac{8}{3}+\ln 3\simeq 3.765u^2}$$

EJERCICIO 5

En cierta localidad el 30% de los habitantes profesan la religión *A* y el 50% profesan otras religiones diferentes de *A*. De los que profesan la religión *A* el 40% son mujeres. De las mujeres el 25% profesa la religión *A*. Se elige un habitante al azar de esa localidad. Calcule la probabilidad de que:

a) **(0.5 puntos)** No profese ninguna religión.

b) **(1 punto)** Sea hombre.

c) **(1 punto)** Solo verifique uno de los siguientes sucesos: "profesa la religión *A*"; "es mujer".

Llamamos A al suceso "Profesar la religión A", B a "profesar otras religiones diferentes de A" y M a "ser mujer".

Se nos dice que $P(A)=0.30$, $P(B)=0.50$, $P(M/A)=0.4$ y $P(A/M)=0.25$.

$$P(M/A)=0.4 \Rightarrow \frac{P(M\cap A)}{P(A)}=0.4 \Rightarrow \frac{P(M\cap A)}{0.3}=0.4 \Rightarrow \boxed{P(M\cap A)=0.4\cdot 0.3=0.12}$$

$$P(A/M)=0.25 \Rightarrow \frac{P(A\cap M)}{P(M)}=0.25 \Rightarrow \frac{0.12}{P(M)}=0.25 \Rightarrow \boxed{P(M)=\frac{0.12}{0.25}=0.48}$$

a) Suponemos que una persona no puede profesar dos religiones, por lo que $A\cap B=\varnothing$. Como el 30% profesa la religión A, el 50% otras religiones diferentes a A nos queda el restante 100 – 30 – 50 = 20 % que no profesa ninguna religión. La probabilidad de que no no profese ninguna religión es de 0.2.

b) Nos piden calcular $P(M^C)$.

$$P(M^C)=1-P(M)=1-0.48=\boxed{0.52}$$

c) Nos piden calcular $P\left(\left(A\cap M^C\right)\cup\left(A^C\cap M\right)\right)$. Como son dos sucesos sin nada en común la probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de cada suceso.

$$P\left(\left(A\cap M^C\right)\cup\left(A^C\cap M\right)\right)=P\left(A\cap M^C\right)+P\left(A^C\cap M\right)=$$

$$=\left[P(A)-P(A\cap M)\right]+\left[P(M)-P(A\cap M)\right]=$$

$$=\left[0.3-0.12\right]+\left[0.48-0.12\right]=\boxed{0.54}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Que solo verifique uno de los siguientes sucesos: "profesa la religión *A*"; "es mujer" es lo mismo que profese la religión A o sea mujer exceptuando que sea mujer que profese la religión A.

$$P(A\cup M)-P(A\cap M)=P(A)+P(M)-P(A\cap M)-P(A\cap M)=$$

$$=0.3+0.48-0.12-0.12=\boxed{0.54}$$

EJERCICIO 6

En una empresa, el 30% de los empleados ejercen de economistas y el 25% ejercen de abogados. El 75% de los economistas y el 60% de los abogados ocupan puestos directivos, mientras que, de los empleados que no ejercen ni de economistas ni de abogados, el 15% ocupa un puesto directivo.

Seleccionado un empleado al azar de esta empresa, calcule la probabilidad de que:

a) **(1.5 puntos)** No ocupe un puesto directivo.

b) **(1 punto)** Ejerza de economista sabiendo que ocupa un puesto directivo.

Como hay un 30% de empleados que son economistas y un 25% de empleados que son abogados el restante 100 – 30 – 25 = 45% no son ni abogados ni economistas.
Realizamos una tabla de contingencia con los datos del problema.

	Economistas	Abogados	Ni abogado ni economista	
Cargo directivo	**0.75 · 30 = 22.5**	**0.6 · 25 = 15**	**0.15 · 45 = 6.75**	
No cargo directivo				
Totales	**30**	**25**	**45**	**100**

Completamos la tabla.

	Economistas	Abogados	Ni abogado ni economista	
Cargo directivo	**22.5**	**15**	**6.75**	**44.25**
No cargo directivo				**55.75**
Totales	**30**	**25**	**45**	**100**

a) Hay un 55.75% de empleados que no ocupan puesto directivo. La probabilidad de que al elegir un empleado no ocupe un puesto directivo es de 0.5575.

b) Hay un 44.25 % de los empleados que ocupan un puesto directivo de estos el 22.5% son economistas. La probabilidad de que al elegir un trabajador que ocupa un puesto directivo este sea economista es de $\frac{22.5}{44.25} = \frac{30}{59} \simeq 0.5085$.

EJERCICIO 7

En un invernadero de Almería se realiza un estudio sobre dos de sus productos, melones y sandías.

a) **(1 punto)** De los 4000 melones recolectados en un determinado periodo, 1420 son de la variedad A, 980 de la B, 720 de la C y el resto de la D. Si se selecciona una muestra de 200 de estos melones, ¿cuál debe ser la composición que debe tener dicha muestra si se realiza mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional?

b) El peso de las sandías sigue una distribución Normal de media 3.85 kg y desviación típica 1.32 kg. Se selecciona, de forma aleatoria, una muestra de 121 sandías.

b.1) **(0.5 puntos)** Indique la distribución que sigue la media muestral del peso de las sandías.

b.2) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el peso medio de la muestra esté comprendido entre 3.6 kg y 4 kg.

a) El tamaño total de la muestra es 200. Llamamos n_1 al tamaño de la muestra en el estrato de la variedad A, n_2 al tamaño de la muestra en el estrato de la variedad B, n_3 al tamaño de la muestra en el estrato de la variedad C y n_4 al tamaño de la muestra en el estrato de la variedad D.

$$\frac{200}{4000}=\frac{n_1}{1420}=\frac{n_2}{980}=\frac{n_3}{720}=\frac{n_4}{4000-1420-980-720}$$

De esta expresión vamos separando por parejas y determinando el tamaño correspondiente a cada estrato.

$$\frac{200}{4000}=\frac{n_1}{1420}\Rightarrow n_1=\frac{200\cdot 1420}{4000}=71$$

$$\frac{200}{4000}=\frac{n_2}{980}\Rightarrow n_2=\frac{200\cdot 980}{4000}=49$$

$$\frac{200}{4000}=\frac{n_3}{720}\Rightarrow n_3=\frac{200\cdot 720}{4000}=36$$

$$\frac{200}{4000}=\frac{n_4}{880}\Rightarrow n_4=\frac{200\cdot 880}{4000}=44$$

Deben elegirse 71 melones A, 49 melones B, 36 melones C y 44 melones D.

b) Sea X = El peso de las sandías en kg. X = N(3.85, 1.32).

b.1) La media muestral sigue una distribución normal que tiene la misma media, pero su desviación típica es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\overline{X_{121}}=N\left(3.85,\frac{1.32}{\sqrt{121}}\right)\Rightarrow \overline{X_{121}}=N\left(3.85,\ 0.12\right)$$

b.2) Nos piden determinar el valor de $P\left(3.6\le \overline{X_{121}}\le 4\right)$.

$$P\left(3.6 \le \overline{X_{121}} \le 4\right) = \left\{\begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X - 3.85}{0.12} \end{matrix}\right\} = P\left(\frac{3.6 - 3.85}{0.12} \le Z \le \frac{4 - 3.85}{0.12}\right) =$$

$$= P\left(-2.08333 \le Z \le 1.25\right) = P\left(Z \le 1.25\right) - P\left(Z \le -2.08333\right) =$$

$$= P\left(Z \le 1.25\right) - P\left(Z \ge 2.08333\right) = P\left(Z \le 1.25\right) - \left[1 - P\left(Z \le 2.08333\right)\right] =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix}\right\} = 0.8944 - \left[1 - 0.9812\right] = \boxed{0.8756}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887

La probabilidad de que el peso medio de la muestra esté comprendido entre 3.6 kg y 4 kg es de 0.8756

EJERCICIO 8

Una empresa farmacéutica desea revisar la efectividad de un nuevo medicamento antipirético (reduce la fiebre). Se conoce que el tiempo en el que este medicamento comienza a hacer efecto sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica de 5 minutos. Para estimar la media poblacional, se ha seleccionado una muestra aleatoria de 10 individuos con fiebre y tras administrarse el medicamento, se han anotado los tiempos en los que comienza a remitir. Los tiempos obtenidos, en minutos, fueron: 20, 25, 30, 35, 35, 20, 20, 25, 30, 30

a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo, con un nivel de confianza del 98%, para estimar el tiempo medio de respuesta de este medicamento. Según el intervalo obtenido, razone si puede admitirse que el tiempo medio en el que el medicamento comienza a hacer efecto es superior a 35 minutos.

b) **(1 punto)** Un estudio posterior ha revelado que el tiempo de respuesta a este medicamento sigue una ley Normal de media 27.2 minutos y desviación típica de 5 minutos. Determine la probabilidad de que a un paciente con fiebre que ha ingerido el medicamento no le haya hecho efecto hasta pasados 20 minutos.

X = El tiempo en el que este medicamento comienza a hacer efecto en minutos.
X = N(μ, 5)

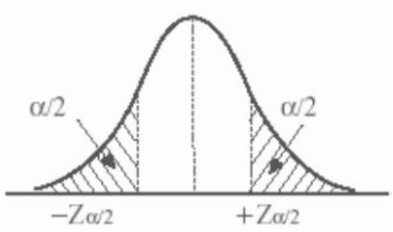
a) Determinamos la media muestral.

$$\bar{x} = \frac{20+25+30+35+35+20+20+25+30+30}{10} = \frac{3\cdot 20+2\cdot 25+3\cdot 30+2\cdot 35}{10} = 27 \text{ minutos}$$

Con un nivel de confianza del 98% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32+2.33}{2} = 2.325$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0



Determinamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325\cdot\frac{5}{\sqrt{10}} \simeq 3.676 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(27 - 3.676,\ 27 + 3.676\right) = \left(23.324,\ 30.676\right)$$

Según el intervalo obtenido, razone si puede admitirse que el tiempo medio en el que el medicamento comienza a hacer efecto es superior a 35 minutos.
35 minutos no está dentro del intervalo de confianza obtenido, por lo que no debe admitirse este tiempo que tarda en hacer efecto un medicamento.

b) X = El tiempo en el que este medicamento comienza a hacer efecto en minutos.
X = N(27.2, 5)
Nos piden calcular $P\left(X \geq 20\right)$.

$$P\left(X \geq 20\right) = \left\{\begin{matrix} Tpificamos \\ Z = \dfrac{X - 27.2}{5} \end{matrix}\right\} = P\left(Z \geq \frac{20 - 27.2}{5}\right) = P\left(Z \geq -1.44\right) =$$

$$= P\left(Z \leq 1.44\right) = \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix}\right\} = \boxed{0.9251}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9

PevAU 2024 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2023-2024	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$, siendo a un número real.

a) **(0.75 puntos)** Obtenga los valores de a para los que la matriz A tenga inversa.

b) (1.25 puntos) Para $a = 1$, resuelva la ecuación $X \cdot A - B = C \cdot A$.

c) (0.5 puntos) Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación

$$B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B$$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un agricultor posee una finca con un olivar intensivo de secano y desea transformar una parte de la misma en regadío, pero manteniendo un mínimo de 20 hectáreas de cultivo de secano. Para ello, anualmente dispone de 30000 m^3 de agua, de 5500 kg de abono y de 3000 kg de productos fitosanitarios. Cada hectárea de olivar de regadío necesita 1500 m^3 de agua, 110 kg de abono y 80 kg de productos fitosanitarios; mientras que cada hectárea de olivar de secano precisa de 100 kg de abono y 50 kg de productos fitosanitarios. Se sabe que la producción anual por hectárea es de 5000 kg en secano y 10000 kg en regadío. Determine el número de hectáreas de olivar de secano y de regadío que el agricultor debe cultiva para maximizar su producción, así como la producción máxima esperada.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule la derivada de las funciones siguientes:

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^3 \cdot e^{-2x} \qquad g(x)=\frac{\ln\left(1-x^3\right)}{\left(1-2x^2\right)^2}$$

b) **(1 punto)** Halle los valores de a y b para que sea horizontal la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=x^3+ax^2+3x+b$ en el punto $P(1,2)$.

EJERCICIO 4

La velocidad media del viento en la zona de Sierra Nevada, prevista para cierto día, viene dada por la función *v(t)* expresada en km/h, donde *t* es el tiempo expresado en horas:

$$v(t)=\begin{cases} t^2-8t+60 & si\ 0\le t\le 10 \\ -t^2+32t-140 & si\ 10<t\le 24 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Comprueba que la función *v* es continua y derivable.
b) **(1 punto)** Represente gráficamente la función, estudiando previamente la monotonía y calculando los extremos absolutos.
c) **(0.75 puntos)** La Agencia Estatal de Meteorología emite avisos de alerta por vientos siguiendo el código de colores: naranja para vientos entre 100 y 140 Km/h, y rojo para vientos de más de 140 km/h. Según la previsión, indique si se debe emitir alguna alerta naranja en Sierra Nevada ese día y durante qué horas estaría activa, ¿Se emitiría alerta roja?

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una agencia ha realizado un estudio acerca de la siniestralidad de los vehículos de una región. Se ha dividido a los conductores en dos grupos: *jóvenes* los menores de 30 años y *sénior* el resto de conductores. Asimismo, también se ha dividido a los vehículos en dos grupos: *nuevos* los que tienen menos de 5 años de antigüedad y *viejos* el resto de vehículos. De los 54 siniestros registrados, en 19 de ellos el vehículo implicado era *nuevo* y en 29 los conductores eran *jóvenes*. Finalmente, 21 de los siniestros se dieron con vehículos *viejos* y conductores *jóvenes*. Se escoge uno de estos siniestros al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *sénior* y el vehículo *viejo*.
b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *joven* sabiendo que el vehículo es *viejo*.
c) **(0.5 puntos)** Determine razonadamente si la siguiente afirmación es cierta: "Los siniestros de este estudio menos probables son aquellos en los que el conductor es *sénior* y el vehículo es *nuevo*".

EJERCICIO 6

Un grupo de turistas programa una visita a la Geoda de Pulpí. El 42 % de los turistas del grupo proceden de Andalucía, el 32 % de otras comunidades autónomas y el resto del extranjero. Son mayores de edad el 65 % de los visitantes que proceden de Andalucía y el 75 % de los que proceden de otras comunidades autónomas. Son menores de edad el 20 % de los visitantes extranjeros. Elegido un turista de este grupo al azar, halle la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Sea mayor de edad.
b) **(0.5 puntos)** Proceda de Andalucía y sea menor de edad.
c) **(1 punto)** Sea extranjero sabiendo que es menor de edad.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.5 puntos)** Se realizan dos muestreos aleatorios estratificados con afijación proporcional para una población dividida en cuatro estratos E_1, E_2, E_3 y E_4. En la primera muestra se han seleccionado 25 individuos de E_1 y 30 de E_2. En la segunda muestra se han seleccionado 80 individuos de E_3 y 100 de E_4. Sabiendo que el estrato E_1 tiene 500 individuos y que el E_3 tiene 400, determine el tamaño de cada estrato de la población y el tamaño de las muestras en cada estrato.
b) **(1 punto)** Dada la población {–3,–1, 2, 5, 7}, se consideran todas las muestras posibles de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales.

EJERCICIO 8

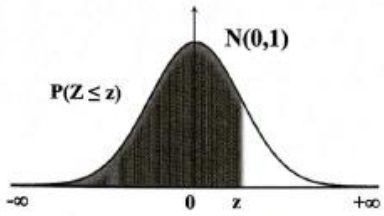
Se desea conocer la proporción de habitantes de una determinada ciudad que realizan turismo sostenible durante sus vacaciones. Para ello se selecciona al azar una muestra de 2500 habitantes, resultando que 1825 realizan turismo sostenible.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 95%, para estimar la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible

b) **(0.75 puntos)** Para un nivel de confianza del 97% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál sería el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%.

c) **(0.5 puntos)** Razone qué efecto producirá sobre la amplitud del intervalo una disminución del tamaño de la muestra.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, siendo a un número real.

a) **(0.75 puntos)** Obtenga los valores de a para los que la matriz A tenga inversa.

b) (1.25 puntos) Para $a = 1$, resuelva la ecuación $X \cdot A - B = C \cdot A$.

c) (0.5 puntos) Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación

$$B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B$$

a) Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = a(a-1)+0-4(a-3)-0-a(a-3)-2=$$

$$= \cancel{a^2} - a - 4a + 12 - \cancel{a^2} + 3a - 2 = -2a + 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2a+10=0 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow \boxed{a=5}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de 5.

b) Para $a = 1$ la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$a=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 2 - 2 = 8 \neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{8}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & -5 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ -4 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial y obtenemos la matriz X.

$$X\cdot A-B=C\cdot A\Rightarrow X\cdot A=C\cdot A+B\Rightarrow X=\left(C\cdot A+B\right)A^{-1}$$

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-2+0 & -2+0+8 & 4+1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

$$C\cdot A+B=\begin{pmatrix}-4 & 6 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 9 & 11\end{pmatrix}$$

$$X=\left(C\cdot A+B\right)A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-5 & 9 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -5 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ -4 & -2 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}10+18-44 & 25+9-22 & -5+27+22\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-16 & 12 & 44\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3/2 & 11/2\end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X=\begin{pmatrix}-2 & 3/2 & 11/2\end{pmatrix}$.

c) El producto $B\cdot A$ da una matriz de dimensiones 1×3.

$$\begin{matrix}B & \cdot & A\\ 1\times\boxed{3\cdot 3}\times 3 & & \rightarrow 1\times 3\end{matrix}$$

Esta matriz de 1 fila y 3 columnas debe tener la misma dimensión que la matriz $D\cdot C^t\cdot B$ para poder realizarse la suma. Suponemos la matriz D de dimensiones $m\times n$.

$$\begin{matrix}D & \cdot & C^t & \cdot & B\\ m\times\boxed{n\cdot 3}\times\boxed{1\cdot 1}\times 3 & & & & \rightarrow m\times 3\end{matrix}$$

El producto $C^t\cdot B$ es posible y da una matriz de orden 3×3. El producto $D\cdot C^t\cdot B$ es posible si *n = 3*. Y el resultado de la operación es una matriz $m\times 3$. Para poder sumarse con la matriz $B\cdot A$ deben tener la misma dimensión 1×3, debiendo ser *m = 1*.

Las dimensiones de la matriz D deben ser 1×3

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un agricultor posee una finca con un olivar intensivo de secano y desea transformar una parte de la misma en regadío, pero manteniendo un mínimo de 20 hectáreas de cultivo de secano. Para ello, anualmente dispone de 30000 m^3 de agua, de 5500 kg de abono y de 3000 kg de productos fitosanitarios. Cada hectárea de olivar de regadío necesita 1500 m^3 de agua, 110 kg de abono y 80 kg de productos fitosanitarios; mientras que cada hectárea de olivar de secano precisa de 100 kg de abono y 50 kg de productos fitosanitarios. Se sabe que la producción anual por hectárea es de 5000 kg en secano y 10000 kg en regadío. Determine el número de hectáreas de olivar de secano y de regadío que el agricultor debe cultiva para maximizar su producción, así como la producción máxima esperada.

Llamemos x = "número de hectáreas de secano", y = "número de hectáreas de regadío".

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Agua	Abono	Productos fitosanitarios	Producción
Hectáreas de secano (x)		100x	50x	5000x
Hectáreas de regadío (y)	$1500y$	110y	80y	10000y
TOTALES	$1500y$	$100x+110y$	$50x+80y$	$5000x+10000y$

Deseamos maximizar la producción que viene expresada como $P(x,y)=5000x+10000y$.
Las restricciones del problema son:

"Anualmente dispone de 30000 m^3 de agua, de 5500 kg de abono y de 3000 kg de productos fitosanitarios" → $1500y \le 30000;\ 100x+110y \le 5500;\ 50x+80y \le 3000$
"Manteniendo un mínimo de 20 hectáreas de cultivo de secano" → $x \ge 20$
"Las cantidades deben ser positivas" → $x \ge 0;\ y \ge 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 1500y \le 30000 \\ 100x+110y \le 5500 \\ 50x+80y \le 3000 \\ x \ge 20 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \ge 20 \\ y \le 20 \\ 10x+11y \le 550 \\ 5x+8y \le 300 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$y=20$

x	$y=20$
0	20
10	20
20	20

$x=20$

$x=20$	y
20	0
20	20

$10x+11y=550$

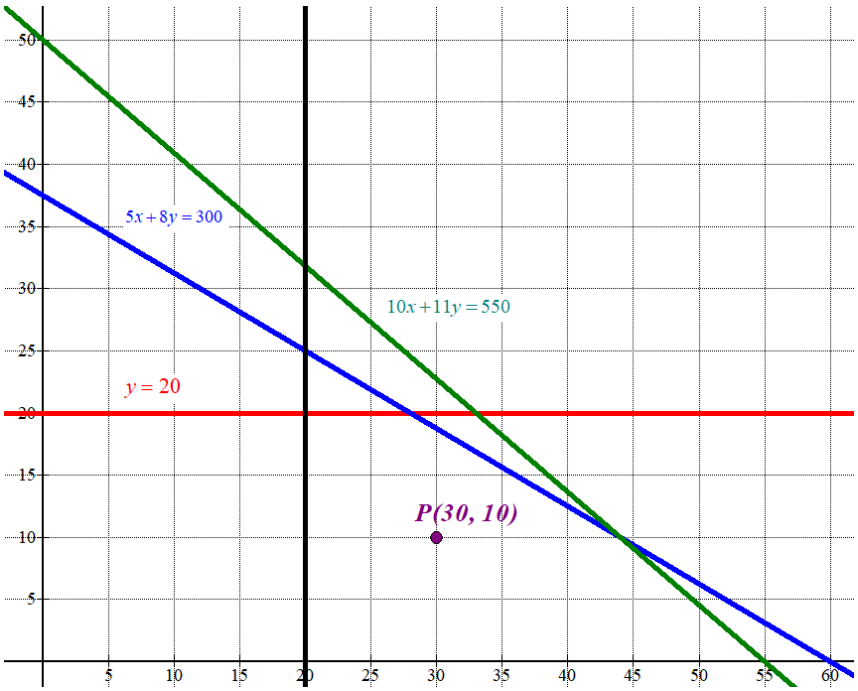
x	$y=\frac{550-10x}{11}$
0	50
55	0

$5x+8y=300$

x	$y=\frac{300-5x}{8}$
20	25
60	0

$x \ge 0;\ y \ge 0$

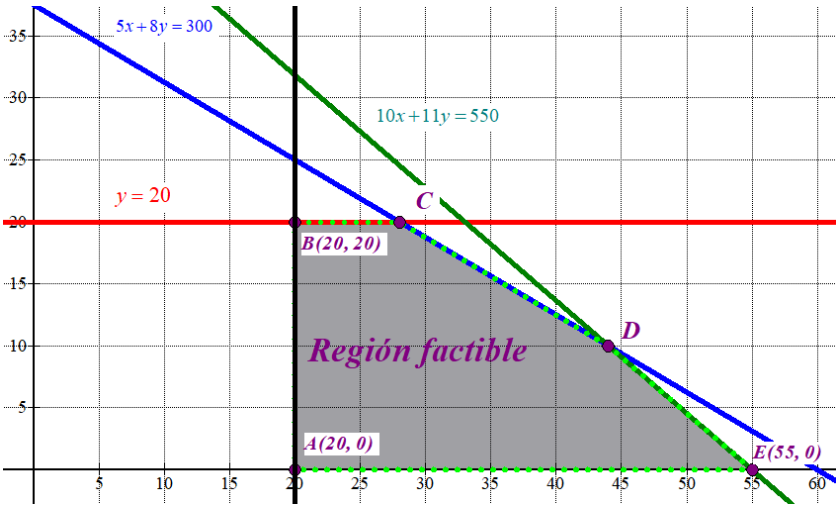
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 20 \\ y \leq 20 \\ 10x+11y \leq 550 \\ 5x+8y \leq 300 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las rectas verde, azul y roja y a la derecha de la recta vertical. Lo comprobamos viendo si el punto P(30, 10) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 30 \geq 20 \\ 10 \leq 20 \\ 10\cdot 10+11\cdot 10 \leq 550 \\ 5\cdot 10+8\cdot 10 \leq 300 \\ 10 \geq 0;\ 10 \geq 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Determinamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \to \left.\begin{matrix} y = 20 \\ 5x + 8y = 300 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5x + 160 = 300 \Rightarrow 5x = 140 \Rightarrow x = \frac{140}{5} = 28 \Rightarrow C(28, 20)$$

$$D \to \left.\begin{matrix} 10x + 11y = 550 \\ 5x + 8y = 300 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 10x + 11y = 550 \\ -10x - 16y = -600 \end{matrix}\right\}$$

$$-5y = -50 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow 5x + 80 = 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x = 220 \Rightarrow x = \frac{220}{5} = 44 \Rightarrow D(44, 10)$$

Valoramos la producción $P(x, y) = 5000x + 10000y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(20, 0) → $P(20, 0) = 5000 \cdot 20 = 100\,000\,kg$
B(20, 20) → $P(20, 20) = 5000 \cdot 20 + 10000 \cdot 20 = 300\,000\,kg$
C(28, 20) → $P(28, 20) = 5000 \cdot 28 + 10000 \cdot 20 = 340\,000\,kg$ ¡Máximo!
D(44, 10) → $P(44, 10) = 5000 \cdot 44 + 10000 \cdot 10 = 320\,000\,kg$
E(55, 0) → $P(55, 0) = 5000 \cdot 55 + 10000 \cdot 0 = 275\,000\,kg$

La máxima producción es de 340 000 kg de oliva y se consigue en el vértice C(28, 20), que significa tener 28 hectáreas de secano y 20 de regadío.

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule la derivada de las funciones siguientes:

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^3\cdot e^{-2x} \qquad g(x)=\frac{\ln\left(1-x^3\right)}{\left(1-2x^2\right)^2}$$

b) **(1 punto)** Halle los valores de *a* y *b* para que sea horizontal la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=x^3+ax^2+3x+b$ en el punto *P(1,2)*.

a) Calculamos la derivada de *f(x)*.

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^3\cdot e^{-2x}\Rightarrow f'(x)=3\left(x^2+2\right)^2(2x)\cdot e^{-2x}+\left(x^2+2\right)^3\cdot(-2)e^{-2x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=6x\left(x^2+2\right)^2\cdot e^{-2x}-2\left(x^2+2\right)^3\cdot e^{-2x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=6x\left(x^2+2\right)^2\cdot e^{-2x}-2\left(x^2+2\right)\left(x^2+2\right)^2\cdot e^{-2x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=6x\left(x^2+2\right)^2\cdot e^{-2x}+\left(-2x^2-4\right)\left(x^2+2\right)^2\cdot e^{-2x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(-2x^2+6x-4\right)\left(x^2+2\right)^2\cdot e^{-2x}\Rightarrow \boxed{f'(x)=-2\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2+2\right)^2\cdot e^{-2x}}$$

Calculamos la derivada de *g(x)*.

$$g(x)=\frac{\ln\left(1-x^3\right)}{\left(1-2x^2\right)^2}\Rightarrow g'(x)=\frac{\frac{-3x^2}{1-x^3}\left(1-2x^2\right)^2-2\left(1-2x^2\right)(-4x)\ln\left(1-x^3\right)}{\left(1-2x^2\right)^4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{\frac{-3x^2\left(1-2x^2\right)}{1-x^3}\left(1-2x^2\right)+8x\left(1-2x^2\right)\ln\left(1-x^3\right)}{\left(1-2x^2\right)^4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{\left(1-2x^2\right)\left[\frac{-3x^2\left(1-2x^2\right)}{1-x^3}+8x\ln\left(1-x^3\right)\right]}{\left(1-2x^2\right)^4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{\frac{-3x^2\left(1-2x^2\right)}{1-x^3}+8x\ln\left(1-x^3\right)}{\left(1-2x^2\right)^3}=\frac{\frac{-3x^2\left(1-2x^2\right)+8x\left(1-x^3\right)\ln\left(1-x^3\right)}{1-x^3}}{\left(1-2x^2\right)^3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{g'(x)=\frac{-3x^2\left(1-2x^2\right)+8x\left(1-x^3\right)\ln\left(1-x^3\right)}{\left(1-2x^2\right)^3\left(1-x^3\right)}}$$

b) Para que la recta tangente a la gráfica en el punto *P(1,2)* sea horizontal tiene que tener pendiente 0, es decir, la derivada de la función en $x = 1$ es 0 → $h'(1)=0$.

$$\left.\begin{matrix} h'(x)=3x^2+2ax+3 \\ h'(1)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0=3\cdot 1^2+2a\cdot 1+3 \Rightarrow 6+2a=0 \Rightarrow 2a=-6 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-6}{2}=-3}$$

La función queda $h(x)=x^3-3x^2+3x+b$.

Además, la función debe pasar por el punto *P(1,2)*, por lo que $h(1)=2$.

$$\left.\begin{matrix} h(x)=x^3-3x^2+3x+b \\ h(1)=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2=1^3-3\cdot 1^2+3\cdot 1+b \Rightarrow 2=1-\cancel{3}+\cancel{3}+b \Rightarrow \boxed{b=1}$$

Los valores buscados son $a = -3$ y $b = 1$.

EJERCICIO 4

La velocidad media del viento en la zona de Sierra Nevada, prevista para cierto día, viene dada por la función *v(t)* expresada en km/h, donde *t* es el tiempo expresado en horas:

$$v(t)=\begin{cases} t^2-8t+60 & si\ 0\le t\le 10 \\ -t^2+32t-140 & si\ 10<t\le 24 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Comprueba que la función *v* es continua y derivable.

b) **(1 punto)** Represente gráficamente la función, estudiando previamente la monotonía y calculando los extremos absolutos.

c) **(0.75 puntos)** La Agencia Estatal de Meteorología emite avisos de alerta por vientos siguiendo el código de colores: naranja para vientos entre 100 y 140 Km/h, y rojo para vientos de más de 140 km/h. Según la previsión, indique si se debe emitir alguna alerta naranja en Sierra Nevada ese día y durante qué horas estaría activa, ¿Se emitiría alerta roja?

a) La función en el intervalo $[0,10)$ tiene la expresión $v(t)=t^2-8t+60$, es una función polinómica, por lo que es continua y derivable con derivada $v'(t)=2t-8$.

La función en el intervalo $(10,24]$ tiene la expresión $v(t)=-t^2+32t-140$, es una función polinómica, por lo que es continua y derivable con derivada $v'(t)=-2t+32$.

Estudiamos la continuidad en *t = 10*.

- Existe $v(10)=10^2-8\cdot 10+60=80$
- Existe $\lim_{t\to 10^-} v(t)=\lim_{t\to 10^-} t^2-8t+60=80$
- Existe $\lim_{t\to 10^+} v(t)=\lim_{t\to 10^+} -t^2+32t-140=-10^2+320-140=80$
- Los tres valores son iguales

Se cumplen todas las condiciones y la función es continua en [0, 24].

Estudiamos la derivabilidad en *t = 10*. Para ello comprobamos si las derivadas laterales coinciden.

La derivada de la función es $v'(t)=\begin{cases} 2t-8 & si\ 0\le t<10 \\ -2t+32 & si\ 10<t\le 24 \end{cases}$

Calculamos las derivadas laterales.

$$\left.\begin{aligned} v'(10^-)&=\lim_{t\to 10^-} 2t-8=20-8=12 \\ v'(10^+)&=\lim_{t\to 10^+} -2t+32=-20+32=12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v'(10^-)=v'(10^+)=12$$

La función es derivable en *t = 10*.
La función es derivable en [0, 24].

b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

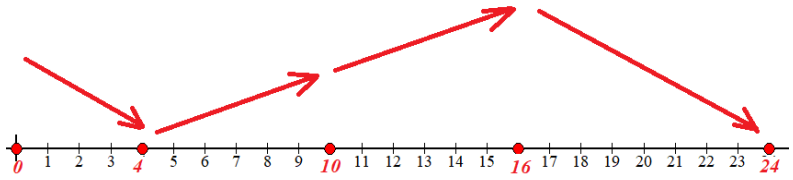
$$v'(t)=0\Rightarrow\begin{cases} 2t-8=0\to 2t=8\to t=4\in(0,10) \\ -2t+32=0\to 2t=32\to t=16\in(10,24) \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de *t = 4*, *t = 10* y *t = 16*.

- En el intervalo $[0,4)$ tomamos *t = 1* y la derivada vale $v'(1)=2\cdot 1-8=-6<0$. La función decrece en $[0,4)$.

- En el intervalo $(4,10)$ tomamos $t = 5$ y la derivada vale $v'(t) = 2\cdot 5 - 8 = 2 > 0$. La función crece en $(4,10)$
- En el intervalo $(10,16)$ tomamos $t = 11$ y la derivada vale $v'(11) = -2\cdot 11 + 32 = 10 > 0$. La función crece en $(10,16)$
- En el intervalo $(16,24]$ tomamos $t = 20$ y la derivada vale $v'(20) = -2\cdot 20 + 32 = -8 < 0$. La función decrece en $(16,24]$

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $[0,4)\cup(16,24]$ y crece en $(4,16)$.

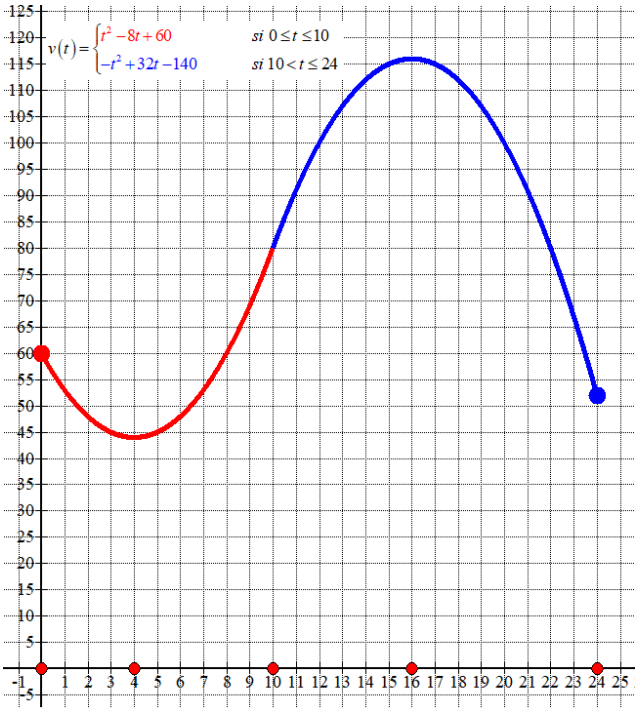
La función presenta un mínimo relativo en $t = 4$ y un máximo relativo en $t = 16$.
Valoramos la velocidad del viento en estos valores y en los extremos del intervalo para establecer los máximos y mínimos absolutos.

$$v(0) = 0^2 - 8\cdot 0 + 60 = 60$$
$$v(4) = 4^2 - 8\cdot 4 + 60 = 44$$
$$v(10) = 10^2 - 8\cdot 10 + 60 = 80$$
$$v(16) = -16^2 + 32\cdot 16 - 140 = 116$$
$$v(24) = -24^2 + 32\cdot 24 - 140 = 52$$

La máxima velocidad de viento es de 116 km/h y se produce a las 16 horas. La mínima velocidad de viento es de 44 km/h y se produce a las 4 horas.
Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

t	$v(t) = t^2 - 8t + 60$
0	60
4	44 *Mínimo*
10	80

t	$v(t) = -t^2 + 32t - 140$
11	91
16	116 *Máximo*
24	52



c) Observando la gráfica vemos que hay momentos en los que el viento supera los 100 km/h y nunca se superan los 140 km/h. No habrá alerta roja pues no está previsto que se superen los 140 km/h.
Observamos que es entre las 10 y las 24 horas cuando se producen vientos más fuertes.
Averiguamos cuando el viento alcanza los 100 km/h.

$$v(t)=100 \Rightarrow -t^2+32t-140=100 \Rightarrow t^2-32t+240=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{32\pm\sqrt{(-32)^2-4(1)(240)}}{2}=\frac{32\pm 8}{2}=\begin{cases}\frac{32+8}{2}=\boxed{20=t}\\ \frac{32-8}{2}=\boxed{12=t}\end{cases}$$

Habrá alerta naranja entre las 12 y las 20 horas. Antes y después de este intervalo el viento será inferior a los 100 Km/h.

EJERCICIO 5

Una agencia ha realizado un estudio acerca de la siniestralidad de los vehículos de una región. Se ha dividido a los conductores en dos grupos: *jóvenes* los menores de 30 años y *sénior* el resto de conductores. Asimismo, también se ha dividido a los vehículos en dos grupos: *nuevos* los que tienen menos de 5 años de antigüedad y *viejos* el resto de vehículos. De los 54 siniestros registrados, en 19 de ellos el vehículo implicado era *nuevo* y en 29 los conductores eran *jóvenes*. Finalmente, 21 de los siniestros se dieron con vehículos *viejos* y conductores *jóvenes*. Se escoge uno de estos siniestros al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *sénior* y el vehículo *viejo*.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *joven* sabiendo que el vehículo es *viejo*.

c) **(0.5 puntos)** Determine razonadamente si la siguiente afirmación es cierta: "Los siniestros de este estudio menos probables son aquellos en los que el conductor es *sénior* y el vehículo es *nuevo*".

Realizamos una tabla de contingencia.

	Conductores sénior	Conductores jóvenes	
Coches viejos		21	
Coches nuevos			19
		29	54

Completamos la tabla.

	Conductores sénior	Conductores jóvenes	
Coches viejos	**14**	21	**35**
Coches nuevos	**11**	**8**	19
	25	29	54

a) Hay 14 siniestros con coche viejo y conductor sénior de un total de 54 siniestros. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que el conductor sea *sénior* y el vehículo *viejo* vale $\frac{14}{54}=\frac{7}{27}\simeq 0.26$.

b) Hay 35 siniestros con coche viejo y de ellos hay 21 con conductor joven. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que el conductor sea *joven* sabiendo que el vehículo es *viejo* vale $\frac{21}{35}=\frac{3}{5}=0.6$.

c) Del total de 54 siniestros hay 11 con conductor senior y coche nuevo, 14 con conductor senior y coche viejo, 8 con coche nuevo y conductor joven y 21 con conductor joven y coche viejo. Según este estudio el menor número de siniestros se produce con conductor joven y coche nuevo. La afirmación es falsa.

EJERCICIO 6

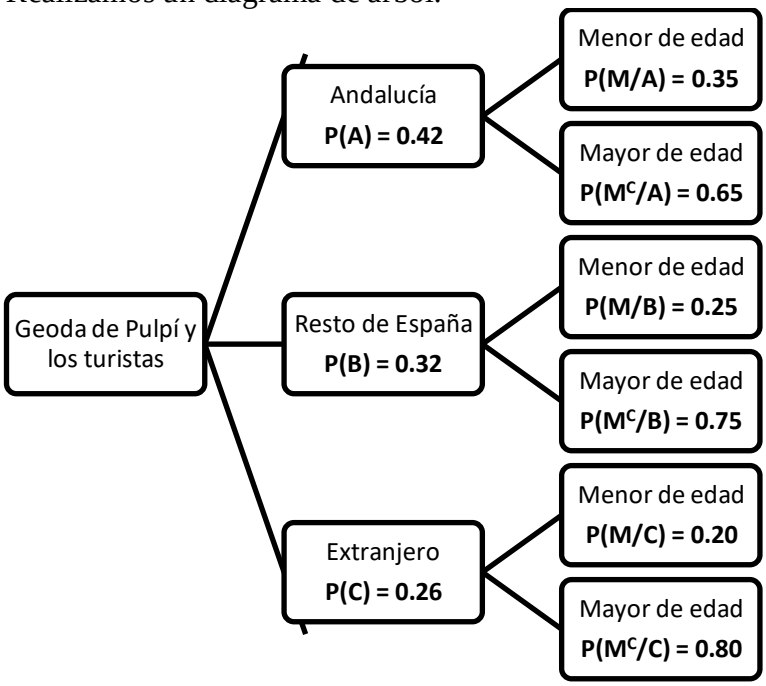
Un grupo de turistas programa una visita a la Geoda de Pulpí. El 42 % de los turistas del grupo proceden de Andalucía, el 32 % de otras comunidades autónomas y el resto del extranjero. Son mayores de edad el 65 % de los visitantes que proceden de Andalucía y el 75 % de los que proceden de otras comunidades autónomas. Son menores de edad el 20 % de los visitantes extranjeros. Elegido un turista de este grupo al azar, halle la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Sea mayor de edad.

b) **(0.5 puntos)** Proceda de Andalucía y sea menor de edad.

c) **(1 punto)** Sea extranjero sabiendo que es menor de edad.

Llamamos A al suceso "el turista procede de Andalucía", B a "el turista procede de otras comunidades autónomas" y C a "el turista es extranjero". Llamamos M al suceso "Ser menor de edad". Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P\left(M^C\right)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(M^C\right)=P(A)P\left(M^C/A\right)+P(B)P\left(M^C/B\right)+P(C)P\left(M^C/C\right)=$$

$$=0.42\cdot0.65+0.32\cdot0.75+0.26\cdot0.80=\boxed{0.721}$$

La probabilidad de que el turista sea mayor de edad es de 0.721.

b) Nos piden calcular $P(A\cap M)$.

$$P(A\cap M)=P(A)P(M/A)=0.42\cdot0.35=\boxed{0.147}$$

La probabilidad de que el turista sea un andaluz menor de edad es de 0.147.

c) Nos piden calcular $P(C/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/M)=\frac{P(C\cap M)}{P(M)}=\frac{P(C)P(M/C)}{1-P\left(M^C\right)}=\frac{0.26\cdot0.2}{1-0.724}=\frac{13}{69}\simeq0.1884$$

La probabilidad de que el turista sea extranjero sabiendo que es menor de edad es de 0.1884.

EJERCICIO 7

a) **(1.5 puntos)** Se realizan dos muestreos aleatorios estratificados con afijación proporcional para una población dividida en cuatro estratos E_1, E_2, E_3 y E_4. En la primera muestra se han seleccionado 25 individuos de E_1 y 30 de E_2. En la segunda muestra se han seleccionado 80 individuos de E_3 y 100 de E_4. Sabiendo que el estrato E_1 tiene 500 individuos y que el E_3 tiene 400, determine el tamaño de cada estrato de la población y el tamaño de las muestras en cada estrato.

b) **(1 punto)** Dada la población {–3,–1, 2, 5, 7}, se consideran todas las muestras posibles de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales.

a) En la primera muestra en el estrato E_1 se eligen 25 individuos de 500. En el estrato E_2 se eligen en la misma proporción, tenemos:

$$\begin{array}{lll} & \textit{Elegidos} & \textit{Total} \\ E_1 & 25 & \longrightarrow 500 \\ E_2 & 30 & \longrightarrow x \end{array} \Rightarrow 25x = 500 \cdot 30 \Rightarrow x = \frac{15000}{25} = 600$$

En el estrato E_2 hay 600 individuos.

En la segunda muestra en el estrato E_3 se eligen 80 individuos de 400. En el estrato E_4 se eligen en la misma proporción, tenemos:

$$\begin{array}{lll} & \textit{Elegidos} & \textit{Total} \\ E_3 & 80 & \longrightarrow 400 \\ E_4 & 100 & \longrightarrow y \end{array} \Rightarrow 80y = 400 \cdot 100 \Rightarrow y = \frac{40000}{80} = 500$$

En el estrato E_4 hay 500 individuos.

El estrato E_1 tiene 500 individuos, el E_2 tiene 600, el E_3 tiene 400 y el E_4 tiene 500.

La proporción en la que se eligen en la primera muestra es $\frac{25}{500} = \frac{1}{20}$, por lo que en el estrato E_2 se eligen 30, en el E_3 se eligen $\frac{1}{20}400 = 20$ y en el E_4 se eligen $\frac{1}{20}500 = 25$.

La proporción en la que se eligen en la segunda muestra es $\frac{80}{400} = \frac{1}{5}$, por lo que en el estrato E_1 se eligen $\frac{1}{5}500 = 100$, en el E_2 se eligen $\frac{1}{5}600 = 120$ y en el E_3 se eligen 80 y en el E_4 se eligen 100..

b) La media de la distribución de las medias muestrales coincide con la media poblacional.

$$\bar{x} = \frac{-3-1+2+5+7}{5} = 2$$

Calculamos la varianza poblacional.

$$Varianza\,(X) = \frac{\sum (x_i)^2}{5} - \left(\bar{x}\right)^2 = \frac{9+1+4+25+49}{5} - 2^2 = 13.6$$

La varianza de la distribución de las medias muestrales es la varianza poblacional dividida entre el tamaño de las muestras (2) → $\frac{13.6}{2} = 6.8$

EJERCICIO 8

Se desea conocer la proporción de habitantes de una determinada ciudad que realizan turismo sostenible durante sus vacaciones. Para ello se selecciona al azar una muestra de 2500 habitantes, resultando que 1825 realizan turismo sostenible.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 95%, para estimar la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible

b) **(0.75 puntos)** Para un nivel de confianza del 97% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál sería el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%.

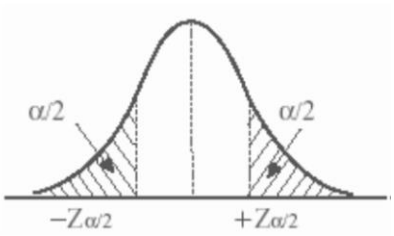
c) **(0.5 puntos)** Razone qué efecto producirá sobre la amplitud del intervalo una disminución del tamaño de la muestra.

Tamaño de la muestra es $n = 2500$. $pr = \frac{1685}{2500} = 0.73$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.73 = 0.27$

a) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0{,}025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0



Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.73 \cdot 0.27}{2500}} \simeq 0.0174$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.73 - 0.0174,\quad 0.73 + 0.0174) = (0.7126, 0.7474)$$

b) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0{,}015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$$

El error máximo es de 0.01, lo sustituimos en la fórmula y despejamos n.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.01 = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.73 \cdot 0.27}{n}} \Rightarrow \frac{0.01}{2.17} = \sqrt{\frac{0.73 \cdot 0.27}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.01}{2.17}\right)^2 = \frac{0.73 \cdot 0.27}{n} \Rightarrow n = \frac{0.73 \cdot 0.27}{\left(\frac{0.01}{2.17}\right)^2} \simeq 9281.24$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 9282 habitantes.

c) La amplitud del intervalo es el Error que calculamos con la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}}$.

Si disminuimos el tamaño de la muestra (n) aumentará el error y la amplitud del intervalo será mayor.

PevAU 2024 Ordinaria (suplente) Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2023-2024	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \quad J=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

a) **(1.5 puntos)** Halle la matriz A que satisface la ecuación $P^{-1}\cdot A\cdot P=J$.

b) **(1 punto)** Compruebe que $A^3=P\cdot J^3\cdot P^{-1}$.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) A una tienda de decoración le han encargado decorar las mesas de un salón de celebraciones con centros florales y candelabros. En el salón se montan siempre entre 12 y 40 mesas. En cada mesa solo se puede colocar un centro floral o un candelabro y, además, el número de candelabros no puede ser superior a una tercera parte de los centros florales. Si el precio de cada centro floral es de 32 € y el de cada candelabro de 35 €, ¿cuántos artículos de cada tipo debe seleccionar la tienda para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

La superficie de ampliación de un parque de atracciones, en decámetros cuadrados, coincide con el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+6x$ y $g(x)=\frac{x^2}{5}$.

a) **(1 punto)** Represente gráficamente la superficie de ampliación del parque de atracciones.

b) **(1.5 puntos)** Si el coste para acondicionar el nuevo suelo es de 75 €/m^2, calcule el área de ampliación del parque y el coste total del acondicionamiento.

EJERCICIO 4

Se consideran las funciones

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2 & si \quad -1\le x\le 1\\ (x-2)^2 & si \quad 1<x\le 3\end{cases}; \qquad g(x)=1 \quad si \quad -1\le x\le 3$$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f* y *g* en sus dominios.

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y calcule su área.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

En una encuesta realizada en una librería se ha determinado que el 45% de sus clientes compran novelas históricas, mientras que el 40% no compra novelas de fantasía. Además, de los clientes que compran novelas de fantasía, sólo el 30% compran también novelas históricas. Elegido un cliente al azar, calcule la probabilidad de que:

a) **(0.75 puntos)** Compre novelas históricas y de fantasía.

b) **(1 punto)** No compre novelas históricas y tampoco de fantasía.

c) **(0.75 puntos)** Compre una novela de fantasía, sabiendo que no ha comprado ninguna novela histórica.

EJERCICIO 6

Una fábrica dispone de 3 máquinas A, B y C para la fabricación de una cierta pieza. El 25% de las piezas son fabricadas por la máquina A, el 35% por B y el resto por C. Tras un estudio se determina que el 2.05% del total de las piezas fabricadas son defectuosas y que el 1% de las piezas fabricadas por B son defectuosas.

a) **(1.25 puntos)** Se selecciona una pieza al azar y resulta no ser defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que fuera fabricada por la máquina B?

b) **(1.25 puntos)** Si A y C tienen la misma probabilidad de fabricar una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que una pieza sea fabricada por A sabiendo que es defectuosa?

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Se ha administrado un determinado medicamento a una muestra de 220 enfermos de una población que padece una cierta enfermedad y se ha observado una respuesta positiva en 165 de ellos.

a) **(1.5 puntos)** Estime, mediante un intervalo de confianza del 97.5%, la proporción de enfermos que responderían positivamente si este medicamento se administrase a la población de la que se ha extraído la muestra. Según el intervalo obtenido, razone si puede admitirse que el porcentaje de enfermos que responderían positivamente al medicamento administrado es del 70%.

b) **(1 punto)** Con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea menor que el 2.5%?

EJERCICIO 8

Un atleta obtiene los siguientes tiempos, en minutos, de 10 repeticiones cronometradas de una prueba:

2.71 3.84 3.26 2.28 2.86 3.08 3.07 2.46 2.54 2.58

Por experiencias anteriores se sabe que el tiempo en cada repetición sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.36 minutos.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza para el tiempo medio de estas repeticiones con un 93.5% de confianza.

b) **(1.25 puntos)** ¿Cuántas repeticiones como mínimo se tendrán que cronometrar si se quiere obtener un error en la estimación del tiempo medio inferior a 0.05 minutos manteniendo el mismo nivel de confianza?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \quad J=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

a) **(1.5 puntos)** Halle la matriz A que satisface la ecuación $P^{-1}\cdot A\cdot P=J$.

b) **(1 punto)** Compruebe que $A^3=P\cdot J^3\cdot P^{-1}$.

a) Despejamos la matriz A de la ecuación matricial.

$$P^{-1}\cdot A\cdot P=J \Rightarrow PP^{-1}\cdot A\cdot P=P\cdot J \Rightarrow A\cdot P=P\cdot J \Rightarrow A\cdot P\cdot P^{-1}=P\cdot J\cdot P^{-1} \Rightarrow A=P\cdot J\cdot P^{-1}$$

Comprobamos que la matriz P tiene inversa, para ello su determinante debe ser distinto de cero.

$$|P|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-1+0+0-1-0-0=-2\neq 0$$

Calculamos la matriz inversa de P.

$$P^{-1}=\frac{Adj\left(P^T\right)}{|P|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}}{-2}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz A.

$$A=P\cdot J\cdot P^{-1}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2+0+0 & -2-2+0 & -2+0+0\\ 0 & -4 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -4 & -2\\ 0 & -4 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -2+1 & -4-1 & -2-1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2+0-1 & -4+4+1 & -2+0+1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene la expresión $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

b) Sabemos que $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$. Lo utilizamos para comprobar la igualdad.

$$A^3 = \left(P \cdot J \cdot P^{-1}\right)\left(P \cdot J \cdot P^{-1}\right)\left(P \cdot J \cdot P^{-1}\right) = P \cdot J \cdot \left(P^{-1} \cdot P\right) \cdot J \cdot \left(P^{-1} \cdot P\right) \cdot J \cdot P^{-1} =$$

$$= \left\{P^{-1} \cdot P = I\right\} = P \cdot J \cdot I \cdot J \cdot I \cdot J \cdot P^{-1} = P \cdot J \cdot J \cdot J \cdot P^{-1} = P \cdot J^3 \cdot P^{-1}$$

Con lo que queda demostrada la igualdad $A^3 = P \cdot J^3 \cdot P^{-1}$.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) A una tienda de decoración le han encargado decorar las mesas de un salón de celebraciones con centros florales y candelabros. En el salón se montan siempre entre 12 y 40 mesas. En cada mesa solo se puede colocar un centro floral o un candelabro y, además, el número de candelabros no puede ser superior a una tercera parte de los centros florales. Si el precio de cada centro floral es de 32 € y el de cada candelabro de 35 €, ¿cuántos artículos de cada tipo debe seleccionar la tienda para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos?

Llamemos x = "número de centros florales", y = "número de candelabros".

Deseamos maximizar los ingresos que vienen expresados como $I(x,y)=32x+35y$.
Las restricciones del problema son:

"En el salón se montan siempre entre 12 y 40 mesas" → $12 \le x+y \le 40$

"El número de candelabros no puede ser superior a una tercera parte de los centros florales" → $y \le \frac{x}{3}$

"Las cantidades deben ser positivas" → $x \ge 0;\ y \ge 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 12 \le x+y \le 40 \\ y \le \dfrac{x}{3} \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$x+y=12$

x	$y=12-x$
0	12
9	3
12	0

$x+y=40$

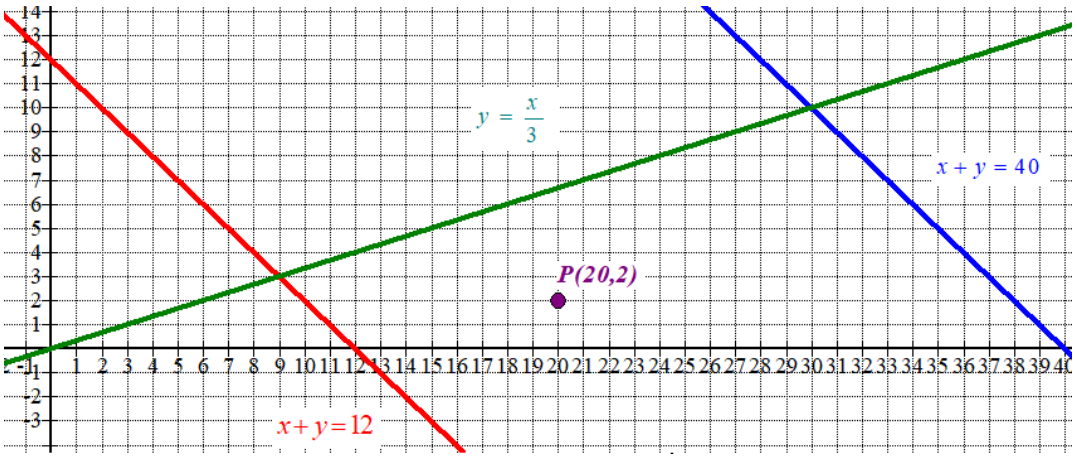
x	$y=40-x$
0	40
30	10
40	0

$y=\frac{x}{3}$

x	$y=\frac{x}{3}$
0	0
9	3
30	10

$x \ge 0;\ y \ge 0$

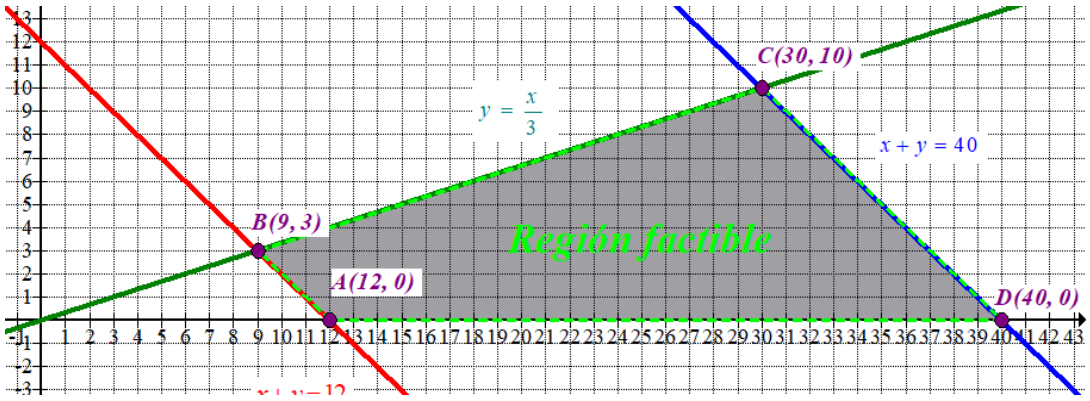
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 12 \le x+y \le 40 \\ y \le \dfrac{x}{3} \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las rectas verde y azul y por encima de la recta roja. Lo comprobamos viendo si el punto P(20, 2) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 12 \le 20+2 \le 40 \\ 2 \le \dfrac{20}{3} \\ 20 \ge 0;\ 2 \ge 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos los ingresos $I(x, y) = 32x + 35y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(12, 0) → $I(12,0) = 32 \cdot 12 + 35 \cdot 0 = 384$
B(9, 3) → $I(9,3) = 32 \cdot 9 + 35 \cdot 3 = 393$
C(30, 10) → $I(30,10) = 32 \cdot 30 + 35 \cdot 10 = 1310$ ¡Máximo!
D(40, 0) → $I(40,0) = 32 \cdot 40 + 35 \cdot 0 = 1280$

Los ingresos máximos son de 1310 € y se consiguen en el vértice C(30, 10), que significa poner 30 centros florales y 10 candelabros.

EJERCICIO 3

La superficie de ampliación de un parque de atracciones, en decámetros cuadrados, coincide con el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+6x$ y $g(x)=\frac{x^2}{5}$.

a) **(1 punto)** Represente gráficamente la superficie de ampliación del parque de atracciones.

b) **(1.5 puntos)** Si el coste para acondicionar el nuevo suelo es de 75 €/m^2, calcule el área de ampliación del parque y el coste total del acondicionamiento.

a) Averiguamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow -x^2+6x=\frac{x^2}{5}\Rightarrow -5x^2+30x=x^2\Rightarrow -6x^2+30x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x(x-5)=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-5=0\Rightarrow x=5 \end{cases}$$

La región del plano delimitada por la gráfica de las dos funciones está situada entre 0 y 5. Hallamos el vértice de las parábolas $f(x)$ y *g(x)*.

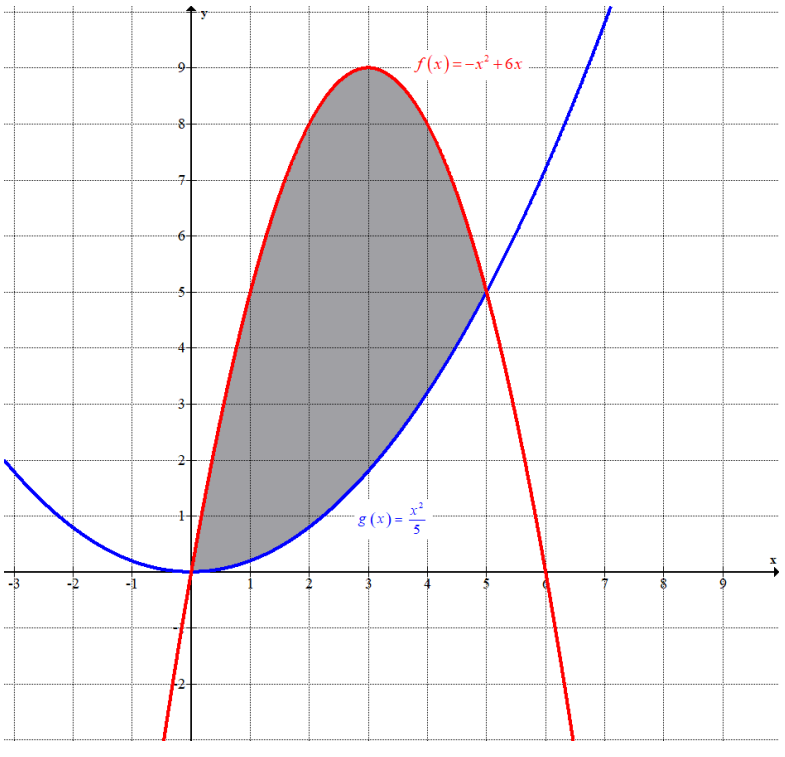
$$\left.\begin{matrix} f'(x)=-2x+6 \\ f'(x)=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow -2x+6=0\Rightarrow x-3=0\Rightarrow x=3$$

$$\left.\begin{matrix} g'(x)=\frac{2x}{5} \\ g'(x)=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{2x}{5}=0\Rightarrow x=0$$

Hacemos una tabla de valores y representamos la región del plano delimitada por las dos gráficas.

x	$f(x)=-x^2+6x$
0	0
1	5
2	8
3	9
5	5

x	$g(x)=\frac{x^2}{5}$
0	0
1	1/5
2	4/5
3	9/5
5	5



b) El área de la ampliación es la integral definida entre 0 y 5 de $f(x)-g(x)$.

$$Área=\int_0^5 f(x)-g(x)dx=\int_0^5 -x^2+6x-\frac{x^2}{5}dx=\int_0^5 -\frac{6}{5}x^2+6xdx=$$

$$=\left[-\frac{6}{5}\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^5=\left[-\frac{2x^3}{5}+3x^2\right]_0^5=\left[-\frac{2\cdot 5^3}{5}+3\cdot 5^2\right]-\left[-\frac{2\cdot 0^3}{5}+3\cdot 0^2\right]=25\ dam^2$$

El área de la ampliación tiene un valor de 25 decámetros cuadrados, que equivalen a 2500 metros cuadrados.
Como el precio del nuevo suelo es de 75 €/m^2 el coste del acondicionamiento es de $2500\cdot 75=187500$ euros.

EJERCICIO 4

Se consideran las funciones

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2 & si\ \ -1\le x\le 1\\ (x-2)^2 & si\ \ 1<x\le 3\end{cases};\qquad g(x)=1\ \ si\ \ -1\le x\le 3$$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f* y *g* en sus dominios.

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y calcule su área.

a) La función en el intervalo $[-1,1)$ tiene la expresión $f(x)=2-x^2$, es una función polinómica, por lo que es continua y derivable con derivada $f\,'(x)=-2x$.

La función en el intervalo $(1,3]$ tiene la expresión $f(x)=(x-2)^2$, es una función polinómica, por lo que es continua y derivable con derivada $f\,'(x)=2(x-2)$.

Estudiamos la continuidad de *f(x)* en *x = 1*.

- Existe $f(1)=2-1^2=1$
- Existe $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2-x^2=1$
- Existe $\lim\limits_{x\to 1^+} v(t)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)^2=(1-2)^2=1$
- Los tres valores son iguales.

Se cumplen todas las condiciones y *f(x)* es continua en *x = 1*.
La función es continua en [–1, 3].

Estudiamos la derivabilidad en *x = 1*. Para ello comprobamos si las derivadas laterales coinciden.

La derivada de la función es $f\,'(x)=\begin{cases}-2x & si\ -1\le x<1\\ 2(x-2) & si\ 1<x\le 3\end{cases}$

Calculamos las derivadas laterales en *x = 1*.

$$\left.\begin{aligned}f\,'(1^-)&=\lim_{x\to 1^-}-2x=-2\\ f\,'(1^+)&=\lim_{x\to 1^+}2(x-2)=2(1-2)=-2\end{aligned}\right\}\Rightarrow f\,'(1^-)=f\,'(1^+)=-2$$

La función es derivable en *x = 1*.
La función es derivable en [–1, 3].

La función *g(x)* es una función constante que es continua y derivable en [–1, 3].

b) Averiguamos donde coinciden las gráficas de las dos funciones.

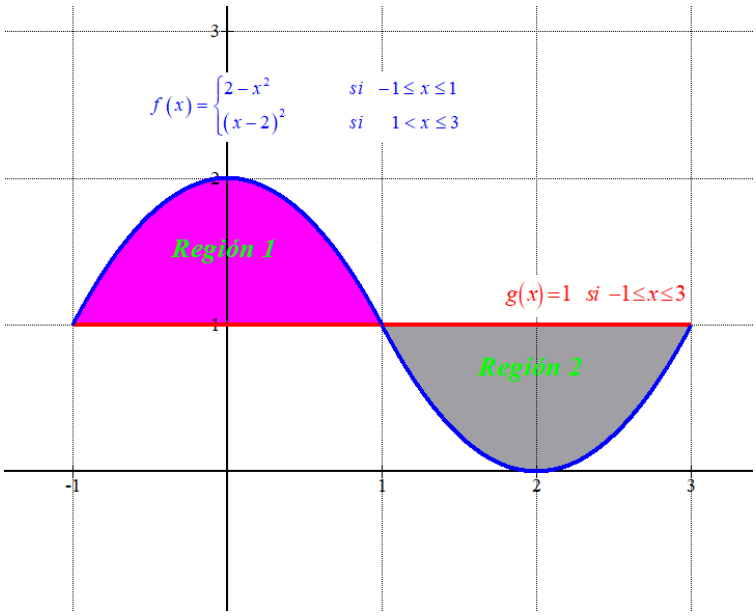
$$f(x)=g(x)\Rightarrow\begin{cases}2-x^2=1\to 1=x^2\to x=\sqrt{1}=\pm 1\in[-1,1]\\ (x-2)^2=1\to x-2=\sqrt{1}=\pm 1\to\begin{cases}x-2=-1\to x=1\notin(1,3]\\ x-2=1\to x=3\in(1,3]\end{cases}\end{cases}$$

Las gráficas coinciden en tres puntos. El área del recinto limitado por ellas lo dividimos en dos partes que calculamos con dos integrales definidas: una entre –1 y 1 y la segunda entre 1 y 3.

Hacemos una tabla de valores y representamos las gráficas de las funciones y la región encerrada entre ellas.

x	$f(x)$
–1	1
0	2
1	1
2	0
3	1

x	$g(x)=1$
–1	1
0	1
1	1
2	1
3	1



Calculamos el área de la región 1.

$$Área\,1=\int_{-1}^{1} f(x)-g(x)\,dx=\int_{-1}^{1} 2-x^2-1\,dx=\int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx=$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\left[1-\frac{1^3}{3}\right]-\left[-1-\frac{(-1)^3}{3}\right]=1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\,u^2$$

Calculamos el área de la región 2.

$$Área\,2=\int_{1}^{3} g(x)-f(x)\,dx=\int_{1}^{3} 1-(x-2)^2\,dx=\int_{1}^{3} 1-\left(x^2-4x+4\right)dx=$$

$$=\int_{1}^{3} -x^2+4x-3\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right]_{1}^{3}=$$

$$=\left[-\frac{3^3}{3}+2\cdot 3^2-3\cdot 3\right]-\left[-\frac{1^3}{3}+2\cdot 1^2-3\cdot 1\right]=-9+18-9+\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}\,u^2$$

El área del recinto limitado por las gráficas de las dos funciones es la suma de las dos áreas obtenidas: $\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\simeq 2.667\ u^2$.

EJERCICIO 5

En una encuesta realizada en una librería se ha determinado que el 45% de sus clientes compran novelas históricas, mientras que el 40% no compra novelas de fantasía. Además, de los clientes que compran novelas de fantasía, sólo el 30% compran también novelas históricas. Elegido un cliente al azar, calcule la probabilidad de que:

a) **(0.75 puntos)** Compre novelas históricas y de fantasía.

b) **(1 punto)** No compre novelas históricas y tampoco de fantasía.

c) **(0.75 puntos)** Compre una novela de fantasía, sabiendo que no ha comprado ninguna novela histórica.

Hay un 40 % de clientes que no compran novelas de fantasía, por lo que el 100 – 40 = 60 % de los clientes compran novelas de fantasía. De estos sólo el 30% compran también novelas históricas, es decir, $0.60 \cdot 0.30 = 0.18$. Por lo que el 18 % de los clientes compran novelas históricas y de fantasía.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Compran novelas de fantasía	No compran novelas de fantasía	
Compran novelas históricas	18		45
No compran novelas históricas			
	60	40	100

Completamos la tabla.

	Compran novelas de fantasía	No compran novelas de fantasía	
Compran novelas históricas	18	**27**	45
No compran novelas históricas	**42**	**13**	**55**
	60	40	100

a) Hay un 18 % de clientes que compran novela histórica y novela de fantasía. La probabilidad de que un cliente compre novelas históricas y de fantasía es de 0.18.

b) Hay un 13 % de clientes que no compran novelas históricas ni de fantasía. La probabilidad de que un cliente no compre novelas históricas y tampoco de fantasía es de 0.13.

c) Hay un 55 % de clientes que no compran novelas históricas y un 42 % compran novela de fantasía, pero no histórica.

La probabilidad de que un cliente compre una novela de fantasía, sabiendo que no ha comprado ninguna novela histórica es $\frac{42}{55} \simeq 0.7636$.

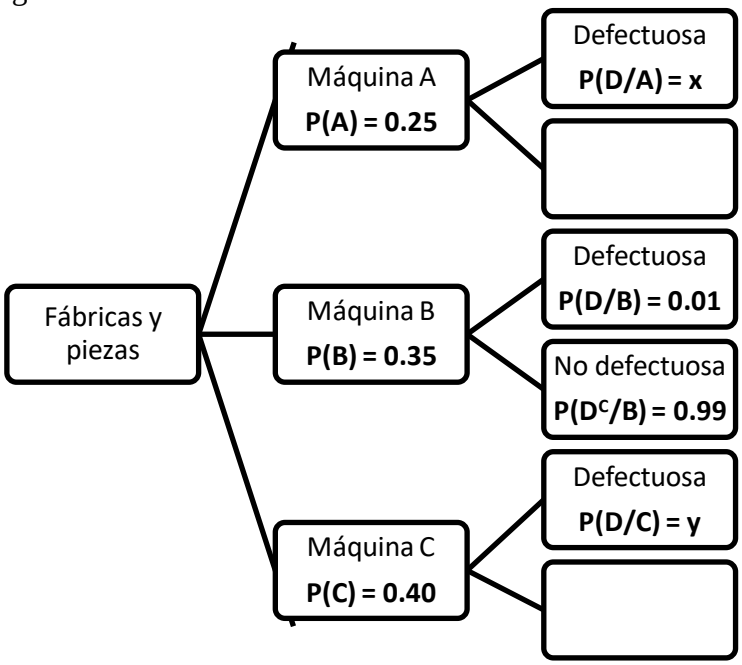
EJERCICIO 6

Una fábrica dispone de 3 máquinas A, B y C para la fabricación de una cierta pieza. El 25% de las piezas son fabricadas por la máquina A, el 35% por B y el resto por C. Tras un estudio se determina que el 2.05% del total de las piezas fabricadas son defectuosas y que el 1% de las piezas fabricadas por B son defectuosas.

a) **(1.25 puntos)** Se selecciona una pieza al azar y resulta no ser defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que fuera fabricada por la máquina B?

b) **(1.25 puntos)** Si A y C tienen la misma probabilidad de fabricar una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que una pieza sea fabricada por A sabiendo que es defectuosa?

Llamamos A al suceso "la pieza la fabrica la máquina A", B a "la pieza la fabrica la máquina B" y C a "la pieza la fabrica la máquina C". Llamamos D al suceso "la pieza es defectuosa". Realizamos un diagrama de árbol.



El 2.05% del total de las piezas fabricadas son defectuosas lo que implica que $P(D)=0.0205$.

a) Nos piden calcular $P(B/D^C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D^C)=\frac{P(B\cap D^C)}{P(D^C)}=\frac{P(B)P(B/D^C)}{1-P(D)}=\frac{0.35\cdot 0.99}{1-0.0205}=\boxed{\frac{231}{653}\simeq 0.3538}$$

La probabilidad de que una pieza no defectuosa haya sido fabricada por la máquina B es de 0.3538.

b) Si $P(D/A)=P(D/C)$ tenemos que $x = y$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.0205=0.25\cdot x+0.35\cdot 0.01+0.4\cdot x\Rightarrow 0.65x=0.017\Rightarrow x=\frac{0.017}{0.65}\simeq 0.0262$$

Hemos obtenido que $P(D/A)=P(D/C)=0.0262$.

Nos piden calcular $P(A/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{P(A)P(D/A)}{P(D)}=\frac{0.25\cdot 0.0262}{0.0205}=\frac{131}{410}\simeq 0.319$$

La probabilidad de que una pieza sea fabricada por A sabiendo que es defectuosa tiene un valor aproximado de 0.319.

EJERCICIO 7

Se ha administrado un determinado medicamento a una muestra de 220 enfermos de una población que padece una cierta enfermedad y se ha observado una respuesta positiva en 165 de ellos.

a) **(1.5 puntos)** Estime, mediante un intervalo de confianza del 97.5%, la proporción de enfermos que responderían positivamente si este medicamento se administrase a la población de la que se ha extraído la muestra. Según el intervalo obtenido, razone si puede admitirse que el porcentaje de enfermos que responderían positivamente al medicamento administrado es del 70%.

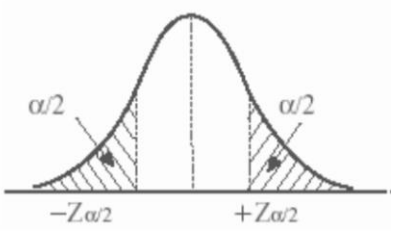
b) **(1 punto)** Con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea menor que el 2.5%?

Tamaño de la muestra es $n = 220$. $pr = \frac{165}{220} = 0.75$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.75 = 0.25$

a) Con un nivel de confianza del 97.5 % determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \alpha = 0.975 \rightarrow \alpha = 0.025 \rightarrow \alpha/2 = 0.0125 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.9875 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.24}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	
2,2					0,9875
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	



Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.24 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{220}} \simeq 0.0654$$

El error es de 0.0654.

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.75 - 0.0654,\quad 0.75 + 0.0654) = (0.6846, 0.8154)$$

Con un nivel de confianza del 97.5% la proporción de enfermos que responderían positivamente si este medicamento se administrase a la población de la que se ha extraído la muestra estaría entre 68.46% y 81.54%.

¿Puede admitirse que el porcentaje de enfermos que responderían positivamente al medicamento administrado es del 70%?

Si, pues este porcentaje está en el intervalo de confianza obtenido.

b) Con un nivel de confianza del 97.5 % tenemos que $z_{\alpha/2}$ **= 2.24**. La proporción muestral es $pr = 0.75$.

El error máximo es de 0.025, lo sustituimos en la fórmula del error y despejamos *n*.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.025 = 2.24 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{n}} \Rightarrow \frac{0.025}{2.24} = \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.025}{2.24}\right)^2 = \frac{0.75 \cdot 0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.75 \cdot 0.25}{\left(\frac{0.025}{2.24}\right)^2} = 1505.28$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 1506 enfermos.

EJERCICIO 8

Un atleta obtiene los siguientes tiempos, en minutos, de 10 repeticiones cronometradas de una prueba:

2.71 3.84 3.26 2.28 2.86 3.08 3.07 2.46 2.54 2.58

Por experiencias anteriores se sabe que el tiempo en cada repetición sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.36 minutos.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza para el tiempo medio de estas repeticiones con un 93.5% de confianza.

b) **(1.25 puntos)** ¿Cuántas repeticiones como mínimo se tendrán que cronometrar si se quiere obtener un error en la estimación del tiempo medio inferior a 0.05 minutos manteniendo el mismo nivel de confianza?

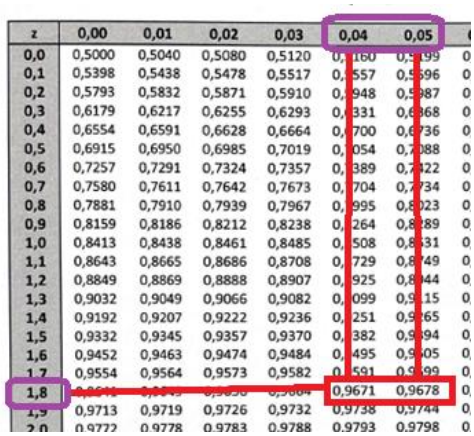
Calculamos la media de la muestra.

$$\bar{x} = \frac{2.71+3.84+3.26+2.28+2.86+3.08+3.07+2.46+2.54+2.58}{10} = 2.868 \text{ minutos}$$

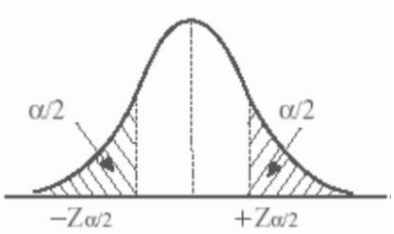
X = Tiempo en minutos de cada repetición cronometrada de una prueba. X = N(μ, 0.36)

a) El tamaño de la muestra es $n = 10$. La media muestral es $\bar{x} = 2.868$ minutos.
Con un nivel de confianza del 93.5% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$1 - \alpha = 0.935 \rightarrow \alpha = 0.065 \rightarrow \alpha/2 = 0.0325 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.9675 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.84+1.85}{2} = 1.845$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120		
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517		
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910		
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293		
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664		
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019		
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357		
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673		
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967		
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238		
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485		
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708		
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907		
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082		
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236		
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370		
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484		
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582		
1,8					0,9671	0,9678
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798



Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.845 \cdot \frac{0.36}{\sqrt{10}} = 0.21$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(2.868 - 0.21,\ 2.868 + 0.21\right) = \left(2.658,\ 3.078\right)$$

b) Con el mismo nivel de confianza tenemos que $z_{\alpha/2}$ **= 1.845**.
El error máximo es de 0.05 minutos, lo sustituimos en la fórmula del error y despejamos n.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.845 \cdot \frac{0.36}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.05\sqrt{n} = 1.845 \cdot 0.36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.845 \cdot 0.36}{0.05} \Rightarrow n = \left(\frac{1.845 \cdot 0.36}{0.05}\right)^2 \simeq 176.46$$

El número mínimo de repeticiones es de 177.

PevAU 2024 Ordinaria (reserva) Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2023-2024	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones: **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$

a) **(2 puntos)** Resuelva la siguiente ecuación $A\cdot B\cdot X\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

b) **(0.5 puntos)** Halle las dimensiones de las matrices D y E para que tenga sentido la igualdad $A\cdot D=E\cdot B$.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un centro de bricolaje, que almacena bidones de pintura de interior y de exterior, cuenta con una capacidad máxima de almacenaje de 160 bidones. Por una cuestión logística, en el almacén deben mantenerse al menos 60 bidones, siendo como mínimo 20 bidones de pintura interior. Además, el número de bidones de pintura exterior almacenados no podrá ser inferior al de pintura interior. Se sabe que el gasto diario por almacenar cada bidón de pintura interior es de 1.50€ y por cada bidón de pintura exterior es de 0.90€. Calcule cuántos bidones de cada tipo se deben almacenar para que el gasto diario sea mínimo e indique cuánto supone ese gasto mínimo.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se desea analizar la evolución de la población de una localidad. Se conoce que la función f aproxima el número de habitantes que tiene la población para cada tiempo t, medido en meses, con $t \in [0, 60]$. El crecimiento de esta población viene dado por la siguiente expresión:

$$f'(t)=400+30\sqrt{t}$$

También se sabe que la población en la actualidad, $t=0$, es de 90000 habitantes.

a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál será la población dentro de 9 meses?

b) **(0.75 puntos)** Calcule $\int_9^{16} f'(t)\,dt$ e interprete el resultado.

c) **(0.5 puntos)** Si se entrega una ayuda de 150 € por cada nuevo habitante durante los tres primeros años, calcule la cuantía total aproximada de la ayuda que recibirá la localidad.

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}3+e^{x} & si \quad x<1\\ x^{2}+ax+2 & si \quad x\geq 1\end{cases}$$

a) **(1 punto)** Determine el valor de a para que la función f sea continua en $\mathbb{R}$. Para ese valor de a, ¿es f derivable?

b) **(0.5 puntos)** Para $a=-3$, calcule la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.

c) **(1 punto)** Para $a=-3$, represente la región limitada por la gráfica de f, las rectas $x=2$, $x=4$ y el eje de abscisas. Calcule el área de dicha región.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una tienda vende ropa de tallas M, L y XL. Se sabe que el 65% de sus clientes son mujeres. El 50% de las mujeres que compran ropa en esa tienda usan la talla M y el 10 % la talla XL. De los hombres, el 40% usan la talla L y el 45% la XL.

a) **(1 punto)** ¿Qué porcentaje de mujeres que compran ropa en esa tienda no usan la talla XL?

b) **(0.75 puntos)** Halle el porcentaje de clientes que no usan la talla L.

c) **(0.75 puntos)** De los clientes que usan la talla M, ¿qué porcentaje son mujeres?

EJERCICIO 6

El 75% de los estudiantes de un centro aprueba la asignatura A y un 55% aprueba la asignatura B. Además, un 35% del total de estudiantes aprueba ambas. Elegido un estudiante al azar de este centro, calcule las siguientes probabilidades:

a) **(1 punto)** No apruebe B sabiendo que ha aprobado A.

b) **(0.25 puntos)** Aprueba alguna de estas asignaturas.

c) **(0.5 puntos)** No apruebe ni A ni B.

d) **(0.5 puntos)** Haya aprobado A si se sabe que ha aprobado alguna de estas dos asignaturas.

e) **(0.25 puntos)** Estudie si los sucesos "aprobar A" y "aprobar B" son independientes

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.25 puntos)** Para estimar la proporción de mujeres matriculadas en carreras STEM en Andalucía, se realiza una encuesta a 2000 universitarias andaluzas elegidas al azar y se obtiene que 710 de ellas están matriculadas en carreras STEM. Con un nivel de confianza del 96.5%, calcule un intervalo de confianza para estimar la proporción de mujeres matriculadas en carreras STEM en Andalucía.

b) **(1.25 puntos)** En otra comunidad autónoma, al seleccionar una muestra de universitarias, se observa que el porcentaje de mujeres matriculadas en carreras STEM es del 37%. Con un nivel de confianza del 98%, calcule el tamaño mínimo de esa nueva muestra para que el error máximo cometido sea del 1.5%.

EJERCICIO 8

La cuota mensual de las hipotecas en una ciudad es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica igual a 140 €.

a) **(1 punto)** Se toma una muestra aleatoria de hipotecas en dicha ciudad y se obtiene que el intervalo de confianza al 95% para la media de las cuotas mensuales es (517.65 , 551.95). Calcule el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) **(0.5 puntos)** Escogida otra muestra de 78 hipotecas en esa ciudad y con un nivel de confianza del 97%, calcule el error máximo cometido para estimar la cuota mensual media.

c) **(1 punto)** Si en otra ciudad la cuota mensual de las hipotecas sigue una distribución Normal de media 540 € y desviación típica de 150 €, calcule la probabilidad de que la cuota de una hipoteca elegida al azar en dicha ciudad esté comprendida entre 600 y 700 euros.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$

a) **(2 puntos)** Resuelva la siguiente ecuación $A\cdot B\cdot X\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

b) **(0.5 puntos)** Halle las dimensiones de las matrices D y E para que tenga sentido la igualdad $A\cdot D=E\cdot B$.

a) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A\cdot B\cdot X\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow X=(A\cdot B)^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}C^{-1}$$

Determinamos la expresión de $A\cdot B$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-1-1 & -1+0+2\\ 0+1+0 & 2+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3\quad\cdot\quad 3}\times 2\longrightarrow 2\times 2$$

Comprobamos que tiene inversa y la calculamos.

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4-1=-5\neq 0\rightarrow \text{Existe la matriz inversa}$$

$$(A\cdot B)^{-1}=\frac{Adj\left((A\cdot B)^{T}\right)}{|A\cdot B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}}{-5}=\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

Determinamos la inversa de la matriz C.

$$|C|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=1+0+6-0-3-3=1\neq 0\rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$C^{-1}=\frac{Adj\left(C^{T}\right)}{|C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 3 & -3 & -2\end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X=(A\cdot B)^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}C^{-1}=\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3&1\\-1&1&1\\3&-3&-2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3&1\\-1&1&1\\3&-3&-2\end{pmatrix}=\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}-4+1+0&6-1-0&2-1-0\\2+2+0&-3-2+0&-1-2+0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}-3&5&1\\4&-5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/5&-1&-1/5\\-4/5&1&3/5\end{pmatrix}$$

b) Consideramos que la matriz D es de dimensiones $m\times n$ y la E de dimensiones $p\times q$.

Realizamos un esquema con los dos productos.

$$\left.\begin{array}{c}A\ \cdot\ D\\2\times\boxed{3\ \cdot\ m}\times n\\E\ \cdot\ B\\p\times\boxed{q\ \cdot\ 3}\times 2\end{array}\right\}$$

Para que sean posibles los productos debe ser $m = q = 3$.

$$\left.\begin{array}{l}A\ \cdot\ D\\2\times\boxed{3\ \cdot\ 3}\times n\to 2\times n\\E\ \cdot\ B\\p\times\boxed{3\ \cdot\ 3}\times 2\to p\times 2\end{array}\right\}$$

Como debe ser $A\cdot D=E\cdot B$ las dos matrices resultado de los productos deben tener la misma dimensión, por lo que $n = p = 2$.

La matriz D deben ser de dimensiones 3×2 y la matriz E debe ser de dimensiones 2×3.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un centro de bricolaje, que almacena bidones de pintura de interior y de exterior, cuenta con una capacidad máxima de almacenaje de 160 bidones. Por una cuestión logística, en el almacén deben mantenerse al menos 60 bidones, siendo como mínimo 20 bidones de pintura interior. Además, el número de bidones de pintura exterior almacenados no podrá ser inferior al de pintura interior. Se sabe que el gasto diario por almacenar cada bidón de pintura interior es de 1.50€ y por cada bidón de pintura exterior es de 0.90€. Calcule cuántos bidones de cada tipo se deben almacenar para que el gasto diario sea mínimo e indique cuánto supone ese gasto mínimo.

Llamemos x = "número de bidones de pintura interior almacenados", y = "número de bidones de pintura exterior almacenados".

Deseamos minimizar el gasto de almacenaje que viene expresado como $G(x,y)=1.5x+0.9y$.

