

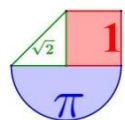
MATEMÁTICAS II

Comunidad de
ANDALUCÍA



PAU 2017 a 2026

(36 exámenes resueltos)



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM
WWW.MATEMATICASPAU.COM

En este cuaderno de ejercicios se recopilan los enunciados y las soluciones de los 33 exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad de Andalucía desde el año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García. Ha sido profesor de matemáticas de educación secundaria.

En la web www.ebaumatematicas.com hay un banco de ejercicios de matemáticas II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas de acceso a la universidad realizadas en todas las comunidades españolas.

PAU 2026 Extraordinaria Matemáticas II	3
PAU 2026 Extraordinaria (Suplente 1) Matemáticas II.....	14
PAU 2026 Extraordinaria (Suplente 2) Matemáticas II.....	26
PAU 2026 Ordinaria Matemáticas II	38
PAU 2026 Ordinaria (Suplente 1) Matemáticas II.....	50
PAU 2026 Ordinaria (Suplente 2) Matemáticas II.....	62
PAU 2025 Extraordinaria Matemáticas II	74
PAU 2025 Extraordinaria suplente 1 Matemáticas II	86
PAU 2025 Extraordinaria suplente 2 Matemáticas II	98
PAU 2025 Ordinaria Matemáticas II	110
PAU 2025 Ordinaria suplente 1 Matemáticas II	120
PAU 2025 Ordinaria suplente 2 Matemáticas II	133
PevAU 2024 Extraordinaria Matemáticas II	145
PevAU 2024 Extraordinaria (suplente) Matemáticas II.....	160
PevAU 2024 Extraordinaria (reserva) Matemáticas II	171
PevAU 2024 Ordinaria Matemáticas II	185
PevAU 2024 Ordinaria (suplente) Matemáticas II.....	199
PevAU 2024 Ordinaria (reserva) Matemáticas II.....	210
PevAU 2023 Extraordinaria Matemáticas II	225
PevAU 2023 Extraordinaria (suplente) Matemáticas II.....	239
PevAU 2023 Extraordinaria (reserva) Matemáticas II	251
PevAU 2023 Ordinaria Matemáticas II	262
PevAU 2023 Ordinaria (suplente) Matemáticas II.....	274
PevAU 2023 Ordinaria (reserva) Matemáticas II.....	289
PevAU 2022 Extraordinaria Matemáticas II	304
PevAU 2022 Ordinaria Matemáticas II	317
PevAU 2021 Extraordinaria Matemáticas II	331
PevAU 2021 Ordinaria Matemáticas II	344
PevAU 2020 Extraordinaria Matemáticas II	357
PevAU 2020 Ordinaria Matemáticas II	368
PevAU 2019 Extraordinaria Matemáticas II	380
PevAU 2019 Ordinaria Matemáticas II	394
PevAU 2018 Extraordinaria Matemáticas II	408
PevAU 2018 Ordinaria Matemáticas II	423
PevAU 2017 Extraordinaria Matemáticas II	440
PevAU 2017 Ordinaria Matemáticas II	455

PAU 2026 Extraordinaria Matemáticas II



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- Duración: 1 hora y 30 minutos**
- Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- Este examen consta de seis ejercicios distribuidos en una parte con dos ejercicios obligatorios y una parte con dos bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- Se deben resolver los dos ejercicios obligatorios y solamente un ejercicio de cada uno de los dos bloques con optatividad. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque optativo, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos. En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- Se proporciona la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

PARTE OBLIGATORIA Resuelve los dos ejercicios siguientes:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

La velocidad de crecimiento de la población de peces en un lago al cabo del tiempo, t en años, viene dada por $P'(t) = 20te^{\frac{-t}{10}}$, siendo $P(t)$ la población de peces. Sabiendo que la población inicial es de 1000 peces, calcula cuántos tendrá el lago transcurridos 10 años.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, verifica que: $f(1) = 0$, $x = 0$ es un punto crítico de la función y la recta tangente a su gráfica en $x = -1$, es paralela a la recta de ecuación $y + 3x = 0$. Determina a , b y c .

PARTE OPTATIVA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Una familia va al mercado semanalmente y compra tres tipos de alimentos: verdura, carne y pescado, en el que gastó 115 € semanales, observó que pagaba el doble en el puesto del pescado que en el de la verdura. En 2026 se ha notado un incremento de precios pues ahora gasta 19€ más que el año pasado por la misma compra, comprobando que la verdura ha subido un 12%, la carne un 15% y el pescado un 20%. Calcula el precio que la familia paga semanalmente en 2026, por cada tipo de alimento.

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Halla razonadamente el determinante de una matriz X que verifica $A^3XB^t = 5B^2A^{-1}$.
- b) [1,5 puntos] Determina, si existe, una matriz Y que verifica $A^3YB^{-1} = A^2$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2.

 Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:**EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)**

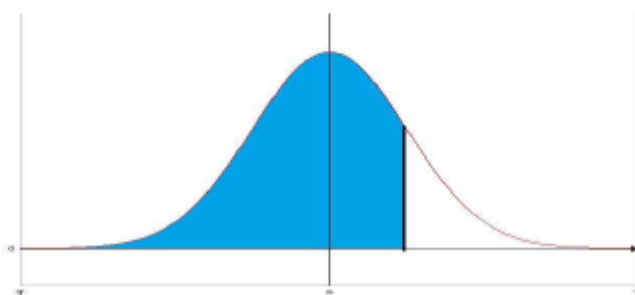
Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 3 = 0$.

- a) [1 punto] Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y que está contenida en π .
- b) [1,5 puntos] Halla el punto simétrico de $P(1,1,1)$ respecto de π .

EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

Tres máquinas A, B y C, producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de los coches que se producen en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3%, 4% y 5%, respectivamente.

- a) [1,25 puntos] Seleccionamos un coche al azar. Calcula la probabilidad de que sea defectuoso.
- b) [1,25 puntos] Tomamos, al azar, un coche y resulta ser defectuoso. ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido dicho coche?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $N(0, 1)$ 

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

La velocidad de crecimiento de la población de peces en un lago al cabo del tiempo, t en años, viene dada por $P'(t) = 20te^{\frac{-t}{10}}$, siendo $P(t)$ la población de peces. Sabiendo que la población inicial es de 1000 peces, calcula cuántos tendrá el lago transcurridos 10 años.

La función $P(t)$ es la integral de la función $P'(t) = 20te^{\frac{-t}{10}}$.

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \int P'(t) dt = \int 20te^{\frac{-t}{10}} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = 20t \rightarrow du = 20dt \\ dv = e^{\frac{-t}{10}} dt \rightarrow v = \int e^{\frac{-t}{10}} dt = -10e^{\frac{-t}{10}} \end{array} \right\} = \\
 &= 20t \left(-10e^{\frac{-t}{10}} \right) - \int 20 \left(-10e^{\frac{-t}{10}} \right) dt = -200te^{\frac{-t}{10}} + 200 \int e^{\frac{-t}{10}} dt = \\
 &= -200te^{\frac{-t}{10}} + 200 \left(-10e^{\frac{-t}{10}} \right) = -200te^{\frac{-t}{10}} - 2000e^{\frac{-t}{10}} = \boxed{-200(t+10)e^{\frac{-t}{10}} + K}
 \end{aligned}$$

La población de peces en el lago viene dada por la expresión $P(t) = -200(t+10)e^{\frac{-t}{10}} + K$. Hallamos el valor de K sabiendo que la población inicial es de 1000 peces, es decir, $P(0) = 1000$.

$$\left. \begin{array}{l} P(t) = -200(t+10)e^{\frac{-t}{10}} + K \\ P(0) = 1000 \end{array} \right\} \Rightarrow 1000 = -200 \cdot 10 \cdot e^{\frac{-0}{10}} + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1000 = -2000 + K \Rightarrow \boxed{K = 3000}$$

La población de peces en el lago tiene la expresión $P(t) = -200(t+10)e^{\frac{-t}{10}} + 3000$.

¿Cuántos peces tendrá el lago transcurridos 10 años?

$$P(10) = -200(10+10)e^{\frac{-10}{10}} + 3000 = -200 \cdot 20 \cdot e^{-1} + 3000 \simeq 1528.48$$

Transcurridos 10 años el lago tendrá, aproximadamente, 1528 peces.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, verifica que: $f(1) = 0$, $x = 0$ es un punto crítico de la función y la recta tangente a su gráfica en $x = -1$, es paralela a la recta de ecuación $y + 3x = 0$. Determina a , b y c .

Aplicamos que $f(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow \boxed{a + b + c = -1}$$

Si $x = 0$ es un punto crítico de la función entonces la derivada de la función se anula para este valor, es decir, $f'(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

Si la recta tangente a su gráfica en $x = -1$, es paralela a la recta de ecuación $y = -3x$ entonces deben tener la misma pendiente. La pendiente de la recta $y = -3x$ es -3 y la de la recta tangente es $f'(-1)$. Se debe cumplir que $f'(-1) = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2ax \\ f'(-1) = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow -3 = 3 \cdot (-1)^2 + 2a(-1) \Rightarrow -3 = 3 - 2a \Rightarrow -2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

Sustituimos los valores obtenidos en la primera ecuación y determinamos el valor de c .

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = -1 \\ b = 0 \\ a = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + 0 + c = -1 \Rightarrow \boxed{c = -4}$$

Los valores buscados son $a = 3$, $b = 0$ y $c = -4$

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Una familia va al mercado semanalmente y compra tres tipos de alimentos: verdura, carne y pescado, en el que gastó 115 € semanales, observó que pagaba el doble en el puesto del pescado que en el de la verdura. En 2026 se ha notado un incremento de precios pues ahora gasta 19€ más que el año pasado por la misma compra, comprobando que la verdura ha subido un 12%, la carne un 15% y el pescado un 20%. Calcula el precio que la familia paga semanalmente en 2026, por cada tipo de alimento.

Llamamos “x”, “y”, “z” a lo que gasta la familia semanalmente en 2025 en verdura, carne y pescado.

Gastó 115 € semanales $\rightarrow x + y + z = 115$.

Pagaba el doble en el puesto del pescado que en el de la verdura $\rightarrow z = 2x$.

Ahora gasta 19 € más que el año pasado por la misma compra, comprobando que la verdura ha subido un 12%, la carne un 15% y el pescado un 20% $\rightarrow 0.12x + 0.15y + 0.20z = 19$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 115 \\ z = 2x \\ 0.12x + 0.15y + 0.20z = 19 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 2x = 115 \\ 0.12x + 0.15y + 0.20 \cdot 2x = 19 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y = 115 \\ 0.52x + 0.15y = 19 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 115 - 3x \\ 0.52x + 0.15y = 19 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.52x + 0.15 \cdot (115 - 3x) = 19 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.52x + 17.25 - 0.45x = 19 \Rightarrow 0.07x = 1.75 \Rightarrow x = \frac{1.75}{0.07} = 25 \Rightarrow \begin{cases} y = 115 - 3 \cdot 25 = 40 \\ z = 2 \cdot 25 = 50 \end{cases}$$

La familia gastaba semanalmente 25 €, 40 € y 50 € en verdura, carne y pescado.

En el año 2026 han subido los precios y la familia gasta $1.12 \cdot 25 = 28$ €, $1.15 \cdot 40 = 46$ € y $1.2 \cdot 50 = 60$ € en verdura, carne y pescado.

En el año 2026 la familia gasta semanalmente 28 €, 46 € y 60 € en verdura, carne y pescado, respectivamente.

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Halla razonadamente el determinante de una matriz X que verifica $A^3XB^t = 5B^2A^{-1}$.

b) **[1,5 puntos]** Determina, si existe, una matriz Y que verifica $A^3YB^{-1} = A^2$.

a) Hallamos el valor de los determinantes de las matrices A y B.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$$

Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$|A^3XB^t| = |5B^2A^{-1}| \Rightarrow |A|^3 |X| |B^t| = |5B^2| |A^{-1}| \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B \text{ es una matriz de orden } 2 \\ B^2 \text{ es una matriz de orden } 2 \\ |5B^2| = 5^2 |B|^2 \\ |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \\ |B^t| = |B| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A|^3 |X| |B| = 25 |B|^2 \frac{1}{|A|} \Rightarrow |X| = \frac{25 |B|^2}{|A| |A|^3 |B|} = \frac{25 |B|}{|A|^4} = \frac{25 \cdot 4}{2^4} = \boxed{\frac{25}{4}}$$

b) Despejamos Y en la igualdad.

$$A^3YB^{-1} = A^2 \Rightarrow A^3YB^{-1}B = A^2B \Rightarrow A^3Y \cdot I = A^2B \Rightarrow A^3Y = A^2B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}AA^2Y = A^{-1}AAB \Rightarrow IA^2Y = AB \Rightarrow A^{-1}AA^2Y = A^{-1}AB \Rightarrow AY = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}AY = A^{-1}B \Rightarrow \boxed{Y = A^{-1}B}$$

La matriz Y existe y será el resultado de la operación $Y = A^{-1}B$. Determinamos la inversa de la matriz A y hallamos la expresión de la matriz Y.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2 \neq 0 \qquad A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Y = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12-4 & 4-4 \\ -9+4 & -3+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La matriz Y que cumple la ecuación $A^3YB^{-1} = A^2$ tiene la expresión $Y = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 3 = 0$.

a) [1 punto] Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y que está contenida en π .

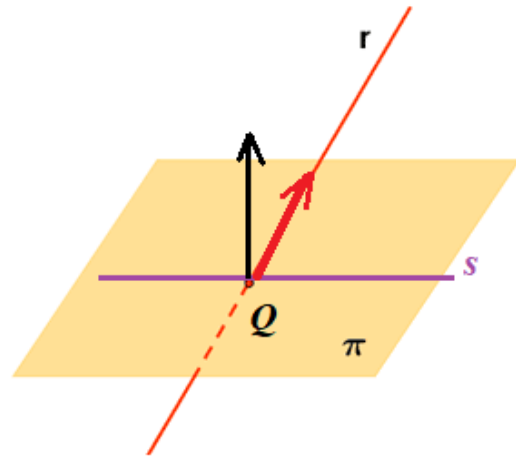
b) [1,5 puntos] Halla el punto simétrico de $P(1,1,1)$ respecto de π .

a) Determinamos primero la posición relativa de la recta r y el plano π . Comprobamos si el vector normal del plano es perpendicular al vector director de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, -1, 3) \\ \vec{v}_r = (-2, 2, 2) \end{cases}$$

$$\pi \equiv x - 2y + z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -2, 1)$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (-2, 2, 2)(1, -2, 1) = -2 - 4 + 2 = -4 \neq 0$$



Como el producto escalar es distinto de cero la recta ni está contenida en el plano ni es paralela al plano. La recta corta al plano en un punto. Hallamos el punto Q de corte de la recta y el plano.

$$\left. \begin{aligned} r &\equiv \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \\ \pi &\equiv x - 2y + z - 3 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2\lambda - 2(-1 + 2\lambda) + 3 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\cancel{\lambda} + 2 - 4\lambda + \cancel{3} + \cancel{2\lambda} - \cancel{3} = 0 \Rightarrow -4\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2\frac{1}{2} = -1 \\ y = -1 + 2\frac{1}{2} = 0 \\ z = 3 + 2\frac{1}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(-1, 0, 4)}$$

La recta s que corta perpendicularmente a r y que está contenida en π contiene el punto $Q(-1, 0, 4)$ y tiene como vector director el producto vectorial del vector normal del plano

(la recta s está contenida en el plano) y el vector director de la recta r (perpendicular a la recta r).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-2, 2, 2) \rightarrow \vec{u}_r = \frac{1}{2}\vec{v}_r = (-1, 1, 1) \\ \vec{n} = (1, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_r \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

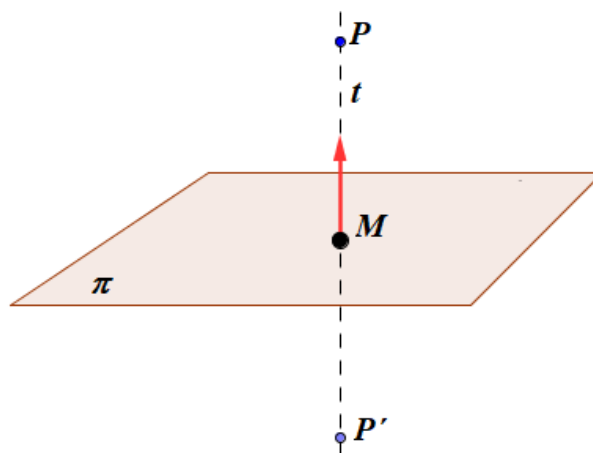
$$= i + j + 2k - k + j + 2i = 3i + 2j + k = (3, 2, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q(-1, 0, 4) \in s \\ \vec{w}_s = \vec{u}_r \times \vec{n} = (3, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

La ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y que está contenida en π es

$$s: \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$$

- b) Hallamos el punto P' simétrico del punto P respecto del plano π obteniendo la recta t perpendicular al plano que pasa por P , luego el punto M de corte de recta y plano. Y por último hallamos el punto P' .



Hallamos la recta t . Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_t = \vec{n} = (1, -2, 1) \\ P(1, 1, 1) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow t: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de la recta t y el plano π .

$$t: \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases} \Rightarrow 1+\alpha-2(1-2\alpha)+1+\alpha-3=0 \Rightarrow$$
$$\pi \equiv x-2y+z-3=0$$

$$\Rightarrow 1+\alpha-2+4\alpha+1+\alpha-3=0 \Rightarrow 6\alpha-3=0 \Rightarrow 6\alpha=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ y=1-2\frac{1}{2}=0 \\ z=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)}$$

El punto P' se obtiene sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM} = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right) - (1, 1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right) = (2, -1, 2)$$

El punto simétrico de $P(1,1,1)$ respecto de π tiene coordenadas $(2, -1, 2)$.

EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

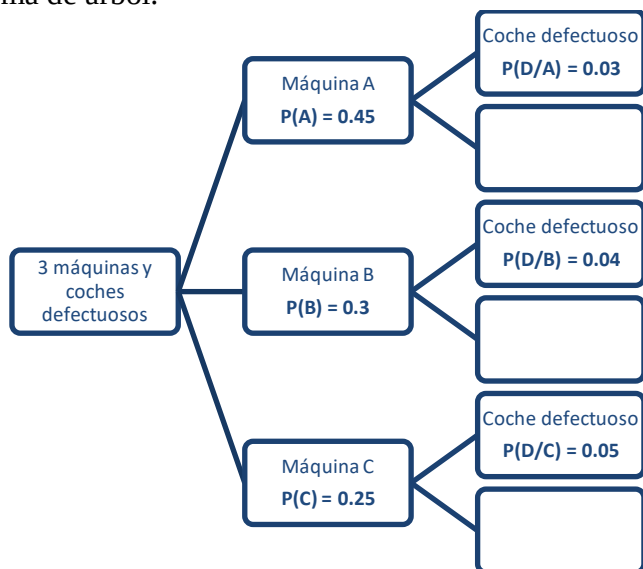
Tres máquinas A, B y C, producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de los coches que se producen en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3%, 4% y 5%, respectivamente.

a) [1,25 puntos] Seleccionamos un coche al azar. Calcula la probabilidad de que sea defectuoso.

b) [1,25 puntos] Tomamos, al azar, un coche y resulta ser defectuoso. ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido dicho coche?

Llamamos A, B y C a los sucesos elegir un coche fabricado por la máquina A, B o C, respectivamente. Y llamamos D a “el coche elegido es defectuoso”.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Debemos calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= 0.45 \cdot 0.03 + 0.3 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.05 = \boxed{0.038}$$

La probabilidad de que al elegir un coche al azar este sea defectuoso tiene un valor de 0.038.

b) Debemos calcular $P(A/D)$, $P(B/D)$ y $P(C/D)$ para averiguar que es más probable.

Son probabilidades a posteriori. Usamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} = \frac{0.45 \cdot 0.03}{0.038} = \frac{27}{76}$$

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.04}{0.038} = \frac{24}{76}$$

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{P(D)} = \frac{0.25 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{25}{76}$$

Es más probable que el coche defectuoso haya sido fabricado por la máquina A.

$$\frac{27}{76} > \frac{25}{76} > \frac{24}{76} \Rightarrow P(A/D) > P(C/D) > P(B/D)$$



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026**

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos**
- b)** Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c)** Este examen consta de seis ejercicios distribuidos en una parte con dos ejercicios obligatorios y una parte con dos bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- d)** Se deben resolver los dos ejercicios obligatorios y solamente un ejercicio de cada uno de los dos bloques con optatividad. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque optativo, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- e)** Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos. En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- f)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- g)** Se proporciona la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

PARTE OBLIGATORIA. Resuelve los dos ejercicios siguientes:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Un jardinero quiere vallar un campo rectangular que tiene un lado junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 80 euros por metro y el precio de la valla de los tres lados restantes es de 10 euros por metro. Halla las dimensiones del campo de mayor área que puede cercarse con 28800 euros. ¿Qué área tiene el campo?

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a \sin(x) + \cos(bx)$. Determina a y b ($0 < b < 3$), sabiendo que $x = \frac{\pi}{2}$ es un punto crítico de f y que $\int_0^{\pi} f(x) dx = 4$.

PARTE OPTATIVA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Considera los vectores $\vec{u} = (2, 0, 1)$ y $\vec{v} = (1, m, 2)$.

- a) [1,25 puntos]** Calcula m para que el área del triángulo que definen $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea $\frac{\sqrt{29}}{2}$

b) **[1,25 puntos]** Para $m=0$, halla los vectores que sean perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y tengan módulo $\sqrt{20}$.

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{m-2}$.

a) **[1,5 puntos]** Halla la posición relativa de π y r según los valores de m .

b) **[1 punto]** Para $m=1$, determina la ecuación del plano que contiene a r y corta perpendicularmente a π .

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2.

 Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 7x + 3y + 3z = 15 \\ x - y - z = 5 \end{cases}$$
.

a) **[1,5 punto]** Clasifícalo y resuélvelo, si es posible.

b) **[1 punto]** ¿Existe alguna solución del sistema que verifique $y + z + 2 = 0$? Razona la respuesta.

EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

La estatura de los alumnos de un centro de Educación Secundaria sigue una distribución normal de media 172 cm y desviación típica 7 cm.

a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar mida entre 168 y 180 cm.

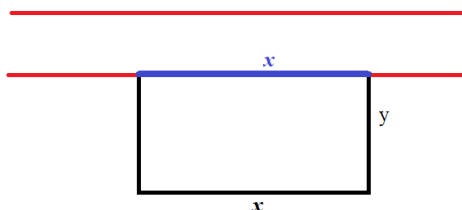
b) **[1,25 puntos]** ¿Cuánto mide al menos un alumno que está en el grupo del 5% de alumnos más altos?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Un jardinero quiere vallar un campo rectangular que tiene un lado junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 80 euros por metro y el precio de la valla de los tres lados restantes es de 10 euros por metro. Halla las dimensiones del campo de mayor área que puede cercarse con 28800 euros. ¿Qué área tiene el campo?

Hacemos un dibujo de la situación planteada.



El coste de vallar el campo rectangular es $C(x, y) = 80x + 10x + 10 \cdot 2y = 90x + 20y$. Nos dicen que tenemos 28800 euros para vallar el campo.

$$C(x, y) = 28800 \Rightarrow 90x + 20y = 28800 \Rightarrow 9x + 2y = 2880 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = 2880 - 9x \Rightarrow \boxed{y = 1440 - 4.5x}$$

Debemos maximizar el área del campo que es $A(x, y) = xy$.

Sustituimos $y = 1440 - 4.5x$ para obtener una expresión del área dependiente de una única variable.

$$\left. \begin{array}{l} y = 1440 - 4.5x \\ A(x, y) = xy \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = x(1440 - 4.5x) = 1440x - 4.5x^2$$

Obtenemos los puntos críticos de la función área obtenida.

$$A(x) = 1440x - 4.5x^2 \Rightarrow A'(x) = 1440 - 9x$$

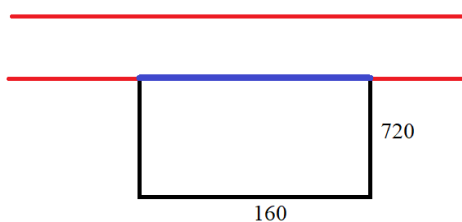
$$A'(x) = 0 \Rightarrow 1440 - 9x = 0 \Rightarrow 9x = 1440 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1440}{9} = 160}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$A'(x) = 1440 - 9x \Rightarrow A''(x) = -9 \Rightarrow A''(160) = -9 < 0$$

Para $x = 160$ se anula la primera derivada y la segunda toma valor negativo. La función área tiene un máximo relativo en $x = 160$. Obtenemos el valor del otro lado del campo: $y = 1440 - 4.5 \cdot 160 = 720$.

El campo rectangular con área máxima que podemos vallar con 28800 euros tiene los lados de longitudes 160 y 720 metros. El área del campo es $720 \cdot 160 = 115200 \text{ m}^2$.



EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a \operatorname{sen}(x) + \cos(bx)$. Determina a y b ($0 < b < 3$), sabiendo que $x = \frac{\pi}{2}$ es un punto crítico de f y que $\int_0^\pi f(x) dx = 4$.

Si en $x = \frac{\pi}{2}$ la función presenta un punto crítico entonces la derivada de la función se anula

$$\rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$f(x) = a \operatorname{sen}(x) + \cos(bx) \Rightarrow f'(x) = a \cos(x) - b \operatorname{sen}(bx)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow a \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - b \operatorname{sen}\left(b \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow -b \operatorname{sen}\left(b \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi b}{2}\right) = 0 \Rightarrow \{0 < b < 3\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi b}{2} = 0 \rightarrow \pi b = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ No válido} \\ \frac{\pi b}{2} = \pi \rightarrow \pi b = 2\pi \rightarrow \boxed{b = 2} \\ \frac{\pi b}{2} = 2\pi \rightarrow \pi b = 4\pi \rightarrow b = 4 \text{ No válido} \\ \dots \end{cases}$$

Hemos obtenido $b = 2$. La función queda $f(x) = a \operatorname{sen}(x) + \cos(2x)$.

Determinamos la expresión de la integral definida $\int_0^\pi f(x) dx$.

$$\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi a \operatorname{sen}(x) + \cos(2x) dx = \left[-a \cos(x) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) \right]_0^\pi =$$

$$= \left[-a \cos(\pi) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\pi) \right] - \left[-a \cos(0) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2 \cdot 0) \right] = a + 0 + a + 0 = \boxed{2a}$$

Aplicamos que $\int_0^\pi f(x) dx = 4$.

$$\int_0^\pi f(x) dx = 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Los valores buscados son $a = b = 2$.

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Considera los vectores $\vec{u} = (2, 0, 1)$ y $\vec{v} = (1, m, 2)$.

a) [1,25 puntos] Calcula m para que el área del triángulo que definen $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea $\frac{\sqrt{29}}{2}$

b) [1,25 puntos] Para $m=0$, halla los vectores que sean perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y tengan módulo $\sqrt{20}$.

a) El área del triángulo definido por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se obtiene con la fórmula $\frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (2, 0, 1) \\ \vec{v} = (1, m, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = 0 + j + 2mk - 0 - 4j - mi =$$

$$= -mi - 3j + 2mk = (-m, -3, 2m)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2} = \frac{\sqrt{(-m)^2 + (-3)^2 + (2m)^2}}{2} = \frac{\sqrt{m^2 + 9 + 4m^2}}{2} = \frac{\sqrt{9 + 5m^2}}{2}$$

Averiguamos el valor de m para que el área del triángulo sea $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{29}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{9 + 5m^2}}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2} \Rightarrow \sqrt{9 + 5m^2} = \sqrt{29} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 + 5m^2 = 29 \Rightarrow 5m^2 = 20 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Los valores que cumplen lo pedido son $m = \pm 2$.

b) Para $m=0$ los vectores quedan $\vec{u} = (2, 0, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 2)$. Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es su producto vectorial.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (2, 0, 1) \\ \vec{v} = (1, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (0, -3, 0)$$

Los vectores $\vec{w}$ perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la expresión $\vec{w} = a(0, 3, 0) = (0, 3a, 0)$.

Queremos que tengan módulo $\sqrt{20}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w} = (0, 3a, 0) \\ |\vec{w}| = \sqrt{20} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{0^2 + (3a)^2 + 0^2} = \sqrt{20} \Rightarrow \sqrt{(3a)^2} = \sqrt{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a = 20 \rightarrow a = \frac{20}{3} \rightarrow \vec{w}_1 = \left(0, \frac{20}{3}, 0\right) \\ -3a = 20 \rightarrow a = \frac{-20}{3} \rightarrow \vec{w}_2 = \left(0, \frac{-20}{3}, 0\right) \end{cases}$$

Los vectores perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y con módulo $\sqrt{20}$ son $\vec{w}_1 = \left(0, \frac{20}{3}, 0\right)$ y $\vec{w}_2 = \left(0, -\frac{20}{3}, 0\right)$.

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{m-2}$.

- a) [1,5 puntos] Halla la posición relativa de π y r según los valores de m .
 b) [1 punto] Para $m=1$, determina la ecuación del plano que contiene a r y corta perpendicularmente a π .

a) Hallamos un vector director de la recta y un vector normal del plano.

$$\pi \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, -1, 2)$$

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{m-2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, 0, 2) \\ \vec{v}_r = (2, 1, m-2) \end{cases}$$

Averiguamos cuando el vector normal del plano y el director de la recta son perpendiculares, es decir, si su producto escalar es cero.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (2, -1, 2) \\ \vec{v}_r = (2, 1, m-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (2, -1, 2) \cdot (2, 1, m-2) = 4 - 1 + 2m - 4 = 2m - 1$$

$$\pi \perp r \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow 2m - 1 = 0 \Rightarrow 2m = 1 \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}}$$

Si $m \neq \frac{1}{2}$ el producto escalar $\vec{n} \cdot \vec{v}_r$ es distinto de cero y la recta corta al plano en un punto.

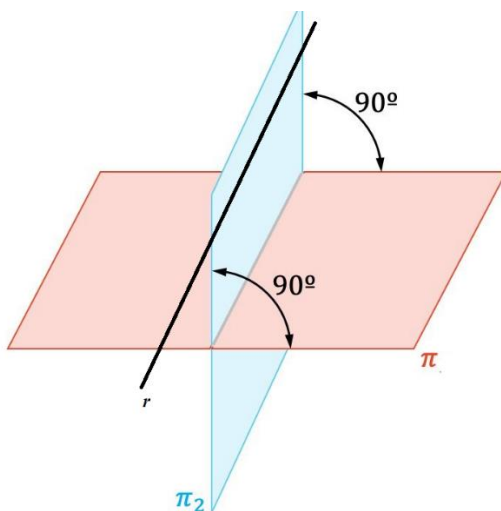
Si $m = \frac{1}{2}$ el producto escalar $\vec{n} \cdot \vec{v}_r$ vale cero, con lo que el vector normal del plano y el director de la recta son perpendiculares. La recta es paralela al plano o está contenida en dicho plano. Comprobamos si el punto $P_r(1, 0, 2)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ \text{¿} P_r(1, 0, 2) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 1 - 0 + 2 \cdot 2 - 3 = 0? \Rightarrow \text{¿} 2 + 4 - 3 = 0? \Rightarrow \text{¡NO!}$$

El punto no pertenece al plano y ningún punto de la recta pertenece al plano. La recta es paralela al plano.

Resumiendo: Si $m \neq \frac{1}{2}$ la recta y el plano se cortan y si $m = \frac{1}{2}$ la recta es paralela al plano.

b) Para $m=1$ la recta tiene ecuación $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$ y es paralela al plano.



El plano π_2 que buscamos tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal del plano π y contiene el punto $P_r(1,0,2)$ de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (2, -1, 2) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (2, 1, -1) \\ P_r(1, 0, 2) \in \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 + 4y + 2z - 4 + 2z - 4 + 2y - 2x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 6y + 4z - 7 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_2 : x - 6y - 4z + 7 = 0}$$

La ecuación del plano π_2 que contiene a r y corta perpendicularmente a π es $\pi_2 : x - 6y - 4z + 7 = 0$.

EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 7x + 3y + 3z = 15 \\ x - y - z = 5 \end{cases}$$

a) [1,5 punto] Clasifícalo y resuélvelo, si es posible.

b) [1 punto] ¿Existe alguna solución del sistema que verifique $y + z + 2 = 0$? Razona la respuesta.

a) El sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 3 & 15 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

En la matriz A se observa que las columnas segunda y tercera son iguales por lo que su rango no es 3. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 3ª su determinante vale $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 7 = -4 \neq 0$. El rango de A es 2.

En la matriz ampliada son iguales las columnas segunda y tercera. Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la tercera columna y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 15 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 15 - 7 - 3 - 35 + 15 = 0$$

Como este determinante es nulo el rango de A/B no es 3.

El rango de A y el de A/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 7x + 3y + 3z = 15 \\ x - y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 7x + 3y + 3z = 15 \\ x = y + z + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z + 5 + y + z = 1 \\ 7y + 7z + 35 + 3y + 3z = 15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y + 2z = -4 \\ 10y + 10z = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = -2 \\ y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow y + z = -2 \Rightarrow \boxed{y = -2 - z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -2 - z + z + 5 \Rightarrow \boxed{x = 3} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 - \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 - \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$$

b) Añadimos al sistema la nueva ecuación y lo resolvemos.

$$\left\{ \begin{array}{l} y + z + 2 = 0 \\ x = 3 \\ y = -2 - \alpha \\ z = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow -2 - \alpha + \alpha + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0}$$

Todas las soluciones del sistema cumplen lo pedido.

EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

La estatura de los alumnos de un centro de Educación Secundaria sigue una distribución normal de media 172 cm y desviación típica 7 cm.

- a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar mida entre 168 y 180 cm.
- b) **[1,25 puntos]** ¿Cuánto mide al menos un alumno que está en el grupo del 5% de alumnos más altos?

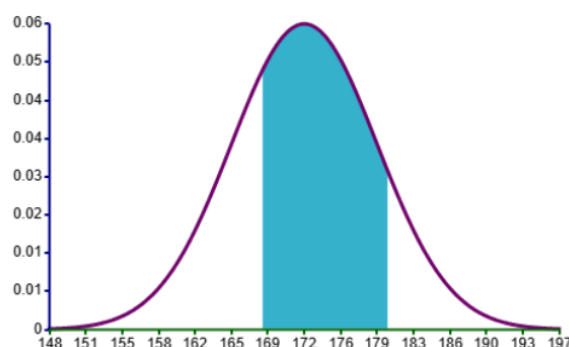
Consideramos X la variable aleatoria que nos da la estatura en centímetros de los alumnos de un centro de Educación Secundaria. $X = N(172, 7)$.

a) Debemos calcular $P(168 \leq X \leq 180)$.

$$\begin{aligned}
 P(168 \leq X \leq 180) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 172}{7} \end{array} \right\} = P\left(\frac{168 - 172}{7} \leq Z \leq \frac{180 - 172}{7}\right) = \\
 &= P(-0.57 \leq Z \leq 1.14) = P(Z \leq 1.14) - P(Z \leq -0.57) = \\
 &= P(Z \leq 1.14) - P(Z \geq 0.57) = P(Z \leq 1.14) - [1 - P(Z \leq 0.57)] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.8729 - 1 + 0.7157 = \boxed{0.5886}
 \end{aligned}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7122	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8706	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790

La probabilidad de que un alumno elegido al azar mida entre 168 y 180 cm es de 0.5886.
 $P(168 < X < 180) = 0.5896$



En la calculadora online sale un resultado ligeramente distinto, debido a que nosotros para usar las tablas estamos redondeando y no obtenemos el mismo resultado, aunque la diferencia es de una milésima.

b) Debemos hallar “e” tal que $P(X > e) = 0.05$.

$$P(X > e) = 0.05 \Rightarrow 1 - P(X \leq e) = 0.05 \Rightarrow P(X \leq e) = 0.95 \Rightarrow$$

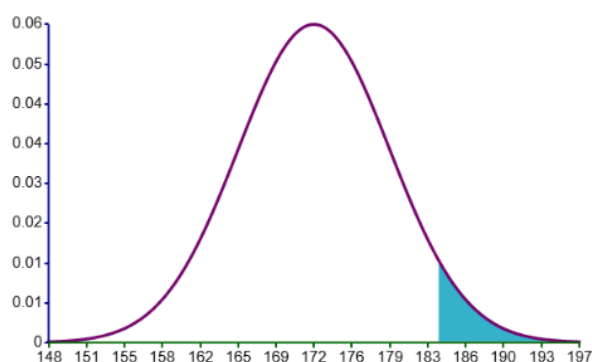
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipicamos} \\ Z = \frac{X - 172}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e - 172}{7}\right) = 0.95 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e - 172}{7} = 1.645 \Rightarrow e - 172 = 11.515 \Rightarrow \boxed{e = 183.515}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505

Un alumno que está en el grupo del 5% de alumnos más altos mide al menos 183.515 centímetros.

$$P(X > 183.515) = 0.0500$$





**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026**

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de seis ejercicios distribuidos en una parte con dos ejercicios obligatorios y una parte con dos bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- d) Se deben resolver los dos ejercicios obligatorios y solamente un ejercicio de cada uno de los dos bloques con optatividad. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque optativo, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- e) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos. En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- g) Se proporciona la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

PARTE OBLIGATORIA. Resuelve los dos ejercicios siguientes:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

En un jardín botánico se desea crear un recinto floral con forma de triángulo rectángulo. Por la disposición del recinto y las características del terreno, la hipotenusa ha de medir 20 metros. ¿Qué longitudes han de tener los catetos del triángulo rectángulo para que su área sea lo mayor posible y cuál es el valor de esta área?

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Discutir el sistema $AX - mX = B$, según los valores del parámetro m .

PARTE OPTATIVA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin(x^2)}{1 - \cos(x)}$$

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera la función $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \cos(x)$.

a) [2 puntos] Calcula $\int_0^\pi f(x) dx$

b) [0.5 puntos] Estudia la simetría de la función f y deduce de ella la relación que existe entre $\int_0^\pi f(x) dx$ y $\int_{-\pi}^\pi f(x) dx$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2.

 Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:**EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)**

Considera los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(0, -1, 1)$ y $D(1, 1, 1)$.

a) [1,5 puntos] Calcula la longitud de la altura del tetraedro de vértices A , B , C , D trazada desde el vértice D .

b) [1 punto] Determina el ángulo que forma la recta que pasa por A y D con el plano que contiene a los puntos A , B y C .

EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

Dos laboratorios, Virex y Borez, elaboran las dosis de la vacuna contra la gripe A. Para mejorar la efectividad de dicha vacuna necesitamos dos inoculaciones. En la farmacia disponen de seis dosis de Virex y dos de Borez. Se sabe que las dosis se sirven de manera aleatoria y consecutiva.

a) [1,25 puntos] Halla la probabilidad de que la segunda dosis sea del laboratorio Virex.

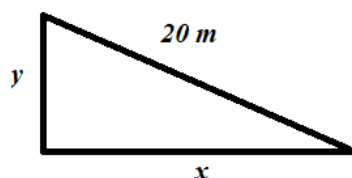
b) [1,25 puntos] Si la segunda dosis es del laboratorio Virex, halla la probabilidad de que la primera hubiese sido de Borez.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

En un jardín botánico se desea crear un recinto floral con forma de triángulo rectángulo. Por la disposición del recinto y las características del terreno, la hipotenusa ha de medir 20 metros. ¿Qué longitudes han de tener los catetos del triángulo rectángulo para que su área sea lo mayor posible y cuál es el valor de esta área?

Hacemos un dibujo de la situación planteada.



Si aplicamos el teorema de Pitágoras obtenemos:

$$x^2 + y^2 = 20^2 \Rightarrow y^2 = 400 - x^2 \Rightarrow y = +\sqrt{400 - x^2}$$

Deseamos que el área del triángulo sea máxima.

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = \frac{xy}{2} \\ y = \sqrt{400 - x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = \frac{x\sqrt{400 - x^2}}{2} = \frac{\sqrt{400x^2 - x^4}}{2}$$

La función área tiene la expresión $A(x) = \frac{\sqrt{400x^2 - x^4}}{2}$, con $0 < x < 20$.

Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$A(x) = \frac{1}{2} \sqrt{400x^2 - x^4} \Rightarrow A'(x) = \frac{1}{2} \frac{800x - 4x^3}{2\sqrt{400x^2 - x^4}} = \frac{1}{4} \frac{4x(200 - x^2)}{x\sqrt{400 - x^2}} = \frac{200 - x^2}{\sqrt{400 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{200 - x^2}{\sqrt{400 - x^2}} = 0 \Rightarrow 200 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 200 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}}$$

Solo tiene sentido la raíz positiva. Tenemos un punto crítico del área para $x = 10\sqrt{2}$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(0, 10\sqrt{2})$ tomamos $x=1$ y la derivada vale

$$A'(1) = \frac{200 - 1^2}{\sqrt{400 - 1^2}} = \frac{199}{\sqrt{399}} > 0. \text{ La función crece en } (0, 10\sqrt{2}).$$

- En el intervalo $(10\sqrt{2}, 20)$ tomamos $x=19$ y la derivada vale

$$A'(19) = \frac{200 - 19^2}{\sqrt{400 - 19^2}} \simeq -25.8 < 0. \text{ La función decrece en } (10\sqrt{2}, 20).$$

La función crece antes de $x = 10\sqrt{2}$ y decrece después. La función tiene un máximo relativo para $x = 10\sqrt{2}$.

Obtenemos la longitud del otro cateto.

$$x = 10\sqrt{2} \Rightarrow y = +\sqrt{400 - (10\sqrt{2})^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

Obtenemos el área máxima que podemos conseguir.

$$A(10\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{400(10\sqrt{2})^2 - (10\sqrt{2})^4}}{2} = 100$$

El triángulo rectángulo con 20 metros de longitud de la hipotenusa con área máxima tiene los dos catetos de longitud $10\sqrt{2} \approx 14.14$ metros. Este área máxima tiene un valor de 100 metros cuadrados.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Discutir el sistema $AX - mX = B$, según los valores del parámetro m .