Las restricciones del problema son:

- "El almacén cuenta con una capacidad máxima de almacenaje de 160 bidones" → $x+y\le 160$
- "En el almacén deben mantenerse al menos 60 bidones, siendo como mínimo 20 bidones de pintura interior" → $x+y\ge 60;\ x\ge 20$.
- "El número de bidones de pintura exterior almacenados no podrá ser inferior al de pintura interior" → $y\ge x$.
- "Las cantidades deben ser positivas" → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 160 \\ x+y\ge 60 \\ x\ge 20 \\ y\ge x \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$x+y=160$

x	$y=160-x$
0	160
80	80
160	0

$x+y=60$

x	$y=60-x$
0	60
20	40
60	0

$x=20$

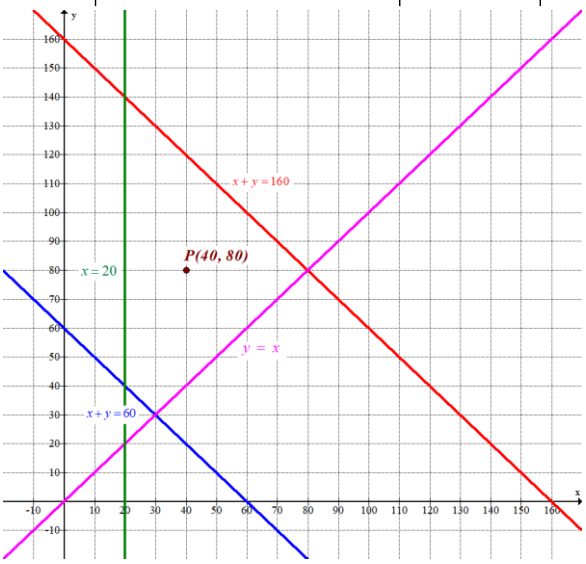
$x=20$	y
20	0
20	3
20	10

$y=x$

x	$y=x$
0	0
20	20
80	80

$x\ge 0;\ y\ge 0$

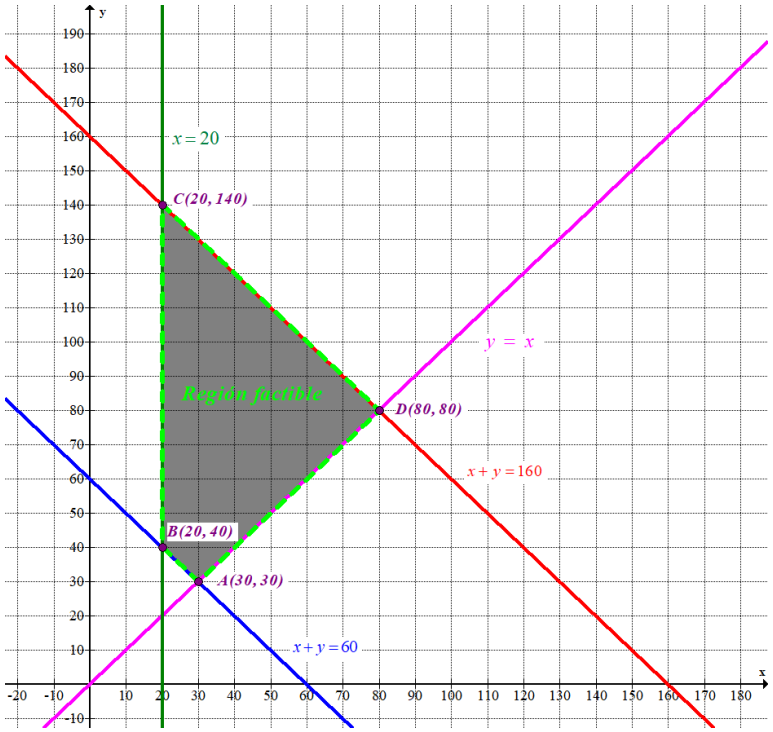
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\le 160 \\ x+y\ge 60 \\ x\ge 20 \\ y\ge x \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de la recta roja, por encima de las rectas rosa y azul y a la derecha de la recta vertical verde. Lo comprobamos viendo si el punto P(40, 80) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 40+80\le 160 \\ 40+80\ge 60 \\ 40\ge 20 \\ 80\ge 40 \\ 40\ge 0;\ 80\ge 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos los gastos $G(x,y)=1.5x+0.9y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor mínimo.

A(30, 30) → $G(30,30)=1.5\cdot 30+0.9\cdot 30=72$
B(20, 40) → $G(20,40)=1.5\cdot 20+0.9\cdot 40=66$ ¡*Mínimo*!
C(20, 140) → $G(20,140)=1.5\cdot 20+0.9\cdot 140=156$
D(80, 80) → $G(80,80)=1.5\cdot 80+0.9\cdot 80=192$

El gasto mínimo es de 66 € y se consiguen en el vértice B(20, 40), que significa almacenar 20 bidones de pintura interior y 40 de pintura exterior..

EJERCICIO 3

Se desea analizar la evolución de la población de una localidad. Se conoce que la función f aproxima el número de habitantes que tiene la población para cada tiempo t, medido en meses, con $t \in [0, 60]$. El crecimiento de esta población viene dado por la siguiente expresión:

$$f'(t) = 400 + 30\sqrt{t}$$

También se sabe que la población en la actualidad, $t = 0$, es de 90000 habitantes.

a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál será la población dentro de 9 meses?

b) **(0.75 puntos)** Calcule $\int_9^{16} f'(t)\,dt$ e interprete el resultado.

c) **(0.5 puntos)** Si se entrega una ayuda de 150 € por cada nuevo habitante durante los tres primeros años, calcule la cuantía total aproximada de la ayuda que recibirá la localidad.

a) Calculamos la integral de la función crecimiento para obtener la función que indica la población en cada mes.

$$f(t) = \int f'(t)\,dt = \int 400 + 30\sqrt{t}\,dt = \int 400 + 30t^{1/2}\,dt = 400t + 30\frac{t^{3/2}}{3/2} = 400t + 20\sqrt{t^3} + K$$

Como sabemos que $f(0) = 90000$ lo utilizamos para obtener el valor de K.

$$\left.\begin{array}{l} f(t) = 400t + 20\sqrt{t^3} + K \\ f(0) = 90000 \end{array}\right\} \Rightarrow 90000 = 400\cdot 0 + 20\sqrt{0^3} + K \Rightarrow K = 90000$$

La función que expresa el número de habitantes cada mes es $f(t) = 400t + 20\sqrt{t^3} + 90000$.

Nos piden determinar $f(9)$.

$$f(9) = 400\cdot 9 + 20\sqrt{9^3} + 90000 = 94140$$

Dentro de 9 meses la población será de 94140 habitantes.

b) $\int_9^{16} f'(t)\,dt = \left[400t + 20\sqrt{t^3}\right]_9^{16} = 400\cdot 16 + 20\sqrt{16^3} - \left(400\cdot 9 + 20\sqrt{9^3}\right) = 3540$.

El valor obtenido nos indica lo que ha aumentado la población del mes 9 al mes 16.

c) Averiguamos cuanto aumenta la población desde el inicio al mes 36 (acabado el tercer año).

$$f(36) = 400\cdot 36 + 20\sqrt{36^3} + 90000 = 18720 + 90000$$

Como la población al inicio es de 90000 habitantes podemos afirmar que en los tres primeros años la población ha aumentado en 18720 habitantes.
Multiplicamos este número de habitantes por 150 € de ayuda por habitante.

$$18720\cdot 150 = 2808000$$

La localidad recibe una ayuda total de 2.808.000 euros.

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}3+e^x & si \quad x<1\\ x^2+ax+2 & si \quad x\geq 1\end{cases}$$

a) **(1 punto)** Determine el valor de a para que la función f sea continua en $\mathbb{R}$. Para ese valor de a, ¿es f derivable?

b) **(0.5 puntos)** Para $a=-3$, calcule la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.

c) **(1 punto)** Para $a=-3$, represente la región limitada por la gráfica de f, las rectas $x=2$, $x=4$ y el eje de abscisas. Calcule el área de dicha región.

a) Para que la función f sea continua en $\mathbb{R}$ debe serlo en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^2+a\cdot 1+2=3+a\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2+ax+2=3+a\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 3+e^x=3+e\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\end{array}\right\}\Rightarrow 3+a=3+e\Rightarrow \boxed{a=e}$$

Para $a=e$ la función es continua. La función queda $f(x)=\begin{cases}3+e^x & si \quad x<1\\ x^2+ex+2 & si \quad x\geq 1\end{cases}$.

¿La función es derivable? Es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$, vemos si lo es en $x=1$. Para serlo deben coincidir los valores de las derivadas laterales.

$$f(x)=\begin{cases}3+e^x & si \quad x<1\\ x^2+ex+2 & si \quad x\geq 1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}e^x & si \quad x<1\\ 2x+e & si \quad x>1\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^x=e\\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+e=2+e\end{array}\right\}\Rightarrow f'(1^-)=e\neq 2+e=f'(1^+)$$

Las derivadas laterales tienen distinto valor por lo que la función no es derivable en $x=1$.

b) Para $a=-3$ la función queda $f(x)=\begin{cases}3+e^x & si \quad x<1\\ x^2-3x+2 & si \quad x\geq 1\end{cases}$. Como nos piden la recta tangente en $x=0$ la función en un entorno de este valor es $f(x)=3+e^x$.

Calculamos la ecuación de la recta tangente en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=3+e^0=3+1=4\\ f'(x)=e^x\to f'(0)=e^0=1\\ y-f(0)=f'(0)(x-0)\end{array}\right\}\Rightarrow y-4=1(x)\Rightarrow \boxed{y=x+4}$$

La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ tiene ecuación $y=x+4$.

c) Para $a=-3$ la función queda $f(x)=\begin{cases}3+e^x & si \quad x<1\\ x^2-3x+2 & si \quad x\geq 1\end{cases}$. Como la región está entre $x=2$ y $x=4$ la función en ese intervalo tiene la expresión $f(x)=x^2-3x+2$.

Vemos si la gráfica de esta función corta el eje de abscisas entre 2 y 4.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-3x+2\\ Eje\,OX \rightarrow y=0\end{array}\right\} \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=2\\ \frac{3-1}{2}=1\end{cases}$$

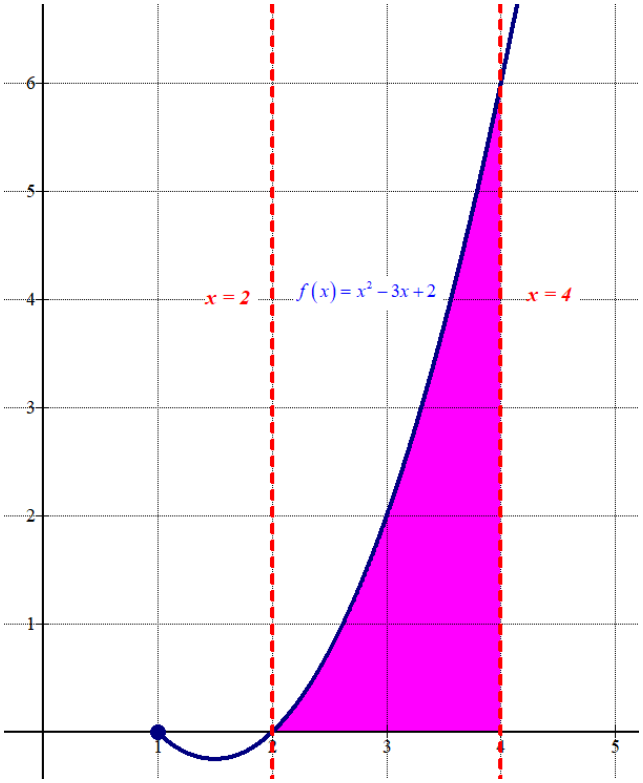
Los puntos de corte no están en el intervalo (2, 4). Como $f(3)=3^2-3\cdot 3+2=2>0$ la función es positiva en el intervalo y el área pedida es el valor de la integral definida de la función entre 2 y 4.

$$Área=\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4 x^2-3x+2dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_2^4=$$

$$=\left[\frac{4^3}{3}-\frac{3}{2}4^2+2\cdot 4\right]-\left[\frac{2^3}{3}-\frac{3}{2}2^2+2\cdot 2\right]=\frac{64}{3}-24+8-\left(\frac{8}{3}-6+4\right)=\frac{56}{3}-14=\boxed{\frac{14}{3}\simeq 4.66u^2}$$

Hacemos una tabla de valores de la función y representamos la región de la cual hemos calculado el área.

x	$f(x)=x^2-3x+2$
1	0
2	0
3	2
4	6



Si contamos los cuadraditos de 1 unidad cuadrada cada uno vemos que el resultado obtenido se corresponde con lo que se observa en el dibujo.

EJERCICIO 5

Una tienda vende ropa de tallas M, L y XL. Se sabe que el 65% de sus clientes son mujeres. El 50% de las mujeres que compran ropa en esa tienda usan la talla M y el 10 % la talla XL. De los hombres, el 40% usan la talla L y el 45% la XL.

a) **(1 punto)** ¿Qué porcentaje de mujeres que compran ropa en esa tienda no usan la talla XL?

b) **(0.75 puntos)** Halle el porcentaje de clientes que no usan la talla L.

c) **(0.75 puntos)** De los clientes que usan la talla M, ¿qué porcentaje son mujeres?

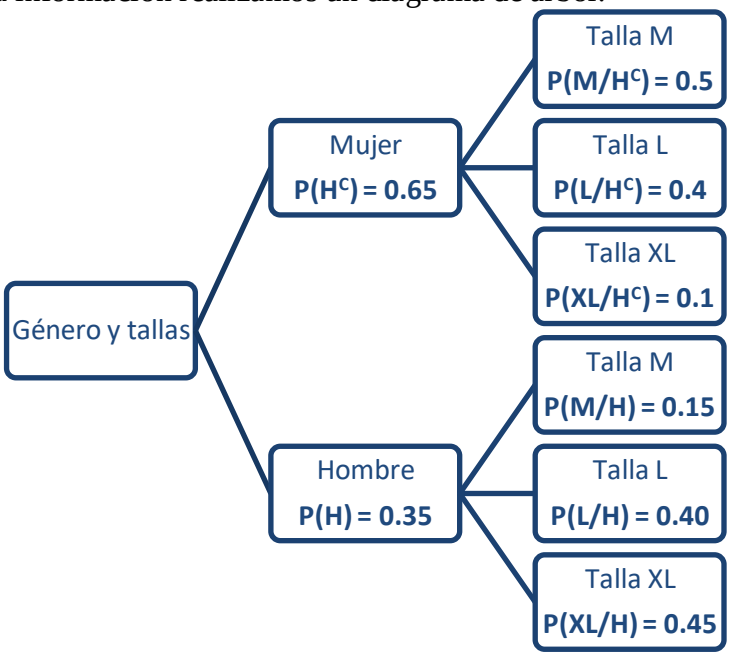
Llamamos H al suceso "ser hombre" y M, L y XL a los sucesos "usar talla M, L o XL, respectivamente".

Nos dicen en el ejercicio que $P\left(H^C\right)=0.65$, por lo que $P\left(H\right)=1-0.65=0.35$.

$P\left(M/H^C\right)=0.5$ y $P\left(XL/H^C\right)=0.10$, por lo que $P\left(L/H^C\right)=1-0.5-0.1=0.4$.

$P\left(L/H\right)=0.4$ y $P\left(XL/H\right)=0.45$, por lo que $P\left(M/H\right)=1-0.4-0.45=0.15$

Para ordenar toda la información realizamos un diagrama de árbol.



a) Si el 10% de las mujeres usan XL el restante 100 – 10 = 90% no usan XL.

b) Calculamos $P\left(L\right)$. Usamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(L\right)=P\left(H\right)P\left(L/H\right)+P\left(H^C\right)P\left(L/H^C\right)=0.35\cdot0.4+0.65\cdot0.4=\boxed{0.4}$$

El 40 % de los clientes usan talla L, por lo que el restante 100 – 40 = 60% no usan talla L.

c) Hallamos el valor de $P\left(H^C/M\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(H^C/M\right)=\frac{P\left(H^C\cap M\right)}{P\left(M\right)}=\frac{P\left(H^C\right)P\left(M/H^C\right)}{P\left(H\right)P\left(M/H\right)+P\left(H^C\right)P\left(M/H^C\right)}=$$

$$=\frac{0.65\cdot0.5}{0.35\cdot0.15+0.65\cdot0.5}=\boxed{\frac{130}{151}\simeq0.861}$$

De los clientes que usan la talla M el 86.1% son mujeres (aproximadamente).

EJERCICIO 6

El 75% de los estudiantes de un centro aprueba la asignatura A y un 55% aprueba la asignatura B. Además, un 35% del total de estudiantes aprueba ambas. Elegido un estudiante al azar de este centro, calcule las siguientes probabilidades:

a) **(1 punto)** No apruebe B sabiendo que ha aprobado A.

b) **(0.25 puntos)** Aprueba alguna de estas asignaturas.

c) **(0.5 puntos)** No apruebe ni A ni B.

d) **(0.5 puntos)** Haya aprobado A si se sabe que ha aprobado alguna de estas dos asignaturas.

e) **(0.25 puntos)** Estudie si los sucesos "aprobar A" y "aprobar B" son independientes

Realizamos una tabla de contingencia con los datos del problema.

	Aprueban B	No aprueban B	
Aprueban A	**35**		**75**
No aprueban A			
Totales	**55**		**100**

Completamos la tabla.

	Aprueban B	No aprueban B	
Aprueban A	**35**	**40**	**75**
No aprueban A	**20**	**5**	**25**
Totales	**55**	**45**	**100**

a) Hay un 75% de alumnos que aprueban A y un 40% aprueban A y no aprueban B. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que al elegir un alumno de entre los que han aprobado A este no haya aprobado B es de $\frac{40}{75}=\frac{8}{15}\simeq 0.5333$.

b) Hay un 35 % de alumnos que aprueban A y B, un 40% de alumnos que aprueban A y no B y un 20% de alumnos que aprueban B y no A. Si sumamos hay un 35 + 40 + 20 = 95% de alumnos que aprueban alguna de las asignaturas. La probabilidad de que al elegir un alumno este apruebe alguna de las asignaturas es de 0.95.

c) Solo hay un 5% de alumnos que no aprueban ni A ni B. La probabilidad de que al elegir un alumno al azar este no apruebe ni A ni B es de 0.05.

d) Hay un 95% de alumnos que aprueban alguna de las asignaturas y de estos han aprobado A un 35 + 40 = 75%, La probabilidad de que el alumno elegido haya aprobado A si se sabe que ha aprobado alguna de estas dos asignaturas es de $\frac{75}{95}=\frac{15}{19}\simeq 0.79$.

e) Para que sean independientes debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.35 \\ P(A)P(B)=0.75\cdot 0.55=0.4125 \end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0.35\neq 0.4125=P(A)P(B)$$

Al no cumplirse la igualdad los sucesos A y B no son independientes.

EJERCICIO 7

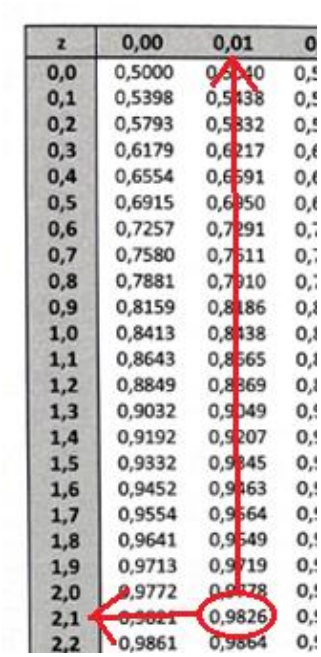
a) **(1.25 puntos)** Para estimar la proporción de mujeres matriculadas en carreras STEM en Andalucía, se realiza una encuesta a 2000 universitarias andaluzas elegidas al azar y se obtiene que 710 de ellas están matriculadas en carreras STEM. Con un nivel de confianza del 96.5%, calcule un intervalo de confianza para estimar la proporción de mujeres matriculadas en carreras STEM en Andalucía.

b) **(1.25 puntos)** En otra comunidad autónoma, al seleccionar una muestra de universitarias, se observa que el porcentaje de mujeres matriculadas en carreras STEM es del 37%. Con un nivel de confianza del 98%, calcule el tamaño mínimo de esa nueva muestra para que el error máximo cometido sea del 1.5%.

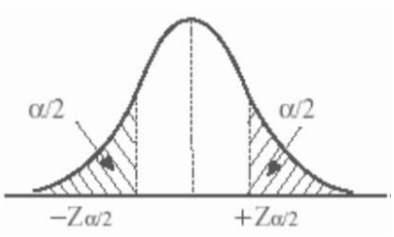
a) Tamaño de la muestra es $n = 2000$. $pr = \frac{710}{2000} = 0.355$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.355 = 0.645$

Con un nivel de confianza del 96.5 % determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \alpha = 0.965 \rightarrow \alpha = 0.035 \rightarrow \alpha/2 = 0.0175 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.9825 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.11}$



z	0,00	0,01	0
0,0	0,5000	0,5040	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5
0,3	0,6179	0,6217	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6
0,6	0,7257	0,7291	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7
0,9	0,8159	0,8186	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9
1,8	0,9641	0,9649	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9
2,1	0,9821	0,9826	0,9
2,2	0,9861	0,9864	0,9



Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.11 \cdot \sqrt{\frac{0.355 \cdot 0.645}{2000}} \simeq 0.0226$$

El error es de 0.0226.

El intervalo de confianza para la proporción es:

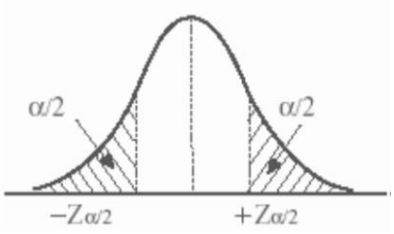
$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.355 - 0.0226,\ \ 0.355 + 0.0226) = (0.3324, 0.3776)$$

Con un nivel de confianza del 96.5% la proporción de mujeres matriculadas en carreras STEM en Andalucía estaría entre 33.24% y 37.76%.

b) Con un nivel de confianza del 98 % determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.33}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,(
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9



La proporción muestral es $pr = 0.37$.

El error máximo es de 0.015, lo sustituimos en la fórmula del error y despejamos *n*.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.015 = 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.37 \cdot 0.63}{n}} \Rightarrow \frac{0.015}{2.33} = \sqrt{\frac{0.37 \cdot 0.63}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.015}{2.33}\right)^2 = \frac{0.37 \cdot 0.63}{n} \Rightarrow n = \frac{0.37 \cdot 0.63}{\left(\frac{0.015}{2.33}\right)^2} = 5624.34$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 5625 mujeres universitarias.

EJERCICIO 8

La cuota mensual de las hipotecas en una ciudad es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica igual a 140 €.

a) **(1 punto)** Se toma una muestra aleatoria de hipotecas en dicha ciudad y se obtiene que el intervalo de confianza al 95% para la media de las cuotas mensuales es (517.65 , 551.95). Calcule el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) **(0.5 puntos)** Escogida otra muestra de 78 hipotecas en esa ciudad y con un nivel de confianza del 97%, calcule el error máximo cometido para estimar la cuota mensual media.

c) **(1 punto)** Si en otra ciudad la cuota mensual de las hipotecas sigue una distribución Normal de media 540 € y desviación típica de 150 €, calcule la probabilidad de que la cuota de una hipoteca elegida al azar en dicha ciudad esté comprendida entre 600 y 700 euros.

X = La cuota mensual de las hipotecas en una ciudad. X = N(μ, 140)

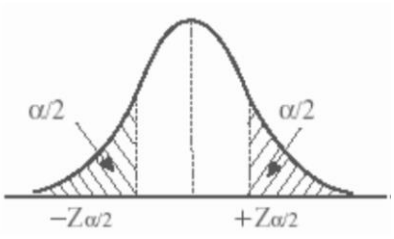
a) La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{517.65 + 551.95}{2} = 534.8\,€$$

Con un nivel de confianza del 95% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803



El error del intervalo de confianza es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{551.95 - 517.65}{2} = 17.15\,€$$

Utilizamos la fórmula del error para despejar *n*.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 17.15 = 1.96 \cdot \frac{140}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{17.15}{1.96} = \frac{140}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

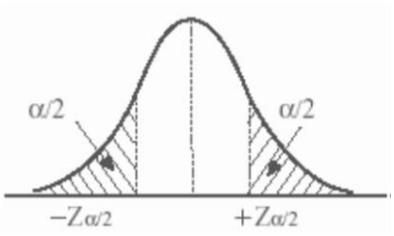
$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{140}{\frac{17.15}{1.96}} = 16 \Rightarrow n = 16^2 = 256$$

El tamaño de la muestra es de 256 hipotecas.

b) Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	



El tamaño de la muestra es $n = 78$.
Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{140}{\sqrt{78}} \simeq 34.4\,€$$

El error máximo es de 34.4 €.

c) X = La cuota mensual de las hipotecas en una ciudad. X = N(540, 150)
Nos piden calcular $P(600 \le X \le 700)$.

$$P(600 \le X \le 700) = P(X \le 700) - P(X \le 600) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X - 540}{150} \end{matrix} \right\} =$$

$$= P\left(Z \le \frac{700 - 540}{150}\right) - P\left(X \le \frac{600 - 540}{150}\right) = P(Z \le 1.066) - P(Z \le 0.4) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} = \frac{0.8554 + 0.8577}{2} - 0.6554 = \boxed{0.20115}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199		
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596		
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987		
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368		
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736		
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088		
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422		
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734		
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023		
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289		
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749		

z	0,00
0,0	
0,1	
0,2	
0,3	
0,4	0,6554
0,5	

La probabilidad de que la cuota de una hipoteca elegida al azar en dicha ciudad esté comprendida entre 600 y 700 euros tiene un valor aproximado de 0.20115.

PevAU 2023 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2022-2023	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$

a) **(1.5 puntos)** Pruebe que se verifica que $A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)$.

b) **(1 punto)** Dada la ecuación matricial $X^tA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, determine la dimensión de X y resuelva la ecuación.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un artesano decide montar dos tipos de anillos utilizando dos tipos de piedras semipreciosas, una de mayor calidad que otra. Para montar uno de los anillos tarda 20 minutos y utiliza 1 de las piedras de mayor calidad y 2 de las de menor calidad. Para el otro tarda 50 minutos y utiliza 3 piedras de mayor calidad y 1 de menor calidad.
Semanalmente, el artesano dispone de 200 piedras de mayor calidad y 150 de menor calidad. Además, quiere trabajar al menos 1900 minutos a la semana.
Sabiendo que el primer tipo de anillo se vende a 21 €, el segundo a 50 € y que deben fabricarse al menos 20 anillos del primer tipo a la semana, determine cuántos anillos de cada tipo deben montarse para maximizar el valor de la venta. ¿A cuánto asciende dicho valor?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

El área quemada de la región plana de la cubierta de plástico de un invernadero, coincide con el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=(x-1)^2$ y $g(x)=5-2x$ donde x está expresado en metros.

a) **(1 punto)** Represente gráficamente la zona deteriorada.
b) **(1.5 puntos)** Para reparar la región quemada, se ha de utilizar plástico cuyo coste es de 15 euros por metro cuadrado. Si en el trabajo de reparación se desperdicia la tercera parte del plástico adquirido, ¿Cuánto costará el plástico comprado?

EJERCICIO 4

Sea la función $f(t)=\dfrac{12t-24}{t+3}; t\geq 0$

a) **(1.5 puntos)** Represente gráficamente la función *f*, determinando los puntos de corte con los ejes coordenados y las ecuaciones de las asíntotas, y estudiando la monotonía y la curvatura de *f*.

b) Si la función *f* representa los beneficios de una empresa, en millones de euros, donde *t* indica los años de vida de la empresa:

b1) **(0.5 puntos)** ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas? Justifique la respuesta.

b2) **(0.5 puntos)** A medida que pasan los años, ¿están limitados los beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite y por qué?

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una caja contiene 3 fichas verdes, 2 fichas azules y 4 fichas rojas. Un juego consiste en realizar dos extracciones, sin reemplazamiento, de tal manera que el jugador que saque dos fichas azules gana el primer premio, el jugador que saque dos fichas verdes gana el segundo premio y el jugador que, de las dos fichas, una sea azul y otra de color diferente gana el tercer premio.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un jugador consiga el primer o segundo premio.

b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un jugador gane el tercer premio.

c) **(1 punto)** Sabiendo que un jugador ha obtenido premio, ¿Cuál es la probabilidad de que haya ganado el tercer premio?

EJERCICIO 6

Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0.6$, $P(B)=0.3$ y $P(A/B)=0.6$. Se pide:

a) **(0.5 puntos)** $P(A\cup B)$

b) **(0.75 puntos)** $P(A-B)+P(B-A)$

c) **(0.75 puntos)** $P(B/A^C)$

d) **(0.5 puntos)** Razone si los sucesos A y B son independientes, ¿Son incompatibles?

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1 punto)** Un gimnasio establece sus tarifas por grupos de edad: juvenil, adulto y senior. Tiene matriculados 25 juveniles, 75 adultos y 50 seniors. Se quiere seleccionar una muestra de 30 personas del gimnasio utilizando un muestreo con afijación proporcional. ¿Cuál será la composición que debe tener dicha muestra?

b) **(1.5 puntos)** Dada la población {9, 11, 13, 18, 20}, calcule la varianza de la distribución de las medias muestrales de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple.

EJERCICIO 8

En el otoño de 2021, el municipio de El Paso en la Isla de La Palma sufrió la erupción del volcán Cumbre Vieja. Al finalizar la erupción, se escogió una muestra de 500 casas resultando que 325 de ellas estaban afectadas por la erupción.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de casas afectadas por la erupción del volcán. Según el resultado obtenido, ¿se puede admitir que el porcentaje de casas afectadas por el volcán es del 64 %?

b) **(1.25 puntos)** Para un nivel de confianza del 92% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo de estimación sea del 2%?

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

a) **(1.5 puntos)** Pruebe que se verifica que $A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)$.

b) **(1 punto)** Dada la ecuación matricial $X^tA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, determine la dimensión de X y resuelva la ecuación.

a) Calculamos la matriz $\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2-4A+5I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 1\end{pmatrix}$$

Comprobamos que $A\cdot\left(\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)\right)=I_3$ y por tanto $A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)$.

$$A\cdot\left(\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -1/2+1/2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3$$

b) La matriz X es de dimensiones $m\times n$ y por tanto la matriz A^t es de dimensiones $n\times m$:

$$X^tA\quad=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$n\times\boxed{m\cdot 3}\times 3\rightarrow n\times 3$$

Para que sea posible el producto $X^t A$ debe ser $m = 3$.
El resultado del producto $X^t A$ es una matriz de dimensiones $n \times 3$ y el resultado debe ser de dimensiones 2×3, por lo que $n = 2$.
La matriz X es de dimensiones 3×2.

Resolvemos la ecuación matricial. Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \Rightarrow X^t = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

$$X^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 2c-e & e \\ b & 2d-f & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{a = 1} \\ 2c - e = 2 \rightarrow 2c = 2 \rightarrow \boxed{c = 1} \\ \boxed{e = 0} \\ \boxed{b = 3} \\ 2d - f = -1 \rightarrow 2d - 1 = -1 \rightarrow 2d = 0 \rightarrow \boxed{d = 0} \\ \boxed{f = 1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$X^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un artesano decide montar dos tipos de anillos utilizando dos tipos de piedras semipreciosas, una de mayor calidad que otra. Para montar uno de los anillos tarda 20 minutos y utiliza 1 de las piedras de mayor calidad y 2 de las de menor calidad. Para el otro tarda 50 minutos y utiliza 3 piedras de mayor calidad y 1 de menor calidad.
Semanalmente, el artesano dispone de 200 piedras de mayor calidad y 150 de menor calidad. Además, quiere trabajar al menos 1900 minutos a la semana.
Sabiendo que el primer tipo de anillo se vende a 21 €, el segundo a 50 € y que deben fabricarse al menos 20 anillos del primer tipo a la semana, determine cuántos anillos de cada tipo deben montarse para maximizar el valor de la venta. ¿A cuánto asciende dicho valor?

Llamamos "x" al número de anillos de tipo 1 e "y" al número de anillos del tipo 2.

Realizamos una tabla para ordenar toda la información proporcionada en el ejercicio.

	Minutos	Nº piedras de mayor calidad	Nº de piedras de menor calidad	Valor de la venta
Nº anillos tipo 1 (x)	20x	x	2x	21x
Nº anillos tipo 2 (y)	50y	3y	y	50y
	$20x+50y$	$x+3y$	$2x+y$	$21x+50y$

Deseamos maximizar la función "Valor de la venta" que viene expresada por $V(x,y)=21x+50y$

Las restricciones del problema son:

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Semanalmente, el artesano dispone de 200 piedras de mayor calidad y 150 de menor calidad → $x+3y\leq 200\,;\ 2x+y\leq 150$.

Quiere trabajar al menos 1900 minutos a la semana → $20x+50y\geq 1900$.

"Deben fabricarse al menos 20 anillos del primer tipo a la semana" → $x\geq 20$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 2x+y\leq 150 \\ x+3y\leq 200 \\ 20x+50y\geq 1900 \\ x\geq 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 2x+y\leq 150 \\ x+3y\leq 200 \\ 2x+5y\geq 190 \\ x\geq 20 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+y=150$

x	$y=150-2x$
0	150
50	50
70	10

$x+3y=200$

x	$y=\frac{200-x}{3}$
0	$200/3$
20	60
50	50

$2x+5y=190$

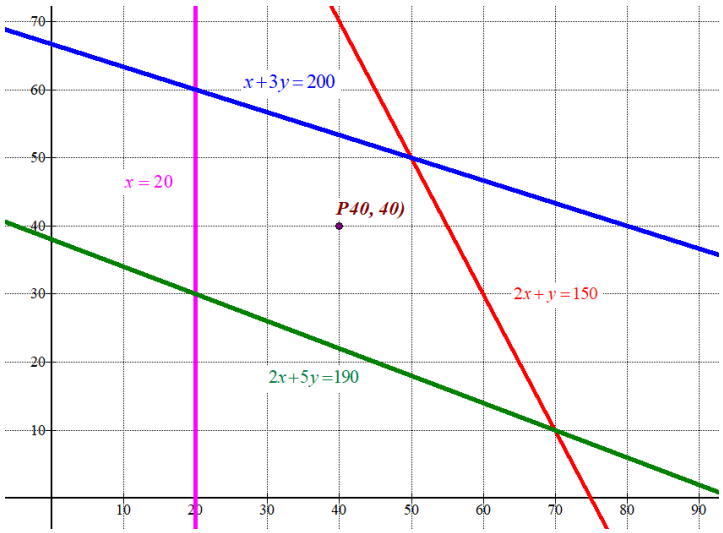
x	$y=\frac{190-2x}{5}$
0	38
20	30
70	10

$x=20$

$x=20$	y
20	20
20	60

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

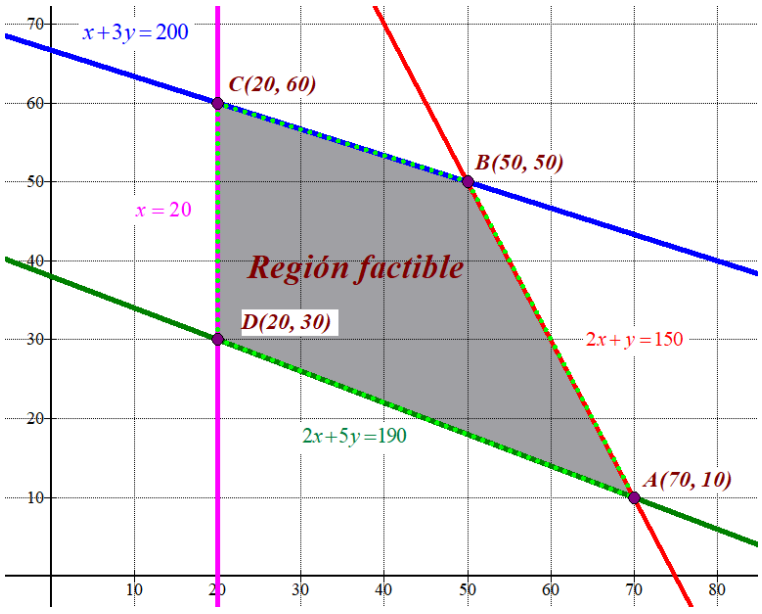


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 150 \\ x + 3y \leq 200 \\ 2x + 5y \geq 190 \\ x \geq 20 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de la recta verde, por debajo de la azul y roja y a la derecha de la recta vertical de color rosa.

Comprobamos que el punto P(40, 40) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 40 \geq 0;\ 40 \geq 0 \\ 2 \cdot 40 + 40 \leq 150 \\ 40 + 3 \cdot 40 \leq 200 \\ 2 \cdot 40 + 5 \cdot 40 \geq 190 \\ 40 \geq 20 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas y la región factible es la coloreada en el siguiente dibujo.



Valoramos la función objetivo $V(x,y)=21x+50y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(70, 10) → $V(70,10)=21\cdot 70+50\cdot 10=1970$

B(20, 30) → $V(20,30)=420+1500=1920$

C(20, 60) → $V(20,60)=420+3000=3420$

D(50, 50) → $V(50,50)=21\cdot 50+50\cdot 50=3550$ ¡Máximo!

El máximo valor de la función es 3550 y se alcanza en el punto D(50, 50).
Fabricando 50 anillos de cada tipo obtenemos unas ventas máximas semanales por valor de 3550 euros.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

El área quemada de la región plana de la cubierta de plástico de un invernadero, coincide con el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=(x-1)^2$ y $g(x)=5-2x$ donde x está expresado en metros.

a) **(1 punto)** Represente gráficamente la zona deteriorada.

b) **(1.5 puntos)** Para reparar la región quemada, se ha de utilizar plástico cuyo coste es de 15 euros por metro cuadrado. Si en el trabajo de reparación se desperdicia la tercera parte del plástico adquirido, ¿Cuánto costará el plástico comprado?

a) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x-1)^2 \\ g(x)=5-2x \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow (x-1)^2=5-2x \Rightarrow x^2-2x+1=5-2x \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow$$

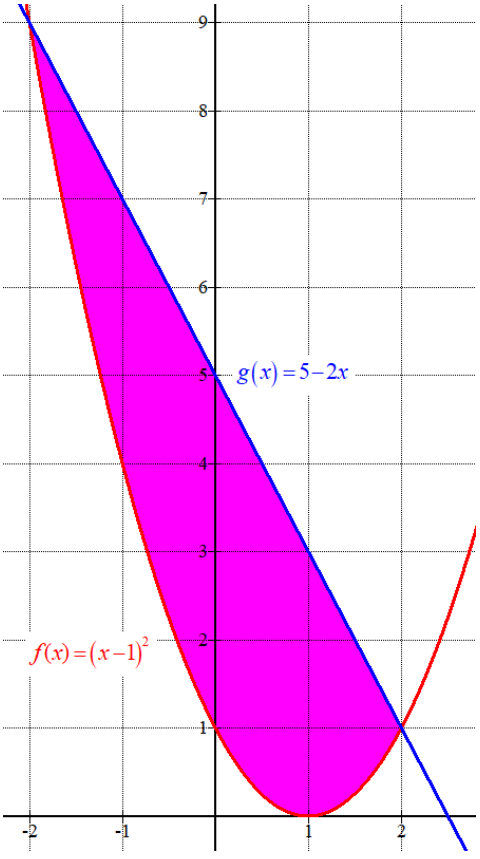
$$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow f(2)=(2-1)^2=1 \rightarrow \boxed{A(2,1)} \\ x=-2 \rightarrow f(-2)=(-2-1)^2=9 \rightarrow \boxed{B(-2,9)} \end{cases}$$

La gráfica de la función $f(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1$ es una parábola con vértice en $x_v=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{2}{2}=1$. Hacemos una tabla de valores para representarla.

La gráfica de la función $g(x)=5-2x$ es una recta. Hacemos una tabla de valores para representarla.

x	$y=(x-1)^2$
-2	9
-1	4
0	1
1	0
2	1

x	$y=5-2x$
-2	9
2	1



b) Hallamos el valor del área de la región coloreada de rosa.

$$\int_{-2}^{2} 5-2x-\left(x^2-2x+1\right)dx=\int_{-2}^{2} 5-2x-x^2+2x-1dx=\int_{-2}^{2} -x^2+4dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2}=\left[-\frac{2^3}{3}+4\cdot 2\right]-\left[-\frac{(-2)^3}{3}+4(-2)\right]=$$

$$=-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8=16-\frac{16}{3}=\boxed{\frac{32}{3}\simeq 10.67\,m^2}$$

El área de la cubierta de plástico quemada es de 32/3 = 10.67 m^2.
Si se desperdicia la tercera parte del plástico adquirido (a m^2) se aprovecha las dos terceras partes ($\frac{2}{3}a$) que deben servir para cubrir $\frac{32}{3}$ m^2.

$$\frac{2a}{3}=\frac{32}{3}\Rightarrow 2a=32\Rightarrow a=16\,m^2.$$

Hay que comprar 16 metros cuadrados de plástico, que a 15 euros por metro cuadrado nos costará 15 · 16 = 240 euros.

EJERCICIO 4

Sea la función $f(t)=\dfrac{12t-24}{t+3}$; $t\geq 0$

a) **(1.5 puntos)** Represente gráficamente la función *f*, determinando los puntos de corte con los ejes coordenados y las ecuaciones de las asíntotas, y estudiando la monotonía y la curvatura de *f*.

b) Si la función *f* representa los beneficios de una empresa, en millones de euros, donde *t* indica los años de vida de la empresa:

b1) **(0.5 puntos)** ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas? Justifique la respuesta.

b2) **(0.5 puntos)** A medida que pasan los años, ¿están limitados los beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite y por qué?

a) Puntos de corte con los ejes coordenados.

$$\left.\begin{array}{l} f(t)=\dfrac{12t-24}{t+3} \\ t=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{12\cdot 0-24}{0+3}=-8 \Rightarrow \boxed{P(0,-8)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(t)=\dfrac{12t-24}{t+3} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{12t-24}{t+3}=0 \Rightarrow 12t-24=0 \Rightarrow 12t=24 \Rightarrow t=2 \Rightarrow \boxed{Q(2,0)}$$

Asíntotas

El denominador de la función se anula para $t = -3$ que no pertenece al dominio de definición de la función: Dominio = $[0,+\infty)$

Asíntotas verticales. $x=a$

No tiene

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{12t-24}{t+3}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{12t}{t}-\frac{24}{t}}{\frac{t}{t}+\frac{3}{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{12-\frac{24}{t}}{1+\frac{3}{t}}=\frac{12-\frac{24}{\infty}}{1+\frac{3}{\infty}}=\frac{12-0}{1-0}=12$$

La recta $y = 12$ es asíntota horizontal cuando $t\to+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

Monotonía de la función.

Estudiamos el signo de la función derivada.

$$f(t)=\frac{12t-24}{t+3} \Rightarrow f'(t)=\frac{12(t+3)-1\cdot(12t-24)}{(t+3)^2}=\frac{12t+36-12t+24}{(t+3)^2}=\frac{60}{(t+3)^2}$$

La derivada siempre es positiva, por lo que la función crece en todo su dominio.

Curvatura de la función.

Estudiamos el signo de la segunda derivada.

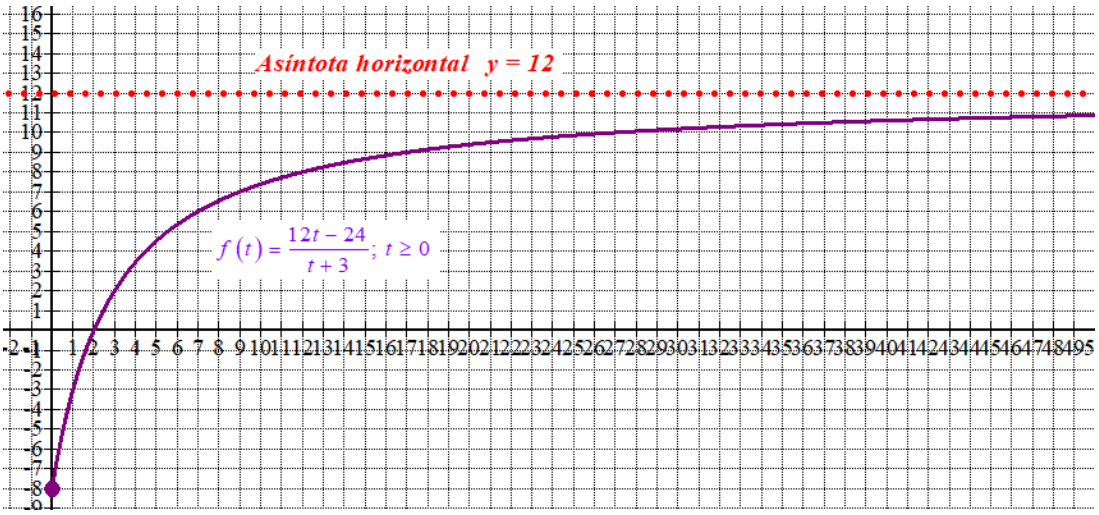
$$f'(t)=\frac{60}{(t+3)^2}\Rightarrow f''(t)=\frac{0-60\cdot 2(t+3)}{(t+3)^4}=\frac{-120(t+3)}{(t+3)^4}=\frac{-120}{(t+3)^3}$$

La segunda derivada cambia de signo en $t = -3$ que no pertenece al dominio ($t\geq 0$). La segunda derivada mantiene su signo constante. Como $f''(1)=\frac{-120}{(1+3)^3}=\frac{-120}{64}<0$ la función siempre es cóncava (∩).

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

$t\geq 0$

t	$y=\frac{12t-24}{t+3}$
0	−8
1	−3
2	0
3	2
7	6
17	9



b)

b1) La función toma valores negativos entre $t = 0$ y $t = 2$, lo que significa que tiene pérdidas desde el inicio ($t = 0$) hasta el segundo año ($t = 2$). Deja de tener pérdidas a partir del año segundo.

b2) A medida que pasan los años (t crece y tiende a $+\infty$) la función se acerca al valor 12, pero no lo sobrepasa (asíntota horizontal $y = 12$), por lo que el tope de beneficios es de 12 millones de euros.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

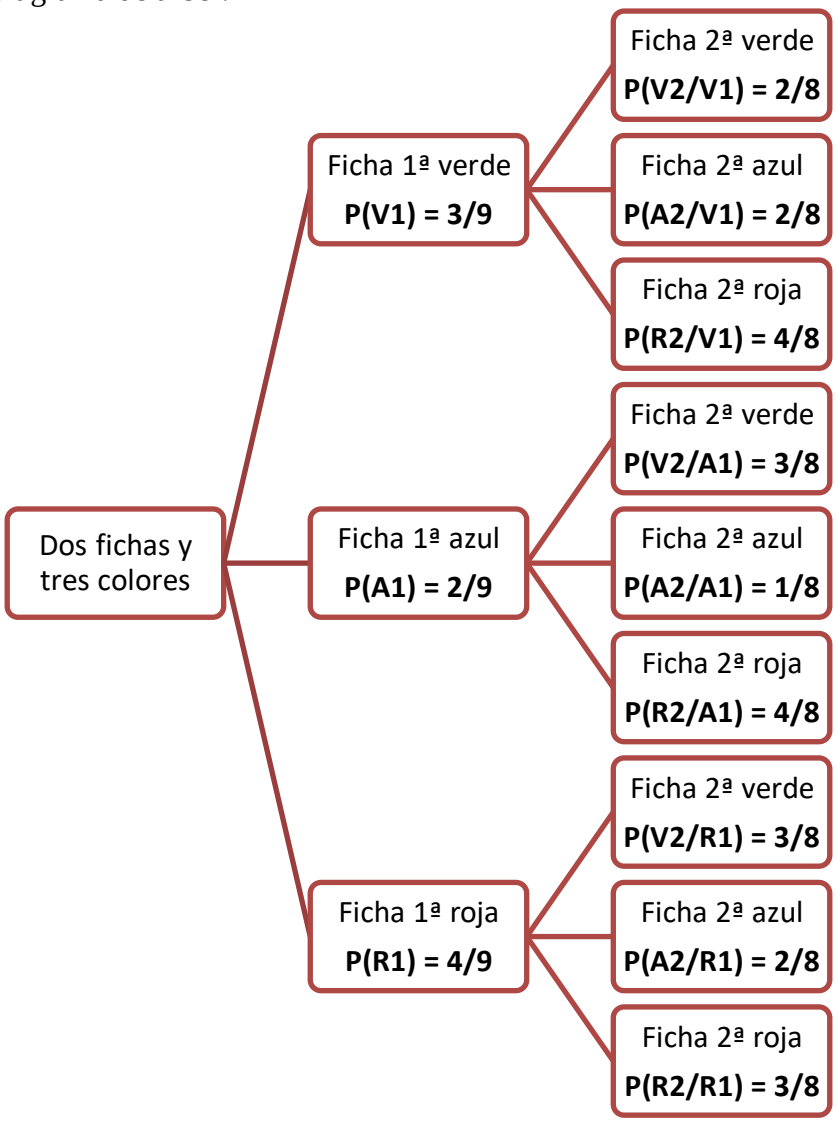
Una caja contiene 3 fichas verdes, 2 fichas azules y 4 fichas rojas. Un juego consiste en realizar dos extracciones, sin reemplazamiento, de tal manera que el jugador que saque dos fichas azules gana el primer premio, el jugador que saque dos fichas verdes gana el segundo premio y el jugador que, de las dos fichas, una sea azul y otra de color diferente gana el tercer premio.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un jugador consiga el primer o segundo premio.

b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un jugador gane el tercer premio.

c) **(1 punto)** Sabiendo que un jugador ha obtenido premio, ¿Cuál es la probabilidad de que haya ganado el tercer premio?

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Si un jugador consigue el primer o segundo premio significa que saca dos fichas azules o dos fichas verdes. Llamamos a este suceso A.

$$P(A) = P(A1 \cap A2) + P(V1 \cap V2) =$$

$$= P(A1)P(A2/A1) + P(V1)P(V2/V1) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} = \frac{8}{72} = \boxed{\frac{1}{9} \simeq 0.111}$$

b) Para que un jugador gane el tercer premio debe sacar una ficha azul y otra de color diferente.

Debe sacar una azul y otra verde o una azul y otra roja, en cualquier orden. Llamamos a este suceso B.

$$P(B)=P(A1\cap V2)+P(V1\cap A2)+P(A1\cap R2)+P(R1\cap A2)=$$

$$=P(A1)P(V2/A1)+P(V1)P(A2/V1)+P(A1)P(R2/A1)+P(R1)P(A2/R1)=$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{28}{72}=\boxed{\frac{7}{18}\simeq 0.39}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A\cup B)=\frac{P(B\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(B)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}A\cap B=\varnothing\\P(A\cap B)=0\end{matrix}\right\}=\frac{\frac{7}{18}}{\frac{1}{9}+\frac{7}{18}-0}=\boxed{\frac{7}{9}\simeq 0.778}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO c)

Sabemos que $P(A)=\frac{1}{9}=\frac{2}{18}$ y que $P(B)=\frac{7}{18}$. Esto significa que de entre los 18 resultados posibles en las extracciones 2 nos permiten obtener el primer o segundo premio y 7 nos permiten obtener el tercer premio, por lo que de las 7 + 2 = 9 formas de obtener premio solo hay 7 de obtener el tercer premio y aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de obtener el tercer premio sabiendo que has obtenido premio es de $\frac{7}{9}\simeq 0.778$.

EJERCICIO 6

Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0.6$, $P(B)=0.3$ y $P(A/B)=0.6$. Se pide:

a) **(0.5 puntos)** $P(A\cup B)$

b) **(0.75 puntos)** $P(A-B)+P(B-A)$

c) **(0.75 puntos)** $P(B/A^C)$

d) **(0.5 puntos)** Razone si los sucesos A y B son independientes, ¿Son incompatibles?

a) Utilizamos el teorema de Bayes y la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A/B)=0.6\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0.6\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{0.3}=0.6\Rightarrow P(A\cap B)=0.18$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.6+0.3-0.18=\boxed{0.72}$$

b) El suceso $A-B$ es igual al suceso $A\cap B^C$ (las dos expresiones significan los valores de A que no están en B).

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)\Rightarrow 0.6=0.18+P(A\cap B^C)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(A\cap B^C)=0.6-0.18=0.42$$

$$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A^C)\Rightarrow 0.3=0.18+P(B\cap A^C)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(B\cap A^C)=0.3-0.18=0.12$$

$$P(A-B)+P(B-A)=0.42+0.12=\boxed{0.54}$$

c) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A^C)=\frac{P(B\cap A^C)}{P(A^C)}=\frac{0.12}{1-0.6}=\boxed{0.3}$$

d) Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=0.18\\P(A)P(B)=0.6\cdot 0.3=0.18\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0.18=P(A)P(B)$$

Se cumple la igualdad y los sucesos A y B son independientes.

Para que los sucesos A y B sean incompatibles debe cumplirse que $P(A\cap B)=0$. Pero la probabilidad de la intersección la hemos obtenido y vale 0.18 que no es 0. Los sucesos no son incompatibles.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1 punto)** Un gimnasio establece sus tarifas por grupos de edad: juvenil, adulto y senior. Tiene matriculados 25 juveniles, 75 adultos y 50 seniors. Se quiere seleccionar una muestra de 30 personas del gimnasio utilizando un muestreo con afijación proporcional. ¿Cuál será la composición que debe tener dicha muestra?

b) **(1.5 puntos)** Dada la población $\{9,11,13,18,20\}$, calcule la varianza de la distribución de las medias muestrales de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple.

a) El tamaño de la población es 25 + 75 + 50 = 150.

Si se eligen 30 de 150 la proporción es 1 de cada 5.

Con esa proporción elegimos $\frac{25}{5}=5$ juveniles.

Con esa proporción elegimos $\frac{75}{5}=15$ adultos.

Con esa proporción elegimos $\frac{50}{5}=10$ seniors.

La composición de la muestra es 5 juveniles, 15 adultos y 10 seniors.

b) Las muestras posibles mediante muestreo aleatorio simple son:

M1 = {9,9} M2 = {9,11}, M3 = {9,13}, M4 = {9,18}, M5 = {9,20},
M6 = {11,9}, M7 = {11,11}, M8 = {11,13}, M9 = {11,18}, M10 = {11,20},
M11 = {13,9}, M12 = {13,11}, M13 = {13,13}, M14 = {13,18}, M15 = {13,20},
M16 = {18,9}, M17 = {18,11}, M18 = {18,13}, M19 = {18,18}, M20 = {18,20}
, M21 = {20,9}, M22 = {20,11}, M23 = {20,13}, M24 = {20,18}, M25 = {20,20},

Las medias muestrales de cada una son:

$$\overline{x}_1=\frac{9+9}{2}=9\ ;\ \overline{x}_2=\frac{9+11}{2}=10\ ;\ \overline{x}_3=\frac{9+13}{2}=11;\ \overline{x}_4=\frac{9+18}{2}=13.5\ ;\ \overline{x}_5=\frac{9+20}{2}=14.5\ ;$$
$$\overline{x}_6=\frac{11+9}{2}=10\ ;\ \overline{x}_7=\frac{11+11}{2}=11;\ \overline{x}_8=\frac{11+13}{2}=12\ ;\ \overline{x}_9=\frac{11+18}{2}=14.5\ ;$$
$$\overline{x}_{10}=\frac{11+20}{2}=15.5\ ;\ \overline{x}_{11}=\frac{13+9}{2}=11\ ;\ \overline{x}_{12}=\frac{13+11}{2}=12\ ;\ \overline{x}_{13}=\frac{13+13}{2}=13\ ;$$
$$\overline{x}_{14}=\frac{13+18}{2}=15.5\ ;\ \overline{x}_{15}=\frac{13+20}{2}=16.5\ ;\ \overline{x}_{16}=\frac{18+9}{2}=13.5\ ;\ \overline{x}_{17}=\frac{18+11}{2}=14.5\ ;$$
$$\overline{x}_{18}=\frac{18+13}{2}=15.5\ ;\ \overline{x}_{19}=\frac{18+18}{2}=18\ ;\ \overline{x}_{20}=\frac{18+20}{2}=19\ ;\ \overline{x}_{21}=\frac{20+9}{2}=14.5\ ;$$
$$\overline{x}_{22}=\frac{20+11}{2}=15.5\ ;\ \overline{x}_{23}=\frac{20+13}{2}=16.5\ ;\ \overline{x}_{24}=\frac{20+18}{2}=19\ ;\ \overline{x}_{25}=\frac{20+20}{2}=20$$

Hacemos una tabla de frecuencias de las medias muestrales.

$\overline{x}_i$	9	10	11	12	13	13.5	14.5	15.5	16.5	18	19	20
f_i	1	2	3	2	1	2	4	4	2	1	2	1

La media de las medias muestrales.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\overline{x_1}\cdot f_1 + \overline{x_2}\cdot f_2 + \overline{x_3}\cdot f_3 + \overline{x_4}\cdot f_4 + ... + \overline{x_{23}}\cdot f_{23} + \overline{x_{24}}\cdot f_{24} + \overline{x_{25}}\cdot f_{25}}{25} =$$

$$= \frac{9\cdot 1 + 10\cdot 2 + 11\cdot 3 + 12\cdot 2 + 13\cdot 1 + 13.5\cdot 2 + 14.5\cdot 4 + 15.5\cdot 4 + 16.5\cdot 2 + 18\cdot 1 + 19\cdot 2 + 20\cdot 1}{10} = 14.2$$

Ya sabíamos que la media de las medias muestrales coincide con la media de la población:

$$\mu = \frac{9+11+13+18+20}{5} = \frac{71}{5} = 14.2$$

Calculamos la varianza. Para ello hacemos una tabla.

$\overline{x_i}$	9	10	11	12	13	13.5
f_i	1	2	3	2	1	2
$\left(\overline{x_i} - \bar{\bar{x}}\right)^2$	27.04	17.64	10.24	4.84	1.44	0.49

$\overline{x_i}$	14.5	15.5	16.5	18	19	20
f_i	4	4	2	1	2	1
$\left(\overline{x_i} - \bar{\bar{x}}\right)^2$	0.09	1.69	5.29	14.44	23.04	33.64

Con los datos de la tabla calculamos la varianza.

$$Varianza = \frac{\left(\overline{x_1} - \bar{\bar{x}}\right)^2\cdot f_1 + \left(\overline{x_2} - \bar{\bar{x}}\right)^2\cdot f_2 + ... + \left(\overline{x_{24}} - \bar{\bar{x}}\right)^2\cdot f_{24} + \left(\overline{x_{25}} - \bar{\bar{x}}\right)^2\cdot f_{25}}{10} =$$

$$= \frac{27.04\cdot 1 + 17.64\cdot 2 + 10.24\cdot 3 + 4.84\cdot 2 + 1.44\cdot 1 + 0.49\cdot 2 + 0.09\cdot 4 + ...}{25}$$

$$\frac{... + 1.69\cdot 4 + 5.29\cdot 2 + 14.44\cdot 1 + 23.04\cdot 2 + 33.64\cdot 1}{25} = \boxed{8.68}$$

EJERCICIO 8

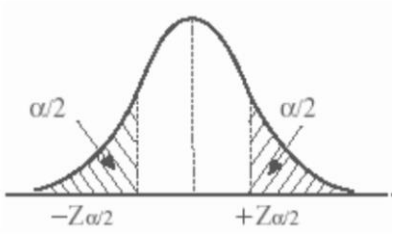
En el otoño de 2021, el municipio de El Paso en la Isla de La Palma sufrió la erupción del volcán Cumbre Vieja. Al finalizar la erupción, se escogió una muestra de 500 casas resultando que 325 de ellas estaban afectadas por la erupción.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de casas afectadas por la erupción del volcán. Según el resultado obtenido, ¿se puede admitir que el porcentaje de casas afectadas por el volcán es del 64 %?

b) **(1.25 puntos)** Para un nivel de confianza del 92% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo de estimación sea del 2%?

Tamaño de la muestra es $n = 500$. $pr = \frac{325}{500} = 0.65$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.65 = 0.35$

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos



$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	
	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	
2,1								0,9850
	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{500}} = 0.0463$$

El error máximo cometido es de 0.0463.

El intervalo de confianza para la proporción de casas afectadas por la erupción es:

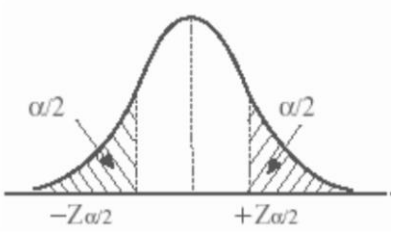
$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.65 - 0.0463,\quad 0.65 + 0.0463) = (0.6037, 0.6963)$$

Un porcentaje de casas afectadas por el volcán del 64 % significa una proporción de 0.64 que pertenece al intervalo de confianza obtenido, por lo que se pude admitir este porcentaje.

b) $pr = \frac{325}{500} = 0.65$. Con un nivel de confianza del 92 % tenemos

$1 - \propto = 0{,}92 \rightarrow \propto = 0{,}08 \rightarrow \propto/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505
1,7					0,9591	0,9599
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678



Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de *n* para un error de 0.02.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.02 = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{n}} \Rightarrow \frac{0.02}{1.75} = \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.02}{1.75}\right)^2 = \frac{0.65 \cdot 0.35}{n} \Rightarrow \frac{0.65 \cdot 0.35}{\left(\frac{0.02}{1.75}\right)^2} = n \Rightarrow n \simeq 1741.8$$

El tamaño de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido.
El tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo de estimación sea del 2% es de 1742 casas.

PevAU 2023 Extraordinaria (suplente) Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2022-2023	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una empresa de pinturas quiere elaborar botes de pintura de dos colores nuevos: Júpiter y Minerva. Para ello, dispone de 1000 kg de pintura de color verde, 800 kg de color morado y 300 kg de color naranja. Para elaborar un bote de color Júpiter se necesitan 10 kg de pintura verde, 5 kg de morada y 5 kg de naranja. Para elaborar un bote de color Minerva se necesitan 5 kg de pintura verde y 5 kg de morada. Sabiendo que se obtiene un beneficio de 30 € por cada bote de pintura Júpiter y 20 € por un bote de pintura Minerva, ¿cuántos botes de cada tipo deberá fabricar la empresa para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál será el valor de ese beneficio?

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}5 & -7 & 6\\ 7 & 0 & 4\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -9\\ -2 & 0 & 11\\ 0 & 4 & -7\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$$

a) **(0.5 puntos)** Halle las dimensiones de las siguientes matrices C^tAC, ACC^tB.

b) **(1 punto)** Calcule, en caso de existir, las inversas de las matrices A y B.

c) **(1 punto)** Resuelva el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases}2X+3Y=A\\ -3X+4Y=B\end{cases}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4x+4 & x<3\\ -x+4 & x\geq 3\end{cases}.$$

a) **(1.25 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en todos los puntos de su dominio.

b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente f.

c) **(0.75 puntos)** Calcule el área de la región limitada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las rectas $x=2$ y $x=4$.

EJERCICIO 4

La función $B(t)=-t^2+21t-20$ con $0\le t\le 15$ representa el beneficio, en miles de euros, de una empresa en función de los años, *t*.

a) **(0.5 puntos)** Si la función $I(t)=-t^2+48t$ representa los ingresos de esta empresa, en miles de euros, para el mismo intervalo de tiempo, ¿cuál es la función de gastos de dicha empresa? ¿Cuáles son los gastos iniciales?
b) **(0.5 puntos)** Calcule el momento a partir del cual el beneficio fue positivo.
c) **(0.75 puntos)** Calcule en qué momento el beneficio fue máximo y el valor del mismo.
d) **(0.75 puntos)** Represente gráficamente la función beneficio.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una fábrica produce procesadores que se clasifican en un primer control en tres tipos, A, B y C, según la frecuencia a la que pueden trabajar. El 60 % de los procesadores fabricados se clasifican de tipo A, el 30 % de tipo B y el resto de tipo C. En un segundo control, se desechan el 20 % de los procesadores de tipo A, el 30 % de los de tipo B y el 60 % de los de tipo C, por problemas al trabajar a ciertas temperaturas. Si se elige un procesador de esta fábrica al azar, calcule la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Sea descartado y sea de tipo A o de tipo B.
b) **(0.75 puntos)** Sea descartado.
c) **(0.75 puntos)** Sea de tipo C sabiendo que no ha sido descartado.

EJERCICIO 6

El 75 % del alumnado de un instituto utiliza la plataforma del centro como medio para comunicarse con sus profesores y el 40 % lo hace a través del correo electrónico. Además, hay un 15 % que no usa ninguno de estos medios. Se elige un estudiante de este instituto al azar.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que utilice ambos medios de comunicación.
b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que utilice solamente uno de estos medios de comunicación.
c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que utilice la plataforma del centro sabiendo que no usa el correo electrónico como medio de comunicación.
d) **(0.5 puntos)** Razone si los sucesos "Utilizar la plataforma del centro" y "Utilizar el correo electrónico" son independientes.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Una empresa fabrica piezas cuyo diámetro sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 9 mm^2.

a) **(0.75 puntos)** Se seleccionan al azar 144 piezas obteniéndose un diámetro medio de 81 *mm*. Determine un intervalo de confianza al 98.5 % para estimar el diámetro medio de las piezas fabricadas por la empresa.
b) **(0.75 puntos)** Con el mismo nivel de confianza del apartado anterior, ¿de qué tamaño mínimo habría que tomar la muestra para obtener un intervalo de confianza con una amplitud máxima de 0.9?
c) **(1 punto)** Suponiendo que la media poblacional es de 80.4 *mm* y tomando muestras aleatorias de 64 piezas, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria

diámetro medio muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro medio muestral esté comprendido entre 79.5 *mm* y 80.7 *mm*?

EJERCICIO 8

Se selecciona una muestra aleatoria de 300 habitantes de una ciudad, a los que se les pregunta si creen que llevan una dieta saludable. De las personas encuestadas, 180 han contestado afirmativamente, mientras que el resto ha respondido que no.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de personas que creen seguir una dieta saludable.

b) **(1.25 puntos)** ¿Cuál sería el número de habitantes mínimo necesario en este estudio de opinión para que se reduzca a un tercio del error cometido en el intervalo $(0.54, 0.66)$ con el mismo nivel de confianza?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una empresa de pinturas quiere elaborar botes de pintura de dos colores nuevos: Júpiter y Minerva. Para ello, dispone de 1000 kg de pintura de color verde, 800 kg de color morado y 300 kg de color naranja. Para elaborar un bote de color Júpiter se necesitan 10 kg de pintura verde, 5 kg de morada y 5 kg de naranja. Para elaborar un bote de color Minerva se necesitan 5 kg de pintura verde y 5 kg de morada. Sabiendo que se obtiene un beneficio de 30 € por cada bote de pintura Júpiter y 20 € por un bote de pintura Minerva, ¿cuántos botes de cada tipo deberá fabricar la empresa para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál será el valor de ese beneficio?

Llamamos "x" al número de botes de pintura Júpiter e "y" al número de pintura Minerva. Realizamos una tabla con los datos del ejercicio.

	Kgs de pintura verde	Kgs de pintura morada	Kgs de pintura naranja	Beneficio
Nº botes Júpiter (x)	10x	5x	5x	30x
Nº botes Minerva (y)	5y	5y		20y
TOTAL	$10x+5y$	$5x+5y$	$5x$	$30x+20y$

"Dispone de 1000 kg de pintura de color verde, 800 kg de color morado y 300 kg de color naranja" → $10x+5y\le 1000;\ 5x+5y\le 800;\ 5x\le 300$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10x+5y\le 1000 \\ 5x+5y\le 800 \\ 5x\le 300 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y\le 200 \\ x+y\le 160 \\ x\le 60 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+y=200$

x	$y=200-2x$
40	120
60	80

$x+y=160$

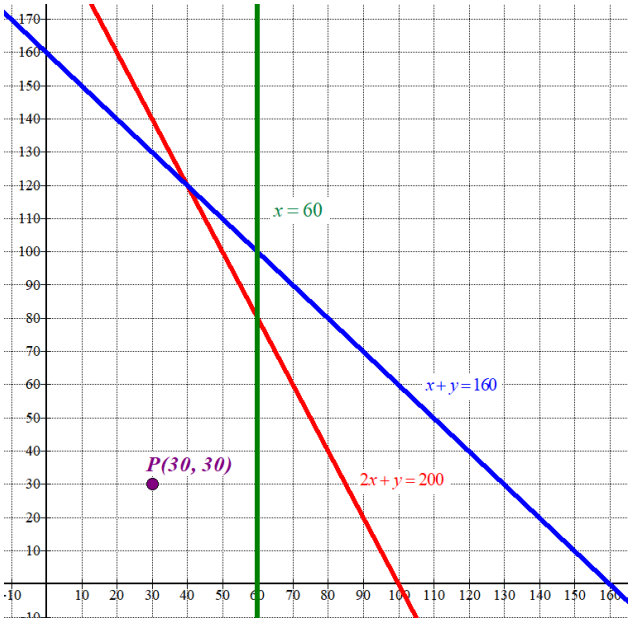
x	$y=160-x$
0	160
40	120

$x=60$

$x=60$	y
60	0
60	80

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

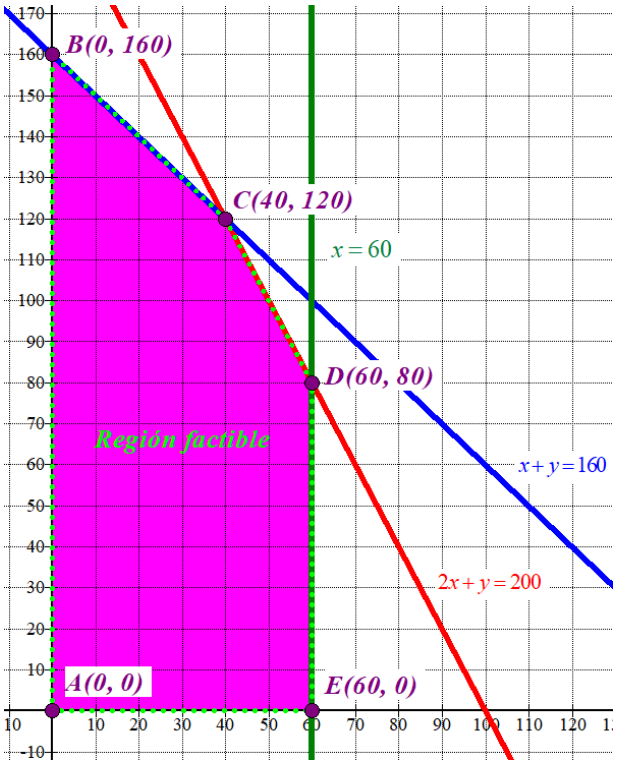


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+y\le 200 \\ x+y\le 160 \\ x\le 60 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja, y a la izquierda de la recta vertical verde.

Comprobamos que el punto P(30, 30) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 30+30\le 200 \\ 30+30\le 160 \\ 30\le 60 \\ 30\ge 0;\ 30\ge 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas y la región factible es la coloreada de rosa en el siguiente dibujo.



Los vértices son los puntos: A(0, 0), B(0, 160), C(40, 120), D(60, 80) y E(60, 0).

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio $B(x,y)=30x+20y$.

Valoramos la función objetivo en cada vértice.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 160) → $B(0,160)=30\cdot 0+20\cdot 160=3200$

C(40, 120) → $B(40,120)=30\cdot 40+20\cdot 120=3600$ ¡Máximo!

D(60, 80) → $B(60,80)=30\cdot 60+20\cdot 80=3400$

E(60, 0) → $B(60,0)=30\cdot 60+20\cdot 0=1800$

El máximo beneficio que se puede obtener cumpliendo con las restricciones es de 3600 euros y se obtiene fabricando 40 botes de pintura Júpiter y 120 de pintura Minerva.

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}5 & -7 & 6\\ 7 & 0 & 4\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -9\\ -2 & 0 & 11\\ 0 & 4 & -7\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$$

a) **(0.5 puntos)** Halle las dimensiones de las siguientes matrices C^tAC, ACC^tB.

b) **(1 punto)** Calcule, en caso de existir, las inversas de las matrices A y B.

c) **(1 punto)** Resuelva el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases}2X+3Y=A\\ -3X+4Y=B\end{cases}$$

a) Si $C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$ entonces $C^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

$$\begin{matrix}C^t\cdot & A & \cdot C\end{matrix}$$
$$1\times\boxed{3\cdot 3}\times\boxed{3\cdot 3}\times 1\longrightarrow 1\times 1$$

La matriz C^tAC es 1×1, tiene una fila y una columna (un único elemento).

$$\begin{matrix}A & \cdot & C & \cdot & C^t & \cdot & B\end{matrix}$$
$$3\times\boxed{3\cdot 3}\times\boxed{1\cdot 1}\times\boxed{3\cdot 3}\times 3\longrightarrow 3\times 3$$

La matriz ACC^tB es 3×3, es una matriz cuadrada de orden 3.

b) Comprobamos si la matriz A tiene inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & -7 & 6\\ 7 & 0 & 4\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix}=0+0+126-(0+49+60)=17\neq 0$$

Su determinante es no nulo y podemos calcular su inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}5 & 7 & 0\\ -7 & 0 & 3\\ 6 & 4 & -1\end{pmatrix}}{17}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 3\\ 4 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-7 & 3\\ 6 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-7 & 0\\ 6 & 4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}7 & 0\\ 4 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}5 & 0\\ 6 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}5 & 7\\ 6 & 4\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}7 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}5 & 0\\ -7 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}5 & 7\\ -7 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-12 & 11 & -28\\ 7 & -5 & 22\\ 21 & -15 & 49\end{pmatrix}}$$

Comprobamos si la matriz B tiene inversa.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -9 \\ -2 & 0 & 11 \\ 0 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 72 - (0 + 28 + 44) = 0$$

Su determinante es nulo y la matriz B no tiene matriz inversa.

c) Despejamos X e Y.

$$\begin{matrix} 3\times \to \\ 2\times \to \end{matrix} \begin{cases} 2X + 3Y = A \\ -3X + 4Y = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6X + 9Y = 3A \\ -6X + 8Y = 2B \end{cases}$$

$$17Y = 3A + 2B \Rightarrow Y = \frac{3A + 2B}{17}$$

$$\begin{matrix} 4\times \to \\ -3\times \to \end{matrix} \begin{cases} 2X + 3Y = A \\ -3X + 4Y = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8X + 12Y = 4A \\ 9X - 12Y = -3B \end{cases}$$

$$17X = 4A - 3B \Rightarrow X = \frac{4A - 3B}{17}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X.

$$4A - 3B = 4\begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 \\ -2 & 0 & 11 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20-3 & -28-6 & 24+27 \\ 28+6 & 0 & 16-33 \\ 0 & 12-12 & -4+21 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \frac{4A - 3B}{17} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 17 & -34 & 51 \\ 34 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Obtenemos la expresión de la matriz Y.

$$3A + 2B = 3\begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 \\ -2 & 0 & 11 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+2 & -21+4 & 18-18 \\ 21-4 & 0 & 12+22 \\ 0 & 9+8 & -3-14 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y = \frac{3A + 2B}{17} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 17 & -17 & 0 \\ 17 & 0 & 34 \\ 0 & 17 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 3

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+4 & x<3 \\ -x+4 & x\geq 3 \end{cases}.$$

a) **(1.25 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en todos los puntos de su dominio.

b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente *f*.

c) **(0.75 puntos)** Calcule el área de la región limitada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las rectas $x=2$ y $x=4$.

a) En el intervalo $(-\infty,3)$ la función es $f(x)=x^2-4x+4$ que es una función polinómica (parábola) y por tanto continua y derivable.
En el intervalo (3, +∞) la función es $f(x)=-x+4$ que es una función polinómica (recta) y es continua y derivable.
Estudiamos la continuidad en *x = 3*.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=-3+4=1 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x^2-4x+4=3^3-4\cdot 3+4=1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} -x+4=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3)=1$$

La función es continua en *x = 3*. La función es continua en su dominio de definición $\mathbb{R}$.

Estudiamos la derivabilidad en *x = 3*.

La derivada de la función en $\mathbb{R}-\{3\}$ es $f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & x<3 \\ -1 & x>3 \end{cases}$. Calculamos las derivadas laterales en *x = 3* y comprobamos si coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-)=\lim\limits_{x\to 3^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 2x-4=2 \\ f'(3^+)=\lim\limits_{x\to 3^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} -1=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(3^-)=2\neq -1=f'(3^+)$$

La función no es derivable en *x = 3*.

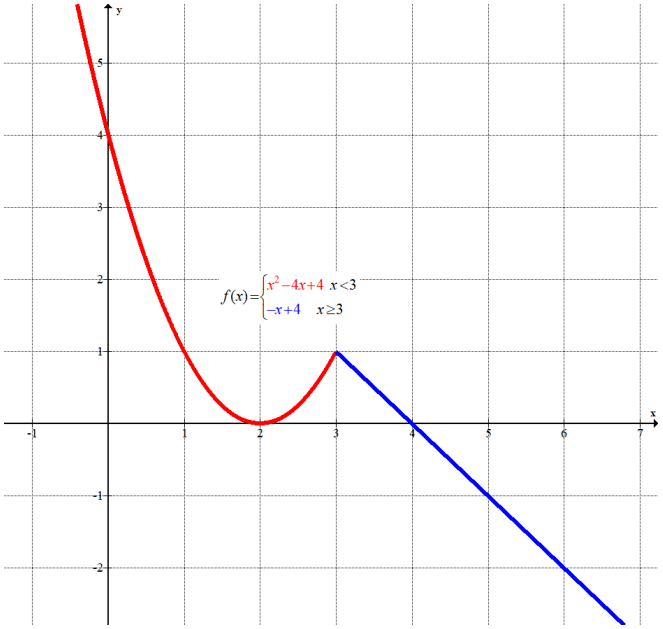
Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{3\}$.

b) La gráfica de la función es un trozo de parábola y un trozo de recta. Hallamos el vértice de la parábola.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=2x-4 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2\in(-\infty,3)$$

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+4 & x<3 \\ -x+4 & x\geq 3 \end{cases}$$



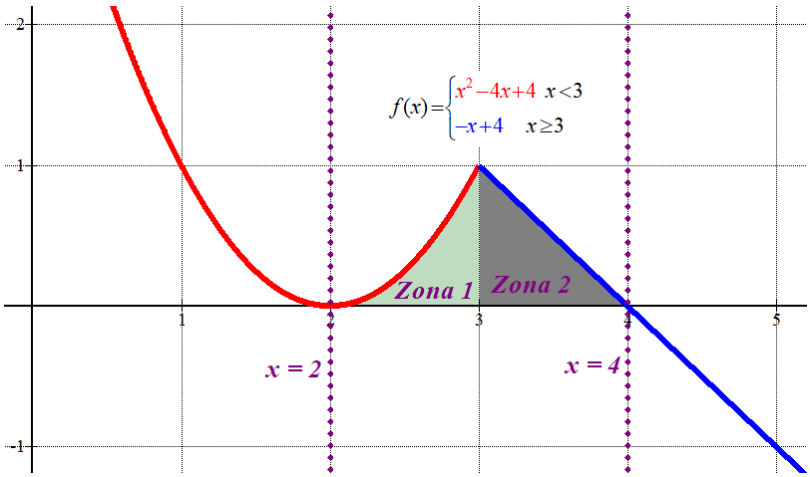
$x<3$

x	$y=x^2-4x+4$
0	4
1	1
2	0
2.5	0.25

$x\geq 3$

x	$y=-x+4$
3	1
4	0
5	−1

c) Nos piden hallar el área de la región coloreada del dibujo.



Esta región la dividimos en dos partes. Calculamos el área de cada una.

$$Área\ zona\ 1=\int_2^3 x^2-4x+4dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_2^3=$$

$$=\left[\frac{3^3}{3}-2\cdot 3^2+4\cdot 3\right]-\left[\frac{2^3}{3}-2\cdot 2^2+4\cdot 2\right]=9-18+12-\frac{8}{3}+8-8=\boxed{\frac{1}{3}\,u^2}$$

$$Área\ zona\ 2=\int_3^4 -x+4dx=\left[-\frac{x^2}{2}+4x\right]_3^4=$$

$$=\left[-\frac{4^2}{2}+4\cdot 4\right]-\left[-\frac{3^2}{2}+4\cdot 3\right]=-8+16+\frac{9}{2}-12=\boxed{\frac{1}{2}\,u^2}$$

El área total es la suma de las dos áreas obtenidas: $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}\simeq 0.833\ u^2$.

EJERCICIO 4

La función $B(t)=-t^2+21t-20$ con $0\le t\le 15$ representa el beneficio, en miles de euros, de una empresa en función de los años, *t*.

a) **(0.5 puntos)** Si la función $I(t)=-t^2+48t$ representa los ingresos de esta empresa, en miles de euros, para el mismo intervalo de tiempo, ¿cuál es la función de gastos de dicha empresa? ¿Cuáles son los gastos iniciales?

b) **(0.5 puntos)** Calcule el momento a partir del cual el beneficio fue positivo.

c) **(0.75 puntos)** Calcule en qué momento el beneficio fue máximo y el valor del mismo.

d) **(0.75 puntos)** Represente gráficamente la función beneficio.

a) Los beneficios son los ingresos menos los gastos.

$$B(t)=I(t)-G(t)\Rightarrow G(t)=I(t)-B(t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(t)=-t^2+48t-\left(-t^2+21t-20\right)=48t-21t+20=27t+20$$

Los gastos vienen expresados por la función $G(t)=27t+20$ con $0\le t\le 15$.

Los gastos iniciales son $G(0)=27\cdot 0+20=20$. Los gastos iniciales son 20 000 €.

b) Averiguamos cuando el beneficio es nulo.

$$B(t)=-t^2+21t-20=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{-21\pm\sqrt{21^2-4(-1)(-20)}}{2(-1)}=\frac{-21\pm 19}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-21+19}{-2}=1\in[0,15]\\ \dfrac{-21-19}{-2}=20\notin[0,15]\end{cases}$$

La función beneficio es continua. Averiguamos si el beneficio es positivo antes o después de $t=1$.

- En el intervalo [0, 1) tomamos *t = 0.5* y el beneficio es $B(0.5)=-0.5^2+21\cdot 0.5-20=-9.75$. El beneficio es negativo en [0, 1).
- En el intervalo (1, 15] tomamos *t = 2* y el beneficio es $B(2)=-2^2+21\cdot 2-20=8.25$. El beneficio es positivo en (1, 15].

El beneficio es positivo a partir del primer año.

c) Hallamos la derivada y la igualamos a cero en busca del punto crítico.

$$\left.\begin{matrix}B'(t)=-2t+21\\ B'(t)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow -2t+21=0\Rightarrow 2t=21\Rightarrow t=\frac{21}{1}=10.5$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada para averiguar si es máximo o mínimo.

$$B'(t)=-2t+21\Rightarrow B''(t)=-2\Rightarrow B''(10.5)=-2<0$$

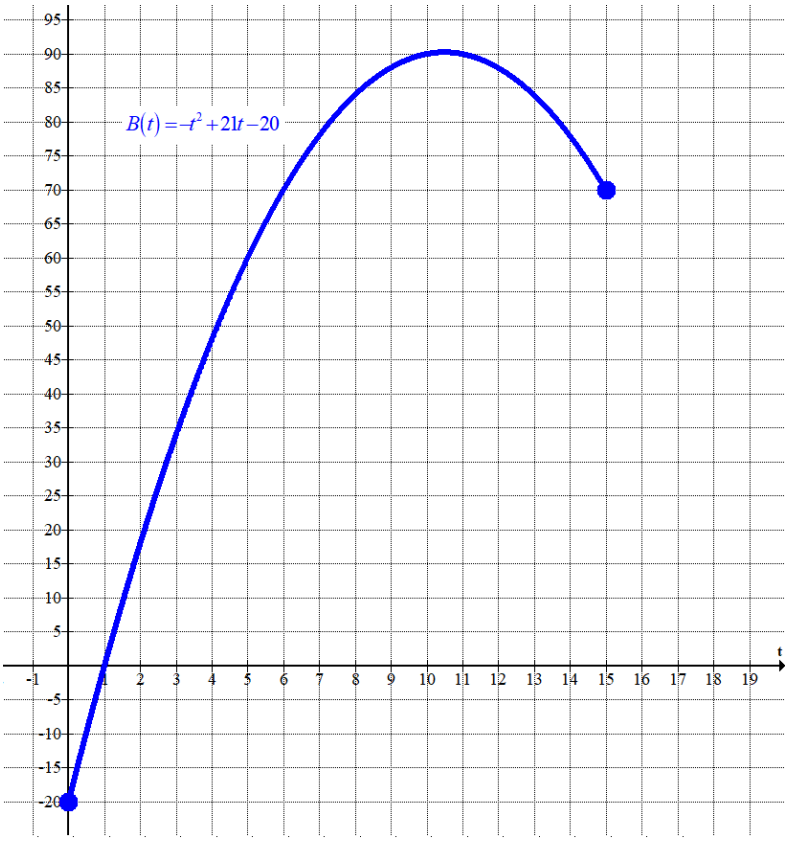
En $t = 10.5$ la función beneficio tiene un máximo.

En $t = 10.5$ la función beneficio vale $B(10.5) = -10.5^2 + 21 \cdot 10.5 - 20 = 90.25$.