Obtenemos la expresión del sistema planteado.

$$AX - mX = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 3y+z \\ -2x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} mx \\ my \\ mz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (1-m)x+2y+z \\ (3-m)y+z \\ -2x-mz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-m)x+2y+z=3 \\ (3-m)y+z=3 \\ -2x-mz=1 \end{cases}$$

Este sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1-m & 2 & 1 \\ 0 & 3-m & 1 \\ -2 & 0 & -m \end{pmatrix}$ y como matriz

ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1-m & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3-m & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -m & 1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-m & 2 & 1 \\ 0 & 3-m & 1 \\ -2 & 0 & -m \end{vmatrix} = -m(1-m)(3-m) - 4 + 2(3-m) =$$

$$-m(1-m)(3-m) - 4 + 6 - 2m = -m(1-m)(3-m) + 2 - 2m =$$

$$= -m(1-m)(3-m) + 2(1-m) = (1-m)[-m(3-m) + 2] =$$

$$= (1-m)(-3m + m^2 + 2) = (1-m)(m^2 - 3m + 2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (1-m)(m^2 - 3m + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-m=0 \rightarrow \boxed{m=1} \\ m^2 - 3m + 2 = 0 \rightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \\ = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2=m} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1=m} \end{cases} \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq 2$

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3 e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz ampliada

queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene la primera y segunda fila iguales. El

rango de A y de A/B es menor de 3. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar las columnas primera y segunda, y la fila primera su determinante vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0.$$

El rango de A y de A/B es 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $m = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Aplicamos el método de Gauss para

obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad 0 \quad -2 \quad 1 \\ 2 \quad -4 \quad -2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad -4 \quad -4 \quad -5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 4 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -4 \quad -4 \quad -5 \\ 0 \quad 4 \quad 4 \quad 12 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 7 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $m = 2$ el sistema es incompatible (sin solución).

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Calcula el siguiente límite

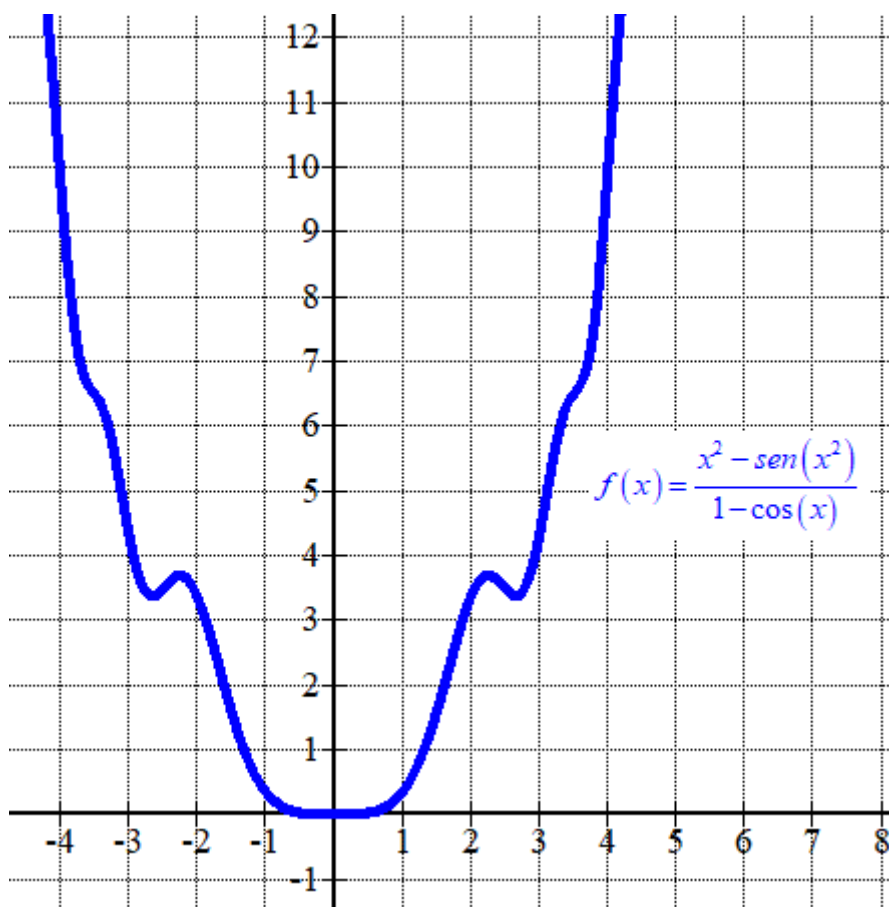
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen}(x^2)}{1 - \cos(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen}(x^2)}{1 - \cos(x)} = \frac{0^2 - \operatorname{sen}(0^2)}{1 - \cos(0)} = \frac{0 - 0}{1 - 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2x \cos(x^2)}{0 - (-\operatorname{sen}(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2x \cos(x^2)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot \cos(0^2)}{\operatorname{sen}(0)} =$$

$$= \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - [2 \cos(x^2) + 2x \cdot 2x (-\operatorname{sen}(x^2))]}{\cos(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos(x^2) + 4x^2 \operatorname{sen}(x^2)}{\cos(x)} = \frac{2 - 2 \cos(0^2) + 4 \cdot 0^2 \operatorname{sen}(0^2)}{\cos(0)} = \frac{2 - 2 + 0}{1} = \boxed{0}$$



EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera la función $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \cos(x)$.

a) [2 puntos] Calcula $\int_0^\pi f(x) dx$

b) [0.5 puntos] Estudia la simetría de la función f y deduce de ella la relación que existe entre $\int_0^\pi f(x) dx$ y $\int_{-\pi}^\pi f(x) dx$

a) Hallamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int x^2 \cos(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = \cos(x) dx \rightarrow v = \int \cos(x) dx = \text{sen}(x) \end{array} \right\} =$$

$$= -x^2 \text{sen}(x) - \int 2x \text{sen}(x) dx = -x^2 \text{sen}(x) - 2 \int x \text{sen}(x) dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \text{sen}(x) dx \rightarrow v = \int \text{sen}(x) dx = -\cos(x) \end{array} \right\} =$$

$$= -x^2 \text{sen}(x) - 2 \left[-x \cos(x) - \int -\cos(x) dx \right] = -x^2 \text{sen}(x) + 2x \cos(x) - 2 \int \cos(x) dx =$$

$$= \boxed{-x^2 \text{sen}(x) + 2x \cos(x) - 2 \text{sen}(x) + K}$$

Utilizamos este resultado para obtener la integral definida pedida.

$$\int_0^\pi f(x) dx = \left[-x^2 \text{sen}(x) + 2x \cos(x) - 2 \text{sen}(x) \right]_0^\pi =$$

$$= \left[-\pi^2 \text{sen}(\pi) + 2\pi \cos(\pi) - 2 \text{sen}(\pi) \right] - \left[-0^2 \text{sen}(0) + 2 \cdot 0 \cdot \cos(0) - 2 \text{sen}(0) \right] =$$

$$= 0 - 2\pi - 0 - [0 + 0 - 0] = \boxed{-2\pi}$$

b) Estudiamos la simetría de la gráfica de la función.

$$f(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = \left\{ \begin{array}{l} (-x)^2 = x^2 \\ \cos(-x) = \cos(x) \end{array} \right\} = x^2 \cos(x) = f(x)$$

La función es par. Es simétrica respecto del eje de ordenadas.

Esto implica que:

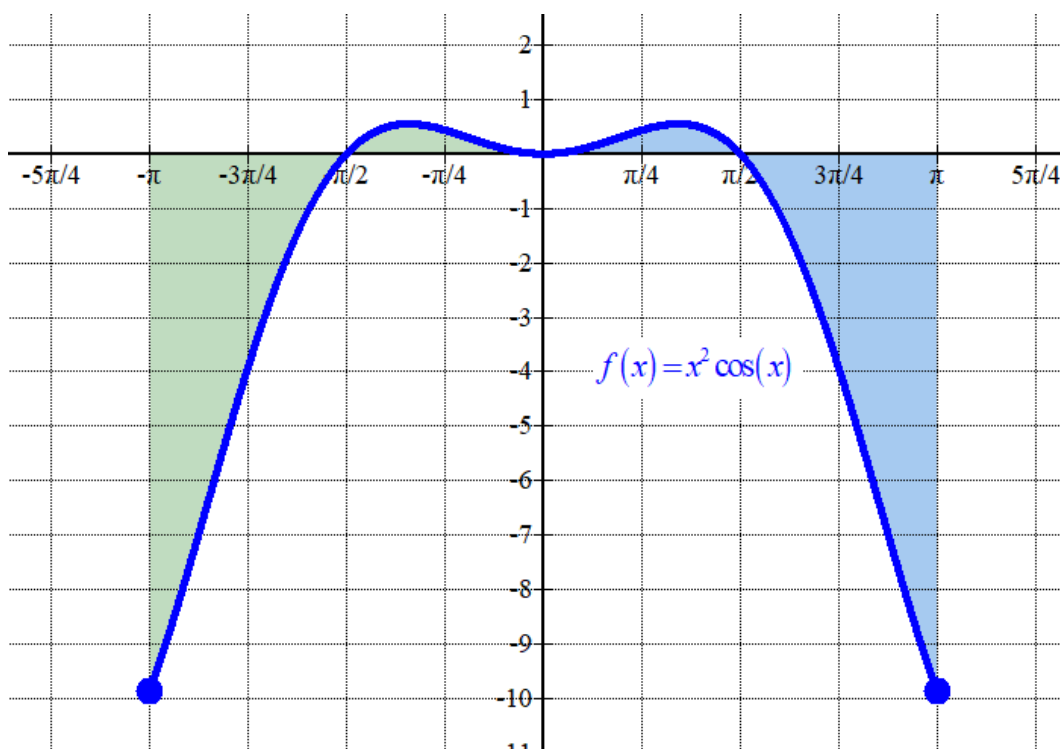
$$\int_{-\pi}^0 f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = -x \rightarrow x = -t \rightarrow dx = -dt \\ f(-t) = f(t) \\ x = -\pi \rightarrow t = \pi \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} = \int_{\pi}^0 f(-t)(-dt) =$$

$$= -\int_{\pi}^0 f(t) dt = -\left(-\int_0^{\pi} f(t) dt\right) = \int_0^{\pi} f(t) dt$$

Y respondiendo a lo planteado en el ejercicio:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx$$

Hemos obtenido que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx$.



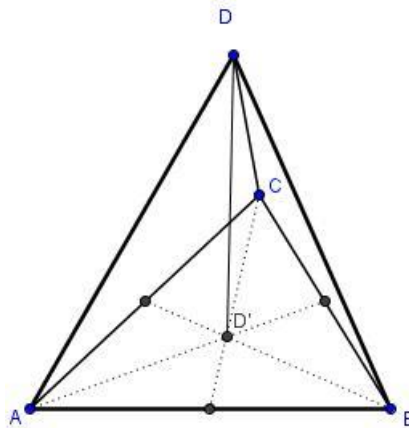
EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(0, -1, 1)$ y $D(1, 1, 1)$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula la longitud de la altura del tetraedro de vértices A , B , C , D trazada desde el vértice D .

b) **[1 punto]** Determina el ángulo que forma la recta que pasa por A y D con el plano que contiene a los puntos A , B y C .

a) Para hallar la altura del tetraedro hallamos el plano que determinan los puntos A , B y C .



$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,2) \in \pi \\ B(-1,1,0) \in \pi \\ C(0,-1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1,1,0) - (1,0,2) = (-2,1,-2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,-1,1) - (1,0,2) = (-1,-1,-1) \\ C(0,-1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + \cancel{2y} + \cancel{x} + 2z - \cancel{x} + z - 1 - \cancel{2y} - 2 - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x + 3z - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - z + 1 = 0}$$

El plano que definen los puntos A , B y C tiene ecuación $\pi : x - z + 1 = 0$. Este plano contiene el triángulo de la base del tetraedro.

La altura pedida es la distancia del punto D al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - z + 1 = 0 \\ D(1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(D, \pi) = \frac{|1 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ unidades}$$

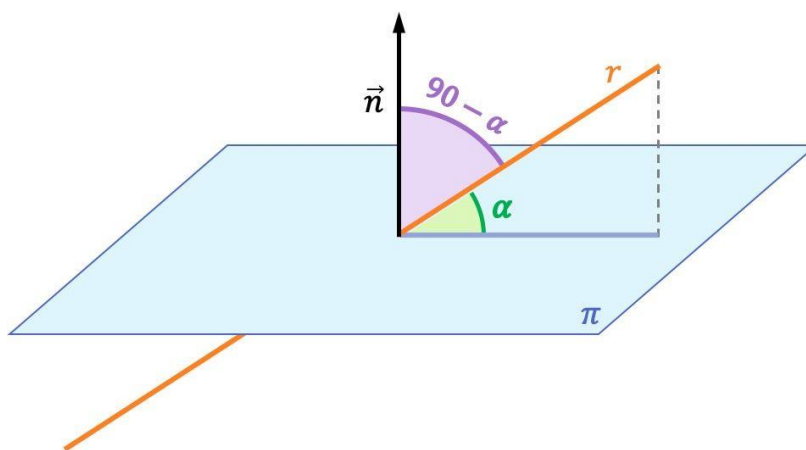
La longitud de la altura del tetraedro de vértices A , B , C , D trazada desde el vértice tiene un valor de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades de longitud.

b) La recta que pasa por A y D tiene como vector director el vector $\overrightarrow{AD}$. Hallamos el ángulo formado entre este vector y el vector normal al plano π hallado en el apartado anterior.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AD} = (1,1,1) - (1,0,2) = (0,1,-1) \\ \pi : x - z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1,0,-1) \\ \cos(\overrightarrow{AD}, \vec{n}) = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AD}| |\vec{n}|} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AD}, \vec{n}) = \frac{(0,1,-1)(1,0,-1)}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2} \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{0+0+1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{AD}, \vec{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ}$$

El ángulo que forma la recta que pasa por A y D con el plano que contiene a los puntos A, B y C es de $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

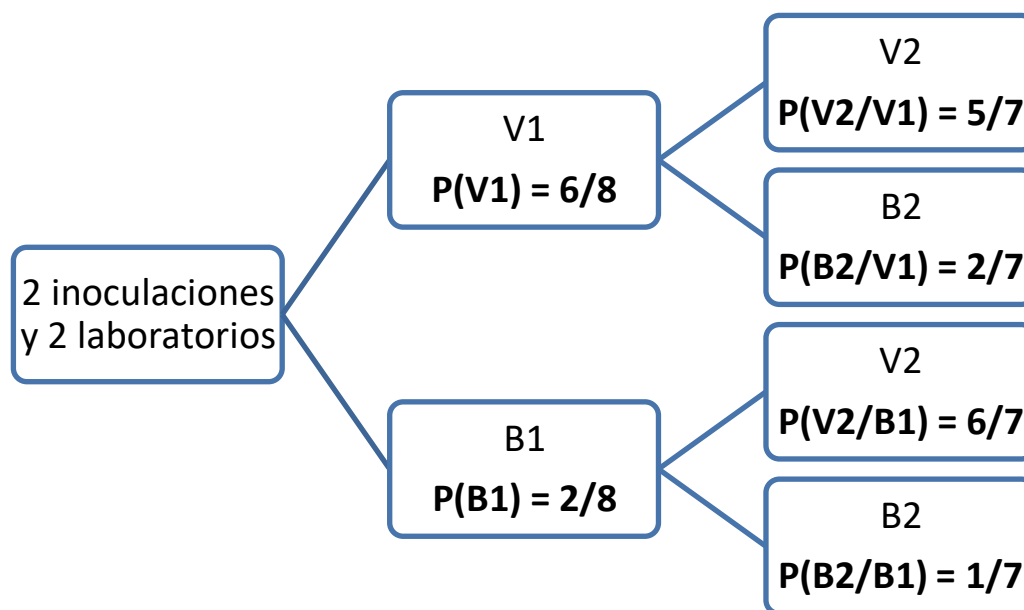


EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

Dos laboratorios, Virex y Borez, elaboran las dosis de la vacuna contra la gripe A. Para mejorar la efectividad de dicha vacuna necesitamos dos inoculaciones. En la farmacia disponen de seis dosis de Virex y dos de Borez. Se sabe que las dosis se sirven de manera aleatoria y consecutiva.

- a) **[1,25 puntos]** Halla la probabilidad de que la segunda dosis sea del laboratorio Virex.
 b) **[1,25 puntos]** Si la segunda dosis es del laboratorio Virex, halla la probabilidad de que la primera hubiese sido de Borez.

Llamamos V1 al suceso “La primera dosis es de los laboratorios Virex”, B1 a “La primera dosis es de los laboratorios Borez”, V2 al suceso “La segunda dosis es de los laboratorios Virex” y B2 a “La segunda dosis es de los laboratorios Borez”. Realizamos un diagrama de árbol con la información proporcionada.



- a) Debemos calcular $P(V2)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V2) = P(V1)P(V2/V1) + P(B1)P(V2/B1) = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{42}{56} = \boxed{0.75}$$

La probabilidad de que la segunda dosis sea del laboratorio Virex tiene un valor de 0.75.

- b) Debemos hallar $P(B1/V2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B1/V2) = \frac{P(B1 \cap V2)}{P(V2)} = \frac{P(B1)P(V2/B1)}{P(V2)} = \frac{\frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7}}{0.75} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{7} \approx 0.2857$$

Si la segunda dosis es del laboratorio Virex, la probabilidad de que la primera hubiese sido de Borez tiene un valor aproximado de 0.2857.



PAU 2026 Ordinaria Matemáticas II
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
MATEMÁTICAS II
CURSO 2025-2026

Instrucciones:

- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de seis ejercicios distribuidos en una parte con dos ejercicios obligatorios y una parte con dos bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- d) Se deben resolver los dos ejercicios obligatorios y solamente un ejercicio de cada uno de los dos bloques con optatividad. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque optativo, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- e) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos. En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- g) Se proporciona la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

PARTE OBLIGATORIA Resuelve los dos ejercicios siguientes:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Una ventana tiene forma de rectángulo y esta coronada por un semicírculo. Sabiendo que el perímetro de la ventana mide 8 metros, halla las dimensiones de la ventana que permitan la mayor entrada de luz.

**EJERCICIO 2 (2.5 puntos)**

Considera los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(2, m, 1)$, $C(3, 4, 2)$ y $D(1, -1, m)$.

- a) **[1,5 puntos]** Halla los valores de m para los cuales los puntos anteriores son coplanarios.
- b) **[1 punto]** Para $m=1$, calcula el área del triángulo de vértices A, B, C y el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, D.

PARTE OPTATIVA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Considera el sistema
$$\begin{cases} 3x - y = a^2 \\ (1-a)y + 2z = 0 \\ 4y + (3-a)z = a-5 \end{cases}$$

- a) **[1,75 puntos]** Discútelo según los valores de a .
- b) **[0,75 puntos]** Para $a=0$ resuelve el sistema, si es posible.

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}$ que cumple $|A| = -2$.

a) [1,5 puntos] Calcula $\begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha - 2 & \beta - \alpha & 1 - \beta \\ 8 & 4\alpha & 4\beta \end{vmatrix}$.

b) [1 punto] Calcula $|A^{-1}(A^t)^2 A|$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)

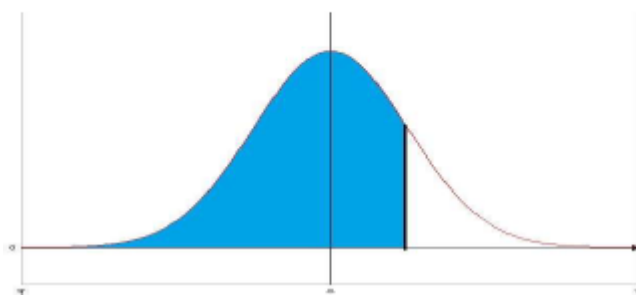
Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{8e^x - 4e^{2x}}{1 + e^x}$, halla la primitiva de f cuya gráfica tiene por tangente a la recta $y = 2x + 12 \ln(2)$ en el punto de abscisa $x = 0$.
(Sugerencia: puedes hacer el cambio $e^x = t$)

EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

Disponemos de dos bolsas con monedas de oro y monedas de plata. En la primera hay 2 monedas de oro y 3 monedas de plata. En la segunda hay 6 monedas de oro y 3 de plata. Sin mirar, extraemos una moneda al azar de la primera bolsa y la depositamos en la segunda bolsa. Luego extraemos una moneda de la segunda bolsa.

- a) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la segunda moneda sea de oro, sabiendo que la moneda que se extrajo de la primera bolsa era de plata.
b) [1,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la moneda que se extrajo de la primera bolsa fuera de plata, sabiendo que la segunda moneda es de oro.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $N(0, 1)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

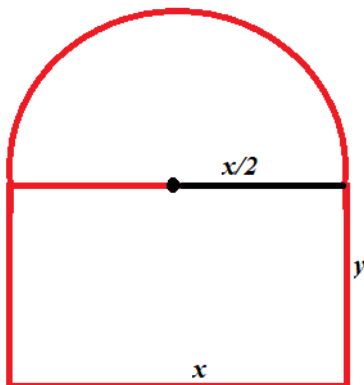
SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Una ventana tiene forma de rectángulo y esta coronada por un semicírculo. Sabiendo que el perímetro de la ventana mide 8 metros, halla las dimensiones de la ventana que permitan la mayor entrada de luz.



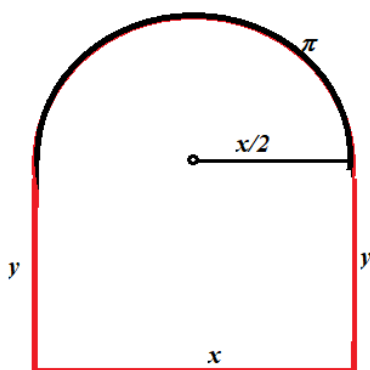
Hallamos el área de la ventana. Debemos maximizar dicha área.



La superficie de la ventana es la suma del área del rectángulo más la mitad del área del círculo de radio $x/2$.

$$A(x, y) = xy + \frac{\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = xy + \frac{\pi x^2}{8}$$

Hallamos la relación entre x e y utilizando que el perímetro de la ventana es de 8 metros.



$$\left. \begin{array}{l} \text{Perímetro} = 8 \\ \text{Perímetro} = 2y + x + \frac{2\pi \frac{x}{2}}{2} = 2y + x + \frac{\pi x}{2} = 2y + \frac{(2 + \pi)x}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + \frac{(2 + \pi)x}{2} = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y + (2 + \pi)x = 16 \Rightarrow 4y = 16 - (2 + \pi)x \Rightarrow \boxed{y = \frac{16}{4} - \frac{2 + \pi}{4}x = 4 - \frac{2 + \pi}{4}x}$$

Con lo que la superficie de la ventana queda:

$$\left. \begin{array}{l} y = 4 - \frac{2+\pi}{4}x \\ A(x, y) = xy + \frac{\pi x^2}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = x \left(4 - \frac{2+\pi}{4}x \right) + \frac{\pi x^2}{8} = 4x - \frac{2+\pi}{4}x^2 + \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x) = 4x - \frac{4+2\pi}{8}x^2 + \frac{\pi x^2}{8} = 4x + \frac{(-4-2\pi+\pi)x^2}{8} = 4x + \frac{(-4-\pi)x^2}{8} = 4x - \frac{4+\pi}{8}x^2$$

La superficie de la ventana tiene la expresión $A(x) = 4x - \frac{4+\pi}{8}x^2$.

Hallamos los valores que anulan su derivada (puntos críticos).

$$A(x) = 4x - \frac{4+\pi}{8}x^2 \Rightarrow A'(x) = 4 - \frac{4+\pi}{4}x$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{4+\pi}{4}x = 0 \Rightarrow \frac{4+\pi}{4}x = 4 \Rightarrow (4+\pi)x = 16 \Rightarrow \boxed{x = \frac{16}{\pi+4}}$$

Sustituimos $x = \frac{16}{\pi+4}$ en la segunda derivada.

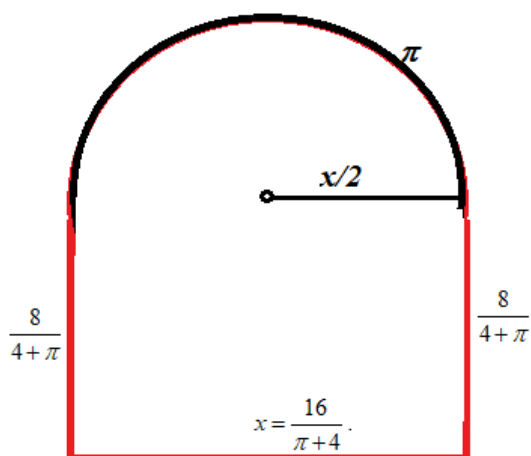
$$A'(x) = 4 - \frac{4+\pi}{4}x \Rightarrow A''(x) = -\frac{4+\pi}{4} \Rightarrow A''\left(\frac{16}{\pi+4}\right) = -\frac{4+\pi}{4} < 0$$

En $x = \frac{16}{\pi+4}$ la primera derivada se anula y la segunda toma valor negativo. Podemos

afirmar que el área es máxima para $x = \frac{16}{\pi+4}$.

Para este valor tenemos que $y = 4 - \frac{2+\pi}{4} \cdot \frac{16}{\pi+4} = 4 - 4 \frac{2+\pi}{4+\pi} = \frac{16+4\pi-8-4\pi}{4+\pi} = \frac{8}{4+\pi}$.

Las dimensiones de la ventana que permiten la mayor entrada de luz son:



EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(2, m, 1)$, $C(3, 4, 2)$ y $D(1, -1, m)$.

- a) **[1,5 puntos]** Halla los valores de m para los cuales los puntos anteriores son coplanarios.
 b) **[1 punto]** Para $m=1$, calcula el área del triángulo de vértices A, B, C y el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, D.

a) Hallamos la ecuación del plano π definido por los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 0) \\ B(2, m, 1) \\ C(3, 4, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, m, 1) - (1, 2, 0) = (1, m-2, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 4, 2) - (1, 2, 0) = (2, 2, 2) \rightarrow \vec{u} = (1, 1, 1) \\ A(1, 2, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 1 & m-2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (m-2)(x-1) + y-2 + z - (m-2)z - y + 2 - x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mx - m - 2x + 2 + \cancel{y} - \cancel{z} + z - mz + 2z - \cancel{y} + \cancel{z} - x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : (m-3)x + (3-m)z + 3 - m = 0$$

Para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios el punto D debe pertenecer al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : (m-3)x + (3-m)z + 3 - m = 0 \\ D(1, -1, m) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow (m-3) \cdot 1 + (3-m)m + 3 - m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m - \cancel{3} + 3m - m^2 + \cancel{3} - m = 0 \Rightarrow 3m - m^2 = 0 \Rightarrow m(3-m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=3 \end{cases}$$

Para $m=0$ y $m=3$ los cuatro puntos son coplanarios.

- b) Para $m=1$ los puntos quedan $A(1, 2, 0)$, $B(2, 1, 1)$, $C(3, 4, 2)$. El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 0) \\ B(2, 1, 1) \\ C(3, 4, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 1, 1) - (1, 2, 0) = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 4, 2) - (1, 2, 0) = (2, 2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2i + 2j + 2k + 2k - 2j - 2i = -4i + 4k = (-4, 0, 4)$$

$$\text{Área ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2}}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2} = \boxed{2\sqrt{2} \approx 2.83u^2}$$

Para $m = 1$ los cuatro puntos quedan $A(1, 2, 0)$, $B(2, 1, 1)$, $C(3, 4, 2)$ y $D(1, -1, 1)$. Los cuatro puntos no pertenecen al mismo plano y el tetraedro existe. El volumen del tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 0) \\ B(2, 1, 1) \\ C(3, 4, 2) \\ D(1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 1, 1) - (1, 2, 0) = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 4, 2) - (1, 2, 0) = (2, 2, 2) \\ \overrightarrow{AD} = (1, -1, 1) - (1, 2, 0) = (0, -3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 6 - 0 + 2 + 6 = 4.$$

$$\text{Volumen } ABCD = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} u^3$$

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Considera el sistema
$$\begin{cases} 3x - y = a^2 \\ (1-a)y + 2z = 0 \\ 4y + (3-a)z = a-5 \end{cases}.$$

a) [1,75 puntos] Discútelo según los valores de a .

b) [0,75 puntos] Para $a = 0$ resuelve el sistema, si es posible.

a) El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 2 \\ 0 & 4 & 3-a \end{pmatrix}$ y la matriz

ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & a^2 \\ 0 & 1-a & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3-a & a-5 \end{pmatrix}.$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 2 \\ 0 & 4 & 3-a \end{vmatrix} = 3(1-a)(3-a) - 0 + 0 - 0 - 0 - 24 = 3(3-a-3a+a^2) - 24 =$$

$$= 9 - 12a + 3a^2 - 24 = 3a^2 - 12a - 15 = 3(a^2 - 4a - 5)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3(a^2 - 4a - 5) = 0 \Rightarrow a^2 - 4a - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{4+6}{2} = \boxed{5=a} \\ \frac{4-6}{2} = \boxed{-1=a} \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 5$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz de

coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta

de quitar la fila y columna terceras tenemos que su determinante es no nulo y el rango de A es 2.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 \neq 0$$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3

que resulta de quitar la segunda columna y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -36 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = -36 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3, distinto del rango de la matriz A. El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $a = 5$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. La matriz de

coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta

de quitar la fila y columna terceras tenemos que su determinante es no nulo y el rango de A es 2.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 0 = -12 \neq 0$$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Observamos que la cuarta columna

es proporcional a la primera, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 2. El rango de la matriz A y la matriz A/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $a \neq -1$ y $a \neq 5$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $a = 5$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $a = -1$ el sistema es incompatible (sin solución)

b) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 4y + 3z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ y = -2z \\ 4y + 3z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 4(-2z) + 3z = -5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ -8z + 3z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ -5z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ \boxed{z = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2 = 0 \rightarrow 3x = -2 \rightarrow \boxed{x = \frac{-2}{3}} \\ \boxed{y = -2 \cdot 1 = -2} \end{cases}$$

La solución es $x = \frac{-2}{3}$, $y = -2$, $z = 1$.

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}$ que cumple $|A| = -2$.

a) [1,5 puntos] Calcula $\begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha - 2 & \beta - \alpha & 1 - \beta \\ 8 & 4\alpha & 4\beta \end{vmatrix}$.

b) [1 punto] Calcula $|A^{-1}(A^t)^2 A|$.

a) Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha - 2 & \beta - \alpha & 1 - \beta \\ 8 & 4\alpha & 4\beta \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos 4 factor común} \\ \text{en la tercera fila} \end{array} \right\} = 4 \begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha - 2 & \beta - \alpha & 1 - \beta \\ 2 & \alpha & \beta \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{El determinante no cambia de valor} \\ \text{si le sumamos a la 2ª fila la 3ª fila} \end{array} \right\} = 4 \begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos -1 factor común} \\ \text{en la primera fila} \end{array} \right\} = (-1)4 \begin{vmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{El determinante cambia de signo} \\ \text{si intercambiamos la 2ª y la 1ª fila} \end{array} \right\} =$$

$$= (-1)4(-1) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 3 & 4 & \alpha \\ 2 & \alpha & \beta \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{El determinante cambia de signo} \\ \text{si intercambiamos la 2ª y la 3ª fila} \end{array} \right\} =$$

$$= (-1)4(-1)(-1) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix} = \{|A| = -2\} = (-1)4(-1)(-1)(-2) = \boxed{8}$$

b) Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$|A^{-1}(A^t)^2 A| = |A^{-1} A^t A^t A| = \left\{ \begin{array}{l} \text{El determinante de un producto} \\ \text{de matrices es igual al producto} \\ \text{de los determinantes de cada matriz} \end{array} \right\} = |A^{-1}| \cdot |A^t| \cdot |A^t| \cdot |A| =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \\ |A^t| = |A| \end{array} \right\} = \frac{1}{|A|} \cdot |A| \cdot |A| \cdot |A| = |A|^2 = (-2)^2 = \boxed{4}$$

EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)

Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{8e^x - 4e^{2x}}{1+e^x}$, halla la primitiva de f cuya gráfica tiene por tangente a la recta $y = 2x + 12 \ln(2)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

(Sugerencia: puedes hacer el cambio $e^x = t$)

Calculo la primitiva de la función.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{8e^x - 4e^{2x}}{1+e^x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ e^x = t \rightarrow e^x dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{array} \right\} = \\
 &= \int \frac{8t - 4t^2}{1+t} \frac{dt}{t} = \int \frac{(8-4t) \cancel{t}}{1+t} \frac{dt}{\cancel{t}} = \int \frac{8-4t}{1+t} dt = \int \frac{12-4-4t}{1+t} dt = \\
 &= \int \frac{12}{1+t} dt + \int \frac{-4-4t}{1+t} dt = 12 \int \frac{1}{1+t} dt - 4 \int \frac{1+t}{1+t} dt = 12 \int \frac{1}{1+t} dt - 4 \int 1 dt = \\
 &= 12 \ln|1+t| - 4t = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ e^x = t \end{array} \right\} = 12 \ln(1+e^x) - 4e^x + K
 \end{aligned}$$

La primitiva de la función es $F(x) = 12 \ln(1+e^x) - 4e^x + K$.

Si la gráfica de la primitiva tiene por tangente a la recta $y = 2x + 12 \ln(2)$ en el punto de abscisa $x = 0$ significa que la primitiva pasa por $(0, 2 \cdot 0 + 12 \ln(2)) \rightarrow F(0) = 12 \ln(2)$.

Determinamos el valor de K para que se cumpla $F(0) = 12 \ln(2)$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = 12 \ln(1+e^x) - 4e^x + K \\ F(0) = 12 \ln(2) \end{array} \right\} \Rightarrow \cancel{12 \ln(1+e^0)} - 4e^0 + K = \cancel{12 \ln(2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K - 4 = 0 \Rightarrow K = 4 \Rightarrow \boxed{F(x) = 12 \ln(1+e^x) - 4e^x + 4}$$

Comprobamos que la pendiente de la recta tangente a la primitiva en $x = 0$ vale 2, es decir, que la derivada de la primitiva que es la función $f(x)$ vale 2 para $x = 0 \rightarrow f(0) = 2$.

$$F'(0) = f(0) = \frac{8e^0 - 4e^{2 \cdot 0}}{1+e^0} = \frac{8-4}{1+1} = 2$$

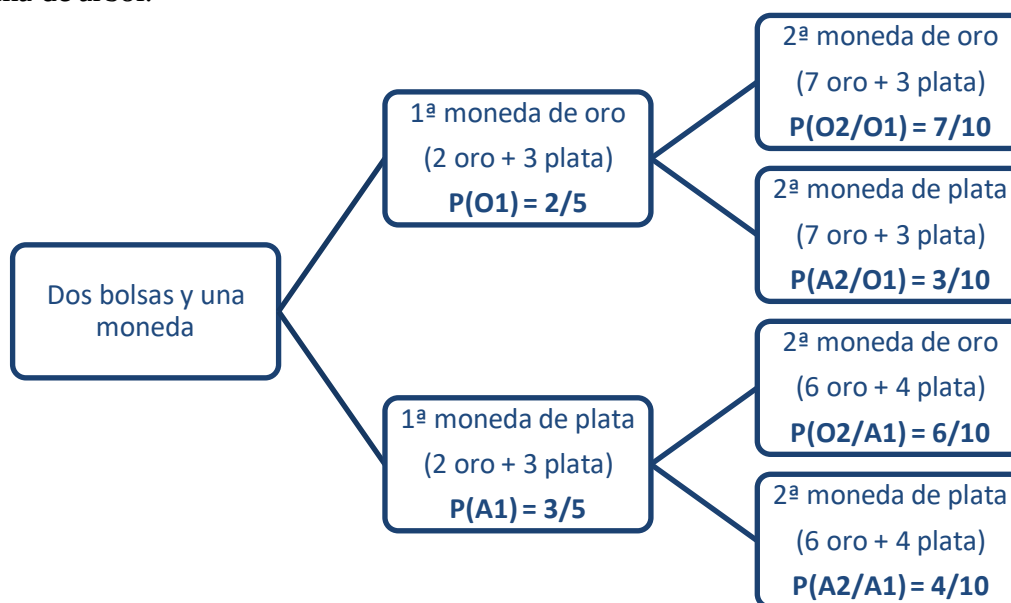
Se cumple lo pedido y la primitiva buscada es $F(x) = 12 \ln(1+e^x) - 4e^x + 4$.

EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

Disponemos de dos bolsas con monedas de oro y monedas de plata. En la primera hay 2 monedas de oro y 3 monedas de plata. En la segunda hay 6 monedas de oro y 3 de plata. Sin mirar, extraemos una moneda al azar de la primera bolsa y la depositamos en la segunda bolsa. Luego extraemos una moneda de la segunda bolsa.

- a) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la segunda moneda sea de oro, sabiendo que la moneda que se extrajo de la primera bolsa era de plata.
- b) [1,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la moneda que se extrajo de la primera bolsa fuera de plata, sabiendo que la segunda moneda es de oro.

Llamamos O1 y O2 a extraer una moneda de oro en la 1ª y 2ª bolsa respectivamente. De forma análoga llamamos A1 y A2 a sacar moneda de plata en la 1ª y 2ª bolsa. Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Si de la primera bolsa se extrae una moneda de plata y se añade a la segunda bolsa entonces tenemos en su interior 6 monedas de oro y 3 + 1 de plata. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de extraer una moneda de oro de esta segunda bolsa vale $\frac{6}{10} = 0.6$.

- b) Calculamos la probabilidad de que la segunda moneda sea de oro aplicando el teorema de la probabilidad total.

$$P(O2) = P(O1)P(O2/O1) + P(A1)P(O2/A1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{10} = \frac{32}{50} = 0.64$$

Nos piden calcular la probabilidad $P(A1/O2)$ que es una probabilidad a posteriori.

Usamos el teorema de Bayes.

$$P(A1/O2) = \frac{P(A1 \cap O2)}{P(O2)} = \frac{P(A1)P(O2/A1)}{P(O2)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{32}{50}} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16} = 0.5625$$

La probabilidad de que la moneda que se extrajo de la primera bolsa fuera de plata, sabiendo que la segunda moneda es de oro vale 0.5625.

PAU 2026 Ordinaria (Suplente 1) Matemáticas II



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de seis ejercicios distribuidos en una parte con dos ejercicios obligatorios y una parte con dos bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- d) Se deben resolver los dos ejercicios obligatorios y solamente un ejercicio de cada uno de los dos bloques con optatividad. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque optativo, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- e) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos. En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- g) Se proporciona la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

PARTE OBLIGATORIA Resuelve los dos ejercicios siguientes:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

La producción de gas en una refinería, medida en metros cúbicos, viene dada por la función

$f(t) = 7 + e^{-(t-4)^2}$, donde t representa el tiempo medido en segundos.

- a) **[2 puntos]** Razona que la producción de gas varía siempre entre 7 y 8 metros cúbicos. ¿Se producen 7 metros cúbicos de gas en algún momento concreto?
- b) **[0,5 puntos]** Justifica que la producción de gas se estabiliza con el paso del tiempo.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera los puntos $P(4, -2, 3)$ y $Q(6, 2, 1)$.

- a) **[1 punto]** Halla la ecuación del plano respecto del cual los puntos P y Q son simétricos.
- b) **[1,5 puntos]** Determina el ángulo formado por el plano $2x + y + z - 5 = 0$ y la recta que une P y Q.

PARTE OPTATIVA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2|x^2 - 1| & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ ax^2 + bx & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Es derivable en $x = \frac{1}{2}$. Determina a y b .

- a) [1,75 puntos] Discútelo según los valores de a .
 b) [0,75 puntos] Para $a = 0$ resuelve el sistema, si es posible.

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera la función $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$.

- a) [1,5 puntos] Calcula $\int_0^2 f(x) dx$.
 b) [1 punto] Estudia la simetría de la función f y deduce de ella el valor de $\int_{-2}^2 f(x) dx$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $C = (1 \ 4 \ 2)$ calcula la matriz X que satisface $X - 2C = B^t + XA$.

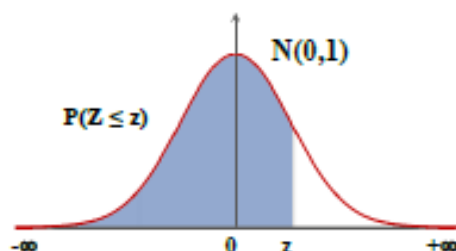
EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

Los 120 estudiantes de segundo de Bachillerato de un centro se distribuyen por clases como se indica en la tabla:

	Cursan inglés	Cursan francés	Número de estudiantes
Clase A	30	10	40
Clase B	15	20	35
Clase C	20	5	25
Clase D	20	0	20

Se elige un estudiante al azar y se pide:

- a) [1,25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante elegido esté en la clase A o haya cursado francés?
 b) [1,25 puntos] Si el estudiante elegido cursaba inglés, ¿cuál es la probabilidad de que esté en la clase C?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0,1)$ 

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9975	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984
2,9	0,9985	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9994
3,0	0,9995	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,1	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,2	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,3	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,4	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,5	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,6	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

La producción de gas en una refinería, medida en metros cúbicos, viene dada por la función $f(t) = 7 + e^{-(t-4)^2}$, donde t representa el tiempo medido en segundos.

- a) **[2 puntos]** Razona que la producción de gas varía siempre entre 7 y 8 metros cúbicos. ¿Se producen 7 metros cúbicos de gas en algún momento concreto?
- b) **[0,5 puntos]** Justifica que la producción de gas se estabiliza con el paso del tiempo.

a) Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

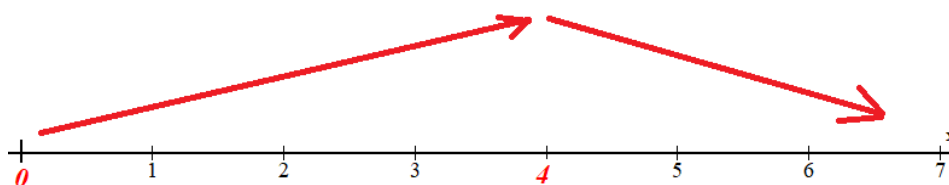
$$f(t) = 7 + e^{-(t-4)^2} \Rightarrow f'(t) = -2(t-4)e^{-(t-4)^2} = \frac{-2(t-4)}{e^{(t-4)^2}}$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow \frac{-2(t-4)}{e^{(t-4)^2}} = 0 \Rightarrow -2(t-4) = 0 \Rightarrow \boxed{t=4}$$

La función tiene un punto crítico en $t=4$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor. Consideramos que el tiempo t debe ser mayor o igual que cero.