El beneficio máximo se produce en $t = 10.5$ y es de 90 250 €.

d) La gráfica de la función beneficio es una parábola con vértice en $t = 10.5$. Hacemos una tabla de valores y la representamos.

t	$B(t) = -t^2 + 21t - 20$
0	–20
1	0
10.5	90.25
12	88
15	70



EJERCICIO 5

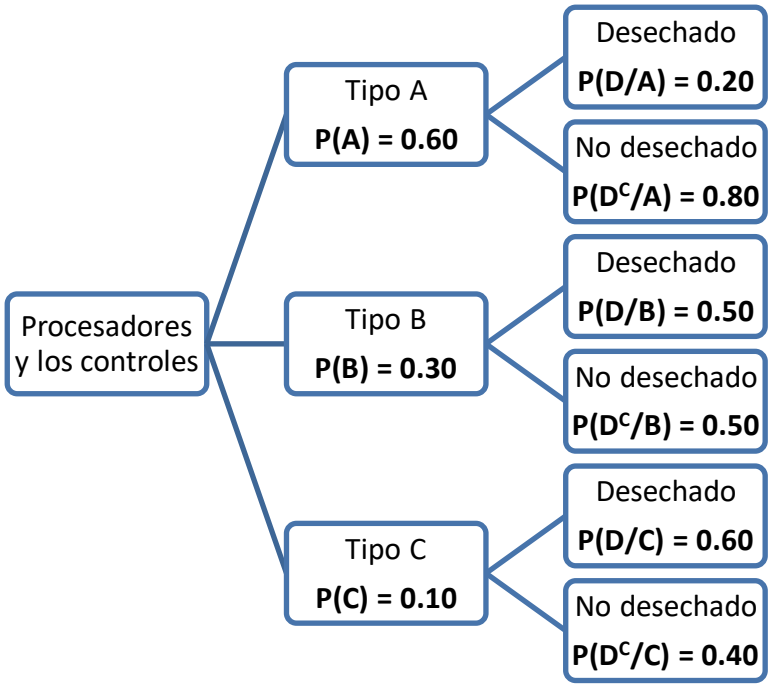
Una fábrica produce procesadores que se clasifican en un primer control en tres tipos, A, B y C, según la frecuencia a la que pueden trabajar. El 60 % de los procesadores fabricados se clasifican de tipo A, el 30 % de tipo B y el resto de tipo C. En un segundo control, se desechan el 20 % de los procesadores de tipo A, el 50 % de los de tipo B y el 60 % de los de tipo C, por problemas al trabajar a ciertas temperaturas. Si se elige un procesador de esta fábrica al azar, calcule la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Sea descartado y sea de tipo A o de tipo B.

b) **(0.75 puntos)** Sea descartado.

c) **(0.75 puntos)** Sea de tipo C sabiendo que no ha sido descartado.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P\left(D\cap\left(A\cup B\right)\right)$.

$$P\left(D\cap\left(A\cup B\right)\right)=P\left(D\cap A\right)+P\left(D\cap B\right)=$$
$$=P\left(A\right)P\left(D/A\right)+P\left(B\right)P\left(D/B\right)=0.6\cdot0.2+0.3\cdot0.5=\boxed{0.27}$$

b) Nos piden calcular $P\left(D\right)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(D\right)=P\left(A\right)P\left(D/A\right)+P\left(B\right)P\left(D/B\right)+P\left(C\right)P\left(D/C\right)=$$
$$=0.6\cdot0.2+0.3\cdot0.5+0.1\cdot0.6=\boxed{0.33}$$

c) Hay que calcular $P\left(C/D^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(C/D^C\right)=\frac{P\left(C\cap D^C\right)}{P\left(D^C\right)}=\frac{P\left(C\right)P\left(D^C/C\right)}{1-P\left(D\right)}=\frac{0.1\cdot0.4}{1-0.33}=\boxed{\frac{4}{67}\simeq0.0597}$$

EJERCICIO 6

El 75 % del alumnado de un instituto utiliza la plataforma del centro como medio para comunicarse con sus profesores y el 40 % lo hace a través del correo electrónico. Además, hay un 15 % que no usa ninguno de estos medios. Se elige un estudiante de este instituto al azar.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que utilice ambos medios de comunicación.

b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que utilice solamente uno de estos medios de comunicación.

c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que utilice la plataforma del centro sabiendo que no usa el correo electrónico como medio de comunicación.

d) **(0.5 puntos)** Razone si los sucesos "Utilizar la plataforma del centro" y "Utilizar el correo electrónico" son independientes.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Utiliza el correo electrónico (B)	No utiliza el correo electrónico (B^C)	
Utiliza plataforma del centro (A)			**75**
No utiliza plataforma del centro (A^C)		**15**	
	40		**100**

Completamos la tabla.

	Utiliza el correo electrónico (B)	No utiliza el correo electrónico (B^C)	
Utiliza plataforma del centro (A)	**30**	**45**	**75**
No utiliza plataforma del centro (A^C)	**10**	**15**	**25**
	40	**60**	**100**

a) Nos piden calcular $P(A\cap B)$. Aplicamos la regla de Laplace con los datos de la tabla.

$$P(A\cap B)=\frac{30}{100}=\boxed{0.3}$$

b) Usamos los datos de la tabla y aplicamos la regla de Laplace.

$$P\left[\left(A\cap B^C\right)\cup\left(A^C\cap B\right)\right]=\frac{45+10}{100}=\boxed{0.55}$$

c) Nos piden calcular $P\left(A/B^C\right)$. Utilizamos los datos de la tabla (columna 2ª de datos).

$$P\left(A/B^C\right)=\frac{45}{60}=\boxed{\frac{3}{4}=0.75}$$

d) Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=0.3\\P(A)P(B)=0.75\cdot 0.40=0.3\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0.3=P(A)P(B)$$

Se cumple la igualdad y los sucesos A y B son independientes.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Una empresa fabrica piezas cuyo diámetro sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 9 mm^2.

a) **(0.75 puntos)** Se seleccionan al azar 144 piezas obteniéndose un diámetro medio de 81 *mm*. Determine un intervalo de confianza al 98.5 % para estimar el diámetro medio de las piezas fabricadas por la empresa.

b) **(0.75 puntos)** Con el mismo nivel de confianza del apartado anterior, ¿de qué tamaño mínimo habría que tomar la muestra para obtener un intervalo de confianza con una amplitud máxima de 0.9?

c) **(1 punto)** Suponiendo que la media poblacional es de 80.4 *mm* y tomando muestras aleatorias de 64 piezas, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria diámetro medio muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro medio muestral esté comprendido entre 79.5 *mm* y 80.7 *mm*?

a) X = Diámetro de una pieza, en mm.

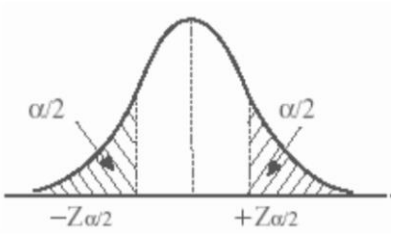
Como la varianza es 9 la desviación típica es $\sqrt{9}=3mm$. X = N(μ, 3)

El tamaño de la muestra es $n = 144$. La media muestral es $\bar{x}=81mm$

Con un nivel de confianza del 98.5%

$$1-\propto = 0{,}985 \rightarrow \propto = 0{,}015 \rightarrow \propto/2 = 0'0075 \rightarrow 1-\propto/2 = 0{,}9925 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.43}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957



Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.43\cdot\frac{3}{\sqrt{144}} = 0.6075$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x}-Error,\ \bar{x}+Error\right) = \left(81-0.6075,\ 81+0.6075\right) = \left(80.3925,\ 81.6075\right)$$

b) Si la amplitud del intervalo de confianza es de 0.9 entonces el error es la mitad, es decir, $Error = \frac{0.9}{2} = 0.45$.

Aplicamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.43 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 0.45 \Rightarrow \frac{7.29}{\sqrt{n}} = 0.45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7.29}{0.45} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{7.29}{0.45}\right)^2 = 262.44$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 263 piezas.

c) X = Diámetro de una pieza, en mm. X = N(80.4, 3)

Tenemos que la media muestral sigue una distribución normal que tiene la misma media, pero su desviación típica es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\overline{X_{64}} = N\left(80.4, \frac{3}{\sqrt{64}}\right) \Rightarrow \overline{X_{64}} = N\left(80.4, 0.375\right)$$

Nos piden calcular $P\left(79.5 \le \overline{X_{64}} \le 80.7\right)$.

$$P\left(79.5 \le \overline{X_{64}} \le 80.7\right) = \{Tipificamos\} =$$

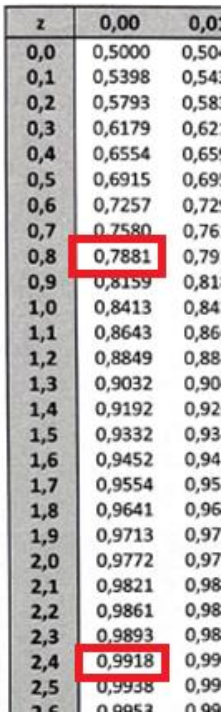
$$= P\left(\frac{79.5 - 80.4}{0.375} \le Z \le \frac{80.7 - 80.4}{0.375}\right) =$$

$$= P\left(-2.4 \le Z \le 0.8\right) = P\left(Z \le 0.8\right) - P\left(Z \le -2.4\right) =$$

$$= P\left(Z \le 0.8\right) - P\left(Z \ge 2.4\right) = P\left(Z \le 0.8\right) - \left[1 - P\left(Z \le 2.4\right)\right] =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} =$$

$$= 0.7881 - \left[1 - 0.9918\right] = \boxed{0.7799}$$



z	0,00	0,0
0,0	0,5000	0,50
0,1	0,5398	0,54
0,2	0,5793	0,58
0,3	0,6179	0,62
0,4	0,6554	0,65
0,5	0,6915	0,69
0,6	0,7257	0,72
0,7	0,7580	0,76
0,8	0,7881	0,79
0,9	0,8159	0,81
1,0	0,8413	0,84
1,1	0,8643	0,86
1,2	0,8849	0,88
1,3	0,9032	0,90
1,4	0,9192	0,92
1,5	0,9332	0,93
1,6	0,9452	0,94
1,7	0,9554	0,95
1,8	0,9641	0,96
1,9	0,9713	0,97
2,0	0,9772	0,97
2,1	0,9821	0,98
2,2	0,9861	0,98
2,3	0,9893	0,98
2,4	0,9918	0,99
2,5	0,9938	0,99

EJERCICIO 8

Se selecciona una muestra aleatoria de 300 habitantes de una ciudad, a los que se les pregunta si creen que llevan una dieta saludable. De las personas encuestadas, 180 han contestado afirmativamente, mientras que el resto ha respondido que no.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de personas que creen seguir una dieta saludable.

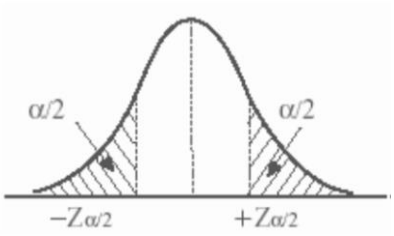
b) **(1.25 puntos)** ¿Cuál sería el número de habitantes mínimo necesario en este estudio de opinión para que se reduzca a un tercio del error cometido en el intervalo $(0.54, 0.66)$ con el mismo nivel de confianza?

Tamaño de la muestra es $n = 300$. $pr = \frac{180}{300} = 0.6$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.6 = 0.4$

a) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{300}} \simeq 0.0554$$

El error máximo cometido es de 0.0554.

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.6 - 0.0554,\quad 0.6 + 0.0554) = (0.5446,\ 0.6554)$$

b) El error del intervalo de confianza es la mitad de la amplitud del intervalo $(0.54, 0.66)$.

$$Error = \frac{0.66 - 0.54}{2} = 0.06 \rightarrow \text{Un tercio del error cometido es } \frac{0.06}{3} = 0.02.$$

Aplicamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{n}} = 0.02 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.24}{n}} = \frac{0.02}{1.96} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.24}{n} = \left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2 \Rightarrow n = \frac{0.24}{\left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2} \approx 2304.96$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero superior al obtenido. El tamaño mínimo de la muestra es de 2305 habitantes.

PevAU 2023 Extraordinaria (reserva) Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2022-2023	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una conservera fabrica latas de pisto con tomate, cebolla y pimiento siguiendo dos recetas distintas. La matriz $\begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \\ 600 & 100 & 300 \end{pmatrix}$ indica los gramos necesarios de cada producto para conseguir una lata de cada receta. Se dispone de dos proveedores, siendo la matriz de precios en euros por kilo de cada producto $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$. Los costes de producción de cada receta en euros por lata vienen dados por la matriz $\begin{pmatrix} 0.11 & 0.09 \end{pmatrix}$. Los costes de transporte en euros por lata según cada proveedor vienen dados por la matriz $\begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 \end{pmatrix}$. La conservera quiere obtener un beneficio de 5 céntimos por lata. Una distribuidora compra 11000 latas de la primera receta, siendo 5000 del primer proveedor, y otras 11000 de la segunda receta, siendo 6000 del primer proveedor. ¿Cuánto debe cobrar la conservera por el pedido de esta distribuidora?

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una compañía de transporte marítimo de mercancías dispone de dos barcos B_1 y B_2 para realizar una determinada ruta, durante un año, entre dos ciudades costeras europeas. El barco B_1 no puede realizar más de 14 viajes y debe realizar tantos viajes o más que el barco B_2. Entre los dos barcos deben realizar al menos 10 viajes y como mucho 24. La compañía obtiene unos beneficios de 15000 € por cada viaje del barco B_1 y 17000 € por cada viaje del barco B_2.
Halle el número de viajes que debe realizar cada barco para que el beneficio obtenido por la empresa sea máximo y obtenga dicho beneficio.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x)=\left(-7+x^2\right)^3\cdot e^{5-x} \qquad g(x)=\frac{\ln\left(x^4-2x^2\right)}{8-x^3}.$$

b) **(1 punto)** Represente gráficamente la región acotada comprendida entre la recta $y=-2x+6$ y la parábola $y=-x^2+2x+3$ y calcule su área.

EJERCICIO 4

La temperatura en el interior de un equipo de refrigeración durante un día que sufrió un corte de energía viene dada por la función *f* expresada en grados centígrados y el tiempo *t* en horas:

$$f(t)=\begin{cases}-9 & 0\le t\le 1\\ -t^2+12t-20 & 1<t<11\\ -9 & 11\le t\le 24\end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Estudie la continuidad de *f*.
b) **(0.75 puntos)** Represente gráficamente la función *f*.
c) **(0.5 puntos)** Conteste razonadamente a qué hora se produjo el corte de energía y cuánto duró dicho corte.
d) **(0.5 puntos)** El equipo de refrigeración se utiliza para conservar sueros y vacunas. Los sueros se estropean si se alcanzan temperaturas de 20º C en algún momento. Las vacunas se estropean si están por encima de 0º C durante más de seis horas. Razone si alguno de esos productos se estropeó ese día.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

En una encuesta realizada en un instituto sobre los hábitos de los estudiantes en su tiempo libre, el 80% de los encuestados dedica el tiempo libre a enviar mensajes con el móvil o a jugar a videojuegos, el 45% realiza ambas cosas y el 40% no juega a videojuegos. Si se elige un estudiante de ese instituto al azar, calcule la probabilidad de que dedique su tiempo libre a:

a) **(1 punto)** Enviar mensajes con el móvil y no jugar a videojuegos.
b) **(0.5 puntos)** Jugar a videojuegos sabiendo que no envía mensajes con el móvil.
c) **(0.5 puntos)** Hacer solamente una de las dos cosas.
d) **(0.5 puntos)** No hacer ninguna de las dos cosas.

EJERCICIO 6

Un componente electrónico se produce en dos fábricas, A y B. Se exporta el 40% de los componentes producidos en A y la cuarta parte de los producidos en B, mientras que el resto es para consumo nacional. Además, el 37% de todos los componentes producidos es exportado. Si se elige un componente electrónico al azar, halle la probabilidad de que:

a) **(1.5 puntos)** Se haya producido en la fábrica A.
b) **(1 punto)** Se haya producido en la fábrica A sabiendo que no es exportado.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Se sabe que la vida útil en meses de una batería de coche sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 8 meses^2. Se seleccionan al azar 100 clientes que habían comprado una de estas baterías y se les pregunta cuando las reemplazaron, obteniéndose una media de 4 años y 2 meses.

a) **(1.25 puntos)** Determine, con un nivel de confianza del 94%, un intervalo de confianza para estimar la vida media de estas baterías.
b) **(1.25 puntos)** Manteniendo el mismo nivel de confianza, determine el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para que el error cometido al estimar la vida media de estas baterías sea menor que 0.1 meses.

EJERCICIO 8

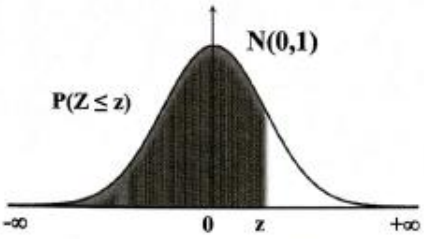
El tiempo de adaptación al uso de unas gafas progresivas depende de la persona, de la graduación de las lentes y del tipo de progresivo elegido. No obstante, se sabe que el tiempo de adaptación sigue una ley Normal de media 12.5 días y desviación típica 2.5 días.

a) **(1.25 puntos)** Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos que han comenzado a utilizar este tipo de gafas, ¿qué distribución sigue la media muestral del tiempo de

adaptación? ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de adaptación a las gafas progresivas para dicha muestra supere los 12 días?

b) **(1.25 puntos)** Si la muestra elegida es de tamaño 25 ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio muestral de adaptación a las gafas progresivas diste de 12 días a lo sumo 1 día?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una conservera fabrica latas de pisto con tomate, cebolla y pimiento siguiendo dos recetas distintas. La matriz $\begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \\ 600 & 100 & 300 \end{pmatrix}$ indica los gramos necesarios de cada producto para conseguir una lata de cada receta. Se dispone de dos proveedores, siendo la matriz de precios en euros por kilo de cada producto $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$. Los costes de producción de cada receta en euros por lata vienen dados por la matriz $\begin{pmatrix} 0.11 & 0.09 \end{pmatrix}$. Los costes de transporte en euros por lata según cada proveedor vienen dados por la matriz $\begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 \end{pmatrix}$. La conservera quiere obtener un beneficio de 5 céntimos por lata. Una distribuidora compra 11000 latas de la primera receta, siendo 5000 del primer proveedor, y otras 11000 de la segunda receta, siendo 6000 del primer proveedor. ¿Cuánto debe cobrar la conservera por el pedido de esta distribuidora?

$$\begin{matrix} Gramos \rightarrow & Tomate & Cebolla & Pimiento \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Receta\,1 \rightarrow & 500 & 300 & 200 \\ Receta\,2 \rightarrow & 600 & 100 & 300 \end{matrix}$$

Lo pasamos a kilogramos.

$$\begin{matrix} Kg \rightarrow & Tomate & Cebolla & Pimiento \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Receta\,1 \rightarrow & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ Receta\,2 \rightarrow & 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{matrix}$$

Los precios de los productos en cada proveedor son:

$$\begin{matrix} €/kg \rightarrow & Tomate & Cebolla & Pimiento \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Proveedor\,1 \rightarrow & 0.5 & 0.4 & 0.6 \\ Proveedor\,2 \rightarrow & 0.4 & 0.5 & 0.7 \end{matrix}$$

Multiplicamos para obtener el precio de cada receta con cada proveedor.

$$\begin{matrix} kg \rightarrow & Tom. & Ceb. & Pim. & P1 & P2 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Receta\,1 \rightarrow & 0.5 & 0.3 & 0.2 & & \\ Receta\,2 \rightarrow & 0.6 & 0.1 & 0.3 & & \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{matrix} & & P1 & P2 \\ & & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.25+0.12+0.12 & 0.20+0.15+0.14 \\ 0.30+0.04+0.18 & 0.24+0.05+0.21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.49 & 0.49 \\ 0.52 & 0.50 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Re}ceta\,1 \\ \leftarrow \text{Re}ceta\,2 \end{matrix}$$

Con el proveedor 1 la receta 1 cuesta 0.49 por lata.
Con el proveedor 1 la receta 2 cuesta 0.52 por lata.
Con el proveedor 2 la receta 1 cuesta 0.49 por lata.
Con el proveedor 2 la receta 2 cuesta 0.50 por lata.

Sumamos los costes de transporte según proveedor y la producción por lata según receta.

$$\begin{matrix} & & P1 & P2 \\ & & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0.11 & 0.09 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.11 & 0.11 \\ 0.09 & 0.09 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{Re}ceta\,1 \\ \rightarrow \text{Re}ceta\,2 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 \\ 0.02 & 0.03 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} & P1 & P2 & & P1 & P2 & & P1 & P2 & & P1 & P2 \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} \text{Re}ceta\,1 \rightarrow \\ \text{Re}ceta\,2 \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.49 & 0.49 \\ 0.52 & 0.50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.11 & 0.11 \\ 0.09 & 0.09 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 \\ 0.02 & 0.03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.62 & 0.63 \\ 0.63 & 0.62 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Re}ceta\,1 \\ \leftarrow \text{Re}ceta\,2 \end{matrix}$$

Las 11000 latas de la primera receta (5000 del proveedor 1 y 6000 del proveedor 2) y otras 11000 de la segunda (6000 del proveedor 1 y 5000 del proveedor 2) cuestan un total:

$$\begin{matrix} P1 & P2 \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0.62 & 0.63 \\ 0.63 & 0.62 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Re}ceta\,1 \\ \leftarrow \text{Re}ceta\,2 \end{matrix} \Rightarrow 5000\cdot 0.62 + 6000\cdot 0.63 + 6000\cdot 0.63 + 5000\cdot 0.62 = \boxed{13760\,€}$$

El coste total es de 13760 €.
Como la conservera quiere obtener un beneficio de 5 céntimos por lata debemos sumarle a la cifra anterior el beneficio de 0.05 € por lata que le proporcionan las 22000 latas → $22000\cdot 0.05 = 1100\,€$

El pedido cuesta un total de 13760 + 1100 = 14860 €.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una compañía de transporte marítimo de mercancías dispone de dos barcos B_1 y B_2 para realizar una determinada ruta, durante un año, entre dos ciudades costeras europeas. El barco B_1 no puede realizar más de 14 viajes y debe realizar tantos viajes o más que el barco B_2. Entre los dos barcos deben realizar al menos 10 viajes y como mucho 24. La compañía obtiene unos beneficios de 15000 € por cada viaje del barco B_1 y 17000 € por cada viaje del barco B_2.
Halle el número de viajes que debe realizar cada barco para que el beneficio obtenido por la empresa sea máximo y obtenga dicho beneficio.

Llamamos "x" al número de viajes del barco B_1 e "y" al número de viajes del barco B_2.
Hallamos las inecuaciones asociadas a las restricciones.

"El barco B_1 no puede realizar más de 14 viajes y debe realizar tantos viajes o más que el barco B_2" → $x \le 14;\quad x \ge y$

"Entre los dos barcos deben realizar al menos 10 viajes y como mucho 24" → $10 \le x + y \le 24$.

Las cantidades deben ser positivas → $x \ge 0;\ y \ge 0$

Reunimos todas estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x \le 14 \\ x \ge y \\ 10 \le x + y \le 24 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

La función que deseamos maximizar es el beneficio que viene expresado como:

$$B(x, y) = 15000x + 17000y.$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$y = x$

x	$y = x$
5	5
12	12

$x + y = 10$

x	$y = 10 - x$
5	5
10	0

$x + y = 24$

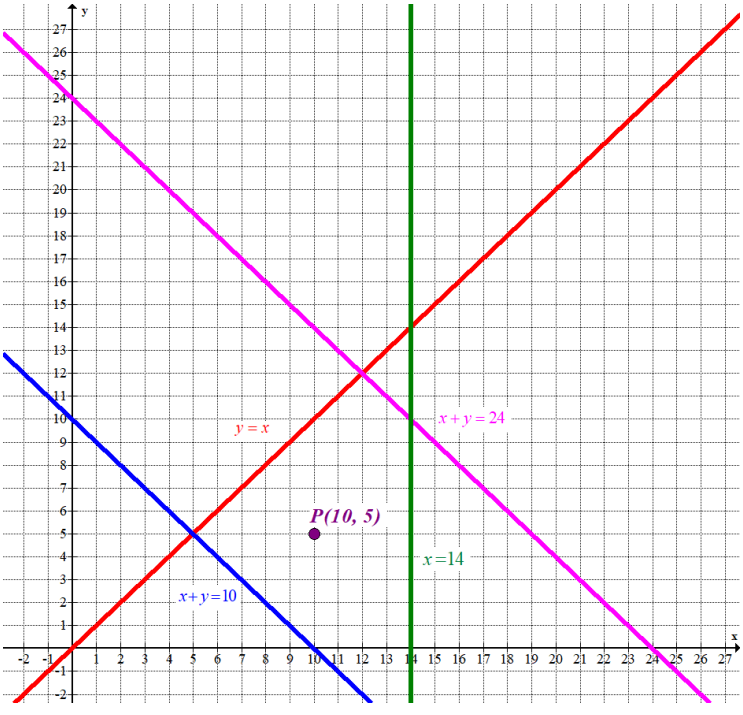
x	$y = 24 - x$
12	12
14	10

$x = 14$

$x = 14$	y
14	0
14	10

$x \ge 0;\ y \ge 0$

Primer cuadrante

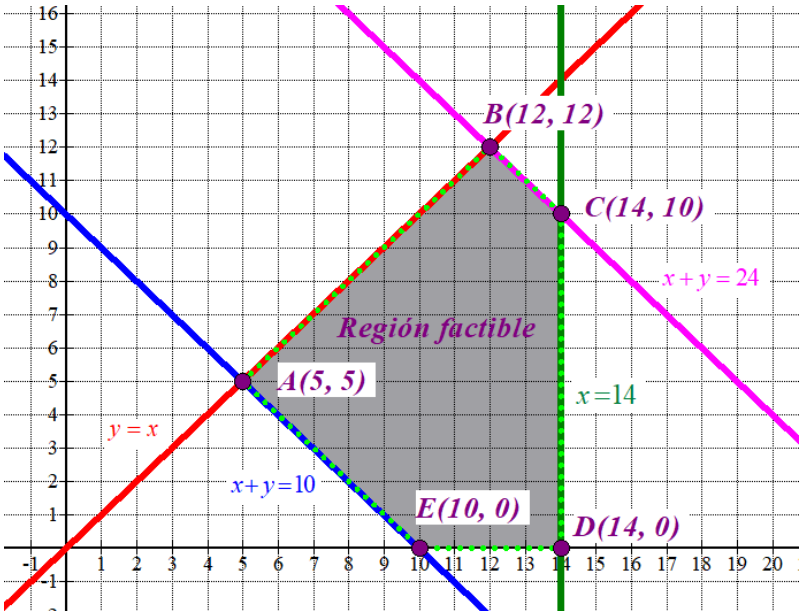


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \le 14 \\ x \ge y \\ 10 \le x+y \le 24 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas rosa y roja, por encima de la recta azul y a la izquierda de la recta vertical verde.

Comprobamos que el punto P(10, 5) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \le 14 \\ 10 \ge 5 \\ 10 \le 10+5 \le 24 \\ 10 \ge 0;\ 5 \ge 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas y la región factible es la coloreada de gris en el siguiente dibujo.



Los vértices son los puntos: A(5, 5), B(12, 12), C(14, 10), D(14, 0) y E(10, 0).

Valoramos la función objetivo $B(x,y) = 15000x + 17000y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(5, 5) → $B(5,5) = 15000 \cdot 5 + 17000 \cdot 5 = 160\,000$

B(12, 12) → $B(12,12) = 15000 \cdot 12 + 17000 \cdot 12 = 384\,000$ ¡Máximo!

C(14, 10) → $B(14,10) = 15000 \cdot 14 + 17000 \cdot 10 = 380\,000$

D(14, 0) → $B(14,0) = 15000 \cdot 14 + 17000 \cdot 0 = 210\,000$

E(10, 0) → $B(10,0) = 15000 \cdot 10 + 17000 \cdot 0 = 150\,000$

El máximo beneficio que se puede obtener cumpliendo con las restricciones es de 384 000 euros y se obtiene con 12 viajes del barco B_1 y otros 12 viajes del barco B_2.

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x)=\left(-7+x^2\right)^3\cdot e^{5-x} \qquad g(x)=\frac{\ln\left(x^4-2x^2\right)}{8-x^3}.$$

b) **(1 punto)** Represente gráficamente la región acotada comprendida entre la recta $y=-2x+6$ y la parábola $y=-x^2+2x+3$ y calcule su área.

a) Calculamos la expresión de cada derivada y las expresamos lo más simple posible.

$$f\,'(x)=3\left(-7+x^2\right)^2(2x)\cdot e^{5-x}+\left(-7+x^2\right)^3\cdot(-1)e^{5-x}=$$

$$=6x\left(-7+x^2\right)^2\cdot e^{5-x}+\left(-7+x^2\right)\left(-7+x^2\right)^2\cdot(-1)e^{5-x}=$$

$$=6x\left(-7+x^2\right)^2\cdot e^{5-x}+\left(7-x^2\right)\left(-7+x^2\right)^2e^{5-x}$$

$$\boxed{f\,'(x)=\left(7+6x-x^2\right)\left(-7+x^2\right)^2\cdot e^{5-x}}$$

$$g\,'(x)=\frac{\frac{4x^3-4x}{x^4-2x^2}\left(8-x^3\right)-\left(-3x^2\right)\ln\left(x^4-2x^2\right)}{\left(8-x^3\right)^2}=\frac{\frac{4x^2-4}{x^3-2x}\left(8-x^3\right)+3x^2\ln\left(x^4-2x^2\right)}{\left(8-x^3\right)^2}$$

$$\boxed{g\,'(x)=\frac{\frac{4\left(x^2-1\right)\left(8-x^3\right)}{x\left(x^2-2\right)}+3x^2\ln\left(x^4-2x^2\right)}{\left(8-x^3\right)^2}}$$

b) Hallamos los puntos de corte de las gráficas.

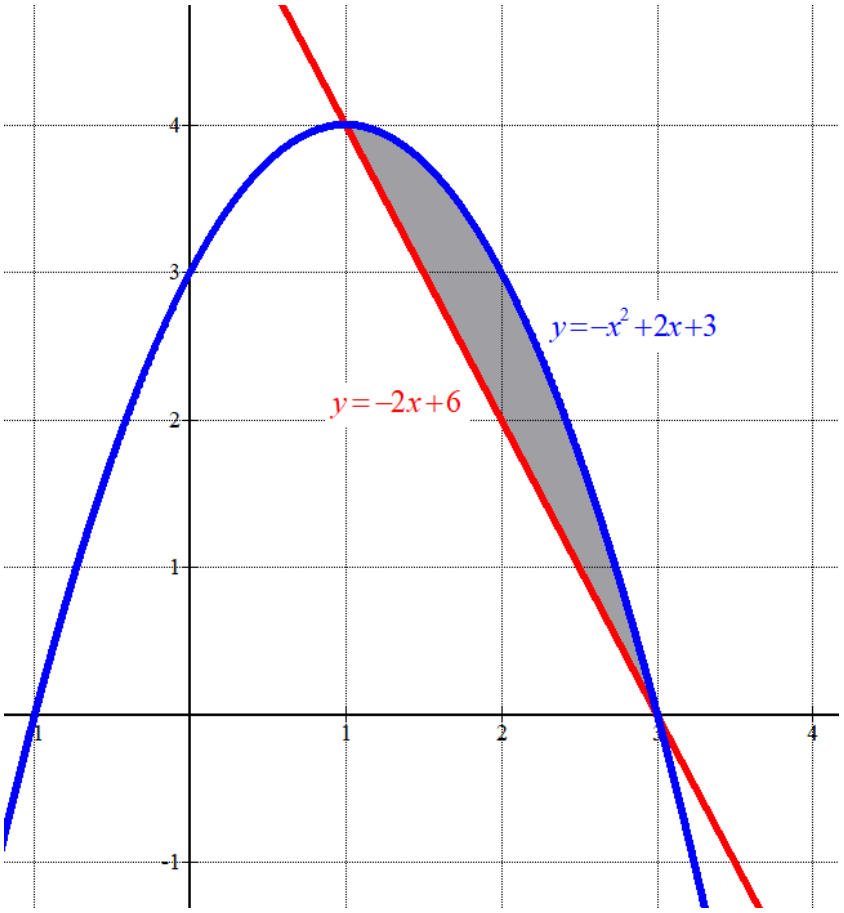
$$\left.\begin{array}{l}y=-2x+6\\ y=-x^2+2x+3\end{array}\right\}\Rightarrow -2x+6=-x^2+2x+3\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(3)}}{2}=\frac{4\pm2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=3\\ \frac{4-2}{2}=1\end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos.

x	$y=-2x+6$
1	4
2	2
3	0

x	$y=-x^2+2x+3$	
-1	0	
0	3	
1	4	*Vértice*
2	3	
3	0	



Calculamos el valor del área de la región coloreada de gris como la integral definida entre 1 y 3 de la diferencia entre la parábola y la recta.

$$Área=\int_1^3 -x^2+2x+3-\left(-2x+6\right)dx=\int_1^3 -x^2+4x-3dx=\left[\frac{-x^3}{3}+2x^2-3x\right]_1^3=$$

$$=\left[\frac{-3^3}{3}+2\cdot 3^2-3\cdot 3\right]-\left[\frac{-1^3}{3}+2\cdot 1^2-3\cdot 1\right]=-9+18-9+\frac{1}{3}-2+3=\frac{1}{3}+1=\boxed{\frac{4}{3}\simeq 1.33u^2}$$

El área tiene un valor de $\frac{4}{3}\simeq 1.33$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 4

La temperatura en el interior de un equipo de refrigeración durante un día que sufrió un corte de energía viene dada por la función *f* expresada en grados centígrados y el tiempo *t* en horas:

$$f(t)=\begin{cases}-9 & 0\le t\le 1\\ -t^2+12t-20 & 1<t<11\\ -9 & 11\le t\le 24\end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Estudie la continuidad de *f*.

b) **(0.75 puntos)** Represente gráficamente la función *f*.

c) **(0.5 puntos)** Conteste razonadamente a qué hora se produjo el corte de energía y cuánto duró dicho corte.

d) **(0.5 puntos)** El equipo de refrigeración se utiliza para conservar sueros y vacunas. Los sueros se estropean si se alcanzan temperaturas de 20º C en algún momento. Las vacunas se estropean si están por encima de 0º C durante más de seis horas. Razone si alguno de esos productos se estropeó ese día.

a) En el intervalo [0, 1) la función es $f(t)=-9$, que es una función constante y por tanto continua.

En el intervalo (1, 11) la función es $f(t)=-t^2+12t-20$, que es una función polinómica (parábola) y por tanto es continua.

En el intervalo (11, 24] la función es $f(t)=-9$, que es una función constante y por tanto continua.

Estudiamos la continuidad en *t = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=-9\\ \lim\limits_{t\to 1^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 1^-}-9=-9\\ \lim\limits_{t\to 1^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 1^+}-t^2+12t-20=-1^2+12-20=-9\end{array}\right\}\Rightarrow f(1)=\lim_{t\to 1^-} f(t)=\lim_{t\to 1^+} f(t)=-9$$

La función es continua en *t = 1*.

Estudiamos la continuidad en *t = 11*.

$$\left.\begin{array}{l} f(11)=-9\\ \lim\limits_{t\to 11^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 11^-}-t^2+12t-20=-11^2+12\cdot 11-20=-9\\ \lim\limits_{t\to 11^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 11^+}-9=-9\end{array}\right\}\Rightarrow f(11)=\lim_{t\to 11^-} f(t)=\lim_{t\to 11^+} f(t)$$

La función es continua en *t = 11*.

La función es continua en su dominio [0, 24].

b) La gráfica es un trozo de recta horizontal, un trozo de parábola y otro trozo de recta horizontal.

Hallamos el vértice de la parábola.

$$\left.\begin{array}{r} f(t)=-t^2+12t-20\Rightarrow f'(t)=-2t+12\\ f'(t)=0\end{array}\right\}\Rightarrow -2t+12=0\Rightarrow -2t=-12\Rightarrow t=\frac{-12}{-2}=6\in(1,11)$$

Hacemos una tabla de valores y representamos.

$0 \le t \le 1$

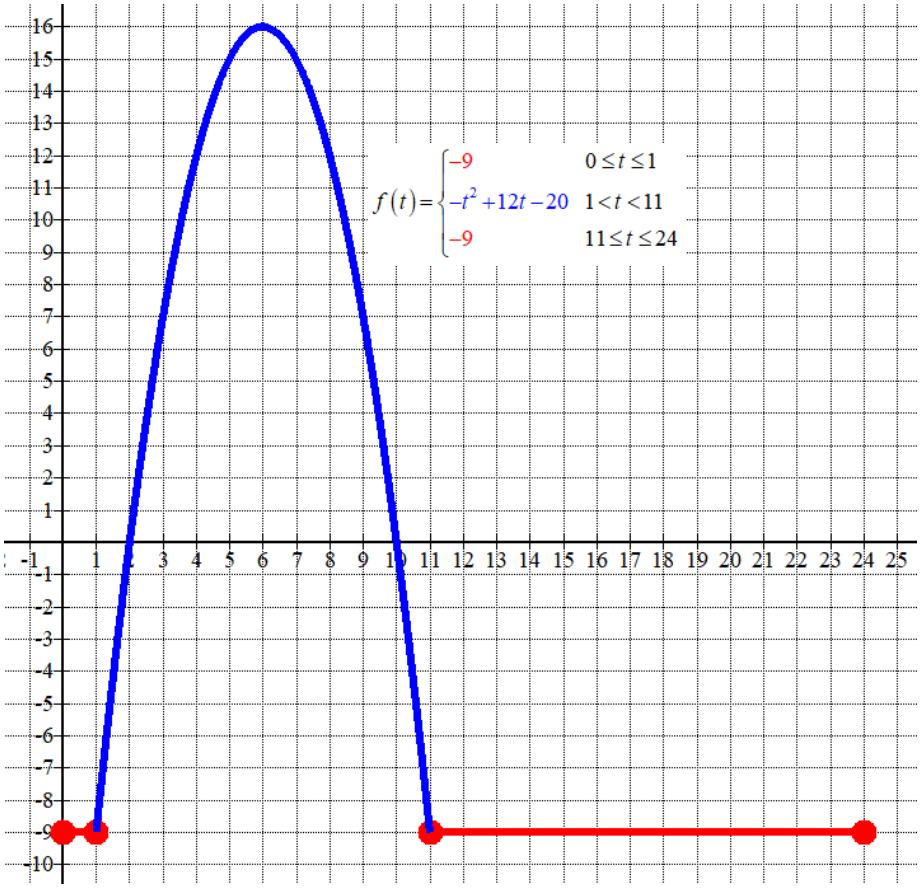
t	$f(t) = -9$
0	–9
1	–9

$1 < t < 11$

t	$f(t) = -t^2 + 12t - 20$
2	0
6	16
10	0

$11 \le t \le 24$

t	$f(t) = -9$
11	–9
24	–9



c) La temperatura empezó a aumentar a partir de la hora 1 y estuvo subiendo hasta la hora 6. A partir de este momento empezó a bajar hasta que en la hora 11 vuelve a situarse a –9º. Así sigue desde la hora 11 hasta la hora 24.
Es de suponer que el equipo de refrigeración no estuvo funcionando desde la hora 1 hasta la hora 6, pues en ese intervalo la temperatura aumentó. El corte de energía duró 5 horas.

d) Los sueros no se estropearon pues la temperatura más alta que se alcanzó fue de 16º C. Nunca se alcanzaron los 20º C.
La temperatura estuvo por encima de 0º C desde la hora 2 hasta la hora 10, es decir, durante 8 horas (más de 6 horas), por lo que las vacunas si se estropearon.

EJERCICIO 5

En una encuesta realizada en un instituto sobre los hábitos de los estudiantes en su tiempo libre, el 80% de los encuestados dedica el tiempo libre a enviar mensajes con el móvil o a jugar a videojuegos, el 45% realiza ambas cosas y el 40% no juega a videojuegos. Si se elige un estudiante de ese instituto al azar, calcule la probabilidad de que dedique su tiempo libre a:

a) **(1 punto)** Enviar mensajes con el móvil y no jugar a videojuegos.

b) **(0.5 puntos)** Jugar a videojuegos sabiendo que no envía mensajes con el móvil.

c) **(0.5 puntos)** Hacer solamente una de las dos cosas.

d) **(0.5 puntos)** No hacer ninguna de las dos cosas.

Llamamos M al suceso "enviar mensajes con el Móvil" y V al suceso "jugar con Videojuegos".

Los datos proporcionados en el ejercicio son $P(M \cup V) = 0.80$, $P(M \cap V) = 0.45$ y $P(\overline{V}) = 0.40$.

a) Nos piden calcular $P(M \cap \overline{V})$.

Como $P(\overline{V}) = 0.40$ entonces $P(V) = 1 - P(\overline{V}) = 1 - 0.40 = 0.60$.

Obtenemos $P(M)$.

$$P(M \cup V) = P(M) + P(V) - P(M \cap V) \Rightarrow 0.80 = P(M) + 0.60 - 0.45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(M) = 0.80 - 0.60 + 0.45 = 0.65$$

Y ahora utilizamos la igualdad $P(M) = P(M \cap V) + P(M \cap \overline{V})$.

$$0.65 = 0.45 + P(M \cap \overline{V}) \Rightarrow \boxed{P(M \cap \overline{V}) = 0.65 - 0.45 = 0.20}$$

b) Nos piden calcular $P(V / \overline{M})$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(V / \overline{M}) = \frac{P(V \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{P(V) - P(M \cap V)}{1 - P(M)} = \frac{0.60 - 0.45}{1 - 0.65} = \boxed{\frac{3}{7} \simeq 0.4286}$$

c) Nos piden calcular $P\left((\overline{M} \cap V) \cup (M \cap \overline{V})\right)$.

Sabemos que $P(V \cap \overline{M}) = P(V) - P(M \cap V) = 0.60 - 0.45 = 0.15$

$$P\left((\overline{M} \cap V) \cup (M \cap \overline{V})\right) = P(\overline{M} \cap V) + P(M \cap \overline{V}) = 0.15 + 0.20 = \boxed{0.35}$$

d) Nos piden calcular $P(\overline{M} \cap \overline{V})$.

$$P(\overline{M} \cap \overline{V}) = P(\overline{M \cup V}) = 1 - P(M \cup V) = 1 - 0.80 = \boxed{0.20}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Como el 80% de los encuestados dedica el tiempo libre a enviar mensajes con el móvil o a jugar a videojuegos entonces el restante 20 % no envía mensajes con el móvil ni juega a videojuegos.
Realizamos una tabla de contingencia con este y los otros datos proporcionados en el problema.

	V	$\overline{V}$	
M	45		
$\overline{M}$		20	
		40	100

Completamos la tabla.

	V	$\overline{V}$	
M	45	20	65
$\overline{M}$	15	20	35
	60	40	100

a) Nos piden calcular $P\left(M \cap \overline{V}\right)$. Utilizamos los datos de la tabla y aplicamos la regla de Laplace.

$$P\left(M \cap \overline{V}\right) = \frac{20}{100} = \boxed{0.20}$$

b) Nos piden calcular $P\left(V / \overline{M}\right)$. Utilizamos los datos de la segunda fila de la tabla.

$$P\left(V / \overline{M}\right) = \frac{15}{35} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

c) Nos piden calcular $P\left(\left(\overline{M} \cap V\right) \cup \left(M \cap \overline{V}\right)\right)$.

$$P\left(\left(\overline{M} \cap V\right) \cup \left(M \cap \overline{V}\right)\right) = \frac{15+20}{100} = \frac{35}{100} = \boxed{0.35}$$

d) Nos piden calcular $P\left(\overline{M} \cap \overline{V}\right)$.

$$P\left(\overline{M} \cap \overline{V}\right) = \frac{20}{100} = \boxed{0.20}$$

EJERCICIO 6

Un componente electrónico se produce en dos fábricas, A y B. Se exporta el 40% de los componentes producidos en A y la cuarta parte de los producidos en B, mientras que el resto es para consumo nacional. Además, el 37% de todos los componentes producidos es exportado. Si se elige un componente electrónico al azar, halle la probabilidad de que:

a) **(1.5 puntos)** Se haya producido en la fábrica A.

b) **(1 punto)** Se haya producido en la fábrica A sabiendo que no es exportado.

Llamamos A al suceso "ser un componente de la fábrica A" y $\overline{A}$ al suceso "ser un componente fabricado en B".

También llamamos N al suceso "ser para consumo nacional" y $\overline{N}$ al suceso "ser para la exportación".

La información proporcionada nos permite establecer las probabilidades:

$$P\left(\overline{N}/A\right)=0.40\Rightarrow P\left(N/A\right)=1-P\left(\overline{N}/A\right)=1-0.40=0.60$$

$$P\left(\overline{N}/\overline{A}\right)=\frac{1}{4}\Rightarrow P\left(N/\overline{A}\right)=1-P\left(\overline{N}/\overline{A}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0.75$$

$$P\left(\overline{N}\right)=0.37\Rightarrow P\left(N\right)=1-P\left(\overline{N}\right)=0.63$$

a) Nos piden calcular $P\left(A\right)$.

$$P\left(N/A\right)=\frac{P\left(N\cap A\right)}{P\left(A\right)}=0.60\Rightarrow P\left(N\cap A\right)=0.60P\left(A\right)$$

$$P\left(N/\overline{A}\right)=\frac{P\left(N\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{P\left(N\cap\overline{A}\right)}{1-P\left(A\right)}=\frac{3}{4}\Rightarrow P\left(N\cap\overline{A}\right)=\left(1-P\left(A\right)\right)0.75$$

$$P\left(N\right)=P\left(N\cap A\right)+P\left(N\cap\overline{A}\right)=0.63\Rightarrow 0.60P\left(A\right)+\left(1-P\left(A\right)\right)0.75=0.63\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.60P\left(A\right)+0.75-0.75P\left(A\right)=0.63\Rightarrow -0.15P\left(A\right)=0.63-0.75\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P\left(A\right)=\frac{-0.12}{-0.15}=0.8}$$

b) Nos piden calcular $P\left(A/N\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(A/N\right)=\frac{P\left(A\cap N\right)}{P\left(N\right)}=\frac{P\left(A\right)P\left(N/A\right)}{P\left(N\right)}=\frac{0.8\cdot 0.6}{0.63}=\boxed{\frac{16}{21}\simeq 0.762}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

a) Llamamos "x" al porcentaje de componentes fabricados en A. El porcentaje de componentes fabricados en B serán $100-x$.
Construimos una tabla de contingencia.

	A	B	
Nacional			
Exportado	$0.40x$	$0.25(100-x)$	37
	x	$100-x$	100

Completamos la tabla.

	A	B	
Nacional	$0.6x$	$100-x-(25-0.25x)$	63
Exportado	$0.40x$	$25-0.25x$	37
	x	$100-x$	100

La primera fila debe cumplir que la suma de las dos primeras celdas nos dé como resultado lo que aparece en la 3ª celda de la primera fila.

$$0.6x+100-x-(25-0.25x)=63 \Rightarrow 0.6x+100-x-25+0.25x=63 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0.15x=63-75 \Rightarrow -0.15x=-12 \Rightarrow x=\frac{-12}{-0.15}=80$$

Una vez obtenido el valor de x completamos la tabla.

	A	B	
Nacional	48	15	63
Exportado	32	5	37
	80	20	100

El 80 % de los componentes están fabricados en la fábrica A. La probabilidad pedida es 0.8.

b) Utilizando los datos de la primera fila de la tabla tenemos $P(A/N)=\frac{48}{63}=\boxed{\frac{16}{21}\simeq 0.762}$

EJERCICIO 7

Se sabe que la vida útil en meses de una batería de coche sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 8 meses^2. Se seleccionan al azar 100 clientes que habían comprado una de estas baterías y se les pregunta cuando las reemplazaron, obteniéndose una media de 4 años y 2 meses.

a) **(1.25 puntos)** Determine, con un nivel de confianza del 94%, un intervalo de confianza para estimar la vida media de estas baterías.

b) **(1.25 puntos)** Manteniendo el mismo nivel de confianza, determine el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para que el error cometido al estimar la vida media de estas baterías sea menor que 0.1 meses.

a) X = La vida útil en meses de una batería de coche.

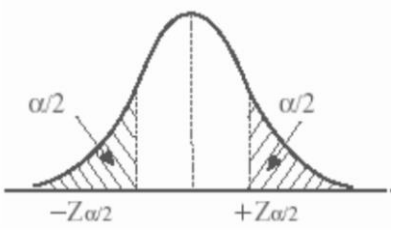
Como la varianza es 8 la desviación típica es $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \simeq 2.83 meses$. X = N(μ, $2\sqrt{2}$)

El tamaño de la muestra es $n = 100$. 4 años y 2 meses son 48 + 2 = 50 meses. La media muestral es $\bar{x} = 50 meses$

Con un nivel de confianza del 94% hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \propto = 0{,}94 \rightarrow \propto = 0{,}06 \rightarrow \propto/2 = 0'03 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}97 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.88}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761



Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.88 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{100}} = 0.5317$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(50 - 0.5317,\ 50 + 0.5317\right) = \left(49.4683,\ 50.5317\right)$$

b) Aplicamos la fórmula del error, le damos el valor de 0.1 y despejamos *n*.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.88 \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{n}} = 0.1 \Rightarrow \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{n}} = \frac{0.1}{1.88} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{8}}{\frac{0.1}{1.88}} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{1.88\sqrt{8}}{0.1}\right)^2 = 2827.52$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 2828 clientes.

EJERCICIO 8

El tiempo de adaptación al uso de unas gafas progresivas depende de la persona, de la graduación de las lentes y del tipo de progresivo elegido. No obstante, se sabe que el tiempo de adaptación sigue una ley Normal de media 12.5 días y desviación típica 2.5 días.

a) **(1.25 puntos)** Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos que han comenzado a utilizar este tipo de gafas, ¿qué distribución sigue la media muestral del tiempo de adaptación? ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de adaptación a las gafas progresivas para dicha muestra supere los 12 días?

b) **(1.25 puntos)** Si la muestra elegida es de tamaño 25 ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio muestral de adaptación a las gafas progresivas diste de 12 días a lo sumo 1 día?

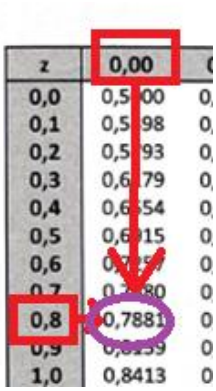
a) X = El tiempo de adaptación al uso de unas gafas progresivas en días. X = N(12.5, 2.5)
La media muestral sigue una distribución normal que tiene la misma media, pero su desviación típica es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\overline{X_{16}} = N\left(12.5, \frac{2.5}{\sqrt{16}}\right) \Rightarrow \overline{X_{16}} = N\left(12.5, 0.625\right).$$

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{16}} \geq 12\right)$.

$$P\left(\overline{X_{16}} \geq 12\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{12-12.5}{0.625}\right) = P\left(Z \geq -0.8\right) =$$

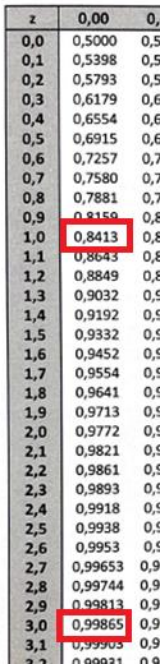
$$= P\left(Z \leq 0.8\right) = \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = \boxed{0.7881}$$



z	0,00	
0,0	0,5000	0,
0,1	0,5398	0,
0,2	0,5793	0,
0,3	0,6179	0,
0,4	0,6554	0,
0,5	0,6915	0,
0,6	0,7257	0,
0,7	0,7580	0,
0,8	0,7881	0,
1,0	0,8413	0

b) $\overline{X_{25}} = N\left(12.5, \frac{2.5}{\sqrt{25}}\right) \Rightarrow \overline{X_{25}} = N\left(12.5, 0.5\right)$

Nos piden calcular $P\left(12-1 \leq \overline{X_{25}} \leq 12+1\right) \Rightarrow P\left(11 \leq \overline{X_{25}} \leq 13\right)$.



z	0,00	
0,0	0,5000	0,
0,1	0,5398	0,
0,2	0,5793	0,
0,3	0,6179	0,
0,4	0,6554	0,
0,5	0,6915	0,
0,6	0,7257	0,
0,7	0,7580	0,
0,8	0,7881	0,
1,0	0,8413	0,
1,1	0,8643	0,
1,2	0,8849	0,
1,3	0,9032	0,
1,4	0,9192	0,
1,5	0,9332	0,
1,6	0,9452	0,
1,7	0,9554	0,
1,8	0,9641	0,
1,9	0,9713	0,
2,0	0,9772	0,
2,1	0,9821	0,
2,2	0,9861	0,
2,3	0,9893	0,
2,4	0,9918	0,
2,5	0,9938	0,
2,6	0,9953	0,
2,7	0,99653	0,9
2,8	0,99744	0,9
2,9	0,99813	0,9
3,0	0,99865	0,9
3,1	0,99903	0,9

$$P\left(11 \leq \overline{X_{25}} \leq 13\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{11-12.5}{0.5} \leq Z \leq \frac{13-12.5}{0.5}\right) =$$

$$= P\left(-3 \leq Z \leq 1\right) = P\left(Z \leq 1\right) - P\left(Z \leq -3\right) = P\left(Z \leq 1\right) - P\left(Z \geq 3\right) =$$

$$= P\left(Z \leq 1\right) - \left[1 - P\left(Z \leq 3\right)\right] = \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} =$$

$$= 0.8413 - \left[1 - 0.99865\right] = \boxed{0.83995}$$

PevAU 2023 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2022-2023	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Sean la función $F(x,y)=5x-3y$ y la región del plano R definida mediante las inecuaciones

$$2x-3y\le 1;\quad 4x+y\le 9;\quad x+y\le 5;\quad 9x-y\ge 0;\quad y\ge 0$$

a) **(1.3 puntos)** Dibuje la región R y calcule sus vértices.
b) **(0.5 puntos)** Indique razonadamente si los puntos A(2, 2) y B(1, 3.5) pertenecen a la región R.
c) **(0.7 puntos)** Obtenga los puntos de la región R donde F alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores.

EJERCICIO 2

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 0 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ a & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

a) **(1 punto)** Calcule los valores del parámetro *a* para los que tanto A como B admitan inversa.
b) **(1.5 puntos)** Para $a = 1$, halle una matriz X que satisfaga $A\cdot X\cdot B=C$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=x^3-3x^2+2x$.

a) **(1 punto)** Halle los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de *f* y su curvatura.
b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente la función *f*.
c) **(1 punto)** Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4

Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día, La función *v(t)* nos indica el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo *t*, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función *v(t)* se conoce que su variación instantánea es

$$v'(t)=t^2-5t+6,\ t\in[0,6]$$

a) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *v*.
b) **(0.75 puntos)** Si en el momento de la apertura del mercado se conoce que $v(0)=10$, halle la función *v*.
c) **(0.5 puntos)** Si un inversor compró 3000 de estas acciones en el instante *t = 2* y posteriormente las vendió en el instante *t = 4*, indique a cuánto ascendió la ganancia o la pérdida que obtuvo el inversor con esta gestión.
d) **(0.5 puntos)** ¿En qué momentos debería haber realizado este inversor las gestiones de compra y de venta para que la ganancia hubiese sido máxima? Justifique su respuesta.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.

a) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.
b) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz sin importar el orden.
c) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.
d) **(0.75 puntos)** Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

EJERCICIO 6

En una base de datos de correos electrónicos se ha observado que el 20 % de los correos recibidos son spam. Además, se ha observado que la palabra "lottery" ha aparecido en el 40% de los correos que son spam y en el 0.6% de los correos que no lo son.

a) **(1.25 puntos)** Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que aparezca la palabra "lottery" sea spam.
b) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que un correo elegido al azar en el que no aparezca la palabra "lottery" no sea spam.
c) **(0.75 puntos)** Si un correo se etiqueta como spam si aparece la palabra "lottery" y como no spam si esta palabra no aparece, calcule la probabilidad de que un correo se etiquete incorrectamente.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.25 puntos)** Una población está dividida en cuatro estratos de 250, 300, 400 y 350 individuos. Realizado un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 20 individuos del primer estrato. Determine el tamaño de la población, el tamaño de la muestra y el número de individuos seleccionados de los tres restantes estratos.
b) **(1.25 puntos)** En un centro de enseñanza la calificación media de los estudiantes fue de 6.4 puntos con una desviación típica de 0.7 puntos. Se seleccionó aleatoriamente una muestra de 49 estudiantes.
   b1) **(0.25 puntos)** Indique la distribución que sigue la media de las muestras de tamaño 49.
   b2) **(1 punto)** Calcula la probabilidad de que la media de las calificaciones de los estudiantes de una de esas muestras esté comprendida entre 6.3 y 6.8 puntos.

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de donantes de sangre en una universidad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 400 personas de esa universidad, resultando que 64 son donantes de sangre.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para estimar la proporción poblacional de donantes de sangre.
b) **(1.25 puntos)** Si el nivel de confianza es del 95%, calcule el error máximo cometido. Razone si este error será mayor o menor al disminuir el nivel de confianza.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Sean la función $F(x,y)=5x-3y$ y la región del plano R definida mediante las inecuaciones

$$2x-3y\le 1;\quad 4x+y\le 9;\quad x+y\le 5;\quad 9x-y\ge 0;\quad y\ge 0$$

a) **(1.3 puntos)** Dibuje la región R y calcule sus vértices.
b) **(0.5 puntos)** Indique razonadamente si los puntos A(2, 2) y B(1, 3.5) pertenecen a la región R.
c) **(0.7 puntos)** Obtenga los puntos de la región R donde F alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores.

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x-3y=1$

x	$y=\dfrac{1-2x}{-3}$
2	1
5	3

$4x+y=9$

x	$y=9-4x$
0	9
2	1

$x+y=5$

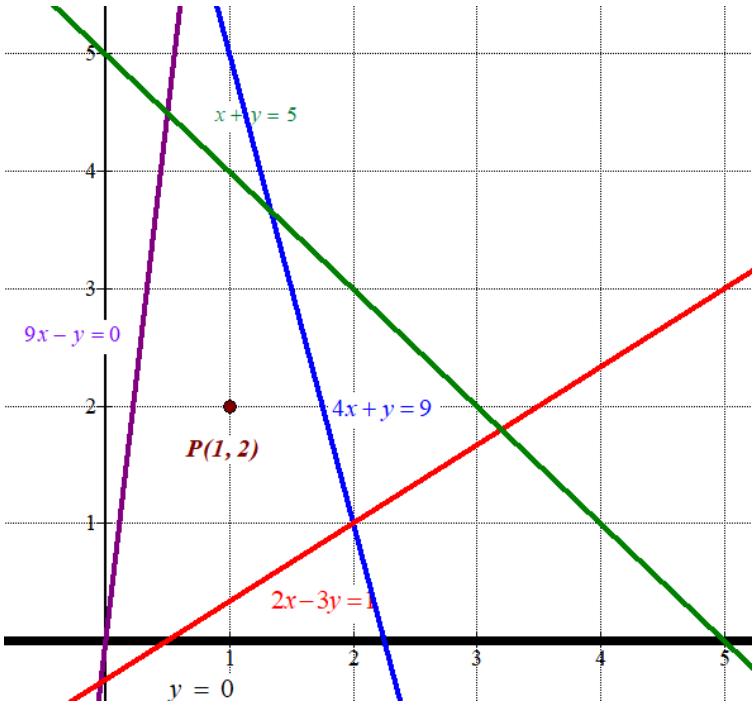
x	$y=5-x$
0	5
5	0

$9x-y=0$

x	$y=9x$
0	0
1	9

$y=0$

x	$y=0$
0	0
5	0



Como las restricciones son $2x-1\le 3y;\quad 4x+y\le 9;\quad x+y\le 5;\quad 9x\ge y;\quad y\ge 0$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de la recta roja y el eje de abscisas y por debajo de las rectas azul, verde y violeta.
Comprobamos que el punto P(1, 2) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$2-3\cdot 2\le 1;\quad 4+2\le 9;\quad 1+2\le 5;\quad 9-2\ge 0;\quad 2\ge 0$$

Se cumplen todas y la región factible es la coloreada de rosa en el siguiente dibujo.

Nos falta determinar las coordenadas de los vértices B y C.

$$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=5 \\ 9x-y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=5-y \\ 9x-y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(5-y)-y=0 \Rightarrow 45-9y-y=0 \Rightarrow$$

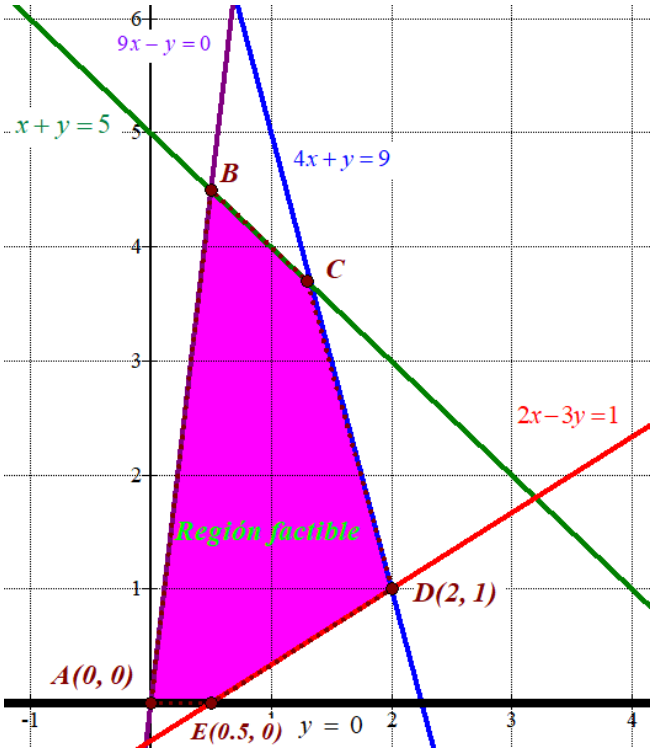
$$\Rightarrow -10y=-45 \Rightarrow y=\frac{45}{10}=4.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=5-4.5=0.5 \Rightarrow \boxed{B(0.5,4.5)}$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=5 \\ 4x+y=9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=5-x \\ 4x+y=9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+5-x=9 \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=5-\frac{4}{3}=\frac{11}{3} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)}$$



Los vértices son los puntos: A(0, 0), B(0.5, 4.5), $C\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)$, D(2,1) y E(0.5, 0).

b) Vemos si se cumplen las restricciones para A(2, 2).

$$A(2,2) \rightarrow 2\cdot 2-3\cdot 2\le 1;\ \text{¡¡¡}4\cdot 2+2\le 9\text{!!!};\ \ 2+2\le 5;\ \ 9\cdot 2-2\ge 0;\ \ 2\ge 0$$

El punto A(2, 2) no cumple todas las inecuaciones y no pertenece a la región R.

$$B(1,3.5) \rightarrow 2\cdot 1-3\cdot 3.5\le 1;\ \ 4\cdot 1+3.5\le 9;\ \ 1+3.5\le 5;\ \ 9\cdot 1-3.5\ge 0;\ \ 3.5\ge 0$$

El punto B(1, 3.5) cumple todas las inecuaciones y pertenece a la región R.
También se puede comprobar colocando cada uno de los puntos en el dibujo, viendo que el punto A(2, 2) está fuera de la región pintada de rosa y el B(2, 3.5) está dentro.

c) Valoramos la función objetivo $F(x,y)=5x-3y$ en cada vértice.

A(0, 0) → $F(0,0)=0$

B(0.5, 4.5) → $F(0.5,4.5)=5\cdot 0.5-3\cdot 4.5=-11$ ¡Mínimo!

$C\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)$ → $F\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)=5\frac{4}{3}-3\frac{11}{3}=\frac{-13}{3}\simeq -4.33$

D(2, 1) → $F(2,1)=5\cdot 2-3\cdot 1=7$ ¡Máximo!

E(0.5, 0) → $F(0.5,0)=5\cdot 0.5-3\cdot 0=2.5$

El máximo valor de la función es 7 y se alcanza en el punto D(2, 1) y el mínimo es –11 y se alcanza en B(0.5, 4.5).

EJERCICIO 2

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) **(1 punto)** Calcule los valores del parámetro *a* para los que tanto A como B admitan inversa.
b) **(1.5 puntos)** Para *a = 1*, halle una matriz X que satisfaga $A \cdot X \cdot B = C$

a) Para que tengan inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-2a$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-2a=0 \Rightarrow a(a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ a-2=0 \Rightarrow \boxed{a=2} \end{cases}$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{vmatrix}=-2+a$$

$$|B|=0 \Rightarrow -2+a=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Para que tengan inversa las dos matrices A y B debe ser *a* distinto de 0 y de 2.

b) Para *a = 1* las dos matrices tienen inversa.
Despejamos X de la ecuación.

$$A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Hallamos la inversa de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+1 = -1 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de X.

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{3 \quad \cdot \quad 3}\times 2 \longrightarrow 3\times 2$$

$$X = \begin{pmatrix} 2+1-4 & -1-1 \\ -1+4 & 1 \\ 1-2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & 1+4 \\ 3+1 & -3-2 \\ -1-1 & 1+2 \end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{2 \quad \cdot \quad 2}\times 2 \longrightarrow 3\times 2$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=x^3-3x^2+2x$.

a) **(1 punto)** Halle los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de *f* y su curvatura.
b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente la función *f*.
c) **(1 punto)** Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.

a) Puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x^2+2x \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=0^3-3\cdot 0^2+2\cdot 0=0 \Rightarrow \boxed{P(0,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x^2+2x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-3x^2+2x=0 \Rightarrow x\left(x^2-3x+2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow \boxed{P(0,0)} \\ x^2-3x+2=0 \rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2}=\dfrac{3\pm 1}{2}= \begin{cases} \dfrac{3+1}{2}=2 \rightarrow \boxed{Q(2,0)} \\ \dfrac{3-1}{2}=1 \rightarrow \boxed{R(1,0)} \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son P(0, 0), Q(2, 0) y R(1, 0).

Utilizamos la derivada para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-6x+2 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2-6x+2=0 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4(3)(2)}}{2\cdot 3}=\frac{6\pm\sqrt{12}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6+\sqrt{12}}{6}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\simeq 1.58 \\ \dfrac{6-\sqrt{12}}{6}=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\simeq 0.42 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=2>0$. La función crece en $\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3},1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

  $f'(1)=3-6+2=-1<0$. La función decrece en $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3},1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

  $f'(2)=12-12+2=2>0$. La función crece en $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

La función crece en $\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ y decrece en $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3},1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

La función presenta un máximo relativo en $x=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ y un mínimo relativo en $x=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

Para estudiar la curvatura utilizamos la derivada segunda.

$$\left.\begin{matrix} f''(x)=6x-6 \\ f''(x)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow x=\frac{6}{6}=1$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de este valor.

- En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale

  $f''(0)=0-6=-6<0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty,1)$.

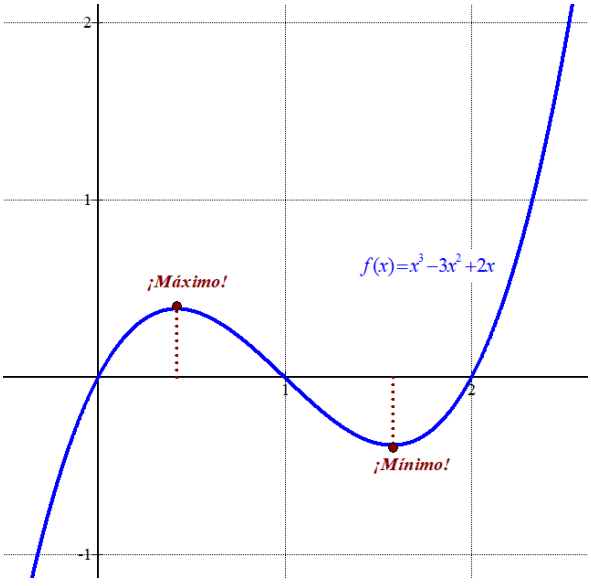
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale

  $f''(2)=12-6=6>0$. La función es convexa (∪) en $(1,+\infty)$.

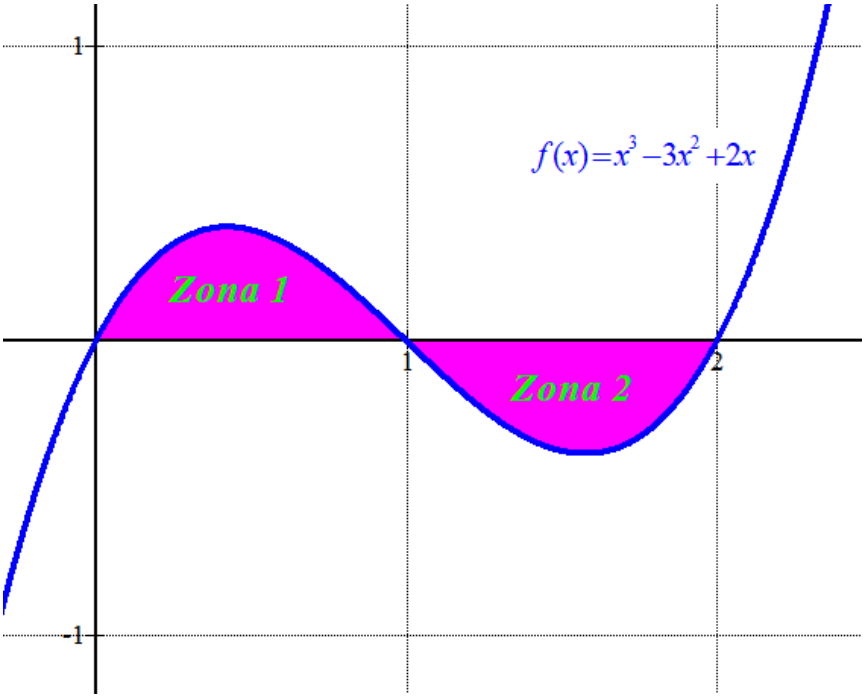
La función es cóncava (∩) en $(-\infty,1)$ y convexa (∪) en $(1,+\infty)$.
La función presenta un punto de inflexión en $x = 1$.

b) Hacemos una tabla de valores y representamos.

x	$f(x)=x^3-3x^2+2x$
0	0
0.42	0.4
1	0
1.58	–0.4
2	0



c) El área de la región la dividimos en dos partes. Calculamos cada una de ellas y luego sumamos los valores obtenidos.



$$Área\,1=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^3-3x^2+2xdx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{1^4}{4}-1^3+1^2\right]-\left[\frac{0^4}{4}-0^3+0^2\right]=\boxed{\frac{1}{4}\,u^2}$$

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 x^3-3x^2+2xdx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_1^2=$$

$$=\left[\frac{2^4}{4}-2^3+2^2\right]-\left[\frac{1^4}{4}-1^3+1^2\right]=-\frac{1}{4}$$

$$Área\,2=\left|-\frac{1}{4}\right|=\boxed{\frac{1}{4}\,u^2}$$

El área total es $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=\boxed{0.5u^2}$

EJERCICIO 4

Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día, La función *v(t)* nos indica el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo *t*, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función *v(t)* se conoce que su variación instantánea es

$$v'(t) = t^2 - 5t + 6,\ t \in [0,6]$$

a) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *v*.

b) **(0.75 puntos)** Si en el momento de la apertura del mercado se conoce que $v(0) = 10$, halle la función *v*.

c) **(0.5 puntos)** Si un inversor compró 3000 de estas acciones en el instante *t = 2* y posteriormente las vendió en el instante *t = 4*, indique a cuánto ascendió la ganancia o la pérdida que obtuvo el inversor con esta gestión.

d) **(0.5 puntos)** ¿En qué momentos debería haber realizado este inversor las gestiones de compra y de venta para que la ganancia hubiese sido máxima? Justifique su respuesta.

a) Estudiamos el signo de la función derivada.

$$\left.\begin{matrix} v'(t) = t^2 - 5t + 6 \\ v'(t) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 = t \in [0,6] \\ \frac{5-1}{2} = 2 = t \in [0,6] \end{cases}$$

- En el intervalo $[0,2)$ tomamos *t = 1* y la derivada vale $v'(1) = 1^2 - 5 + 6 = 2 > 0$. La función crece en $[0,2)$.
- En el intervalo $(2,3)$ tomamos *t = 2.5* y la derivada vale $v'(2.5) = 2.5^2 - 5 \cdot 2.5 + 6 = -0.25 < 0$. La función decrece en $(2,3)$.
- En el intervalo $(3,6]$ tomamos *t = 4* y la derivada vale $v'(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2 > 0$. La función crece en $(3,6]$.

La función crece en $[0,2) \cup (3,6]$ y decrece en $(2,3)$.

b) La función es la integral de la derivada.

$$v(t) = \int v'(t)\,dt = \int t^2 - 5t + 6 dt = \frac{t^3}{3} - 5\frac{t^2}{2} + 6t + K$$

Hallamos el valor de K sabiendo que $v(0) = 10$.

$$\left.\begin{array}{l} v(t)=\dfrac{t^3}{3}-5\dfrac{t^2}{2}+6t+K \\ v(0)=10 \end{array}\right\} \Rightarrow 10=\frac{0^3}{3}-5\frac{0^2}{2}+6\cdot 0+K \Rightarrow K=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{5}{2}t^2+6t+10}$$

c) Las ganancias en cada acción son la diferencia entre *v(4)* y *v(2)*.

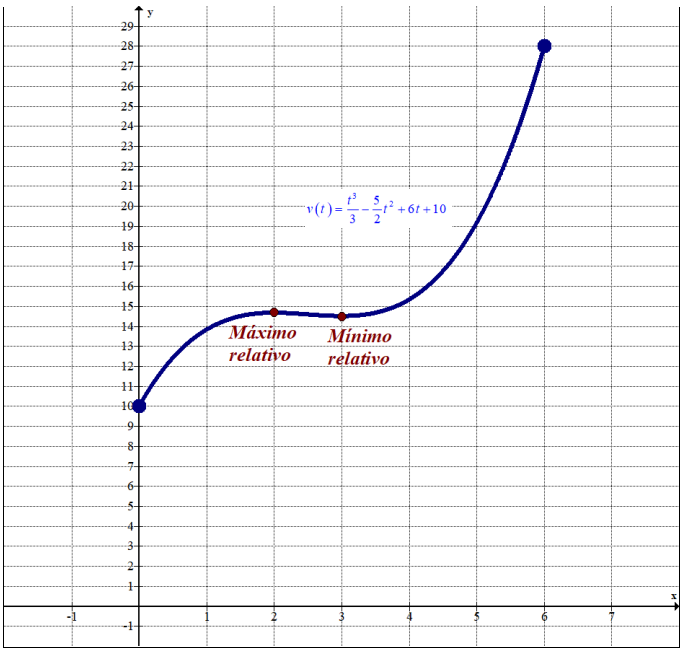
$$\left.\begin{array}{l} v(4)=\dfrac{4^3}{3}-\dfrac{5}{2}4^2+6\cdot 4+10=\dfrac{46}{3} \\ v(2)=\dfrac{2^3}{3}-\dfrac{5}{2}2^2+6\cdot 2+10=\dfrac{44}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow v(4)-v(2)=\frac{46}{3}-\frac{44}{3}=\frac{2}{3}\ €/\textit{acción}$$

Las ganancias son $3000\cdot\dfrac{2}{3}=2000\ €$.

d) Buscamos el mínimo y máximo absoluto de la función. Para ello valoramos la función en 0, 2, 3 y 6.

$$\left.\begin{array}{l} v(0)=\dfrac{0^3}{3}-\dfrac{5}{2}0^2+6\cdot 0+10=10\ ¡\textit{Mínimo}! \\ v(2)=\dfrac{2^3}{3}-\dfrac{5}{2}2^2+6\cdot 2+10=\dfrac{44}{3} \\ v(3)=\dfrac{3^3}{3}-\dfrac{5}{2}3^2+6\cdot 3+10=\dfrac{29}{2} \\ v(6)=\dfrac{6^3}{3}-\dfrac{5}{2}6^2+6\cdot 6+10=28\ ¡\textit{Máximo}! \end{array}\right\}$$

Debería haber comprado en *t = 0* y haber vendido en *t = 6*. Habría comprado al valor más bajo y hubiese vendido al valor más alto del intervalo [0,6].



EJERCICIO 5

Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.

a) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.

b) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz sin importar el orden.

c) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.

d) **(0.75 puntos)** Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

a) Si la probabilidad de sacar cara la llamamos *p* tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} P(Cara) = p \\ P(Cruz) = 1-p \\ P(Cara) = 2\cdot P(Cruz) \end{array}\right\} \Rightarrow p = 2(1-p) \Rightarrow p = 2-2p \Rightarrow 3p = 2 \Rightarrow \boxed{p = \frac{2}{3}}$$

La probabilidad de sacar cara es 2/3.

b) Ocurre lo pedido si sale CARA y CRUZ o bien CRUZ y CARA.

$$P(\text{Cara y Cruz}) = P(Cara1\, y\, Cruz2) + P(Cruz1\, y\, Cara2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

c) Calculamos la probabilidad del suceso contrario "No sale ninguna cara" = "Salen dos cruces".

$$P(Cruz1\, y\, Cruz2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow P(\text{Al menos una cara}) = 1 - P(Cruz1\, y\, Cruz2) = 1 - \frac{1}{9} = \boxed{\frac{8}{9}}$$

d) Llamamos A al suceso "Ha salido al menos una cara" y B al suceso "Han salido dos caras". Nos piden calcular $P(B/A)$.

Sabemos que el suceso $A \cap B$ = "Han salido al menos una cara" y "Han salido dos caras" es el suceso "Han salido dos caras". $A \cap B = B$.

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{8}{9}} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

EJERCICIO 6

En una base de datos de correos electrónicos se ha observado que el 20 % de los correos recibidos son spam. Además, se ha observado que la palabra "lottery" ha aparecido en el 40% de los correos que son spam y en el 0.6% de los correos que no lo son.

a) **(1.25 puntos)** Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que aparezca la palabra "lottery" sea spam.

b) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que un correo elegido al azar en el que no aparezca la palabra "lottery" no sea spam.

c) **(0.75 puntos)** Si un correo se etiqueta como spam si aparece la palabra "lottery" y como no spam si esta palabra no aparece, calcule la probabilidad de que un correo se etiquete incorrectamente.

Si el 20 % de los correos recibidos son spam entonces el 80 % son "No spam".
Realizamos una tabla de contingencia con los porcentajes de cada suceso posible.

	"Lottery"	No "lottery"	
Spam	$0.40 \cdot 20 = 8$		20
No spam	$0.006 \cdot 80 = 0.48$		80
			100

Completamos la tabla.

	"Lottery"	No "lottery"	
Spam	$0.40 \cdot 20 = 8$	12	20
No spam	$0.006 \cdot 80 = 0.48$	79.52	80
	8.48	91.52	100

a) Llamamos S al suceso "El correo es spam" y S al suceso "El correo tiene la palabra lottery".
Nos piden calcular $P(S/L)$.

$$P(S/L)=\frac{P(S\cap L)}{P(L)}=\frac{\frac{8}{100}}{\frac{8.48}{100}}=\boxed{\frac{50}{53}\simeq 0.9434}$$

b) Nos piden calcular $P(\overline{S}/\overline{L})$.

$$P(\overline{S}/\overline{L})=\frac{P(\overline{S}\cap\overline{L})}{P(\overline{L})}=\frac{\frac{79.52}{100}}{\frac{91.52}{100}}=\boxed{\frac{497}{572}\simeq 0.8689}$$

c) Se etiqueta incorrectamente si tiene la palabra "lottery" y no es spam o bien si no aparece la palabra "lottery" y es spam. Calculamos la probabilidad de cada suceso y las sumamos.

$$P(L\cap\overline{S})+P(\overline{L}\cap S)=\frac{0.48}{100}+\frac{12}{100}=\boxed{\frac{78}{625}=0.1248}$$

EJERCICIO 7

a) **(1.25 puntos)** Una población está dividida en cuatro estratos de 250, 300, 400 y 350 individuos. Realizado un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 20 individuos del primer estrato. Determine el tamaño de la población, el tamaño de la muestra y el número de individuos seleccionados de los tres restantes estratos.

b) **(1.25 puntos)** En un centro de enseñanza la calificación media de los estudiantes fue de 6.4 puntos con una desviación típica de 0.7 puntos. Se seleccionó aleatoriamente una muestra de 49 estudiantes.

b1) **(0.25 puntos)** Indique la distribución que sigue la media de las muestras de tamaño 49.

b2) **(1 punto)** Calcula la probabilidad de que la media de las calificaciones de los estudiantes de una de esas muestras esté comprendida entre 6.3 y 6.8 puntos.

a) El tamaño de la población es 250 + 300 + 400 + 350 = 1300.

Si se eligen 20 de 250 por proporcionalidad se eligen $\frac{20\cdot 1300}{250}=104$ de toda la población.

El tamaño de la muestra es de 104 individuos.

De la misma manera obtenemos que se eligen $\frac{20\cdot 300}{250}=24$ del segundo estrato.

De la misma manera obtenemos que se eligen $\frac{20\cdot 400}{250}=32$ del tercer estrato.

De la misma manera obtenemos que se eligen $\frac{20\cdot 350}{250}=28$ del cuarto estrato.

b)

b1) Llamamos X a la distribución de la calificación. X = N(6.4, 0.7).

Entonces $\overline{X_{49}}$ es una distribución normal con la misma media pero con desviación típica $\frac{0.7}{\sqrt{49}}=0.1$.

$\overline{X_{49}}=N(6.4,0.1)$

b2) Nos piden calcular $P\left(6.3\le \overline{X_{49}}\le 6.8\right)$.

$$P\left(6.3\le \overline{X_{49}}\le 6.8\right)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{6.3-6.4}{0.1}\le Z\le \frac{6.8-6.4}{0.1}\right)=$$

$$=P(-1\le Z\le 4)=P(Z\le 4)-P(Z\le -1)=P(Z\le 4)-P(Z\ge 1)=$$

$$=P(Z\le 4)-\left[1-P(Z\le 1)\right]=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=0.99997-\left[1-0.8413\right]=\boxed{0.84127}$$

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de donantes de sangre en una universidad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 400 personas de esa universidad, resultando que 64 son donantes de sangre.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para estimar la proporción poblacional de donantes de sangre.

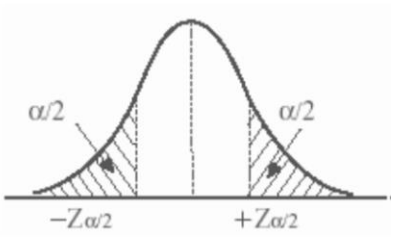
b) **(1.25 puntos)** Si el nivel de confianza es del 95%, calcule el error máximo cometido. Razone si este error será mayor o menor al disminuir el nivel de confianza.

Tamaño de la muestra es $n = 400$. $pr = \frac{64}{400} = 0.16$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.16 = 0.84$

a) Con un nivel de confianza del 98 % tenemos

$1 - \propto = 0{,}98 \rightarrow \propto = 0{,}02 \rightarrow \propto/2 = 0'01 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}325}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5[illegible]	0,[illegible]120
0,1	0,5398	0,5438	0,54[illegible]8	0,[illegible]517
0,2	0,5793	0,5832	0,58[illegible]1	0,[illegible]910
0,3	0,6179	0,6217	0,62[illegible]5	0,[illegible]293
0,4	0,6554	0,6591	0,66[illegible]8	0,[illegible]664
0,5	0,6915	0,6950	0,69[illegible]5	0,[illegible]019
0,6	0,7257	0,7291	0,73[illegible]4	0,[illegible]357
0,7	0,7580	0,7611	0,76[illegible]2	0,[illegible]673
0,8	0,7881	0,7910	0,79[illegible]9	0,[illegible]967
0,9	0,8159	0,8186	0,82[illegible]2	0,[illegible]238
1,0	0,8413	0,8438	0,84[illegible]1	0,[illegible]485
1,1	0,8643	0,8665	0,86[illegible]6	0,[illegible]708
1,2	0,8849	0,8869	0,88[illegible]8	0,[illegible]907
1,3	0,9032	0,9049	0,90[illegible]6	0,[illegible]082
1,4	0,9192	0,9207	0,92[illegible]2	0,[illegible]236
1,5	0,9332	0,9345	0,93[illegible]7	0,[illegible]370
1,6	0,9452	0,9463	0,94[illegible]4	0,[illegible]484
1,7	0,9554	0,9564	0,95[illegible]3	0,[illegible]582
1,8	0,9641	0,9649	0,96[illegible]6	0,[illegible]664
1,9	0,9713	0,9719	0,97[illegible]6	0,[illegible]732
2,0	0,9772	0,9778	0,97[illegible]3	0,[illegible]788
2,1	0,9821	0,9826	0,98[illegible]0	0,[illegible]834
2,2	0,9861	0,9864	0,98[illegible]8	0,[illegible]871
2,3	[illegible]	[illegible]	0,9898	0,9901
[illegible]	0,9918	0,9920	[illegible]	[illegible]



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.16 \cdot 0.84}{400}} = 0.0426$$

El error máximo cometido es de 0.0426.

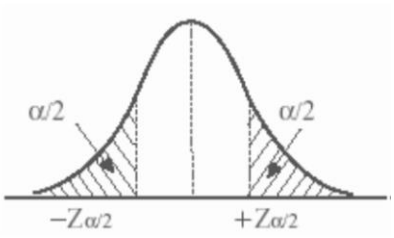
El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.16 - 0.0426,\quad 0.16 + 0.0426) = (0.1174,\ 0.2026)$$

b) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	
	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	
1,9							0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.16 \cdot 0.84}{400}} \simeq 0.036$$

El error máximo cometido es de 0.036.

Razone si este error será mayor o menor al disminuir el nivel de confianza.

Si disminuye el nivel de confianza disminuye el valor de $z_{\alpha/2}$. Al disminuir este valor disminuye el error pues su fórmula es $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}}$ y depende proporcionalmente del valor de $z_{\alpha/2}$

El error es menor pues utilizamos un nivel de confianza menor.

PevAU 2023 Ordinaria (suplente) Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2022-2023	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) El aforo de un campo de fútbol es de 10000 personas. Según el reglamento establecido por la federación de fútbol, como máximo deben ponerse a la venta 3000 entradas para los aficionados del equipo visitante y por cada aficionado visitante debe haber dos aficionados locales como mínimo y cuatro aficionados locales como máximo.
Si el precio de la entrada es de 50 € pero el aficionado local tiene un descuento del 20 %, ¿cuántos aficionados locales y visitantes deben asistir para obtener el mayor importe con la venta de las entradas?

EJERCICIO 2

a) Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & m & -2\\ 1 & m & 4\end{pmatrix}$

a1) **(0.5 puntos)** Obtenga para qué valores de *m* la matriz *A* tiene inversa.
a2) **(1 punto)** Calcule, en caso de existir, la inversa de *A* para *m = 1*.

b) **(1 punto)** Despeje y simplifique *X* en la ecuación $X\cdot B-B^2+B=0$, sabiendo que la matriz *B* es invertible.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+6 & x\le 2.5\\ -1.4x+7 & x>2.5\end{cases}.$$

con *a* y *b* números reales. Calcule el valor de los parámetros *a* y *b* para que la función sea continua y tenga un máximo en *x = 1*.

b) **(1 punto)** Represente gráficamente la función $g(x)=-2x^2+2x+4$ y calcule el área de la región acotada, limitada por la gráfica de dicha función y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3} & 0\le x\le 2\\ \dfrac{4}{x+1} & x>2\end{cases}$

a) **(1.25 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f*.

b) **(1.25 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el máximo de la función y represente gráficamente la función *f*.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Durante la pasada temporada, una tenista ganó el 90 % de los partidos que jugó sobre tierra y la mitad cuando lo hizo sobre otro tipo de superficie. De los 40 partidos que jugó la temporada pasada, 25 lo hizo sobre tierra. Elegido al azar un partido de la temporada pasada de esta tenista, halle la probabilidad de que:

a) **(1.25 puntos)** Ganase el partido.

b) **(0.5 puntos)** No ganase sabiendo que jugó sobre tierra.

c) **(0.75 puntos)** Jugase sobre tierra sabiendo que ganó.

EJERCICIO 6

El 32 % de las microempresas tiene página web y el 64.6 % ni tiene página web ni realiza ventas por comercio electrónico. De las microempresas que tienen página web, el 30 % realiza ventas por comercio electrónico. Se selecciona al azar una microempresa.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que tenga página web o realice ventas por comercio electrónico.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que realice ventas por comercio electrónico.

c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que no tenga página web y realice ventas por comercio electrónico.

d) **(0.5 puntos)** Razone si son independientes los sucesos "Tener página web" y "Realizar ventas por comercio electrónico". ¿Son incompatibles?

BLOQUE D

EJERCICIO 7

El peso de la gamba roja de Garrucha, en gramos, sigue una distribución Normal de media poblacional desconocida y desviación típica *5 gramos*.

a) **(1.25 puntos)** Se elige una muestra aleatoria de 100 gambas obteniéndose una media de *53 gramos*. Calcule un intervalo de confianza al 97.5 % para estimar el peso medio de la gamba roja.

b) **(1.25 puntos)** Sabiendo que la media poblacional es *53 gramos* y escogiendo una muestra aleatoria de 64 gambas, calcule la probabilidad de que el peso medio de la muestra sea superior a *53.25 gramos*.

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de clientes de una compañía de seguros que han requerido el servicio de asistencia en carretera. Para ello, se ha recogido una muestra aleatoria de 300 asegurados resultando que 90 han requerido este servicio.

a) **(1.25 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza al 97 % para estimar la proporción de asegurados que han solicitado este servicio.

b) **(1.25 puntos)** Con la proporción muestral facilitada y con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el número mínimo de asegurados que se deberán seleccionar aleatoriamente para que la proporción muestral y la poblacional no difieran en más de un 3 %?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) El aforo de un campo de fútbol es de 10000 personas. Según el reglamento establecido por la federación de fútbol, como máximo deben ponerse a la venta 3000 entradas para los aficionados del equipo visitante y por cada aficionado visitante debe haber dos aficionados locales como mínimo y cuatro aficionados locales como máximo.
Si el precio de la entrada es de 50 € pero el aficionado local tiene un descuento del 20 %, ¿cuántos aficionados locales y visitantes deben asistir para obtener el mayor importe con la venta de las entradas?

Llamamos "x" al número de entradas para los aficionados locales e "y" al número de entradas para los aficionados del equipo visitante.

"El aforo de un campo de fútbol es de 10000 personas" → $x+y\le 10000$.

"Como máximo deben ponerse a la venta 3000 entradas para los aficionados del equipo visitante" → $y\le 3000$.

"Por cada aficionado visitante debe haber dos aficionados locales como mínimo y cuatro aficionados locales como máximo" → $2y\le x\le 4y$.

Reunimos todas estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 10000 \\ 2y\le x\le 4y \\ y\le 3000 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=10000$

x	$y=10000-x$
0	10000
10000	0

$x=2y$

x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
6000	3000

$x=4y$

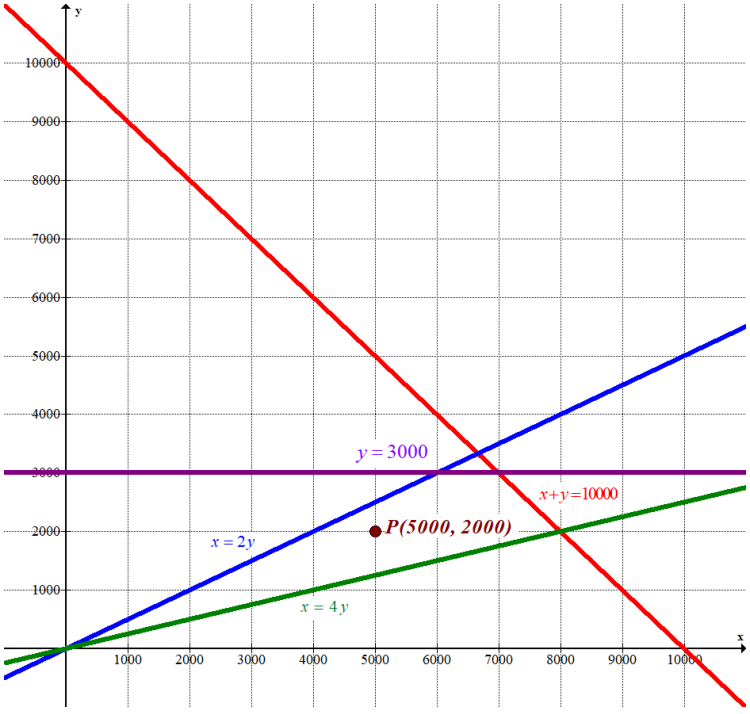
x	$y=\frac{x}{4}$
0	0
8000	2000

$y=3000$

x	$y=3000$
0	3000
3000	3000

$x=0;\ y=0$

Primer cuadrante

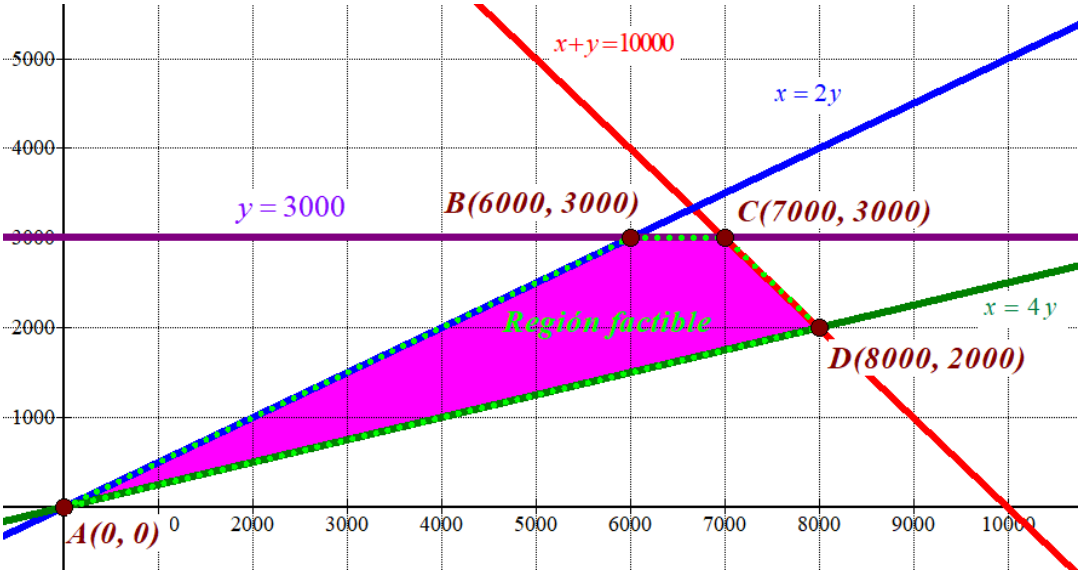


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\le 10000 \\ 2y\le x\le 4y \\ y\le 3000 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de la recta verde y por debajo de las rectas azul, roja y la violeta.

Comprobamos que el punto P(5000, 2000) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 5000+2000\le 10000 \\ 2\cdot 2000\le 5000\le 4\cdot 2000 \\ 2000\le 3000 \\ 5000\ge 0;\ 2000\ge 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas y la región factible es la coloreada de rosa en el siguiente dibujo.



Los vértices son los puntos: A(0, 0), B(6000, 3000), $C(7000,3000)$ y D(8000, 2000).

La función objetivo que deseamos maximizar es la recaudación por la venta de entradas.

Si el precio de la entrada es de 50 € pero el aficionado local tiene un descuento del 20 % → $R(x,y)=50y+0.80\cdot 50x=40x+50y$

Valoramos la función objetivo $R(x,y)=40x+50y$ en cada vértice.

A(0, 0) → $R(0,0)=0$

B(6000, 3000) → $R(6000,3000)=40\cdot 6000+50\cdot 3000=390\,000$

$C(7000,3000)$ → $R(7000,3000)=40\cdot 7000+50\cdot 3000=430\,000$ ¡Máximo!

D(8000, 2000) → $R(8000,2000)=40\cdot 8000+50\cdot 2000=420\,000$

La máxima recaudación es de 430 000 euros y se obtiene con la venta de 7000 entradas para los aficionados locales y 3000 entradas para los visitantes.

EJERCICIO 2

a) Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & m & -2\\ 1 & m & 4\end{pmatrix}$

a1) **(0.5 puntos)** Obtenga para qué valores de *m* la matriz *A* tiene inversa.

a2) **(1 punto)** Calcule, en caso de existir, la inversa de *A* para *m = 1*.

b) **(1 punto)** Despeje y simplifique *X* en la ecuación $X\cdot B-B^2+B=0$, sabiendo que la matriz *B* es invertible.

a)

a1) Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & m & -2\\ 1 & m & 4\end{vmatrix}=4m+2+0-0-0+2m=6m+2$$

$$|A|=0\Rightarrow 6m+2=0\Rightarrow 6m=-2\Rightarrow \boxed{m=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor $m\neq\frac{-1}{3}$.

a2) Para *m = 1* la matriz A tiene inversa.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=6\cdot 1+2=8\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}}{8}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}6 & 4 & 2\\ -2 & 4 & 2\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/4 & 1/2 & 1/4\\ -1/4 & 1/2 & 1/4\\ -1/8 & -1/4 & 1/8\end{pmatrix}}$$

b) Despejamos en la ecuación matricial y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X\cdot B-B^2+B=0\Rightarrow X\cdot B=B^2-B\Rightarrow X=\left(B^2-B\right)B^{-1}=B^2B^{-1}-B\cdot B^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=B\cdot B\cdot B^{-1}-B\cdot B^{-1}=B\cdot I-I\Rightarrow \boxed{X=B-I}$$

EJERCICIO 3

a) (1.5 puntos) Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+6 & x\le 2.5 \\ -1.4x+7 & x>2.5 \end{cases}.$$

con *a* y *b* números reales. Calcule el valor de los parámetros *a* y *b* para que la función sea continua y tenga un máximo en *x = 1*.

b) **(1 punto)** Represente gráficamente la función $g(x)=-2x^2+2x+4$ y calcule el área de la región acotada, limitada por la gráfica de dicha función y el eje de abscisas.

a) Para que la función sea continua debe serlo en *x = 2.5*.

$$\left.\begin{array}{l} f(2.5)=a\cdot 2.5^2+2.5b+6=6.25a+2.5b+6 \\ \lim\limits_{x\to 2.5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2.5^-} ax^2+bx+6=6.25a+2.5b+6 \\ \lim\limits_{x\to 2.5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2.5^+} -1.4x+7=3.5 \\ \lim\limits_{x\to 2.5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2.5^+} f(x)=f(2.5) \end{array}\right\} \Rightarrow 6.25a+2.5b+6=3.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6.25a+2.5b+2.5=0 \Rightarrow 2.5a+b+1=0 \Rightarrow \boxed{b=-2.5a-1}$$

Para que la función tenga un máximo en *x = 1* debe cumplirse que $f'(1)=0$.

En un entorno de *x = 1* la función es $f(x)=ax^2+bx+6$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=2ax+b \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-2a}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} b=-2.5a-1 \\ b=-2a \end{array}\right\} \Rightarrow -2a=-2.5a-1 \Rightarrow 0.5a=-1 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-1}{0.5}=-2} \Rightarrow \boxed{b=-2(-2)=4}$$

Los valores buscados son *a = –2* y *b = 4*.

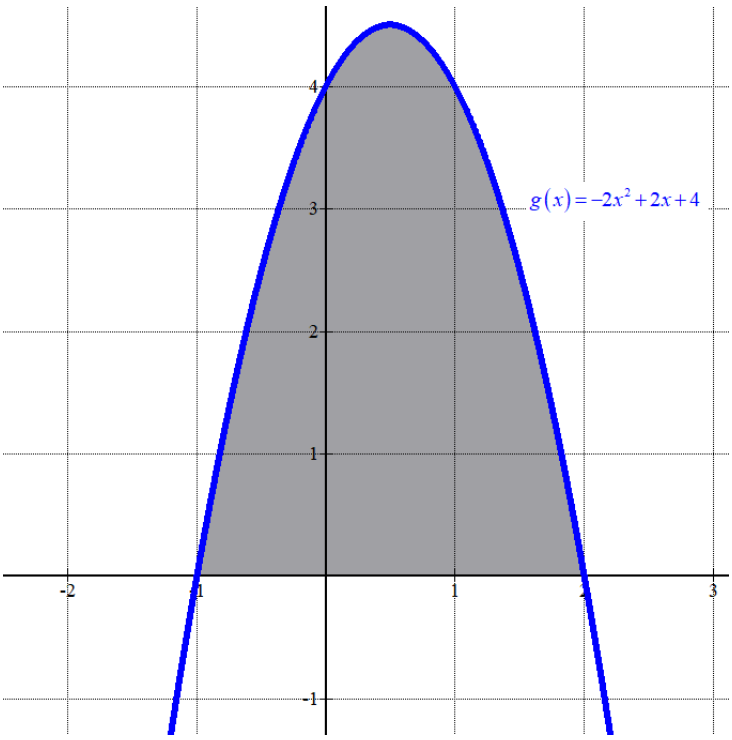
b) La función $g(x)=-2x^2+2x+4$ es una parábola.

Hallamos su vértice.

$$\left.\begin{array}{l} g'(x)=-4x+2 \\ g'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -4x+2=0 \Rightarrow -4x=-2 \Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}$$

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

x	$g(x)=-2x^2+2x+4$
-1	0
0	4
1/2	4.5
1	4
2	0



El área de la región pintada de gris se obtiene con la integral definida de la función entre –1 y 2.

$$Área=\int_{-1}^{2}-2x^2+2x+4dx=\left[-2\frac{x^3}{3}+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=$$

$$=\left[-2\frac{2^3}{3}+2^2+4\cdot 2\right]-\left[-2\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2+4(-1)\right]=\frac{-16}{3}+4+8-\frac{2}{3}-1+4=\boxed{9\ u^2}$$

El valor del área es de 9 unidades cuadradas.

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3} & 0\le x\le 2\\ \dfrac{4}{x+1} & x>2\end{cases}$

a) **(1.25 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f*.

b) **(1.25 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el máximo de la función y represente gráficamente la función *f*.

a) En el intervalo [0, 2) la función es $f(x)=\dfrac{x^2}{3}$ que es una función polinómica y por tanto continua.

En el intervalo (2, +∞) la función es $f(x)=\dfrac{4}{x+1}$ que es una función racional cuyo denominador se anula en $x = -1$, no incluido en el intervalo de definición. La función es continua.

Estudiamos la continuidad en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\dfrac{2^2}{3}=\dfrac{4}{3}\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2}{3}=\dfrac{4}{3}\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{4}{2+1}=\dfrac{4}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=\frac{4}{3}$$

La función es continua en su dominio de definición [0, +∞).

En el intervalo [0, 2] la función es $f(x)=\dfrac{x^2}{3}$ que es una función derivable y su derivada es $f'(x)=\dfrac{2x}{3}$.

En el intervalo (2, +∞) la función es $f(x)=\dfrac{4}{x+1}$ que es una función derivable y su derivada es $f'(x)=\dfrac{-4}{(x+1)^2}$.

Estudiamos la derivabilidad en $x = 2$.

La función derivada en el intervalo (0, 2) ∪ (+∞) es $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3} & 0\le x<2\\ \dfrac{-4}{(x+1)^2} & x>2\end{cases}$. Calculamos las derivadas laterales en $x = 2$ y comprobamos si coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x}{3}=\dfrac{4}{3} \\ f'(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-4}{(x+1)^2}=\dfrac{-4}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)=\frac{4}{3}\neq\frac{-4}{9}=f'(2^+)$$

La función no es derivable en $x = 2$.

Resumiendo: La función es continua en $[0, +\infty)$ y derivable en $[0, 2) \cup (2, +\infty)$.

b) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento utilizamos la derivada.

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases} 0\le x<2\to\dfrac{2x}{3}=0\to 2x=0\to x=0 \\ x>2\to\dfrac{-4}{(x+1)^2}=0\to -4=0 \text{ ¡Imposible!} \end{cases}$$

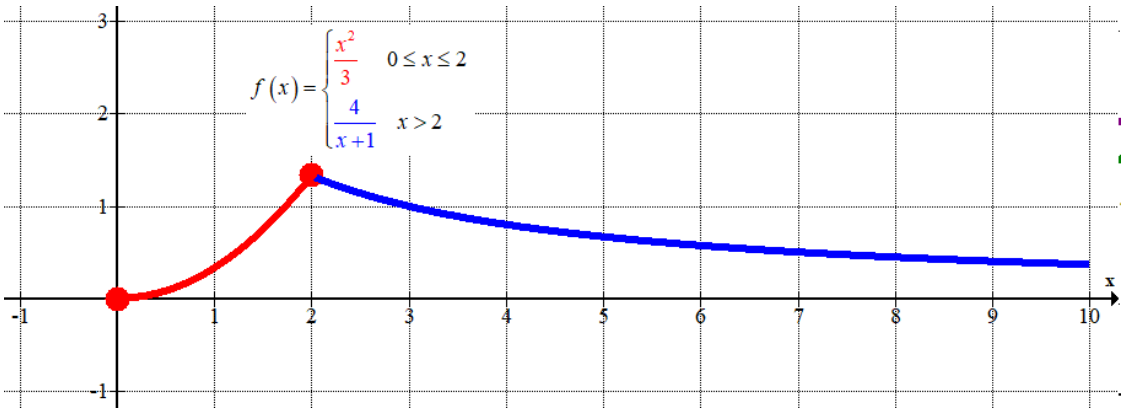
- En el intervalo $[0, 2]$ la derivada es $f'(x)=\dfrac{2x}{3}$ que es positiva para cualquier valor del intervalo. La función es creciente en el intervalo $[0, 2]$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ la derivada es $f'(x)=\dfrac{-4}{(x+1)^2}$ que siempre es negativa. La función es decreciente en el intervalo $(2, +\infty)$.

Como la función es continua y creciente antes de $x = 2$ y decreciente después de $x = 2$ en $x = 2$ existe un máximo de la función. Como $f(2)=\dfrac{2^2}{3}=\dfrac{4}{3}$ el máximo tiene coordenadas $\left(2,\dfrac{4}{3}\right)$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

x	$f(x)=\dfrac{x^2}{3}\ (0\le x\le 2)$
0	0
1	1/3
2	4/3
3	3

x	$f(x)=\dfrac{4}{x+1}\ (x>2)$
2.5	8/7
3	1
4	0.8
9	0.4



EJERCICIO 5

Durante la pasada temporada, una tenista ganó el 90 % de los partidos que jugó sobre tierra y la mitad cuando lo hizo sobre otro tipo de superficie. De los 40 partidos que jugó la temporada pasada, 25 lo hizo sobre tierra. Elegido al azar un partido de la temporada pasada de esta tenista, halle la probabilidad de que:

a) **(1.25 puntos)** Ganase el partido.

b) **(0.5 puntos)** No ganase sabiendo que jugó sobre tierra.

c) **(0.75 puntos)** Jugase sobre tierra sabiendo que ganó.

Si de los 40 partidos que jugó la temporada pasada, 25 lo hizo sobre tierra, entonces 40 – 25 = 15 los jugó sobre otro tipo de superficie.

Ganó el 90 % de los partidos que jugó sobre tierra, es decir, $\frac{90\cdot 25}{100}=22.5$ partidos ganados de los 25 que disputa sobre tierra.

Ganó la mitad de los que disputó en otra superficie, es decir ganó $\frac{15}{2}=7.5$ partidos de los 15 disputados sobre otra superficie.

Ponemos toda esta información en una tabla y completamos el resto.

	Ganados	Perdidos	TOTALES
Sobre tierra	**22.5**	**2.5**	**25**
Sobre otra superficie	**7.5**	**7.5**	**15**
TOTALES	**30**	**10**	**40**

a) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P\left(\text{Ganase el partido}\right)=\frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}}=\frac{\text{Nº partidos ganados}}{\text{Nºpartidos jugados}}=\frac{30}{40}=\boxed{\frac{3}{4}=0.75}$$

b) Aplicamos la regla de Laplace.

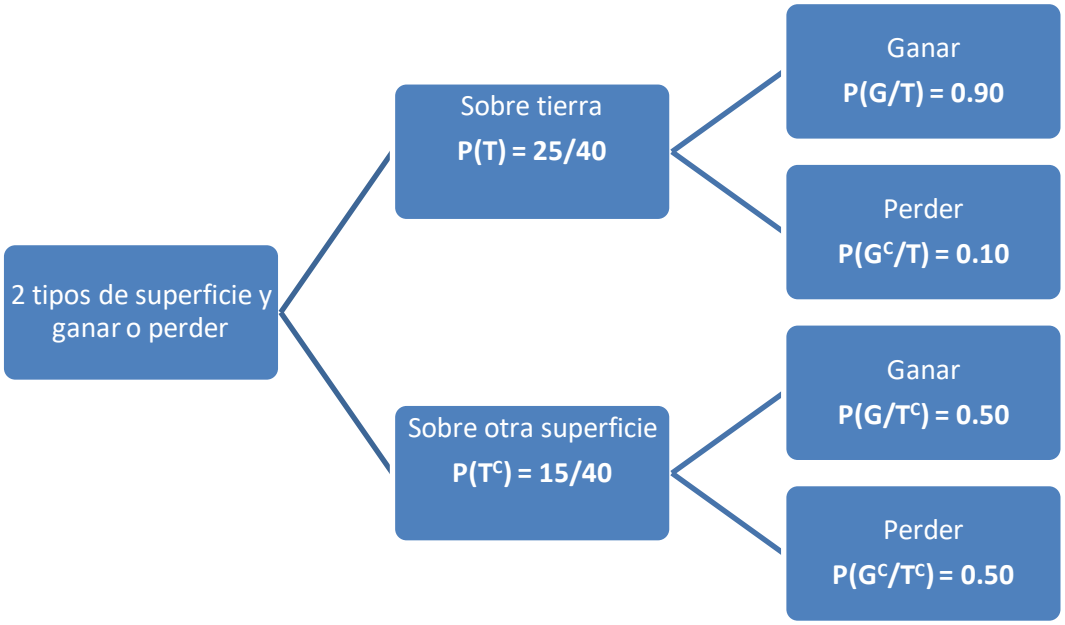
$$P\left(\text{No ganase el partido/Sobre tierra}\right)=\frac{\text{Nº partidos perdidos sobre tierra}}{\text{Nº partidos sobre tierra}}=\frac{2.5}{25}=\boxed{\frac{1}{10}=0.1}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(\text{Jugase sobre tierra / Ganó}\right)=\frac{\text{Nº partidos ganados sobre tierra}}{\text{Nº partidos ganados}}=\frac{22.5}{30}=\boxed{\frac{3}{4}=0.75}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G)=P(T)P(G/T)+P(T^C)P(G/T^C)=\frac{25}{40}\cdot 0.9+\frac{15}{40}\cdot 0.5=\boxed{\frac{3}{4}=0.75}$$

b) Nos piden calcular $P(G^C/T)$. Mirando en el diagrama de árbol.

$$P(G^C/T)=\boxed{0.10}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T/G)=\frac{P(T\cap G)}{P(G)}=\frac{P(T)P(G/T)}{P(G)}=\frac{\frac{25}{40}\cdot 0.9}{0.75}=\boxed{\frac{3}{4}=0.75}$$

EJERCICIO 6

El 32 % de las microempresas tiene página web y el 64.6 % ni tiene página web ni realiza ventas por comercio electrónico. De las microempresas que tienen página web, el 30 % realiza ventas por comercio electrónico. Se selecciona al azar una microempresa.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que tenga página web o realice ventas por comercio electrónico.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que realice ventas por comercio electrónico.

c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que no tenga página web y realice ventas por comercio electrónico.

d) **(0.5 puntos)** Razone si son independientes los sucesos "Tener página web" y "Realizar ventas por comercio electrónico". ¿Son incompatibles?

Realizamos una tabla de contingencia con los datos proporcionados en el ejercicio.

	Con página web	Sin página web	
Ventas por comercio electrónico	30% de 32 = **9.6**		
Sin ventas por comercio electrónico		**64.6**	
	32		**100**

Completamos la tabla.

	Con página web (W)	Sin página web ($\overline{W}$)	
Ventas por comercio electrónico (V)	**9.6**	**3.4**	**13**
Sin ventas por comercio electrónico ($\overline{V}$)	**22.4**	**64.6**	**87**
	32	**68**	**100**

a) Es la suma de los que hacen ambas cosas o solo una de ellas.

$$P(V \cup W) = 9.6 + 3.4 + 22.4 = 35.4\% = \boxed{0.354}$$

OTRA FORMA

$$P(V \cup W) = P(V) + P(W) - P(V \cap W) = 13 + 32 - 9.6 = 35.4\% = \boxed{0.354}$$

b) Nos piden calcular $P(V)$. Mirando en la tabla tenemos que $P(V) = 13\% = \boxed{0.13}$

c) Nos piden calcular $P(V \cap \overline{W})$. Miramos en la tabla y tenemos que

$P(V \cap \overline{W}) = 3.4\% = \boxed{0.034}$.

d) Para que sean independientes W y V debe cumplirse la igualdad $P(W \cap V) = P(W)P(V)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(W \cap V) = 0.096 \\ P(W)P(V) = 0.32 \cdot 0.13 = 0.0416 \end{array}\right\} \Rightarrow P(W \cap V) = 0.096 \neq 0.0416 = P(W)P(V)$$

Los sucesos W y V no son independientes.

Para que el suceso V y W sean incompatibles la probabilidad de que ocurran los dos de forma simultánea debe ser nula, es decir, debe ser $P(V \cap W) = 0$.

Como dicha probabilidad es 9.6% = 0.096 este valor no es nulo y los sucesos no son incompatibles.

EJERCICIO 7

El peso de la gamba roja de Garrucha, en gramos, sigue una distribución Normal de media poblacional desconocida y desviación típica *5 gramos*.

a) **(1.25 puntos)** Se elige una muestra aleatoria de 100 gambas obteniéndose una media de *53 gramos*. Calcule un intervalo de confianza al 97.5 % para estimar el peso medio de la gamba roja.

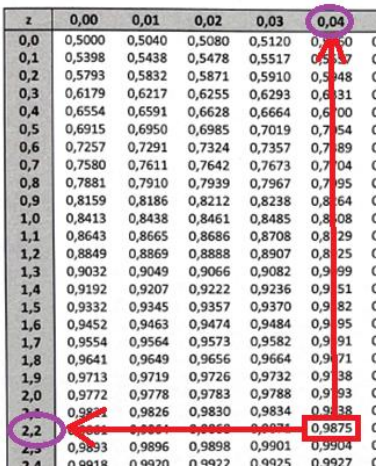
b) **(1.25 puntos)** Sabiendo que la media poblacional es *53 gramos* y escogiendo una muestra aleatoria de 64 gambas, calcule la probabilidad de que el peso medio de la muestra sea superior a *53.25 gramos*.

a) X = El peso de la gamba roja de Garrucha, en gramos. X = N(μ,5)

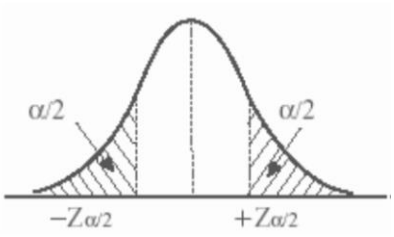
El tamaño de la muestra es $n = 100$. La media muestral es $\bar{x} = 53 gramos$

Con un nivel de confianza del 97.5% hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \propto = 0{,}975 \rightarrow \propto = 0{,}025 \rightarrow \propto/2 = 0'0125 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}9875 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.24}$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	
2,2				0,9875	
	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904



Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.24 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}} = 1.12$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(53 - 1.12,\ 53 + 1.12\right) = \left(51.88,\ 54.12\right)$$

b) X = El peso de la gamba roja de Garrucha, en gramos. X = N(53,5)

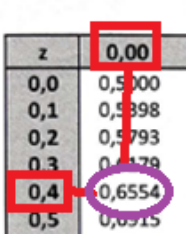
Tenemos que la media muestral sigue una distribución normal que tiene la misma media, pero su desviación típica es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\overline{X_{64}} = N\left(53, \frac{5}{\sqrt{64}}\right) \Rightarrow \overline{X_{64}} = N\left(53, 0.625\right).$$

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{64}} > 53.25\right)$.

$$P\left(\overline{X_{64}} > 53.25\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{53.25 - 53}{0.625}\right) = P\left(Z > 0.4\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \le 0.4\right) = \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = 1 - 0.6554 = \boxed{0.3446}$$



z	0,00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	
0,4	0,6554
0,5	

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de clientes de una compañía de seguros que han requerido el servicio de asistencia en carretera. Para ello, se ha recogido una muestra aleatoria de 300 asegurados resultando que 90 han requerido este servicio.

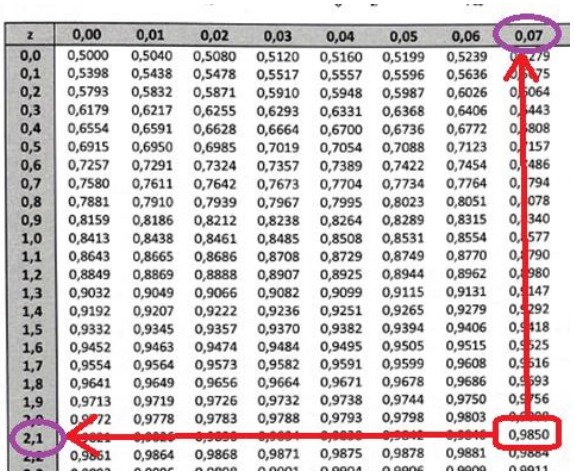
a) **(1.25 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza al 97 % para estimar la proporción de asegurados que han solicitado este servicio.

b) **(1.25 puntos)** Con la proporción muestral facilitada y con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el número mínimo de asegurados que se deberán seleccionar aleatoriamente para que la proporción muestral y la poblacional no difieran en más de un 3 %?

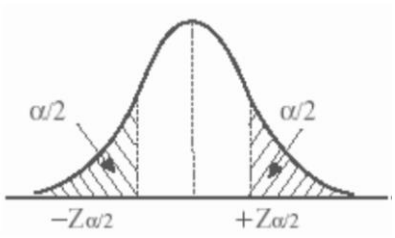
Tamaño de la muestra es $n = 300$. $pr = \frac{90}{300} = 0.3$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.3 = 0.7$

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	
2,1								0,9850
	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{300}} \simeq 0.0574$$

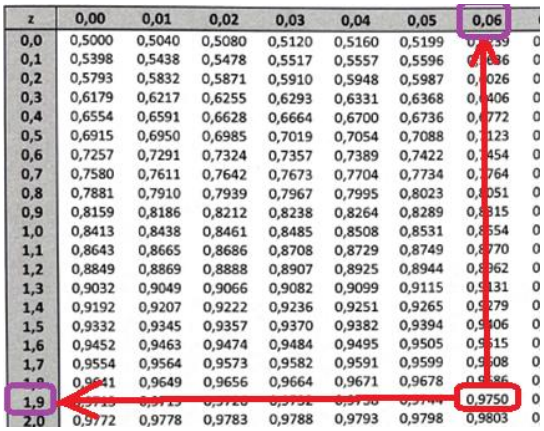
El error máximo cometido es de 0.0574.

El intervalo de confianza para la proporción es:

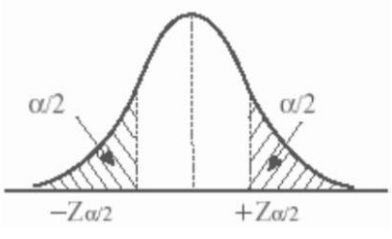
$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.3 - 0.0574,\quad 0.3 + 0.0574) = (0.2426, 0.3574)$$

b) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	
1,9							0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.03 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.03}{1.96} = \sqrt{\frac{0.21}{n}} \Rightarrow \left(\frac{0.03}{1.96}\right)^2 = \frac{0.21}{n} \Rightarrow n = \frac{0.21}{\left(\frac{0.03}{1.96}\right)^2} \simeq 896.373$$

El tamaño mínimo es un número entero superior al obtenido.
El tamaño mínimo es de 897 asegurados

PevAU 2023 Ordinaria (reserva) Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2022-2023	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
- **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
- **b)** Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
- **c)** En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- **d)** Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- **e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

a) **(1.25 puntos)** Un agricultor vende la producción de tres tipos de uva, Tempranillo, Garnacha y Macabeo, de dos de sus fincas. La matriz $Q = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 35 \\ 0 & 60 & 55 \end{pmatrix}$ recoge la producción, en miles de kilogramos, de estos tipos de uva en cada finca. El precio de venta por kilogramo, en céntimos de euro, según el tipo de uva y la finca, viene dado por la matriz $P = \begin{pmatrix} 40 & 38 & 42 \\ 34 & 37 & 55 \end{pmatrix}$. Calcule el producto $Q \cdot P^t$ y explique el significado económico de los elementos de la diagonal principal del resultado. Indique también la cantidad total de dinero que ha obtenido el agricultor por la venta de la cosecha de las dos fincas.

b) Dada la siguiente ecuación matricial $M \cdot X + N = V$:

b1) **(0.5 puntos)** Suponiendo que *M* sea invertible, despeje la matriz *X* en la ecuación anterior.

b2) **(0.75 puntos)** Para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, calcule la matriz *X*.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa de material informático dispone de dos cadenas de fabricación, *A* y *B*, en las que quiere aumentar su producción realizando horas extraordinarias.

En una hora extraordinaria de trabajo, la cadena *A* prepara 15 portátiles y 6 tablets, y la cadena *B* prepara 10 portátiles y 10 tablets. Los costes de producción por hora extraordinaria de *A* y *B* son de 300 € y 600 € respectivamente por hora extraordinaria. La cadena *B* puede realizar, como máximo, el triple de horas extraordinarias que la cadena *A*. Si para la próxima semana se debe producir adicionalmente un máximo de 360 portátiles y al menos 216 tablets, formule y resuelva el problema que permita obtener la planificación de la empresa que minimice los costes de producción. ¿A cuánto ascienden dichos costes?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las siguientes funciones en el punto de abscisa $x = 0$:

$$f(x)=\frac{3x^2+5x-2}{-3x+7} \qquad g(x)=\ln\left(\frac{1}{3x+1}\right)$$

b) **(1 punto)** Calcule las integrales definidas siguientes:

$$\int_{-2}^{-1}\frac{5}{3x^4}dx \qquad \int_{-3}^{0}\frac{e^{\frac{x}{3}}}{5}dx\,.$$

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}x^3+2x^2-3 & x\le 1\\ 1+\dfrac{1}{x-2} & x>1\end{cases}$$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad de *f*. Si la función no es continua en algún punto, indique el tipo de discontinuidad que presenta.

b) **(0.75 puntos)** Estudie la derivabilidad de *f*.

c) **(0.75 puntos)** Determine las asíntotas de *f*.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una empresa de transporte dispone de tres tipos de camiones, *A*, *B* y *C*. El 30% de los transportes son realizados por camiones de tipo *A*; el 20% por camiones de tipo *B* y el resto por camiones de tipo *C*. Se sabe que los transportes tienen una probabilidad de 0.02 de sufrir algún tipo de incidencia si son realizados en camiones de tipo *A*; de 0.01 si son realizados en camiones de tipo *B* y de 0.05 si son realizados en camiones de tipo *C*. Se elige un transporte de esta empresa al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que no haya sufrido ningún tipo de incidencia.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que lo haya realizado un camión de tipo *C* si se sabe que sufrió algún tipo de incidencia.

c) **(0.5 puntos)** Si además se conoce que el 40% de las incidencias sufridas por los camiones de tipo *A* fueron debidas a la lluvia, calcule la probabilidad de que el transporte haya sido realizado por un camión de tipo *A*, haya sufrido una incidencia y también esta sea debida a la lluvia.

EJERCICIO 6

Una tienda vende caramelos con sabor a frutas (naranja o limón) y a menta. El 60% son azucarados y de estos el 25% son de limón. De los no azucarados, el 40% son de naranja, el 30% son de limón y el resto de menta. Además, el 40% de todos los caramelos son de naranja. Se escoge un caramelo al azar de esa tienda.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea de naranja sabiendo que es azucarado.

b) **(1 punto)** Razone si es más probable que sea de sabor a frutas o a menta.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.25 puntos)** Utilizando los números naturales del 1 al 6, ¿cuántas muestras de tamaño 2 pueden formarse aplicando un muestreo aleatorio simple? Si se elige una de estas muestras al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los números obtenidos sea como máximo 2?

b) **(1.25 puntos)** Se ha diseñado una encuesta para estimar qué proporción de adolescentes de una zona están subscritos a una determinada red social. ¿Qué tamaño debemos tomar para estimar dicha proporción por un intervalo de confianza al 95% con un error máximo de 0.15?

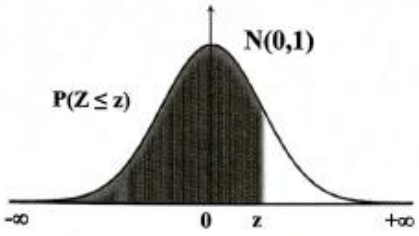
EJERCICIO 8

El gasto mensual por vivienda en electricidad de los inquilinos de la zona centro de una determinada ciudad sigue una ley Normal con desviación típica 18.25 €. Se ha tomado una muestra aleatoria de 361 de estas viviendas obteniendo como resultado un gasto medio de 97 €.

a) **(1,25 puntos)** Obtenga el intervalo de confianza del 93% para el gasto medio mensual en electricidad por vivienda.

b) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error cometido al estimar la media, con un nivel de confianza del 91%, sea un tercio del error cometido en el intervalo (95.5, 98.5)?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

a) **(1.25 puntos)** Un agricultor vende la producción de tres tipos de uva, Tempranillo, Garnacha y Macabeo, de dos de sus fincas. La matriz $Q=\begin{pmatrix}50 & 40 & 35\\ 0 & 60 & 55\end{pmatrix}$ recoge la producción, en miles de kilogramos, de estos tipos de uva en cada finca. El precio de venta por kilogramo, en céntimos de euro, según el tipo de uva y la finca, viene dado por la matriz $P=\begin{pmatrix}40 & 38 & 42\\ 34 & 37 & 55\end{pmatrix}$. Calcule el producto $Q\cdot P^t$ y explique el significado económico de los elementos de la diagonal principal del resultado. Indique también la cantidad total de dinero que ha obtenido el agricultor por la venta de la cosecha de las dos fincas.

b) Dada la siguiente ecuación matricial $M\cdot X+N=V$:

b1) **(0.5 puntos)** Suponiendo que *M* sea invertible, despeje la matriz *X* en la ecuación anterior.

b2) **(0.75 puntos)** Para $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ y $V=\begin{pmatrix}8 & 7\\ 6 & 5\end{pmatrix}$, calcule la matriz *X*.

a) El significado de las matrices es el siguiente:

$$Q\cdot P^t=\begin{matrix}\\ Finca\,1\rightarrow\\ Finca\,2\rightarrow\end{matrix}\begin{matrix}T & G & M\end{matrix}\begin{pmatrix}50 & 40 & 35\\ 0 & 60 & 55\end{pmatrix}\begin{matrix}F1 & F2\\ \downarrow & \downarrow\\ \end{matrix}\begin{pmatrix}40 & 34\\ 38 & 37\\ 42 & 40\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow Tempranillo\\ \leftarrow Garnacha\\ \leftarrow Macabeo\end{matrix}$$

$$2\times\boxed{3\quad\cdot\quad 3}\times 2\longrightarrow 2\times 2$$

$$Q\cdot P^t=\begin{pmatrix}50\cdot 40+40\cdot 38+35\cdot 42 & 50\cdot 34+40\cdot 37+35\cdot 40\\ 0\cdot 40+60\cdot 38+55\cdot 42 & 0\cdot 34+60\cdot 37+55\cdot 40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4990 & 4580\\ 4590 & 4420\end{pmatrix}$$

En la matriz Q están dispuestos los tipos de uva por columnas y la finca en cada fila. En la matriz Q aparece el precio dispuesto en columnas por tipo de uva y en filas por la finca de procedencia.

$$\begin{matrix}Tempranillo & Gar. & Macabeo\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{matrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}50 & 40 & 35\\ 0 & 60 & 55\end{pmatrix}\begin{matrix}\rightarrow Finca\,1\\ \rightarrow Finca\,2\end{matrix}$$

Como aparece en los cálculos realizados estamos multiplicando los miles de kilos de uva por el precio en céntimos de euro por kilo de uva dependiendo del tipo de uva y la finca y luego se suman.

En la matriz $Q\cdot P^t$ en la fila 1 columna 1 aparece lo conseguido en la finca 1 por todos los tipos de uva. En la fila 2 columna 2 aparece lo conseguido en la finca 2 por todos los tipos de uva.

En la finca 1 se obtienen 4 990 000 céntimos de euro y en la finca 2 se obtienen 4 420 000 céntimos de euro.

En total por las dos fincas el agricultor obtiene 4 990 000 + 4 420 000 = 9 410 000 céntimos de euro, es decir, 94 100 euros.

b)

b.1) Despejamos X.

$$M \cdot X + N = V \Rightarrow M \cdot X = V - N \Rightarrow \boxed{X = M^{-1}(V - N)}$$

b.2) Hallamos la matriz inversa de M.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$M^{-1} = \frac{Adj(M^T)}{|M|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X = M^{-1}(V - N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3+3 & -3+3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa de material informático dispone de dos cadenas de fabricación, *A* y *B*, en las que quiere aumentar su producción realizando horas extraordinarias.

En una hora extraordinaria de trabajo, la cadena *A* prepara 15 portátiles y 6 tablets, y la cadena *B* prepara 10 portátiles y 10 tablets. Los costes de producción por hora extraordinaria de *A* y *B* son de 300 € y 600 € respectivamente por hora extraordinaria. La cadena *B* puede realizar, como máximo, el triple de horas extraordinarias que la cadena *A*. Si para la próxima semana se debe producir adicionalmente un máximo de 360 portátiles y al menos 216 tablets, formule y resuelva el problema que permita obtener la planificación de la empresa que minimice los costes de producción. ¿A cuánto ascienden dichos costes?

Llamamos "x" al número de horas extraordinarias de la cadena de fabricación A e "y" al número de horas extraordinarias de la cadena de fabricación B.
Realizamos una tabla con los datos.

	Nº portátiles	Nº tablets	Coste
Nº horas extras de cadena A (x)	15x	6x	300x
Nº horas extras de cadena B (y)	10y	10y	600y
TOTAL	$15x+10y$	$6x+10y$	$300x+600y$

"Se debe producir adicionalmente un máximo de 360 portátiles y al menos 216 tablets" → $15x+10y \le 360;\ 6x+10y \ge 216$.

"La cadena *B* puede realizar, como máximo, el triple de horas extraordinarias que la cadena *A*" → $y \le 3x$.

"El número de horas debe ser positivo o nulo" → $x \ge 0;\ y \ge 0$.

Reunimos todas estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 15x+10y \le 360 \\ 6x+10y \ge 216 \\ y \le 3x \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y \le 72 \\ 3x+5y \ge 108 \\ y \le 3x \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x+2y=72$

x	$y=\frac{72-3x}{2}$
8	24
16	12

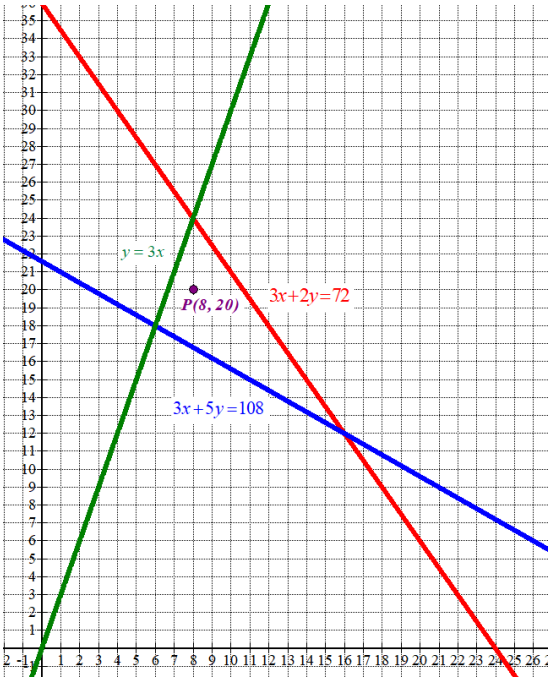
$3x+5y=108$

x	$y=\frac{108-3x}{5}$
6	18
16	12

$y=3x$

x	$y=3x$
6	18
8	24

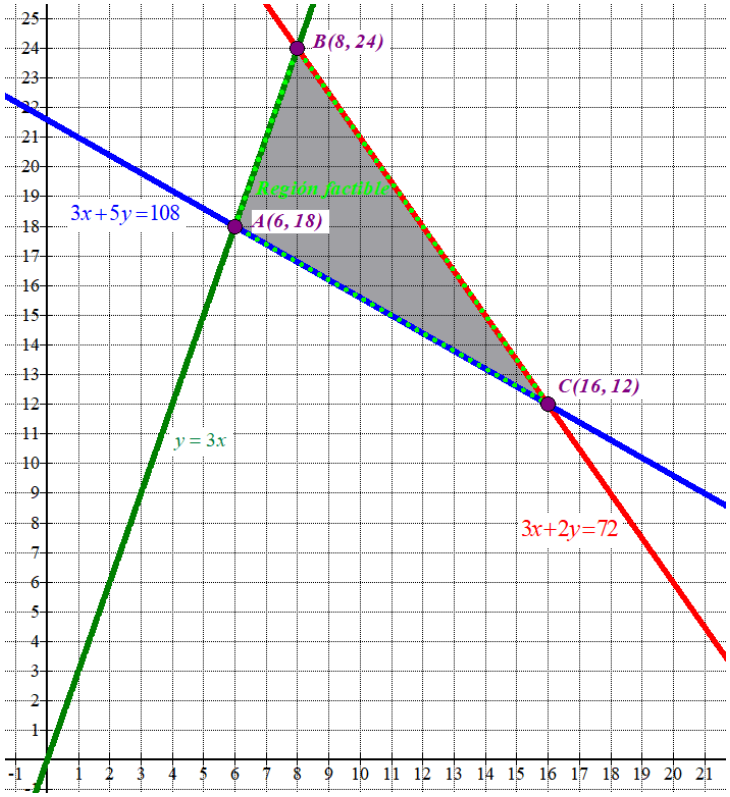
$x=0;\ y=0$ Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 3x+2y\le 72 \\ 3x+5y\ge 108 \\ y\le 3x \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de la recta azul y por debajo de las rectas verde y roja.
Comprobamos que el punto P(8, 20) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot 8+2\cdot 20\le 72 \\ 3\cdot 8+5\cdot 20\ge 108 \\ 20\le 3\cdot 8 \\ 8\ge 0;\ 20\ge 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas y la región factible es la coloreada de gris en el siguiente dibujo.



Los vértices son los puntos: A(6, 18), B(8, 24) y C(16, 12).
La función objetivo que deseamos minimizar es el coste de las horas extraordinarias de esa semana → $C(x,y)=300x+600y$.

Valoramos la función objetivo $C(x,y)=300x+600y$ en cada vértice.

A(6, 18) → $C(6,18)=1800+10800=12600$

B(8, 24) → $C(8,24)=2400+14400=16800$

C(16, 12) → $C(16,12)=4800+7200=12000$ € ¡Mínimo!

El mínimo coste es de 12 000 euros y se obtiene con 16 horas de la cadena de fabricación A y 12 de la cadena B.

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las siguientes funciones en el punto de abscisa *x = 0*:

$$f(x)=\frac{3x^2+5x-2}{-3x+7} \qquad g(x)=\ln\left(\frac{1}{3x+1}\right)$$

b) **(1 punto)** Calcule las integrales definidas siguientes:

$$\int_{-2}^{-1}\frac{5}{3x^4}dx \qquad \int_{-3}^{0}\frac{e^{\frac{x}{3}}}{5}dx\,.$$

a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en *x = 0* es $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

$$f(x)=\frac{3x^2+5x-2}{-3x+7}\Rightarrow f'(x)=\frac{(6x+5)(-3x+7)-(3x^2+5x-2)(-3)}{(-3x+7)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-18x^2+42x-\cancel{15x}+35+9x^2+\cancel{15x}-6}{(-3x+7)^2}=\frac{-9x^2+42x+29}{(-3x+7)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{3\cdot0^2+5\cdot0-2}{-3\cdot0+7}=\dfrac{-2}{7} \\ f'(0)=\dfrac{-9\cdot0^2+42\cdot0+29}{(-3\cdot0+7)^2}=\dfrac{29}{49} \\ y-f(0)=f'(0)(x-0) \end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{-2}{7}=\frac{29}{49}x\Rightarrow \boxed{y=\frac{29}{49}x-\frac{2}{7}}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *g(x)* en *x = 0* es $y-g(0)=g'(0)(x-0)$.

Antes de derivar simplificamos la expresión de la función utilizando las propiedades de los logaritmos.

$$g(x)=\ln\left(\frac{1}{3x+1}\right)\Rightarrow g(x)=\ln(1)-\ln(3x+1)=-\ln(3x+1)$$

Seguimos con la determinación de la ecuación de la recta tangente.

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=\ln\left(\dfrac{1}{3\cdot0+1}\right)=\ln1=0 \\ g'(x)=-\dfrac{3}{3x+1}\rightarrow g'(0)=-\dfrac{3}{3\cdot0+1}=-3 \\ y-g(0)=g'(0)(x-0) \end{array}\right\}\Rightarrow y-0=-3x\Rightarrow \boxed{y=-3x}$$

b) Calculamos el valor de la primera integral definida.

$$\int_{-2}^{-1}\frac{5}{3x^4}dx=\frac{5}{3}\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x^4}dx=\frac{5}{3}\int_{-2}^{-1}x^{-4}dx=\frac{5}{3}\left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_{-2}^{-1}=\frac{5}{3}\left[\frac{1}{-3x^3}\right]_{-2}^{-1}=$$

$$=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{-3(-1)^3}-\frac{1}{-3(-2)^3}\right)=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{24}\right)=\boxed{\frac{35}{72}}$$

Calculamos el valor de la segunda integral definida.

$$\int_{-3}^{0}\frac{e^{\frac{x}{3}}}{5}dx=\frac{1}{5}\int_{-3}^{0}e^{\frac{x}{3}}dx\,\frac{1}{5}\left[3e^{\frac{x}{3}}\right]_{-3}^{0}=\frac{1}{5}\left(3e^{\frac{0}{3}}-3e^{\frac{-3}{3}}\right)=\frac{1}{5}\left(3-3e^{-1}\right)=\frac{1}{5}\left(3-\frac{3}{e}\right)=\boxed{\frac{3}{5}-\frac{3}{5e}}$$

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} x^3+2x^2-3 & x\le 1 \\ 1+\dfrac{1}{x-2} & x>1 \end{cases}$$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad de *f*. Si la función no es continua en algún punto, indique el tipo de discontinuidad que presenta.

b) **(0.75 puntos)** Estudie la derivabilidad de *f*.

c) **(0.75 puntos)** Determine las asíntotas de *f*.

a) En el intervalo $(-\infty,1)$ la función es $f(x)=x^3+2x^2-3$ que es una función polinómica y por tanto continua.

En el intervalo (1, +∞) la función es $f(x)=1+\dfrac{1}{x-2}$ que es una función racional cuyo denominador se anula en *x = 2*, incluido en el intervalo de definición.

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{1}{x-2}\right)=1+\frac{1}{2-2}=1+\frac{1}{0}=\infty$$

La función es discontinua en *x = 2*. La función es continua en $(1,2)\cup(2,+\infty)$.

Estudiamos la continuidad en *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^3+2\cdot 1^2-3=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^3+2x^2-3=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1+\dfrac{1}{x-2}=1+\dfrac{1}{1-2}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$$

La función es continua en *x = 1*.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$. En *x = 2* es discontinua inevitable de salto infinito.

b) En el intervalo $(-\infty,1)$ la función es $f(x)=x^3+2x^2-3$ que es una función derivable y su derivada es $f'(x)=3x^2+4x$.

En el intervalo $(1,2)\cup(2,+\infty)$ la función es $f(x)=1+\dfrac{1}{x-2}$ que es una función derivable y su derivada es $f'(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}$.

La función no es continua en *x = 2* y por tanto no es derivable.

Comprobamos si es derivable en *x = 1* viendo si coinciden las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 3x^2+4x=7 \\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{(-1)^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)=7\neq 1=f'(1^+)$$

La función no es derivable en *x = 1*.

Resumiendo: La función es derivable en $\mathbb{R}-\{1,2\}$.

c) **Asíntotas verticales**. $x=a$

Como su dominio es $\mathbb{R}-\{2\}$ la función presenta una asíntota vertical: $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{1}{x-2}\right)=1+\frac{1}{2-2}=1+\frac{1}{0}=\infty$$

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3+2x^2-3=-\infty$$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x-2}=1+\frac{1}{+\infty}=1+0=1$$

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la función cuando $x\to+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Cuando $x\to-\infty$

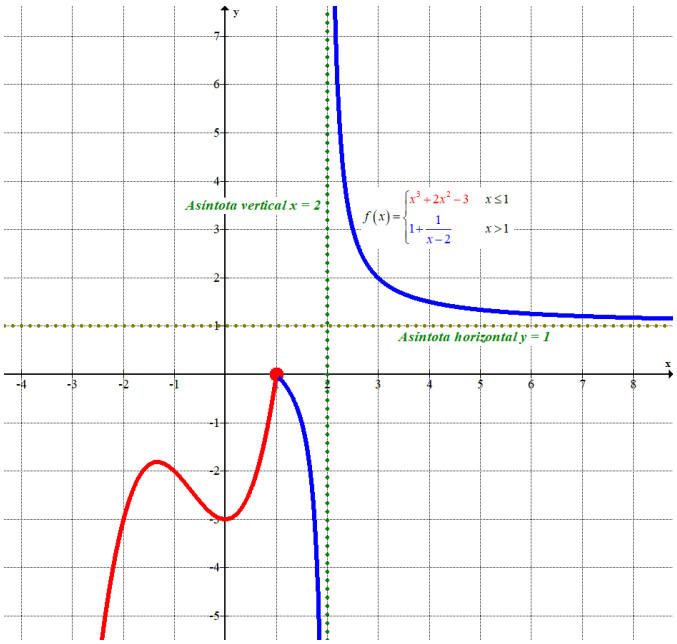
$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2-3}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}+\frac{2x^2}{x}-\frac{3}{x}=\lim_{x\to-\infty} x^2+2x-\frac{3}{x}=+\infty$$

La función no tiene asíntota oblicua.

Cuando $x\to+\infty$ no tiene asíntota oblicua pues existe asíntota horizontal.

Resumiendo: La función presenta una asíntota vertical: $x = 2$ y una asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$: $y = 1$.

No lo pide pero se ofrece la gráfica para comprobar lo obtenido.



EJERCICIO 5

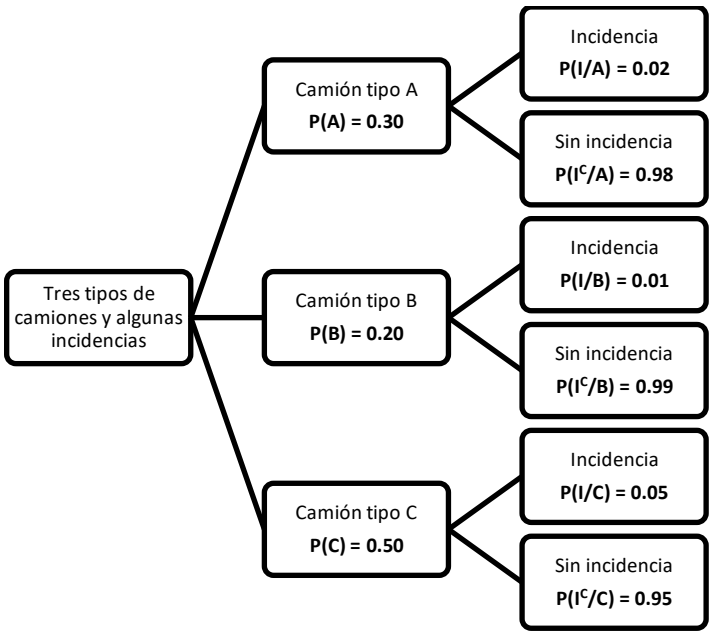
Una empresa de transporte dispone de tres tipos de camiones, *A*, *B* y *C*. El 30% de los transportes son realizados por camiones de tipo *A*; el 20% por camiones de tipo *B* y el resto por camiones de tipo *C*. Se sabe que los transportes tienen una probabilidad de 0.02 de sufrir algún tipo de incidencia si son realizados en camiones de tipo *A*; de 0.01 si son realizados en camiones de tipo *B* y de 0.05 si son realizados en camiones de tipo *C*. Se elige un transporte de esta empresa al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que no haya sufrido ningún tipo de incidencia.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que lo haya realizado un camión de tipo *C* si se sabe que sufrió algún tipo de incidencia.

c) **(0.5 puntos)** Si además se conoce que el 40% de las incidencias sufridas por los camiones de tipo *A* fueron debidas a la lluvia, calcule la probabilidad de que el transporte haya sido realizado por un camión de tipo *A*, haya sufrido una incidencia y también esta sea debida a la lluvia.

Realizamos un diagrama de árbol para organizar toda la información.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(I^C\right)=P(A)P\left(I^C/A\right)+P(B)P\left(I^C/B\right)+P(C)P\left(I^C/C\right)=$$

$$=0.3\cdot0.98+0.2\cdot0.99+0.5\cdot0.95=\boxed{0.967}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/I)=\frac{P(C\cap I)}{P(I)}=\frac{P(C)P(I/C)}{1-P\left(I^C\right)}=\frac{0.5\cdot0.05}{1-0.967}=\boxed{\frac{25}{33}\simeq0.7576}$$

c) Llamamos D al suceso "La incidencia es debida a la lluvia". Nos piden calcular la probabilidad $P(A\cap I\cap D)$.

$$P(A\cap I\cap D)=P(A)P(I/A)P\left(D/(A\cap I)\right)=0.3\cdot0.02\cdot0.40=\boxed{0.0024}$$

EJERCICIO 6

Una tienda vende caramelos con sabor a frutas (naranja o limón) y a menta. El 60% son azucarados y de estos el 25% son de limón. De los no azucarados, el 40% son de naranja, el 30% son de limón y el resto de menta. Además, el 40% de todos los caramelos son de naranja. Se escoge un caramelo al azar de esa tienda.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea de naranja sabiendo que es azucarado.

b) **(1 punto)** Razone si es más probable que sea de sabor a frutas o a menta.

Supongamos que en la tienda hay 100 caramelos en total. Vamos a pasar los porcentajes a cifras absolutas y así ordenar toda la información. Después el valor de las probabilidades las obtendremos aplicando la regla de Laplace.

De los 100 caramelos 60 son azucarados, de estos 60 tenemos que el 25% son de limón → $60\cdot\frac{25}{100}=15$ son de limón, es decir, 15 caramelos son de limón azucarados.

De los no azucarados (100 – 60 = 40), el 40% son de naranja ($40\cdot\frac{40}{100}=16$ caramelos de naranja no azucarados), el 30% son de limón ($40\cdot\frac{30}{100}=12$ caramelos de limón no azucarados), y el resto de menta (40 – 16 – 12 = 12 son de menta no azucarados).

El 40% de todos los caramelos son de naranja (40 son de naranja entre azucarados y no azucarados).

Ponemos todos estos datos en una tabla.

	Azucarados	No azucarados	TOTAL
Limón	**15**	**12**	
Naranja		**16**	**40**
Menta		**12**	
TOTAL	**60**	**40**	**100**

Completamos la tabla.

	Azucarados (A)	No azucarados ($\overline{A}$)	TOTAL
Limón (L)	**15**	**12**	**27**
Naranja (N)	**24**	**16**	**40**
Menta (M)	**21**	**12**	**33**
TOTAL	**60**	**40**	**100**

a) Hay 60 caramelos azucarados y de ellos 24 son de naranja → $P(N/A)=\frac{24}{60}=\boxed{\frac{2}{5}=0.4}$.

b) Si miramos los datos de la tabla vemos que de los 100 caramelos hay 27 + 40 = 67 de frutas y 33 de menta. Es más probable que sea de frutas.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Llamamos L al suceso "El caramelo es de limón", N al suceso "El caramelo es de naranja", M al suceso "El caramelo es de menta" Llamamos A al suceso "El caramelo es azucarado" y $\overline{A}$ al suceso "El caramelo no es azucarado".
Las probabilidades proporcionadas por el ejercicio son:

$$P(A)=0.60;\ P(L/A)=0.25$$

$$P(N/\overline{A})=0.40;\ P(L/\overline{A})=0.30;\ P(M/\overline{A})=1-0.40-0.30=0.30$$

$$P(N)=0.40$$

a) Nos piden calcular $P(N/A)$.

$$P(N/A)=\frac{P(N\cap A)}{P(A)}=\frac{P(N)-P(N\cap\overline{A})}{P(A)}=\frac{P(N)-P(\overline{A})P(N/\overline{A})}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(N)-(1-P(A))P(N/\overline{A})}{P(A)}=\frac{0.4-(1-0.6)0.4}{0.6}=\boxed{\frac{2}{5}=0.4}$$

b) Nos piden calcular $P(L\cup N)$ y $P(M)$. Y decir cuál de estas dos probabilidades es mayor.

Calculamos $P(L)$.

$$P(L)=P(L\cap A)+P(L\cap\overline{A})=P(A)P(L/A)+P(\overline{A})P(L/\overline{A})=$$

$$=0.60\cdot0.25+0.40\cdot0.30=0.27$$

Calculamos $P(L\cup N)$.

$$P(L\cup N)=P(L)+P(N)-P(L\cap N)=P(L)+P(N)-0=0.27+0.40=\boxed{0.67}$$

La probabilidad de que el caramelo sea de frutas es de 0.67. La de que sea de menta será $P(M)=1-P(L\cup N)=1-0.67=0.33$.
La probabilidad de que el caramelo sea de frutas es 0.67 y de que sea de menta es de 0.33. Es más probable que el caramelo sea de frutas.

EJERCICIO 7

a) **(1.25 puntos)** Utilizando los números naturales del 1 al 6, ¿cuántas muestras de tamaño 2 pueden formarse aplicando un muestreo aleatorio simple? Si se elige una de estas muestras al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los números obtenidos sea como máximo 2?

b) **(1.25 puntos)** Se ha diseñado una encuesta para estimar qué proporción de adolescentes de una zona están subscritos a una determinada red social. ¿Qué tamaño debemos tomar para estimar dicha proporción por un intervalo de confianza al 95% con un error máximo de 0.15?

a) Suponiendo que el muestreo es con reemplazamiento. Hay $6 \cdot 6 = 36$ muestras con reemplazamiento de tamaño 2. Algunos de los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

Muestras	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6	3 1	3 2	…	6 5	6 6
Media	**1**	**1.5**	**2**	2.5	3	3.5	**1.5**	**2**	2.5	3	3.5	4	**2**	2.5	…	5.5	6

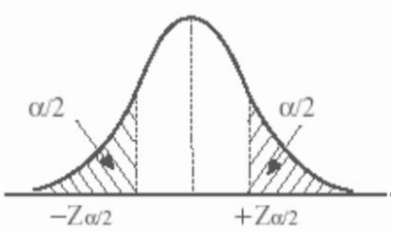
De todas las muestras posibles (36) sólo hay 6 (en rojo) que tienen de media 2 o menos. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que la media de los números obtenidos sea como máximo 2 es $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \simeq 0.1667$.

b) Consideramos $pr = qr = 0.5$.

Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199		0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596		0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987		0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368		0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736		0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088		0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422		0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734		0
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023		0
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289		0
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531		0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749		0
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944		0
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115		0
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265		0
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394		0
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505		0
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599		0
	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678		0
1,9							0,9750	0
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} = 0.15 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.25}{n}} = \frac{0.15}{1.96} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.25}{n} = \left(\frac{0.15}{1.96}\right)^2 \Rightarrow 0.25 = n\left(\frac{0.15}{1.96}\right)^2 \Rightarrow \boxed{n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.15}{1.96}\right)^2} \simeq 42{,}68}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 43 adolescentes.

EJERCICIO 8

El gasto mensual por vivienda en electricidad de los inquilinos de la zona centro de una determinada ciudad sigue una ley Normal con desviación típica 18.25 €. Se ha tomado una muestra aleatoria de 361 de estas viviendas obteniendo como resultado un gasto medio de 97 €.

a) **(1,25 puntos)** Obtenga el intervalo de confianza del 93% para el gasto medio mensual en electricidad por vivienda.

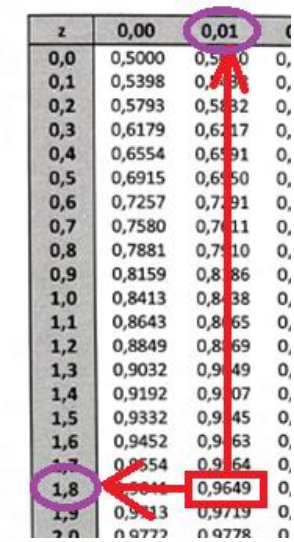
b) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error cometido al estimar la media, con un nivel de confianza del 91%, sea un tercio del error cometido en el intervalo (95.5, 98.5)?

X = El gasto mensual por vivienda en electricidad de los inquilinos de la zona centro de una determinada ciudad. X = N(μ,18.25)

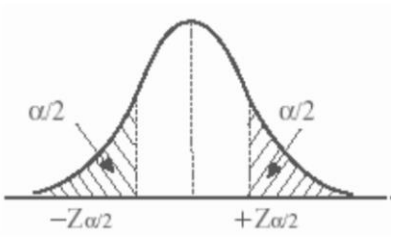
a) El tamaño de la muestra es $n = 361$. La media muestral es $\bar{x} = 97€$

Con un nivel de confianza del 93 %

$1 - \propto = 0{,}93 \rightarrow \propto = 0{,}07 \rightarrow \propto/2 = 0'035 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}965 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.81}$



z	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5
0,1	0,5398	0,5
0,2	0,5793	0,5
0,3	0,6179	0,6
0,4	0,6554	0,6
0,5	0,6915	0,6
0,6	0,7257	0,7
0,7	0,7580	0,7
0,8	0,7881	0,7
0,9	0,8159	0,8
1,0	0,8413	0,8
1,1	0,8643	0,8
1,2	0,8849	0,8
1,3	0,9032	0,9
1,4	0,9192	0,9
1,5	0,9332	0,9
1,6	0,9452	0,9
1,8		0,9649



Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

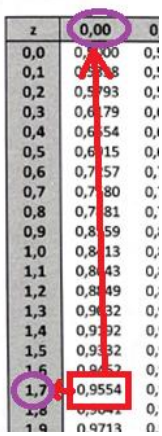
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{18.25}{\sqrt{361}} \simeq 1.7386$$

El intervalo de confianza es

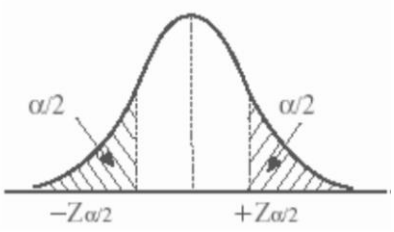
$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(97 - 1.7386,\ 97 + 1.7386\right) = \left(95.2614,\ 98.7386\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 91 %

$1 - \propto = 0{,}91 \rightarrow \propto = 0{,}09 \rightarrow \propto/2 = 0'045 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}955 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.7}$



z	0,00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915
0,6	0,7257
0,7	0,7580
0,8	0,7881
0,9	0,8159
1,0	0,8413
1,1	0,8643
1,2	0,8849
1,3	0,9032
1,4	0,9192
1,5	0,9332
1,7	0,9554



El error cometido en el intervalo de confianza (95.5, 98.5) es la mitad de la amplitud del intervalo → $\frac{98.5-95.5}{2}=1.5$. Un tercio de este error es $\frac{1.5}{3}=0.5$.

Utilizamos la fórmula del error para determinar el tamaño mínimo de la muestra (n) para que el error sea menor de 0.5.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.7\cdot\frac{18.25}{\sqrt{n}}=0.5\Rightarrow 1.7\cdot 18.25=0.5\sqrt{n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{1.7\cdot 18.25}{0.5}\Rightarrow n=\left(\frac{1.7\cdot 18.25}{0.5}\right)^2=3850.2025$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero superior al obtenido. El tamaño mínimo de la muestra es de 3851 inquilinos.

PevAU 2022 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA. CURSO 2021-2022	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones: **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)
c) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
d) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
e) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$

a) **(1.5 puntos)** Determine la matriz X que verifica $A\cdot X+B=A^2\cdot C$.

b) **(1 punto)** Determine las dimensiones de dos matrices P y Q sabiendo que

$$A\cdot P^t+C=C\cdot\left(Q\cdot B\right)$$

EJERCICIO 2

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y-2x\le 7;\quad -x+3y\le 21;\quad x+2y\le 19;\quad x+y\le 14$$

a) **(1.4 puntos)** Represente dicho recinto y determine sus vértices.

b) **(0.6 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F\left(x,y\right)=x+4y$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.

c) **(0.5 puntos)** ¿Podrá tomar la función objetivo F el valor 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1 punto)** Se considera la función $f(x)=x^3+bx^2+cx-1$, donde b y c son números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremo en el punto de abscisa $x=\frac{1}{3}$ y además la gráfica de la función f pase por el punto (–2, –3).

b) **(1.5 puntos)** Dada la función $g\left(x\right)=-x^3-x^2+x+1$, realice el esbozo de su gráfica, estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4

El beneficio, en miles de euros, que se obtiene en una pequeña finca familiar por la venta de aceitunas, en miles de kilogramos, viene dado por la siguiente función:

$$B(x) = -0.02x^2 + 1.3x - 15, \quad x \geq 0$$

a) **(0.75 puntos)** Represente la función beneficio y calcule los puntos de corte con el eje OX.
b) **(0.5 puntos)** ¿Para qué valores de *x* la finca no tiene pérdidas?
c) **(0.5 puntos)** ¿Para qué número de kilogramos el beneficio será máximo? ¿Cuánto vale dicho beneficio?
d) **(0.75 puntos)** ¿Cuántos kilogramos debe vender para obtener un beneficio de 5000 €?

BLOQUE C

EJERCICIO 5

En una determinada región hay tres universidades A, B y C. De los estudiantes que terminaron sus estudios el año pasado, el 60 % procedían de la universidad A, el 30 % de la universidad B y el resto de C. Además, se conoce que la probabilidad de que un estudiante de la universidad A no encuentre trabajo en su región es 0.4 y para un estudiante de B es 0.5.

a) (1.5 puntos) Si la probabilidad de que un estudiante no encuentre trabajo en su región es 0.395, determine la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B.

.

EJERCICIO 6

Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que:

$$P(A \cup B) = \frac{3}{7},\ P(A^C) = \frac{5}{7},\ P(B^C) = \frac{2}{3}$$

a) **(1 punto)** ¿Son A y B independientes? ¿Son A y B incompatibles?
b) **(0.75 puntos)** Calcule $P(A^C \cap B^C)$.
c) **(0.75 puntos)** Calcule $P(B / A^C)$.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Una fábrica de tornillos quiere hacer un estudio sobre la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 1500 tornillos, resultando que 1425 cumplen las especificaciones del fabricante.

a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza para la proporción de tornillos que cumplen con las especificaciones del fabricante con un nivel de confianza del 97%.
b) **(1 punto)** Manteniendo la proporción muestral y el nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuál tendría que ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%?

EJERCICIO 8

El número de días que los titulados en un cierto máster tardan en encontrar su primer trabajo sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica 3 días.

a) **(1 punto)** Se elige una muestra aleatoria de 100 titulados obteniéndose una media muestral de 8.1 días. Calcule un intervalo de confianza al 97% para estimar la media poblacional.
b) **(1 punto)** Con un nivel de confianza del 92%, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para que el error cometido, al estimar el número medio de días que estos titulados tardan en encontrar trabajo, sea inferior a un día.
c) **(1 punto)** Suponiendo $\mu = 7.61 días$ y tomando muestras aleatorias de 36 titulados, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 8 días?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&1\\3&1\\0&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$

a) **(1.5 puntos)** Determine la matriz X que verifica $A\cdot X+B=A^2\cdot C$.

b) **(1 punto)** Determine las dimensiones de dos matrices P y Q sabiendo que

$$A\cdot P^t+C=C\cdot\left(Q\cdot B\right)$$

a) Despejamos la matriz X en la ecuación matricial.

$$A\cdot X+B=A^2\cdot C\Rightarrow A\cdot X=A^2\cdot C-B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot A\cdot A\cdot C-A^{-1}\cdot B\Rightarrow \boxed{X=A\cdot C-A^{-1}\cdot B}$$

Comprobamos que la matriz A tiene inversa y la calculamos.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1&1&2\\-2&0&1\\0&-1&-1\end{vmatrix}=+4-2+1=3\neq 0\rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&0&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&-1\\1&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-1\\2&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-2&0\\1&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\2&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}-2&0\\0&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&-2\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&-1&-5\\2&1&2\end{pmatrix}$$

Sustituimos las matrices y calculamos la matriz X.

$$X=A\cdot C-A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\\-2&3\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&-1&-5\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&1\\0&2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1-1-4&2-1+6\\-2-2&-4+3\\1+2&1-3\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2-3&1-1+2\\4-3&-2-1-10\\-4+3&2+1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&7\\-4&-1\\3&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5/3&-2/3\\-1/3&13/3\\1/3&-7/3\end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4+5/3 & 7-2/3 \\ -4-1/3 & -1+13/3 \\ 3+1/3 & -2-7/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 & 19/3 \\ -13/3 & 10/3 \\ 10/3 & -13/3 \end{pmatrix}$$

b) Sea P una matriz de dimensiones m x n y Q una matriz de dimensiones r x s.
La matriz P^t es de dimensiones n x m.

Miramos el primer miembro de la ecuación matricial.

Para que sea posible el primer producto tenemos que:

$$A \cdot P^t$$

$$3 \times \boxed{3 \cdot n} \times m \longrightarrow 3 \times m$$ debe ser $n = 3$ y se obtiene una matriz de dimensiones $3 \times m$.

Para poder sumar la matriz resultante de dimensiones $3 \times m$ del producto con la matriz C de dimensiones 3×2 deben de coincidir sus dimensiones → $m = 2$.

La matriz P debe tener dimensiones 2 x 3.

Miramos el otro miembro de la ecuación matricial.

Para que sea posible el producto Q · B debe cumplirse:

$$Q \cdot B$$

$$r \times \boxed{s \cdot 3} \times 2 \longrightarrow r \times 2$$ debe ser $s = 3$ y se obtiene una matriz de dimensiones r x 2.

Para poder hacer el producto $C \cdot (Q \cdot B)$ debe cumplirse:

$$C \cdot (Q \cdot B)$$

$$3 \times \boxed{2 \cdot r} \times 2 \longrightarrow 3 \times 2$$ debe ser $r = 2$ y se obtiene una matriz 3 x 2, al igual que en el primer miembro de la ecuación matricial.

La matriz Q debe tener dimensiones 2 x 3.

EJERCICIO 2

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y-2x\le 7;\quad -x+3y\le 21;\quad x+2y\le 19;\quad x+y\le 14$$

a) **(1.4 puntos)** Represente dicho recinto y determine sus vértices.

b) **(0.6 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y)=x+4y$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.

c) **(0.5 puntos)** ¿Podrá tomar la función objetivo *F* el valor 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas.

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$y-2x=7$

x	$y=2x+7$
0	7
1	9

$-x+3y=21$

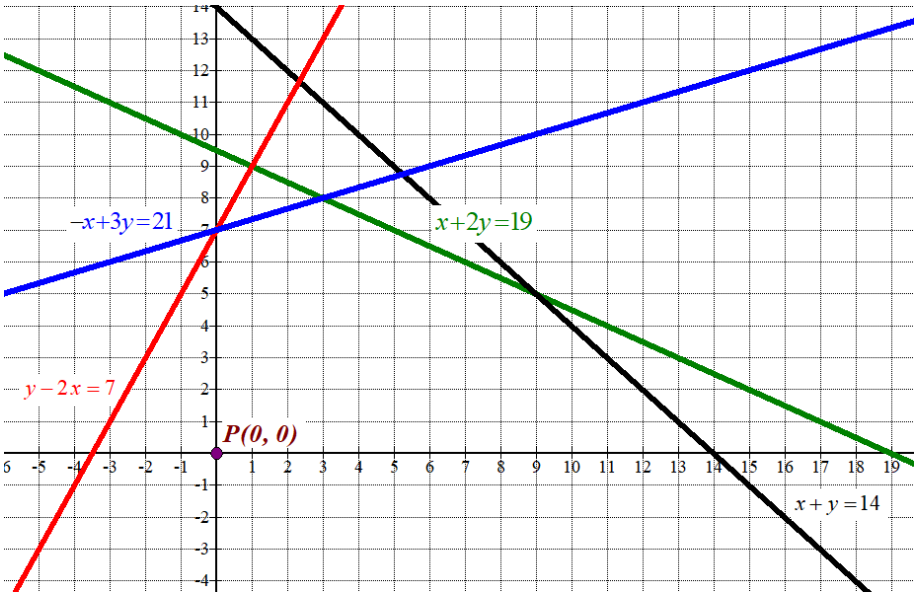
x	$y=\frac{21+x}{3}$
0	7
3	8

$x+2y=19$

x	$y=\frac{19-x}{2}$
0	9.5
9	5

$x+y=14$

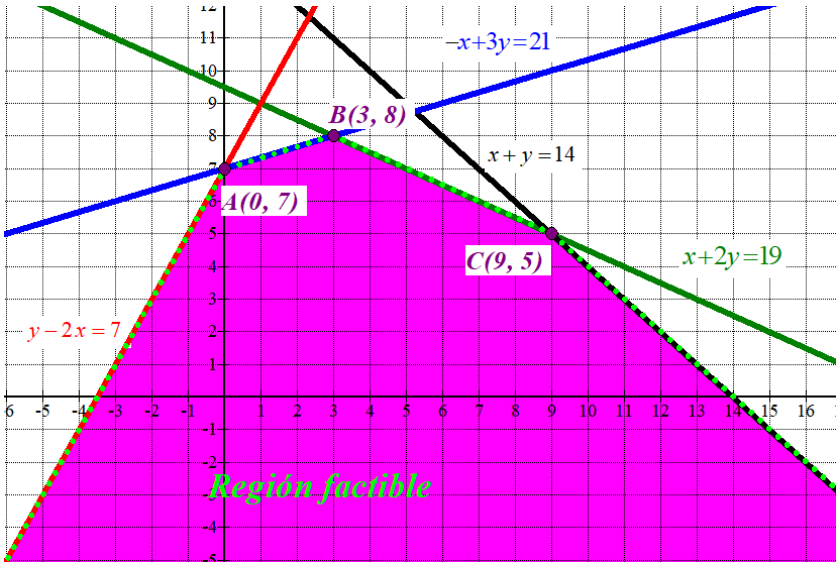
x	$y=14-x$
0	14
9	5



Como las restricciones son $-2x+y\le 7;\quad -x+3y\le 21;\quad x+2y\le 19;\quad x+y\le 14$ la región factible es la región del plano que está por debajo de todas las rectas.
Comprobamos que el punto P(0, 0) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$0-2\cdot 0\le 7;\quad -0+3\cdot 0\le 21;\quad 0+2\cdot 0\le 19;\quad 0+0\le 14$ ¡Se cumplen todas!

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Las coordenadas de los vértices de la región factible son A(0, 7), B(3, 8) y C(9, 5)

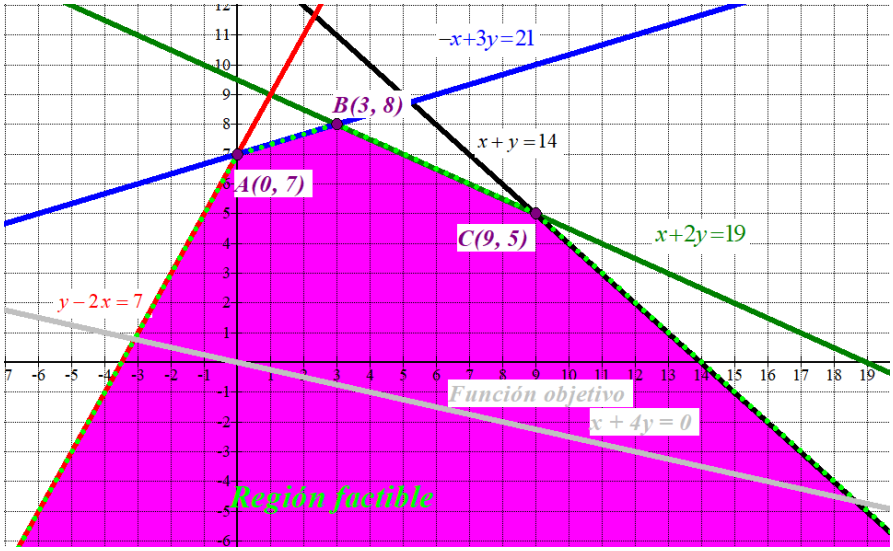
b) Valoramos la función objetivo $F(x, y) = x + 4y$ en cada vértice.

A(0, 7) → $F(0,7) = 0 + 28 = 28$

B(3, 8) → $F(3,8) = 3 + 32 = 35$ ¡Máximo!

C(9, 5) → $F(9,5) = 9 + 20 = 29$

Como la región factible no es acotada no podemos asegurar que el valor mínimo y máximo de la función objetivo esté situado en los vértices de la región.
Dibujamos la recta de la función objetivo con valor 0, es decir, $x + 4y = 0$, se observa que la función objetivo alcanza el valor 0 en muchos puntos de la región.
Por lo tanto no hay valor mínimo de la función objetivo, aunque sí hay valor máximo.



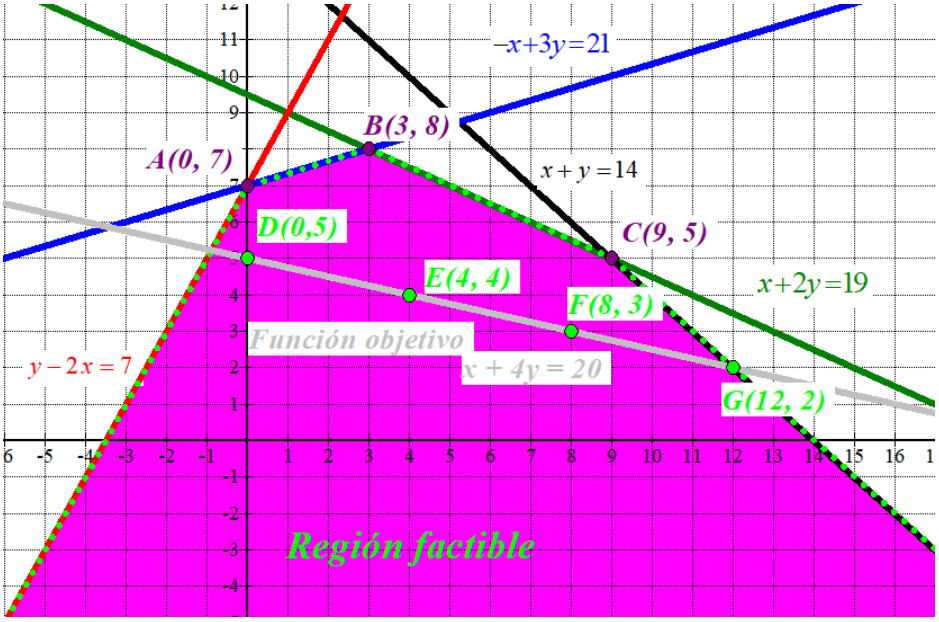
El máximo se alcanza en el vértice B(3, 8) y este valor máximo de la función es 35.

No existe valor mínimo de la función en los puntos de la región factible pues esta función puede alcanza valores todo lo pequeños que se quiera (región factible no acotada).

c) ¿Podrá tomar la función objetivo *F* el valor 40 en algún punto de la región factible? No puede alcanzar un valor superior al máximo (35).

¿Y el valor 20? Si.
Dibujamos la recta que representa la función objetivo con valor 20.

El valor 20 se alcanza en muchos puntos de la región factible.
Por ejemplo en los puntos D(0, 5), E(4, 4), F(8, 3) y G(12, 2).



EJERCICIO 3

a) **(1 punto)** Se considera la función $f(x)=x^3+bx^2+cx-1$, donde b y c son números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremo en el punto de abscisa $x=\frac{1}{3}$ y además la gráfica de la función f pase por el punto (–2, –3).

b) **(1.5 puntos)** Dada la función $g(x)=-x^3-x^2+x+1$, realice el esbozo de su gráfica, estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

a) Que la función f pase por el punto (–2, –3) significa que $f(-2) = -3$.

$$f(-2)=(-2)^3+b(-2)^2+c(-2)-1=-3\Rightarrow -8+4b-2c-1=-3\Rightarrow 4b-2c=6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b-c=3\Rightarrow \boxed{c=2b-3}$$

Que la función f presente un extremo en el punto de abscisa $x=\frac{1}{3}$ significa que $f'\left(\frac{1}{3}\right)=0$.

$$\left.\begin{matrix} f'(x)=3x^2+2bx+c \\ f'\left(\frac{1}{3}\right)=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow 3\left(\frac{1}{3}\right)^2+2b\left(\frac{1}{3}\right)+c=0\Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{2}{3}b+c=0\Rightarrow \boxed{1+2b+3c=0}$$

Unimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix} c=2b-3 \\ 1+2b+3c=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow 1+2b+3(2b-3)=0\Rightarrow 1+2b+6b-9=0\Rightarrow 8b=8\Rightarrow \boxed{b=1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c=2-3=-1}$$

Los valores buscados son $b = 1$ y $c = -1$.

b) **Puntos de corte**.

$$x=0\Rightarrow g(0)=-0^3-0^2+0+1=1\Rightarrow P(0,1)$$

$$y=0\Rightarrow 0=g(x)=-x^3-x^2+x+1.$$

	–1	–1	1	1
1		–1	–2	–1
	–1	–2	–1	0

–1		1	+1
	–1	–1	0

–1		+1
	–1	0

Los puntos de corte son P(0, 1), Q(1, 0) y R(–1,0)

Monotonía.