- En el intervalo $[0, 4)$ tomamos $t=1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-2(1-4)}{e^{(1-4)^2}} = \frac{6}{e^9} > 0$. La función crece en $[0, 4)$.
- En el intervalo $(4, +\infty)$ tomamos $x=5$ y la derivada vale $f'(5) = \frac{-2(5-4)}{e^{(5-4)^2}} = \frac{-2}{e} < 0$. La función decrece en $(4, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo y absoluto en $t=4$. A los 4 segundos la producción alcanza un valor máximo de $f(4) = 7 + e^{-(4-4)^2} = 7 + e^0 = 7 + 1 = 8$ metros cúbicos.

La producción mínima se consigue en los extremos del intervalo $[0, +\infty)$.

Calculamos el valor de la función en $t=0$: $f(0) = 7 + e^{-(0-4)^2} = 7 + e^{-16} = 7.000000113$.

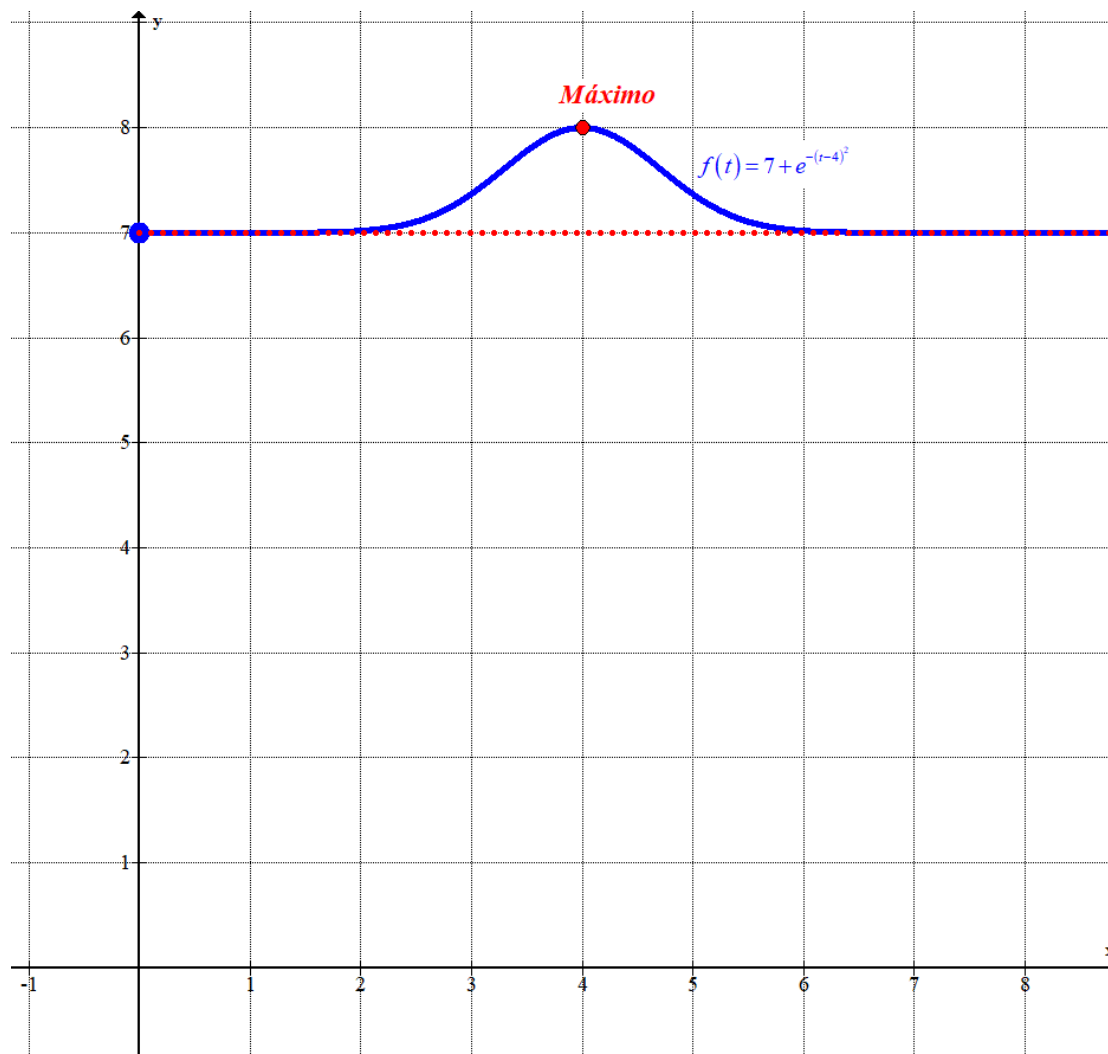
Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 7 + e^{-(t-4)^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 7 + \frac{1}{e^{(t-4)^2}} = 7 + \frac{1}{e^{+\infty}} = 7 + \frac{1}{\infty} = \boxed{7}$$

La función no toma valores por debajo de 7 ni por encima de 8.

La función no llega a ser nunca de 7 metros cúbicos. Toma un valor muy cercano al inicio y cuando ha pasado mucho tiempo.

- b) Hemos visto en el apartado anterior que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 7$. La producción se estabiliza en 7 metros cúbicos con el paso del tiempo.



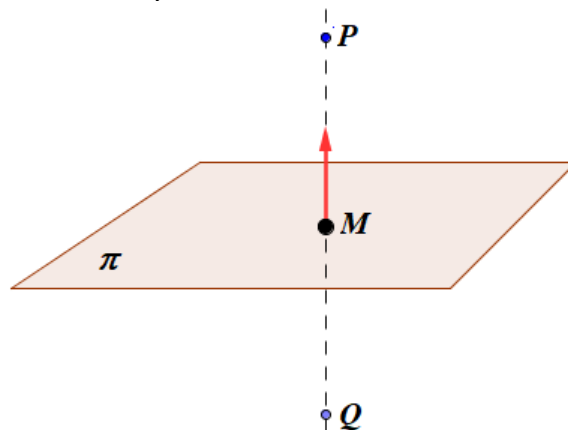
Aunque parezca en la gráfica que la función alcanza el valor 7 realmente nunca llega a pasar. La función siempre es ligeramente superior a 7.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera los puntos $P(4, -2, 3)$ y $Q(6, 2, 1)$.

- a) [1 punto] Halla la ecuación del plano respecto del cual los puntos P y Q son simétricos.
 b) [1,5 puntos] Determina el ángulo formado por el plano $2x + y + z - 5 = 0$ y la recta que une P y Q.

a) Hacemos un dibujo de la situación planteada.



Si los puntos P y Q son simétricos entonces el punto medio M del segmento PQ pertenece al plano. Además, el vector $\overrightarrow{PQ}$ es un vector normal del plano.

Hallamos la ecuación del plano.

$$\left. \begin{array}{l} P(4, -2, 3) \\ Q(6, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow M = \frac{(4, -2, 3) + (6, 2, 1)}{2} = (5, 0, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(4, -2, 3) \\ Q(6, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (6, 2, 1) - (4, -2, 3) = (2, 4, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} M = (5, 0, 2) \in \pi \\ \vec{n} = \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ} = (1, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M = (5, 0, 2) \in \pi \\ \pi : x + 2y - z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 + 2 \cdot 0 - 2 + D = 0 \Rightarrow$$

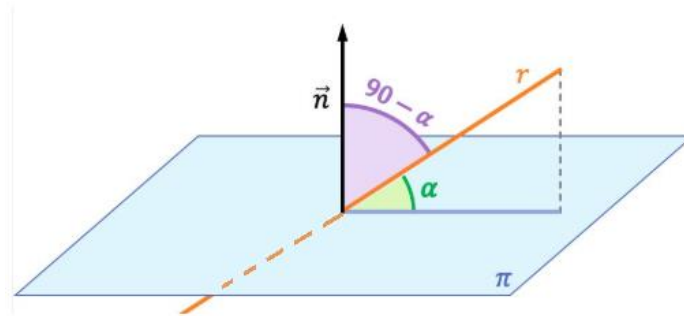
$$\Rightarrow 3 + D = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow \boxed{\pi : x + 2y - z - 3 = 0}$$

La ecuación del plano respecto del cual los puntos P y Q son simétricos es $\pi : x + 2y - z - 3 = 0$.

- b) Hallamos el ángulo formado por el vector director de la recta que une P y Q: $\overrightarrow{PQ}$ y el vector normal del plano $2x + y + z - 5 = 0$, que es $\vec{n} = (2, 1, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (2, 1, 1) \\ \overrightarrow{PQ} = (2, 4, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \overrightarrow{PQ}) = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|} = \frac{(2, 1, 1) \cdot (2, 4, -2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{n}, \overrightarrow{PQ}) = \frac{4+4-2}{\sqrt{6}\sqrt{24}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{n}, \overrightarrow{PQ}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$



El ángulo formado por el plano $2x + y + z - 5 = 0$ y la recta que une P y Q es de $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2|x^2 - 1| & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ ax^2 + bx & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Es derivable en $x = \frac{1}{2}$. Determina a y b .

Para que la función sea derivable en $x = \frac{1}{2}$ primero debe ser continua y para ello deben coincidir los límites laterales con el valor de la función en $x = \frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\left|\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right| = \frac{3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1/2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1/2^-} 2|x^2 - 1| = \frac{3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1/2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1/2^+} ax^2 + bx = a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b\frac{1}{2} = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} = \frac{a+2b}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 1/2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1/2^+} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a+2b}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a+2b = 6 \Rightarrow \boxed{a = 6 - 2b}$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} 2|x^2 - 1| & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ (6 - 2b)x^2 + bx & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$.

Expresamos la función sin valor absoluto.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

$$\left. \begin{aligned} x \in (-\infty, -1) &\Rightarrow x^2 - 1 > 0 \\ x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right) &\Rightarrow x^2 - 1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2(x^2 - 1) & \text{si } x \leq -1 \\ -2(x^2 - 1) & \text{si } -1 < x \leq \frac{1}{2} \\ (6 - 2b)x^2 + bx & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$, siendo su derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x \leq -1 \\ -4x & \text{si } -1 < x \leq \frac{1}{2} \\ 2(6-2b)x + b & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = \frac{1}{2}$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}^-\right) &= \lim_{x \rightarrow 1/2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1/2^-} -4x = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2 \\ f'\left(\frac{1}{2}^+\right) &= \lim_{x \rightarrow 1/2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1/2^+} 2(6-2b)x + b = 2(6-2b) \cdot \frac{1}{2} + b = 6-2b+b = 6-b \\ f'\left(\frac{1}{2}^-\right) &= f'\left(\frac{1}{2}^+\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6-b = -2 \Rightarrow 6+2 = b \Rightarrow \boxed{b=8} \Rightarrow \boxed{a=6-2 \cdot 8 = -10}$$

Para $a = -10$ y $b = 8$ la función es derivable en $x = \frac{1}{2}$.

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera la función $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$.

a) [1,5 puntos] Calcula $\int_0^2 f(x) dx$.

b) [1 punto] Estudia la simetría de la función f y deduce de ella el valor de $\int_{-2}^2 f(x) dx$.

a) En el intervalo $(0, 2)$ tenemos que $x > 0 \rightarrow |x| = x$ y la función queda $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^2 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_0^2 \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} dx = \\ &= \int_0^2 1 - \frac{1}{x+1} dx = [x - \ln(x+1)]_0^2 = [2 - \ln(2+1)] - [0 - \ln(0+1)] = \boxed{2 - \ln 3} \end{aligned}$$

b) Estudiamos la simetría de la función.

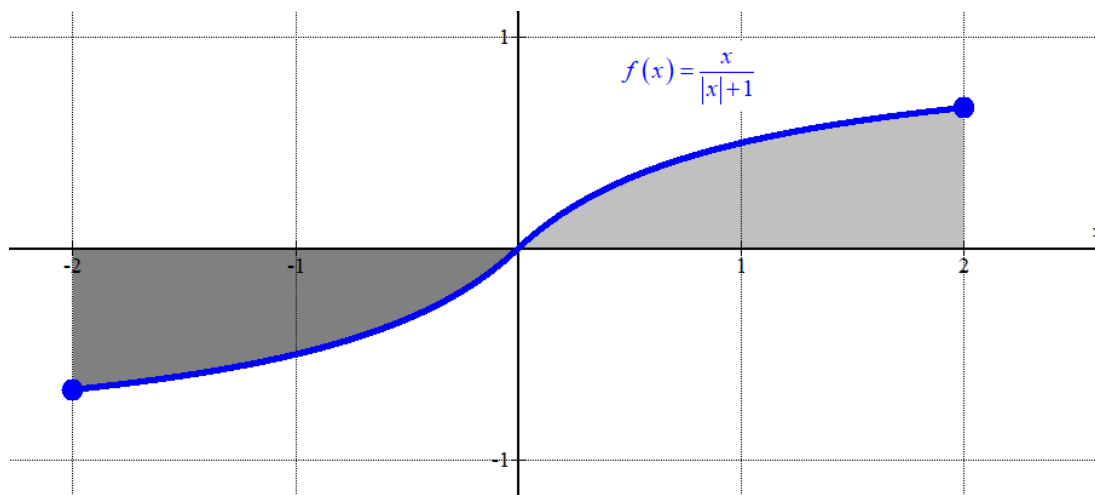
$$f(-x) = \frac{-x}{|-x|+1} = \frac{-x}{|x|+1} = -f(x)$$

La función es impar. Se cumple que $f(-1) = -f(1)$. La función es negativa para $x < 0$ y positiva para $x > 0$.

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = -\int_0^2 f(x) dx = -(2 - \ln 3) = -2 + \ln 3$$

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = -2 + \ln 3 + 2 - \ln 3 = \boxed{0}$$

Se cumple que $\int_{-2}^2 f(x) dx = 0$.



EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $C = (1 \ 4 \ 2)$ calcula la matriz X que satisface $X - 2C = B^t + XA$.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$X - 2C = B^t + XA \Rightarrow X - XA = 2C + B^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X (Id - A) = 2C + B^t \Rightarrow X = (2C + B^t)(Id - A)^{-1}$$

Comprobamos que la matriz $Id - A$ tiene inversa y la calculamos.

$$Id - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|Id - A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$(Id - A)^{-1} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz X .

$$2C + B^t = 2(1 \ 4 \ 2) + (-1 \ 2 \ 3) = (1 \ 10 \ 7)$$

$$X = (2C + B^t)(Id - A)^{-1} = (1 \ 10 \ 7) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-7 \ 1 \ -10) = (-7 \ 1 \ -11)$$

$1 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 3 \longrightarrow 1 \times 3$

La matriz solución de la ecuación matricial $X - 2C = B^t + XA$ es $X = (-7 \ 1 \ -11)$.

EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

Los 120 estudiantes de segundo de Bachillerato de un centro se distribuyen por clases como se indica en la tabla:

	Cursan inglés	Cursan francés	Número de estudiantes
Clase A	30	10	40
Clase B	15	20	35
Clase C	20	5	25
Clase D	20	0	20

Se elige un estudiante al azar y se pide:

- a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante elegido esté en la clase A o haya cursado francés?
- b) **[1,25 puntos]** Si el estudiante elegido cursaba inglés, ¿cuál es la probabilidad de que esté en la clase C?

a) De los 120 alumnos hay 40 en la clase A, en la clase B hay 20 que cursan francés, en la clase C hay 5 que cursan francés y en la clase D no hay ningún alumno que curse francés. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que el estudiante elegido esté en la clase A o haya cursado francés vale $\frac{40 + 20 + 5}{120} = \frac{65}{120} = \frac{13}{24} \approx 0.5417$.

b) Hay $30 + 15 + 20 + 20 = 85$ alumnos que cursan inglés y de ellos 20 están en la clase C. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que el alumno elegido que cursa inglés esté en la clase C vale $\frac{20}{85} = \frac{4}{17} \approx 0.2353$.

PAU 2026 Ordinaria (Suplente 2) Matemáticas II



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025-2026

MATEMÁTICAS II**Instrucciones:**

- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de seis ejercicios distribuidos en una parte con dos ejercicios obligatorios y una parte con dos bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- d) Se deben resolver los dos ejercicios obligatorios y solamente un ejercicio de cada uno de los dos bloques con optatividad. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque optativo, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- e) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos. En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- g) Se proporciona la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

PARTE OBLIGATORIA Resuelve los dos ejercicios siguientes:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

La potencia de pérdida $P(t)$ (en vatios) en una máquina, debido a la fricción, depende del tiempo de uso t (en años) según la función $P(t) = \frac{4t}{1+t^2}$ siendo $t \geq 0$.

- a) **[1,25 puntos]** Calcula en qué momento la potencia de pérdida es máxima.
- b) **[1,25 puntos]** La energía total perdida en los t primeros años viene dada por la expresión $E(t) = \int_0^t P(x) dx$ (vatios por año). Calcula la energía total perdida en los tres primeros años.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Una empresa produce tres tipos de productos, A, B y C. Si el precio del producto A tuviera un 10% de descuento y el de los productos B y C tuviera un 20% de descuento cada uno, la suma de los precios de tres productos, uno de cada tipo, sería 66 €. El precio total sin descuento de 3 productos del tipo A y 4 productos del tipo B es 140 €.

- a) **[1,25 puntos]** ¿Cuánto valdrán 3 productos de tipo A más 8 productos de tipo C?
- b) **[1,25 puntos]** Determina el precio, sin descuento, de cada tipo de producto, sabiendo además que el precio del producto de tipo C es el doble que el de tipo A.

PARTE OPTATIVA**BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1.** Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:**EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)**

Considera el plano $\pi \equiv 4x + 5y - 20z + 20 = 0$.

- a) **[1,25 puntos]** Halla el área del triángulo cuyos vértices están determinados por la intersección de π con los ejes coordenados.
- b) **[1,25 puntos]** Halla los planos paralelos a π que distan 2 unidades del punto $P(2, 2, 1)$.

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera los planos $\pi_1 \equiv 2x - y - z = 7$, $\pi_2 \equiv x - 2y + z = 3$ y el punto $P(1, 1, 0)$.

- a) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto P y es paralela a ambos planos.
- b) **[1,25 puntos]** Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a π_1 y a π_2 .

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:**EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)**

Determina para qué valores de a el límite

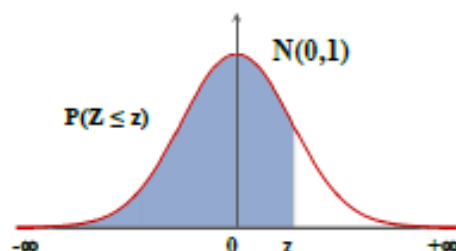
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - (1 - ax)\cos(2x)}{x^2}$$

vale 6.

EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

Las tallas de las niñas al nacer se distribuyen según una distribución normal de media 50 cm y desviación típica 1,8 cm.

- a) **[1 punto]** Halla la probabilidad de que una niña al nacer mida más de 54 cm.
- b) **[1,5 puntos]** Si en un hospital durante un mes han nacido 100 niñas, ¿cuántas tendrán en el momento del nacimiento una talla entre 48,2 y 51,8 cm?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0,1)$ 

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9975	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984
2,9	0,9985	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9994
3,0	0,9995	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,1	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,2	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,3	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,4	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,5	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,6	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

La potencia de pérdida $P(t)$ (en vatios) en una máquina, debido a la fricción, depende del tiempo de uso t (en años) según la función $P(t) = \frac{4t}{1+t^2}$ siendo $t \geq 0$.

a) **[1,25 puntos]** Calcula en qué momento la potencia de pérdida es máxima.

b) **[1,25 puntos]** La energía total perdida en los t primeros años viene dada por la expresión

$E(t) = \int_0^t P(x) dx$ (vatios por año). Calcula la energía total perdida en los tres primeros años.

a) Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$P(t) = \frac{4t}{1+t^2} \Rightarrow P'(t) = \frac{4(1+t^2) - 4t \cdot (2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{4 + 4t^2 - 8t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{4 - 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{4(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{4(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = 0 \Rightarrow 4(1-t^2) = 0 \Rightarrow 1-t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Como $t \geq 0$ no tenemos en cuenta el valor negativo obtenido. La función tiene un punto crítico en $t = 1$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $[0,1)$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale

$$P'(0.5) = \frac{4(1-0.5^2)}{(1+0.5^2)^2} = \frac{25}{12} > 0. \text{ La función crece en } [0,1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale

$$P'(2) = \frac{4(1-2^2)}{(1+2^2)^2} = \frac{-12}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (1, +\infty).$$

La función tiene un máximo relativo y absoluto en $t = 1$. En el año 1 la potencia de pérdida es máxima.

b) Debemos calcular $E(3)$.

$$\begin{aligned} E(3) &= \int_0^3 P(x) dx = \int_0^3 \frac{4x}{1+x^2} dx = 2 \int_0^3 \frac{2x}{1+x^2} dx = 2 \left[\ln(1+x^2) \right]_0^3 = \\ &= 2 \left[\ln(1+3^2) - \ln(1+0^2) \right] = 2 \ln 10 = \boxed{\ln 100 \approx 4.605} \end{aligned}$$

La energía total perdida en los tres primeros años tiene un valor aproximado de 4.605 vatios por año.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Una empresa produce tres tipos de productos, A, B y C. Si el precio del producto A tuviera un 10% de descuento y el de los productos B y C tuviera un 20% de descuento cada uno, la suma de los precios de tres productos, uno de cada tipo, sería 66 €. El precio total sin descuento de 3 productos del tipo A y 4 productos del tipo B es 140 €.

- a) [1,25 puntos] ¿Cuánto valdrán 3 productos de tipo A más 8 productos de tipo C?
 b) [1,25 puntos] Determina el precio, sin descuento, de cada tipo de producto, sabiendo además que el precio del producto de tipo C es el doble que el de tipo A.

a) Llamamos “a”, “b” y “c” al precio de un producto A, B y C, respectivamente.

“Si el precio del producto A tuviera un 10% de descuento y el de los productos B y C tuviera un 20% de descuento cada uno, la suma de los precios de tres productos, uno de cada tipo, sería 66 €” $\rightarrow 0.9 \cdot a + 0.8 \cdot b + 0.8 \cdot c = 66$.

“El precio total sin descuento de 3 productos del tipo A y 4 productos del tipo B es 140 €” $\rightarrow 3a + 4b = 140$.

Tenemos 3 incógnitas y solo tenemos dos ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 0.9 \cdot a + 0.8 \cdot b + 0.8 \cdot c = 66 \\ 3a + 4b = 140 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9a + 8b + 8c = 660 \\ 3a + 4b = 140 \end{array} \right\}$$

Nos plantean cuánto cuesta $3a + 8c$.

$$\left. \begin{array}{l} 9a + 8b + 8c = 660 \\ 3a + 4b = 140 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 9a + 8b + 8c = 660 \\ \times(-2) \rightarrow -6a - 8b = -280 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 3a \qquad \qquad + 8c = 380 \end{array}$$

3 productos de tipo A más 8 productos de tipo C valen 380 euros.

b) Añadimos una tercera ecuación con la nueva información proporcionada.

“El precio del producto de tipo C es el doble que el de tipo A” $\rightarrow c = 2a$.

Añadimos esta ecuación en el sistema anterior y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 9a + 8b + 8c = 660 \\ 3a + 4b = 140 \\ c = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9a + 8b + 8 \cdot 2a = 660 \\ 3a + 4b = 140 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 25a + 8b = 660 \\ 3a + 4b = 140 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 25a + 8b = 660 \\ \times(-2) \rightarrow -6a - 8b = -280 \end{array} \right\}$$

$$\frac{19a}{19} = 380 \Rightarrow \boxed{a = \frac{380}{19} = 20} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{c = 2 \cdot 20 = 40} \\ 3 \cdot 20 + 4b = 140 \rightarrow 4b = 80 \Rightarrow \boxed{b = 20} \end{array} \right.$$

Un producto A cuesta 20 €, uno del tipo B cuesta 20 € y uno del tipo C cuesta 40 €.

EJERCICIO 3.1 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv 4x + 5y - 20z + 20 = 0$.

- a) [1,25 puntos] Halla el área del triángulo cuyos vértices están determinados por la intersección de π con los ejes coordenados.
 b) [1,25 puntos] Halla los planos paralelos a π que distan 2 unidades del punto $P(2, 2, 1)$.

a) Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 4x + 5y - 20z + 20 = 0 \\ \text{Eje } OX \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 4x + 20 = 0 \Rightarrow 4x = -20 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow A(-5, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 4x + 5y - 20z + 20 = 0 \\ \text{Eje } OY \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 5y + 20 = 0 \Rightarrow 5y = -20 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow B(0, -4, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 4x + 5y - 20z + 20 = 0 \\ \text{Eje } OZ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -20z + 20 = 0 \Rightarrow 20z = 20 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow C(0, 0, 1)$$

Los vértices del triángulo son $A(-5, 0, 0)$, $B(0, -4, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de dos vectores que unan dos de sus lados adyacentes.

$$\left. \begin{array}{l} A(-5, 0, 0) \\ B(0, -4, 0) \\ C(0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, -4, 0) - (-5, 0, 0) = (5, -4, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, 1) - (-5, 0, 0) = (5, 0, 1) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4i + 20k - 5j = (-4, -5, 20)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 20^2}}{2} = \boxed{10.5 \text{ u}^2}$$

El área del triángulo formado por los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados tiene un valor de 10.5 unidades cuadradas.

b) Los planos π' paralelos a π tienen ecuación $\pi' \equiv 4x + 5y - 20z + D = 0$.

Hallamos la distancia del punto P al plano π' .

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv 4x + 5y - 20z + D = 0 \\ P(2, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi', P) = \frac{|4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 - 20 \cdot 1 + D|}{\sqrt{4^2 + 5^2 + (-20)^2}} = \frac{|D - 2|}{21}$$

Averiguamos el valor de D para que la distancia valga 2.

$$d(\pi', P) = 2 \Rightarrow \frac{|D - 2|}{21} = 2 \Rightarrow |D - 2| = 42 \Rightarrow \begin{cases} D - 2 = 42 \rightarrow \boxed{D = 44} \\ D - 2 = -42 \rightarrow \boxed{D = -40} \end{cases}$$

Los planos que cumplen lo pedido son $\pi_1 : 4x + 5y - 20z + 44 = 0$ y

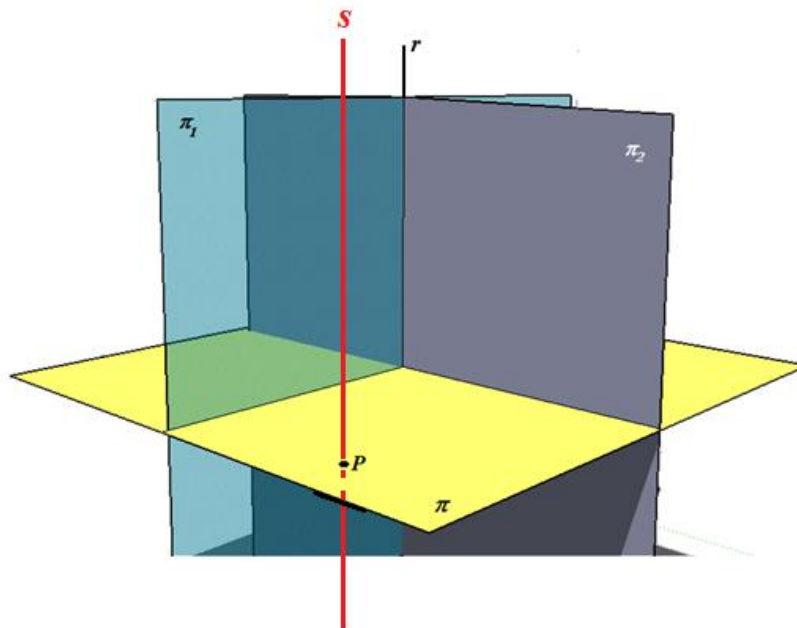
$\pi_2 : 4x + 5y - 20z - 40 = 0$.

EJERCICIO 3.2 (2.5 puntos)

Considera los planos $\pi_1 \equiv 2x - y - z = 7$, $\pi_2 \equiv x - 2y + z = 3$ y el punto $P(1, 1, 0)$.

- a) [1,25 puntos] Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto P y es paralela a ambos planos.
- b) [1,25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a π_1 y a π_2 .

a)



Determinamos la posición relativa de los dos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv 2x - y - z = 7 \rightarrow \vec{n}_1 = (2, -1, -1) \\ \pi_2 \equiv x - 2y + z = 3 \rightarrow \vec{n}_2 = (1, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-2} \neq \frac{-1}{1}$$

Como los vectores normales no tienen coordenadas proporcionales los planos se cortan en una recta. La recta que buscamos debe ser paralela a la recta intersección de los dos planos. Hallamos el vector director de esta recta que será el vector director de la recta que buscamos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv 2x - y - z = 7 \\ \pi_2 \equiv x - 2y + z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 7 \\ z = 3 - x + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - y - 3 + x - 2y = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 3y = 10 \Rightarrow 3x = 10 + 3y \Rightarrow x = \frac{10}{3} + y \Rightarrow z = 3 - \frac{10}{3} - y + 2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{-1}{3} + y \Rightarrow r: \begin{cases} x = \frac{10}{3} + \alpha \\ y = \alpha \\ z = \frac{-1}{3} + \alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_r = (1, 1, 1)}$$

La recta s que pasa por el punto P y es paralela a ambos planos tiene como vector director $\vec{v}_r = (1, 1, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ P(1, 1, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

La ecuación de la recta s que pasa por el punto P y es paralela a ambos planos es $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = \lambda \end{cases}$

b) El plano π perpendicular a π_1 y a π_2 tiene como vector normal el vector director de la recta r intersección de los dos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ P(1, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: x + y + z + D = 0 \\ P(1, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 1 + 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D + 2 = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow \boxed{\pi: x + y + z - 2 = 0}$$

La ecuación del plano π que pasa por el punto P y es perpendicular a π_1 y a π_2 es $\pi: x + y + z - 2 = 0$.

EJERCICIO 4.1 (2.5 puntos)

Determina para qué valores de a el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - (1-ax)\cos(2x)}{x^2}$$

vale 6.

Calculamos el límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - (1-ax)\cos(2x)}{x^2} = \frac{e^{-a \cdot 0} - (1-a \cdot 0)\cos(2 \cdot 0)}{0^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-ae^{-ax} - [(-a)\cos(2x) + (1-ax)2(-\sin(2x))]}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-ae^{-ax} + a\cos(2x) + 2(1-ax)\sin(2x)}{2x} = \frac{-ae^{-a \cdot 0} + a\cos(2 \cdot 0) + 2(1-a \cdot 0)\sin(2 \cdot 0)}{2 \cdot 0} =$$

$$= \frac{-a + a + 0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 e^{-ax} - 2a\sin(2x) - 2a\sin(2x) + 4(1-ax)\cos(2x)}{2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 e^{-ax} - 4a\sin(2x) + 4(1-ax)\cos(2x)}{2} =$$

$$= \frac{a^2 e^{-a \cdot 0} - 4a\sin(2 \cdot 0) + 4(1-a \cdot 0)\cos(2 \cdot 0)}{2} = \boxed{\frac{a^2 + 4}{2}}$$

Averiguamos cuando este límite vale 6.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - (1-ax)\cos(2x)}{x^2} = 6 \Rightarrow \frac{a^2 + 4}{2} = 6 \Rightarrow a^2 + 4 = 12 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow \boxed{a = \pm\sqrt{8}}$$

Para $a = \pm\sqrt{8}$ se cumple que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - (1-ax)\cos(2x)}{x^2} = 6$.

EJERCICIO 4.2 (2.5 puntos)

Las tallas de las niñas al nacer se distribuyen según una distribución normal de media 50 cm y desviación típica 1,8 cm.

a) **[1 punto]** Halla la probabilidad de que una niña al nacer mida más de 54 cm.

b) **[1,5 puntos]** Si en un hospital durante un mes han nacido 100 niñas, ¿cuántas tendrán en el momento del nacimiento una talla entre 48,2 y 51,8 cm?

a) Consideramos X la variable aleatoria que nos da las tallas, en cm, de las niñas al nacer.
 $X = N(50, 1.8)$.

Debemos calcular $P(X > 54)$.

$$P(X > 54) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 50}{1.8} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{54 - 50}{1.8}\right) = P(Z > 2.22) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2.22) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9868 = \boxed{0.0132}$$

z	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8212
1,0	0,8413	0,8438	0,8461
1,1	0,8643	0,8665	0,8686
1,2	0,8849	0,8869	0,8888
1,3	0,9032	0,9049	0,9066
1,4	0,9192	0,9207	0,9222
1,5	0,9332	0,9345	0,9357
1,6	0,9452	0,9463	0,9474
1,7	0,9554	0,9564	0,9573
1,8	0,9641	0,9649	0,9656
1,9	0,9713	0,9719	0,9726
2,0	0,9772	0,9778	0,9783
2,1	0,9821	0,9826	0,9830
2,2	0,9861	0,9864	0,9868

La probabilidad de que una niña al nacer mida más de 54 cm es de 0.0132.

b) Hallamos la probabilidad de que una niña al nacer tenga una talla entre 48,2 y 51,8 cm.

$$P(48.2 \leq X \leq 51.8) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 50}{1.8} \end{array} \right\} = P\left(\frac{48.2 - 50}{1.8} \leq Z \leq \frac{51.8 - 50}{1.8}\right) =$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 1) =$$

$$= P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.8413 - 1 + 0.8413 = \boxed{0.6826}$$

z	0,00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915
0,6	0,7257
0,7	0,7580
0,8	0,7881
0,9	0,8150
1,0	0,8413
1,1	0,8643

La probabilidad de que una niña al nacer tenga una talla entre 48,2 y 51,8 cm es de 0.6826. Multiplicamos por 100 y tenemos que de las 100 niñas nacidas serán 68 las que tendrán una talla entre 48,2 y 51,8 cm.



PAU 2025 Extraordinaria Matemáticas II

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y

PRUEBA DE ADMISIÓN

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS

MATEMÁTICAS II

CURSO 2024-2025

Instrucciones:**d) Duración: 1 hora y 30 minutos**

- e) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- f) Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en un bloque con un ejercicio obligatorio y tres bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- g) Deberá resolver el ejercicio obligatorio y solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques con optatividad.
- h) En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- i) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- j) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- k) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- l) Se proporcionará la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

BLOQUE OBLIGATORIO. Resuelve el siguiente ejercicio:**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Se sabe que la suma de tres números naturales es 22 y que la suma de cuatro veces el primero más el triple del segundo más el doble del tercero es 61. ¿Puede ser 15 uno de los tres números? En caso afirmativo, calcula los restantes. ¿Existen otras opciones?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:**EJERCICIO 2 (2.5 puntos)**

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula el valor de k para que $\int_1^3 e^{x-k} (x-2) dx = 2$.



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025

MATEMÁTICAS II

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv mx - y - 2z = 5$.

- a) [1,5 puntos] Halla m para que r y π sean paralelos.
b) [1 punto] Para $m = -8$, calcula la distancia de la recta r al plano π .

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sean las rectas $r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 - 2\lambda \end{cases}$.

- a) [1 punto] Estudia la posición relativa de las rectas r y s .
b) [1,5 puntos] Halla la ecuación de un plano que contiene a r y a una recta perpendicular a las rectas r y s .

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x) + a(e^x - 1) + \operatorname{sen}(x)}{bx^2 + x - \operatorname{sen}(x)} = 1$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

La velocidad máxima a la que puede circular un vehículo sobre un determinado puente del río Guadalquivir es de 70 km/h.

- a) [1 punto] En uno de los sentidos de circulación, la velocidad de los vehículos sigue una distribución normal de media 64 km/h y desviación típica 4 km/h. Si el radar de control salta a partir de 72 km/h, ¿cuál es el porcentaje de vehículos que se sancionan?
b) [1,5 puntos] En el sentido contrario, también sigue una distribución normal de la que sabemos que la velocidad media es de 63,6 km/h y que el 5,05% de todos los vehículos viaja a más de 80 km/h. En este caso, ¿cuánto vale la desviación típica?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Se sabe que la suma de tres números naturales es 22 y que la suma de cuatro veces el primero más el triple del segundo más el doble del tercero es 61. ¿Puede ser 15 uno de los tres números? En caso afirmativo, calcula los restantes. ¿Existen otras opciones?

a) Llamamos “x”, “y”, “z” a los tres números naturales.

Obtenemos las ecuaciones que cumplen los números con los datos del problema.

“La suma de tres números naturales es 22” $\rightarrow x + y + z = 22$

“La suma de cuatro veces el primero más el triple del segundo más el doble del tercero es 61” $\rightarrow 4x + 3y + 2z = 61$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo intentamos resolver.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 22 \\ 4x + 3y + 2z = 61 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 22 - x - z \\ 4x + 3y + 2z = 61 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x + 3(22 - x - z) + 2z = 61 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 66 - 3x - 3z + 2z = 61 \Rightarrow x - z = -5 \Rightarrow z = x + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 22 - x - x - 5 = 17 - 2x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 17 - 2\lambda; \lambda \in \mathbb{N} \\ z = 5 + \lambda \end{cases}}$$

Las soluciones son infinitas. Comprobamos si alguna de estas soluciones tiene un número que sea 15.

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 17 - 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \\ x = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \lambda = 15 \\ y = 17 - 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 17 - 2 \cdot 15 = -13 \notin \mathbb{N} \text{ ¡Mal!} \\ z = 5 + 15 = 20 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 17 - 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \\ y = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 17 - 2\lambda = 15 \rightarrow -2\lambda = -2 \rightarrow \lambda = 1 \\ z = 5 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ z = 5 + 1 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡¡OK!!}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 17 - 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \\ z = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 17 - 2\lambda \\ z = 5 + \lambda = 15 \rightarrow \lambda = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 17 - 20 = -3 \notin \mathbb{N} \text{ ¡Mal!} \end{array} \right\}$$

Existe una solución con uno de los números valiendo 15 es la solución $x = 1, y = 15, z = 6$. Esta combinación de números naturales cumple lo pedido.

Las soluciones tienen la expresión $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 17 - 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{N}$. Damos valores a λ y obtenemos

las restantes opciones.

$$\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 17 - 2 \cdot 1 = 15 \\ z = 5 + 1 = 6 \end{cases}$$

$$\lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 17 - 2 \cdot 2 = 13 \\ z = 5 + 2 = 7 \end{cases}$$

$$\lambda = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 17 - 2 \cdot 3 = 11 \\ z = 5 + 3 = 8 \end{cases}$$

$$\lambda = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 17 - 2 \cdot 4 = 9 \\ z = 5 + 4 = 9 \end{cases}$$

$$\lambda = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 17 - 2 \cdot 5 = 7 \\ z = 5 + 5 = 10 \end{cases}$$

$$\lambda = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 17 - 2 \cdot 6 = 5 \\ z = 5 + 6 = 11 \end{cases}$$

$$\lambda = 7 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 17 - 2 \cdot 7 = 3 \\ z = 5 + 7 = 12 \end{cases}$$

$$\lambda = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 17 - 2 \cdot 8 = 1 \\ z = 5 + 8 = 13 \end{cases}$$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Comprobamos si se puede descomponer la fracción en fracciones simples.

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \text{No existe}$$

No podemos descomponer la fracción en otras fracciones más sencillas. Utilizamos otro método de integración.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{(x+1)^2 + 1}$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x+1 = t \Rightarrow dx = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg(t) = \arctg(x+1) + K$$

La primitiva de la función es $F(x) = \arctg(x+1) + K$. Determinamos el valor de K para que $F(0) = \frac{\pi}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} F(0) = \frac{\pi}{4} \\ F(x) = \arctg(x+1) + K \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \arctg(0+1) + K \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + K \Rightarrow \boxed{K=0}$$

La primitiva de la función que cumple lo pedido es $F(x) = \arctg(x+1)$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula el valor de k para que $\int_1^3 e^{x-k} (x-2) dx = 2$ □

Calculamos la integral indefinida.

$$\int e^{x-k} (x-2) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x-2 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{x-k} dx \rightarrow v = \int e^{x-k} dx = e^{x-k} \end{array} \right\} = (x-2)e^{x-k} - \int e^{x-k} dx =$$

$$= (x-2)e^{x-k} - e^{x-k} = (x-3)e^{x-k} + C$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida.

$$\int_1^3 e^{x-k} (x-2) dx = \left[(x-3)e^{x-k} \right]_1^3 = (3-3)e^{3-k} - (1-3)e^{1-k} = 2e^{1-k}$$

Averiguamos el valor de k para que esta integral definida valga 2.

$$\int_1^3 e^{x-k} (x-2) dx = 2 \Rightarrow 2e^{1-k} = 2 \Rightarrow e^{1-k} = 1 = e^0 \Rightarrow 1-k = 0 \Rightarrow \boxed{k=1}$$

Para que se pueda cumplir lo pedido debe ser $k=1$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv mx - y - 2z = 5$.

a) [1,5 puntos] Halla m para que r y π sean paralelos.