Derivamos e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$\left.\begin{matrix} g'(x) = -3x^2 - 2x + 1 \\ g'(x) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -3x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2(-3)} = \frac{2 \pm 4}{-6} = \begin{cases} \frac{2+4}{-6} = -1 = x \\ \frac{2-4}{-6} = \frac{1}{3} = x \end{cases}$$

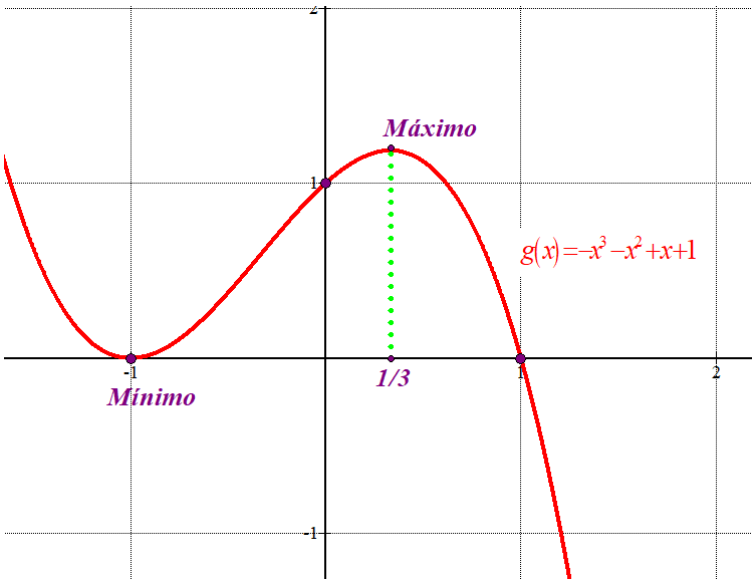
Existen dos puntos críticos.
Valoramos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $g'(-2) = -3(-2)^2 - 2(-2) + 1 = -7 < 0$. La función decrece en $(-\infty, -1)$.
- En el intervalo $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $g'(0) = 1 > 0$. La función crece en $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $g'(1) = -3 - 2 + 1 = -4 < 0$. La función decrece en $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

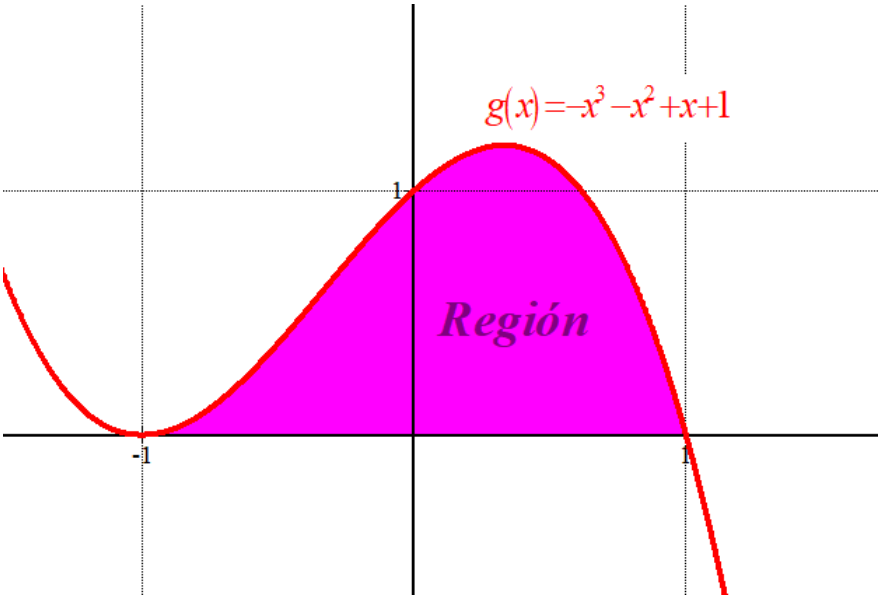
La función decrece en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ y crece en $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$.

Dibujamos la gráfica de $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$

x	$y = -x^3 - x^2 + x + 1$
–2	3
–1	0
0	1
1/3	1.185
1	0
2	–9



c) Nos piden calcular el área de la región del dibujo coloreada de rosa.



Calculamos su área con la integral definida entre –1 y 1 de la función $g(x)$.

$$Área = \int_{-1}^{1} -x^3 - x^2 + x + 1 dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left[-\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1 \right] - \left[-\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} - 1 \right] =$$

$$= -\frac{\cancel{1}}{\cancel{4}} - \frac{1}{3} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} + 1 + \frac{\cancel{1}}{\cancel{4}} - \frac{1}{3} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} + 1 = 2 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3} \simeq 1.33 u^2}$$

EJERCICIO 4

El beneficio, en miles de euros, que se obtiene en una pequeña finca familiar por la venta de aceitunas, en miles de kilogramos, viene dado por la siguiente función:

$$B(x) = -0.02x^2 + 1.3x - 15, \quad x \geq 0$$

a) **(0.75 puntos)** Represente la función beneficio y calcule los puntos de corte con el eje OX.
b) **(0.5 puntos)** ¿Para qué valores de x la finca no tiene pérdidas?
c) **(0.5 puntos)** ¿Para qué número de kilogramos el beneficio será máximo? ¿Cuánto vale dicho beneficio?
d) **(0.75 puntos)** ¿Cuántos kilogramos debe vender para obtener un beneficio de 5000 €?

a) Puntos de corte con el eje OX ($y = 0$).

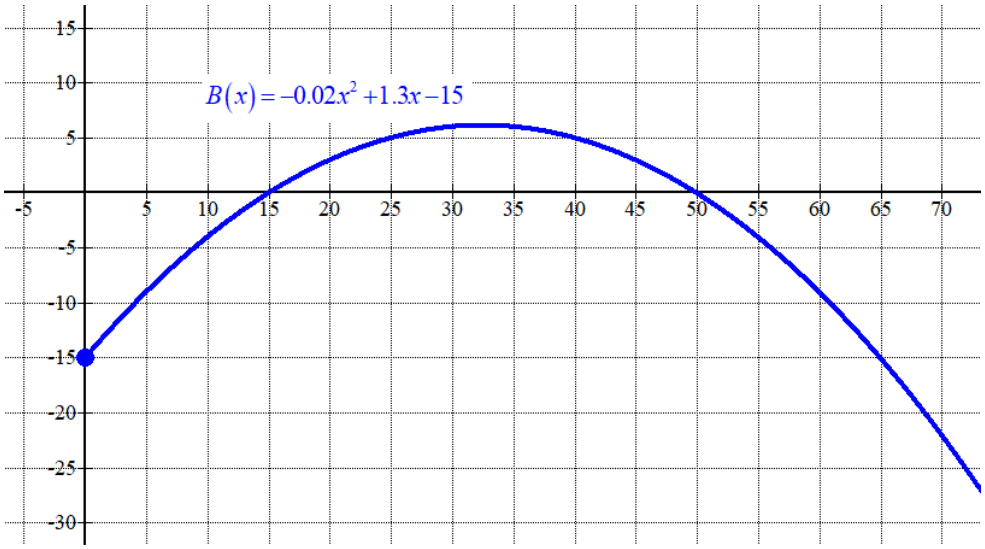
$$\left.\begin{matrix} B(x) = -0.02x^2 + 1.3x - 15 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -0.02x^2 + 1.3x - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1.3 \pm \sqrt{1.3^2 - 4(-0.02)(-15)}}{2(-0.02)} = \frac{-1.3 \pm 0.7}{-0.04} = \begin{cases} \dfrac{-1.3 + 0.7}{-0.04} = 15 = x \\ \dfrac{-1.3 - 0.7}{-0.04} = 50 = x \end{cases}$$

Los puntos de corte con el eje OX son (15, 0) y (50, 0).
La gráfica es la de una parábola. Hallamos su vértice.

$$\left.\begin{matrix} B'(x) = -0.04x + 1.3 \\ B'(x) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -0.04x + 1.3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1.3}{0.04} = 32.5$$

Como $B''(x) = -0.04 \Rightarrow B''(32.5) = -0.04 < 0$ en $x = 32.5$ hay un máximo de la función.



b) La finca no tiene pérdidas con la venta de 15000 a 50000 kilos de aceitunas, pues la función beneficio es positiva o cero en el intervalo [15, 50].

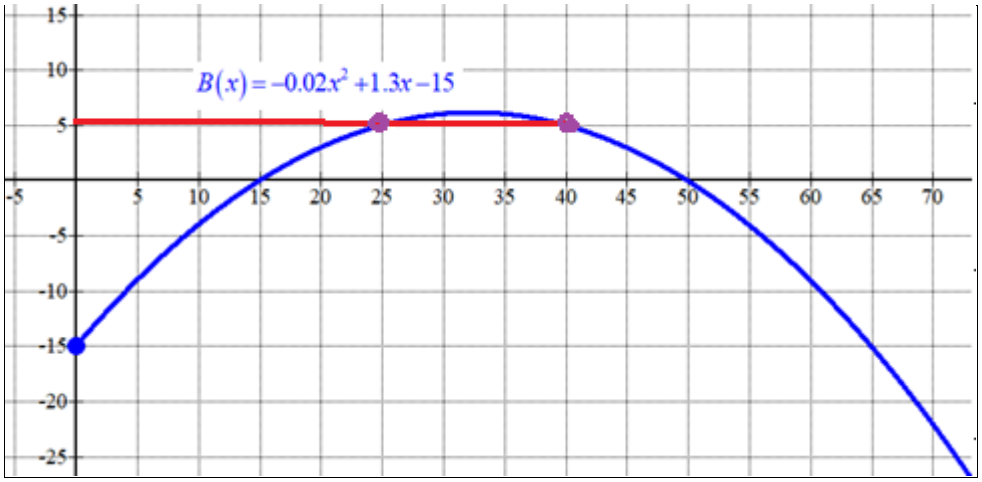
c) Lo he calculado en el apartado a) el máximo está en $x = 32.5$.
Como $B(32.5) = -0.02 \cdot 32.5^2 + 1.3 \cdot 32.5 - 15 = 6.125$ podemos decir que con la venta de 32.500 kilogramos de aceitunas se consigue un beneficio máximo de 6.125 €.

d) Igualamos la función beneficio a 5.

$$B(x)=5 \Rightarrow -0.02x^2+1.3x-15=5 \Rightarrow -0.02x^2+1.3x-20=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1.3\pm\sqrt{1.3^2-4(-0.02)(-20)}}{2(-0.02)}=\frac{-1.3\pm 0.3}{-0.04}=\begin{cases}\dfrac{-1.3+0.3}{-0.04}=25=x\\ \dfrac{-1.3-0.3}{-0.04}=40=x\end{cases}$$

El beneficio de 5000 € se puede conseguir con la venta de 25.000 kilos de aceitunas y también con la venta de 40.000 kilos de aceitunas.



EJERCICIO 5

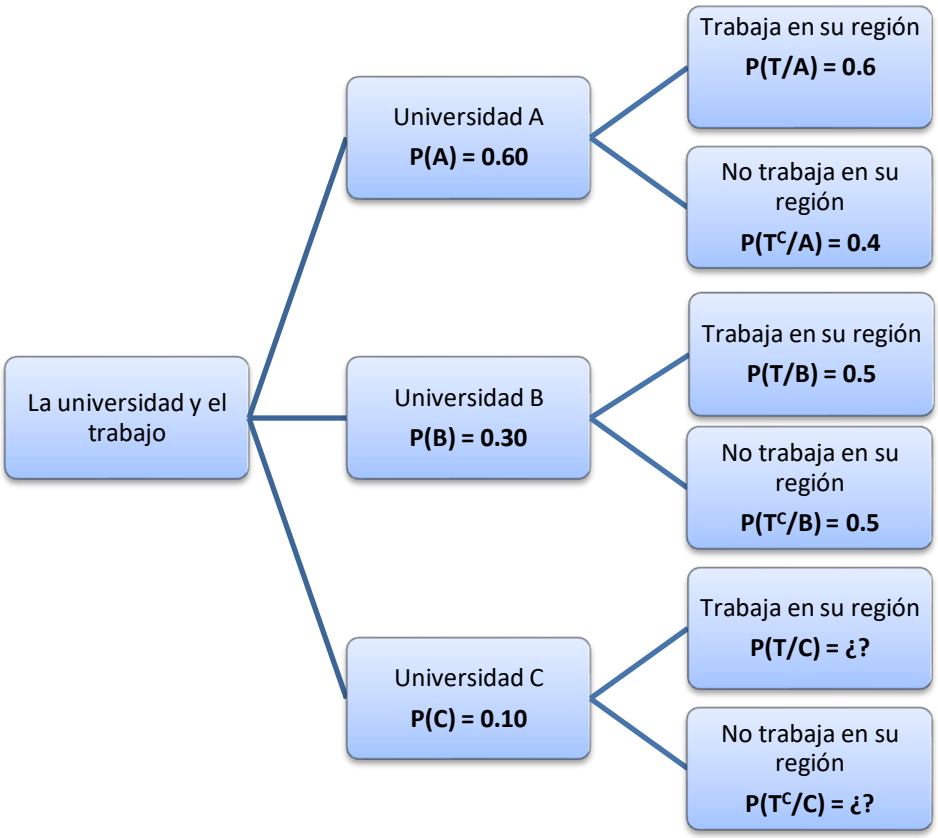
En una determinada región hay tres universidades A, B y C. De los estudiantes que terminaron sus estudios el año pasado, el 60 % procedían de la universidad A, el 30 % de la universidad B y el resto de C. Además, se conoce que la probabilidad de que un estudiante de la universidad A no encuentre trabajo en su región es 0.4 y para un estudiante de B es 0.5.

a) (1.5 puntos) Si la probabilidad de que un estudiante no encuentre trabajo en su región es 0.395, determine la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B.

Llamamos A = "estudiar en la universidad A", B = "estudiar en la universidad B" y C = "estudiar en la universidad C". T = Trabajar en su región".

Realizamos un diagrama de árbol de la situación planteada.



a) Aplicando el teorema de la probabilidad total tenemos que:

$$P\left(T^C\right)=P(A)P\left(T^C/A\right)+P(B)P\left(T^C/B\right)+P(C)P\left(T^C/C\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.395=0.6\cdot 0.4+0.3\cdot 0.5+0.1\cdot P\left(T^C/C\right)\Rightarrow 0.395=0.39+0.1\cdot P\left(T^C/C\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.1\cdot P\left(T^C/C\right)=0.005\Rightarrow \boxed{P\left(T^C/C\right)=\frac{0.005}{0.1}=0.05}$$

La probabilidad de que un alumno de la universidad C no encuentre trabajo en su región es 0.05, por lo que la probabilidad de encontrar trabajo en su región es de 1 – 0.05 = 0.95.

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(\left(A\cup B\right)/T^C\right)=\frac{P\left(\left(A\cup B\right)\cap T^C\right)}{P\left(T^C\right)}=\frac{P\left(A\right)P\left(T^C/A\right)+P\left(B\right)P\left(T^C/B\right)}{P\left(T^C\right)}=$$

$$=\frac{0.6\cdot 0.4+0.3\cdot 0.5}{0.395}=\frac{0.39}{0.395}=\boxed{\frac{78}{79}\simeq 0.987}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Utilizamos el suceso contrario al pedido.
Calculamos la probabilidad de que que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad C.

$$P\left(C/T^C\right)=\frac{P\left(C\cap T^C\right)}{P\left(T^C\right)}=\frac{P\left(C\right)P\left(T^C/C\right)}{P\left(T^C\right)}=\frac{0.1\cdot 0.05}{0.395}=\frac{1}{79}$$

Entonces la probabilidad de que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B es de $1-\frac{1}{79}=\boxed{\frac{78}{79}\simeq 0.987}$

EJERCICIO 6

Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que:

$$P(A\cup B)=\frac{3}{7},\ P\left(A^C\right)=\frac{5}{7},\ P\left(B^C\right)=\frac{2}{3}$$

a) **(1 punto)** ¿Son A y B independientes? ¿Son A y B incompatibles?

b) **(0.75 puntos)** Calcule $P\left(A^C\cap B^C\right)$.

c) **(0.75 puntos)** Calcule $P\left(B/A^C\right)$.

a) Calculamos la probabilidad de A, de B y de la intersección.

$$P(A)=1-P\left(A^C\right)=1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$$

$$P(B)=1-P\left(B^C\right)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{3}{7}=\frac{2}{7}+\frac{1}{3}-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{7}+\frac{1}{3}-\frac{3}{7}=\frac{4}{21}$$

Para que dos sucesos A y B sean independientes debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=\frac{4}{21}\\ P(A)P(B)=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{21}\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{4}{21}\neq\frac{2}{21}=P(A)P(B)$$

Como no se cumple la igualdad los sucesos A y B no son independientes.

Para que dos sucesos sean incompatibles debe ser $A\cap B=\varnothing\Rightarrow P(A\cap B)=0$

En nuestros sucesos A y B no ocurre pues $P(A\cap B)=\frac{4}{21}\neq 0$

A y B no son incompatibles.

b) Aplicando las leyes de Morgan.

$$P\left(A^C\cap B^C\right)=P\left((A\cup B)^C\right)=1-P(A\cup B)=1-\frac{3}{7}=\boxed{\frac{4}{7}}$$

c) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(B/A^C\right)=\frac{P\left(B\cap A^C\right)}{P\left(A^C\right)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P\left(A^C\right)}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{4}{21}}{\frac{5}{7}}=\frac{\frac{3}{21}}{\frac{5}{7}}=\boxed{\frac{1}{5}}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Una fábrica de tornillos quiere hacer un estudio sobre la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 1500 tornillos, resultando que 1425 cumplen las especificaciones del fabricante.

a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza para la proporción de tornillos que cumplen con las especificaciones del fabricante con un nivel de confianza del 97%.

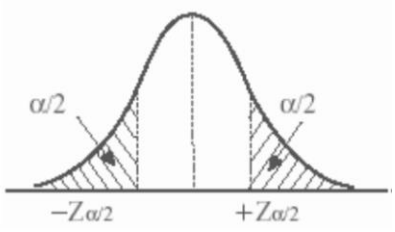
b) **(1 punto)** Manteniendo la proporción muestral y el nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuál tendría que ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%?

Tamaño de la muestra es $n = 1500$. $pr = \frac{1425}{1500} = 0.95$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.95 = 0.05$

a) Con un nivel de confianza del 97 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.95 \cdot 0.05}{1500}} = 0.0122$$

El error máximo cometido es de 0.0122.

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.95 - 0.0122,\quad 0.95 + 0.0122) = (0.9378,\ 0.9622)$$

b) ¿n? Utilizamos la fórmula del error para un valor de 0.01

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.01 = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.95 \cdot 0.05}{n}} \Rightarrow \frac{0.01}{2.17} = \sqrt{\frac{0.95 \cdot 0.05}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.01}{2.17}\right)^2 = \frac{0.95 \cdot 0.05}{n} \Rightarrow n = \frac{0.95 \cdot 0.05}{\left(\frac{0.01}{2.17}\right)^2} = 2236.7275$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 2237 tornillos.

EJERCICIO 8

El número de días que los titulados en un cierto máster tardan en encontrar su primer trabajo sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica 3 días.

a) **(1 punto)** Se elige una muestra aleatoria de 100 titulados obteniéndose una media muestral de 8.1 días. Calcule un intervalo de confianza al 97% para estimar la media poblacional.

b) **(1 punto)** Con un nivel de confianza del 92%, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para que el error cometido, al estimar el número medio de días que estos titulados tardan en encontrar trabajo, sea inferior a un día.

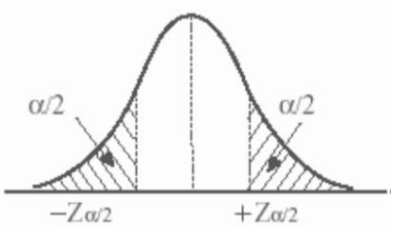
c) **(1 punto)** Suponiendo $\mu = 7.61 días$ y tomando muestras aleatorias de 36 titulados, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 8 días?

a) X = El número de días que los titulados en un cierto máster tardan en encontrar su primer trabajo. X = N(μ,3)

Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884



Tamaño de muestra n = 100. Media muestral $\bar{x} = 8.1$

Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}} = 0.651 días$$

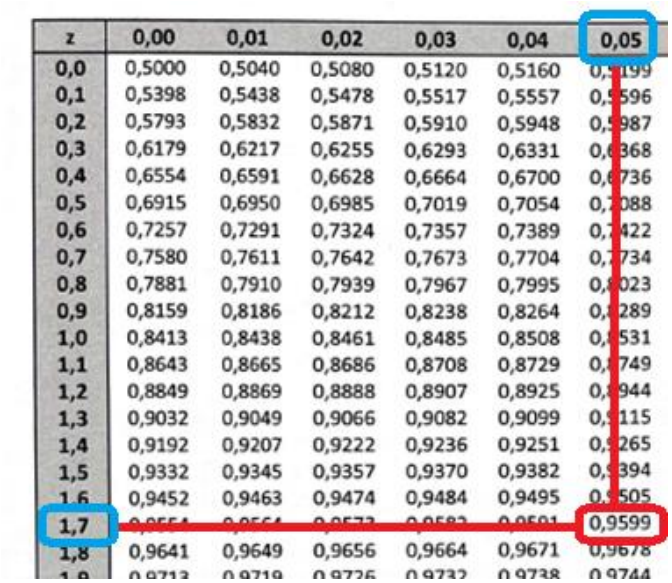
El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(8.1 - 0.651,\ 8.1 + 0.651\right) = \left(7.449,\ 8.751\right)$$

b) Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 1.

Con un nivel de confianza del 92% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \propto = 0{,}92 \rightarrow \propto = 0{,}08 \rightarrow \propto/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505
1,7						0,9599
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1.75\cdot\frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1.75\cdot 3 \Rightarrow n = (1.75\cdot 3)^2 \simeq 27.5625$$

El tamaño mínimo debe ser entero y superior al hallado, por lo tanto es de 28 titulados.

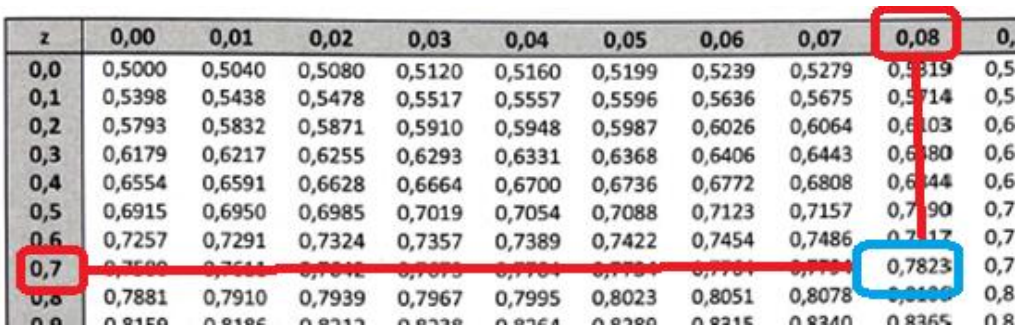
c) X = N(7.61, 3)

n = 36 → $\overline{X_{36}}$ es una distribución normal de la misma media que X y de desviación típica $\sigma = \frac{3}{\sqrt{36}} = 0.5$.

La variable media muestral es $\overline{X_{36}} = N(7.61, 0.5)$

$$P(\overline{X_{36}} > 8) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{8-7.61}{0.5}\right) = P(Z > 0.78) =$$

$$= 1 - P(Z < 0.78) = \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = 1 - 0.7823 = \boxed{0.2177}$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7
0,7									0,7823	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8

PevAU 2022 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CONVOCATORIA ORDINARIA. CURSO 2021-2022	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
- **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
- **b)** Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)
- **c)** Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
- **d)** En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- **e)** Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- **f)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma..

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una pastelería decide preparar dos tipos de cajas de pastelitos para regalar a los clientes en su inauguración. En total dispone de 120 piononos y 150 pestiños. En la caja del primer tipo habrá 3 piononos y 2 pestiños y en la del segundo tipo 4 piononos y 6 pestiños. Deben preparar al menos 9 cajas del segundo tipo.
Determine cuántas cajas de cada tipo deberá preparar para realizar el máximo número de regalos posible. En este caso, indique cuántos piononos y cuántos pestiños se utilizarán.

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) **(0.75 puntos)** Halle los valores del parámetro a para que la matriz A tenga in inversa.
b) **(0.75 puntos)** Para $a = 2$, calcule la matriz inversa de A.
c) **(0.75 puntos)** Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.25 puntos)** Se considera la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, con a, b y c números reales. Calcule los valores a, b y c, sabiendo que la gráfica de f posee un extremo relativo en el punto de abscisa $x=3$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P(0, 18) es –3.
b) **(1.25 puntos)** Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función $g(x)=x^3-4x^2-3x+18$ y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4

a) **(1.25 puntos)** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}6x-3 & x\le 1\\ ax^2+bx+2 & x>1\end{cases}$$

Con a y b números reales. Determine los valores de a y b para que f sea continua y derivable en todo su dominio.

b) **(1.25 puntos)** Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje OX y la gráfica de la función $g(x)=-2x^2+8x-6$.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

En un estudio realizado en una sucursal se ha determinado que el 70% de los créditos concedidos son hipotecarios y el 25 % de los créditos superan los 200 000 €. El 20 % de los créditos son hipotecarios y de más de 200 000 €. Se elige al azar un cliente al que le han concedido un crédito. Calcule la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** El crédito no sea hipotecario y no supere los 200 000€
b) **(0.75 puntos)** Si su crédito no es hipotecario, este no supere los 200 000 €
c) **(0.75 puntos)** Si su crédito supera los 200 000€, que este no sea hipotecario.

EJERCICIO 6

En su tiempo libre, el 65% de los estudiantes de un centro educativo juega con videojuegos, el 45% lee libros y el 15% no hace ninguna de las dos cosas. Elegido al azar un estudiante de dicho centro, calcule la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Juegue con video juegos o lea libros.
b) **(0.75 puntos)** Juegue con video juegos y no lea libros.
c) **(0.75 puntos)** Lea libros sabiendo que no juega con videojuegos.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

La resistencia media a la ruptura de una nueva gama de herramientas sigue una distribución Normal de desviación típica 15MPa (megapascales). Se seleccionan al azar 100 herramientas forjadas en la misma máquina durante el mismo proceso de producción, obteniéndose una resistencia media de 800 MPa.

a) **(1.25 puntos)** Realizando la estimación con un nivel de confianza del 92%, ¿entre qué valores se estima la resistencia media poblacional de esta gama de herramientas?
b) **(1.25 puntos)** Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo en la estimación de la resistencia media a la ruptura sea menor que 2MPa?

EJERCICIO 8

Se quiere estudiar la proporción de perros que están vacunados en Andalucía. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 400 perros de los que 320 resultan estar vacunados.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo con un nivel de confianza del 92% para estimar la proporción de perros vacunados en Andalucía y calcule el error máximo cometido.
b) **(1 punto)** En una nueva muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuántos perros, como mínimo, hay que elegir para que el error sea menor que 0.02?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una pastelería decide preparar dos tipos de cajas de pastelitos para regalar a los clientes en su inauguración. En total dispone de 120 piononos y 150 pestiños. En la caja del primer tipo habrá 3 piononos y 2 pestiños y en la del segundo tipo 4 piononos y 6 pestiños. Deben preparar al menos 9 cajas del segundo tipo.

Determine cuántas cajas de cada tipo deberá preparar para realizar el máximo número de regalos posible. En este caso, indique cuántos piononos y cuántos pestiños se utilizarán.

Llamamos x = número de cajas del primer tipo, y = número de cajas del segundo tipo.

La función a maximizar es el número de regalos que viene dado como $f(x,y)=x+y$

Realizamos una tabla con los datos.

	Piononos	Pestiños
Nº cajas primer tipo (x)	3x	2x
Nº cajas segundo tipo (y)	4y	6y
TOTAL	$3x+4y$	$2x+6y$

Las restricciones son:

"*Deben preparar al menos 9 cajas del segundo tipo*" → $y \geq 9$

"*En total dispone de 120 piononos*" → $3x+4y \leq 120$

"*En total dispone de 150 pestiños*" → $2x+6y \leq 150$

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} y \geq 9 \\ 3x+4y \leq 120 \\ 2x+6y \leq 150 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y \geq 9 \\ 3x+4y \leq 120 \\ x+3y \leq 75 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x+4y=120$

x	$y=\frac{120-3x}{4}$
0	30
40	0

$x+3y=75$

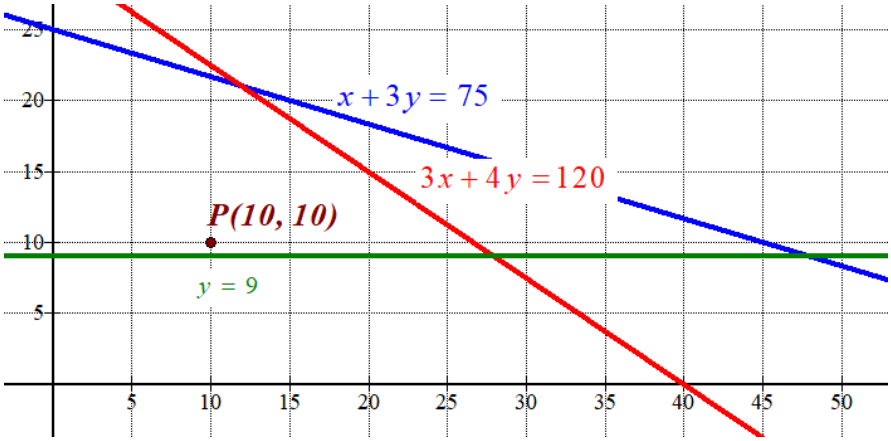
x	$y=\frac{75-x}{3}$
0	25
75	0

$y=9$

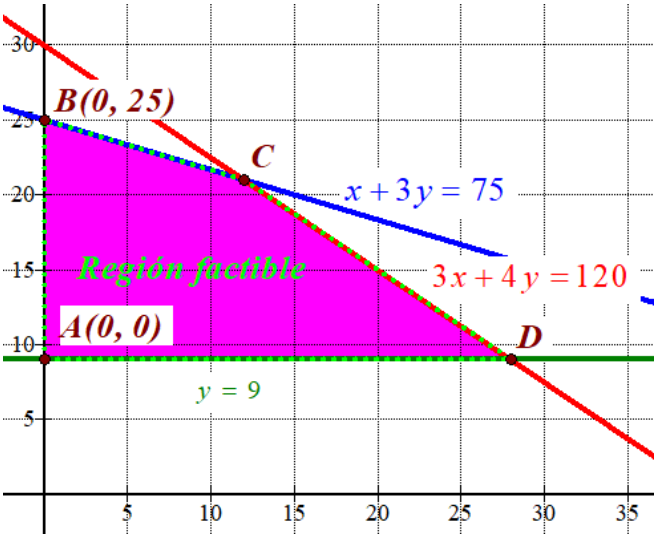
x	$y=9$
0	9
50	9

$x \geq 0;\ y \geq 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} y \geq 9 \\ 3x+4y \leq 120 \\ x+3y \leq 75 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de la recta horizontal verde y por debajo de la azul y la roja. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Nos falta determinar las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+4y=120 \\ x+3y=75 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+4y=120 \\ x=75-3y \end{array}\right\} \Rightarrow 3(75-3y)+4y=120 \Rightarrow 225-9y+4y=120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y=-105 \Rightarrow y=\frac{105}{5}=21 \Rightarrow x=75-63=12 \Rightarrow \boxed{C(12,21)}$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+4y=120 \\ y=9 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x+36=120 \Rightarrow 3x=84 \Rightarrow x=\frac{84}{3}=28 \Rightarrow \boxed{D(28,9)}$$

Valoramos la función objetivo $f(x,y)=x+y$ en cada vértice.

A(0, 0) → $f(0,0)=0$

B(0, 25) → $f(0,25)=25$

C(12, 21) → $f(12,21)=32$

D(28, 9) → $f(28,9)=37$ ¡Máximo!

El número máximo de cajas es de 37 que se consigue con 28 del primer tipo y 9 del segundo.
Con este número de cajas usamos $3\cdot 28+4\cdot 9=120$ piononos y $2\cdot 28+6\cdot 9=110$ pestiños.

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) **(0.75 puntos)** Halle los valores del parámetro *a* para que la matriz A tenga inversa.
b) **(0.75 puntos)** Para *a = 2*, calcule la matriz inversa de A.
c) **(0.75 puntos)** Para *a = 2*, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C$

a) Para tener inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=a^2+3-4a$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-4a+3=0 \Rightarrow a=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=3=a\\ \frac{4-2}{2}=1=a\end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de *a* distinto de 3 y de 1.

b) Para *a = 2* la matriz A tiene inversa.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=4+3-8=-1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=-\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}}$$

c) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C \Rightarrow X \cdot A = B^t \cdot C - I_3 \Rightarrow X = \left(B^t \cdot C - I_3\right) A^{-1}$$

Realizamos las operaciones indicadas y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$B^t\cdot C-I_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6 & -2\\-1 & -3 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6 & -2\\-1 & -4 & 1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$X=\left(B^t\cdot C-I_3\right)A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 6 & -2\\-1 & -4 & 1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\-3 & -2 & 2\\6 & 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-18-12 & 1-12-10 & -1+12+8\\-2+12+6 & -1+8+5 & 1-8-4\\-6 & -5 & 4\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-28 & -21 & 19\\16 & 12 & -11\\-6 & -5 & 4\end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 3

a) **(1.25 puntos)** Se considera la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, con *a*, *b* y *c* números reales. Calcule los valores *a*, *b* y *c*, sabiendo que la gráfica de *f* posee un extremo relativo en el punto de abscisa $x=3$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto P(0, 18) es –3.

b) **(1.25 puntos)** Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función $g(x)=x^3-4x^2-3x+18$ y el eje de abscisas.

a) Si la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ posee un extremo relativo en el punto de abscisa $x=3$ se cumple que la derivada se anula en $x=3 \rightarrow f'(3)=0$.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f'(3)=0 \Rightarrow 3\cdot 3^2+2a\cdot 3+b=0 \Rightarrow \boxed{27+6a+b=0}$$

Que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto P(0, 18) es –3 implica dos cosas: la función vale 18 en *x = 0* y que la derivada en *x = 0* es –3 $\rightarrow f'(0)=-3$.

$$f(0)=18 \Rightarrow 0^3+a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=18 \Rightarrow \boxed{c=18}$$

$$f'(0)=-3 \Rightarrow 3\cdot 0^2+2a\cdot 0+b=-3 \Rightarrow \boxed{b=-3}$$

Sustituimos el valor obtenido de *b* en la primera ecuación y obtendremos el valor de *a*.

$$\left.\begin{array}{l} 27+6a+b=0 \\ b=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow 27+6a-3=0 \Rightarrow 6a=-24 \Rightarrow \boxed{a=-4}$$

Los valores buscados son *a = –4; b = –3*; *c = 18*.

b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas ($y=0$).

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=x^3-4x^2-3x+18 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-4x^2-3x+18=0$$

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -4 & -3 & 18 \\ \hline 3 & & 3 & -3 & -18 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array} \Rightarrow x^3-4x^2-3x+18=(x-3)(x^2-x-6)$$

$$\begin{array}{r|ccc} & 1 & -3 & 0 \\ \hline -2 & & -2 & 6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array} \Rightarrow x^3-4x^2-3x+18=(x-3)(x+2)(x-3)$$

La gráfica de la función corta el eje de abscisas en *x = 3* y en *x = –2*.

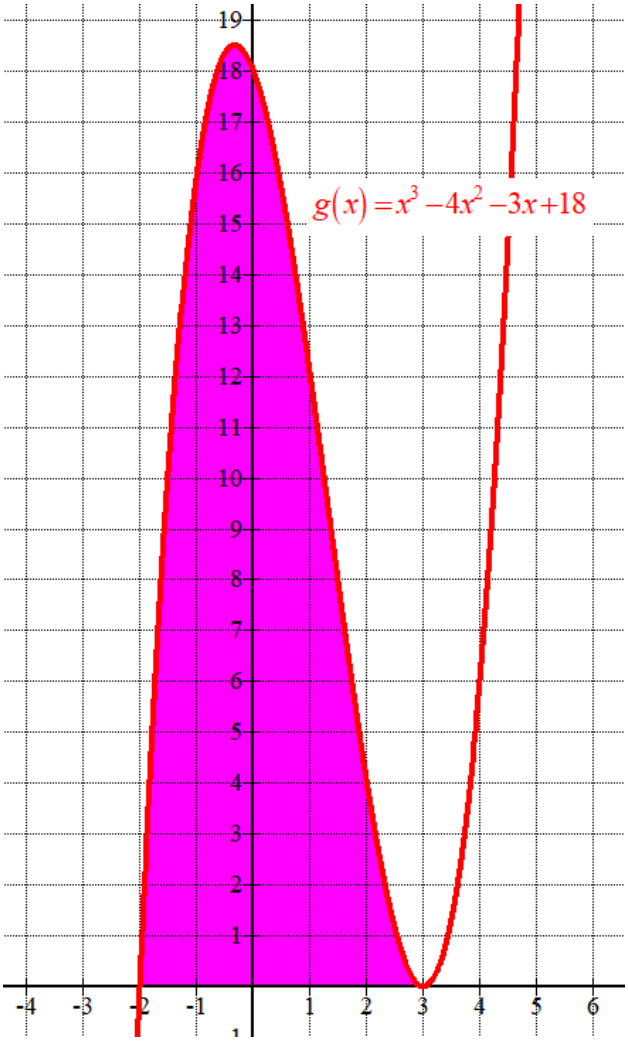
El área es el valor absoluto de la integral definida de $g(x)=x^3-4x^2-3x+18$ entre $x = -2$ y $x = 3$.

$$Área=\left|\int_{-2}^{3} g(x)\,dx\right|=\left|\int_{-2}^{3} x^3-4x^2-3x+18dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+18x\right]_{-2}^{3}\right|=$$

$$=\left[\frac{3^4}{4}-4\frac{3^3}{3}-3\frac{3^2}{2}+18\cdot 3\right]-\left[\frac{(-2)^4}{4}-4\frac{(-2)^3}{3}-3\frac{(-2)^2}{2}+18(-2)\right]=$$

$$=\frac{81}{4}-\cancel{36}-\frac{27}{2}+54-4-\frac{32}{3}+6+\cancel{36}=\boxed{\frac{625}{12}\simeq 52.08u^2}$$

No pide dibujar la gráfica, pero lo hacemos para comprobar la solución.



EJERCICIO 4

a) **(1.25 puntos)** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}6x-3 & x\le 1\\ ax^2+bx+2 & x>1\end{cases}$$

Con *a* y *b* números reales. Determine los valores de *a* y *b* para que *f* sea continua y derivable en todo su dominio.

b) **(1.25 puntos)** Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje OX y la gráfica de la función $g(x)=-2x^2+8x-6$.

a) La función debe ser continua en $x = 1$ por lo que deben coincidir sus límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 6x-3=6-3=3\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} ax^2+bx+2=a+b+2\\ f(1)=3\end{array}\right\}\Rightarrow 3=a+b+2\Rightarrow \boxed{a+b=1}$$

La función derivada en $\mathbb{R}-\{1\}$ tiene la expresión: $f'(x)=\begin{cases}6 & x<1\\ 2ax+b & x>1\end{cases}$

La función es derivable en $x = 1$. Esto implica que las derivadas laterales coinciden.

$$\left.\begin{array}{l}f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 6=6\\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2ax+b=2a+b\\ f'(1^-)=f'(1^+)\end{array}\right\}\Rightarrow 2a+b=6\Rightarrow \boxed{b=6-2a}$$

Juntamos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}a+b=1\\ b=6-2a\end{array}\right\}\Rightarrow a+6-2a=1\Rightarrow -a=-5\Rightarrow \boxed{a=5}\Rightarrow \boxed{b=6-2\cdot 5=-4}$$

Los valores buscados son $a = 5$ y $b = -4$.

b) Averiguamos donde corta la parábola el eje OX ($y = 0$).

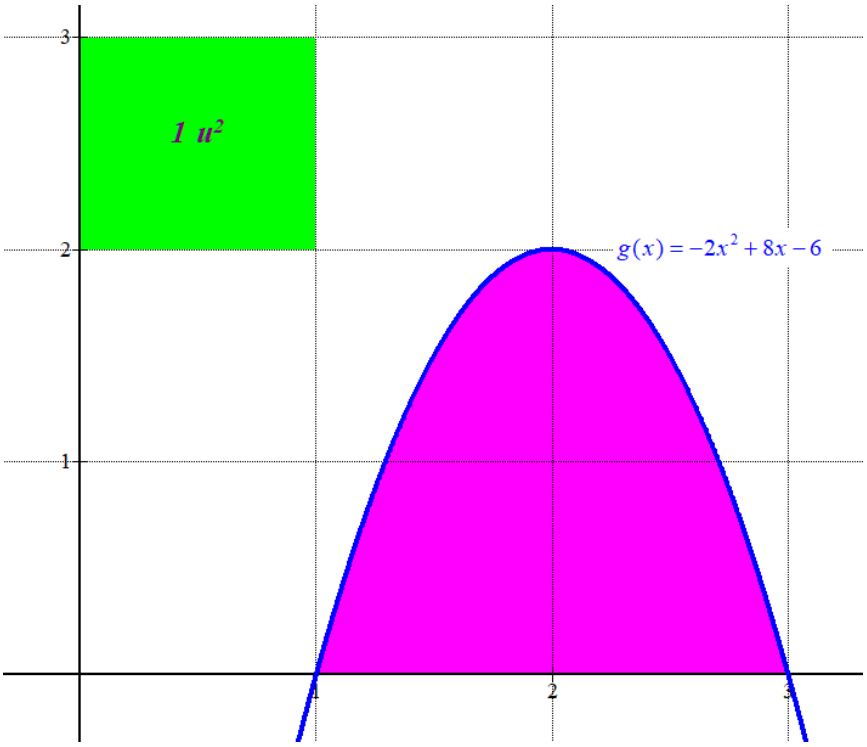
$$\left.\begin{array}{l}g(x)=-2x^2+8x-6\\ y=0\end{array}\right\}\Rightarrow -2x^2+8x-6=0\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=3=x\\ \frac{4-2}{2}=1=x\end{cases}$$

El recinto empieza en $x = 1$ y termina en $x = 3$ por lo que su área es el valor absoluto de la integral definida de $g(x)=-2x^2+8x-6$ entre $x = 1$ y $x = 3$.

$$Área = \left|\int_1^3 g(x)dx\right| = \left|\int_1^3 -2x^2+8x-6dx\right| = \left|\left[-2\frac{x^3}{3}+4x^2-6x\right]_1^3\right| =$$

$$= \left|\left[-2\frac{3^3}{3}+4\cdot 3^2-6\cdot 3\right]-\left[-2\frac{1^3}{3}+4\cdot 1^2-6\cdot 1\right]\right| = \left|\cancel{-18+36-18}+\frac{2}{3}-4+6\right| = \frac{2}{3}+2 = \boxed{\frac{8}{3}\simeq 2.66u^2}$$



EJERCICIO 5

En un estudio realizado en una sucursal se ha determinado que el 70% de los créditos concedidos son hipotecarios y el 25 % de los créditos superan los 200 000 €. El 20 % de los créditos son hipotecarios y de más de 200 000 €. Se elige al azar un cliente al que le han concedido un crédito. Calcule la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** El crédito no sea hipotecario y no supere los 200 000€

b) **(0.75 puntos)** Si su crédito no es hipotecario, este no supere los 200 000 €

c) **(0.75 puntos)** Si su crédito supera los 200 000€, que este no sea hipotecario.

Realizamos una tabla de contingencia para poder establecer el resto de porcentajes.

	Préstamos de más de 200 000 €	Préstamos de 200 000 € o menos	
Préstamos hipotecarios	**20**		**70**
Préstamos no hipotecarios			
	25		**100**

Terminamos de completar la tabla.

	Préstamos de más de 200 000 €	Préstamos de 200 000 € o menos	
Préstamos hipotecarios	**20**	**50**	**70**
Préstamos no hipotecarios	**5**	**25**	**30**
	25	**75**	**100**

Llamamos H al suceso "Ser préstamo hipotecario" y M al suceso "Ser un préstamo de más de 200 000 €"

Con estos datos y aplicando la regla de Laplace tenemos las respuestas a las preguntas de los tres apartados.

a) Nos piden calcular $P\left(\overline{H}\cap\overline{M}\right)$. Utilizamos la regla de Laplace y los datos de la tabla de contingencia.

$$P\left(\overline{H}\cap\overline{M}\right)=\frac{25}{100}=\boxed{0.25}$$

b) Nos piden calcular $P\left(\overline{M}/\overline{H}\right)$. Utilizamos la regla de Laplace y los datos de la tabla de contingencia.

$$P\left(\overline{M}/\overline{H}\right)=\frac{25}{30}=\boxed{\frac{5}{6}\simeq 0.83}$$

c) Nos piden calcular $P\left(\overline{H}/M\right)$. Utilizamos los datos de la primera columna de la tabla de contingencia.

$$P\left(\overline{H}/M\right)=\frac{5}{25}=\boxed{\frac{1}{5}=0.2}$$

EJERCICIO 6

En su tiempo libre, el 65% de los estudiantes de un centro educativo juega con videojuegos, el 45% lee libros y el 15% no hace ninguna de las dos cosas. Elegido al azar un estudiante de dicho centro, calcule la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Juegue con video juegos o lea libros.

b) **(0.75 puntos)** Juegue con video juegos y no lea libros.

c) **(0.75 puntos)** Lea libros sabiendo que no juega con videojuegos.

Realizamos una tabla de contingencia para poder establecer el resto de porcentajes.

	Lee libros	No lee libros	
Juega con videojuegos			**65**
No juega con videojuegos		**15**	
	45		**100**

Terminamos de completar la tabla.

	Lee libros	No lee libros	
Juega con videojuegos	**25**	**40**	**65**
No juega con videojuegos	**20**	**15**	**35**
	45	**55**	**100**

Llamamos V al suceso "Jugar a videojuegos" y L al suceso "Leer libros"
Con estos datos y aplicando la regla de Laplace obtenemos las respuestas a las preguntas de los tres apartados.

a) Nos piden calcular $P(L \cup V)$. Utilizamos la regla de Laplace y los datos de la tabla de contingencia.

$$P(L \cup V) = \frac{25+40+20}{100} = \boxed{0.85}$$

b) Nos piden calcular $P(V \cap \overline{L})$. Utilizamos la regla de Laplace y los datos de la tabla de contingencia.

$$P(V \cap \overline{L}) = \frac{40}{100} = \boxed{0.40}$$

c) Nos piden calcular $P(L/\overline{V})$. Utilizamos la regla de Laplace y los datos de la segunda fila de la tabla de contingencia.

$$P(L/\overline{V}) = \frac{20}{35} = \boxed{\frac{4}{7} \simeq 0.57}$$

EJERCICIO 7

La resistencia media a la ruptura de una nueva gama de herramientas sigue una distribución Normal de desviación típica 15MPa (megapascales). Se seleccionan al azar 100 herramientas forjadas en la misma máquina durante el mismo proceso de producción, obteniéndose una resistencia media de 800 MPa.

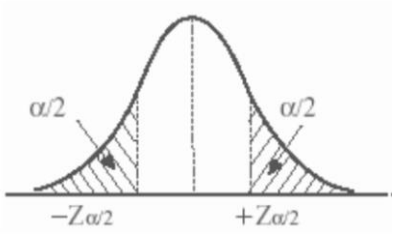
a) **(1.25 puntos)** Realizando la estimación con un nivel de confianza del 92%, ¿entre qué valores se estima la resistencia media poblacional de esta gama de herramientas?

b) **(1.25 puntos)** Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo en la estimación de la resistencia media a la ruptura sea menor que 2MPa?

a) X = Resistencia de una herramienta (en MPa). X = N(μ,15)

Con un nivel de confianza del 92% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \propto = 0{,}92 \rightarrow \propto = 0{,}08 \rightarrow \propto/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}75}$



Tamaño de muestra n = 100. Media muestral $\bar{x} = 800$

Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} = 2.625\,MPa$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(800 - 2.625,\ 800 + 2.625\right) = \left(797.375,\ 802.625\right)$$

b) Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 2. Utilizamos la fórmula del error para despejar el valor de *n*.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 1.75 \cdot 15 = 2\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.75 \cdot 15}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{1.75 \cdot 15}{2}\right)^2 \simeq 172.265$$

El tamaño mínimo es de 173 herramientas.

EJERCICIO 8

Se quiere estudiar la proporción de perros que están vacunados en Andalucía. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 400 perros de los que 320 resultan estar vacunados.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo con un nivel de confianza del 92% para estimar la proporción de perros vacunados en Andalucía y calcule el error máximo cometido.

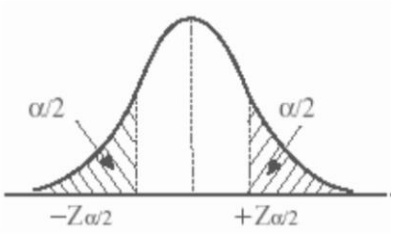
b) **(1 punto)** En una nueva muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuántos perros, como mínimo, hay que elegir para que el error sea menor que 0.02?

Tamaño de la muestra es $n = 400$. $pr = \frac{320}{400} = 0.8$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.8 = 0.2$

a) Con un nivel de confianza del 92 % obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \propto = 0{,}92 \rightarrow \propto = 0{,}08 \rightarrow \propto/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}75}$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{400}} = 0.035$$

El error máximo cometido es de 0.035.

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.8 - 0.035,\ \ 0.8 + 0.035) = (0.765, 0.835)$$

b) Con un nivel de confianza del 92% tenemos $z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}75}$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{n}} = 0.02 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.02}{1.75} = \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{n}} \Rightarrow \left(\frac{0.02}{1.75}\right)^2 = \frac{0.16}{n} \Rightarrow n = \frac{0.16}{\left(\frac{0.02}{1.75}\right)^2} = 1225$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 1226 perros.

PevAU 2021 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA. CURSO 2020-2021	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & a\end{pmatrix}$.

a) **(0.7 puntos)** Determine para qué valores del parámetro *a*, la matriz A tiene inversa
b) **(1 punto)** Para $a = 1$, calcule la inversa de A.
c) **(0.8 puntos)** Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $A\cdot X = B^t$, siendo $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x-4y\le -19 \qquad 3x-4y\le -13 \qquad x\ge -7 \qquad -x-y\ge 2$$

a) **(1.5 puntos)** Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.
b) **(0.5 puntos)** ¿Cuáles son los puntos en los que se alcanzan el mínimo y el máximo de la función $G(x,y)=-\frac{1}{5}x+\frac{5}{2}y$ en la citada región factible? ¿Cuál es su valor?
c) **(0.5 puntos)** Responda de forma razonada si la función $G(x,y)=-\frac{1}{5}x+\frac{5}{2}y$ puede alcanzar el valor $\frac{47}{3}$ en la región factible hallada.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}2^{x+1} & si\ \ x<0\\ x^2-2x & si\ \ x\ge 0\end{cases}$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f* en su dominio.

b) **(0.8 puntos)** Estudie la monotonía de la función *f* y calcule el mínimo.

c) **(0.7 puntos)** Calcule $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

EJERCICIO 4

El número de diagnosticados de COVID-19 por PCR en Andalucía, medido en miles de personas, se aproxima por la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases} -t^2+2t-0.3 & si\ \ 0.2\le t\le 1.8 \\ 0.1t-0.12 & si\ \ 1.8<t\le 5 \\ -0.5t^2+8.3t-28.62 & si\ \ 5<t\le 10 \end{cases}$$

donde *t* es el tiempo, medido en meses, a partir del inicio de conteo en el mes de marzo de 2020.

a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f* en su dominio.

b) **(1 punto)** ¿En qué instante o instantes es máximo el número de diagnosticados? ¿Cuál es ese número?

BLOQUE C

EJERCICIO 5

En una población, se sabe que el l5% de las personas padece una determinada enfermedad. Si la persona está enferma, un test da positivo en el 92 % de los casos) mientras que si la persona está sana, el test da positivo en el 4% de los casos (falso positivo). Se elige una persona al azar de esa población.

a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que, habiendo dado positivo el test, la persona esté enferma.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma y el test salga negativo.

c) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que saliendo el test negativo, la persona esté enferma.

EJERCICIO 6

En una comunidad de vecinos, el 90% de sus miembros tiene vehículo propio, el 40% hace uso del transporte público y un 3 % ni tiene vehículo propio ni usa el transporte público" Se elige al azar un miembro de esa comunidad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que tenga vehículo propio o use el transporte público.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que use el transporte público y no tenga vehículo propio.

c) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la Unión Europea (UE), se toma una muestra aleatoria de 250 de estos residentes, obteniéndose que 115 estaban a favor de dejar de pertenecer a la UE.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 99.5%, para estimar la proporción real de esos residentes que está a favor de la salida del Reino Unido de la UE.

b) **(1 punto)** Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra, para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de 1a UE, con un error inferior al 5%.

EJERCICIO 8

Sea X una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media poblacional desconocida y desviación típica 4.

a) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la desviación típica de la distribución de las medias de las muestras de tamaño 12 de la variable aleatoria X?

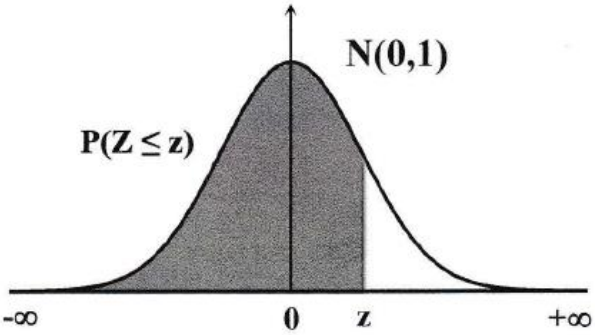
b) **(1 punto)** Para estimar la media poblacional de la variable X. se toma una muestra aleatoria de tamaño 12, obteniéndose los siguientes resultados:

11.8 10 9.8 12 9.7 10.8 9.6 11.3 10.4 12.2 9.1 10.5

Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

c) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra, para que, con el mismo nivel de confianza, el error cometido al estimar la media poblacional sea menor que 1.2.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & a\end{pmatrix}$.

a) **(0.7 puntos)** Determine para qué valores del parámetro *a*, la matriz A tiene inversa
b) **(1 punto)** Para *a = 1*, calcule la inversa de A.
c) **(0.8 puntos)** Para *a = 1*, resuelva la ecuación matricial $A\cdot X=B^t$, siendo $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

a) Vemos cuando el determinante de A es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & a\end{vmatrix}=-a-8$$

$$|A|=0\Rightarrow -a-8=0\Rightarrow a=-8$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de *a* distinto de –8.

b) Si *a = 1* la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=-1-8=-9\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}}{-9}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-4 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -4\\ 2 & -4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/9 & 1/9 & -2/9\\ 1/9 & -2/9 & 4/9\\ -2/9 & 4/9 & 1/9\end{pmatrix}}$$

c) Si *a = 1* la inversa de A es $A^{-1}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-4 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -4\\ 2 & -4 & -1\end{pmatrix}$.

$$A\cdot X=B^t\Rightarrow X=A^{-1}B^t=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-4 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -4\\ 2 & -4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-1-2\\ 2+4\\ -4+1\end{pmatrix}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3\\ 6\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\ -2/3\\ 1/3\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x-4y\le -19 \qquad 3x-4y\le -13 \qquad x\ge -7 \qquad -x-y\ge 2$$

a) **(1.5 puntos)** Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** ¿Cuáles son los puntos en los que se alcanzan el mínimo y el máximo de la función $G(x,y)=-\frac{1}{5}x+\frac{5}{2}y$ en la citada región factible? ¿Cuál es su valor?

c) **(0.5 puntos)** Responda de forma razonada si la función $G(x,y)=-\frac{1}{5}x+\frac{5}{2}y$ puede alcanzar el valor $\frac{47}{3}$ en la región factible hallada.

a) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$5x-4y=-19$

x	$y=\frac{5x+19}{4}$
-3	1
1	6

$3x-4y=-13$

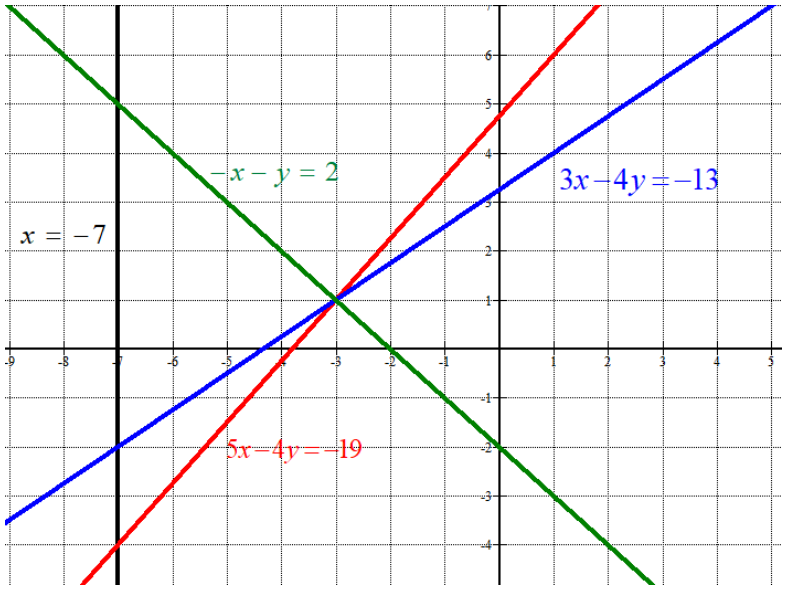
x	$y=\frac{3x+13}{4}$
-3	1
-7	-2

$x=-7$

$x=-7$	y
-7	-2
-7	5

$-x-y=2$

x	$y=-x-2$
-3	1
-7	5



Como las restricciones son:

$5x-4y\le -19 \rightarrow 5x+19\le 4y$ → *Por encima*

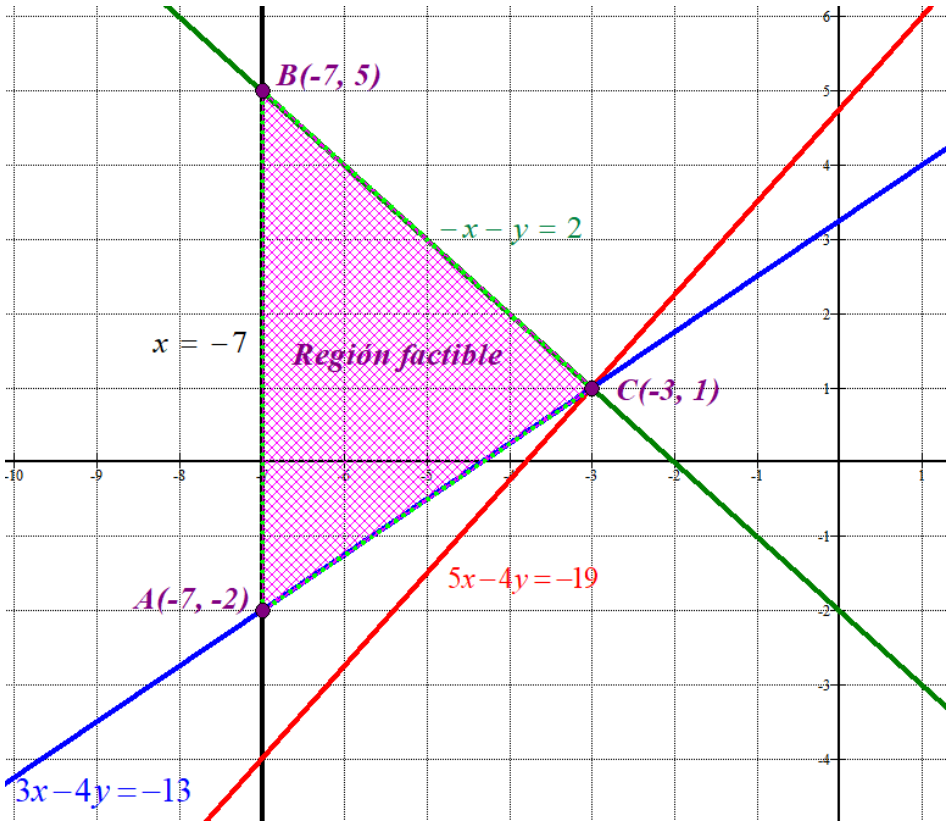
$3x-4y\le -13 \rightarrow 3x+13\le 4y$ → *Por encima*

$x\ge -7$ → *Por la derecha*

$-x\ge 2+y$ → *Por debajo*

la región factible es la región situada a la derecha de la recta vertical negra, por encima de las rectas azul y roja y por debajo de la recta verde.

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de los vértices de dicha región.



Los vértices son A(–7, –2), B(–7, 5) y C(–3, 1).

b) Valoramos la función $G(x,y)=-\frac{1}{5}x+\frac{5}{2}y$ en cada uno de los vértices de la región factible.

A(–7, –2) → $G(-7,-2)=\frac{7}{5}-\frac{10}{2}=-3.6$ ¡Mínimo!

B(–7, 5) → $G(-7,5)=\frac{7}{5}+\frac{25}{2}=13.9$ ¡Máximo!

C(–3, 1) → $G(-3,1)=\frac{3}{5}+\frac{5}{2}=3.1$

El máximo valor de $G(x,y)$ es 13.9 y se alcanza en el vértice B(–7, 5).

El mínimo valor de $G(x,y)$ es –3.6 y se alcanza en el vértice A(–7, –2).

c) Tenemos que $\frac{47}{3}\simeq 15.66$ es mayor que el valor máximo (13.9) que puede alcanzar la función $G(x,y)$ en la región factible. Por lo que no es posible que se alcance ese valor.

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}2^{x+1} & si\ \ x<0\\ x^2-2x & si\ \ x\geq 0\end{cases}$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f* en su dominio.
b) **(0.8 puntos)** Estudie la monotonía de la función *f* y calcule el mínimo.
c) **(0.7 puntos)** Calcule $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

a) En $(-\infty,0)$ la función es una exponencial que es continua y derivable, en $(0,+\infty)$ la función es una parábola que también es continua y derivable.

Falta ver la continuidad y derivabilidad de la función en *x = 0*.

¿*f(x)* es continua en *x =0*?

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^2-2\cdot 0=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{x+1}=2^1=2\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2-2x=0\end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0\neq 2=\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

La función no es continua en *x = 0*, por lo que tampoco es derivable en *x = 0*.

La función es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$.

b) En $(-\infty,0)$ la función es $f(x)=2^{x+1}$ con derivada $f'(x)=2^{x+1}\ln 2$ que nunca se anula y siempre toma valor positivo $f'(-1)=2^0\ln 2=\ln 2=0.69>0$, por lo que la función siempre es creciente en $(-\infty,0)$.
En $(0,+\infty)$ la función es $f(x)=x^2-2x$. Buscamos cuando se anula la derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=2x-2\\ f'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2x-2=0\Rightarrow x=1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de *x = 1*.

- En $(0,1)$ tomamos *x = 0.5* y la derivada vale $f'(0.5)=1-2=-1<0$. La función decrece en $(0,1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=4-2=2>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(0,1)$.
La función tiene un mínimo relativo en *x = 1*, el vértice de la parábola. Como $f(1)=1^2-2=-1$ el mínimo tiene coordenadas (1, –1)

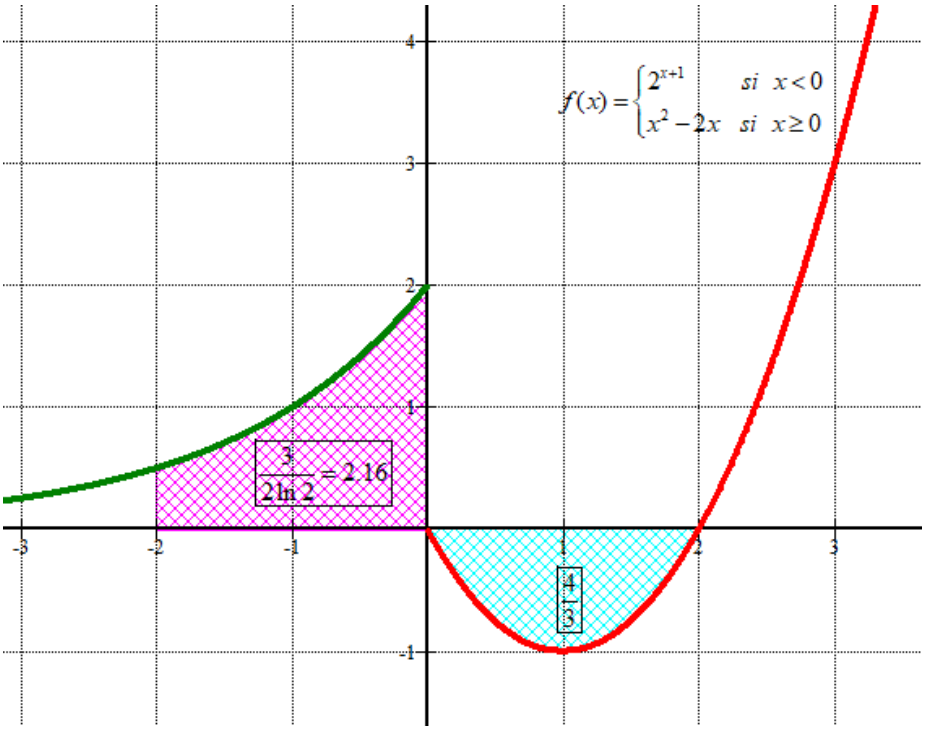
c) Para el cálculo de la integral definida $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ debemos separarla en dos: una entre –2 y 0 y otra entre 0 y 2 debido a que la función cambia de definición en $x = 0$.

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0} 2^{x+1}dx + \int_{0}^{2} x^2 - 2xdx =$$

$$= \left[\frac{2^{x+1}}{\ln 2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} = \left[\frac{2^{0+1}}{\ln 2}\right] - \left[\frac{2^{-2+1}}{\ln 2}\right] + \left[\frac{2^3}{3} - 2^2\right] - \left[\frac{0^3}{3} - 0^2\right] =$$

$$= \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{2\ln 2} + \frac{8}{3} - 4 = \boxed{\frac{3}{2\ln 2} - \frac{4}{3} \simeq 0.8307}$$

Aunque no lo pide hacemos el dibujo de la región y comprobamos los valores obtenidos.



EJERCICIO 4

El número de diagnosticados de COVID-19 por PCR en Andalucía, medido en miles de personas, se aproxima por la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases}-t^2+2t-0.3 & si\ \ 0.2\le t\le 1.8\\ 0.1t-0.12 & si\ \ 1.8<t\le 5\\ -0.5t^2+8.3t-28.62 & si\ \ 5<t\le 10\end{cases}$$

donde *t* es el tiempo, medido en meses, a partir del inicio de conteo en el mes de marzo de 2020.

a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f* en su dominio.

b) **(1 punto)** ¿En qué instante o instantes es máximo el número de diagnosticados? ¿Cuál es ese número?

a) La función son trozos de funciones polinómicas que son continuas y derivables.
Hay que comprobar la continuidad y derivabilidad en $t = 1.8$ y en $t = 5$.

¿*f(t)* es continua en $t = 1.8$?

$$\left.\begin{array}{l} f(1.8)=-1.8^2+3.6-0.3=0.06\\ \lim\limits_{t\to 1.8^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 1.8^-} -t^2+2t-0.3=0.06\\ \lim\limits_{t\to 1.8^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 1.8^+} 0.1t-0.12=0.18-0.12=0.06\end{array}\right\}\Rightarrow f(1.8)=\lim_{t\to 1.8^-} f(t)=\lim_{t\to 1.8^+} f(t)=0.06$$

La función es continua en $t = 1.8$.

¿*f(t)* es continua en $t = 5$?

$$\left.\begin{array}{l} f(5)=0.1\cdot 5-0.12=0.38\\ \lim\limits_{t\to 5^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 5^-} 0.1t-0.12=0.38\\ \lim\limits_{t\to 5^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 5^+} -0.5t^2+8.3t-28.62=0.38\end{array}\right\}\Rightarrow f(5)=\lim_{t\to 5^-} f(t)=\lim_{t\to 5^+} f(t)=0.38$$

La función es continua en $t = 5$.

La función es continua en todo su dominio [0.2, 10].

La derivada de la función en $[0.2,1.8)\cup(1.8,5)\cup(5,10]$ tiene la expresión:

$$f(t)=\begin{cases}-t^2+2t-0.3 & si\ \ 0.2\le t\le 1.8\\ 0.1t-0.12 & si\ \ 1.8<t\le 5\\ -0.5t^2+8.3t-28.62 & si\ \ 5<t\le 10\end{cases}\Rightarrow f'(t)=\begin{cases}-2t+2 & si\ \ 0.2\le t<1.8\\ 0.1 & si\ \ 1.8<t<5\\ -t+8.3 & si\ \ 5<t\le 10\end{cases}$$

¿*f(t)* es derivable en $t = 1.8$?

$$\left.\begin{array}{l} f'(1.8^-)=\lim\limits_{t\to 1.8^-} f'(t)=\lim\limits_{t\to 1.8^-} -2t+2=-1.6\\ f'(1.8^+)=\lim\limits_{t\to 1.8^+} f'(t)=\lim\limits_{t\to 1.8^+} 0.1=0.1\end{array}\right\}\Rightarrow f'(1.8^-)=-1.6\neq 0.1=f'(1.8^+)$$

La función no es derivable en $t = 1.8$.

¿*f(t)* es derivable en $t = 5$?

$$\left.\begin{array}{l} f'(5^-) = \lim\limits_{t\to 5^-} f'(t) = \lim\limits_{t\to 5^-} 0.1 = 0.1 \\ f'(5^+) = \lim\limits_{t\to 5^+} f'(t) = \lim\limits_{t\to 5^+} -t + 8.3 = 3.3 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(5^-) = 0.1 \neq 3.3 = f'(5^+)$$

La función no es derivable en $t = 5$.

***Resumiendo**:* La función es continua en todo su dominio [0.2, 10] y es derivable en $[0.2,1.8)\cup(1.8,5)\cup(5,10]$.

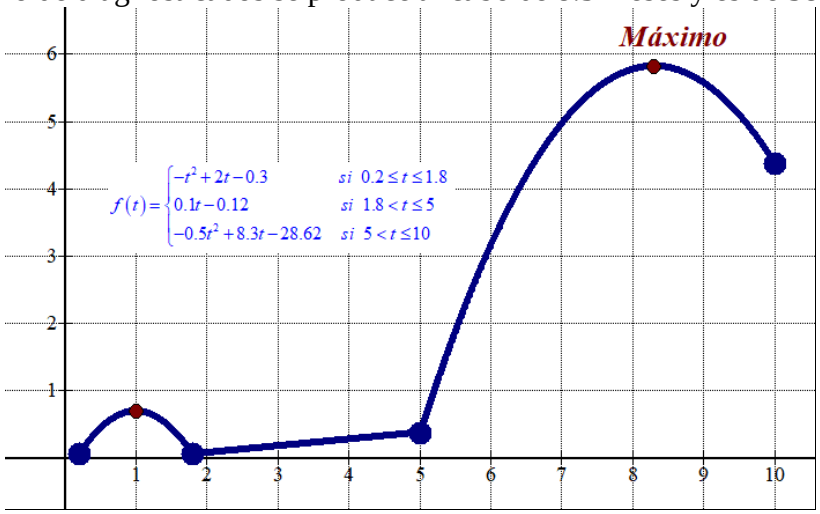
b) La función tiene como derivada $f'(t) = \begin{cases} -2t+2 & si\ \ 0.2 \le t < 1.8 \\ 0.1 & si\ \ 1.8 < t < 5 \\ -t+8.3 & si\ \ 5 < t \le 10 \end{cases}$, la igualamos a cero en busca de puntos críticos.

$$f'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2t+2 = 0 \to \boxed{t = 1} & si\ \ 0.2 \le t < 1.8 \\ 0.1 = 0 \quad No\ es\ posible & si\ \ 1.8 < t < 5 \\ -t+8.3 = 0 \to \boxed{t = 8.3} & si\ \ 5 < t \le 10 \end{cases}$$

Como la función es continua y son dos trozos de parábolas y un trozo de recta la valoramos en los puntos críticos y en los extremos de cada intervalo y obtendremos el valor máximo de la función en [0.2, 10].

$$\left.\begin{array}{l} f(0.2) = -0.2^2 + 0.4 - 0.3 = 0.060 \\ f(1) = -1^2 + 2 - 0.3 = 0.700 \\ f(1.8) = -1.8^2 + 3.6 - 0.3 = 0.060 \\ f(5) = 0.5 - 0.12 = 0.380 \\ f(8.3) = -0.5 \cdot 8.3^2 + 8.3 \cdot 8.3 - 28.62 = 5.825 \\ f(10) = -0.5 \cdot 10^2 + 8.3 \cdot 10 - 28.62 = 4.380 \end{array}\right\}$$

El valor máximo de diagnosticados se produce al cabo de 8.3 meses y es de 5825 personas.



EJERCICIO 5

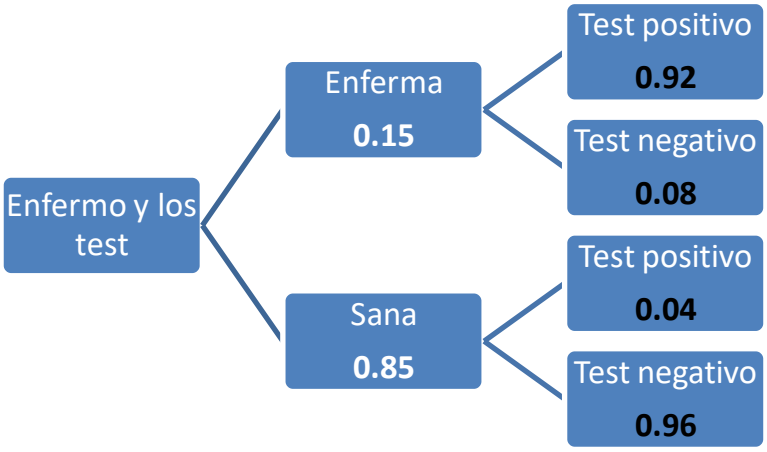
En una población, se sabe que el l5% de las personas padece una determinada enfermedad. Si la persona está enferma, un test da positivo en el 92 % de los casos) mientras que si la persona está sana, el test da positivo en el 4% de los casos (falso positivo). Se elige una persona al azar de esa población.

a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que, habiendo dado positivo el test, la persona esté enferma.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma y el test salga negativo.

c) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que saliendo el test negativo, la persona esté enferma.

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos S = Persona sana, $\overline{S}$ = Persona enferma, T = Test positivo, $\overline{T}$ = Test negativo.

a) Nos piden calcular $P\left(\overline{S}/T\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos teorema de Bayes.

$$P\left(\overline{S}/T\right)=\frac{P\left(\overline{S}\cap T\right)}{P\left(T\right)}=\frac{P\left(\overline{S}\right)P\left(T/\overline{S}\right)}{P\left(S\right)P\left(T/S\right)+P\left(\overline{S}\right)P\left(T/\overline{S}\right)}=$$

$$=\frac{0.15\cdot 0.92}{0.85\cdot 0.04+0.15\cdot 0.92}=\boxed{\frac{69}{86}\simeq 0.8023}$$

b) $P\left(\overline{S}\cap\overline{T}\right)=P\left(\overline{S}\right)P\left(\overline{T}/\overline{S}\right)=0.15\cdot 0.08=\boxed{\frac{3}{250}=0.012}$

c) Nos piden calcular $P\left(\overline{S}/\overline{T}\right)$.

$$P\left(\overline{S}/\overline{T}\right)=\frac{P\left(\overline{S}\cap\overline{T}\right)}{P\left(\overline{T}\right)}=\frac{P\left(\overline{S}\right)P\left(\overline{T}/\overline{S}\right)}{P\left(\overline{T}\right)}=\frac{P\left(\overline{S}\right)P\left(\overline{T}/\overline{S}\right)}{P\left(\overline{S}\right)P\left(\overline{T}/\overline{S}\right)+P\left(S\right)P\left(\overline{T}/S\right)}=$$

$$=\frac{0.15\cdot 0.08}{0.15\cdot 0.08+0.85\cdot 0.96}=\boxed{\frac{1}{69}\simeq 0.0145}$$

EJERCICIO 6

En una comunidad de vecinos, el 90% de sus miembros tiene vehículo propio, el 40% hace uso del transporte público y un 3 % ni tiene vehículo propio ni usa el transporte público" Se elige al azar un miembro de esa comunidad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que tenga vehículo propio o use el transporte público.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que use el transporte público y no tenga vehículo propio.

c) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio.

Realizamos una tabla de contingencia para obtener fácilmente el resto de porcentajes.

	Usan el transporte público	No usan el transporte público	
Tienen vehículo propio			**90**
No tienen vehículo propio		**3**	
	40		**100**

Completamos la tabla.

	Usan el transporte público	No usan el transporte público	
Tienen vehículo propio	**33**	**57**	**90**
No tienen vehículo propio	**7**	**3**	**10**
	40	**60**	**100**

Llamamos V = Tener vehículo propio y T = Usar el transporte público.

a) Mirando la tabla vemos que del 100 % de los miembros de una comunidad de vecinos hay un 90 % que tienen vehículo propio y otro 7 % que no tiene vehículo propio pero usa el transporte público.

$$P(V \cup T) = \frac{90+7}{100} = \boxed{0.97}$$

b) Mirando la tabla vemos que los que usan el transporte público y no tienen vehículo propio son el 7 %.

$$P(T \cap \overline{V}) = 7\,\% = \boxed{0.07}$$

c) Utilizamos los datos de la segunda fila de la tabla. Vemos que hay 10 personas sin vehículo propio y de esas son 7 las que usan el transporte público.

$$P(T / \overline{V}) = \frac{7}{10} = \boxed{0.7}$$

EJERCICIO 7

Para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la Unión Europea (UE), se toma una muestra aleatoria de 250 de estos residentes, obteniéndose que 115 estaban a favor de dejar de pertenecer a la UE.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 99.5%, para estimar la proporción real de esos residentes que está a favor de la salida del Reino Unido de la UE.

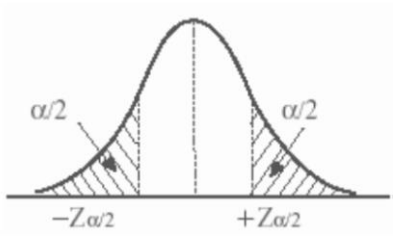
b) **(1 punto)** Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra, para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de 1a UE, con un error inferior al 5%.

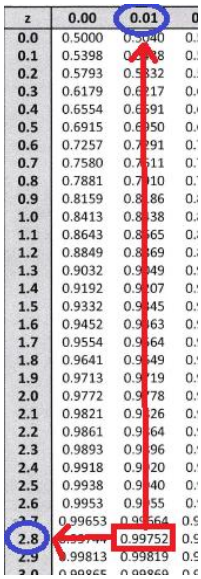
n = 250. $p = \frac{115}{250} = 0.46 \rightarrow q = 1 - p = 1 - 0.46 = 0.54$

a) Con un nivel de confianza del 99.5 % determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \propto = 0{,}995 \rightarrow \propto = 0{,}005 \rightarrow \propto/2 = 0'0025 \rightarrow$

$\rightarrow$ $1 - \propto/2 = 0{,}9975 \rightarrow z_{\alpha/2} =$ **2.81**





z	0.00	0.01	0
0.0	0.5000	0.5040	0.
0.1	0.5398	0.5438	0.
0.2	0.5793	0.5832	0.
0.3	0.6179	0.6217	0.
0.4	0.6554	0.6591	0.
0.5	0.6915	0.6950	0.
0.6	0.7257	0.7291	0.
0.7	0.7580	0.7611	0.
0.8	0.7881	0.7910	0.
0.9	0.8159	0.8186	0.
1.0	0.8413	0.8438	0.
1.1	0.8643	0.8665	0.
1.2	0.8849	0.8869	0.
1.3	0.9032	0.9049	0.
1.4	0.9192	0.9207	0.
1.5	0.9332	0.9345	0.
1.6	0.9452	0.9463	0.
1.7	0.9554	0.9564	0.
1.8	0.9641	0.9649	0.
1.9	0.9713	0.9719	0.
2.0	0.9772	0.9778	0.
2.1	0.9821	0.9826	0.
2.2	0.9861	0.9864	0.
2.3	0.9893	0.9896	0.
2.4	0.9918	0.9920	0.
2.5	0.9938	0.9940	0.
2.6	0.9953	0.9955	0.
2.7	0.99653	0.99664	0.9
2.8	0.99744	0.99752	0.9
2.9	0.99813	0.99819	0.9
3.0	0.99865	0.99869	0.9

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.81 \cdot \sqrt{\frac{0.46 \cdot 0.54}{250}} \simeq 0.0886$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.46 - 0.0886,\quad 0.46 + 0.0886\right) = \left(0.3714,\ 0.5486\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 99.5 % tenemos $z_{\alpha/2} =$ **2.81**

$$Error = 0.05 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 0.05 \Rightarrow 2.81 \cdot \sqrt{\frac{0.46 \cdot 0.54}{n}} = 0.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{0.46 \cdot 0.54}{n}} = \frac{0.05}{2.81} \Rightarrow \frac{0.46 \cdot 0.54}{n} = \left(\frac{0.05}{2.81}\right)^2 \Rightarrow n = \frac{0.46 \cdot 0.54}{\left(\frac{0.05}{2.81}\right)^2} = 784.56$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 785 individuos.

EJERCICIO 8

Sea X una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media poblacional desconocida y desviación típica 4.

a) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la desviación típica de la distribución de las medias de las muestras de tamaño 12 de la variable aleatoria X?

b) **(1 punto)** Para estimar la media poblacional de la variable X. se toma una muestra aleatoria de tamaño 12, obteniéndose los siguientes resultados:

11.8 10 9.8 12 9.7 10.8 9.6 11.3 10.4 12.2 9.1 10.5

Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

c) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra, para que, con el mismo nivel de confianza, el error cometido al estimar la media poblacional sea menor que 1.2.

a) X = N(μ, 4).

n = 12 → $\overline{X_{12}}$ es una distribución normal de la misma media que X y de desviación típica

$$\sigma = \frac{4}{\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \ \overline{X_{12}} = N\left(\mu, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

b) La media de la muestra es:

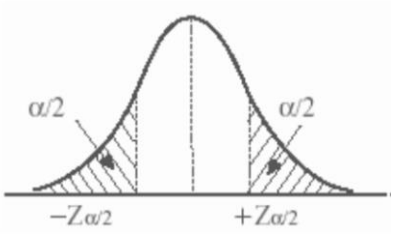
$$\bar{x} = \frac{11.8+10+9.8+12+9.7+10.8+9.6+11.3+10.4+12.2+9.1+10.5}{12} = 10.6$$

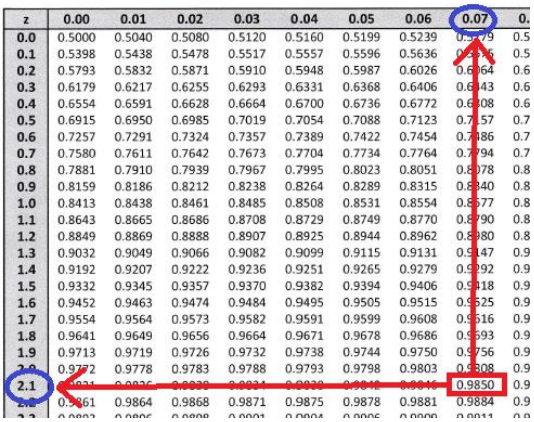
Con un nivel de confianza del 97 % determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow$

$\rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow$

$\rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$





z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{12}} \simeq 2.5$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(10.6 - 2.5, \ \ 10.6 + 2.5\right) = \left(8.1, 13.1\right)$$

c) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos $z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$.

$$Error = 1.2 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.2 \Rightarrow 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} = 1.2 \Rightarrow \frac{1.2}{2.17} = \frac{4}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{4 \cdot 2.17}{1.2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{4 \cdot 2.17}{1.2}\right)^2 \simeq 52.32$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 53 elementos.

PevAU 2021 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2020-2021	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones: **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.

c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.

d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una empresa de recambios industriales produce dos tipos de baterías, A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total y el número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A. Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6000 euros a la semana para el coste total de producción.

Si la empresa vende todo lo que produce y cada batería de tipo A genera un beneficio de 130 euros y la de tipo B de 140 euros, ¿cuántas baterías de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

EJERCICIO 2

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con m un parámetro real.

a) **(0.7 puntos)** ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz inversa de A?

b) **(1.8 puntos)** Para $m = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - A^2 = I_3$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

a) **(1 punto)** Estudie su monotonía y calcule sus extremos.

b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente la función.

c) **(0.5 puntos)** Calcule $\int f(x)dx$.

d) **(0.5 puntos)** Calcule el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4

a) **(1 punto)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \qquad g(x)=x^3\cdot e^{2x^2}$$

b) **(0.7 puntos)** Represente gráficamente la parábola $h(x)=x^2+x+1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

c) **(0.8 puntos)** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x)=x^2+x+1$, el eje de abscisas y las rectas $x=-\frac{1}{2}$ y $x=0$.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Se desea probar la eficacia de dos tipos de vacunas, A y B, contra un virus determinado. Para ello, se seleccionan 5000 voluntarios sin anticuerpos para este virus, a los que se les administra una de las vacunas o un placebo, resultando que 3000 reciben la vacuna A, 1500 la B y el resto el placebo. Se comprueba que el 90 % de los vacunados con la A y el 95 % de los vacunados con la B, generan anticuerpos, no generando anticuerpos los que han recibido el placebo. Se selecciona uno de esos voluntarios al azar.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que haya generado anticuerpos?

b) **(1 punto)** Si dicho voluntario no ha generado anticuerpos, ¿qué probabilidad hay de que se le haya administrado placebo?

EJERCICIO 6

De las compras realizadas en el último período de rebajas del pasado año, el 55 % se dedicaron a productos electrónicos, el 72 % se hicieron a través de Internet y, de las compras que se hicieron por Internet, el 64 % fueron de productos electrónicos. Se elige una compra al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que haya sido de productos electrónicos y se haya realizado por Internet.

b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que la compra se haya realizado por Internet o que se hayan comprado productos electrónicos.

c) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sabiendo que no se compraron productos electrónicos, la compra no se hiciera a través de Internet.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.5 puntos)** En una Escuela Politécnica hay matriculados en el último curso 60 estudiantes de Ingeniería Eléctrica, 40 de Ingeniería Informáticas, 30 de Ingeniería Civil, 50 de Ingeniería Mecánica y 20 de Ingeniería Aeronáutica. Se quiere hacer una encuesta al 20 % de estos estudiantes, de manera proporcional al número de matriculados en cada titulación.

1. ¿Qué tipo de muestreo se debe emplear?
2. ¿Cuántos alumnos debe haber en la muestra y cuántos de cada titulación?

b) **(1 punto)** Dada la población {a, 10, 12, 11, 18}, ¿cuánto debe valer *a*, sabiendo que la media de las medias muestrales de tamaño 3, obtenidas mediante muestreo aleatorio simple, es 13.2?

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de individuos mayores de edad de una localidad que están en contra de la construcción de una central nuclear en su término municipal. Para ello, se pregunta a 100 individuos mayores de edad de esa localidad, elegidos de forma aleatoria, resultando que 45 de ellos rechazan la construcción de la central.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 92 % para estimar la proporción real de individuos de esa localidad que están en contra de la construcción de la central.

b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar, para que al estimar la proporción de individuos de esa localidad que rechazan la construcción de la central, el error cometido sea inferior al 5 %.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una empresa de recambios industriales produce dos tipos de baterías, A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total y el número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A. Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6000 euros a la semana para el coste total de producción.
Si la empresa vende todo lo que produce y cada batería de tipo A genera un beneficio de 130 euros y la de tipo B de 140 euros, ¿cuántas baterías de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

Llamamos x = número de baterías de tipo A, y = número de baterías de tipo B.