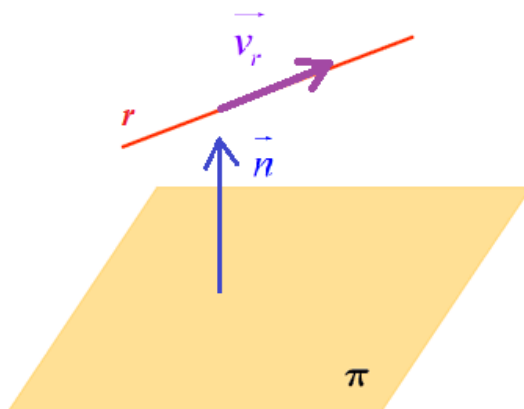
b) [1 punto] Para $m = -8$, calcula la distancia de la recta r al plano π .

a) Hallamos un punto, un vector director y las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 + y - x \\ x + 2y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow x + 2y - 3 - y + x = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - 2x \Rightarrow z = 3 + 7 - 2x - x = 10 - 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 7 - 2\alpha \\ z = 10 - 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -2, -3) \\ P_r(0, 7, 10) \end{cases}$$



Para que la recta y el plano sean paralelos el vector normal del plano y el vector director de la recta deben ser perpendiculares y para ello su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -2, -3) \\ \pi \equiv mx - y - 2z = 5 \rightarrow \vec{n} = (m, -1, -2) \\ \vec{v}_r \perp \vec{n} \rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1, -2, -3)(m, -1, -2) = 0 \Rightarrow$$

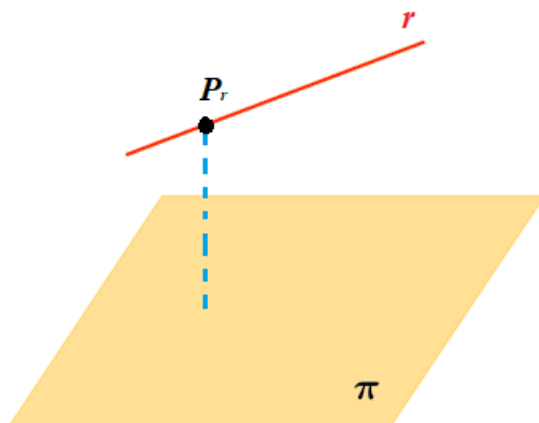
$$\Rightarrow m + 2 + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -8}$$

Para $m = -8$ el plano queda $\pi \equiv -8x - y - 2z = 5$. Con esta condición sabemos que la recta es paralela al plano o está contenida en él. Vemos si el punto $P_r(0, 7, 10)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -8x - y - 2z = 5 \\ \text{¿} P_r(0, 7, 10) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} -8 \cdot 0 - 7 - 2 \cdot 10 = 5? \Rightarrow \text{¿} -7 - 20 = 5? \text{ ¡NO!}$$

El punto P_r no pertenece al plano por lo que la recta no está contenida en el plano y podemos afirmar que para $m = -8$ la recta es paralela al plano.

- b) Para $m = -8$ el plano queda $\pi \equiv -8x - y - 2z = 5$ y la recta es paralela al plano. La distancia de la recta al plano es la distancia de cualquiera de sus puntos al plano.



$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -8x - y - 2z - 5 = 0 \\ P_r(0, 7, 10) \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|-8 \cdot 0 - 7 - 2 \cdot 10 - 5|}{\sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \boxed{\frac{32\sqrt{69}}{69}}$$

Para $m = -8$ la distancia de la recta r al plano π vale $\frac{32\sqrt{69}}{69}$ unidades.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sean las rectas $r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 - 2\lambda \end{cases}$.

- a) **[1 punto]** Estudia la posición relativa de las rectas r y s .
 b) **[1,5 puntos]** Halla la ecuación de un plano que contiene a r y a una recta perpendicular a las rectas r y s .

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(-1, -2, 2) \\ \vec{v}_r = (4, 3, -1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(1, 2, -3) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -2) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (4, 3, -1) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{-1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{-1}{-2}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (4, 3, -1) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -2) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, 2, -3) - (-1, -2, 2) = (2, 4, -5) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \cancel{-20} - 12 + 4 + 2 - 15 + \cancel{32} = -7 \neq 0$$

El producto mixto tiene un valor distinto de cero. Las rectas se cruzan.

- b) Una recta perpendicular a las rectas r y s tiene como vector director el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (4, 3, -1) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{w}_t = \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5i + 9j + 7k = (-5, 9, 7)$$

El plano que contiene a r y a una recta perpendicular a las rectas r y s contiene el punto $P_r(-1, -2, 2)$ de la recta r y tiene como vectores directores $\vec{v}_r = (4, 3, -1)$ y $\vec{w}_t = \vec{v}_r \times \vec{u}_s = (-5, 9, 7)$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(-1, -2, 2) \in \pi \\ \vec{v}_r = (4, 3, -1) \\ \vec{w}_t = \vec{v}_r \times \vec{u}_s = (-5, 9, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-2 \\ 4 & 3 & -1 \\ -5 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21(x+1) + 5(y+2) + 36(z-2) + 15(z-2) - 28(y+2) + 9(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30(x+1) - 23(y+2) + 51(z-2) = 0 \Rightarrow 30x + 30 - 23y - 46 + 51z - 102 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi : 30x - 23y + 51z - 118 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi : 30x - 23y + 51z - 118 = 0$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x) + a(e^x - 1) + \operatorname{sen}(x)}{bx^2 + x - \operatorname{sen}(x)} = 1$$

Calculamos el límite indicado.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x) + a(e^x - 1) + \operatorname{sen}(x)}{bx^2 + x - \operatorname{sen}(x)} &= \frac{0 \cdot \operatorname{sen}(0) + a(e^0 - 1) + \operatorname{sen}(0)}{b \cdot 0^2 + 0 - \operatorname{sen}(0)} = \frac{0}{0} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) + x \cos(x) + ae^x + \cos(x)}{2bx + 1 - \cos(x)} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}(0) + 0 \cdot \cos(0) + ae^0 + \cos(0)}{2b \cdot 0 + 1 - \cos(0)} = \frac{0 + 0 + a + 1}{0 + 1 - 1} = \frac{1 + a}{0} = \dots \end{aligned}$$

Para que este límite no valga ∞ debe ser el numerador igual a cero para que surja una indeterminación y sigamos con su cálculo. Es decir, debe ser $a = -1$. Seguimos con el cálculo del límite considerando que $a = -1$.

$$\begin{aligned} \dots = \{a = -1\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) + x \cos(x) - e^x + \cos(x)}{2bx + 1 - \cos(x)} = \frac{0}{0} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + \cos(x) - x \operatorname{sen}(x) - e^x - \operatorname{sen}(x)}{2b + \operatorname{sen}(x)} = \\ &= \frac{\cos(0) + \cos(0) - 0 \cdot \operatorname{sen}(0) - e^0 - \operatorname{sen}(0)}{2b + \operatorname{sen}(0)} = \frac{2 - 1}{2b} = \boxed{\frac{1}{2b}} \end{aligned}$$

Igualamos el valor del límite a 1 y obtenemos el valor de b .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x) + a(e^x - 1) + \operatorname{sen}(x)}{bx^2 + x - \operatorname{sen}(x)} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ a = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2b} = 1 \Rightarrow 1 = 2b \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = \frac{1}{2}$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

La velocidad máxima a la que puede circular un vehículo sobre un determinado puente del río Guadalquivir es de 70 km/h.

- a) [1 punto] En uno de los sentidos de circulación, la velocidad de los vehículos sigue una distribución normal de media 64 km/h y desviación típica 4 km/h. Si el radar de control salta a partir de 72 km/h, ¿cuál es el porcentaje de vehículos que se sancionan?
- b) [1,5 puntos] En el sentido contrario, también sigue una distribución normal de la que sabemos que la velocidad media es de 63,6 km/h y que el 5,05% de todos los vehículos viaja a más de 80 km/h. En este caso, ¿cuánto vale la desviación típica?

- a) X = velocidad de los vehículos en uno de los sentidos de circulación. $X = N(64, 4)$.
Calculamos la probabilidad de que un vehículo supere los 72 km/h: $P(X > 72)$.

$$P(X > 72) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z > \frac{72-64}{4}\right) = P(Z > 2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

El porcentaje de vehículos que se sancionan es del 2.28 %.

- b) Y = velocidad de los vehículos en el otro de los sentidos de circulación. $Y = N(63.6, \sigma)$.
Sabemos que $P(Y > 80) = 0.0505$. Determinamos el valor de σ usando esta información.

$$P(Y > 80) = 0.0505 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z > \frac{80-63.6}{\sigma}\right) = 0.0505 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{16.4}{\sigma}\right) = 1 - 0.0505 = 0.9495 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16.4}{\sigma} = 1.64 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{16.4}{1.64} = 10}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591

La desviación típica tiene un valor de 10 km/h.

PAU 2025 Extraordinaria suplente 1 Matemáticas II



PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
MATEMÁTICAS II
CURSO 2024-2025

Instrucciones:

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos**
- b)** Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c)** Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en un bloque con un ejercicio obligatorio y tres bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- d)** Deberá resolver el ejercicio obligatorio y solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques con optatividad.
- e)** En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f)** Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- g)** En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- h)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- i)** Se proporcionará la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

BLOQUE OBLIGATORIO. Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 5)$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{(1 - |x|)^2}$.

- a) [1,25 puntos]** Estudia la continuidad y derivabilidad de la función f .
- b) [1,25 puntos]** Halla, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sean las funciones $f : (-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{e}\right)$ y

$$g(x) = x^3 + 2.$$

- a) **[1,5 puntos]** Calcula $a \neq 0$ de forma que en el punto $(a, f(a))$ la recta normal a la gráfica de la función f sea paralela a la recta tangente a la gráfica de g en el punto $(a, g(a))$.
- b) **[1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f .

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) **[1,25 puntos]** Calcula A^4 y A^{31} .
- b) **[1,25 puntos]** Halla razonadamente el determinante de la matriz $4A^{25}(A^t)^4$.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) **[1 punto]** Halla razonadamente el determinante de una matriz X que verifica $X^3AX^2 = B^2$.
- b) **[1,5 puntos]** Determina, si existe, una matriz Y que verifique $A^3YB^{-1} = A^2$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(2, 1, 0)$.

- a) **[1,25 puntos]** Halla la distancia del punto P a la recta r .
- b) **[1,25 puntos]** Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta r y al punto P .

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Una empresa fabrica bolígrafos en tres provincias: Almería, Barcelona y Cáceres. El porcentaje de producción total de bolígrafos que se fabrica en cada provincia es, respectivamente, del 20%, 50% y 30%. Además, el porcentaje de bolígrafos defectuosos en cada una de ellas es del 7%, 6% y 2%, respectivamente.

- a) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que un bolígrafo, tomado al azar, sea defectuoso?
- b) **[1,5 puntos]** Si se ha escogido un bolígrafo no defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de Almería?
-

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 5)$.

Calculamos la integral indefinida de la función.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{x^3+1}{x^2+1} dx = \int \frac{x^3+x-x+1}{x^2+1} dx = \\
 &= \int \frac{x^3+x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx = \\
 &= \int \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \\
 &= \int x dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} + \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C
 \end{aligned}$$

Determinamos el valor de C aplicando que $F(0) = 5$.

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{x^2}{2} + \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C \\ F(0) &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5 = \frac{0^2}{2} + \arctg(0) - \frac{1}{2} \ln(0^2+1) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 = C \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} + \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 5}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x^2}{2} + \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 5$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{(1-|x|)^2}$.

- a) **[1,25 puntos]** Estudia la continuidad y derivabilidad de la función f .
 b) **[1,25 puntos]** Halla, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

a) Obtenemos la expresión de la función como una función definida a trozos.

$$f(x) = \frac{1}{(1-|x|)^2} = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Esta expresión racional tiene un denominador que no se anula en el intervalo de definición de la función siendo continua y derivable en $(-1,0) \cup (0,1)$.

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+0)^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

La función es continua en $x = 0$. La función es continua en $(-1,1)$.

$$\text{La derivada de la función en } (-1,0) \cup (0,1) \text{ es } f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(1+x)^3} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{2}{(1-x)^3} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Estudiamos la derivabilidad de la función en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{(1+x)^3} = \frac{-2}{(1+0)^3} = -2 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-0)^3} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = -2 \neq 2 = f'(0^+)$$

Las derivadas laterales no coinciden y la función no es derivable en $x = 0$.

La función es derivable en $(-1,0) \cup (0,1)$.

- b) La función en el intervalo $(-1,0)$ tiene la expresión $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ y su derivada es

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^3}.$$

Esta expresión de la derivada nunca se anula y siempre es negativa en el

intervalo $(-1,0)$. La función es decreciente en $(-1,0)$.

La función en el intervalo $(0,1)$ tiene la expresión $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ y su derivada es

$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$. Esta expresión de la derivada nunca se anula y siempre es positiva en el

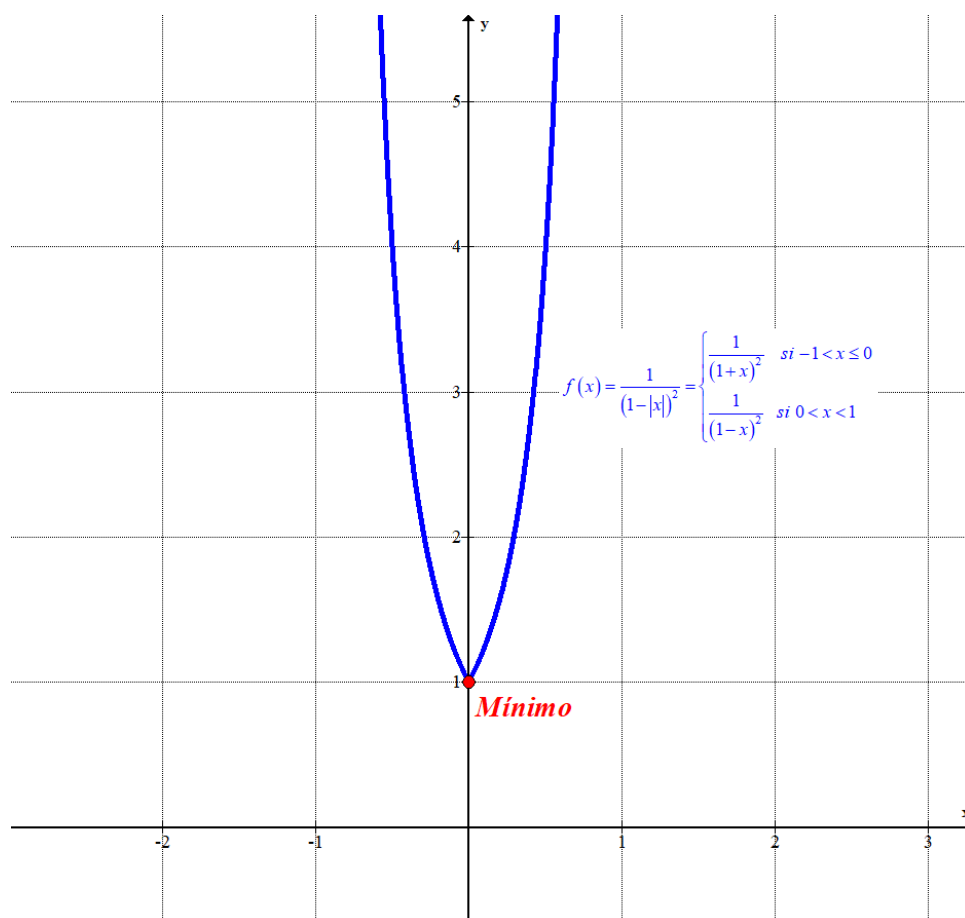
intervalo $(0,1)$. La función es creciente en $(0,1)$.

La función decrece antes de $x=0$ y crece después. La función tiene un mínimo relativo en $x=0$. En este punto la función vale $f(0)=1$

Valoramos la función en $x=0$ y hallamos los límites de la función cuando se acerca a los extremos del intervalo de definición $(-1,1)$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ f(0) &= \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\}$$

La función tiene un mínimo absoluto en $x=0$, siendo $f(0)=1$. La función no tiene máximos absolutos.



EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sean las funciones $f : (-1,0) \cup (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{e}\right)$ y $g(x) = x^3 + 2$.

- a) **[1,5 puntos]** Calcula $a \neq 0$ de forma que en el punto $(a, f(a))$ la recta normal a la gráfica de la función f sea paralela a la recta tangente a la gráfica de g en el punto $(a, g(a))$.
- b) **[1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f .

a) Para que sean paralelas dos rectas deben tener la misma.

La pendiente de la recta normal a la gráfica de la función f es $\frac{-1}{f'(a)}$. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de g es $g'(a)$.

Debemos buscar cuando se cumple la igualdad $\frac{-1}{f'(a)} = g'(a)$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{x^2}{e}\right) = \ln(x^2) - \ln e = 2 \ln x - 1 \rightarrow f'(x) = \frac{2}{x} \\ g(x) &= x^3 + 2 \rightarrow g'(x) = 3x^2 \\ \frac{-1}{f'(a)} &= g'(a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{\frac{2}{a}} = 3a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 = 3a^2 \frac{2}{a} \Rightarrow -1 = 6a \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{6}}$$

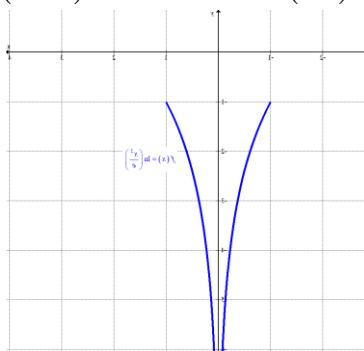
Para $a = -\frac{1}{6}$ se cumple lo pedido.

b) La derivada de la función $f(x)$ es $f'(x) = \frac{2}{x}$. Esta expresión de la derivada nunca se anula.

En el intervalo $(-1,0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale $f'(-0.5) = \frac{2}{-0.5} = -4 < 0$. La derivada es negativa en $(-1,0)$ y la función es decreciente.

En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{2}{0.5} = 4 > 0$. La derivada es positiva en $(0,1)$ y la función es creciente.

La función es decreciente en $(-1,0)$ y creciente en $(0,1)$.



EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1,25 puntos] Calcula A^4 y A^{31} .

b) [1,25 puntos] Halla razonadamente el determinante de la matriz $4A^{25}(A^t)^4$.

a) Calculamos las potencias pedidas.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$A^4 = A^2 A^2 = (-I)(-I) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{31} = A^{4 \cdot 7 + 3} = (A^4)^7 A^3 A = I^7 \cdot (-I) A = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Calculamos el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Calculamos el determinante pedido aplicando las propiedades de los determinantes.

$$\left| 4A^{25}(A^t)^4 \right| = \left| 4A^{25} \right| \cdot \left| (A^t)^4 \right| = \left\{ \begin{array}{l} A^{25} \text{ es una matriz } 2 \times 2 \\ |4A^{25}| = 4^2 |A^{25}| \end{array} \right\} = 4^2 |A^{25}| |A^t|^4 =$$

$$= \{ |A^t| = |A| \} = 16 |A|^{25} |A|^4 = 16 |A|^{29} = 16 \cdot 1^{29} = \boxed{16}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Obtenemos la expresión de la matriz $4A^{25}(A^t)^4$ y luego calculamos su determinante.

$$A^{25} = A^{4 \cdot 6 + 1} = (A^4)^6 A^1 = I^6 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^t)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$(A^t)^4 = (A^t)^2 (A^t)^2 = (-I)(-I) = I$$

$$4A^{25}(A^t)^4 = 4A \cdot I = 4A = 4 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left| 4A^{25}(A^t)^4 \right| = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{16}$$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) **[1 punto]** Halla razonadamente el determinante de una matriz X que verifica $X^3AX^2 = B^2$.
 b) **[1,5 puntos]** Determina, si existe, una matriz Y que verifique $A^3YB^{-1} = A^2$.

a) Calculamos el determinante de las matrices A y B .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$$

Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$|X^3AX^2| = |B^2| \Rightarrow |X|^3 |A| |X|^2 = |B|^2 \Rightarrow 2 \cdot |X|^5 = 4^2 \Rightarrow |X|^5 = \frac{16}{2} = 8 \Rightarrow |X| = \sqrt[5]{8}$$

b) Despejamos Y de la ecuación matricial.

$$A^3YB^{-1} = A^2 \Rightarrow A^{-1}AA^2YB^{-1} = A^{-1}AA^2 \Rightarrow A^2YB^{-1} = A \Rightarrow A^{-1}AA^2YB^{-1} = A^{-1}A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AYB^{-1} = I \Rightarrow A^{-1}AYB^{-1} = A^{-1}I \Rightarrow YB^{-1} = A^{-1} \Rightarrow YB^{-1}B = A^{-1}B \Rightarrow Y = A^{-1}B$$

La matriz Y cumpliendo lo pedido existe. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Y = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12-4 & 4-4 \\ -9+4 & -3+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

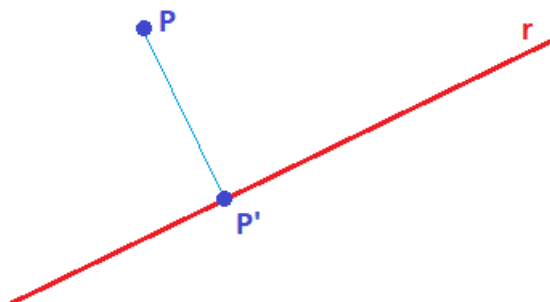
La matriz buscada es $Y = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(2,1,0)$.

- a) [1,25 puntos] Halla la distancia del punto P a la recta r .
 b) [1,25 puntos] Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta r y al punto P .

a) Para hallar la distancia del punto P a la recta r hallamos el punto P' proyección ortogonal de P sobre la recta. La distancia de P a la recta será la distancia de P a P' .



Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = z \end{cases} \Rightarrow x + z + z = 0 \Rightarrow x = -2z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

El punto P' pertenece a la recta r , por lo que sus coordenadas son $P'(-2\alpha, \alpha, \alpha)$.