La función a maximizar es el beneficio que viene dado como $f(x,y)=130x+140y$

Las restricciones son:

"*Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total*" → $x+y\geq 10$

"*El número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A*" → $y\leq x+10$

"*Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6000 euros a la semana para el coste total de producción*" → $150x+100y\leq 6000$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 10 \\ y\leq x+10 \\ 150x+100y\leq 6000 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\geq 10 \\ y-x\leq 10 \\ 3x+2y\leq 120 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=10$

x	$y=10-x$
0	10
10	0

$y-x=10$

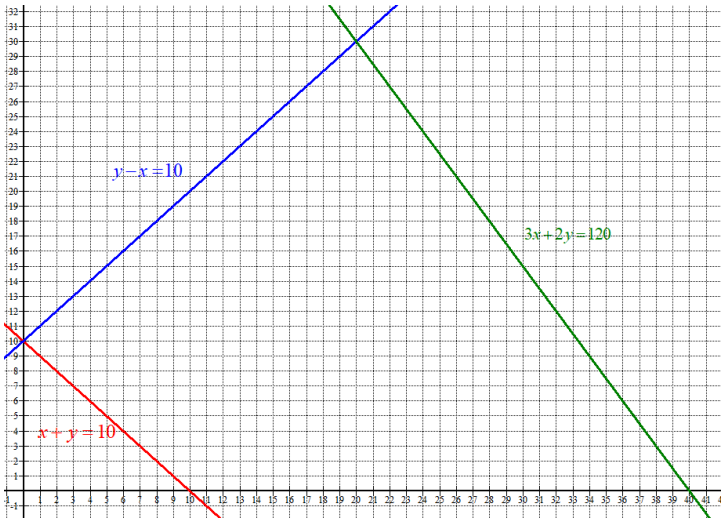
x	$10+x$
0	10
10	20

$3x+2y=120$

x	$y=\frac{120-3x}{2}$
0	60
40	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

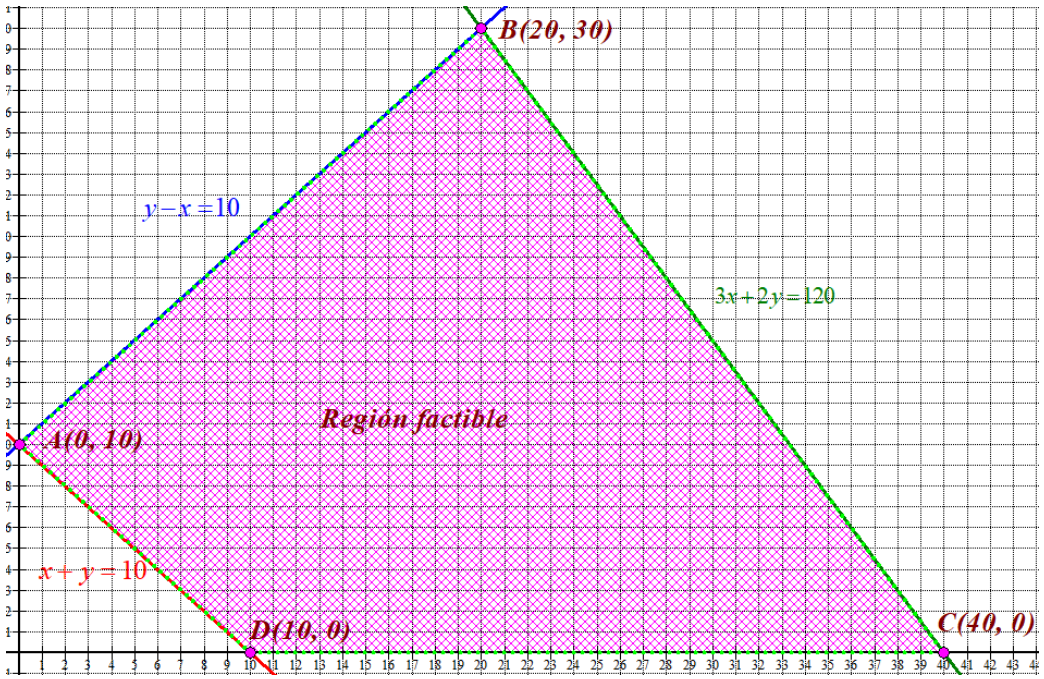
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\geq 10 \\ y-x\leq 10 \\ 3x+2y\leq 120 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es una región del primer cuadrante que está por encima de la recta roja y por debajo de la azul y la verde.
Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10+10\geq 10 \\ 10-10\leq 10 \\ 30+20\leq 120 \\ 10\geq 0;10\geq 0 \end{array}\right\}$$ ¡Se cumplen todas!

Coloreamos la región factible de rosa en el siguiente dibujo.



Para obtener el valor máximo del beneficio valoramos la función objetivo $f(x,y)=130x+140y$ en cada vértice.

A(0, 10) → $f(0,10)=1400$

B(20, 30) → $f(20,30)=2600+4200=6800$

C(40, 0) → $f(40,0)=5200$

D(10, 0) → $f(10,0)=1300$

El beneficio máximo es 6800 € que se consigue en el vértice B(20, 30).
Con la producción de 20 baterías de tipo A y 30 de tipo B se consigue el beneficio máximo de 6800 €.

EJERCICIO 2

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & m\\ 0 & 2 & -3\\ m & 1 & 1\end{pmatrix}$, con *m* un parámetro real.

a) **(0.7 puntos)** ¿Para qué valores del parámetro *m* existe la matriz inversa de A?

b) **(1.8 puntos)** Para *m = 2*, resuelva la ecuación matricial $X\cdot A-A^2=I_3$

a) Para que la matriz A tenga inversa debe tener determinante no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & m\\ 0 & 2 & -3\\ m & 1 & 1\end{vmatrix}=2+3m-2m^2+3=-2m^2+3m+5$$

$$|A|=0\Rightarrow -2m^2+3m+5=0\Rightarrow m=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-2)5}}{-4}=\frac{-3\pm 7}{-4}=\begin{cases}\frac{-3-7}{-4}=2.5=m\\ \frac{-3+7}{-4}=-1=m\end{cases}$$

El determinante se anula para *m = 2.5* y para *m = –1*.
La matriz inversa de A existe cuando $m\neq -1\ y\ m\neq 2.5$

b) Para *m = 2* existe la inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. La calculo.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}\ \ y\ \ |A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=2+6-8+3=3\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 2\\ -3 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ -6 & -3 & 3\\ -4 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/3 & 1 & -1/3\\ -2 & -1 & 1\\ -4/3 & -1 & 2/3\end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial $X\cdot A-A^2=I_3$.

$$X\cdot A-A^2=I_3\Rightarrow X\cdot A=A^2+I_3\Rightarrow X=\left(A^2+I_3\right)A^{-1}=A^2\cdot A^{-1}+I_3\cdot A^{-1}$$

$$X=A\cdot A\cdot A^{-1}+A^{-1}=A\cdot I_3+A^{-1}=A+A^{-1}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & -1/3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=x^3-4x^2+4x$

a) **(1 punto)** Estudie su monotonía y calcule sus extremos.

b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente la función.

c) **(0.5 puntos)** Calcule $\int f(x)dx$.

d) **(0.5 puntos)** Calcule el área del recinto acotado limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.

a) Buscamos sus puntos críticos utilizando la derivada.

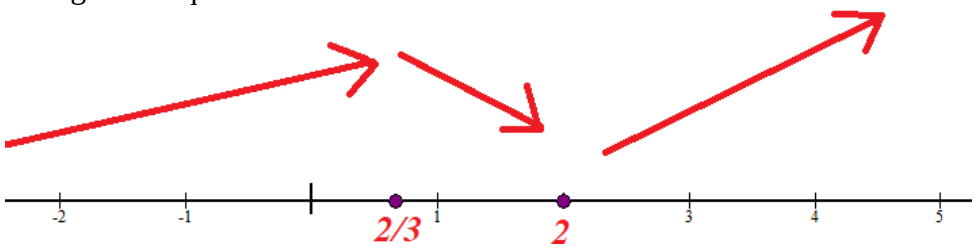
$$f(x)=x^3-4x^2+4x \Rightarrow f\,'(x)=3x^2-8x+4$$

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-8x+4=0 \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4(3)(4)}}{6}=\frac{8\pm 4}{6}=\begin{cases}\frac{8-4}{6}=\frac{2}{3}\\ \frac{8+4}{6}=2\end{cases}$$

Vemos como es la función antes, entre y después de estos dos valores.

- En $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f\,'(0)=4>0$. La función crece en $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$
- En $\left(\frac{2}{3},2\right)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f\,'(1)=3-8+4=-1<0$. La función decrece en $\left(\frac{2}{3},2\right)$
- En $(2,+\infty)$ tomamos *x = 10* y la derivada vale $f\,'(10)=300-80+4=224>0$. La función crece en $(2,+\infty)$

La función sigue el esquema:



La función crece en $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $\left(\frac{2}{3},2\right)$.

La función tiene un máximo relativo en *x = 2/3*.

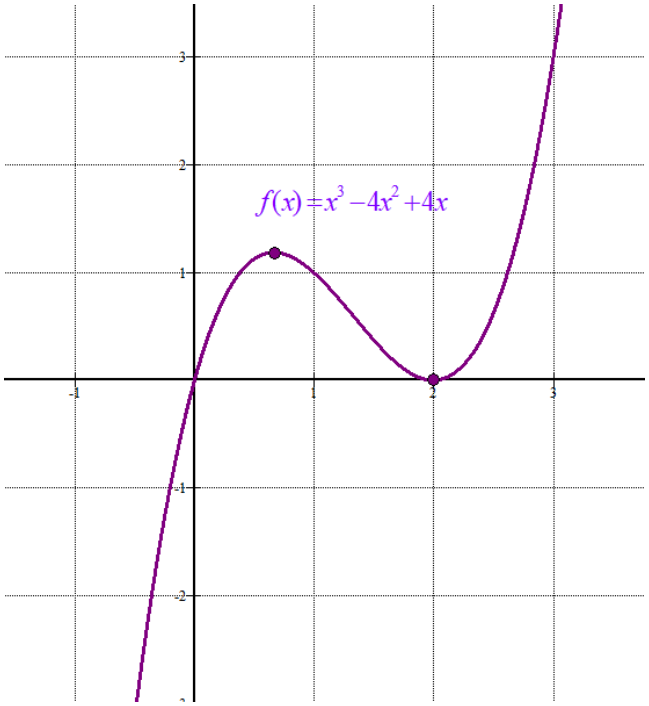
Como $f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-4\left(\frac{2}{3}\right)^2+4\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{27}$ el punto máximo relativo tiene coordenadas $\left(\frac{2}{3},\frac{32}{27}\right)$

La función tiene un mínimo relativo en *x = 2*.

Como $f(2)=2^3-4\cdot 2^2+8=0$ el punto mínimo relativo tiene coordenadas $(2,0)$

b) Obtenemos una tabla de valores para completar la gráfica de *f(x)*.

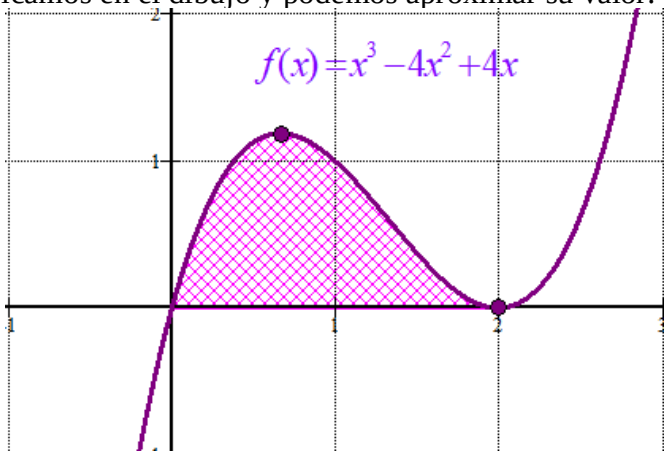
x	$y = x^3 - 4x^2 + 4x$
–1	–9
0	0
2 / 3	32 / 27
1	1
2	0
3	3
4	16



c) Calculamos la integral pedida.

$$\int f(x)dx = \int x^3 - 4x^2 + 4xdx = \boxed{\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + K}$$

d) El área pedida la ubicamos en el dibujo y podemos aproximar su valor.



Su área es un poco más de una unidad cuadrada. La calculamos con más precisión calculando la integral definida de la función entre 0 y 2.

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 x^3 - 4x^2 + 4xdx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 =$$

$$= \left[\frac{2^4}{4} - \frac{4}{3}2^3 + 2\cdot 2^2\right] - \left[\frac{0^4}{4} - \frac{4}{3}0^3 + 2\cdot 0^2\right] = 4 - \frac{32}{3} + 8 = \boxed{\frac{4}{3}u^2}$$

EJERCICIO 4

a) **(1 punto)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \qquad g(x)=x^3\cdot e^{2x^2}$$

b) **(0.7 puntos)** Represente gráficamente la parábola $h(x)=x^2+x+1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

c) **(0.8 puntos)** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x)=x^2+x+1$, el eje de abscisas y las rectas $x=-\frac{1}{2}$ y $x=0$.

a) Utilizamos las propiedades del logaritmo para simplificar la función antes de derivar.

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\ln(x-1)-\ln(x+1)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\boxed{\frac{2}{x^2-1}}$$

Utilizamos la regla de derivación del producto de dos funciones.

$$g(x)=x^3\cdot e^{2x^2}\Rightarrow g'(x)=3x^2\cdot e^{2x^2}+x^3\cdot e^{2x^2}\cdot 4x=\boxed{e^{2x^2}\left(3x^2+4x^4\right)}$$

b) Para obtener el vértice de la parábola derivamos la función y buscamos cuando se anula la derivada.

$$h(x)=x^2+x+1\Rightarrow h'(x)=2x+1$$

$$h'(x)=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{2}}$$

Para $x=-\frac{1}{2}$ la función vale $h\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$

El vértice tiene coordenadas $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$

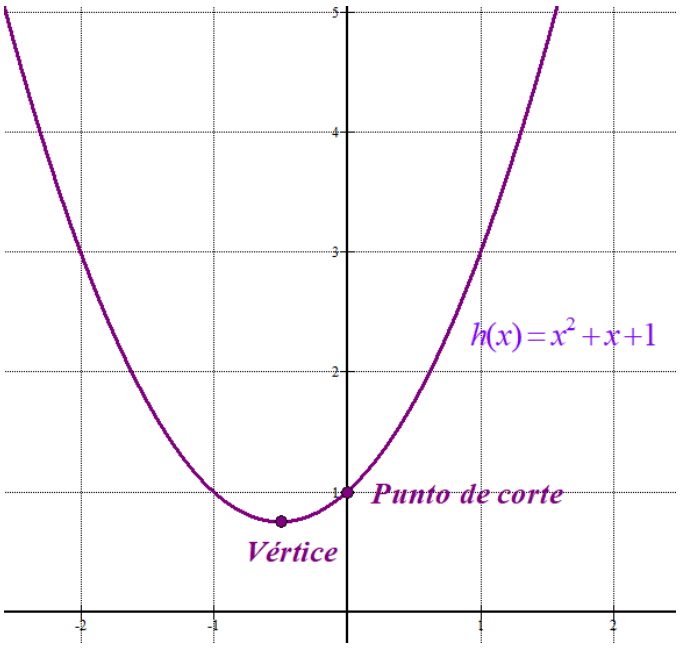
Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$x = 0 \rightarrow h(0)=0^2+0+1=1 \rightarrow$ El punto de corte con el eje OY es (0,1).

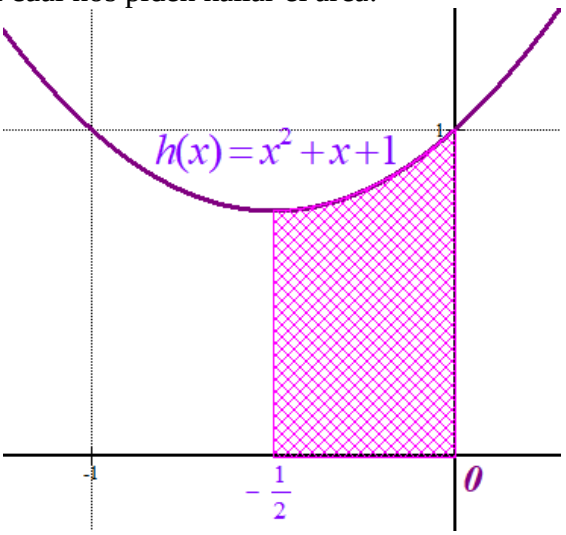
$y = 0 \rightarrow 0=x^2+x+1\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=$ No existe . No hay punto de corte con eje OX.

Hacemos una tabla de valores y representamos la función.

x	$y=x^2+x+1$
–2	3
–1	1
–0.5	0.75
0	1
1	3



c) Dibujamos la región de la cual nos piden hallar el área.



Este recinto ocupa menos de un cuadradito del dibujo, su área vale menos de una unidad cuadrada. Determinamos su valor exacto calculando la integral definida de la función entre $x=-\frac{1}{2}$ y $x=0$.

$$Área=\int_{-1/2}^{0} x^2+x+1dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1/2}^{0}=\left[\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}+0\right]-\left[\frac{(-0.5)^3}{3}+\frac{(-0.5)^2}{2}-0.5\right]=$$

$$=\frac{1}{24}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{1-3+12}{24}=\boxed{\frac{5}{12}u^2}$$

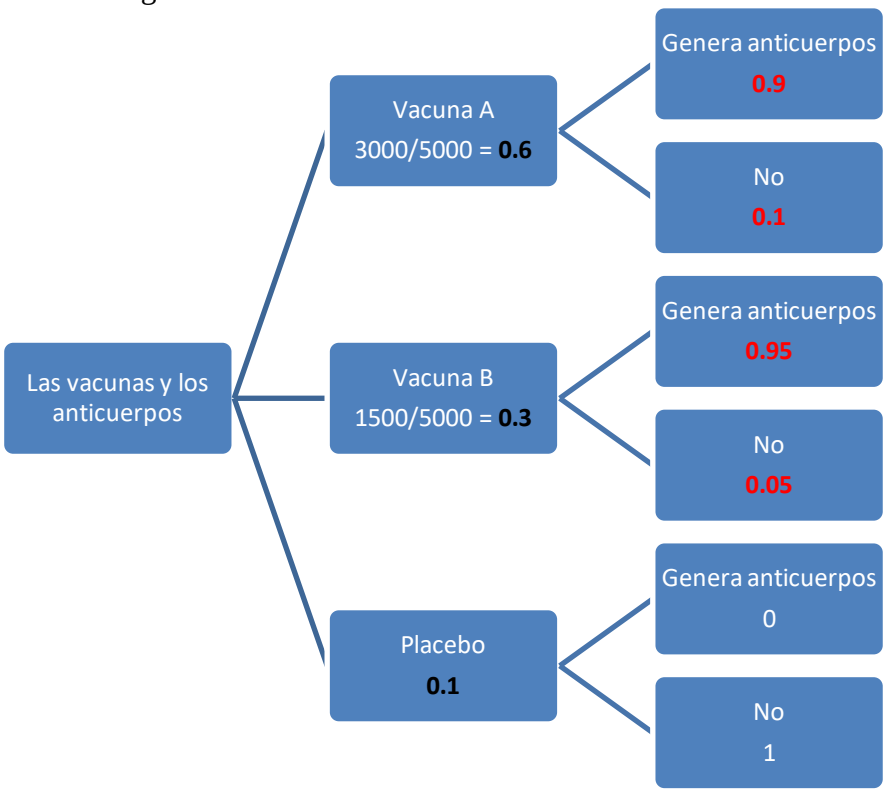
EJERCICIO 5

Se desea probar la eficacia de dos tipos de vacunas, A y B, contra un virus determinado. Para ello, se seleccionan 5000 voluntarios sin anticuerpos para este virus, a los que se les administra una de las vacunas o un placebo, resultando que 3000 reciben la vacuna A, 1500 la B y el resto el placebo. Se comprueba que el 90 % de los vacunados con la A y el 95 % de los vacunados con la B, generan anticuerpos, no generando anticuerpos los que han recibido el placebo. Se selecciona uno de esos voluntarios al azar.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que haya generado anticuerpos?

b) **(1 punto)** Si dicho voluntario no ha generado anticuerpos, ¿qué probabilidad hay de que se le haya administrado placebo?

Realizamos un diagrama de árbol.



Demos nombre abreviado a los sucesos que vamos a utilizar.

Llamemos G = "Generar anticuerpos", por lo que $\overline{G}$ = "No generar anticuerpos"

A = "Ponerse la vacuna A", B = "Ponerse la vacuna B", C = "Ponerse el placebo"

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G)=P(A\cap G)+P(B\cap G)+P(C\cap G)=$$
$$=P(A)P(G/A)+P(B)P(G/B)+P(C)P(G/C)=$$
$$=0.6\cdot 0.9+0.3\cdot 0.95+0.1\cdot 0=\boxed{\frac{33}{40}=0.825}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/\overline{G})=\frac{P(C\cap\overline{G})}{P(\overline{G})}=\frac{P(C)P(\overline{G}/C)}{1-P(G)}=\frac{0.1\cdot 1}{1-0.825}=\boxed{\frac{4}{7}\simeq 0.57}$$

EJERCICIO 6

De las compras realizadas en el último período de rebajas del pasado año, el 55 % se dedicaron a productos electrónicos, el 72 % se hicieron a través de Internet y, de las compras que se hicieron por Internet, el 64 % fueron de productos electrónicos. Se elige una compra al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que haya sido de productos electrónicos y se haya realizado por Internet.

b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que la compra se haya realizado por Internet o que se hayan comprado productos electrónicos.

c) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sabiendo que no se compraron productos electrónicos, la compra no se hiciera a través de Internet.

Si el 64 % de las compras que se hicieron por Internet fueron de productos electrónicos (72 % del total) entonces $0.64 \cdot 0.72 = 0.4608$, es decir, estas compras representan el 46.08 % del total.

Hacemos una tabla de contingencia para obtener el resto de porcentajes y poder calcular la probabilidad que nos pidan.

	Productos electrónicos	Otros productos	
Por Internet	**46.08**		**72**
En tienda			
	55		**100**

Terminamos de completar la tabla.

	Productos electrónicos	Otros productos	
Por Internet	**46.08**	**25.92**	**72**
En tienda	**8.92**	**19.08**	**28**
	55	**45**	**100**

a) Utilizamos los datos de la tabla y aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Producto electrónico comprado por Internet}) = \frac{46.08}{100} = \boxed{0.4608}$$

b) Utilizamos los datos de la tabla y aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Se haga la compra por Internet o se hayan comprado productos electrónicos}) =$$

$$= \frac{46.08 + 25.92 + 8.92}{100} = \frac{80.92}{100} = \boxed{0.8092}$$

c) Utilizamos los datos de la columna "Otros productos" y aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{No se hiciera la compra por Internet, sabiendo que no se compraron productos electrónicos}) =$$

$$= P(\text{Se hiciera la compra en tienda, sabiendo que se compraron otros productos}) =$$

$$= \frac{19.08}{45} = \boxed{= \frac{53}{125} = 0.424}$$

EJERCICIO 7

a) **(1.5 puntos)** En una Escuela Politécnica hay matriculados en el último curso 60 estudiantes de Ingeniería Eléctrica, 40 de Ingeniería Informáticas, 30 de Ingeniería Civil, 50 de Ingeniería Mecánica y 20 de Ingeniería Aeronáutica. Se quiere hacer una encuesta al 20 % de estos estudiantes, de manera proporcional al número de matriculados en cada titulación.

1. ¿Qué tipo de muestreo se debe emplear?
2. ¿Cuántos alumnos debe haber en la muestra y cuántos de cada titulación?

b) **(1 punto)** Dada la población {a, 10, 12, 11, 18}, ¿cuánto debe valer *a*, sabiendo que la media de las medias muestrales de tamaño 3, obtenidas mediante muestreo aleatorio simple, es 13.2?

a)

1. Se debe emplear muestreo aleatorio estratificado. Consiste en elegir por igual en cada grupo de la población a muestrear, un 20 % de cada grupo de estudiantes que hemos considerado.

2. El número total de estudiantes es 60 + 40 + 30 + 50 + 20 = 200. Debemos tomar una muestra del 20 % de los 200 estudiantes, es decir $\frac{20 \cdot 200}{100} = 40$ estudiantes.

   Tomamos $0.2 \cdot 60 = 12$ estudiantes de Ingeniería Eléctrica, $0.2 \cdot 40 = 8$ de Ingeniería Informáticas, $0.2 \cdot 30 = 6$ de Ingeniería Civil, $0.2 \cdot 50 = 10$ de Ingeniería Mecánica y $0.2 \cdot 20 = 4$ de Ingeniería Aeronáutica.

b) La media de los elementos de la población tiene el mismo valor que la media de las medias muestrales de tamaño 3.

$$\frac{a+10+12+11+18}{5} = 13.2 \Rightarrow a + 51 = 66 \Rightarrow \boxed{a = 15}$$

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de individuos mayores de edad de una localidad que están en contra de la construcción de una central nuclear en su término municipal. Para ello, se pregunta a 100 individuos mayores de edad de esa localidad, elegidos de forma aleatoria, resultando que 45 de ellos rechazan la construcción de la central.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 92 % para estimar la proporción real de individuos de esa localidad que están en contra de la construcción de la central.

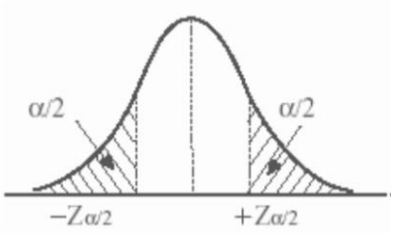
b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar, para que al estimar la proporción de individuos de esa localidad que rechazan la construcción de la central, el error cometido sea inferior al 5 %.

n = 100. $pr = \frac{45}{100} = 0.45$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.45 = 0.55$

a) Con un nivel de confianza del 92 % obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \propto = 0{,}92 \rightarrow \propto = 0{,}08 \rightarrow \propto/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} =$ **1.75**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{100}} = 0.087$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.45 - 0.087,\ \ 0.45 + 0.087) = (0.363,\ 0.537)$$

b) Con un nivel de confianza del 92% tenemos $z_{\alpha/2} =$ **1,75**

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{n}} = 0.05 \Rightarrow \frac{0.05}{1.75} = \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{n}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{0.05}{1.75}\right)^2 = \frac{0.2475}{n} \Rightarrow n = \frac{0.2475}{\left(\frac{0.05}{1.75}\right)^2} = 303.1875$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 304 individuos.

PevAU 2020 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2019-2020	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según el tipo de habitación individual, doble y triple. La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros. El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples, el segundo dos individuales, doce dobles y cinco triples y el tercer instituto una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) **(1 punto)** Exprese, mediante una matriz A, los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.
b) **(1 punto)** Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?
c) **(0,5 puntos)** ¿Existe la inversa de la matriz D? ¿Y de la matriz A? Justifique las respuestas.

EJERCICIO 2

a) **(1,75 puntos)** Represente la región factible definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices.

$$x+2y\le 13 \qquad x-y\le 4 \qquad x-2y\ge -7 \qquad x+y\ge 5$$

b) **(0,75 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x,y)=x+y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}2+\dfrac{a}{x-1} & si \quad x<0\\ a+be^{x} & si \quad x\ge 0\end{cases}$

a) **(1,25 puntos)** Calcule los valores a y b para que la función sea continua y derivable en su dominio.
b) **(0,75 puntos)** Para $a=2$ y $b=-2$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos.

c) **(0,5 puntos)** Para $a = 2$ y $b = -2$, determine las ecuaciones de las asíntotas de *f*, si existen.

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x+2 & si \quad x \le 2 \\ -x^2+6x-8 & si \quad 2 < x < 4 \\ \dfrac{x-3}{x} & si \quad x \ge 4 \end{cases}$

a) **(1,25 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de *f* en su dominio.

b) **(0,75 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*.

c) **(0,5 puntos)** Calcule $\int_2^3 f(x)dx$

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una urna contiene 6 bolas rojas y 4 azules. Se extrae una bola al azar y se reemplaza por seis bolas del otro color. A continuación, se vuelve a extraer una segunda bola de la urna.

a) **(1,5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

b) **(1 punto)** Si sabemos que la segunda bola extraída es azul, ¿cuál es la probabilidad de que también lo haya sido la primera?

EJERCICIO 6

Una empresa fabrica dos tipos de bombillas: una LED y otra halógena. Se sabe que un 5% de las LED y un 2% de las halógenas salen defectuosas. Se elige al azar una bombilla de una caja que contiene 40 bombillas LED y 10 halógenas.

a) **(1,5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida no sea defectuosa.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida sea LED, sabiendo que es defectuosa.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1 punto)** Una población de 25000 personas se ha dividido en cuatro estratos con tamaños 15000, 5000, 3000 y 2000 personas respectivamente. En esa población se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, en el que se han elegido al azar 36 personas del tercer estrato. Determine el tamaño de la muestra total obtenida con este muestreo y su composición.

b) **(1,5 puntos)** Dada la población *P = (2, 4, 6)*, construya todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y halle la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas esas muestras.

EJERCICIO 8

Se ha tomado una muestra de 16 pacientes tratados por un especialista y se ha observado que el tiempo de espera en su consulta, en minutos, ha sido de:

8 9,2 10 8,5 12 9 11,3 7 8,5 8,3 7,6 9 9,4 10,5 8,9 6,8

Supongamos que el tiempo de espera en esta consulta se distribuye según una ley Normal de varianza 4 y media desconocida.

a) **(1,5 puntos)** Halle un intervalo de confianza al 97,5% para estimar el tiempo medio de espera de los pacientes tratados por este especialista.

b) **(1 punto)** ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para asegurar, con un nivel de confianza del 90%, que el error cometido sea, a lo sumo, de 0,3 minutos.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según el tipo de habitación individual, doble y triple.

La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros.

El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples, el segundo dos individuales, doce dobles y cinco triples y el tercer instituto una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) **(1 punto)** Exprese, mediante una matriz A, los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.

b) **(1 punto)** Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?

c) **(0,5 puntos)** ¿Existe la inversa de la matriz D? ¿Y de la matriz A? Justifique las respuestas.

a) En cada fila aparece los precios de cada agencia (individual doble triple)

$$\begin{matrix} \textit{individuales} & \textit{dobles} & \textit{triples} \\ \searrow & \downarrow & \swarrow \end{matrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix}\begin{matrix} \rightarrow \text{Agencia 1} \\ \rightarrow \text{Agencia 2} \end{matrix}$$

En cada columna aparece la demanda de cada centro:

$$\begin{matrix} \textit{centro1} & \textit{centro2} & \textit{centro3} \\ \searrow & \downarrow & \swarrow \end{matrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} \rightarrow \text{nº habitaciones individuales} \\ \rightarrow \text{nº habitaciones dobles} \\ \rightarrow \text{nº habitaciones triples} \end{matrix}$$

b) Calculamos A · D.

$$A\cdot D=\begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot D=\begin{pmatrix} 65\cdot 3+85\cdot 15+104\cdot 2 & 65\cdot 2+85\cdot 12+104\cdot 5 & 65\cdot 1+85\cdot 16+104\cdot 7 \\ 78\cdot 3+83\cdot 15+106\cdot 2 & 78\cdot 2+83\cdot 12+106\cdot 5 & 78\cdot 1+83\cdot 16+106\cdot 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \textit{centro1} & \textit{centro2} & \textit{centro3} \\ \downarrow & \downarrow & \swarrow \end{matrix}$$

$$A\cdot D=\begin{pmatrix} 1678 & 1670 & 2153 \\ 1691 & 1682 & 2148 \end{pmatrix}\begin{matrix} \rightarrow \text{Agencia 1} \\ \rightarrow \text{Agencia 2} \end{matrix}$$

En cada fila aparece el precio total de la cada agencia para el instituto 1, 2 y 3.

En cada columna aparece el precio total para cada centro de la agencia primera y segunda.
Al primer instituto le interesa la primera agencia (1678 € < 1691 €)
Al segundo instituto le interesa la primera agencia (1670 € < 1682 €)
Al tercer instituto le interesa la segunda agencia (2148 € < 2153 €)

c) La matriz A no es cuadrada y no existe inversa.
La matriz D es cuadrada y puede existir su inversa si su determinante es no nulo.

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 252 + 64 + 75 - 24 - 210 - 240 = -83 \neq 0 .$$

Existe la inversa de la matriz D.

EJERCICIO 2

a) **(1,75 puntos)** Represente la región factible definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices.

$$x+2y\le 13 \qquad x-y\le 4 \qquad x-2y\ge -7 \qquad x+y\ge 5$$

b) **(0,75 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x,y)=x+y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+2y=13$

x	$y=\dfrac{13-x}{2}$
1	6
11	1

$x-y=4$

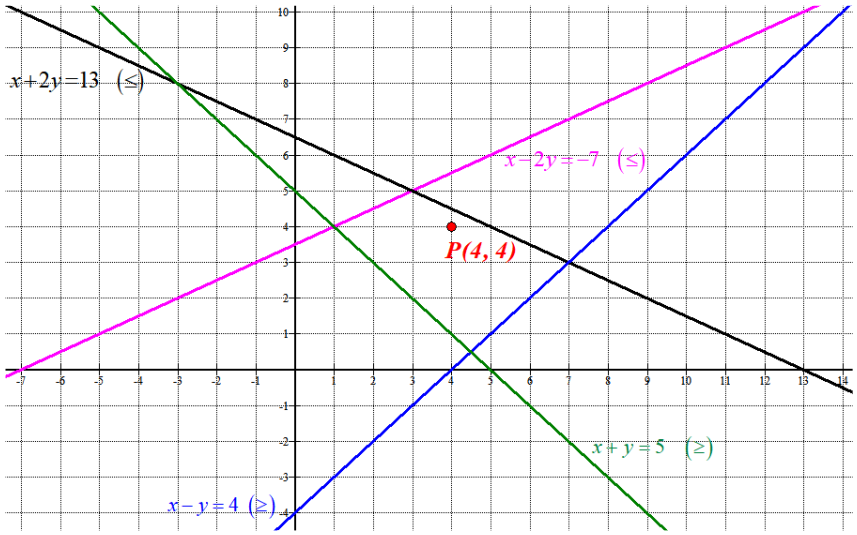
x	$y=x-4$
4	0
0	–4

$x-2y=-7$

x	$y=\dfrac{x+7}{2}$
1	4
3	5

$x+y=5$

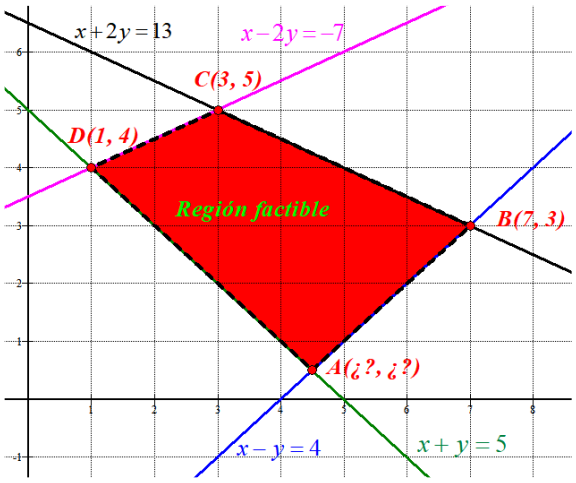
x	$y=5-x$
0	5
5	0



Comprobamos si el punto P(4, 4) cumple las restricciones del problema:

$$¿4+2\cdot 4\le 13 \qquad 4-4\le 4 \qquad 4-2\cdot 4\ge -7 \qquad 4+4\ge 5?$$
$$¿12\le 13 \qquad 0\le 4 \qquad -4\ge -7 \qquad 8\ge 5?$$

Se cumplen todas las restricciones por lo que la región factible es la región del plano en la que se sitúa el punto P y delimitada por las rectas de colores. La coloreamos de rojo en el dibujo siguiente.



Los vértices los determinamos a la vista de la cuadricula y las intersecciones de las rectas.
Solo falta el vértice A que determinamos resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{matrix} x-y=4 \\ x+y=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y=4 \\ x+y=5 \end{matrix}\right\}$$

$$\overline{2x \qquad = 9} \Rightarrow x=\frac{9}{2}=4.5 \Rightarrow 4.5-y=4 \Rightarrow y=0.5$$

El vértice A tiene coordenadas A(4.5, 0.5).
El resto de vértices tienen coordenadas B(7,3), C(3, 5) y D(1, 4)

b) Valoramos la función objetivo en cada uno de los vértices.

A(4.5, 0.5) → $F(4.5,0.5)=4.5+0.5=5$ ¡Mínimo!
B(7,3) → $F(7,3)=7+3=10$ ¡Máximo!
C(3, 5) → $F(3,5)=3+5=8$
D(1, 4) → $F(1,4)=1+4=5$ ¡Mínimo!

El máximo valor de la función es 10 y se alcanza en el vértice B(7, 3).
El valor mínimo es 5 y se alcanza en los vértices A y D. Por lo que el valor mínimo se alcanza en todos los puntos del segmento AD: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), etc.

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}2+\dfrac{a}{x-1} & si \quad x<0\\ a+be^x & si \quad x\geq 0\end{cases}$

a) **(1,25 puntos)** Calcule los valores *a* y *b* para que la función sea continua y derivable en su dominio.

b) **(0,75 puntos)** Para $a=2$ y $b=-2$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos.

c) **(0,5 puntos)** Para $a=2$ y $b=-2$, determine las ecuaciones de las asíntotas de *f*, si existen.

a) Debe ser continúa en $x = 0$, para ello deben coincidir el valor de la función y los limites laterales en dicho punto.

- $f(0)=a+be^0=a+b$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2+\dfrac{a}{x-1}=2+\dfrac{a}{-1}=2-a\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} a+be^x=a+b\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=2-a\Rightarrow b=2-2a$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=2-a$

La función es continua si $b = 2 – 2a$.

Nuestra función queda $f(x)=\begin{cases}2+\dfrac{a}{x-1} & si \quad x<0\\ a+(2-2a)e^x & si \quad x\geq 0\end{cases}$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ y la derivada de la función es:

$$f(x)=\begin{cases}2+\dfrac{a}{x-1} & si \quad x<0\\ a+(2-2a)e^x & si \quad x\geq 0\end{cases}\Rightarrow f\,'(x)=\begin{cases}-\dfrac{a}{(x-1)^2} & si \quad x<0\\ (2-2a)e^x & si \quad x>0\end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = 0$ deben de coincidir sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l}f\,'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f\,'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-\dfrac{a}{(x-1)^2}=\dfrac{-a}{1}=-a\\ f\,'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^-} f\,'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2-2a)e^x=(2-2a)e^0=2-2a\\ f\,'(0^-)=f\,'(0^+)\end{array}\right\}\Rightarrow 2-2a=-a\Rightarrow \boxed{2=a}$$

Y sustituyendo tenemos que b = 2 – 4 = –2.

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = –2$.

b) La función es $f(x)=\begin{cases}2+\dfrac{2}{x-1} & si \quad x<0\\ 2-2e^x & si \quad x\geq 0\end{cases}$ y la derivada $f\,'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{(x-1)^2} & si \quad x<0\\ -2e^x & si \quad x\geq 0\end{cases}$

- En $(-\infty,0)$ la derivada es $f\,'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2}<0$. Por lo que siempre decrece.
- En $(0,+\infty)$ la derivada es $f\,'(x)=-2e^x<0$, pues la exponencial es siempre positiva, luego la función decrece en toda la semirrecta.

Conclusión: La función decrece en todo su dominio $\mathbb{R}$ y no presenta extremos.

c) La función tiene la expresión $f(x)=\begin{cases}2+\dfrac{2}{x-1} & si \quad x<0\\ 2-2e^x & si \quad x\geq 0\end{cases}$.

Asíntota vertical. $x=a$

El dominio es todo $\mathbb{R}$ y no presenta asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2+\frac{2}{x-1}=2+\frac{2}{+\infty}=2+0=2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2-2e^x=2-2e^{+\infty}=2-\infty=-\infty$$

La asíntota horizontal en $-\infty$ es $y=2$

No tiene asíntota horizontal en $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

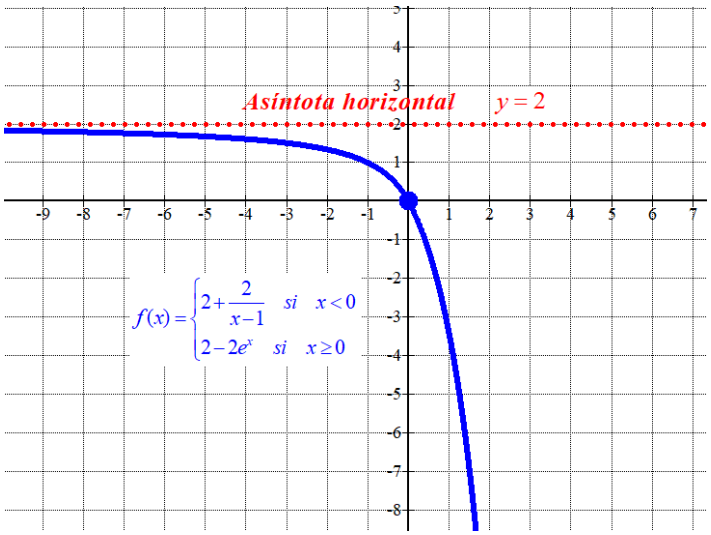
Veamos si tiene asíntota oblicua en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-2e^x}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2e^x}{1}=-\infty$$

No tiene asíntota oblicua en $+\infty$.

No tiene asíntota oblicua en $-\infty$ pues tiene asíntota horizontal.

Conclusión: La función no tiene asíntota vertical, tiene a la recta $y=2$ como asíntota horizontal en $-\infty$ y no tiene asíntota oblicua.



EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}-x+2 & si \quad x\le 2\\ -x^2+6x-8 & si \quad 2<x<4\\ \dfrac{x-3}{x} & si \quad x\ge 4\end{cases}$

a) **(1,25 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de *f* en su dominio.
b) **(0,75 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*.
c) **(0,5 puntos)** Calcule $\int_2^3 f(x)dx$

a) La función es continua en $(-\infty,2)$ pues es un polinomio. Al igual que en (2, 4). En $(4,+\infty)$ la función es racional y no es continua en *x = 0* pero no pertenece a su dominio de definición. La función es continua en $(4,+\infty)$.
Estudiemos la continuidad en los cambios de definición.

¿En *x = 2* es continua?

- Existe $f(2)=-2+2=0$
- Existe $\lim_{x\to 2} f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} -x+2=0\\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} -x^2+6x-8=-2^2+12-8=0\end{array}\right\}=0$
- Son iguales $f(2)=0=\lim_{x\to 2} f(x)$

Es continua en *x = 2*

¿En *x = 4* es continua?

- Existe $f(4)=\dfrac{4-3}{4}=\dfrac{1}{4}$
- Existe $\lim_{x\to 4} f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-} -x^2+6x-8=-4^2+24-8=0\\ \lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+} \dfrac{x-3}{x}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right\}$ No son iguales y no existe el límite.

Es discontinua en *x = 4*

Conclusión: La función es continua en $\mathbb{R}-\{4\}$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{2,4\}$ y la derivada vale:

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & si \quad x\le 2\\ -x^2+6x-8 & si \quad 2<x<4\\ \dfrac{x-3}{x} & si \quad x\ge 4\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-1 & si \quad x<2\\ -2x+6 & si \quad 2<x<4\\ \dfrac{x-(x-3)}{x^2}=\dfrac{3}{x^2} & si \quad x>4\end{cases}$$

Al no ser continua en $x = 4$ tampoco es derivable.
Estudiemos la derivabilidad en $x = 2$. Comprobando si sus derivadas laterales coinciden.

$$f\,'(2) = \left\{ \begin{array}{l} f\,'(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} f\,'(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} -1 = -1 \\ f\,'(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} f\,'(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-2x+6) = -4+6 = 2 \end{array} \right\}$$

No coinciden, luego no es derivable en $x = 2$.

Conclusión: La función es derivable en $\mathbb{R} - \{2, 4\}$

b) Observando la derivada $f\,'(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x < 2 \\ -2x+6 & si \quad 2 < x < 4 \\ \dfrac{3}{x^2} & si \quad x > 4 \end{cases}$ estudiamos el cambio de signo en su dominio de definición.

- En $(-\infty, 2)$ la derivada es siempre negativa: $f\,'(x) = -1$, por lo que la función decrece en $(-\infty, 2)$.
- En (2, 4) la derivada es $f\,'(x) = -2x+6$ que se anula para $x = 3$.
  Para $x = 1{,}5$ la derivada vale $f\,'(1{,}5) = -3+6 = 3 > 0$ → la función crece en (2, 3).
  Para $x = 3{,}5$ la derivada vale $f\,'(3{,}5) = -7+6 = -1 < 0$ → la función decrece en $(3,\ 4)$
- En $(4, +\infty)$ la derivada de la función es $f\,'(x) = \dfrac{3}{x^2}$ que es siempre positiva. La función crece en $(4, +\infty)$.

Conclusión: La función decrece en $(-\infty, 2) \cup (3,\ 4)$ y crece en $(2, 3) \cup (4, +\infty)$.

c) La función en el intervalo (2,3) es $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 -x^2 + 6x - 8dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 8x \right]_2^3 = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x \right]_2^3 =$$

$$= \left[-\frac{3^3}{3} + 3\cdot 3^2 - 24 \right] - \left[-\frac{2^3}{3} + 3\cdot 2^2 - 16 \right] =$$

$$= -9 + 27 - 24 + \frac{8}{3} - 12 + 16 = \frac{8}{3} - 2 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

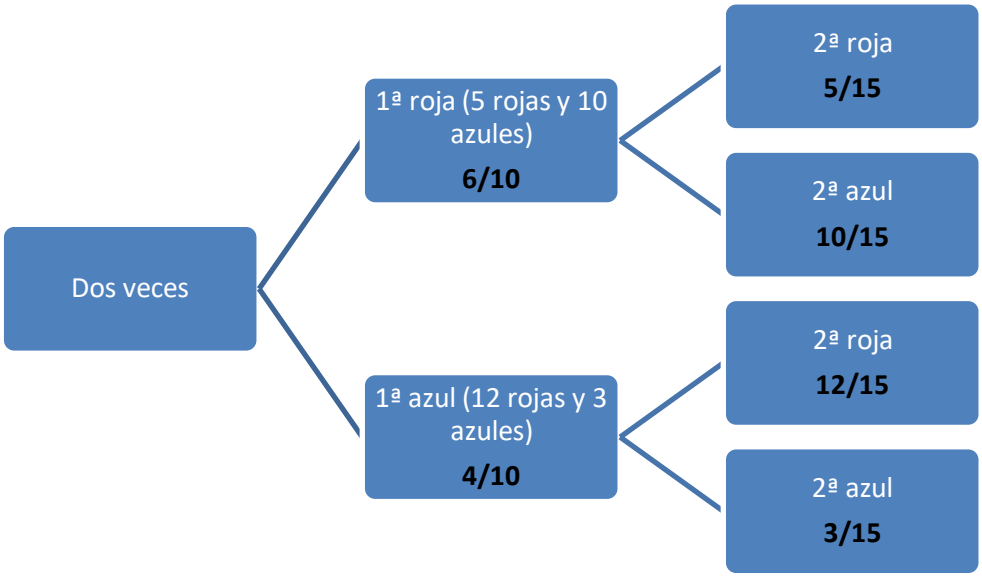
EJERCICIO 5

Una urna contiene 6 bolas rojas y 4 azules. Se extrae una bola al azar y se reemplaza por seis bolas del otro color. A continuación, se vuelve a extraer una segunda bola de la urna.

a) **(1,5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

b) **(1 punto)** Si sabemos que la segunda bola extraída es azul, ¿cuál es la probabilidad de que también lo haya sido la primera?

En la primera extracción si saco una bola roja, no la devuelvo y en su lugar introduzco 6 bolas azules, por lo que en la urna pasan a haber 5 rojas (1 menos) y 10 azules (6 más).
Si en la primera extracción saco una bola azul, no la devuelvo y en su lugar introduzco 6 bolas rojas, por lo que en la urna pasan a haber 12 rojas (6 más) y 3 azules (1 menos).
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(2^a \text{ bola roja}) = P(1^a \text{ bola roja})\,P(2^a \text{ bola roja} / 1^a \text{ bola roja}) +$$
$$+P(1^a \text{ bola azul})\,P(2^a \text{ bola roja} / 1^a \text{ bola azul}) =$$
$$= \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{15} + \frac{4}{10}\cdot\frac{12}{15} = \frac{78}{150} = \boxed{\frac{13}{25} = 0.52}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(1^a \text{ bola azul} / 2^a \text{ bola azul}) = \frac{P(1^a \text{ bola azul} \cap 2^a \text{ bola azul})}{P(2^a \text{ bola azul})} =$$
$$= \frac{P(1^a \text{ bola azul})\,P(2^a \text{ bola azul} / 1^a \text{ bola azul})}{1 - P(2^a \text{ bola roja})} = \frac{\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{15}}{1-\frac{13}{25}} = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{12}{25}} = \boxed{\frac{1}{6} = 0{,}167}$$

EJERCICIO 6

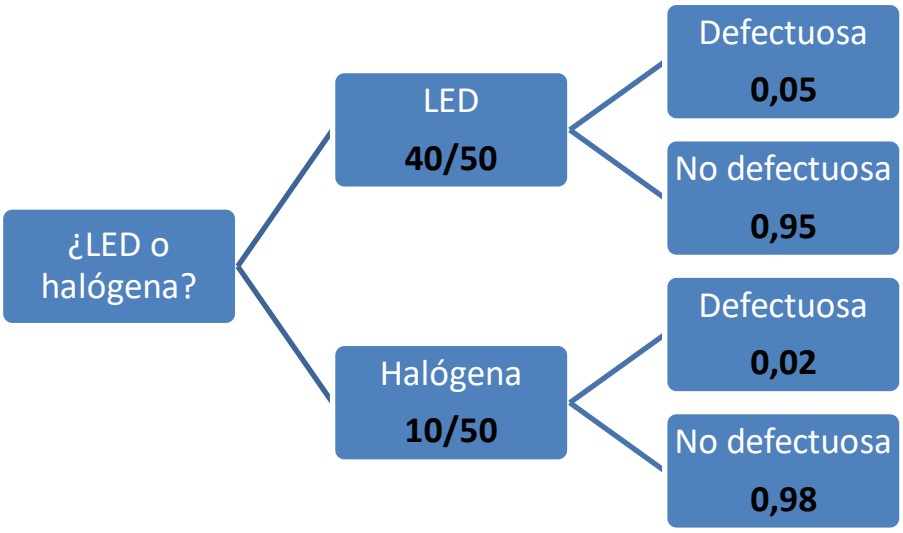
Una empresa fabrica dos tipos de bombillas: una LED y otra halógena. Se sabe que un 5% de las LED y un 2% de las halógenas salen defectuosas. Se elige al azar una bombilla de una caja que contiene 40 bombillas LED y 10 halógenas.

a) **(1,5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida no sea defectuosa.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida sea LED, sabiendo que es defectuosa.

Realizamos un diagrama de árbol.

La caja contiene 50 bombillas, siendo la proporción de LED de 40/50 y de halógenas de 10/50.



a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Bombilla no defectuosa}) =$$
$$= P(\text{Elegir LED})\,P(\text{Bombilla no defectuosa/Siendo LED}) +$$
$$+P(\text{Elegir halógena})\,P(\text{Bombilla no defectuosa/Siendo halógena}) =$$
$$= \frac{4}{5}\cdot 0,95 + \frac{1}{5}\cdot 0,98 = \boxed{\frac{239}{250} = 0,956}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizo el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea LED /Es defectuosa}) = \frac{P(\text{Sea LED} \cap \text{Es defectuosa})}{P(\text{Es defectuosa})} =$$

$$= \frac{P(\text{Elegir LED})\,P(\text{Sea defectuosa / Es LED})}{P(\text{Es defectuosa})} = \frac{\frac{4}{5}\cdot 0,05}{1-0,956} = \frac{\frac{0,2}{5}}{0,044} = \boxed{\frac{10}{11} = 0,909}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1 punto)** Una población de 25000 personas se ha dividido en cuatro estratos con tamaños 15000, 5000, 3000 y 2000 personas respectivamente. En esa población se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, en el que se han elegido al azar 36 personas del tercer estrato. Determine el tamaño de la muestra total obtenida con este muestreo y su composición.

b) **(1,5 puntos)** Dada la población *P = (2, 4, 6)*, construya todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y halle la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas esas muestras.

a) Llamamos n al tamaño total de la muestra y n_1 al tamaño de la muestra en el estrato de 15000 personas, n_2 al tamaño de la muestra en el estrato de 5000 personas y n_4 al tamaño de la muestra en el estrato de 2000 personas.

$$\frac{n}{25000}=\frac{n_1}{15000}=\frac{n_2}{5000}=\frac{36}{3000}=\frac{n_4}{2000}$$

De esta expresión vamos separando por parejas y determinando el tamaño total de la muestra y el tamaño correspondiente a cada estrato.

$$\frac{n}{25000}=\frac{36}{3000}\Rightarrow n=\frac{36\cdot 25000}{3000}=300$$

$$\frac{n_1}{15000}=\frac{36}{3000}\Rightarrow n_1=\frac{36\cdot 15000}{3000}=180$$

$$\frac{n_2}{5000}=\frac{36}{3000}\Rightarrow n_2=\frac{36\cdot 5000}{3000}=60$$

$$\frac{36}{3000}=\frac{n_4}{2000}\Rightarrow n_4=\frac{36\cdot 2000}{3000}=24$$

El tamaño de la muestra total es de 300 personas. Del estrato 1 se eligen 180, del estrato 2 se eligen 60, del estrato 3 se eligen 36 y del 4 se eligen 24.

b) Las muestras posibles mediante muestreo aleatorio simple son:

M1 = [2,4] M2 = {2,6} y M3 = {4,6}

Las medias muestrales de cada una son:

$$\overline{x_1}=\frac{2+4}{2}=3\ ;\ \overline{x_2}=\frac{2+6}{2}=4\ ;\ \overline{x_3}=\frac{4+6}{2}=5$$

La media de las medias muestrales es $\overline{x}=\frac{\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}}{3}=\frac{3+4+5}{3}=4$

$$\text{Varianza}=\frac{\left(\overline{x_1}-\overline{x}\right)^2+\left(\overline{x_2}-\overline{x}\right)^2+\left(\overline{x_3}-\overline{x}\right)^2}{3}=\frac{(-1)^2+0^2+1^2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\text{Desviación típica}=\sqrt{Varianza}=\sqrt{\frac{2}{3}}=0.816$$

EJERCICIO 8

Se ha tomado una muestra de 16 pacientes tratados por un especialista y se ha observado que el tiempo de espera en su consulta, en minutos, ha sido de:

8 9,2 10 8,5 12 9 11,3 7 8,5 8,3 7,6 9 9,4 10,5 8,9 6,8

Supongamos que el tiempo de espera en esta consulta se distribuye según una ley Normal de varianza 4 y media desconocida.

a) **(1,5 puntos)** Halle un intervalo de confianza al 97,5% para estimar el tiempo medio de espera de los pacientes tratados por este especialista.

b) **(1 punto) ¿**Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para asegurar, con un nivel de confianza del 90%, que el error cometido sea, a lo sumo, de 0,3 minutos.

X = Tiempo de espera en la consulta de un especialista

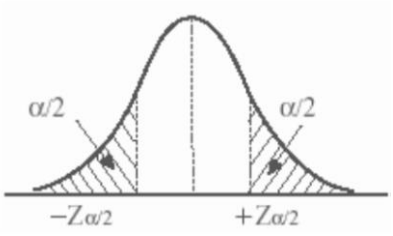
Varianza = 4 → $\sigma = \sqrt{4} = 2$. X = N(μ, 2)

n = 16. Calculamos la media muestral.

$$\bar{x} = \frac{8+9.2+10+8.5+12+9+11.3+7+8.5+8.3+7.6+9+9.4+10.5+8.9+6.8}{16} = 9$$

a) Con un nivel de confianza del 97.5% tenemos

$1 - \propto = 0{,}975 \rightarrow \propto = 0{,}025 \rightarrow \propto/2 = 0'0125 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}9875 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}24}$



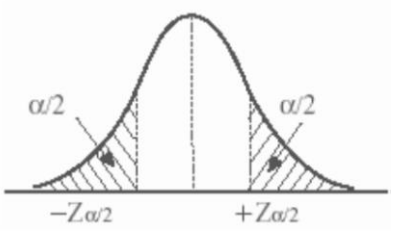
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.24 \cdot \frac{2}{\sqrt{16}} = 1.12$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(9 - 1.12, 9 + 1.12\right) = \left(7.88, 10.12\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 90% tenemos

$1 - \propto = 0{,}90 \rightarrow \propto = 0{,}1 \rightarrow \propto/2 = 0'05 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}645}$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.3 \Rightarrow 3.29 = 0.3\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{3.29}{0.3} = 10.967 \Rightarrow n = 120,268$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 121 pacientes.

PevAU 2020 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2019-2020	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones: **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.

c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.

d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Sean A, B, X e Y matrices invertibles que verifican $A \cdot X = B$ y $B \cdot Y = A$.

a) **(1 punto)** Compruebe que $Y^{-1} = X$.

b) **(1.5 puntos)** Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle X e Y.

EJERCICIO 2

a) **(1 punto)** Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena A produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena B produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas A y B es de 1200 y 1500 euros, respectivamente. La cadena A puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena B. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, formule, sin resolver, el problema que permite obtener las horas de funcionamiento de las cadenas A y B para minimizar el coste de producción de esos electrodomésticos.

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices.

$$x + 2y \geq 7 \qquad 4x - y \geq 1 \qquad 2x - y \leq 4 \qquad 3x + 2y \leq 20 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

Obtenga el valor mínimo de la función $F(x, y) = 2x + y$ en el recinto anterior, así como el punto en el que se alcanza.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 4$, con a y b números reales.

a) **(1 punto)** Determine los valores de a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto (2, 36)

b) **(0.75 puntos)** Para $a = 4$ y $b = -3$, estudie la monotonía de f y determine sus extremos. relativos.

c) **(0.75 puntos)** Para $a = 4$ y $b = -3$, calcule la función $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$ y $F(2) = 10$.

EJERCICIO 4

a) **(1.2 puntos)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=\left(-5+x^2\right)^2\cdot e^{3x} \qquad g(x)=\frac{\ln\left(x^3-5x\right)}{1-x^2}$$

b) **(1.3 puntos)** Calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $h(x)=-x^2+2x+3$ y el eje de abscisas.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

A 120 estudiantes se les ha recomendado la lectura de dos libros. Se sabe que 46 de ellos han leído el primer libro recomendado, 34 el segundo y 16 estudiantes han leído ambos libros. Se elige un estudiante al azar.

a) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya leído alguno de los dos libros.
b) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que no haya leído ninguno de los dos libros.
c) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que solamente haya leído el primer libro.
d) **(0.7 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya leído el primer libro, si se sabe que no ha leído el segundo.

EJERCICIO 6

Las bicicletas de alquiler de una ciudad se clasifican por su calidad: buena, media y mala. El 30% de dichas bicicletas son gestionadas por una empresa E_1 y el resto por una empresa E_2. De las bicicletas de la empresa E_1, el 80% son de buena calidad, el 5% de calidad media y el resto de mala calidad. De las bicicletas de la empresa E_2 se sabe que el 60% son de buena calidad, pero se desconocen los porcentajes de bicicletas de calidad media y calidad mala. Se elige al azar una bicicleta de alquiler de esa ciudad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que sea de buena calidad.
b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea de la empresa E_1 y de mala calidad.
c) **(0.75 puntos)** Si se sabe que el porcentaje de bicicletas de alquiler de calidad media en toda la ciudad es del 19%, ¿cuál es la probabilidad de que sea de calidad media, sabiendo que la bicicleta elegida es de la empresa E_2?

BLOQUE D

EJERCICIO 7

La vida útil, en años, de las lavadoras de un determinado modelo, se distribuyen según una ley Normal de varianza 7.84. En una muestra de 12 lavadoras, la vida útil en años ha sido:

9.5 9 10.2 8.6 11.4 10.8 12.6 11 11.8 14.5 10.4 9.8

a) **(1.5 puntos)** Con estos datos, determine un intervalo de confianza al 93.5% para estimar la vida útil de estas lavadoras.
b) **(1 punto)** Calcule el error máximo que se puede cometer al estimar la vida útil media de este modelo de lavadoras, si se toma una muestra de 50 lavadoras y asumimos un nivel de confianza del 99%.

EJERCICIO 8

La renta anual de los hogares andaluces, en miles de euros, se distribuye según una ley Normal con desviación típica 5 y media desconocida μ.

a) **(1 punto)** Si se desea que en el 99% de las posibles muestras del mismo tamaño, elegidas de entre los hogares andaluces, la media muestral no difiera de la renta media anual poblacional de dichos hogares en más de una unidad, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de las muestras?
b) **(0.5 puntos)** Si se consideran muestras de hogares andaluces de tamaño 100, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria "Renta media anual muestral"?
c) **(1 punto)** Suponiendo que la renta media anual poblacional de los hogares andaluces es $\mu = 24$, ¿cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 100 la renta media anual muestral sea superior a 25?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Sean *A*, *B*, *X* e *Y* matrices invertibles que verifican $A \cdot X = B$ y $B \cdot Y = A$.

a) **(1 punto)** Compruebe que $Y^{-1} = X$.

b) **(1.5 puntos)** Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle *X* e *Y*.

a) Como *A*, *B*, *X* e *Y* son matrices invertibles podemos multiplicar por la inversa de dichas matrices para despejar *X* e *Y*.

$$\left.\begin{matrix} A \cdot X = B \\ B \cdot Y = A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Multiplico por Y en la 1ª ecuación} \\ \text{Multiplico por X en la 2ª ecuación} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} A \cdot X \cdot Y = B \cdot Y = A \\ B \cdot Y \cdot X = A \cdot X = B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A \cdot X \cdot Y = A \\ B \cdot Y \cdot X = B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Multiplico por } A^{-1} \text{ en la 1ª ecuación} \\ \text{Multiplico por } B^{-1} \text{ en la 2ª ecuación} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot Y = A^{-1} \cdot A \\ B^{-1} \cdot B \cdot Y \cdot X = B^{-1} \cdot B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} Y \cdot X = I \\ X \cdot Y = I \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{Y^{-1} = X}$$

b) Hallamos la inversa de A y B.

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{Adj\left(B^t\right)}{|B|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación $A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Despejamos Y de la ecuación $B \cdot Y = A \Rightarrow B^{-1} \cdot B \cdot Y = B^{-1} \cdot A \Rightarrow Y = B^{-1} \cdot A$.

$$Y = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

a) **(1 punto)** Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena A produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena B produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas A y B es de 1200 y 1500 euros, respectivamente. La cadena A puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena B. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, formule, sin resolver, el problema que permite obtener las horas de funcionamiento de las cadenas A y B para minimizar el coste de producción de esos electrodomésticos.

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices.

$$x+2y\geq 7 \qquad 4x-y\geq 1 \qquad 2x-y\leq 4 \qquad 3x+2y\leq 20 \qquad x\geq 0 \qquad y\geq 0$$

Obtenga el valor mínimo de la función $F(x,y)=2x+y$ en el recinto anterior, así como el punto en el que se alcanza.

a) Llamemos "x" al número de horas de funcionamiento de la cadena A e "y" al número de horas de funcionamiento de la cadena B.
Realizamos una tabla con los datos del ejercicio.

	Número de lavadoras	Número de frigoríficos	Coste del funcionamiento
Número de horas de Cadena A (x)	10x	5x	1200x
Número de horas de Cadena B (y)	7y	6y	1500y
TOTALES	$10x+7y$	$5x+6y$	$1200x+1500y$

Obtenemos las inecuaciones correspondientes a las restricciones del problema.

"*La cadena A puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena B"* → $x\leq 2y$

"*Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos*" → $10x+7y\geq 400$; $5x+6y\geq 280$.

Además, el número de horas es positivo → $x\geq 0$; $y\geq 0$

El conjunto de las restricciones de este problema de programación lineal es:

$$\left.\begin{array}{l} x\leq 2y \\ 10x+7y\geq 400 \\ 5x+6y\geq 280 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Y la función objetivo que deseamos minimizar es el coste de funcionamiento de las dos cadenas de montaje $C(x,y)=1200x+1500y$.

b) Dibujamos las recta asociadas a cada restricción y que delimitan la región factible.

$x+2y=7$

x	$y=\dfrac{7-x}{2}$
1	3
7	0

$4x-y=1$

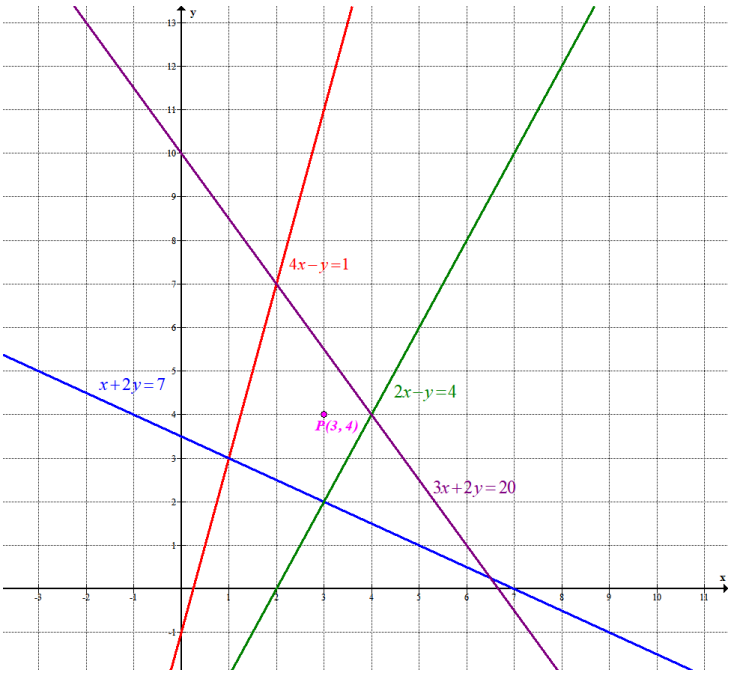
x	$y=4x-1$
0	−1
1	3

$2x-y=4$

x	$y=2x-4$
2	0
4	4

$3x+2y=20$

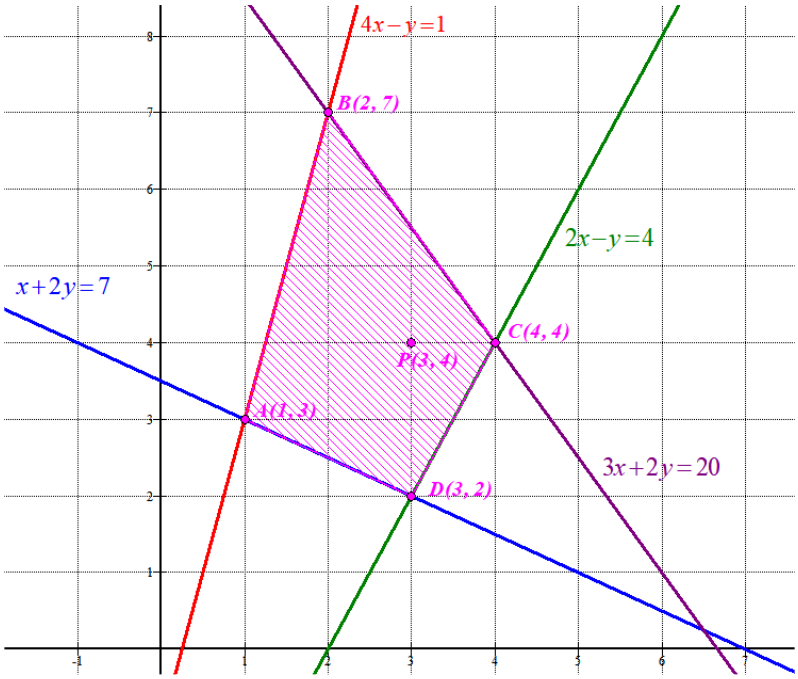
x	$y=\dfrac{20-3x}{2}$
0	10
4	4



Comprobamos si el punto P(3, 4) cumple las restricciones.

$3+8\geq 7 \qquad 12-4\geq 1 \qquad 6-4\leq 4 \qquad 9+8\leq 20 \qquad 3\geq 0 \qquad 4\geq 0$

Como se cumplen todas las restricciones la región factible es la zona rayada.



Valoramos la función $F(x,y)=2x+y$ en cada uno de los vértices en busca de su valor mínimo.

- **A(1, 3)** → $F(1,3)=2+3=5$ ¡*Mínimo*!
- **B(2, 7)** → $F(2,7)=4+7=11$
- **C(4, 4)** → $F(4,4)=8+4=12$
- **D(3, 2)** → $F(3,2)=6+2=8$

El valor mínimo se alcanza en el vértice A(1, 3) siendo este valor mínimo igual a 5.

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=ax^3+bx+4$, con *a* y *b* números reales.

a) **(1 punto)** Determine los valores de *a* y *b* para que f tenga un extremo relativo en el punto (2, 36)

b) **(0.75 puntos)** Para $a=4$ y $b=-3$, estudie la monotonía de f y determine sus extremos. relativos.

c) **(0.75 puntos)** Para $a=4$ y $b=-3$, calcule la función *F(x)* que verifica *F´(x)=f(x)* y *F(2)=10*.

a) Si $f(x)=ax^3+bx+4$ tiene un extremo relativo en (2, 36) significa que la derivada de la función en $x = 2$ vale 0 y que el valor de la función en $x = 2$ es 36.

$$f(x)=ax^3+bx+4 \Rightarrow f\,'(x)=3ax^2+b$$

$$f\,'(2)=0 \Rightarrow 3a\cdot 2^2+b=0 \Rightarrow 12a+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-12a}$$

$$f(2)=36 \Rightarrow a\cdot 2^3+2b+4=36 \Rightarrow 8a+2b=32 \Rightarrow \boxed{4a+b=16}$$

Con las dos ecuaciones formamos un sistema que resolvemos.

$$\left.\begin{matrix} b=-12a \\ 4a+b=16 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4a-12a=16 \Rightarrow -8a=16 \Rightarrow \boxed{a=\frac{16}{-8}=-2} \Rightarrow b=-12(-2)=24$$

Los valores buscados son: $\boxed{a=-2;\quad b=24}$

b) Para $a=4$ y $b=-3$ la función es $f(x)=4x^3-3x+4$.

Calculamos la derivada e igualamos a cero.

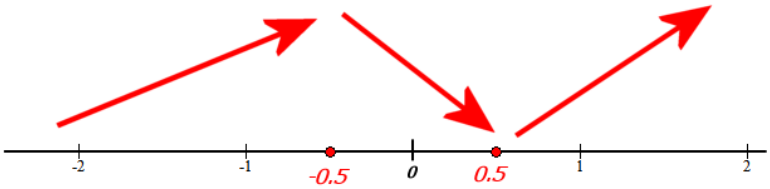
$$f(x)=4x^3-3x+4 \Rightarrow f\,'(x)=12x^2-3$$

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow 12x^2-3=0 \Rightarrow 12x^2=3 \Rightarrow x^2=\frac{3}{12}=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$$

Estudiamos el signo de la derivada en $(-\infty,-0.5)$, en $(-0.5,0.5)$ y en $(0.5,+\infty)$.

- En $(-\infty,-0.5)$ tomamos x = –1 y la derivada vale $f\,'(-1)=12(-1)^2-3=9>0$. La función crece en $(-\infty,-0.5)$.
- En $(-0.5,0.5)$ tomamos x = 0 y la derivada vale $f\,'(0)=-3<0$. La función decrece en $(-0.5,0.5)$.
- En $(0.5,+\infty)$ tomamos x = 1 y la derivada vale $f\,'(1)=12-3=9>0$. La función crece en $(0.5,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty,-0.5)\cup(0.5,+\infty)$ y decrece en $(-0.5,0.5)$.

Tiene un máximo relativo en $x = -0.5$ y un mínimo relativo en $x = 0.5$.

$$f(-0.5)=4(-0.5)^3-3(-0.5)+4=-0.5+1.5+4=5$$
$$f(0.5)=4\cdot 0.5^3-3\cdot 0.5+4=0.5-1.5+4=3$$

El máximo relativo es el punto (–0.5, 5) y el mínimo relativo es (0.5, 3)

c) Para $a=4$ y $b=-3$ la función es $f(x)=4x^3-3x+4$. Nos piden calcular la integral de *f(x)* que pase por (2, 10).

$$F(x)=\int 4x^3-3x+4dx=x^4-3\frac{x^2}{2}+4x+C$$

$$F(2)=10\Rightarrow 2^4-3\frac{2^2}{2}+4\cdot 2+C=10\Rightarrow 16-6+8+C=10\Rightarrow C=-8$$

La función *F(x)* buscada es $\boxed{F(x)=x^4-3\frac{x^2}{2}+4x-8}$

EJERCICIO 4

a) **(1.2 puntos)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=\left(-5+x^2\right)^2\cdot e^{3x} \qquad g(x)=\frac{\ln\left(x^3-5x\right)}{1-x^2}$$

b) **(1.3 puntos)** Calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $h(x)=-x^2+2x+3$ y el eje de abscisas.

a) Calculamos la derivada de la función *f(x)*.

$$f(x)=\left(-5+x^2\right)^2\cdot e^{3x}\Rightarrow f\,'(x)=2\left(-5+x^2\right)2x\cdot e^{3x}+\left(-5+x^2\right)^2\cdot 3e^{3x}$$

$$f\,'(x)=4x\left(-5+x^2\right)\cdot e^{3x}+3\left(-5+x^2\right)^2\cdot e^{3x}=\left(-5+x^2\right)\cdot e^{3x}\left[4x+3\left(-5+x^2\right)\right]$$

$$\boxed{f\,'(x)=\left(-15+4x+3x^2\right)\left(-5+x^2\right)\cdot e^{3x}}$$

Calculamos la derivada de la función *g(x)*.

$$g(x)=\frac{\ln\left(x^3-5x\right)}{1-x^2}\Rightarrow g\,'(x)=\frac{\frac{3x^2-5}{x^3-5x}\left(1-x^2\right)+2x\ln\left(x^3-5x\right)}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$g\,'(x)=\frac{\frac{3x^2-5}{x^3-5x}\cancel{\left(1-x^2\right)}}{\left(1-x^2\right)^{\cancel{2}}}+\frac{2x\ln\left(x^3-5x\right)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{3x^2-5}{\left(x^3-5x\right)\left(1-x^2\right)}+\frac{2x\ln\left(x^3-5x\right)}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$\boxed{g\,'(x)=\frac{3x^2-5}{\left(x^3-5x\right)\left(1-x^2\right)}+\frac{2x\ln\left(x^3-5x\right)}{\left(1-x^2\right)^2}}$$

b) Veamos si la función $h(x)=-x^2+2x+3$ corta el eje de abscisas.

$$h(x)=0\Rightarrow -x^2+2x+3=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2+12}}{-2}=\frac{-2\pm 4}{-2}=\begin{cases}\frac{-2+4}{-2}=-1=x\\ \frac{-2-4}{-2}=3=x\end{cases}$$

Lo corta en dos puntos $x=-1$ y $x=3$.

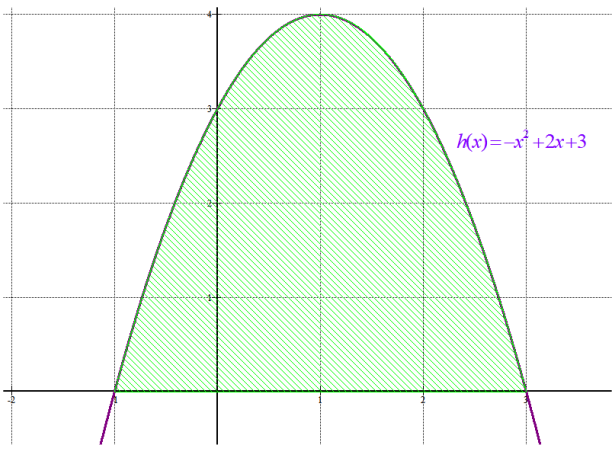
$$Área=\int_{-1}^{3}h(x)dx=\int_{-1}^{3}-x^2+2x+3dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=$$

$$=\left[-\frac{3^3}{3}+3^2+9\right]-\left[-\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2-3\right]=$$

$$=\cancel{-9+9}+9-\frac{1}{3}-1+3=$$

$$=11-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{32}{3}u^2}$$



EJERCICIO 5

A 120 estudiantes se les ha recomendado la lectura de dos libros. Se sabe que 46 de ellos han leído el primer libro recomendado, 34 el segundo y 16 estudiantes han leído ambos libros. Se elige un estudiante al azar.

a) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya leído alguno de los dos libros.
b) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que no haya leído ninguno de los dos libros.
c) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que solamente haya leído el primer libro.
d) **(0.7 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya leído el primer libro, si se sabe que no ha leído el segundo.

Reunimos los datos en una tabla.

	Han leído el primer libro	No han leído el primer libro	TOTAL
Han leído el segundo libro	**16**		**34**
No han leído el segundo libro			
TOTAL	**46**		**120**

Completamos la tabla.

	Han leído el primer libro	No han leído el primer libro	TOTAL
Han leído el segundo libro	**16**	**18**	**34**
No han leído el segundo libro	**30**	**56**	**86**
TOTAL	**46**	**74**	**120**

a) Hay 56 estudiantes que no han leído ni el primer ni el segundo libro, por lo que hay 120 – 56 = 64 que han leído algún libro. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad es:

$$P(\text{Haya leido algún libro}) = \frac{64}{120} = \boxed{\frac{8}{15} = 0.53}$$

b) De los 120 estudiantes hay 56 estudiantes que no han leído ningún libro. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad es:

$$P(\text{No haya leido ningún libro}) = \frac{56}{120} = \boxed{\frac{7}{15} = 0.46}$$

c) De los 120 estudiantes son 30 los que han leído el primer libro y no han leído el segundo libro (Solamente han leído el primer libro). Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad es:

$$P(\text{Solamente haya leido el primer libro}) = \frac{30}{120} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

d) El segundo libro no lo han leído 86 estudiantes y de estos 30 han leído el primer libro. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad es:

$$P(\text{Haya leido el primer libro / No ha leido el segundo libro}) = \frac{30}{86} = \boxed{\frac{15}{43} = 0.35}$$

EJERCICIO 6

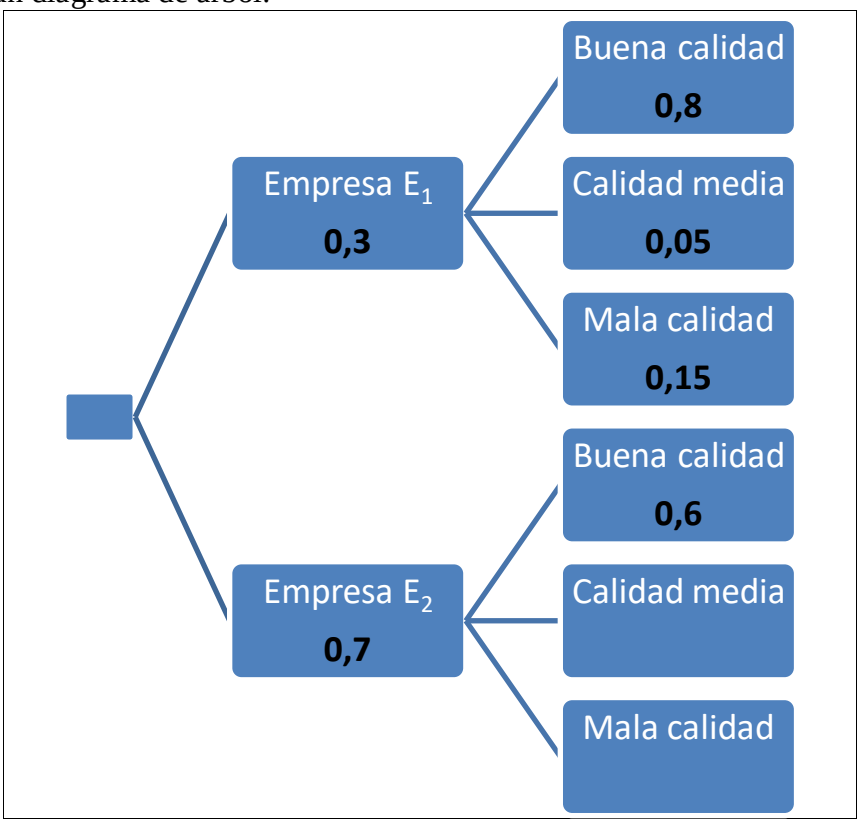
Las bicicletas de alquiler de una ciudad se clasifican por su calidad: buena, media y mala. El 30% de dichas bicicletas son gestionadas por una empresa E_1 y el resto por una empresa E_2. De las bicicletas de la empresa E_1, el 80% son de buena calidad, el 5% de calidad media y el resto de mala calidad. De las bicicletas de la empresa E_2 se sabe que el 60% son de buena calidad, pero se desconocen los porcentajes de bicicletas de calidad media y calidad mala. Se elige al azar una bicicleta de alquiler de esa ciudad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que sea de buena calidad.

b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea de la empresa E_1 y de mala calidad.

c) **(0.75 puntos)** Si se sabe que el porcentaje de bicicletas de alquiler de calidad media en toda la ciudad es del 19%, ¿cuál es la probabilidad de que sea de calidad media, sabiendo que la bicicleta elegida es de la empresa E_2?

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Ser de buena calidad tiene dos formas de elegirla, calculamos la probabilidad de ambas y las sumamos. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Sea de buena calidad}) = 0,3 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,6 = 0,24 + 0,42 = \boxed{0,66}$$

b) Esta probabilidad aparece en el diagrama de árbol.

$$P(\text{Sea de la empresa } E_1 \text{ y de mala calidad}) = 0,3 \cdot 0,15 = \boxed{0,045}$$

c) En la ciudad hay un porcentaje de bicicletas de calidad media de la empresa E_1 que son el 5% del 30% = 0,3 · 0,05 = 0,015, es decir, un 1,5% de las bicis de calidad media son de la empresa E_1, por lo que 19 – 1,5 = 17,5 % son de la empresa E_2.

$$0,7 \cdot x = 0,175 \Rightarrow x = \frac{0,175}{0,7} = 0,25$$

La probabilidad es de 0,25.

UNA SEGUNDA FORMA DE RESOLVER ESTE APARTADO.

$$P(Media) = 0{,}19 = P(Media \cap E_1) + P(Media \cap E_2) =$$

$$= P(E_1)\,P(Media / E_1) + P(Media \cap E_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}19 = 0{,}3 \cdot 0{,}05 + P(Media \cap E_2) \Rightarrow P(Media \cap E_2) = 0{,}19 - 0{,}015 = 0{,}175$$

Con este dato pasamos a calcular la probabilidad pedida *P(Media/E_2)*.

$$P(Media / E_2) = \frac{P(Media \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{0{,}175}{0{,}7} = \boxed{0{,}25}$$

UNA TERCERA FORMA DE RESOLVER ESTE APARTADO.

Pasemos a valores absolutos y no porcentuales.
Supongamos que la ciudad tiene 100 bicicletas, de las cuales 30 son de la empresa 1 y 70 de la empresa 2 (según los datos aportados en el ejercicio).

De las 30 de la empresa 1 el 80% son buenas, es decir, 0,8 · 30 = 24.
De las 30 de la empresa 1 el 5% son medias, es decir, 0,05 · 30 = 1,5.
De las 30 de la empresa 1 el resto son malas, es decir, 30 – 24 – 1,5 = 4,5.

Como nos dicen que en la ciudad el 19 % son de calidad media y la empresa 1 tiene 1,5 entonces en la empresa 2 hay 19 – 1,5 = 17,5 bicicletas de calidad media.

Aplicamos la regla de Laplace y determinamos la probabilidad de elegir una bicicleta de calidad media, sabiendo que es de la empresa 2.

La empresa 2 tiene 70 bicicletas y 17,5 son de calidad media →

$$P(Media / E_2) = \frac{17{,}5}{70} = \boxed{0{,}25}$$

EJERCICIO 7

La vida útil, en años, de las lavadoras de un determinado modelo, se distribuyen según una ley Normal de varianza 7.84. En una muestra de 12 lavadoras, la vida útil en años ha sido:

9.5 9 10.2 8.6 11.4 10.8 12.6 11 11.8 14.5 10.4 9.8

a) **(1.5 puntos)** Con estos datos, determine un intervalo de confianza al 93.5% para estimar la vida útil de estas lavadoras.

b) **(1 punto)** Calcule el error máximo que se puede cometer al estimar la vida útil media de este modelo de lavadoras, si se toma una muestra de 50 lavadoras y asumimos un nivel de confianza del 99%.

X = Vida útil de una lavadora en años

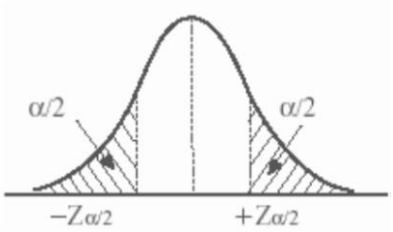
Varianza = 7.84 → $\sigma = \sqrt{7.84} = 2.8$. X = N(μ, 2.8)

Hallamos el valor de la media muestral de los 12 datos del problema.

$$\bar{x} = \frac{9.5+9+10.2+8.6+11.4+10.8+12.6+11+11.8+14.5+10.4+9.8}{12} = 10.8$$

a) Con un nivel de confianza del 93.5% tenemos

$1 - \propto = 0{,}935 \rightarrow \propto = 0{,}065 \rightarrow \propto/2 = 0'0325 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}9675 \rightarrow z_{\alpha/2} =$ **1,845**



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.845 \cdot \frac{2.8}{\sqrt{12}} = 1.491$$

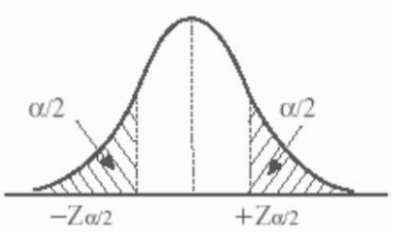
El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(10.8 - 1.491, 10.8 + 1.491\right) = \left(9.309, 12.291\right)$$

b) n = 50.

Con un nivel de confianza del 99% tenemos

$1 - \propto = 0{,}99 \rightarrow \propto = 0{,}01 \rightarrow \propto/2 = 0'005 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} =$ **2,575**



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2.8}{\sqrt{50}} = 1.019$$

El error máximo es de 1.019 años, algo más de un año..

EJERCICIO 8

La renta anual de los hogares andaluces, en miles de euros, se distribuye según una ley Normal con desviación típica 5 y media desconocida μ.

a) **(1 punto)** Si se desea que en el 99% de las posibles muestras del mismo tamaño, elegidas de entre los hogares andaluces, la media muestral no difiera de la renta media anual poblacional de dichos hogares en más de una unidad, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de las muestras?

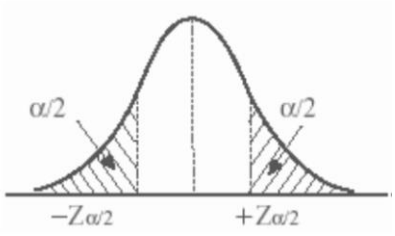
b) **(0.5 puntos)** Si se consideran muestras de hogares andaluces de tamaño 100, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria "Renta media anual muestral"?

c) **(1 punto)** Suponiendo que la renta media anual poblacional de los hogares andaluces es $\mu = 24$, ¿cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 100 la renta media anual muestral sea superior a 25?

X = Renta anual de un hogar andaluz, en miles de euros. X = N(μ, 5)

a) Con un nivel de confianza del 99%

$1 - \propto = 0{,}99 \rightarrow \propto = 0{,}01 \rightarrow \propto/2 = 0'005 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}575}$



Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 1.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 2.575 \cdot 5 = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(2.575 \cdot 5\right)^2 = 165.76$$

El tamaño mínimo es de 166 hogares andaluces.

b) Se considera una muestra de tamaño n = 100 como X = Renta anual de un hogar andaluz, en miles de euros es una N(μ, 5) la renta media anual muestral sigue una ley normal con la misma media pero con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\overline{X_{100}} = N\left(\mu, \frac{5}{\sqrt{100}}\right) \Rightarrow \overline{X_{100}} = N\left(\mu, 0.5\right)$$

c) Si X = N(24, 5) entonces $\overline{X_{100}} = N\left(24, 0.5\right)$. Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{100}} > 25\right)$.

$$P\left(\overline{X_{100}} > 25\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{25-24}{0.5}\right) =$$

$$= P\left(Z > 2\right) = 1 - P\left(Z < 2\right) = \left\{\begin{matrix}\text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

PevAU 2019 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2018-2019	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones: **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.

c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.

d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.

e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 0\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}7 & -12 & 16\\ -1 & 7 & 12\end{pmatrix}$$

a) **(1 punto)** Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:
   1) $A\cdot A^t$ es una matriz simétrica.
   2) $A\cdot A^t + B$ posee inversa.

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $B\cdot X + A = C$.

EJERCICIO 2

El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x)=2(2x-1)^2+1$, con $0\le x\le 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.

a) **(1 punto)** Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $C(x)$.

b) **(0.75 puntos)** Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?

c) **(0.75 puntos)** Realice un esbozo de la gráfica de la función $C(x)$.

EJERCICIO 3

Una marca de patinetes eléctricos fabrica tres modelos distintos A, B y C. El modelo A supone el 25% de su producción, el B el 40 % y el resto de la producción corresponde al modelo C. Transcurridos tres meses desde su venta, se comprobó que el 15% de patinetes del modelo A, el 10% del B y el 12% del C había presentado alguna avería. Se elige al azar un patinete de esta marca.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.

b) **(0.5 puntos)** Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?

c) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C?.

EJERCICIO 4

Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo, con un 92% de confianza para la puntuación media de los participantes en dicho concurso

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98 %.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar, 1 kg de concentrado A se necesitan 4'5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7'5 kg de grano de Colombia y 1'5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67'5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía, y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

a) **(1.75 puntos)** Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.
b) **(0.25 puntos)** Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.
c) **(0.5 puntos)** Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

EJERCICIO 2

De una cierta función *f*, sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

a) **(1 punto)** Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.
b) **(0.75 puntos)** Determine la curvatura de *f* y halle la abscisa de su punto de inflexión.
c) **(0.75 puntos)** Calcule la función *f*, sabiendo que su gráfica pasa por el punto (–1, 3).

EJERCICIO 3

De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:

$$P(A \cap B) = 0.2,\ P(A \cup B) = 0.4,\ P(A/B) = 0.8.$$

a) **(1.2 puntos)** Calcule *P(B)* y *P(A)*.
b) **(0.5 puntos)** ¿Son los sucesos *A* y *B* independientes? Razone la respuesta.
c) **(0.8 puntos)** Calcule $P(A^C \cup B^C)$.

EJERCICIO 4

Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50 expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22% de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.

a) **(1.5 puntos)** Para un nivel de confianza del 92%, calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.
b) **(1 punto)** Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizarlos por causas debidas al tabaco sea inferior al 3 %.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 0\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}7 & -12 & 16\\ -1 & 7 & 12\end{pmatrix}$$

a) **(1 punto)** Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1) $A\cdot A^t$ es una matriz simétrica.

2) $A\cdot A^t + B$ posee inversa.

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $B\cdot X + A = C$.

a) Comprobamos cada una de las afirmaciones.

1) $A\cdot A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ Es cierta la afirmación.

2) Calculamos su determinante y vemos si se anula.

$$A\cdot A^t + B=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -4\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\left|A\cdot A^t + B\right|=\begin{vmatrix}6 & -4\\ -3 & 2\end{vmatrix}=12-12=0$$

El determinante vale cero y no existe la inversa. No es cierta la afirmación.

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$B\cdot X + A = C \Rightarrow B\cdot X = C - A \Rightarrow X = B^{-1}\left(C - A\right)$$

Comprobamos que B tiene inversa.

$$B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow |B|=\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-6\neq 0\rightarrow \text{Existe la matriz inversa de B}$$

La calculamos.

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^t\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix}}{-6}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión inicial.

$$X=B^{-1}\left(C-A\right)=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}7 & -12 & 16\\ -1 & 7 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\right]=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -12 & 18\\ 0 & 6 & 12\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}0 & 18 & 36\\ 12 & -18 & 48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3 & -6\\ -2 & 3 & -8\end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x)=2(2x-1)^2+1$, con $0\le x\le 2$, donde *x* es la cantidad producida en millones de kilogramos.

a) **(1 punto)** Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función *C(x)*.

b) **(0.75 puntos)** Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?

c) **(0.75 puntos)** Realice un esbozo de la gráfica de la función *C(x)*.

a) Estudiamos el signo de la derivada.

$$C(x)=2(2x-1)^2+1 \Rightarrow C'(x)=8(2x-1)$$

$$C'(x)=0 \Rightarrow 8(2x-1)=0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Averiguamos el signo de la derivada antes y después de *x = 1/2*.

- En $(0,1/2)$ tomamos *x = 0.25* y la derivada vale $C'(0.25)=8(0.5-1)=-4<0$. La función decrece en $(0,1/2)$.
- En $(1/2,2)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $C'(1)=8(2-1)=8>0$. La función crece en $(1/2,2)$.

El coste decrece en $(0,1/2)$ y crece en $(1/2,2)$.

b) Por el estudio del crecimiento y decrecimiento sabemos que la función presenta un mínimo relativo en *x = 1/2*.
Valoramos la función en dicho valor y en los extremos del intervalo para determinar el mínimo coste.

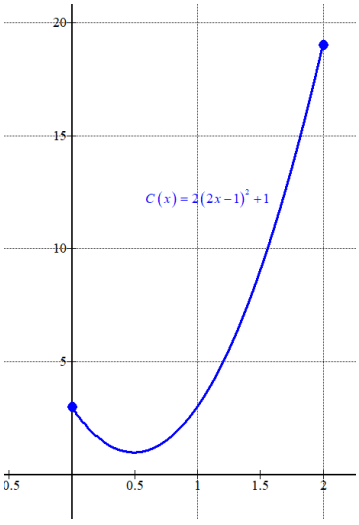
$C(0)=2(0-1)^2+1=3$

$C(0.5)=2(1-1)^2+1=1$ ¡¡MÍNIMO!!

$C(2)=2(4-1)^2+1=19$

Para que el coste sea mínimo hay que producir medio millón de kilogramos.
Este coste mínimo es de $C(0.5)=1$.

c) La gráfica es un trozo de parábola. Hemos determinado el vértice V(0.5, 1) y dos puntos más de su gráfica (0, 3) y (2, 19). Y conocemos sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.



EJERCICIO 3

Una marca de patinetes eléctricos fabrica tres modelos distintos A, B y C. El modelo A supone el 25 % de su producción, el B el 40 % y el resto de la producción corresponde al modelo C. Transcurridos tres meses desde su venta, se comprobó que el 15% de patinetes del modelo A, el 10% del B y el 12% del C había presentado alguna avería. Se elige al azar un patinete de esta marca.

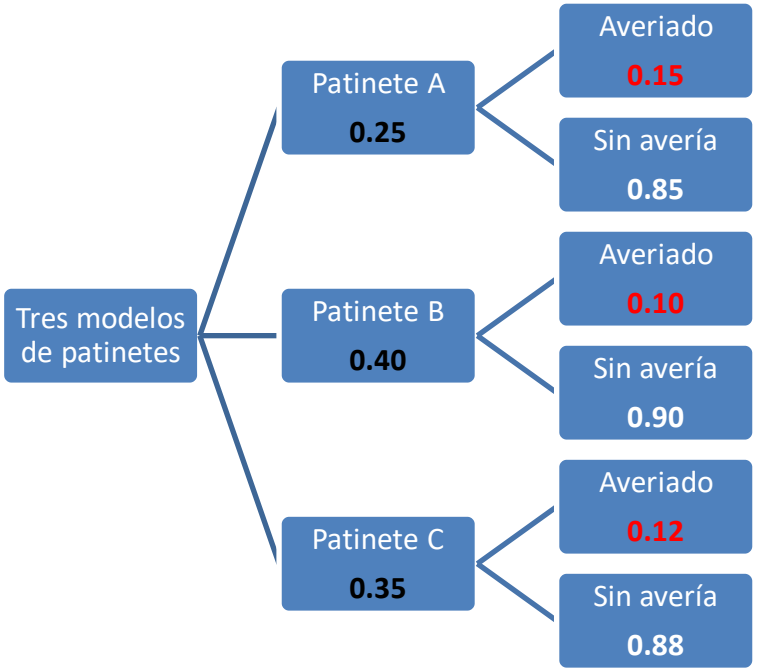
a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.

b) **(0.5 puntos)** Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?

c) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C.

El modelo C supone un 100 – 25 – 40 = 35 % de la producción.

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos A, B y C a los sucesos ser patinete de modelo A, B o C respectivamente.

Llamamos F al suceso tener avería en el patinete. $\overline{F}$ es el suceso no tener avería.

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(F)=P(A)P(F/A)+P(B)P(F/B)+P(C)P(F/C)=$$

$$=0.25\cdot 0.15+0.40\cdot 0.10+0.35\cdot 0.12=\boxed{0.1195}$$

b) Es la probabilidad que podemos observar en el diagrama de árbol. $P(\overline{F}/A)=\boxed{0.85}$

c) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(F\cup C)=P(F)+P(C)-P(F\cap C)=P(F)+P(C)-P(C)P(F/C)=$$

$$=0.1195+0.35-0.35\cdot 0.12=\boxed{0.4275}$$

EJERCICIO 4

Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo, con un 92% de confianza para la puntuación media de los participantes en dicho concurso

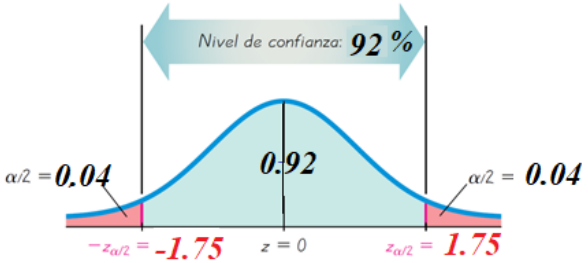
b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98 %.

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza → $\sigma = \sqrt{36} = 6$

X = Puntuación obtenida por un participante en un concurso. X = N(μ, 6)

n = 64 concursantes $\bar{x} = 35$ *puntos*

a) Determinamos $z_{\alpha/2}$ **c**on un nivel de confianza del 92 %.



$1 - \propto = 0{,}92 \rightarrow \propto = 0{,}08 \rightarrow \propto/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$

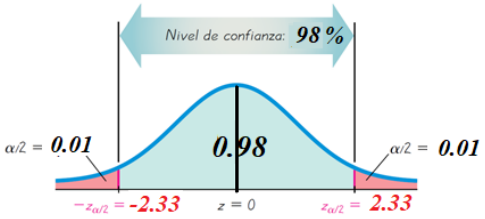
Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{6}{\sqrt{64}} = 1.3125$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(35 - 1.3125,\ \ 35 + 1.3125\right) = \left(33.6875, 36.3125\right)$$

b) Determinamos $z_{\alpha/2}$ **c**on un nivel de confianza del 98 %.



$1 - \propto = 0{,}98 \rightarrow \propto = 0{,}02 \rightarrow \propto/2 = 0'01 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.33}$

Igualamos el error del intervalo de confianza a 2.

$$Error = 2 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 2.33 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 2.33 \cdot 6 = 2\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{6 \cdot 2.33}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{6 \cdot 2.33}{2}\right)^2 = 48.8601$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 49 concursantes.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar, 1 kg de concentrado A se necesitan 4'5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7'5 kg de grano de Colombia y 1'5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67'5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía, y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

a) **(1'75 puntos)** Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.

b) **(0'25 puntos)** Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

c) **(0'5 puntos)** Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

a) Es un problema de programación lineal.
Sea x = nº de kilogramos del concentrado A de café.
y = nº de kilogramos del concentrado B de café.

	Colombia	Etiopía	Costa Rica
Concentrado A (x)	$4.5x$	$3x$	0
Concentrado B (y)	$7.5y$	0	$1.5y$
	$4.5x+7.5y$	$3x$	$1.5y$

Obtenemos las inecuaciones a partir de las restricciones.

"*Solo dispone de 67.5 kg de Colombia*" → $4.5x+7.5y \le 67.5$.

"*Solo dispone de 30 kg de Etiopía*" → $3x \le 30$.

"*Solo dispone de 9 kg de Costa Rica*" → $1.5y \le 9$.

"*El número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B*" → $x \ge \frac{y}{2}$.

Las cantidades deben ser positivas → $x \ge 0;\quad y \ge 0$

El sistema de inecuaciones que define la región factible es:

$$\left.\begin{array}{l} 4.5x+7.5y \le 67.5 \\ 3x \le 30 \\ 1.5y \le 9 \\ x \ge \dfrac{y}{2} \\ x \ge 0;\quad y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9x+15y \le 135 \\ x \le 10 \\ 3y \le 18 \\ 2x \ge y \\ x \ge 0;\quad y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+5y \le 45 \\ x \le 10 \\ y \le 6 \\ y \le 2x \\ x \ge 0;\quad y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x+5y=45$ $\quad x=10$ $\quad y=6$ $\quad y=2x$ $\quad x\geq 0;\quad y\geq 0$

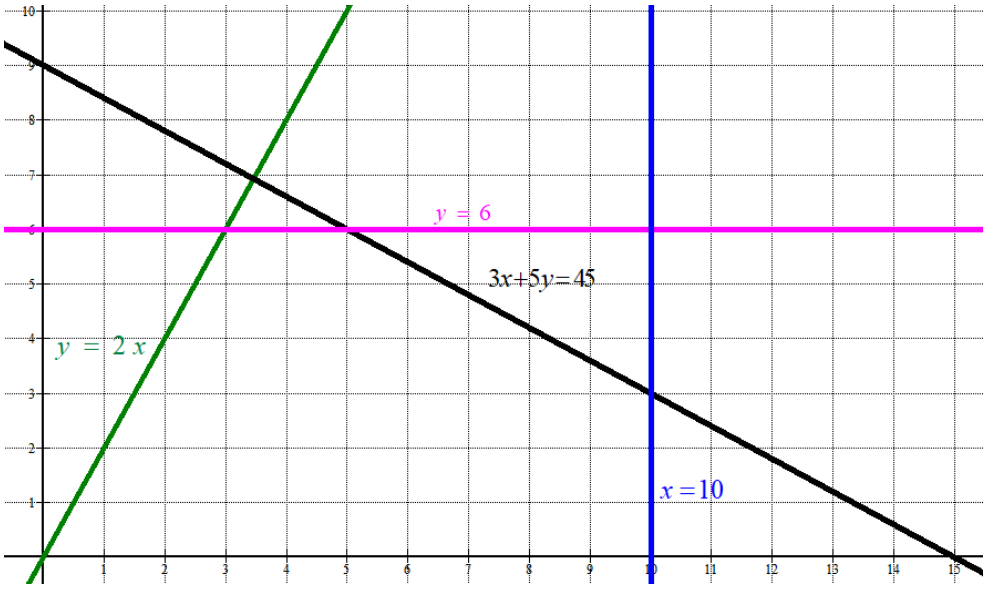
x	$y=\dfrac{45-3x}{5}$
5	6
10	3

$x=10$	y
10	0
10	6

x	$y=6$
10	6
5	6

x	$y=2x$
0	0
3	6

Primer cuadrante

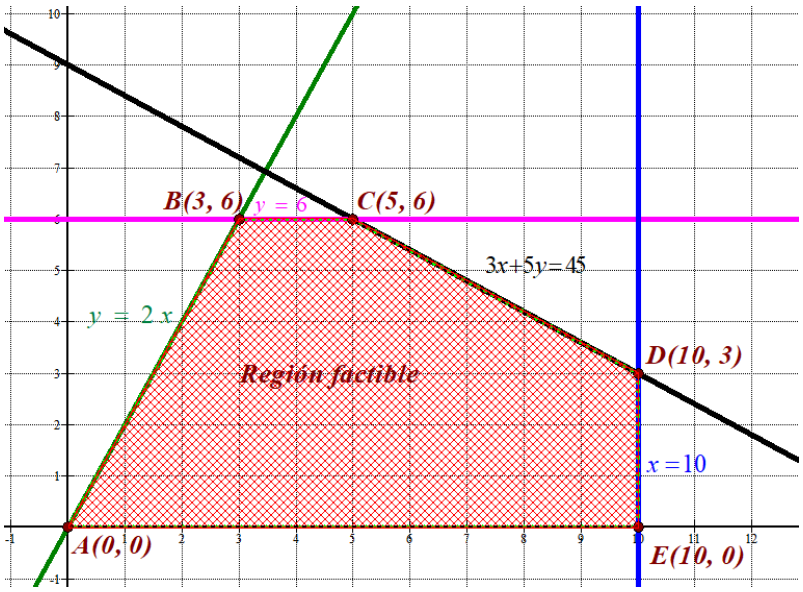


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l}3x+5y\leq 45\\ x\leq 10\\ y\leq 6\\ y\leq 2x\\ x\geq 0;\quad y\geq 0\end{array}\right\}$ nos dicen que la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas verde, negra y rosa y a la izquierda de la recta vertical azul. La coloreamos de rojo en el siguiente dibujo.

Comprobamos que el punto P(4, 4) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

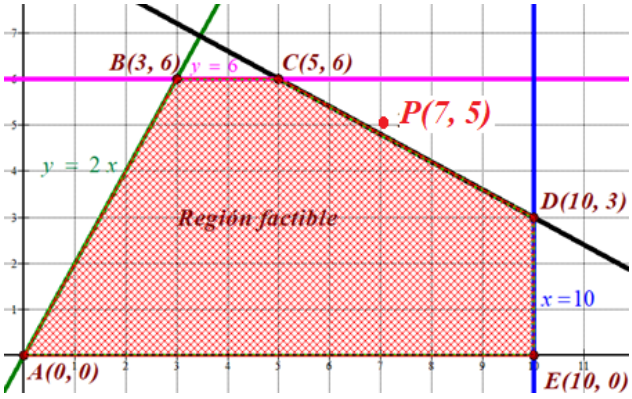
$$\left.\begin{array}{l}3\cdot 4+5\cdot 4\leq 45\\ 4\leq 10\\ 4\leq 6\\ 4\leq 2\cdot 4\\ 4\geq 0;\quad 4\geq 0\end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la coloreada en el siguiente dibujo.



Los vértices los determinamos a la vista de la cuadrícula del dibujo.
Tienen coordenadas A(0,0), B(3, 6), C(5, 6), D(10, 3) y E(10, 0).

b) Producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B lo representa el punto P(7, 5) que no pertenece a la región factible. No se podrían producir esos kg de concentrado cumpliendo las restricciones.



c) La función objetivo es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x,y)=2x+4y$.
Valoramos la función objetivo en cada uno de los vértices, en busca de su valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(3, 6) → $B(3,6)=6+24=30$

C(5, 6) → $B(5,6)=10+24=34$ ¡¡MÁXIMO!!

D(10, 3) → $B(10,3)=20+12=32$

E(10, 0) → $B(10,0)=20$

El máximo valor de la función es 34 y se alcanza en el vértice C(5, 6).
Se deben producir 5 kg de concentrado A y 6 de concentrado B para obtener un máximo beneficio de 34 euros.

EJERCICIO 2

De una cierta función *f*, sabemos que su función derivada es $f\,'(x)=3x^2-3$.

a) **(1 punto)** Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.
b) **(0.75 puntos)** Determine la curvatura de *f* y halle la abscisa de su punto de inflexión.
c) **(0.75 puntos)** Calcule la función *f*, sabiendo que su gráfica pasa por el punto (–1, 3).

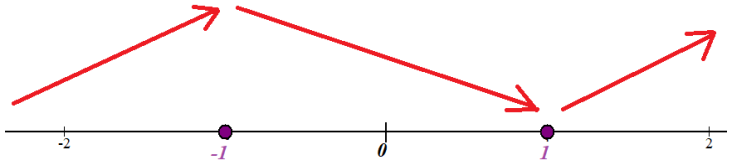
a) Igualamos a cero la derivada, en busca de los puntos críticos.

$$f\,'(x)=0\Rightarrow 3x^2-3=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de –1 y 1.

- En $(-\infty,-1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale $f\,'(-2)=3(-2)^2-3=9>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.
- En $(-1,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f\,'(0)=-3<0$. La función decrece en $(-1,1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f\,'(2)=12-3=9>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente



La función crece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(-1,1)$.

La función tiene un máximo relativo en *x = –1* y un mínimo relativo en *x = 1*.

b) Utilizamos la derivada segunda.

$$f\,'(x)=3x^2-3\Rightarrow f\,''(x)=6x$$
$$f\,''(x)=0\Rightarrow 6x=0\Rightarrow x=0$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de *x = 0*.

- En $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada segunda vale $f\,''(1)=-6<0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty,0)$.
- En $(0,+\infty)$ tomamos *x = 1* y la derivada segunda vale $f\,''(1)=6>0$. La función es convexa (∪) en $(0,+\infty)$.

La función es cóncava en $(-\infty,0)$ y convexa en $(0,+\infty)$.

Hay un punto de inflexión en *x = 0*.

c) Calculamos la función integrando la derivada.

$$f(x)=\int f\,'(x)\,dx=\int 3x^2-3dx=x^3-3x+K$$

Como la gráfica de la función pasa por el punto (–1, 3) se cumple que *f(–1) = 3*.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^3-3x+K \\ f(-1)=3 \end{array}\right\}\Rightarrow 3=(-1)^3-3(-1)+K\Rightarrow 3=-1+3+K\Rightarrow K=1$$

La función es $f(x)=x^3-3x+1$

EJERCICIO 3

De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:

$$P(A\cap B)=0.2,\ P(A\cup B)=0.4,\ P(A/B)=0.8.$$

a) **(1.2 puntos)** Calcule *P(B)* y *P(A)*.

b) **(0.5 puntos)** ¿Son los sucesos *A* y *B* independientes? Razone la respuesta.

c) **(0.8 puntos)** Calcule $P\left(A^C\cup B^C\right)$.

a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad condicionada.

$$\left.\begin{array}{l} P(A/B)=0.8\Rightarrow \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=0.8 \\ P(A\cap B)=0.2 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{0.2}{P(B)}=0.8\Rightarrow \boxed{P(B)=\frac{0.2}{0.8}=0.25}$$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=0.4 \\ P(A\cap B)=0.2 \\ P(B)=0.25 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\}\Rightarrow 0.4=P(A)+0.25-0.2\Rightarrow \boxed{P(A)=0.4-0.05=0.35}$$

b) Para que sean independientes debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$¿\ P(A\cap B)=P(A)P(B)?$$

$$¿0.2 = 0.25\cdot 0.35?$$

$$¿0.2 = 0.0875?$$

¡¡No son iguales!!

Los sucesos A y B no son independientes.

c) Utilizamos la ley de Morgan para la unión de sucesos contrarios.

$$P\left(A^C\cup B^C\right)=P\left(\left(A\cap B\right)^C\right)=1-P(A\cap B)=1-0.2=\boxed{0.8}$$

EJERCICIO 4

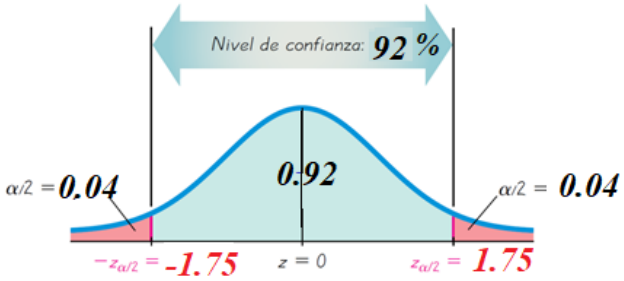
Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50 expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22% de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.

a) **(1.5 puntos)** Para un nivel de confianza del 92%, calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.

b) **(1 punto)** Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizarlos por causas debidas al tabaco sea inferior al 3 %.

n = 50. $p = 0.22 \rightarrow q = 1 - p = 1 - 0.22 = 0.78$

a) Con un nivel de confianza del 92 % tenemos



$1 - \propto = 0{,}92 \rightarrow \propto = 0{,}08 \rightarrow \propto/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.22 \cdot 0.78}{50}} \simeq 0.10252$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.22 - 0.10252,\quad 0.22 + 0.10252\right) = \left(0.11748, 0.32252\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 92 % tenemos $z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$

$$Error = 0.03 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 0.03 \Rightarrow 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.22 \cdot 0.78}{n}} = 0.03 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{0.22 \cdot 0.78}{n}} = \frac{0.03}{1.75} \Rightarrow \frac{0.22 \cdot 0.78}{n} = \left(\frac{0.03}{1.75}\right)^2 \Rightarrow n = \frac{0.22 \cdot 0.78}{\left(\frac{0.03}{1.75}\right)^2} \approx 583.9166$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 584 expedientes.

PevAU 2019 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2018-2019	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones: **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.

c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.

d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.

e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(2'5 puntos) Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camisera lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4200 g de algodón y 800g de poliéster.

Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

EJERCICIO 2

Se considera la función $f(x)=x^3-9x+2$.

a) **(1 punto)** Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica que sean paralelas a la recta $y=3x-3$.

b) **(1 punto)** Estudie la monotonía y la curvatura de la función *f*.

c) **(0.5 puntos)** Calcule $\int f(x)\,dx$

EJERCICIO 3

El 65 % de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75 % de los turistas que se hospedan en la capital y el 15 % de los que se hospedan en zonas rurales lo hace en hoteles, mientras que el resto lo hace es apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) **(1'5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

b) **(1 punto)** Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

EJERCICIO 4

Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partido político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.

a) **(1'5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de individuos que piensen votar a ese partido en dicha ciudad.

b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al 2%.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **(0´5 puntos)** Razone si la matriz A es simétrica.

b) **(1 punto)** Calcule A^{-1}.

c) **(1 punto)** Resuelva la ecuación matricial $2X \cdot A - A^2 - 3I_3 = 0$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si \quad x<0 \\ x^2+a & si \quad x\geq 0 \end{cases}$.

a) **(1 punto)** Determine el valor del parámetro *a* para que *f* sea continua en todo su dominio. Para ese valor de *a*, estudie la derivabilidad de *f*.

b) **(1´5 puntos)** Para *a = –2*, estudie la monotonía y curvatura de la función *f*. ¿Tiene algún punto de inflexión?

EJERCICIO 3

El 69 % de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el 35% películas y el 18% no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.

a) **(0'75 puntos)** Calcule la probabilidad de que vea series o películas.

b) **(1 punto)** Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.

c) **(0'75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

EJERCICIO 4

Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:

10 17 8 27 6 9 32 5 21

a) **(1'5 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional.

b) **(1 punto)** Con una confianza del 95'5 %, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1'5 minutos?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(2'5 puntos) Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camisera lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4200 g de algodón y 800g de poliéster.
Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Es un problema de programación lineal.
Sea x = nº de camisetas lisas e y = nº de camisetas estampadas.

	Algodón	Poliéster	Beneficio
Camisetas lisas (x)	70x	20x	5x
Camisetas estampadas (y)	60y	10y	4y
TOTALES	$70x+60y$	$20x+10y$	$5x+4y$

La función objetivo es el beneficio que deseamos maximizar: $B(x,y)=5x+4y$.

Las restricciones son:

"*La empresa dispone para ello de 4200 g de algodón*" → $70x+60y\le 4200$
"*La empresa dispone para ello de 800 g de poliéster*" → $20x+10y\le 800$
"*Debe fabricar al menos 10 estampadas*" → $y\ge 10$
"*El doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas*" → $2y\ge x$
"Las cantidades deben ser positivas" → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}70x+60y\le 4200\\20x+10y\le 800\\y\ge 10\\2y\ge x\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}7x+6y\le 420\\2x+y\le 80\\y\ge 10\\2y\ge x\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}6y\le 420-7x\\y\le 80-2x\\y\ge 10\\2y\ge x\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

Representamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$x\ge 0;\ y\ge 0$ $\quad 6y=420-7x$ $\quad y=80-2x$ $\quad y=10$ $\quad 2y=x$

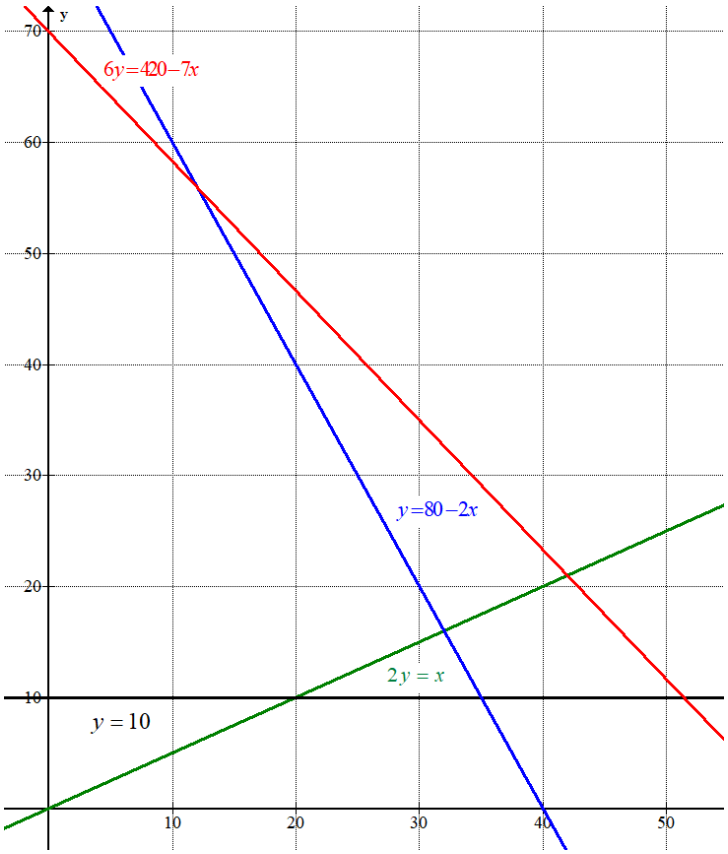
Primer cuadrante

x	$y=\frac{420-7x}{6}$
0	70
30	35

x	$y=80-2x$
0	80
40	0

x	$y=10$
0	10
20	10

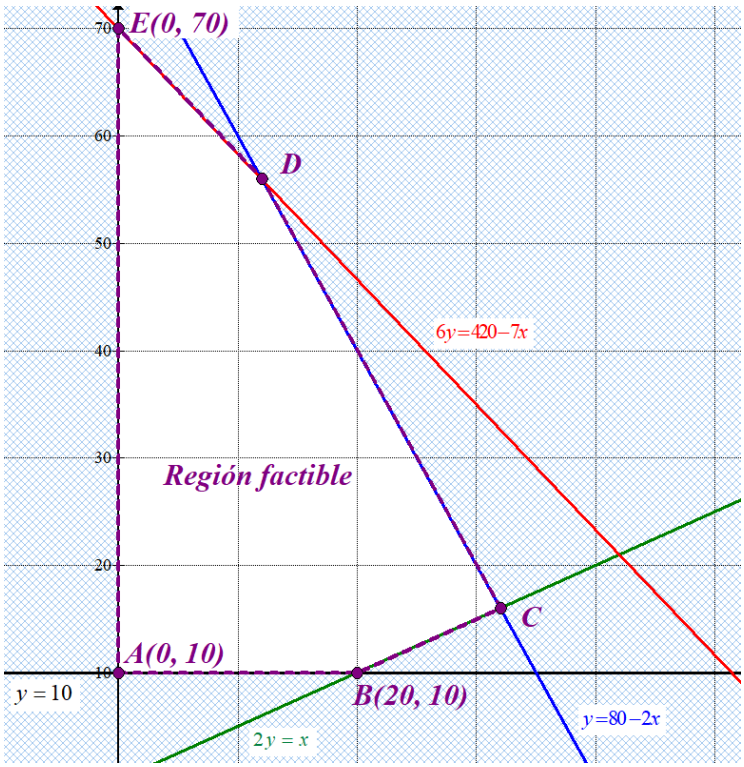
x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
20	10



Dado que las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 6y \le 420 - 7x \\ y \le 80 - 2x \\ y \ge 10 \\ 2y \ge x \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por encima de la recta horizontal negra y la recta verde, y por debajo de las rectas roja y azul. Comprobamos que el punto P(20, 20) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 6\cdot 20 \le 420 - 7\cdot 20 \\ 20 \le 80 - 2\cdot 20 \\ 20 \ge 10 \\ 2\cdot 20 \ge 20 \\ 20 \ge 0;\ 20 \ge 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la región que dejamos en blanco en el siguiente dibujo.



Se aprecian las coordenadas de los vértices A, B y E, pero falta determinar las coordenadas de los vértices C y D que obtenemos resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$C \to \begin{cases} y = 80 - 2x \\ 2y = x \end{cases} \Rightarrow y = 80 - 4y \Rightarrow 5y = 80 \Rightarrow y = \frac{80}{5} = 16 \Rightarrow x = 32 \Rightarrow \boxed{C(32,16)}$$

$$D \to \begin{cases} 6y = 420 - 7x \\ y = 80 - 2x \end{cases} \Rightarrow 480 - 12x = 420 - 7x \Rightarrow 60 = 5x \Rightarrow x = \frac{60}{5} = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 80 - 24 = 56 \Rightarrow \boxed{D(12,56)}$$

Valoramos la función objetivo $B(x,y) = 5x + 4y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

A(0, 10) → $B(0,10) = 40$

B(20, 10) → $B(20,10) = 100 + 40 = 140$

C(32, 16) → $B(32,16) = 160 + 64 = 224$

D(12, 56) → $B(12,56) = 60 + 224 = 284$ ¡¡Máximo!!

E(0, 70) → $B(0,70) = 280$

El máximo beneficio que se puede obtener con las condiciones impuestas en el problema es de 284 € y se obtiene con la fabricación de 12 camisetas lisas y 56 estampadas.

EJERCICIO 2

Se considera la función $f(x)=x^3-9x+2$.

a) **(1 punto)** Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica que sean paralelas a la recta $y=3x-3$.

b) **(1 punto)** Estudie la monotonía y la curvatura de la función *f*.

c) **(0.5 puntos)** Calcule $\int f(x)\,dx$

a) La recta $y=3x-3$ tiene pendiente 3, por lo que debemos buscar los valores de *x* para los que la pendiente de la recta tangente es 3, para ello debemos buscar cuando la derivada vale 3.

$$f(x)=x^3-9x+2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-9$$
$$f'(x)=3 \Rightarrow 3x^2-9=3 \Rightarrow 3x^2=12 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4} \Rightarrow \boxed{x=\pm 2}$$

La recta tangente es paralela a $y=3x-3$ en $x=2$ y en $x=-2$.

Calculamos la recta tangente a la función en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=(2)^3-9(2)+2=-8 \\ f'(2)=3(2)^2-9=3 \\ \text{Tgte} \rightarrow y-f(2)=f'(2)(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow y-(-8)=3(x-2) \Rightarrow y+8=3x-6 \Rightarrow \boxed{y=3x-14}$$

Calculamos la recta tangente a la función en $x=-2$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=(-2)^3-9(-2)+2=12 \\ f'(-2)=3(-2)^2-9=3 \\ \text{Tgte} \rightarrow y-f(-2)=f'(-2)(x-(-2)) \end{array}\right\} \Rightarrow y-12=3(x+2) \Rightarrow \boxed{y=3x+18}$$

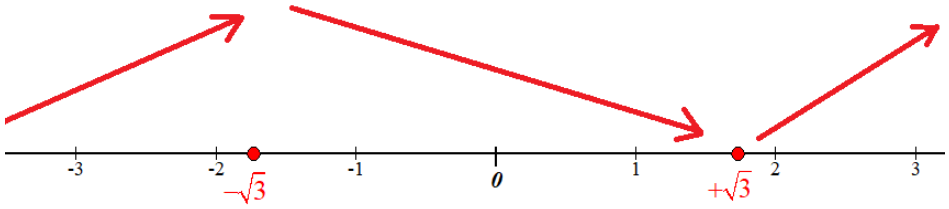
b) Utilizamos la derivada de la función para encontrar sus puntos críticos.

$$f(x)=x^3-9x+2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-9$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-9=0 \Rightarrow 3x^2=9 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{3}}$$

Estudiamos la variación del signo de la derivada antes, entre y después de $x=-\sqrt{3}$ y $x=+\sqrt{3}$.

- En $(-\infty,-\sqrt{3})$ tomamos *x = –2* y la derivada vale $f'(-2)=3(-2)^2-9=3>0$. La función crece en $(-\infty,-\sqrt{3})$.
- En $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=-9<0$. La función decrece en $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.
- En $(\sqrt{3},+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=3(2)^2-9=3>0$. La función crece en $(\sqrt{3},+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$ y decrece en $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

Para estudiar la curvatura utilizo la segunda derivada.

$$f'(x)=3x^2-9 \Rightarrow f''(x)=6x$$
$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Como se aprecia en el esquema superior la función presenta un punto de inflexión en $x = 0$. También lo podemos comprobar viendo que la tercera derivada no se anula en $x = 0$.

$$f''(x)=6x \Rightarrow f'''(x)=6 \Rightarrow f'''(0)=6\neq 0$$

Como $f(0)=2$ el punto de inflexión tiene coordenadas (0, 2).

Como observamos en el esquema superior la función es cóncava (∩) en $(-\infty,0)$ y convexa (∪) en $(0,+\infty)$. También se puede comprobar viendo del signo de la segunda derivada antes de $x = 0$ y después de este valor.

- En $(-\infty,0)$ tomo $x = -1$ y la segunda derivada vale $f''(-1)=-6<0$. la función es cóncava (∩) en $(-\infty,0)$.
- En $(0,+\infty)$ tomo $x = 1$ y la segunda derivada vale $f''(1)=6>0$. la función es convexa (∪) en $(0,+\infty)$.

c) Calculamos la integral pedida.

$$\int f(x)\,dx=\int x^3-9x+2\,dx=\boxed{\frac{x^4}{4}-9\frac{x^2}{2}+2x+K}$$

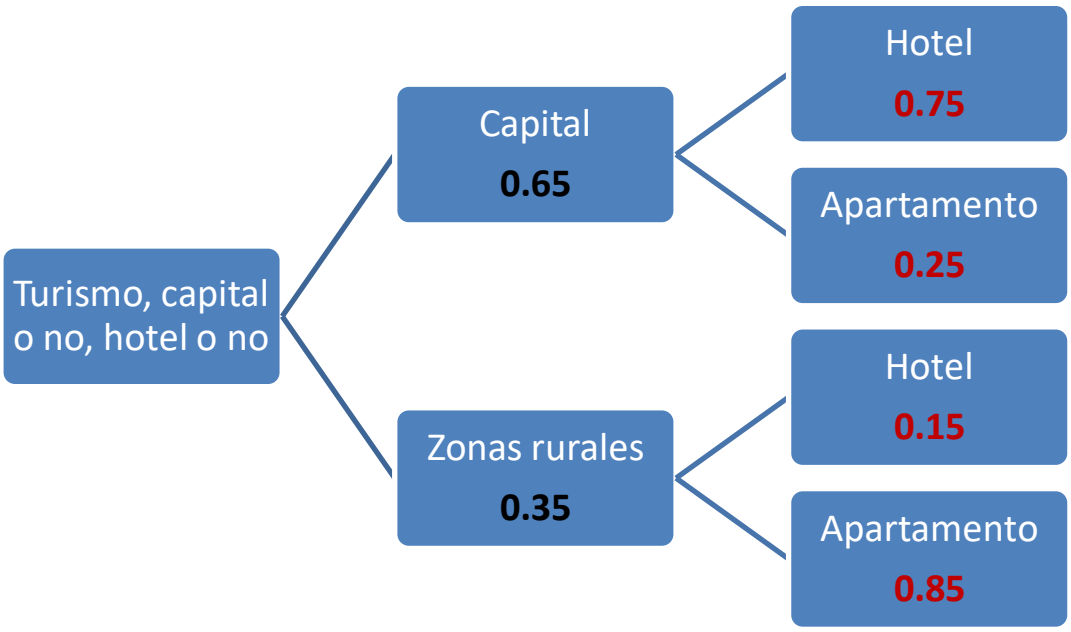
EJERCICIO 3

El 65 % de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75 % de los turistas que se hospedan en la capital y el 15 % de los que se hospedan en zonas rurales lo hace en hoteles, mientras que el resto lo hace es apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) **(1'5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

b) **(1 punto)** Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

Realizamos un diagrama de árbol de la situación planteada.



Llamamos H al suceso "El turista se hospeda en hotel", y C al suceso "El turista se aloja en la capital". Por lo que $\overline{H}$ es el suceso "El turista se aloja en apartamento" y $\overline{C}$ es el suceso "El turista se aloja en zonas rurales".

a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total y los datos proporcionados en el diagrama de árbol.

$$P(H)=P(C)P(H/C)+P(\overline{C})P(H/\overline{C})=0.65\cdot 0.75+0.35\cdot 0.15=\boxed{\frac{27}{50}=0.54}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{C}/\overline{H})=\frac{P(\overline{C}\cap\overline{H})}{P(\overline{H})}=\frac{P(\overline{C})P(\overline{H}/\overline{C})}{1-P(H)}=\frac{0.35\cdot 0.85}{1-0.54}=\boxed{\frac{119}{184}\simeq 0.65}$$

EJERCICIO 4

Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partido político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.

a) **(1'5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de individuos que piensen votar a ese partido en dicha ciudad.

b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al 2%.

n = 300. $p = \frac{135}{300} = 0.45 \rightarrow q = 1 - p = 1 - 0.45 = 0.55$

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow$
$\rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{300}} \simeq 0.06233$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.45 - 0.06233,\ \ 0.45 + 0.06233\right) = \left(0.38767,\ 0.51233\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos $z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$

$$Error = 0.02 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 0.02 \Rightarrow 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{n}} = 0.02 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{n}} = \frac{0.02}{2.17} \Rightarrow \frac{0.45 \cdot 0.55}{n} = \left(\frac{0.02}{2.17}\right)^2 \Rightarrow n = \frac{0.45 \cdot 0.55}{\left(\frac{0.02}{2.17}\right)^2} \approx 2913.631875$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 2914 votantes.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) **(0´5 puntos)** Razone si la matriz A es simétrica.

b) **(1 punto)** Calcule A^{-1}.

c) **(1 punto)** Resuelva la ecuación matricial $2X\cdot A-A^2-3I_3=0$

a) Una matriz cuadrada A es simétrica si $A = A^t$, es decir coincide con su traspuesta.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=A^t$$

No coinciden los elementos marcados de rojo, por lo que no es simétrica.

b) Comprobamos si existe la inversa de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=2+0+0-0-4+1=-1\neq 0$$

Como el determinante es no nulo existe la inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -2\\ -2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

c) Despejamos X en la ecuación $2X\cdot A-A^2-3I_3=0$.

$$2X\cdot A-A^2-3I_3=0\Rightarrow 2X\cdot A=A^2+3I_3\Rightarrow 2X\cdot A\cdot A^{-1}=A^2\cdot A^{-1}+3I_3\cdot A^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2X=A\cdot A\cdot A^{-1}+3A^{-1}\Rightarrow 2X=A\cdot I_3+3A^{-1}\Rightarrow 2X=A+3A^{-1}\Rightarrow X=\frac{1}{2}\left(A+3A^{-1}\right)$$

Calculamos el valor de X.

$$X=\frac{1}{2}\left(A+3A^{-1}\right)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-3 & -2 & -2\\ -2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\right]$$

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-9 & -2-6 & 0-6\\ -2-6 & 2-3 & -1-3\\ 0+6 & 1+3 & 1+6\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-8 & -8 & -6\\ -8 & -1 & -4\\ 6 & 4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -4 & -3\\ -4 & -1/2 & -2\\ 3 & 2 & 7/2\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & si \quad x<0\\ x^2+a & si \quad x\geq 0\end{cases}$.

a) **(1 punto)** Determine el valor del parámetro *a* para que *f* sea continua en todo su dominio. Para ese valor de *a*, estudie la derivabilidad de *f*.

b) **(1´5 puntos)** Para *a = –2*, estudie la monotonía y curvatura de la función *f*. ¿Tiene algún punto de inflexión?

a) Para $x < 0$ la función es $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ que es continua pues el denominador se anula para $x=1\notin(-\infty,0)$.

Para $x > 0$ la función es $f(x)=x^2+a$ que es continua pues es una función polinómica.

Falta ver que sea continua en $x = 0$, en el cambio de definición.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^2+a=a \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{-1}=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+a=a \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=-1}$$

Para $a = –1$ la función es continua. Estudiamos su derivabilidad.

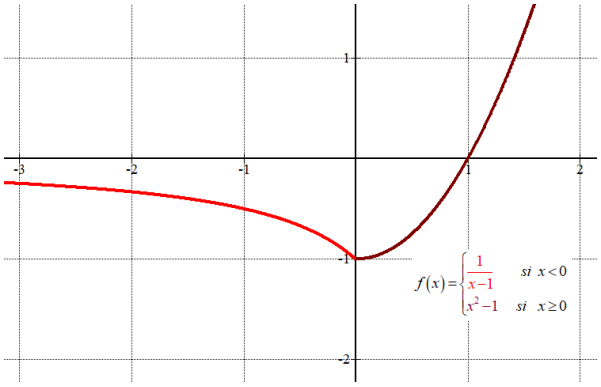
En cada rama es derivable pues una de las ramas es una fracción de polinomios donde no se anula el denominador y la otra rama es una función polinómica.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(x-1)^2} & si \quad x<0\\ 2x & si \quad x>0\end{cases}$$

Estudiamos su derivabilidad en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{(x-1)^2}=\dfrac{-1}{1}=-1 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x=0 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(0^-)=-1\neq 0=f'(0^+)$$

Al no coincidir las derivadas laterales la función no es derivable en $x = 0$.



b) Para $a = -2$ la función queda $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & si \quad x<0\\ x^2-2 & si \quad x\geq 0\end{cases}$.

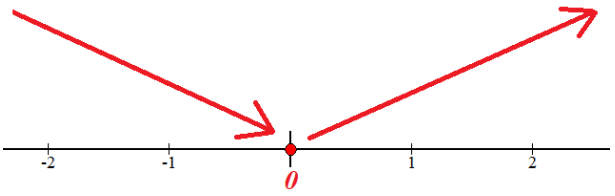
Utilizamos la derivada para encontrar sus posibles puntos críticos.

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-1}{(x-1)^2}=0\rightarrow \text{¡No es posible}\\ \text{o}\\ 2x=0\rightarrow x=0\notin(0,+\infty)\end{cases}$$

La función no presenta puntos críticos (cambio de signo de la derivada). Veamos el signo de la derivada en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{-1}{(-1-1)^2}=\dfrac{-1}{4}<0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=2>0$. La función crece en $(0,+\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0,+\infty)$.

Para estudiar la curvatura utilizo la derivada segunda.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(x-1)^2} & si \quad x<0\\ 2x & si \quad x>0\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(x-1)^3} & si \quad x<0\\ 2 & si \quad x>0\end{cases}$$

Tampoco se anula en ningún valor del dominio.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale $f''(-1)=\dfrac{2}{(-1-1)^3}=\dfrac{-1}{4}<0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty, 0)$.
- En $(0,+\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale $f''(1)=2>0$. La función es convexa (∪) en $(0,+\infty)$.

La función es cóncava (∩) en $(-\infty, 0)$ y convexa (∪) en $(0,+\infty)$.

EJERCICIO 3

El 69 % de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el 35% películas y el 18% no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.

a) **(0'75 puntos)** Calcule la probabilidad de que vea series o películas.

b) **(1 punto)** Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.

c) **(0'75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

Realizamos una tabla de contingencia para obtener toda la información sobre esta situación planteada.

	Ven películas	**No ven películas**	
Ven series			**69**
No ven series		**18**	
	35		**100**

Completamos la tabla.

	Ven películas	**No ven películas**	
Ven series	**22**	**47**	**69**
No ven series	**13**	**18**	**31**
	35	**65**	**100**

a) Aplicamos la regla de Laplace. De 100 habitantes hay 22 + 47 + 13 = 82 que ven series o películas.

$$P(\text{Vea series o películas}) = \frac{82}{100} = \boxed{0.82}$$

b) Aplicamos la regla de Laplace. De los 69 habitantes que ven series 22 además ven películas.

$$P(\text{Vea películas / Ve series}) = \boxed{\frac{22}{69} \simeq 0.319}$$

c) Aplicamos la regla de Laplace. De los 100 habitantes hay 47 que ven series y no ven películas.

$$P(\text{Vea series y no vea películas}) = \frac{47}{100} = \boxed{0.47}$$

EJERCICIO 4

Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:

10 17 8 27 6 9 32 5 21

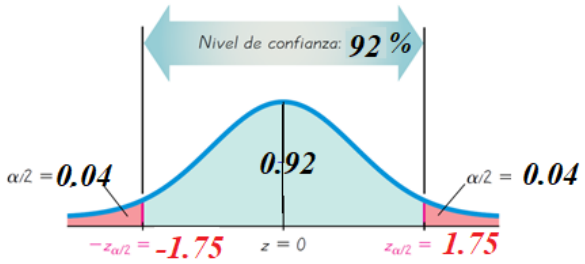
a) **(1'5 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional.

b) **(1 punto)** Con una confianza del 95'5 %, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1'5 minutos?

X = Tiempo medio que tarda un empleado en llegar al puesto de trabajo desde su domicilio expresado en minutos. X = N(μ, 8)

n = 9 empleados $\quad \bar{x} = \frac{10+17+8+27+6+9+32+5+21}{9} = \frac{135}{9} = 15$ minutos

a) Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 92 %.



$1 - \propto = 0{,}92 \rightarrow \propto = 0{,}08 \rightarrow \propto/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9

Calculamos el error del intervalo de confianza.

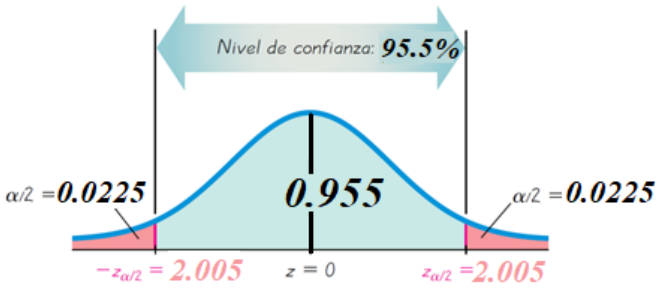
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{8}{\sqrt{9}} = \frac{14}{3} \simeq 4.667$$

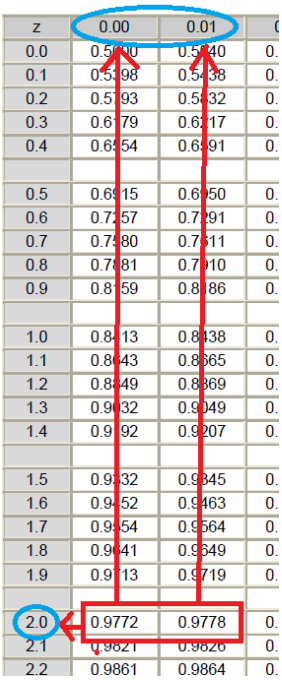
El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x}-Error,\bar{x}+Error\right)=\left(15-4.667,\ \ 15+4.667\right)=\left(10.333,19.667\right)$$

b) Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 95.5 %.

$1-\propto=0{,}955 \rightarrow \propto=0{,}045 \rightarrow \propto/2=0'0225 \rightarrow 1-\propto/2=0{,}9775 \rightarrow z_{\alpha/2}=\dfrac{2.00+2.01}{2}=2.005$





z	0.00	0.01	
0.0	0.5000	0.5040	0.
0.1	0.5398	0.5438	0.
0.2	0.5793	0.5832	0.
0.3	0.6179	0.6217	0.
0.4	0.6554	0.6591	0.
0.5	0.6915	0.6950	0.
0.6	0.7257	0.7291	0.
0.7	0.7580	0.7611	0.
0.8	0.7881	0.7910	0.
0.9	0.8159	0.8186	0.
1.0	0.8413	0.8438	0.
1.1	0.8643	0.8665	0.
1.2	0.8849	0.8869	0.
1.3	0.9032	0.9049	0.
1.4	0.9192	0.9207	0.
1.5	0.9332	0.9345	0.
1.6	0.9452	0.9463	0.
1.7	0.9554	0.9564	0.
1.8	0.9641	0.9649	0.
1.9	0.9713	0.9719	0.
2.0	0.9772	0.9778	0.
2.1	0.9821	0.9826	0.
2.2	0.9861	0.9864	0.

Igualamos el error del intervalo de confianza a 1.5.

$$Error=1.5\Rightarrow z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.5\Rightarrow 2.005\cdot\frac{8}{\sqrt{n}}=1.5\Rightarrow 2.005\cdot 8=1.5\sqrt{n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{8\cdot 2.005}{1.5}\Rightarrow n=\left(\frac{8\cdot 2.005}{1.5}\right)^2\simeq 114.347$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 115 empleados.

PevAU 2018 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD CURSO 2017-2018	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones: **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.

c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.

d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.

e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x+2y\leq 11 \qquad x\geq 2y-5 \qquad 3x+y\leq 18 \qquad x\geq 0 \qquad y\geq 0$$

a) **(1.8 puntos)** Represente gráficamente la región que definen y calcule sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** Halle los puntos de esa región en los que la función $F(x,y)=2x+3y$ alcanza los valores mínimo y máximo y calcule dichos valores.

c) **(0.2 puntos)** Justifique si el punto (5.5, 2) pertenece a la región factible.

EJERCICIO 2

El consumo de cereales en una ciudad, en miles de toneladas, viene dado por la función $c(t)=t^3-15t^2+63t+10$, para $0\leq t\leq 12$, donde t representa el tiempo.

a) **(0.8 puntos)** ¿En qué instante se alcanza el máximo consumo de cereales y cuantas toneladas se consumen en ese momento?

b) **(0.7 puntos)** ¿En qué intervalo de tiempo decrece el consumo de cereales?

c) **(1 punto)** Represente gráficamente la función.

EJERCICIO 3

En una localidad, el 25% de los habitantes asiste periódicamente a la consulta del dentista, el 10% se hace una analítica y el 8% hace ambas cosas.

a) **(0.5 puntos)** ¿Razone si los sucesos "Asistir a la consulta del dentista" y "Hacerse una analítica" son independientes?

b) **(1 punto)** ¿Qué porcentaje de habitantes ni se hace una analítica ni va al dentista?

c) **(1 punto)** Si elegimos un habitante al azar de esa localidad de entre los que van al dentista, ¿cuál es la probabilidad de que se haga una analítica?

EJERCICIO 4

En una zona escolar formada por tres centros de secundaria, se desea estimar la proporción de este alumnado que lleva teléfono móvil al instituto. Se toma una muestra aleatoria simple de 121 estudiantes, de los cuales 74 lo llevan.

a) **(1.2 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 97% para la proporción de estudiantes que son usuarios que lleva el móvil al instituto. ¿Entre qué dos porcentajes varía esa proporción a ese nivel de confianza?

b) **(0.5 puntos)** Si con la misma muestra se disminuye el nivel de confianza, ¿qué efecto tendrá esta disminución en el error de la estimación?

c) **(0.8 puntos)** Si en la misma zona se elige mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional otra muestra de 121 estudiantes, considerando que el segundo centro escolar tiene el doble de alumnos que el primero y el tercero tiene el triple que el primero, ¿Cuántos alumnos de cada centro se deben tomar para construir la muestra?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **(1 punto)** Calcule $A^{2018} + A^{2019}$.

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + B \cdot B^t = 2A$.

EJERCICIO 2

El beneficio, en miles de euros, que ha obtenido una almazara lo largo de 50 años viene dado por $B(t) = \begin{cases} -0.04t^2 + 2.4t & si \quad 0 \le t < 40 \\ \dfrac{40t - 320}{t} & si \quad 40 \le t \le 50 \end{cases}$, donde t es el tiempo transcurrido.

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función *B(t)* en el intervalo $[0,\ 50]$.

b) **(1 punto)** Estudie la monotonía de la función B(t) y determine en qué momento fueron mayores los beneficios de la almazara, así como el beneficio máximo.

c) **(0.5 puntos)** Represente la gráfica de la función y explique la evolución del beneficio.

EJERCICIO 3

Un hotel dispone de tres lavadoras industriales L_1, L_2 y L_3 para el servicio de lavandería. El 50% de los lavados los realiza L_1, el 30% los hace L_2 y el resto L_3. La lavadora L_1 produce un 5% de lavados defectuosos, L_2 produce un 15% y L_3 un 20%. Se elige al azar un lavado de hotel.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que no sea defectuoso**.**

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el lavado haya sido realizado por L_1, sabiendo que ha sido defectuoso.

EJERCICIO 4

La edad de los empleados de una empresa sigue una ley Normal de varianza 64 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria simple de 16 empleados de dicha empresa abatiéndose las siguientes edades:

30 42 38 45 52 60 21 26 33 44 28 49 37 41 38 40.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza para estimar la media de los empleados, con un nivel de confianza del 97%.

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la edad media de los empleados, con un error inferior a 2 años y nivel de confianza del 99%.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x+2y\le 11 \qquad x\ge 2y-5 \qquad 3x+y\le 18 \qquad x\ge 0 \qquad y\ge 0$$

a) **(1.8 puntos)** Represente gráficamente la región que definen y calcule sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** Halle los puntos de esa región en los que la función $F(x,y)=2x+3y$ alcanza los valores mínimo y máximo y calcule dichos valores.

c) **(0.2 puntos)** Justifique si el punto (5.5, 2) pertenece a la región factible.

a) Representamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$x+2y=11$

x	$y=\dfrac{11-x}{2}$
5	3
3	4

$x=2y-5$

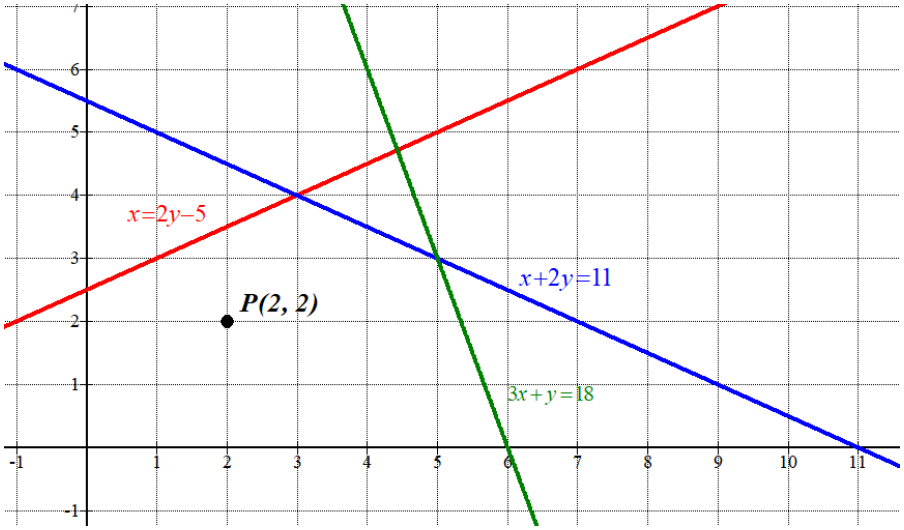
x	$y=\dfrac{x+5}{2}$
5	5
3	45

$3x+y=18$

x	$y=18-3x$
6	0
5	3

$x\ge 0 \qquad y\ge 0$

Primer cuadrante



Comprobamos que el punto P(2, 2) cumple todas las restricciones.

$$2+2\cdot 2\le 11 \qquad 2\ge 2\cdot 2-5 \qquad 3\cdot 2+2\le 18 \qquad 2\ge 0 \qquad 2\ge 0$$

Por lo que la región que definen las inecuaciones es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja, azul y verde.

Coloreamos de rosa la región y determinamos los vértices resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

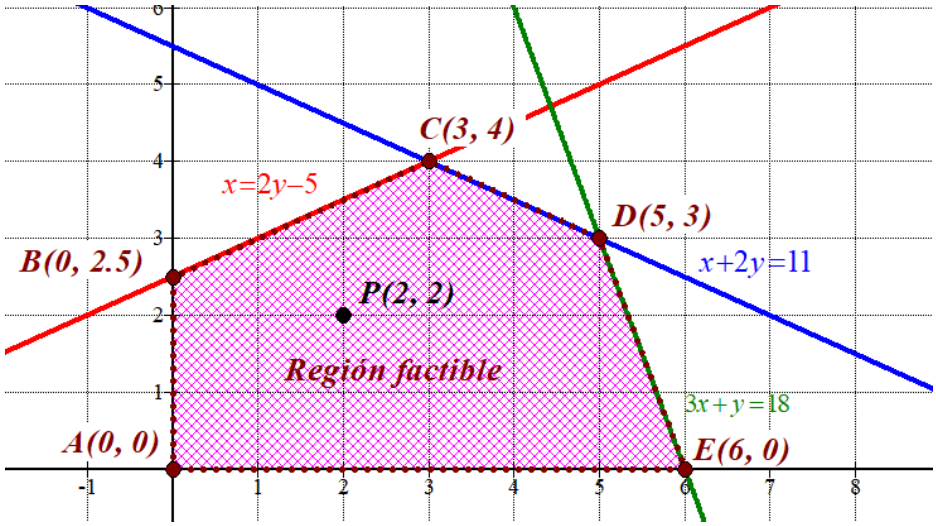
$$B\to\begin{cases}x=0\\x=2y-5\end{cases}\Rightarrow 0=2y-5\Rightarrow y=\frac{5}{2}=2.5\Rightarrow \boxed{B(0,2.5)}$$

$$C\to\begin{cases}x+2y=11\\x=2y-5\end{cases}\Rightarrow 2y-5+2y=11\Rightarrow 4y=16\Rightarrow y=4\Rightarrow x=8-5=3\Rightarrow \boxed{C(3,4)}$$

$$D \to \begin{cases} x+2y=11 \\ 3x+y=18 \end{cases} \Rightarrow x=11-2y \Rightarrow 3(11-2y)+y=18 \Rightarrow 33-6y+y=18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y=18-33 \Rightarrow y=\frac{-15}{-5}=3 \Rightarrow x=11-6=5 \Rightarrow \boxed{D(5,3)}$$

$$E \to \begin{cases} y=0 \\ 3x+y=18 \end{cases} \Rightarrow 3x=18 \Rightarrow x=6 \Rightarrow \boxed{E(6,0)}$$



b) Valoramos la función objetivo $F(x,y)=2x+3y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo y mínimo.

A(0, 0) → $F(0,0)=0$ ¡Mínimo!

B(0, 2.5) → $F(0,2.5)=0+7.5=7.5$

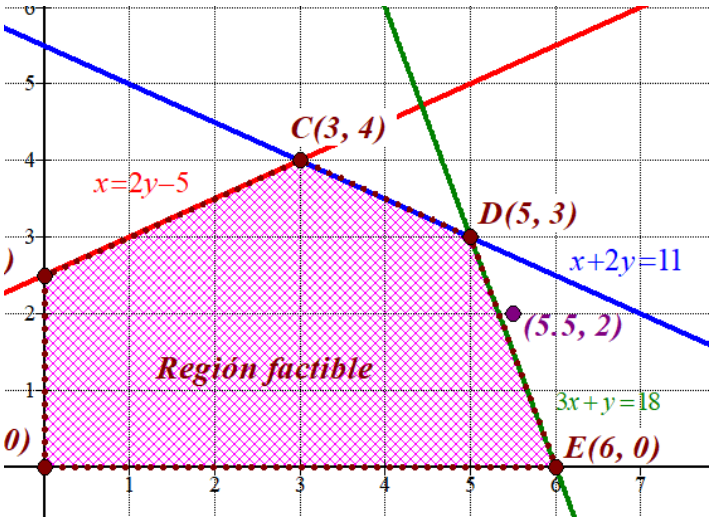
C(3, 4) → $F(3,4)=6+12=18$

D(5, 3) → $F(5,3)=10+9=19$ ¡Máximo!

E(6, 0) → $F(6,0)=12$

La función $F(x,y)=2x+3y$ alcanza su mínimo valor (0) en el punto A(0, 0) y su máximo valor (19) en el punto D(5, 3).

c) El punto (5.5, 2) lo dibujamos en el plano y comprobamos si está en la región coloreada.



Es difícil apreciar si está dentro o fuera de la región factible dada su proximidad a la misma, aún más si el dibujo de esta región se hace de forma manual.
Lo comprobamos viendo si cumple todas las inecuaciones.

$$(5.5, 2) \rightarrow \begin{cases} ¿5.5 + 2 \cdot 2 \leq 11? \rightarrow ¿9.5 \leq 11? \text{ ¡Cierto!} \\ ¿5.5 \geq 2 \cdot 2 - 5? \rightarrow ¿5.5 \geq -1? \text{ ¡Cierto!} \\ ¿3 \cdot 5.5 + 2 \leq 18? \rightarrow ¿18.5 \leq 18? \text{ ¡No se cumple!} \\ 5.5 \geq 0 \rightarrow \text{¡Cierto!} \\ 2 \geq 0 \rightarrow \text{¡Cierto!} \end{cases}$$

Al no cumplirse una de las inecuaciones el punto (5.5, 2) no pertenece a la región factible.

EJERCICIO 2

El consumo de cereales en una ciudad, en miles de toneladas, viene dado por la función $c(t)=t^3-15t^2+63t+10$, para $0\le t\le 12$, donde t representa el tiempo.

a) **(0.8 puntos)** ¿En qué instante se alcanza el máximo consumo de cereales y cuantas toneladas se consumen en ese momento?

b) **(0.7 puntos)** ¿En qué intervalo de tiempo decrece el consumo de cereales?

c) **(1 punto)** Represente gráficamente la función.

a) Utilizamos la derivada para localizar el máximo relativo de la función.

$$c(t)=t^3-15t^2+63t+10 \Rightarrow c'(t)=3t^2-30t+63$$

$$c'(t)=0 \Rightarrow 3t^2-30t+63=0 \Rightarrow t^2-10t+21=0 \Rightarrow t=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 21}}{2}$$

$$t=\frac{10\pm\sqrt{100-84}}{2}=\frac{10\pm 4}{2}=\begin{cases}\frac{10+4}{2}=7=t\\ \frac{10-4}{2}=3=t\end{cases}$$

Los dos puntos críticos de la función obtenidos pertenecen al intervalo de definición de la función.

Para obtener donde se alcanza el máximo valoramos la función $c(t)=t^3-15t^2+63t+10$ en estos valores: $t = 3$, $t = 7$ y en los extremos del intervalo de definición [0, 12].

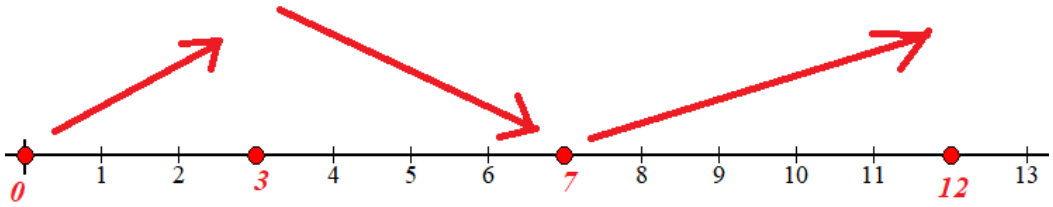
$$c(t)=t^3-15t^2+63t+10 \Rightarrow \begin{cases}c(0)=0^3-15\cdot 0^2+63\cdot 0+10=10\\ c(3)=3^3-15\cdot 3^2+63\cdot 3+10=91\\ c(7)=7^3-15\cdot 7^2+63\cdot 7+10=59\\ c(12)=12^3-15\cdot 12^2+63\cdot 12+10=334\end{cases}$$

El máximo consumo de cereales es de 334 000 toneladas y se produce en el valor $t = 12$.

b) Ya hemos obtenido los puntos críticos de la función: $t = 3$ y $t = 7$.
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(0,3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $c'(2)=3\cdot 2^2-30\cdot 2+63=15>0$. La función crece en el intervalo $(0,3)$.
- En $(3,7)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $c'(5)=3\cdot 5^2-30\cdot 5+63=-12<0$. La función decrece en el intervalo $(3,7)$.
- En $(7,12)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $c'(10)=3\cdot 10^2-30\cdot 10+63=63>0$. La función crece en el intervalo $(7,12)$.

La función sigue el esquema siguiente:

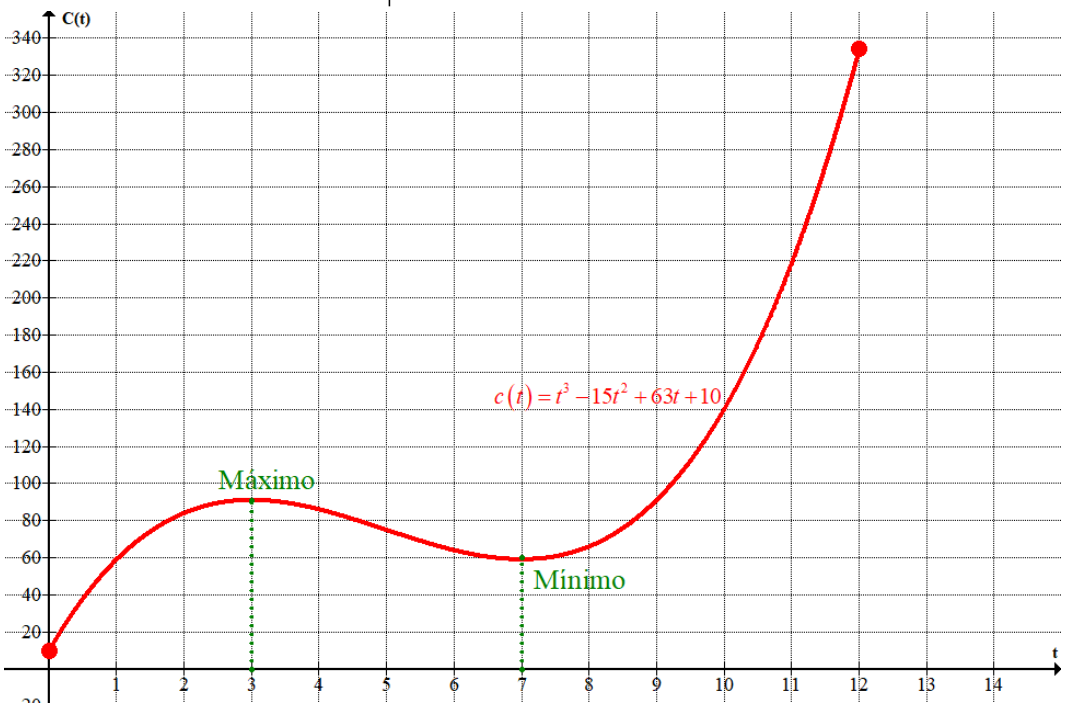


Por lo que se observa en el dibujo el consumo de cereales decrece entre $t = 3$ y $t = 7$.

c) Tenemos hecho el estudio de la monotonía de la función, que también nos permite afirmar que en $t = 3$ hay un máximo relativo y en $t = 7$ un mínimo relativo.

Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

t	$c(t) = t^3 - 15t^2 + 63t + 10$
0	10
1	59
3	91
5	75
7	59
10	140
12	334



EJERCICIO 3

En una localidad, el 25% de los habitantes asiste periódicamente a la consulta del dentista, el 10% se hace una analítica y el 8% hace ambas cosas.

a) **(0.5 puntos)** ¿Razone si los sucesos "Asistir a la consulta del dentista" y "Hacerse una analítica" son independientes?

b) **(1 punto)** ¿Qué porcentaje de habitantes ni se hace una analítica ni va al dentista?

c) **(1 punto)** Si elegimos un habitante al azar de esa localidad de entre los que van al dentista, ¿cuál es la probabilidad de que se haga una analítica?

a) Llamamos A al suceso "Asiste a la consulta del dentista" y B al suceso "Se hace una analítica".

Sabemos que $P(A)=0.25$, $P(B)=0.10$ y que $P(A\cap B)=0.08$

Debemos comprobar si $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.08 \\ P(A)\cdot P(B)=0.25\cdot 0.10=0.025 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)=0.08\neq 0.025=P(A)\cdot P(B)$$

Como la igualdad no se cumple los sucesos A y B no son independientes.

b) Hacemos una tabla de contingencia para averiguar lo pedido.

	Se hace una analítica	No se hace una analítica	
Asiste a la consulta del dentista	**8**		**25**
No asiste a consulta del dentista			
	10		**100**

Completamos la tabla.

	Se hace una analítica	No se hace una analítica	
Asiste a la consulta del dentista	**8**	**17**	**25**
No asiste a consulta del dentista	**2**	**73**	**75**
	10	**90**	**100**

Hay un 73 % que no se hacen una analítica ni asiste a la consulta del dentista.

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO b)

Nos piden calcular $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-[0.25+0.10-0.08]=1-0.27=0.73$$

El porcentaje de personas que no se hacen una analítica ni asiste a la consulta del dentista es del 73 %.

c) Nos piden calcular $P(B/A)$.

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0.08}{0.25}=0.32$$

La probabilidad pedida es de 0.32.

EJERCICIO 4

En una zona escolar formada por tres centros de secundaria, se desea estimar la proporción de este alumnado que lleva teléfono móvil al instituto. Se toma una muestra aleatoria simple de 121 estudiantes, de los cuales 74 lo llevan.

a) **(1.2 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 97% para la proporción de estudiantes que son usuarios que lleva el móvil al instituto. ¿Entre qué dos porcentajes varía esa proporción a ese nivel de confianza?

b) **(0.5 puntos)** Si con la misma muestra se disminuye el nivel de confianza, ¿qué efecto tendrá esta disminución en el error de la estimación?

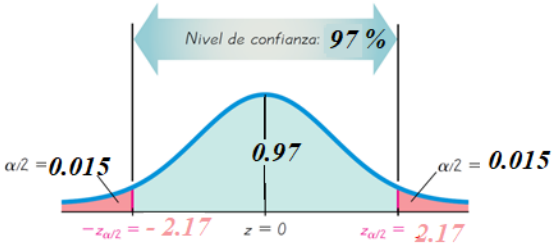
c) **(0.8 puntos)** Si en la misma zona se elige mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional otra muestra de 121 estudiantes, considerando que el segundo centro escolar tiene el doble de alumnos que el primero y el tercero tiene el triple que el primero, ¿Cuántos alumnos de cada centro se deben tomar para construir la muestra?

n =121. $p=\frac{74}{121}\simeq 0.61 \rightarrow q=1-p=1-\frac{74}{121}=\frac{47}{121}$

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$1-\propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015$

$\rightarrow 1-\propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$



$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}} = 2.17\cdot\sqrt{\frac{\frac{74}{121}\cdot\frac{47}{121}}{121}} \simeq 0.09615$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(p-Error,\ p+Error\right)=\left(0.61157-0.09615,\quad 0.61157+0.09615\right)=\left(0.51542, 0.70772\right)$$

El porcentaje del alumnado que lleva teléfono móvil al instituto estará entre el 51.542 % y el 70.772 % con un nivel de confianza del 97 %.

b) Si disminuimos el nivel de confianza (la zona azul del dibujo entonces disminuye el valor de $z_{\alpha/2}$ y el error dado por la fórmula $Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}$ será también menor.

c) Llamamos N_1, N_2 y N_3 al número de alumnos del primer, segundo y tercer centro.
Por un lado tenemos $N_1 + N_2 + N_3 = 121$, y por otro lado $N_2 = 2\cdot N_1$ y $N_3 = 3\cdot N_1$., por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} N_1+N_2+N_3=121 \\ N_2=2\cdot N_1 \\ N_3=3\cdot N_1 \end{array}\right\} \Rightarrow N_1+2\cdot N_1+3\cdot N_1=121 \Rightarrow 6\cdot N_1=121 \Rightarrow N_1=\frac{121}{6}\simeq 20.16$$

Como el número de alumnos debe ser entero tomaremos $N_1 = 20$, tenemos $N_2 = 2\cdot 20 = 40$ y $N_3 = 3\cdot 20 = 60$, pero al sumar sale 120 no 121, por tanto hay que tomar un alumno más de un centro y tenemos tres soluciones posibles:

$$\left.\begin{array}{l} N_1=20 \\ N_2=40 \\ N_3=61 \end{array}\right\} \quad o \quad \left.\begin{array}{l} N_1=20 \\ N_2=41 \\ N_3=60 \end{array}\right\} \quad o \quad \left.\begin{array}{l} N_1=21 \\ N_2=40 \\ N_3=60 \end{array}\right\}$$

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) **(1 punto)** Calcule $A^{2018} + A^{2019}$.

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $X\cdot A+B\cdot B^t=2A$.

a) Obtenemos la expresión de A^{2018} y de A^{2019}.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 0+0\\ 1-1 & 0+(-1)(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=Id$$

$$A^3=A^2\cdot A=Id\cdot A=A$$

$$A^4=A^2\cdot A^2=Id\cdot Id=Id$$

$$A^5=A^4\cdot A=Id\cdot A=A$$

...

$$A^{2018}=\{\text{Exponente par}\}=Id$$

$$A^{2019}=\{\text{Exponente impar}\}=A$$

Calculamos la expresión pedida.

$$A^{2018}+A^{2019}=Id+A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

b) Despejo X en la ecuación matricial $X\cdot A+B\cdot B^t=2A$

$$X\cdot A+B\cdot B^t=2A\Rightarrow X\cdot A=2A-B\cdot B^t\Rightarrow X=\left(2A-B\cdot B^t\right)A^{-1}$$

Determinamos la inversa de A y la traspuesta de B.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$ → Existe la inversa de A.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión obtenida al despejar en la ecuación matricial.

$$X=\left(2A-B\cdot B^t\right)A^{-1}=\left(2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1+1 & 2\\ 2 & 4+1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -7 & 7\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

El beneficio, en miles de euros, que ha obtenido una almazara lo largo de 50 años viene dado por $B(t)=\begin{cases} -0.04t^2+2.4t & si \quad 0\le t<40 \\ \dfrac{40t-320}{t} & si \quad 40\le t\le 50 \end{cases}$, donde t es el tiempo transcurrido.

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función *B(t)* en el intervalo [0, 50].

b) **(1 punto)** Estudie la monotonía de la función B(t) y determine en qué momento fueron mayores los beneficios de la almazara, así como el beneficio máximo.

c) **(0.5 puntos)** Represente la gráfica de la función y explique la evolución del beneficio.

a) Es una función a trozos donde una de las ramas es una parábola, que es continua y la otra es un cociente de dos polinomios, cuyo denominador solo se anula para $t = 0$ que no pertenece a su intervalo de definición [40, 50].
Por lo que la función es continua.

Estudiamos su derivabilidad. Calculamos la derivada de B(t) y comprobamos la derivabilidad en $t = 40$.

$$B(t)=\begin{cases} -0.04t^2+2.4t & si \quad 0\le t<40 \\ \dfrac{40t-320}{t} & si \quad 40\le t\le 50 \end{cases} \Rightarrow B'(t)=\begin{cases} -0.08t+2.4 & si \quad 0\le t<40 \\ \dfrac{40\cdot t-(40t-320)\cdot 1}{t^2}=\dfrac{320}{t^2} & si \quad 40<t\le 50 \end{cases}$$

Calculamos la derivada por la derecha y por la izquierda de $t = 40$.

$$\begin{cases} B'(40^-)=\lim\limits_{t\to 40^-} -0.08t+2.4=-0.8 \\ B'(40^+)=\lim\limits_{t\to 40^+} \dfrac{320}{t^2}=\dfrac{320}{1600}=0.2 \end{cases} \Rightarrow B(40^-)=-0.8\neq 0.2=B'(40^+)$$

La función no es derivable en $t = 40$.
La función es continua en el intervalo [0, 50] y derivable en [0, 40) ∪ (40, 50]

b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

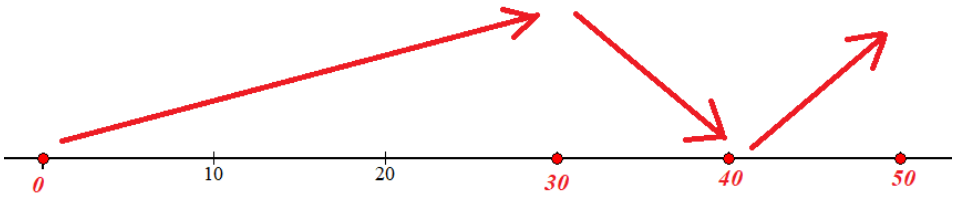
$$B'(t)=\begin{cases} -0.08t+2.4 & si \quad 0\le t<40 \\ \dfrac{320}{t^2} & si \quad 40<t\le 50 \end{cases}$$

$$B'(t)=0\Rightarrow\begin{cases} -0.08t+2.4=0\to t=\dfrac{2.4}{0.08}=30\in[0,40) \\ \dfrac{320}{t^2}=0\to \text{¡Im}\,posible! \end{cases}$$

El único punto crítico está en t = 30.
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $t = 30$ y $t = 40$.

- En $(0,30)$ tomamos $t = 10$ y la derivada vale $B'(10)=-0.08\cdot 10+2.4=1.6>0$. La función crece en $(0,30)$.
- En $(30,40)$ tomamos $t = 35$ y la derivada vale $B'(35)=-0.08\cdot 35+2.4=-0.4<0$. La función decrece en $(30,40)$.
- En $(40,50)$ tomamos $t = 45$ y la derivada vale $B'(45)=\dfrac{320}{45^2}>0$. La función crece en $(40,50)$.

La función sigue el esquema siguiente.



Los beneficios B(t) crecen durante los 30 primeros años, decrecen entre el año 30 y 40 y vuelven a crecer entre el año 40 y 50.

Valoramos los beneficios para $t = 0$, $t = 30$, $t = 40$ y $t = 50$ para encontrar el beneficio máximo conseguido.

$$B(0) = -0.04 \cdot 0^2 + 2.4 \cdot 0 = 0$$

$$B(30) = -0.04 \cdot 30^2 + 2.4 \cdot 30 = 36 \text{ ¡MÁXIMO!}$$

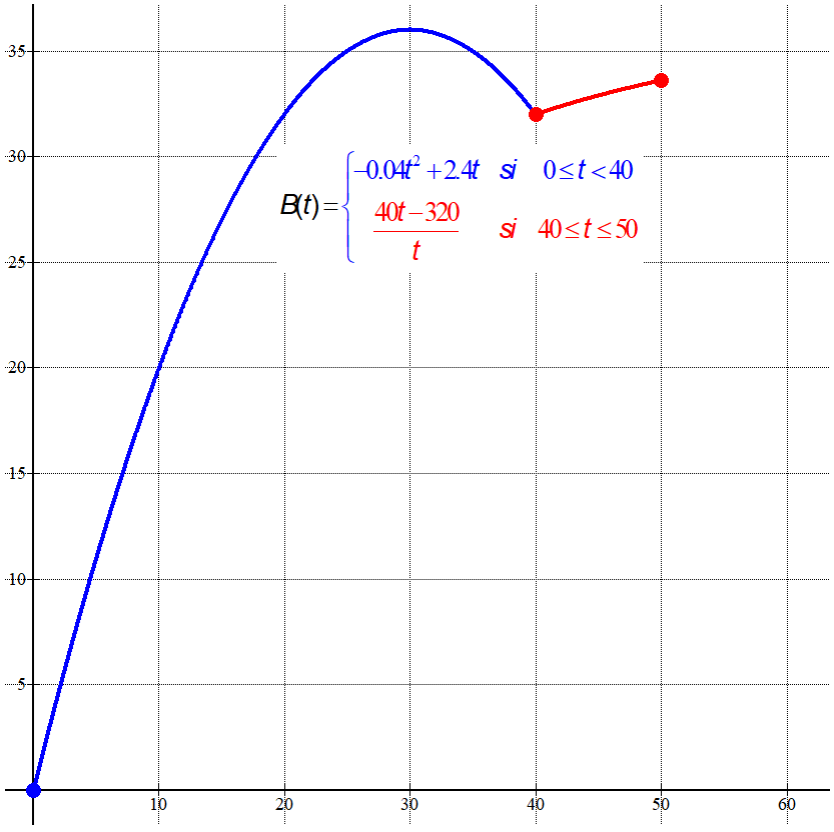
$$B(40) = \frac{40 \cdot 40 - 320}{40} = 32$$

$$B(50) = \frac{40 \cdot 50 - 320}{50} = 33.6$$

El máximo absoluto del beneficio se alcanza el año 30 y es de 36000 €.

c) Sabemos que la función es continua y que su máximo valor es 36. Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

t	$B(t)$
0	0
10	$-4+24=20$
30	36
40	32
50	33.6



El beneficio crece durante los 30 primeros años alcanzando un mácimo beneficio de 36000 €, teniendo un periodo de disminución entre el año 30 y 40. Del año 40 al 50 vuelve a crecer.

EJERCICIO 3

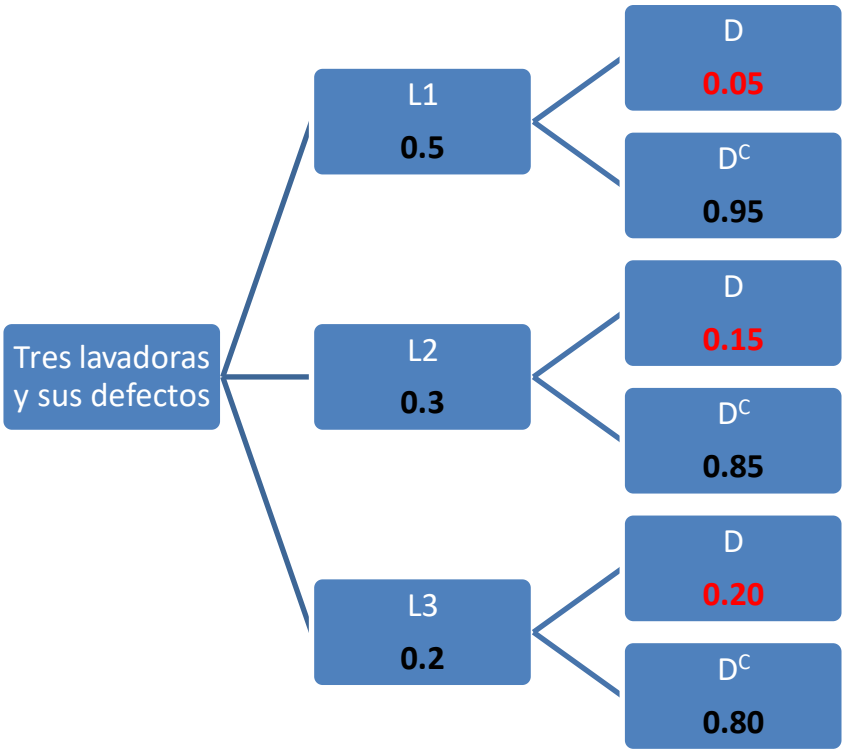
Un hotel dispone de tres lavadoras industriales L_1, L_2 y L_3 para el servicio de lavandería. El 50% de los lavados los realiza L_1, el 30% los hace L_2 y el resto L_3. La lavadora L_1 produce un 5% de lavados defectuosos, L_2 produce un 15% y L_3 un 20%. Se elige al azar un lavado de hotel.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que no sea defectuoso**.**

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el lavado haya sido realizado por L_1, sabiendo que ha sido defectuoso.

Llamamos L_1 al suceso "Lavar con L_1", L_2 al suceso "Lavar con L_2", L_3 al suceso "Lavar con L_3" y D = "Lavado defectuoso" y D^C = "Lavado no defectuoso".

Hacemos un diagrama de árbol para aclarar las probabilidades del experimento.



a) Utilizando las probabilidades que aparecen en el diagrama de árbol y según el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(D^C\right)=P\left(L_1\right)P\left(D^C/L_1\right)+P\left(L_2\right)P\left(D^C/L_2\right)+P\left(L_3\right)P\left(D^C/L_3\right)=$$

$$=0.5\cdot 0.95+0.3\cdot 0.85+0.2\cdot 0.80=\boxed{0.89}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P\left(L_1/D\right)=\frac{P\left(L_1\cap D\right)}{P\left(D\right)}=\frac{P\left(L_1\right)P\left(D/L_1\right)}{1-P\left(D^C\right)}=\frac{0.5\cdot 0.05}{1-0.89}=\boxed{\frac{5}{22}\simeq 0.227}$$

EJERCICIO 4

La edad de los empleados de una empresa sigue una ley Normal de varianza 64 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria simple de 16 empleados de dicha empresa abatiéndose las siguientes edades:

30 42 38 45 52 60 21 26 33 44 28 49 37 41 38 40.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza para estimar la media de los empleados, con un nivel de confianza del 97%.

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la edad media de los empleados, con un error inferior a 2 años y nivel de confianza del 99%.

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza → $\sigma = \sqrt{64} = 8$

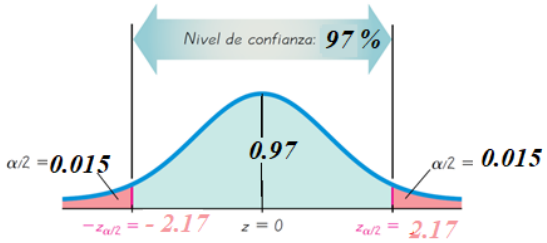
X = Edad de un empleado de una empresa. X = N(μ, 8)

La muestra es de 16 empleados. Hallamos su media.

$$\bar{x} = \frac{30+42+38+45+52+60+21+26+33+44+28+49+37+41+38+40}{16} = 39 \text{ años}$$

a) Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 97 %.

$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$



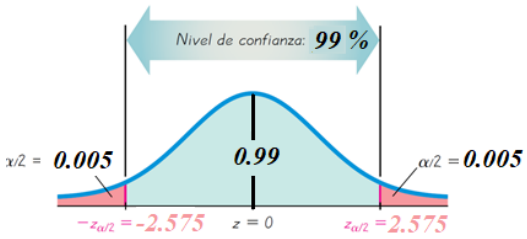
Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{8}{\sqrt{16}} = 4.34$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(39 - 4.34,\ \ 39 + 4.34\right) = \left(34.66,\ 43.34\right)$$

b) Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 99 %.



$1 - \propto = 0{,}99 \rightarrow \propto = 0{,}01 \rightarrow \propto/2 = 0'005 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \dfrac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$

Igualamos el error del intervalo de confianza a 2.

$$Error = 2 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 2.575 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 2.575 \cdot 8 = 2\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.575 \cdot 8}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{2.575 \cdot 8}{2}\right)^2 \simeq 106.09$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 107 empleados.

PevAU 2018 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II

	PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD CURSO 2017-2018	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) **(1 punto)** Plantee, sin resolver, las restricciones de este problema e indique la función a optimizar:
"Un ganadero alimenta a sus ovejas con maíz y pienso. Cada kilogramo de maíz aporta 600 g de hidratos de carbono y 200 g de proteínas, mientras que cada kilogramo de pienso aporta 300 g de hidratos de carbono y 600 g de proteínas. Cada oveja necesita diariamente como mínimo 1800 g de hidratos de carbono y 2400 g de proteínas. Si 1 kg de maíz cuesta 0'50 euros y 1 kg de pienso cuesta 0'25 euros, calcule cuantos kilogramos de cada producto tendría que comprar el ganadero para alimentar cada día a una oveja con un gasto mínimo."

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices

$$x \geq 0 \qquad x \leq 2y+2 \qquad x+y \leq 5$$

Calcule el máximo de $F(x,y) = 4x+3y$ en dicho recinto, así como el punto donde se alcanza.

EJERCICIO 2

La función de costes de una empresa se puede determinar mediante la expresión

$$f(x) = 40 - 6x + x^2, \text{ para } x \geq 0$$

donde *x* representa la cantidad producida de un determinado artículo.

a) **(1 punto)** ¿Disminuye el coste alguna vez? Determine la cantidad producida de dicho artículo cuando el coste es mínimo y cuál es dicho coste.
b) **(0.8 puntos)** ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo? Si el coste fuese 80, ¿Cuántas serían las unidades producidas?
c) **(0.7 puntos)** Represente gráficamente la función.

EJERCICIO 3

En una determinada población residen 5000 personas en el centro y 10000 en la periferia. Se sabe que el 95% de los residentes en el centro y que el 20% de los que viven en la periferia opina que el Ayuntamiento debería restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población.

a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?
b) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso?
c) **(0.75 puntos)** Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que de que resida en el centro de la ciudad?

EJERCICIO 4

Se dispone de cuatro tornillos de 1, 2, 3 y 4 gramos de peso respectivamente.

a) **(1.25 puntos)** Mediante muestreo aleatorio simple, exprese todas las muestras posibles de tamaño 2.
b) **(1.25 puntos)** Determine la media y la varianza de los pesos medios muestrales.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

a) **(1.2 puntos)** ¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2A\cdot B$?

b) **(1.3 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $X\cdot A = 2B^t + I_2$.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2 & si \quad x<1 \\ bx+\dfrac{2}{x} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$.

a) **(1.5 puntos)** Calcule los valores de *a* y *b* para que la función sea continua y derivable en $x=1$.

b) **(1 punto)** Para *b = 3*, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa *x = 2*.

EJERCICIO 3

Un campus universitario dispone de 3000 plazas numeradas de aparcamiento para vehículos, distribuidos en tres zonas A, B y C. La zona A está constituida por las plazas del 1 al 1500, estando 1350 de ellas protegidas del sol. La zona B la conforman las plazas numeradas desde 1501 a 2500, estando el 80% protegidas del sol. La zona C contiene plazas numeradas desde 2501 hasta 3000, estando protegidas solamente 250 protegidas del sol. Aleatoriamente se elige una de las plazas de aparcamiento del campus.

a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que esté en la zona A o en la B?

b) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que no esté protegida del sol?

c) **(1 punto)** Si se ha elegido una plaza protegida del sol, ¿cuál es la probabilidad de que esté ubicada en la zona B?

EJERCICIO 4

En un estudio sobre la utilización de nuevas tecnologías entre los estudiantes de Bachillerato, se ha realizado una encuesta a 500 estudiantes elegidos mediante muestreo aleatorio simple, resultando que 380 de ellos son usuarios de una determinada red social.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 97% para estimar la proporción de estudiantes que son usuarios de esa red social

b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la proporción muestral, determine el número mínimo de estudiantes a los que sería preciso entrevistar para que, con un nivel de confianza del 96%, el error cometido al estimar la proporción de usuarios de la citada red social no supere el 2%.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) **(1 punto)** Plantee, sin resolver, las restricciones de este problema e indique la función a optimizar:

"Un ganadero alimenta a sus ovejas con maíz y pienso. Cada kilogramo de maíz aporta 600 g de hidratos de carbono y 200 g de proteínas, mientras que cada kilogramo de pienso aporta 300 g de hidratos de carbono y 600 g de proteínas. Cada oveja necesita diariamente como mínimo 1800 g de hidratos de carbono y 2400 g de proteínas. Si 1 kg de maíz cuesta 0.50 euros y 1 kg de pienso cuesta 0.25 euros, calcule cuantos kilogramos de cada producto tendría que comprar el ganadero para alimentar cada día a una oveja con un gasto mínimo."

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices

$$x \geq 0 \qquad x \leq 2y+2 \qquad x+y \leq 5$$

Calcule el máximo de $F(x,y)=4x+3y$ en dicho recinto, así como el punto donde se alcanza.

a) Es un problema de programación lineal. Sea x = nº de kilos de maíz, y = nº de kilos de pienso. Realizamos una tabla para establecer las inecuaciones.

	Hidratos de carbono	Proteínas	Precio
Kilos de maíz (x)	600x	200x	0.5x
Kilos de pienso (y)	300y	600y	0.25y
TOTALES	$600x+300y$	$200x+600y$	$0.5x+0.25y$

La función a optimizar (minimizar) es el coste $C(x,y)=0.5x+0.25y$.

Las restricciones son:

"Las cantidades deben ser positivas" → $x \geq 0;\ y \geq 0$

"*Cada oveja necesita diariamente como mínimo 1800 g de hidratos de carbono y 2400 g de proteínas*" → $600x+300y \geq 1800;\ \ 200x+600y \geq 2400$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 600x+300y \geq 1800 \\ 200x+600y \geq 2400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2x+y \geq 6 \\ x+3y \geq 12 \end{array}\right\}$$

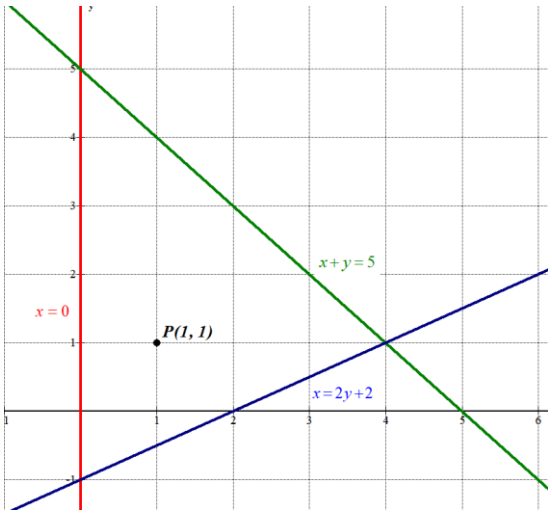
b) Representamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$x=0$ $\qquad$ $x=2y+2$

	x	$y=\dfrac{x-2}{2}$
$Eje\,OY$	2	0
	4	1

$x+y=5$

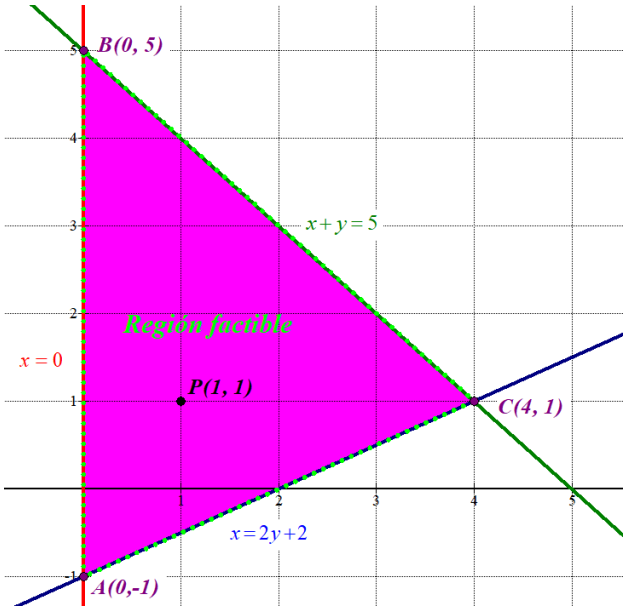
x	$y=5-x$
0	5
4	1



Comprobamos que el punto P(1, 1) cumple las inecuaciones.

$$1 \geq 0 \qquad 1 \leq 2 \cdot 1 + 2 \qquad 1 + 1 \leq 5$$ ¡¡Se cumplen!!

La región factible es la región del plano limitada por las rectas roja, azul y verde.
La coloreamos en el siguiente dibujo y marcamos los vértices y sus coordenadas.



Las coordenadas de los vértices se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$A \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 2y + 2 \end{cases} \Rightarrow 0 = 2y + 2 \Rightarrow 2y = -2 \Rightarrow y = \frac{-2}{2} = -1 \to A(0,-1)$$

$$B \to \begin{cases} x = 0 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow 0 + y = 5 \Rightarrow y = 5 \to B(0,5)$$

$$C \to \begin{cases} x = 2y + 2 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow 2y + 2 + y = 5 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2 + 2 = 4 \to C(4,1)$$

Valoramos la función $F(x, y) = 4x + 3y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

A(0, –1) → $F(0,-1) = 4 \cdot 0 + 3(-1) = -3$

B(0, 5) → $F(0,5) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$

C(4, 1) → $F(4,1) = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 19$ ¡Máximo!

La función alcanza un valor máximo de 19 y lo consigue en el punto C(4, 1).

EJERCICIO 2

La función de costes de una empresa se puede determinar mediante la expresión

$$f(x) = 40 - 6x + x^2, \text{ para } x \geq 0$$

donde *x* representa la cantidad producida de un determinado artículo.

a) **(1 punto)** ¿Disminuye el coste alguna vez? Determine la cantidad producida de dicho artículo cuando el coste es mínimo y cuál es dicho coste.

b) **(0.8 puntos)** ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo? Si el coste fuese 80, ¿Cuántas serían las unidades producidas?

c) **(0.7 puntos)** Represente gráficamente la función.

a) La función es un trozo de parábola. Averigüemos su vértice.

$f(x) = 40 - 6x + x^2 \Rightarrow f'(x) = -6 + 2x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -6 + 2x = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 3$.

- En $(0,3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = -6 + 2 = -4 < 0$. La función decrece en $(0,3)$.
- En $(3,+\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5) = -6 + 2 \cdot 5 = 4 > 0$. La función crece en $(3,+\infty)$.

El coste disminuye entre $x = 0$ y $x = 3$. El coste mínimo se produce en $x = 3$ y dicho coste mínimo es de $f(3) = 40 - 6 \cdot 3 + 3^2 = 31$.

b) Nos piden *f(0)* → $f(0) = 40 - 6 \cdot 0 + 0^2 = 40$. Produciendo 0 artículos el coste es de 40.

Nos piden averiguar el valor de *x* para el que $f(x) = 80$.

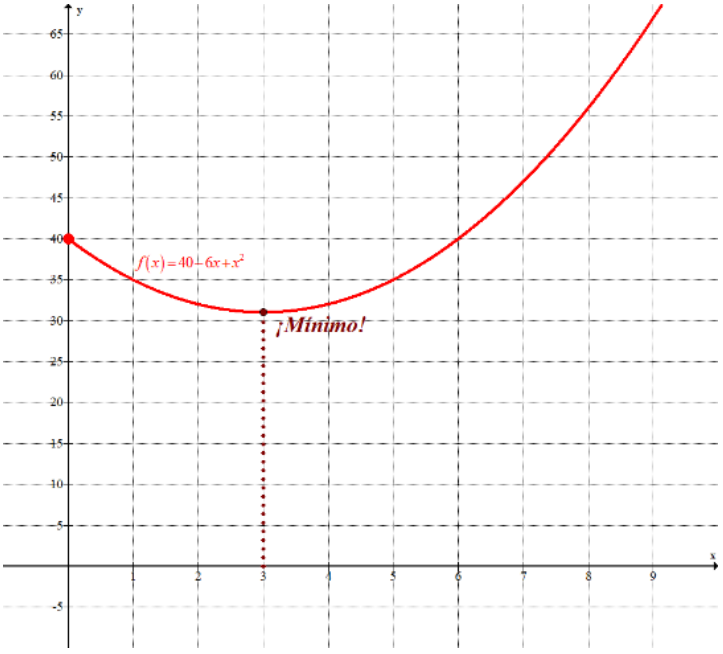
$$f(x) = 80 \Rightarrow 40 - 6x + x^2 = 80 \Rightarrow x^2 - 6x - 40 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(-40)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{196}}{2} = \begin{cases} \frac{6+14}{2} = \boxed{10 = x} \\ \frac{6-14}{2} = -4 \notin [0.+\infty) \end{cases}$$

Produciendo 10 artículos el coste es de 80.

c) Hacemos una tabla de valores y dibujamos el trozo de parábola que es la gráfica de la función del ejercicio.

x	$f(x) = 40 - 6x + x^2$
0	40
1	35
3	31 ¡Vértice!
5	35
6	40



EJERCICIO 3

En una determinada población residen 5000 personas en el centro y 10000 en la periferia. Se sabe que el 95% de los residentes en el centro y que el 20% de los que viven en la periferia opina que el Ayuntamiento debería restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población.

a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

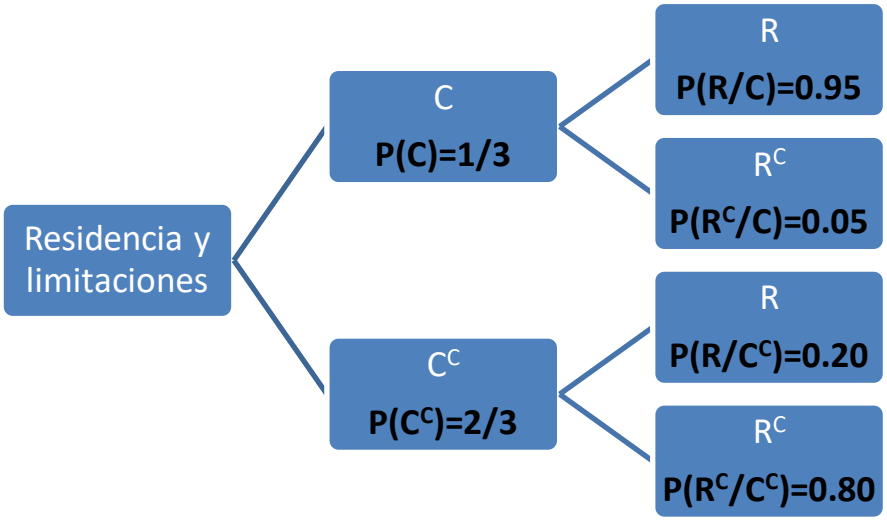
b) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso?

c) **(0.75 puntos)** Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que de que resida en el centro de la ciudad?

Llamamos C al suceso "residir en el centro", C^C al suceso "residir en la periferia" y R al suceso "Estar a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad".

Tenemos que $P(C)=\frac{5000}{15000}=\frac{1}{3}$, $P(C^C)=\frac{10000}{15000}=\frac{2}{3}$, $P(R/C)=0.95$, $P(R/C^C)=0.20$.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R)=P(C)P(R/C)+P(C^C)P(R/C^C)=\frac{1}{3}\cdot 0.95+\frac{2}{3}\cdot 0.20=\boxed{\frac{9}{20}=0.45}$$

b) $P(C\cap R)=P(C)P(R/C)=\frac{1}{3}\cdot 0.95=\boxed{\frac{19}{60}\simeq 0.316}$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/R)=\frac{P(C\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{19}{60}}{\frac{9}{20}}=\frac{380}{540}=\boxed{\frac{19}{27}\simeq 0.704}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos a valores absolutos.

Hay 15000 habitantes. 5000 en el centro y 10000 en la periferia. De los del centro el 95 % de ellos está a favor de la restricción de acceso, es decir, 0.95 · 5000 = 4750 habitantes del centro apoyan las restricciones y otros 250 no lo apoyan.
De los habitantes de la periferia el 20 % apoyan las restricciones, es decir, 0.20 · 10000 = 2000 apoyan las restricciones y otros 8000 no lo apoyan.

Ponemos todos estos datos en una tabla de contingencia.

	Apoya la restricción de acceso al centro	No apoya la restricción de acceso al centro	
Residente en el centro	**4750**	**250**	**5000**
Residente en la periferia	**2000**	**8000**	**10000**
	6750	**8250**	**15000**

Utilizamos la regla de Laplace y determinamos las probabilidades pedidas.

a) $P(R)=\dfrac{6750}{15000}=\boxed{\dfrac{9}{20}=0.45}$

b) $P(C\cap R)=\dfrac{4750}{1500}=\boxed{\dfrac{19}{60}\simeq 0.316}$

c) $P(C/R)=\dfrac{4750}{6750}=\boxed{\dfrac{19}{27}\simeq 0.704}$

EJERCICIO 4

Se dispone de cuatro tornillos de 1, 2, 3 y 4 gramos de peso respectivamente.

a) **(1.25 puntos)** Mediante muestreo aleatorio simple, exprese todas las muestras posibles de tamaño 2.

b) **(1.25 puntos)** Determine la media y la varianza de los pesos medios muestrales.

a) Supongo que el muestreo es con reemplazamiento. Hay 16 muestras con reemplazamiento de tamaño 2. Los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

Muestras de tamaño 2	1 1	1 2	1 3	1 4	2 1	2 2	2 3	2 4	3 1	3 2	3 3	3 4	4 1	4 2	4 3	4 4
Media de la muestra	1	1.5	2	2.5	1.5	2	2.5	3	2	2.5	3	3.5	2.5	3	3.5	4

b) La media poblacional es $\mu = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5$

La media muestral coincide con la media poblacional $\bar{x} = \mu = 2.5$

La varianza poblacional es $\sigma^2 = \frac{(1-2.5)^2 + (2-2.5)^2 + (3-2.5)^2 + (4-2.5)^2}{4} = 1.25$

La varianza muestral es la varianza poblacional dividido entre el tamaño de la muestra

Varianza muestral $= \frac{\sigma^2}{2} = \frac{1.25}{2} = 0.625$

OTRA FORMA DE CALCULARLO

Hacemos una tabla con los valores de las medias de la muestra y sus frecuencias.

$\overline{x_i}$	n_i	$n_i \cdot \overline{x_i}$	$n_i \cdot \left(\overline{x_i}\right)^2$
1	**1**	**1**	**1**
1.5	**2**	**3**	**4.5**
2	**3**	**6**	**12**
2.5	**4**	**10**	**25**
3	**3**	**9**	**27**
3.5	**2**	**7**	**24.5**
4	**1**	**4**	**16**
Totales	**N = 16**	**40**	**110**

La media de la distribución muestral de medias es $\bar{x} = \frac{40}{16} = 2.5$

La varianza de la distribución muestral de medias es

Varianza de las medias muestrales $= \frac{\Sigma n_i \cdot \left(\overline{x_i}\right)^2}{N} - \left(\bar{x}\right)^2 = \frac{110}{16} - 2.5^2 = 0.625$

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

a) **(1.2 puntos)** ¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2=A^2+B^2+2A\cdot B$?

b) **(1.3 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $X\cdot A=2B^t+I_2$.

a) Calculamos el resultado de cada miembro de la igualdad y vemos si da el mismo resultado.

$$A+B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow (A+B)^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}\\ B^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ 2AB=2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow A^2+B^2+2AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2+B^2+2AB=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$$

Podemos apreciar que $(A+B)^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}=A^2+B^2+2AB$.

No se verifica la igualdad.

b) Despejamos X en la ecuación matricial

$$X\cdot A=2B^t+I_2\Rightarrow X=\left(2B^t+I_2\right)A^{-1}$$

Calculamos la matriz inversa de A y la traspuesta de B.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2\neq 0$$ Existe la inversa de A.

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}}{-2}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}+2 & -0\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

Sustituimos estos valores en la expresión $X=\left(2B^t+I_2\right)A^{-1}$.

$$X=\left(2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5+0 & 0+0\\ -2-1/2 & 0-1/2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ -5/2 & -1/2\end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2 & si \quad x<1 \\ bx+\dfrac{2}{x} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$.

a) **(1.5 puntos)** Calcule los valores de *a* y *b* para que la función sea continua y derivable en $x=1$

b) **(1 punto)** Para *b = 3*, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa *x = 2*.

a) Para que sea continua en *x = 1* deben de coincidir los límites laterales en *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^3+ax^2=1^3+a\cdot 1^2=1+a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} bx+\dfrac{2}{x}=b+\dfrac{2}{1}=b+2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1+a=b+2 \Rightarrow \boxed{a=b+1}$$

Para que sea derivable en *x = 1* deben de coincidir las derivadas laterales en *x = 1*.

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2 & si \quad x<1 \\ bx+\dfrac{2}{x} & si \quad x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 3x^2+2ax & si \quad x<1 \\ b-\dfrac{2}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 3x^2+2ax=3\cdot 1^2+2a=3+2a \\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} b-\dfrac{2}{x^2}=b-\dfrac{2}{1^2}=b-2 \\ f'(1^-)=f'(1^+) \end{array}\right\} \Rightarrow 3+2a=b-2 \Rightarrow \boxed{2a+5=b}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a=b+1 \\ 2a+5=b \end{array}\right\} \Rightarrow a=2a+5+1 \Rightarrow \boxed{-6=a} \Rightarrow \boxed{b=2(-6)+5} \Rightarrow \boxed{b=-12+5=-7}$$

La función es continua y derivable en *x = 1* si *a = –6* y *b = –7*.

b) Para *b = 3* la función es $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2 & si \quad x<1 \\ 3x+\dfrac{2}{x} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

y la derivada es $f'(x)=\begin{cases} 3x^2+2ax & si \quad x<1 \\ 3-\dfrac{2}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$.

La recta tangente en *x = 2* tiene ecuación $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=3\cdot 2+\dfrac{2}{2}=7 \\ f'(2)=3-\dfrac{2}{2^2}=2.5 \end{array}\right\} \Rightarrow y-7=2.5(x-2) \Rightarrow y=7+2.5x-5 \Rightarrow \boxed{y=2.5x+2}$$

EJERCICIO 3

Un campus universitario dispone de 3000 plazas numeradas de aparcamiento para vehículos, distribuidos en tres zonas A, B y C. La zona A está constituida por las plazas del 1 al 1500, estando 1350 de ellas protegidas del sol. La zona B la conforman las plazas numeradas desde 1501 a 2500, estando el 80% protegidas del sol. La zona C contiene plazas numeradas desde 2501 hasta 3000, estando protegidas solamente 250 protegidas del sol. Aleatoriamente se elige una de las plazas de aparcamiento del campus.

a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que esté en la zona A o en la B?

b) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que no esté protegida del sol?

c) **(1 punto)** Si se ha elegido una plaza protegida del sol, ¿cuál es la probabilidad de que esté ubicada en la zona B?

Realizamos una tabla de contingencia con los datos aportados en el problema.

	Plazas protegidas del sol	Plazas no protegidas del sol	
Zona A	**1350**		**1500**
Zona B	**80% de 1000**		**1000**
Zona C	**250**		**500**
Totales			**3000**

Completamos la tabla.

	Plazas protegidas del sol	Plazas no protegidas del sol	
Zona A	**1350**	**150**	**1500**
Zona B	**800**	**200**	**1000**
Zona C	**250**	**250**	**500**
Totales	**2400**	**600**	**3000**

a) Con los datos de la tabla utilizamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Zona A o B}) = \frac{\text{nº de plazas en zona A + nº plazas en zona B}}{\text{nº total de plazas}} = \frac{1500+1000}{3000} = \boxed{\frac{5}{6} \simeq 0.83}$$

b) Con los datos de la tabla utilizamos la regla de Laplace.

$$P(\text{No está protegida del sol}) = \frac{\text{nº de plazas no protegidas del sol}}{\text{nº de plazas}} = \frac{600}{3000} = \boxed{\frac{1}{5} = 0.2}$$

c) Con los datos de la tabla utilizamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Zona B/Está protegida del sol}) = \frac{\text{Nº plazas de la zona B protegidas del sol}}{\text{Nº de plazas protegidas del sol}} =$$

$$= \frac{800}{2400} = \boxed{\frac{1}{3} \simeq 0.33}$$

EJERCICIO 4

En un estudio sobre la utilización de nuevas tecnologías entre los estudiantes de Bachillerato, se ha realizado una encuesta a 500 estudiantes elegidos mediante muestreo aleatorio simple, resultando que 380 de ellos son usuarios de una determinada red social.

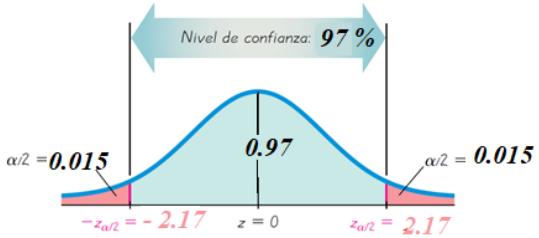
a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 97% para estimar la proporción de estudiantes que son usuarios de esa red social

b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la proporción muestral, determine el número mínimo de estudiantes a los que sería preciso entrevistar para que, con un nivel de confianza del 96%, el error cometido al estimar la proporción de usuarios de la citada red social no supere el 2%.

n = 500. $p = \frac{380}{500} = 0.76 \rightarrow q = 1 - p = 1 - 0.76 = 0.24$

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.76 \cdot 0.24}{500}} \simeq 0.041446$$

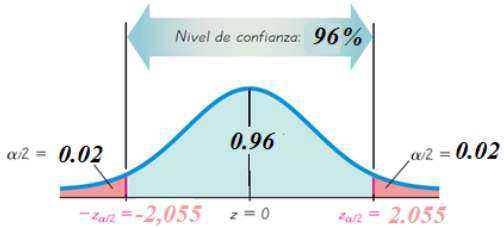
El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.76 - 0.041446,\quad 0.76 + 0.041446\right) = \left(0.718554,\ 0.801446\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 96 % tenemos

$1 - \propto = 0{,}96 \rightarrow \propto = 0{,}04 \rightarrow \propto/2 = 0'02 \rightarrow$

$\rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$



Igualamos el error a 0.02.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.02 = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.76 \cdot 0.24}{n}} \Rightarrow \frac{0.02}{2.055} = \sqrt{\frac{0.76 \cdot 0.24}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.02}{2.055}\right)^2 = \frac{0.76 \cdot 0.24}{n} \Rightarrow n = \frac{0.76 \cdot 0.24}{\left(\frac{0.02}{2.055}\right)^2} \simeq 1925.6994$$

Como el número de estudiantes debe ser entero y superior al número obtenido el mínimo número de estudiantes que debemos elegir para que el error en la proporción de usuarios de una determinada red social sea menor del 2 % es de 1926.

PevAU 2017 Extraordinaria Matemáticas CC.SS. II

Universidades Públicas de Andalucía	**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA** **PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD** CURSO 2016-2017	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones: **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) **(1.5 puntos)** Justifique cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse y, en tal caso, calcule el resultado:

$$A^2 \qquad A-B \qquad A\cdot B \qquad A\cdot B^t.$$

b) **(1 punto)** Halle la matriz X tal que $A^t+B\cdot X=3B$.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx$

a) **(1 punto)** Halle a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en el punto de abscisa $x=-1$ y un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=-2$.
b) **(1.5 puntos)** Para $a=6$ y $b=9$, halle los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y extremos y esboce la gráfica de la función.

EJERCICIO 3

Supongamos que el 20% de los votantes de Trump apoya la construcción del muro en la frontera con México y que solo el 5 % de los que no lo votaron la apoya. En un grupo formado por 5000 votantes de Trump y 10000 estadounidenses que no lo votaron se elige una persona al azar.

a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que ésta apoye la construcción del muro?
b) **(0.75 puntos)** Si la persona elegida apoya la construcción del muro, ¿cuál es la probabilidad de que no haya votado a Trump?
c) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea votante de Trump o apoye la construcción del muro.

EJERCICIO 4

El tiempo de vida de una determinada especie de tortuga es una variable aleatoria que sigue una ley Normal de desviación típica 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen los siguientes valores:

46 38 59 29 34 32 38 21 44 34

a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza, al 95 %, para la vida media de dicha especie de tortugas.
b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error de estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 98 %.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) **(0.8 puntos)** Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x+y\le 3 \qquad 2x+y\ge 4 \qquad y\ge -1$$

b) **(0.25 puntos)** Razone si el punto (2, 1) pertenece al recinto anterior.

c) **(1.2 puntos)** Obtenga los vértices del recinto y los valores mínimo y máximo de la función $F(x,y)=5x+4y$ en ese recinto, indicando en qué puntos se alcanzan.

d) **(0.25 puntos)** Razone si la función *F* puede alcanzar el valor 9 en el recinto anterior.

EJERCICIO 2

Se consideran las siguientes funciones $f(x)=\dfrac{5x-16}{x}$ y $g(x)=x^2$.

a) **(1 punto)** Determine la abscisa del punto donde se verifique que $f\,'(x)=g\,'(x)$.

b) **(1.5 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada función en el punto de abscisa $x = 2$ y determine el punto de corte de ambas rectas tangentes, si existe.

EJERCICIO 3

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 bolas del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola.

a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.

b) **(1.25 puntos)** Halle la probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja.

EJERCICIO 4

En una muestra, elegida al azar, de 100 estudiantes de una Universidad, se ha observado que 25 desayunan en la cafetería del campus.

a) **(1.25 puntos)** Determine, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo de confianza para estimar la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería.

b) **(1.25 puntos)** Si la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería del campus en una muestra aleatoria es de 0.2, y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0.03, con un nivel de confianza del 92.5 % calcule el tamaño mínimo de la muestra.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) **(1.5 puntos)** Justifique cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse y, en tal caso, calcule el resultado:

$$A^2 \qquad A-B \qquad A\cdot B \qquad A\cdot B^t.$$

b) **(1 punto)** Halle la matriz X tal que $A^t+B\cdot X=3B$.

a) Comprobamos la validez de cada uno de las operaciones indicadas.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3\ \cdot\ 2}\times 3 \qquad \text{¡No es posible!}$$

No es posible calcular A^2 pues no coincide el nº de columnas (3) del primer factor del producto (A) con el nº de filas (2) del segundo factor del producto (A).

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\text{¡No es posible!}$$

$$2\times 3 \quad - \quad 3\times 2$$

A – B no es posible pues A y B no son matrices de la misma dimensión.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0+1 & 1+0+1\\ 0+1+1 & 0+0+1\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3\quad\cdot\ 3}\times 2\longrightarrow 2\times 2$$

Si es posible calcular $A\cdot B$ pues coincide el nº de columnas (3) del primer factor del producto (A) con el nº de filas (3) del segundo factor del producto (B).

$$A\cdot B^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\ \text{¡No es posible!}$$

$$2\times\boxed{3\quad\cdot\quad 2}\times 3$$

$A\cdot B^t$ no es posible pues no coincide el nº de columnas (3) del primer factor del producto (A) con el nº de filas (2) del segundo factor del producto (B^t).

b) Despejamos X en la ecuación matricial $A^t+B\cdot X=3B$.

$$A^t+B\cdot X=3B\Rightarrow B\cdot X=3B-A^t\Rightarrow X=B^{-1}\left(3B-A^t\right)$$

Determinamos la expresión de B^{-1} y de A^t.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ no es cuadrada y no podemos calcular su inversa y no podemos resolver el problema con este procedimiento.

Procedemos de otra manera.

Averiguamos la dimensión de la matriz X.
Supongamos que la matriz X tiene dimensión *m x n*.

$$A^t+B\cdot X=3B\Rightarrow B\cdot X=3B-A^t$$

$$3\times\boxed{2\cdot m}\times n\longrightarrow 3\times n$$

Para que sea posible el producto $B\cdot X$ el valor de *m* debe ser 2.

Como $3B-A^t=3\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ tiene dimensión 3x2 y la matriz $B\cdot X$ tiene dimensión *3xn* el valor de *n* debe ser 2.

La matriz X debe tener dimensión 2x2.

Supongamos $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ debe cumplirse que $B\cdot X=3B-A^t$.

$$B\cdot X=3B-A^t\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0+c & 0+d\\ a+0 & b+0\\ a+c & b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c=-1\\ d=3\\ a=3\\ b=-1\\ a+c=2\rightarrow 3+(-1)=2\ \text{¡Se cumple!}\\ b+d=2\rightarrow -1+3=2\ \text{¡Se cumple!}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=-1\\ c=-1\\ d=3\end{cases}\Rightarrow\boxed{X=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx$

a) **(1 punto)** Halle a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en el punto de abscisa $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = -2$.

b) **(1.5 puntos)** Para $a = 6$ y $b = 9$, halle los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y extremos y esboce la gráfica de la función.

a) Para que la función tenga un mínimo en $x = -1$ debe anularse la derivada primera → $f'(-1)=0$.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f'(-1)=0 \Rightarrow 3(-1)^2+2a(-1)+b=0 \Rightarrow 3-2a+b=0 \Rightarrow \boxed{b=2a-3}$$

Para que la función tenga un punto de inflexión en $x = -2$ debe anularse la segunda derivada.

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow f''(x)=6x+2a$$

$$f''(-2)=0 \Rightarrow 6(-2)+2a=0 \Rightarrow 2a=12 \Rightarrow \boxed{a=6}$$

Sustituimos en la primera igualdad obtenida.

$$\left.\begin{matrix} b=2a-3 \\ a=6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{b=12-3=9}$$

Los valores buscados son $a = 6$ y $b = 9$.

b) Para $a = 6$ y $b = 9$ la función es $f(x)=x^3+6x^2+9x$.

Puntos de corte con los ejes.

Con eje OX. $x=0 \Rightarrow y=f(0)=0^3+6\cdot 0^2+9\cdot 0=0 \rightarrow A(0,0)$

Con eje OY. $y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x^3+6x^2+9x=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x\left(x^2+6x+9\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow A(0,0) \\ x^2+6x+9=0 \Rightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2}=-3 \rightarrow B(-3,0) \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son A(0, 0) y B(–3, 0).

Monotonía.

Determinamos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=x^3+6x^2+9x \Rightarrow f'(x)=3x^2+12x+9$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+12x+9=0 \Rightarrow x^2+4x+3=0 \Rightarrow$$

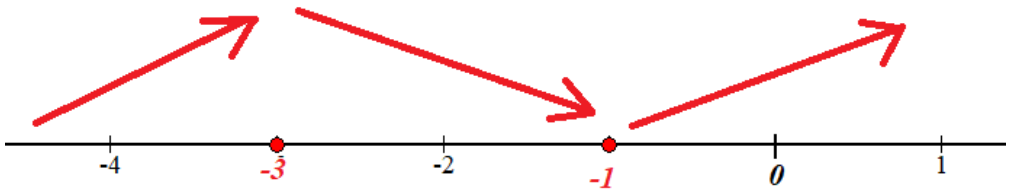
$$\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}=\begin{cases} \dfrac{-4+2}{2}=-1 \\ \dfrac{-4-2}{2}=-3 \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos: $x = -1$ y $x = -3$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(-\infty,-3)$ tomamos $x = -10$ y la derivada vale $f'(10)=3\cdot 10^2+12\cdot 10+9=429>0$. La función crece en $(-\infty,-3)$.
- En $(-3,-1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2)=3(-2)^2+12(-2)+9=-3<0$. La función decrece en $(-3,-1)$.
- En $(-1,+\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=3\cdot 0^2+12\cdot 0+9=9>0$. La función crece en $(-1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$ y decrece en $(-3,-1)$.

Extremos.

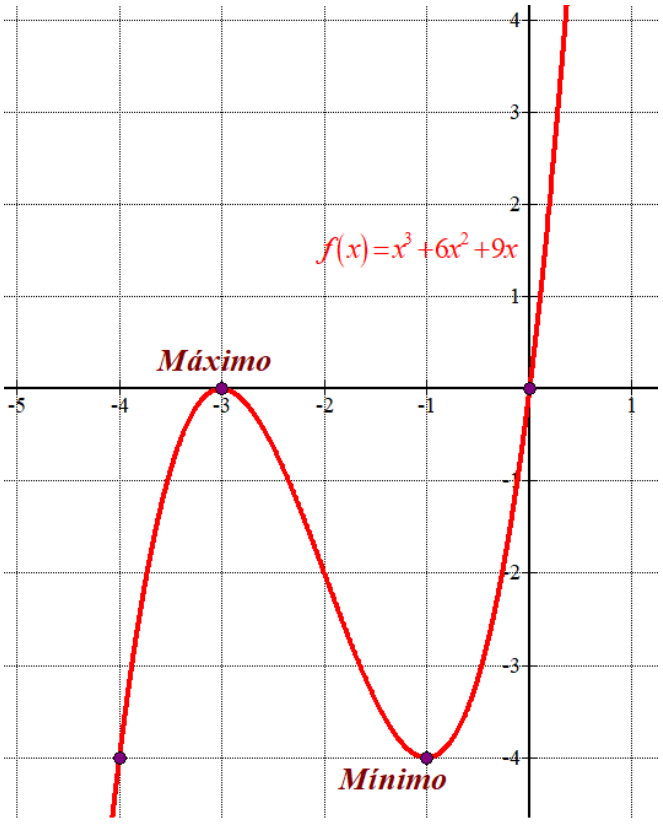
A la vista de la imagen superior podemos decir que la función tiene un máximo relativo en $x = -3$. Como $f(-3)=(-3)^3+6(-3)^2+9(-3)=0$ el máximo relativo tiene coordenadas (–3, 0).

A la vista de la imagen superior podemos decir que la función tiene un mínimo relativo en $x = -1$. Como $f(-1)=(-1)^3+6(-1)^2+9(-1)=-4$ el mínimo relativo tiene coordenadas (–1, –4).

Representación gráfica.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x)=x^3+6x^2+9x$
–5	–20
–4	–4
–3	0 *Máximo*
–1	–4 *Mínimo*
0	0
1	16
2	50



EJERCICIO 3

Supongamos que el 20% de los votantes de Trump apoya la construcción del muro en la frontera con México y que solo el 5 % de los que no lo votaron la apoya. En un grupo formado por 5000 votantes de Trump y 10000 estadounidenses que no lo votaron se elige una persona al azar.

a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que ésta apoye la construcción del muro?

b) **(0.75 puntos)** Si la persona elegida apoya la construcción del muro, ¿cuál es la probabilidad de que no haya votado a Trump?

c) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea votante de Trump o apoye la construcción del muro.

Realizamos una tabla de contingencia para obtener toda la información relativa a lo planteado en el ejercicio.

	Apoyan el muro (M)	No apoyan el muro ($\overline{M}$)	
Votan a Trump (T)	**20 % de 5000**		**5000**
No votan a Trump ($\overline{T}$)	**5 % de 10000**		**10000**

Completamos la tabla.

	Apoyan el muro (M)	No apoyan el muro ($\overline{M}$)	
Votan a Trump (T)	**1000**	**4000**	**5000**
No votan a Trump ($\overline{T}$)	**500**	**9500**	**10000**
	1500	**13500**	**15000**

Respondemos a las preguntas planteadas utilizando los datos de la tabla y la regla de Laplace.

a) $P(M)=\dfrac{\text{nº de personas que apoyan el muro}}{\text{nº total de personas}}=\dfrac{1500}{15000}=\boxed{\dfrac{1}{10}=0.10}$

b) $P(\overline{T}/M)=\dfrac{\text{nº de no votantes de Trump que apoyan el muro}}{\text{nº de personas que apoyan el muro}}=\dfrac{500}{1500}=\boxed{\dfrac{1}{3}\simeq 0.33}$

c) Hay 1000 votantes de Trump que apoyan el muro, 4000 votantes de Trump que no apoyan el muro y 500 no votantes de Trump que apoyan el muro.

$$P(T\cup M)=\frac{\text{nº de votantes de Trump o apoyan el muro}}{\text{nº total de personas}}=$$

$$=\frac{1000+500+4000}{15000}=\frac{5500}{15000}=\boxed{\frac{11}{30}\simeq 0.36}$$

EJERCICIO 4

El tiempo de vida de una determinada especie de tortuga es una variable aleatoria que sigue una ley Normal de desviación típica 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen los siguientes valores:

46 38 59 29 34 32 38 21 44 34

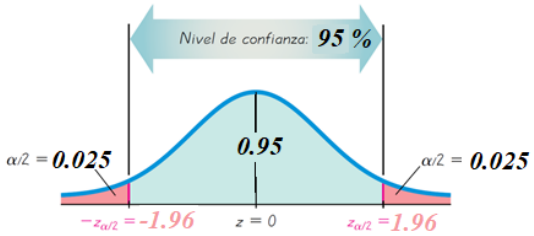
a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza, al 95 %, para la vida media de dicha especie de tortugas.

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error de estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 98 %.

X = Tiempo de vida de una especie de tortuga en años. X = N(μ, 10)

n = 10. $\bar{x} = \dfrac{46+38+59+29+34+32+38+21+44+34}{10} = 37.5\ años$

a) Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 95 %.



$1 - \propto = 0.95 \rightarrow \propto = 0.05 \rightarrow \propto/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}} \simeq 6.198$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(37.5 - 6.198,\ \ 37.5 + 6.198\right) = \left(31.302,\ 43.698\right)$$

b) Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 98 %.



$1 - \propto = 0.98 \rightarrow \propto = 0.02 \rightarrow \propto/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.33}$

Igualamos el error del intervalo de confianza a 5.

$$Error = 5 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 \Rightarrow 2.33 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} = 5 \Rightarrow 2.33 \cdot 10 = 5\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{10 \cdot 2.33}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{10 \cdot 2.33}{5}\right)^2 = 21.7156$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 22 tortugas.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) **(0.8 puntos)** Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x+y\le 3 \qquad 2x+y\ge 4 \qquad y\ge -1$$

b) **(0.25 puntos)** Razone si el punto (2, 1) pertenece al recinto anterior.

c) **(1.2 puntos)** Obtenga los vértices del recinto y los valores mínimo y máximo de la función $F(x,y)=5x+4y$ en ese recinto, indicando en qué puntos se alcanzan.

d) **(0.25 puntos)** Razone si la función F puede alcanzar el valor 9 en el recinto anterior.

a) Representamos primero las rectas asociadas a las inecuaciones que delimitarán la región que queremos representar.

$x+y=3$

x	$y=3-x$
3	0
1	2

$2x+y=4$

x	$y=4-2x$
2	0
1	2

$y=-1$

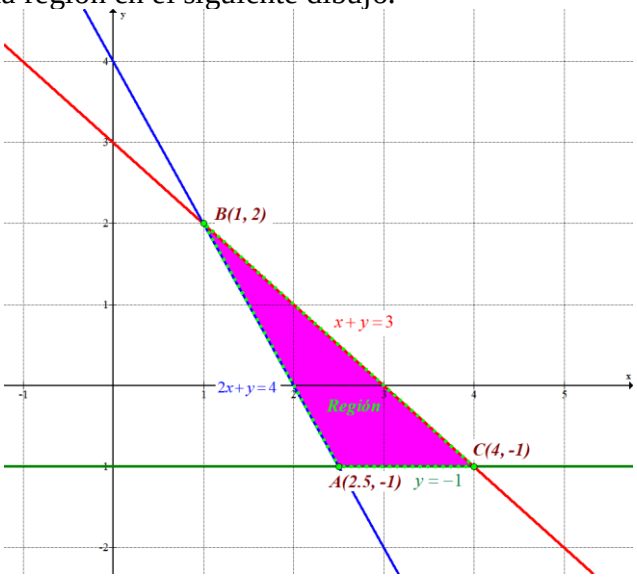
x	$y=-1$
0	−1
2	−1



Como las inecuaciones son $\{x+y\le 3 \quad 2x+y\ge 4 \quad y\ge -1\}$ la región definida por ellas es la región del plano situada por debajo de la recta roja, y por encima de las rectas azul y verde.
Comprobamos que el punto P(2.5, 0) cumple las inecuaciones.

$$2.5+0\le 3 \qquad 2\cdot 2.5+0\ge 4 \qquad 0\ge -1 \rightarrow \text{¡Se cumplen!}$$

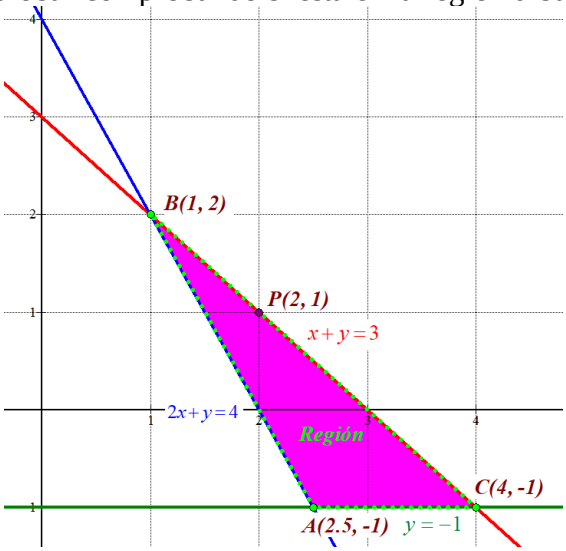
Coloreamos de rosa la región en el siguiente dibujo.



b) Comprobamos si el punto (2, 1) pertenece al recinto definido por las inecuaciones viendo si cumple dichas inecuaciones.

$$2+1\le 3 \qquad 2\cdot 2+1\ge 4 \qquad 1\ge -1 \rightarrow \text{¡Se cumplen todas!}$$

También se puede comprobar comprobando si está en la región dibujada y coloreada de rosa.



El punto está en el borde y pertenece a la región.

c) Determinamos las coordenadas de los vértices resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

A → $\left.\begin{matrix} 2x+y=4 \\ y=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x-1=4 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}=2.5 \rightarrow \boxed{A(2.5,-1)}$

B → $\left.\begin{matrix} x+y=3 \\ 2x+y=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=3-x \Rightarrow 2x+3-x=4 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=3-1=2 \rightarrow \boxed{B(1,2)}$

C → $\left.\begin{matrix} x+y=3 \\ y=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x-1=3 \Rightarrow x=4 \rightarrow \boxed{C(4,-1)}$

Valoramos la función $F(x,y)=5x+4y$ en cada uno de los vértices.

A(2.5, –1) → $F(2.5,-1)=5\cdot 2.5+4(-1)=\boxed{8.5}$ ¡Mínimo!

B(1, 2) → $F(1,2)=5\cdot 1+4\cdot 2=\underline{13}$

C(4, –1) → $F(4,-1)=5\cdot 4+4(-1)=\boxed{16}$ ¡Máximo!

El valor mínimo es 8.5 y se alcanza en el punto A(2.5, –1).
El valor máximo es 16 y se alcanza en el punto C(4, –1)

d) Lo alcanza, pues 9 es un valor comprendido entre el mínimo (8.5) y el máximo (16).
Si deseamos hallar un punto de la región donde se alcanza dicho valor.

$$\left.\begin{matrix} F(x,y)=5x+4y \\ F(x,y)=9 \\ y=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5x-4=9 \Rightarrow 5x=13 \Rightarrow x=\frac{13}{5}=2.6$$

Se obtiene dicho valor (9) en varios puntos de la región, en particular en el punto (2.6, –1).

EJERCICIO 2

Se consideran las siguientes funciones $f(x)=\dfrac{5x-16}{x}$ y $g(x)=x^2$.

a) **(1 punto)** Determine la abscisa del punto donde se verifique que $f\,'(x)=g\,'(x)$.

b) **(1.5 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada función en el punto de abscisa $x = 2$ y determine el punto de corte de ambas rectas tangentes, si existe.

a) Calculamos las derivadas y resolvemos la igualdad $f\,'(x)=g\,'(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x)=\dfrac{5\cdot x-1\cdot(5x-16)}{x^2}=\dfrac{16}{x^2} \\ g\,'(x)=2x \\ f\,'(x)=g\,'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{16}{x^2}=2x \Rightarrow 16=2x^3 \Rightarrow \frac{16}{2}=x^3 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{8}=2}$$

En $x = 2$ se cumple que $f\,'(x)=g\,'(x)$.

b) En $x = 2$ tenemos que $f\,'(2)=g\,'(2)=2\cdot 2=4$.

Obtenemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\dfrac{5\cdot 2-16}{2}=-3 \\ f\,'(2)=\dfrac{16}{2^2}=4 \\ y-f(2)=f\,'(2)(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow y-(-3)=4(x-2) \Rightarrow y+3=4x-8 \Rightarrow \boxed{y=4x-11}$$

Obtenemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} g(2)=2^2=4 \\ g\,'(2)=2\cdot 2=4 \\ y-g(2)=g\,'(2)(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow y-4=4(x-2) \Rightarrow y-4=4x-8 \Rightarrow \boxed{y=4x-4}$$

Estas rectas no se cortan pues tienen la misma pendiente: $f\,'(2)=g\,'(2)=4$ y por tanto son paralelas.

De todas formas, planteamos el sistema formado por sus ecuaciones e intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l} y=4x-11 \\ y=4x-4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x-11=4x-4 \Rightarrow \text{¡¡}-7=0\text{!! ¡Imposible!}$$

Las rectas tangentes no se cortan en ningún punto.

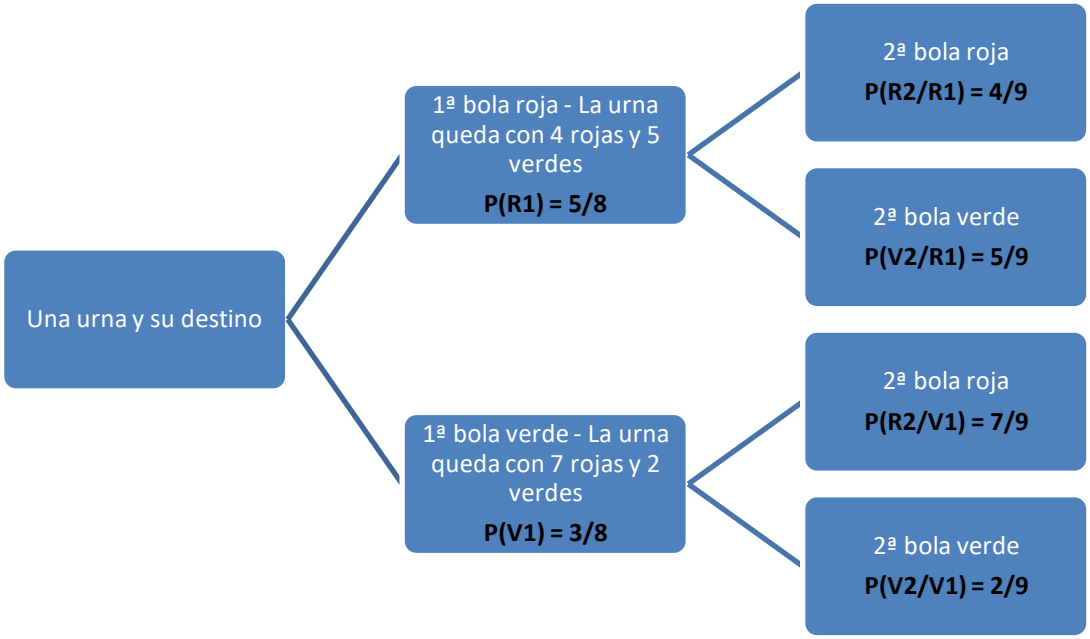
EJERCICIO 3

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 bolas del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola.

a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.

b) **(1.25 puntos)** Halle la probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja.

Realizamos un diagrama de árbol para establecer las probabilidades de los distintos sucesos.



He llamado R1 y R2 a sacar bola roja en 1ª y 2ª extracción y V1, V2 a sacar bola verde en 1ª y 2ª extracción.

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V2) = P(R1)P(V2/R1) + P(V1)P(V2/V1) = \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9} = \boxed{\frac{31}{72} \simeq 0.43}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R1/R2) = \frac{P(R1 \cap R2)}{P(R2)} = \frac{P(R1)P(R2/R1)}{P(R2)} =$$

$$= \frac{P(R1)P(R2/R1)}{P(R1)P(R2/R1) + P(V1)P(R2/V1)} =$$

$$= \frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9} + \frac{3}{8}\cdot\frac{7}{9}} = \boxed{\frac{20}{41} \simeq 0.49}$$

EJERCICIO 4

En una muestra, elegida al azar, de 100 estudiantes de una Universidad, se ha observado que 25 desayunan en la cafetería del campus.

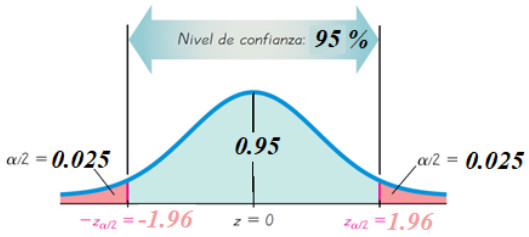
a) **(1.25 puntos)** Determine, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo de confianza para estimar la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería.

b) **(1.25 puntos)** Si la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería del campus en una muestra aleatoria es de 0.2, y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0.03, con un nivel de confianza del 92.5 % calcule el tamaño mínimo de la muestra.

n = 100. $p = \frac{25}{100} = 0.25 \rightarrow q = 1 - p = 1 - 0.25 = 0.75$

a) Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 95 %.

$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{100}} \simeq 0.08487$$

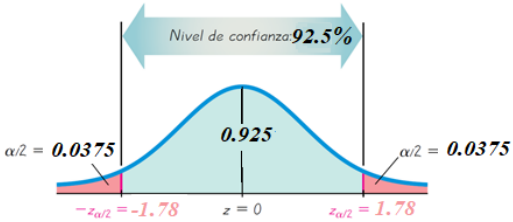
El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.25 - 0.08487,\ \ 0.25 + 0.08487\right) = \left(0.16513, 0.33487\right)$$

b) La proporción es $p = 0.2 \rightarrow q = 1 - p = 1 - 0.2 = 0.8$.

Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 92.5 %.

$1 - \propto = 0{,}925 \rightarrow \propto = 0{,}075 \rightarrow \propto/2 = 0'0375 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}9625 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.78}$



Igualamos el error a 0.03.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.03 = 1.78 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{n}} \Rightarrow \frac{0.03}{1.78} = \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.03}{1.78}\right)^2 = \frac{0.2 \cdot 0.8}{n} \Rightarrow n = \frac{0.2 \cdot 0.8}{\left(\frac{0.03}{1.78}\right)^2} \simeq 563.271$$

Como el número de estudiantes debe ser entero y superior al número obtenido, el mínimo número de estudiantes que debemos elegir para que el error en la proporción de usuarios de la cafetería sea menor de 0.03 es de 564.

PevAU 2017 Ordinaria Matemáticas CC.SS. II

Universidades Públicas de Andalucía	**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA** **PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD** CURSO 2016-2017	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

a) **(1 punto)** Calcule la matriz A^{2017}.

b) **(1.5 puntos)** ¿Se verifica la expresión $(B+A)\cdot(B-A)=B^2-A^2$?

EJERCICIO 2

Sea *f(t)* el porcentaje de ocupación de un determinado complejo hotelero en función del tiempo *t*, medido en meses, transcurrido desde su inauguración:

$$f(t)=\begin{cases}-\frac{5}{2}t^2+20t & si\ \ 0\le t\le 6\\ \frac{90t-240}{t+4} & si\ \ t>6\end{cases}$$

a) **(0.5 puntos)** ¿Evoluciona la función *f* de forma continua?

b) **(0.5 puntos)** ¿Cuál sería el porcentaje de ocupación al finalizar el segundo año?

c) **(1 punto)** ¿En qué momentos el porcentaje de ocupación sería del 40%?

d) **(0.5 puntos)** ¿Llegaría en algún momento a estar completo en caso de que estuviese abierto indefinidamente?

EJERCICIO 3

Se sabe que el 90 % de los alumnos de un centro docente está interesado por las redes sociales, el 60 % está interesado por sus notas y el 55 % por ambas cuestiones. Se elige al azar un alumno de ese centro.

a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que dicho alumno esté interesado por alguna de las dos cuestiones?

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que esté interesado por sus notas, sabiendo que no está interesado por las redes sociales.

c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que no esté interesado por ninguna de estas dos cuestiones.

EJERCICIO 4

La altura de los estudiantes de 2º de bachillerato de un centro sigue una ley Normal de media 165 cm y desviación típica 10 cm.

a) **(1 punto)** ¿Qué distribución sigue la altura media de las muestras de tamaño 25?

b) **(1.5 puntos)** Se elige al azar una muestra de 25 estudiantes y se les mide la altura. ¿Cuál es la probabilidad de que la altura media de esa muestra supere 160 cm?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Un distribuidor de software informático tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. Ha de conseguir al menos 25 empresas como clientes y el número de clientes particulares deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Por razones de eficiencia del servicio postventa, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Cada empresa le produce 386 € de beneficio, mientras que cada particular le produce 229 €. ¿Qué combinación de empresas y particulares le proporcionará el máximo beneficio? ¿A cuánto ascenderá ese beneficio?

EJERCICIO 2

a) **(1.5 puntos)** Calcule la derivada de las siguientes funciones

$$f(x)=\frac{e^{5x}-x}{x^2-x} \qquad g(x)=\left(2x^2-x\right)^3\cdot\ln\left(x^3+2\right)$$

b) **(1 punto)** Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=\frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

EJERCICIO 3

En una ciudad hay dos fábricas de pasta, F1 y F2, que producen dos tipos de productos, A y B, que venden a un distribuidor en paquetes de 1 kg. En un mes, la fábrica F1 produce 20000 kg de pasta, de los que 12000 son del tipo A y la fábrica F2 produce 25000 kg de pasta de los que 15000 kg son del tipo A. Se escoge al azar un paquete del distribuidor.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea del tipo B?

b) **(1 punto)** Si el paquete elegido resulta ser del tipo A, ¿qué es más probable, que proceda de la fábrica F1 o que proceda de la F2?

EJERCICIO 4

La puntuación obtenida por los participantes en una prueba es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con una desviación típica de 6 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 64 participantes en esa prueba, resultando una puntuación media de 35 puntos.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, al 95 %, para la calificación media del total de participantes en la citada prueba.

b) **(1.25 puntos)** Halle el tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la puntuación media del total de participantes, con un error inferior a 0.5 puntos y un nivel de confianza del 99 %.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

a) **(1 punto)** Calcule la matriz A^{2017}.

b) **(1.5 puntos)** ¿Se verifica la expresión $(B+A)\cdot(B-A)=B^2-A^2$?

a) Calculamos varias potencias de la matriz A en busca de alguna regularidad.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2-2\\ 0 & (-1)(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=Id$$

$$A^3=A^2\cdot A=Id\cdot A=A$$

$$A^4=A^3\cdot A=A\cdot A=A^2=Id$$

$$A^5=A^4\cdot A=Id\cdot A=A$$

Observamos que las potencias de exponente par de A nos dan la matriz identidad y las potencias de exponente impar nos dan la matriz A.
Como 2017 es impar tenemos que:

$$A^{2017}=\{\text{Exponente impar}\}=A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

b) Calculamos la expresión de los dos miembros de la igualdad y los comparamos.

$$(B+A)\cdot(B-A)=\left(\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -12+3\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -9\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$B^2-A^2=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -3-2\\ 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2-2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -5\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

Por lo tanto tenemos que $(B+A)\cdot(B-A)=\begin{pmatrix}8 & -9\\ 0 & 3\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}8 & -5\\ 0 & 3\end{pmatrix}=B^2-A^2$

Hemos comprobado que no es cierta la igualdad.

EJERCICIO 2

Sea *f(t)* el porcentaje de ocupación de un determinado complejo hotelero en función del tiempo *t*, medido en meses, transcurrido desde su inauguración:

$$f(t)=\begin{cases}-\frac{5}{2}t^2+20t \;\; si \;\; 0\le t\le 6\\ \frac{90t-240}{t+4} \;\; si \;\; t>6\end{cases}$$

a) **(0.5 puntos)** ¿Evoluciona la función *f* de forma continua?
b) **(0.5 puntos)** ¿Cuál sería el porcentaje de ocupación al finalizar el segundo año?
c) **(1 punto)** ¿En qué momentos el porcentaje de ocupación sería del 40%?
d) **(0.5 puntos)** ¿Llegaría en algún momento a estar completo en caso de que estuviese abierto indefinidamente?

a) La función $-\frac{5}{2}t^2+20t$ es una función polinómica, por tanto, continua en todo $\mathbb{R}$, en particular lo es en el intervalo (0,6).

La función $\frac{90t-240}{t+4}$ es una función racional, por tanto, continua en $\mathbb{R}-\{4\}$ (valor que anula el denominador), en particular lo es en el intervalo (6, +∞).

Veamos la continuidad de *f(t)* en *t = 6*.

$$\left.\begin{array}{l} f(6)=-\frac{5}{2}\cdot 6^2+20\cdot 6=30\\ \lim\limits_{x\to 6^-} f(t)=\lim\limits_{x\to 6^-}-\frac{5}{2}t^2+20t=30\\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(t)=\lim\limits_{x\to 6^+}\frac{90t-240}{t+4}=\frac{90\cdot 6-240}{6+4}=30\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 6^-} f(t)=\lim_{x\to 6^+} f(t)=f(6)=30$$

La función es continua en *t = 6*.

La función es continua en el intervalo de definición [0, +∞).

b) Como el valor de *t* viene dado en meses nos piden la ocupación en el mes 2 · 12 = 24.

$$f(24)=\frac{90\cdot 24-240}{24+4}=\frac{1920}{28}\simeq 68.57$$

La ocupación al finalizar el segundo año es de aproximadamente 68.57 %.

c) Nos piden averiguar el valor de *t* para que *f(t) = 40*.

$$f(t)=40\Rightarrow\begin{cases}-\frac{5}{2}t^2+20t=40\Rightarrow -5t^2+40t-80=0\Rightarrow t^2-8t+16=0\Rightarrow\\ \qquad\qquad\Rightarrow t=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-64}}{2}=4\\ \frac{90t-240}{t+4}=40\Rightarrow 90t-240=40t+160\Rightarrow 50t=400\Rightarrow t=\frac{400}{50}=8\end{cases}$$

La ocupación es del 40 % en el cuarto y octavo mes.

d) Nos preguntan si la ocupación llegará a ser del 100 % en algún momento.
Veamos que la función no toma ese valor en ningún momento.

$$f(t)=100\Rightarrow\begin{cases}-\frac{5}{2}t^2+20t=100\Rightarrow -5t^2+40t-200=0\Rightarrow t^2-8t+40=0\Rightarrow \\ \qquad\Rightarrow t=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-160}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{-36}}{2}=\text{¡No es posible!}\\ \\ \frac{90t-240}{t+4}=100\Rightarrow 90t-240=100t+400\Rightarrow -10t=640\Rightarrow t=\frac{640}{-10}=-64\\ \qquad\text{Valor negativo }\rightarrow\text{¡No es posible!}\end{cases}$$

También determinamos la tendencia de la ocupación cuando el número de meses es muy grande, es decir cuando *t* tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{90t-240}{t+4}=\frac{90}{1}=90$$

Cuando *t* crece la ocupación tiende a ser del 90 %. La ocupación tiende a acercarse al 90 % con el paso de los meses y no llegará nunca al 100%.

EJERCICIO 3

Se sabe que el 90 % de los alumnos de un centro docente está interesado por las redes sociales, el 60 % está interesado por sus notas y el 55 % por ambas cuestiones. Se elige al azar un alumno de ese centro.

a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que dicho alumno esté interesado por alguna de las dos cuestiones?

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que esté interesado por sus notas, sabiendo que no está interesado por las redes sociales.

c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que no esté interesado por ninguna de estas dos cuestiones.

Realizamos una tabla de contingencia para obtener el resto de porcentajes no proporcionados en el enunciado, aunque vienen implícitos en él.

	Interesados por sus notas (N)	No interesados por sus notas ($\overline{N}$)	
Interesados por las redes sociales (R)	**55**		**90**
No interesados por las redes sociales ($\overline{R}$)			
	60		**100**

Completamos la tabla.

	Interesados por las notas (N)	No interesados por las notas ($\overline{N}$)	
Interesados por las redes sociales (R)	**55**	**35**	**90**
No interesados por las redes sociales ($\overline{R}$)	**5**	**5**	**10**
	60	**40**	**100**

Con estos datos respondemos a las preguntas planteadas utilizando la regla de Laplace.

a) Sabemos que del 100 % de los alumnos hay 55 % que están interesados en las dos cuestiones, un 35 % solo están interesados en las redes sociales y un 5 % solo están interesados por las notas.

$$P(R \cup N) = \frac{55+35+5}{100} = \boxed{0.95}$$

b) Sabemos que del 10 % que no están interesados por las redes sociales (última celda de la segunda fila) solo el 5 % está interesado por sus notas (primera celda de segunda fila).

$$P(N / \overline{R}) = \frac{5}{10} = \boxed{0.5}$$

c) Observando los datos de la tabla tenemos que $P(\overline{N} \cap \overline{R}) = \frac{5}{100} = \boxed{0.05}$

EJERCICIO 4

La altura de los estudiantes de 2º de bachillerato de un centro sigue una ley Normal de media 165 cm y desviación típica 10 cm.

a) **(1 punto)** ¿Qué distribución sigue la altura media de las muestras de tamaño 25?

b) **(1.5 puntos)** Se elige al azar una muestra de 25 estudiantes y se les mide la altura. ¿Cuál es la probabilidad de que la altura media de esa muestra supere 160 cm?

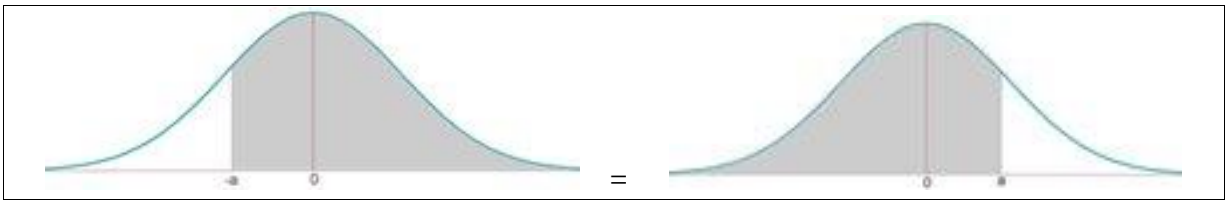
a) X = Altura de un estudiante de 2º de bachillerato en centimetros. $X = N(165,10)$

Para muestras de tamaño 25 la distribución muestral de medias $\overline{X}$ sigue una normal $\overline{X} = N\left(165, \frac{10}{\sqrt{25}}\right) \rightarrow \overline{X} = N(165,2)$.

b) Nos piden calcular $P(\overline{X} > 160)$.

$$P(\overline{X} > 160) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ \overline{X} = N(165,2) \rightarrow Z = \frac{\overline{X} - 165}{2} = N(1,0) \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(\frac{\overline{X} - 165}{2} > \frac{160 - 165}{2}\right) = P(Z > -2.5) = \ldots$$



$$\ldots = P(Z < 2.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la tabla} \\ \text{de la N}(0,1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9938}$$

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Un distribuidor de software informático tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. Ha de conseguir al menos 25 empresas como clientes y el número de clientes particulares deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Por razones de eficiencia del servicio postventa, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Cada empresa le produce 386 € de beneficio, mientras que cada particular le produce 229 €. ¿Qué combinación de empresas y particulares le proporcionará el máximo beneficio? ¿A cuánto ascenderá ese beneficio?

Llamamos "***x***" al número de empresas clientes e "***y***" al número de clientes particulares.
La función que deseamos maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión:

$$B(x,y)=386x+229y$$

Obtenemos las inecuaciones que expresan las restricciones.

"*Ha de conseguir al menos 25 empresas como clientes*" → $x\geq 25$
"*El número de clientes particulares deberá ser como mínimo el doble que el de empresas*" → $y\geq 2x$
"*Tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales*" → $x+y\leq 120$
Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 25 \\ y\geq 2x \\ x+y\leq 120 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq 25 \\ y\geq 2x \\ y\leq 120-x \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Representamos las rectas asociadas al sistema y que delimitan la región factible.

$x=25$

$x=25$	y
25	50
25	95

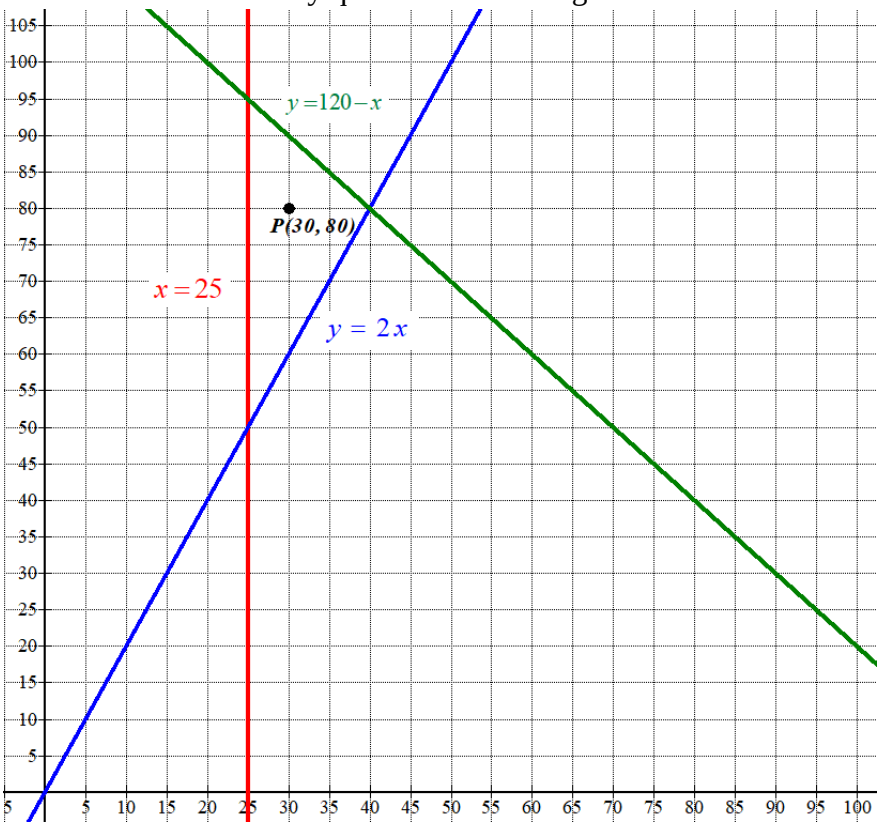
$y=2x$

x	$y=2x$
0	0
40	80

$y=120-x$

x	$y=120-x$
0	120
40	80

$x\geq 0;\ y\geq 0$
Primer cuadrante

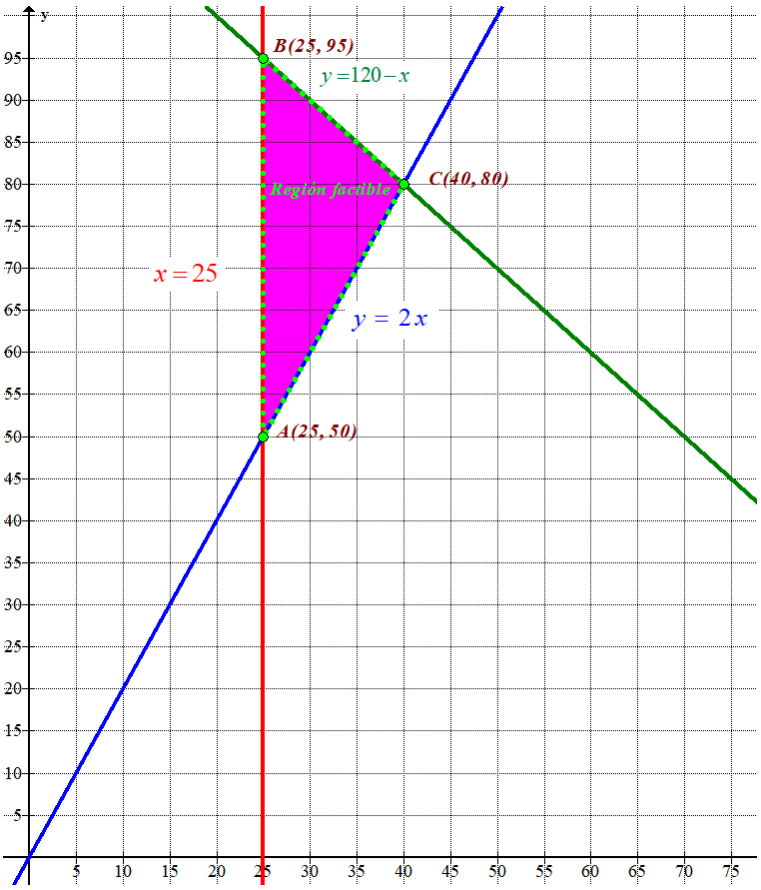


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 25 \\ y \geq 2x \\ y \leq 120 - x \\ x \geq 0;\ \ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada a la derecha de la recta vertical roja, por encima de la recta azul y por debajo de la recta verde.

Como el punto P(30, 80) pertenece a esta región comprobamos que cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 30 \geq 25 \rightarrow !OK\,¡ \\ 80 \geq 2 \cdot 30 \rightarrow !OK\,¡ \\ 80 \leq 120 - 30 \rightarrow !OK\,¡ \\ 30 \geq 0;\ \ 80 \geq 0 \rightarrow !OK\,¡ \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la indicada y que coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Las coordenadas de los vértices se obtienen de resolver los sistemas de ecuaciones correspondientes.

A → $\left.\begin{array}{l} x = 25 \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2 \cdot 25 = 50 \Rightarrow \boxed{A(25,50)}$

B → $\left.\begin{array}{l} x = 25 \\ y = 120 - x \end{array}\right\} \Rightarrow y = 120 - 25 = 95 \Rightarrow \boxed{B(25,95)}$

$$\text{C} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2x \\ y = 120 - x \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 120 - x \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{3} = 40 \Rightarrow$$

$$y = 2 \cdot 40 = 80 \Rightarrow \boxed{C(40,80)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 386x + 229y$ en cada uno de los vértices de la región factible.

- A(25, 50) → $B(25,50) = 386 \cdot 25 + 229 \cdot 50 = 21100$
- B(25, 95) → $B(25,95) = 386 \cdot 25 + 229 \cdot 95 = 31405$
- C(40, 80) → $B(40,80) = 386 \cdot 40 + 229 \cdot 80 = 33760$ ¡¡MÁXIMO!!

El máximo beneficio se consigue en el punto C(40, 80) que significa tener 40 empresas y 80 particulares como clientes. Siendo el valor de dicho beneficio máximo de 33760 €.

EJERCICIO 2

a) **(1.5 puntos)** Calcule la derivada de las siguientes funciones

$$f(x)=\frac{e^{5x}-x}{x^2-x} \qquad g(x)=\left(2x^2-x\right)^3\cdot\ln\left(x^3+2\right)$$

b) **(1 punto)** Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=\frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

a) Calculamos las derivadas pedidas usando las reglas de derivación correspondientes.

$$f(x)=\frac{e^{5x}-x}{x^2-x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(5e^{5x}-1\right)\left(x^2-x\right)-\left(2x-1\right)\left(e^{5x}-x\right)}{\left(x^2-x\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{5x^2e^{5x}-5xe^{5x}-x^2+x-\left(2xe^{5x}-2x^2-e^{5x}+x\right)}{\left(x^2-x\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{5x^2e^{5x}-5xe^{5x}-x^2+\cancel{x}-2xe^{5x}+2x^2+e^{5x}-\cancel{x}}{\left(x^2-x\right)^2}=\frac{5x^2e^{5x}-7xe^{5x}+e^{5x}+x^2}{\left(x^2-x\right)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{e^{5x}\left(5x^2-7x+1\right)+x^2}{\left(x^2-x\right)^2}}$$

$$g(x)=\left(2x^2-x\right)^3\cdot\ln\left(x^3+2\right)\Rightarrow g'(x)=3\left(2x^2-x\right)^2\left(4x-1\right)\cdot\ln\left(x^3+2\right)+\left(2x^2-x\right)^3\cdot\frac{3x^2}{x^3+2}$$

$$g'(x)=3x^2\left(2x-1\right)^2\left(4x-1\right)\cdot\ln\left(x^3+2\right)+x^3\left(2x-1\right)^3\cdot\frac{3x^2}{x^3+2}$$

$$\boxed{g'(x)=3x^2\left(2x-1\right)^2\left(4x-1\right)\cdot\ln\left(x^3+2\right)+\frac{3x^5\left(2x-1\right)^3}{x^3+2}}$$

b) La ecuación de la recta tangente a la función $h(x)=\frac{1}{x}$ en $x = 1$ es $y-h(1)=h'(1)\cdot(x-1)$

$$\left.\begin{array}{l}h(1)=\frac{1}{1}=1\\ h(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow h'(x)=-\frac{1}{x^2}\\ h'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1\\ y-h(1)=h'(1)\cdot(x-1)\end{array}\right\}\Rightarrow y-1=(-1)(x-1)\Rightarrow y-1=-x+1\Rightarrow \boxed{y=-x+2}$$

La recta tangente a la función $h(x)=\frac{1}{x}$ en $x = 1$ tiene como ecuación $y=-x+2$.

EJERCICIO 3

En una ciudad hay dos fábricas de pasta, F1 y F2, que producen dos tipos de productos, A y B, que venden a un distribuidor en paquetes de 1 kg. En un mes, la fábrica F1 produce 20000 kg de pasta, de los que 12000 son del tipo A y la fábrica F2 produce 25000 kg de pasta de los que 15000 kg son del tipo A. Se escoge al azar un paquete del distribuidor.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea del tipo B?

b) **(1 punto)** Si el paquete elegido resulta ser del tipo A, ¿qué es más probable, que proceda de la fábrica F1 o que proceda de la F2?

Realizamos una tabla de contingencia para obtener el resto de datos no proporcionados en el enunciado, aunque vienen implícitos en él.

	Kilos de pasta tipo A	Kilos de pasta tipo B	
Kilos producidos por F1	**12000**		**20000**
Kilos producidos por F2	**15000**		**25000**

Completamos la tabla.

	Kilos de pasta tipo A	Kilos de pasta tipo B	
Kilos producidos por F1	**12000**	**8000**	**20000**
Kilos producidos por F2	**15000**	**10000**	**25000**
	27000	**18000**	**45000**

Con estos datos respondemos a las preguntas planteadas utilizando la regla de Laplace.

a) $P(B)=\dfrac{\text{nº kilos de pasta del tipo B}}{\text{nº total de kilos de pasta}}=\dfrac{18000}{45000}=\boxed{\dfrac{2}{5}=0.40}$

b) Observamos en la tabla que de los 27000 kilos de pasta del tipo A 12000 proceden de la fábrica F1 y 15000 proceden de la fábrica F2. Por lo que es más probable que proceda de la fábrica F2.

OTRA FORMA DE HACERLO

Calculamos la probabilidad de que proceda de F1 y la probabilidad de que proceda de F2.

$$P(F1/A)=\frac{\text{nº de kilos de pasta del tipo A de la fábrica F1}}{\text{nº kilos de pasta del tipo A}}=\frac{12000}{27000}=\boxed{\frac{4}{9}\simeq 0.44}$$

$$P(F2/A)=\frac{\text{nº de kilos de pasta del tipo A de la fábrica F2}}{\text{nº kilos de pasta del tipo A}}=\frac{15000}{27000}=\boxed{\frac{5}{9}\simeq 0.55}$$

Es mayor la probabilidad de que proceda de la fábrica F2 (0.55) que de que proceda de F1 (0.44).

Es más probable que proceda de la fábrica F2.

EJERCICIO 4

La puntuación obtenida por los participantes en una prueba es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con una desviación típica de 6 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 64 participantes en esa prueba, resultando una puntuación media de 35 puntos.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, al 95 %, para la calificación media del total de participantes en la citada prueba.

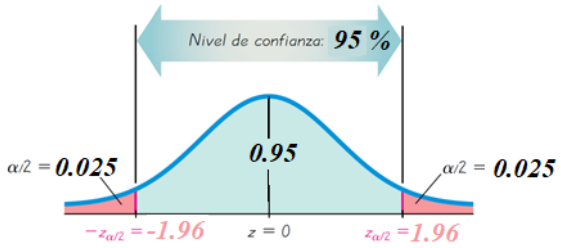
b) **(1.25 puntos)** Halle el tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la puntuación media del total de participantes, con un error inferior a 0.5 puntos y un nivel de confianza del 99 %.

La desviación típica es 6 puntos

X = Puntuación obtenida por un participante en una prueba. X = N(μ, 6)

n = 64 concursantes $\bar{x} = 35$ *puntos*

a) Determinamos $z_{\alpha/2}$ **c**on un nivel de confianza del 95 %.



$1 - \propto = 0.95 \rightarrow \propto = 0.05 \rightarrow \propto/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

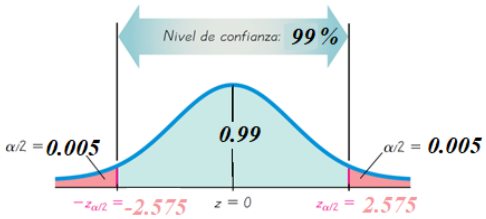
Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{6}{\sqrt{64}} = 1.47$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(35 - 1.47,\ \ 35 + 1.47\right) = \left(33.53, 36.47\right)$$

b) Determinamos $z_{\alpha/2}$ **c**on un nivel de confianza del 99 %.



$1 - \propto = 0.99 \rightarrow \propto = 0.01 \rightarrow \propto/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \dfrac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$

Igualamos el error del intervalo de confianza a 0.5.

$$Error = 0.5 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.5 \Rightarrow 2.575 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} = 0.5 \Rightarrow 2.575 \cdot 6 = 0.5\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{6 \cdot 2.575}{0.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{6 \cdot 2.575}{0.5}\right)^2 = 954.81$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 955 participantes.