El vector $\overrightarrow{PP'}$ debe ser ortogonal al vector director de la recta $\vec{v}_r = (-2, 1, 1)$. Su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_r &= (-2, 1, 1) \\ \overrightarrow{PP'} &= (-2\alpha, \alpha, \alpha) - (2, 1, 0) = (-2\alpha - 2, \alpha - 1, \alpha) \\ \overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v}_r &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (-2\alpha - 2, \alpha - 1, \alpha)(-2, 1, 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\alpha + 4 + \alpha - 1 + \alpha = 0 \Rightarrow 6\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \Rightarrow P'\left(1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

La distancia de P a la recta es la distancia de P a P' y esta distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.

$$\overrightarrow{PP'} = \left(1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right) - (2, 1, 0) = \left(-1, \frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

$$d(P, r) = d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2} \approx 1.871u$$

La distancia del punto P a la recta r tiene un valor de $\frac{\sqrt{14}}{2} \approx 1.871$ unidades.

- b) El plano que contiene a la recta r y al punto P tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta. Otro vector director del plano es el vector que une un punto cualquiera de la recta con el punto P .

$$r \equiv \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_r(0,0,0) \\ \vec{v}_r = (-2,1,1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{v}_r = (-2,1,1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{Q_r P} = (2,1,0) - (0,0,0) = (2,1,0) \\ Q_r(0,0,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y - 2z - 2z - x = 0 \Rightarrow -x + 2y - 4z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - 2y + 4z = 0}$$

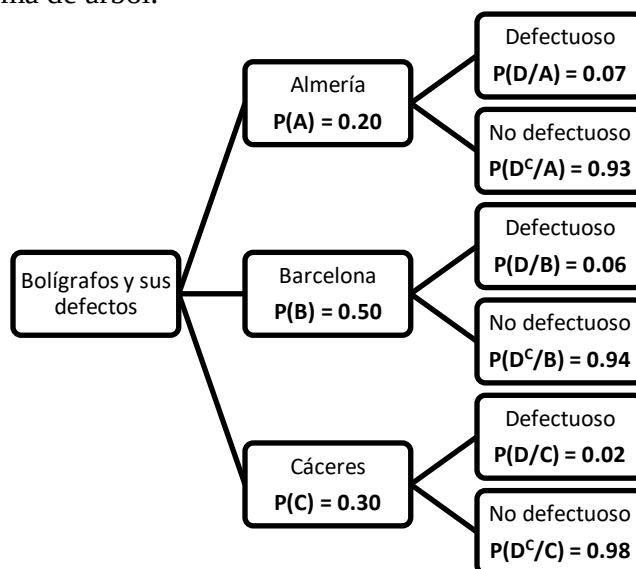
La ecuación del plano que contiene a la recta r y al punto P es $\pi : x - 2y + 4z = 0$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Una empresa fabrica bolígrafos en tres provincias: Almería, Barcelona y Cáceres. El porcentaje de producción total de bolígrafos que se fabrica en cada provincia es, respectivamente, del 20%, 50% y 30%. Además, el porcentaje de bolígrafos defectuosos en cada una de ellas es del 7%, 6% y 2%, respectivamente.

- a) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que un bolígrafo, tomado al azar, sea defectuoso?
 b) **[1,5 puntos]** Si se ha escogido un bolígrafo no defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de Almería?

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= 0.2 \cdot 0.07 + 0.5 \cdot 0.06 + 0.3 \cdot 0.02 = \boxed{0.05}$$

- b) Debemos calcular $P(A/D^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D^c) = \frac{P(A \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(A)P(D^c/A)}{1 - P(D)} = \frac{0.2 \cdot 0.93}{1 - 0.05} = \frac{93}{475} \approx 0.1958$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL PROBLEMA

Pasamos los datos porcentuales a absolutos. Suponemos que se fabrican un total de 1000 bolígrafos. En Almería se fabrican $0.20 \cdot 1000 = 200$, en Barcelona $0.50 \cdot 1000 = 500$ y en Cáceres $0.3 \cdot 1000 = 300$. De los fabricados en Almería hay $0.07 \cdot 200 = 14$ defectuosos, de los fabricados en Barcelona hay $0.06 \cdot 500 = 30$ defectuosos y de los fabricados en Cáceres hay $0.02 \cdot 300 = 6$ defectuosos. Hay un total de $14 + 30 + 6 = 50$ bolígrafos defectuosos de un total de 1000 bolígrafos fabricados.

- a) Hay 50 bolígrafos defectuosos de un total de 1000 bolígrafos fabricados. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al elegir al azar un bolígrafo este sea defectuoso vale $\frac{50}{1000} = 0.05$.

- b) Hay 50 bolígrafos defectuosos, por lo que hay $1000 - 50 = 950$ bolígrafos no defectuosos. Siendo $200 - 14 = 186$ los bolígrafos no defectuosos fabricados en Almería. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al elegir un bolígrafo no defectuoso este haya sido fabricado en Almería vale $\frac{186}{950} = \frac{93}{475} \approx 0.1958$.

PAU 2025 Extraordinaria suplente 2 Matemáticas II



PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
MATEMÁTICAS II
CURSO 2024-2025

Instrucciones:

- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en un bloque con un ejercicio obligatorio y tres bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- d) Deberá resolver el ejercicio obligatorio y solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques con optatividad.
- e) En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- h) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- i) Se proporcionará la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

BLOQUE OBLIGATORIO. Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-k}{2}$ y $s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$.

- a) **[1,5 puntos]** Determina k sabiendo que ambas se cortan en un punto.
- b) **[1 punto]** Para $k = 0$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s .

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Un naufrago se encuentra en una isla situada en el punto de coordenadas $(2, 0)$ de un plano. Se sabe que un ferry navega en el mismo plano siempre en la trayectoria dada por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$. ¿Hacia qué punto de la trayectoria debe nadar el naufrago para recorrer la menor distancia posible? Calcula dicha distancia.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sea la función $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|}$.

- a) **[1,5 puntos]** Estudia la derivabilidad de f .
- b) **[1 punto]** Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Se considera la matriz $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ con determinante igual a -5 .

a) [1,25 puntos] Calcula $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & 2a_{21} \\ 3a_{12} & 3a_{32} & 6a_{22} \\ 2a_{13} & 2a_{33} & 4a_{23} \end{vmatrix}$.

b) [1,25 puntos] Calcula $\begin{vmatrix} 2a_{11} - 3a_{31} & 2a_{12} - 3a_{32} & 4a_{13} - 6a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1,5 puntos] Determina a y b para que $A^2 = 4I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
b) [1 punto] Para $a = -1$ y $b = 1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple $A^2 X = B^t$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -e^x$ y $g(x) = -e^{-x}$.

- a) [1 punto] Esboza las gráficas de dichas funciones.
b) [1,5 puntos] Calcula la suma de las áreas de los recintos acotados y limitados por las gráficas de dichas funciones y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

El peso de las manzanas producidas en una granja sigue una distribución normal de media 200 gramos y desviación típica desconocida.

- a) [1,25 puntos] Si el 33% de las manzanas pesan más de 230 gramos, calcula la desviación típica del peso de las manzanas.
b) [1,25 puntos] Si la desviación típica es de 50 gramos, calcula el porcentaje de manzanas que pesan entre 160 y 220 gramos.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-k}{2}$ y $s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$.

a) **[1,5 puntos]** Determina k sabiendo que ambas se cortan en un punto.

b) **[1 punto]** Para $k = 0$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s .

a) Hallamos un punto y un vector de cada recta.

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-k}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ P_r(0, 2, k) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ Q_s(-2, -3, 1) \end{cases}$$

Estas rectas no son paralelas ni coincidentes pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

Para que las rectas se corten en un punto el producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ debe ser nulo.

$$\left. \begin{matrix} P_r(0, 2, k) \\ Q_s(-2, -3, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (-2, -3, 1) - (0, 2, k) = (-2, -5, 1-k)$$

$$\left. \begin{matrix} \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (-2, -5, 1-k) \end{matrix} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 1-k \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - 2k + 2 + 10 + 8 - 1 + k + 5 = 26 - k$$

$$[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = 0 \Rightarrow 26 - k = 0 \Rightarrow \boxed{k = 26}$$

Para $k = 26$ las rectas se cortan en un punto.

b) Para $k = 0$ las rectas quedan $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$.

El plano que contiene a la recta r y es paralelo a s tiene como vectores directores los vectores directores de ambas rectas y pasa por el punto $P_r(0, 2, 0)$ de la recta r .

$$\left. \begin{matrix} \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{u} = \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \\ P_r(0, 2, 0) \in \pi \end{matrix} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - 2y + 4 + 2z - z - y + 2 - 4x = 0 \Rightarrow$$

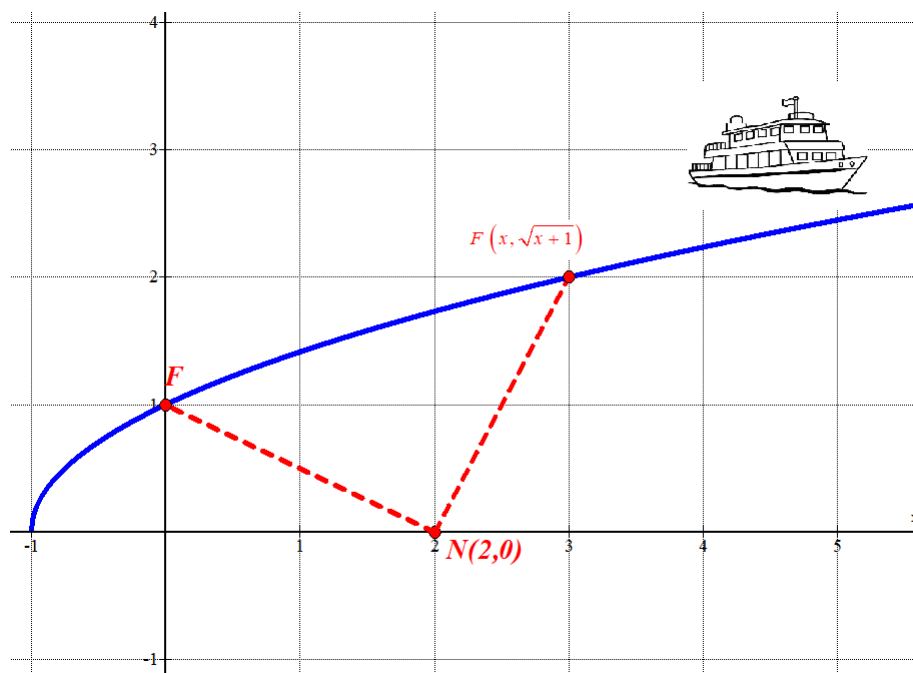
$$\Rightarrow -5x - 3y + z + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 5x + 3y - z - 6 = 0}$$

El plano que cumple lo pedido tiene ecuación $\pi: 5x + 3y - z - 6 = 0$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Un naufrago se encuentra en una isla situada en el punto de coordenadas $(2, 0)$ de un plano. Se sabe que un ferry navega en el mismo plano siempre en la trayectoria dada por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$. ¿Hacia qué punto de la trayectoria debe nadar el naufrago para recorrer la menor distancia posible? Calcula dicha distancia.

Dibujamos la situación planteada.



Obtenemos la expresión de la distancia del naufrago a un punto de la trayectoria del barco. Un punto de la trayectoria tiene coordenadas $(x, \sqrt{1+x})$, siendo $x \geq -1$.

$$\overrightarrow{NF} = (x, \sqrt{1+x}) - (2, 0) = (x-2, \sqrt{1+x})$$

$$d(x) = d(\text{Naufrago}, \text{Ferry}) = |\overrightarrow{NF}|$$

$$d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{1+x})^2} = \sqrt{x^2 + 4 - 4x + 1 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$$

Calculamos la derivada de la función distancia a recorrer por el naufrago y averiguamos cuando se anula.

$$d(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5} \Rightarrow d'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 5}}$$

$$d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 5}} = 0 \Rightarrow 2x-3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2} = 1.5}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 1.5$.

- En el intervalo $[-1, 1.5)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$d'(0) = \frac{2 \cdot 0 - 3}{2\sqrt{0^2 - 3 \cdot 0 + 5}} = \frac{-3}{2\sqrt{5}} < 0. \text{ La función decrece antes de } x = 1.5.$$

- En el intervalo $(1.5, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

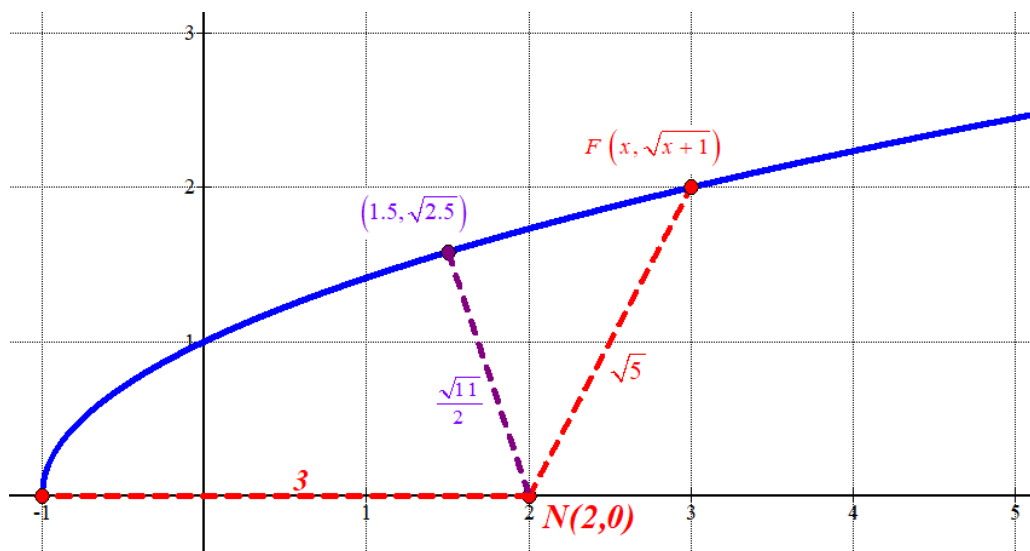
$$d'(2) = \frac{2 \cdot 2 - 3}{2\sqrt{2^2 - 3 \cdot 2 + 5}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} > 0. \text{ La función crece después de } x = 1.5.$$

La distancia tiene un mínimo en $x = 1.5$.

Para este valor tenemos que $y = \sqrt{1+1.5} = \sqrt{2.5} \approx 1.58$.

El punto hacia el que debe nadar tiene coordenadas $(1.5, \sqrt{2.5})$. La distancia mínima que

debe recorrer tiene un valor de $d(1.5) = \sqrt{1.5^2 - 3 \cdot 1.5 + 5} = \frac{\sqrt{11}}{2} \approx 1.6583$ unidades.



EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sea la función $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia la derivabilidad de f .

b) **[1 punto]** Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

a) Obtenemos la expresión de la función como una función definida a trozos.

$$f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|} = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{1+x}{1-x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

La función es continua en $(-1,0) \cup (0,1)$.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{1+|0|}{1-|0|} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x}{1-x} = \frac{1+0}{1-0} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

La función es continua en $x = 0$. La función es continua en todo su dominio $(-1,1)$.

La función en el intervalo $(-1,0)$ tiene la expresión $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, es derivable siendo su

$$\text{derivada } f'(x) = \frac{-1 \cdot (1+x) - 1 \cdot (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

La función en el intervalo $(0,1)$ tiene la expresión $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, es derivable siendo su

$$\text{derivada } f'(x) = \frac{1 \cdot (1-x) - (-1) \cdot (1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-0)^2} = 2 \\ f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+0)^2} = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^+) = 2 \neq -2 = f'(0^-)$$

Las derivadas laterales no coinciden y la función no es derivable en $x = 0$.

La función es derivable en $(-1,0) \cup (0,1)$.

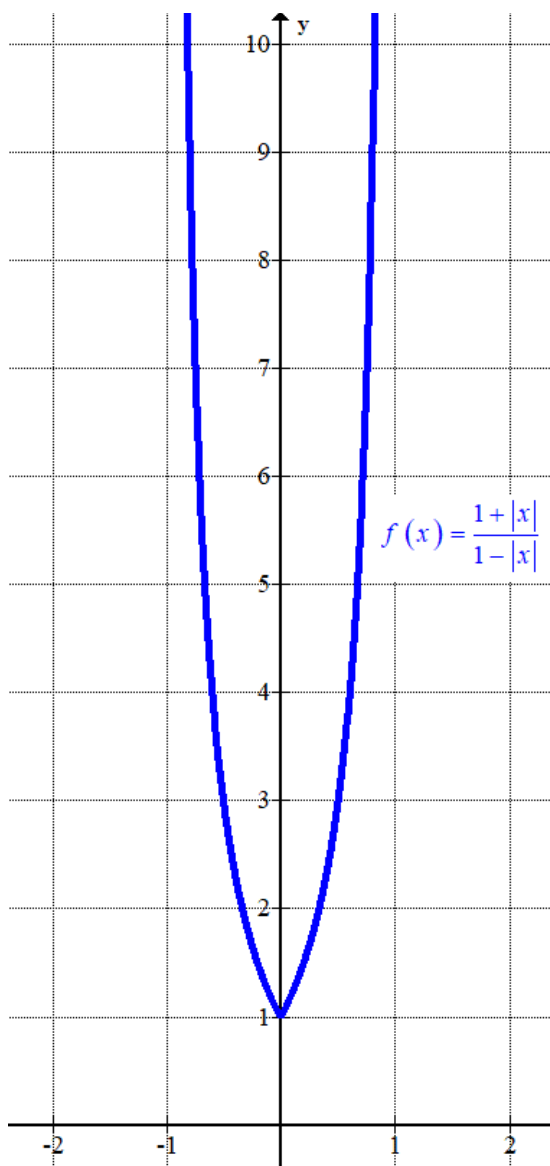
b) La derivada de la función en el intervalo $(-1,0)$ tiene la expresión $f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2}$. Esta

expresión de la derivada siempre es negativa. La función decrece en $(-1,0)$.

La derivada de la función en el intervalo $(0,1)$ tiene la expresión $f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$. Esta

expresión de la derivada siempre es positiva. La función crece en $(0,1)$.

La función decrece en $(-1,0)$ y crece en $(0,1)$.



EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Se considera la matriz $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ con determinante igual a -5 .

a) [1,25 puntos] Calcula $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & 2a_{21} \\ 3a_{12} & 3a_{32} & 6a_{22} \\ 2a_{13} & 2a_{33} & 4a_{23} \end{vmatrix}$.

b) [1,25 puntos] Calcula $\begin{vmatrix} 2a_{11} - 3a_{31} & 2a_{12} - 3a_{32} & 4a_{13} - 6a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$.

a) Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & 2a_{21} \\ 3a_{12} & 3a_{32} & 6a_{22} \\ 2a_{13} & 2a_{33} & 4a_{23} \end{vmatrix} = \left\{ |A^t| = |A| \right\} = \begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{12} & 2a_{13} \\ a_{31} & 3a_{32} & 2a_{33} \\ 2a_{21} & 6a_{22} & 4a_{23} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos 3 de la 2ª columna} \\ \text{Sacamos 2 de la 3ª columna} \end{array} \right\} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \end{vmatrix} = \left\{ \text{Sacamos 2 de la 3ª fila} \right\} = 12 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambiamos la fila 2ª y 3ª} \\ \text{el determinante cambia de signo} \end{array} \right\} = 12(-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -12(-5) = \boxed{60}$$

b) Calculamos el determinante aplicando las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} - 3a_{31} & 2a_{12} - 3a_{32} & 4a_{13} - 6a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 4a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3a_{31} & 3a_{32} & 6a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{En el 2º determinante la 1ª fila} = 3 \times 3^a \\ \text{El determinante vale 0} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 4a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos 2} \\ \text{de la 3ª columna} \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos 2} \\ \text{de la 3ª columna} \end{array} \right\} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 4(-5) = \boxed{-20}$$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1,5 puntos]** Determina a y b para que $A^2 = 4I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) **[1 punto]** Para $a = -1$ y $b = 1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple $A^2 X = B^t$.

a) Determinamos el valor de a y b .

$$A^2 = 4I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + 3b & 3a + 3 \\ ab + b & 3b + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 3b = 4 \\ 3a + 3 = 0 \rightarrow 3a = -3 \rightarrow \boxed{a = -1} \\ ab + b = 0 \\ 3b + 1 = 4 \rightarrow 3b = 3 \rightarrow \boxed{b = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1)^2 + 3 \cdot 1 = 4 \rightarrow \text{¡Ok!} \\ (-1) \cdot 1 + 1 = 0 \rightarrow \text{¡Ok!} \end{cases}$$

Para que se cumpla lo pedido debe ser $a = -1$ y $b = 1$.

b) Para $a = -1$ y $b = 1$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hemos visto en el

apartado anterior que $A^2 = 4I$.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A^2 X = B^t \Rightarrow 4IX = B^t \Rightarrow 4X = B^t \Rightarrow X = \frac{1}{4} B^t$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4} B^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

La matriz tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -e^x$ y $g(x) = -e^{-x}$.

a) [1 punto] Esboza las gráficas de dichas funciones.

b) [1,5 puntos] Calcula la suma de las áreas de los recintos acotados y limitados por las gráficas de dichas funciones y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

a) La derivada de la función f es $f'(x) = -e^x$. Esta derivada nunca se anula y siempre es negativa. La función f es decreciente en $\mathbb{R}$.

La derivada de la función g es $g'(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. Esta derivada nunca se anula y siempre es positiva. La función g es creciente en $\mathbb{R}$.

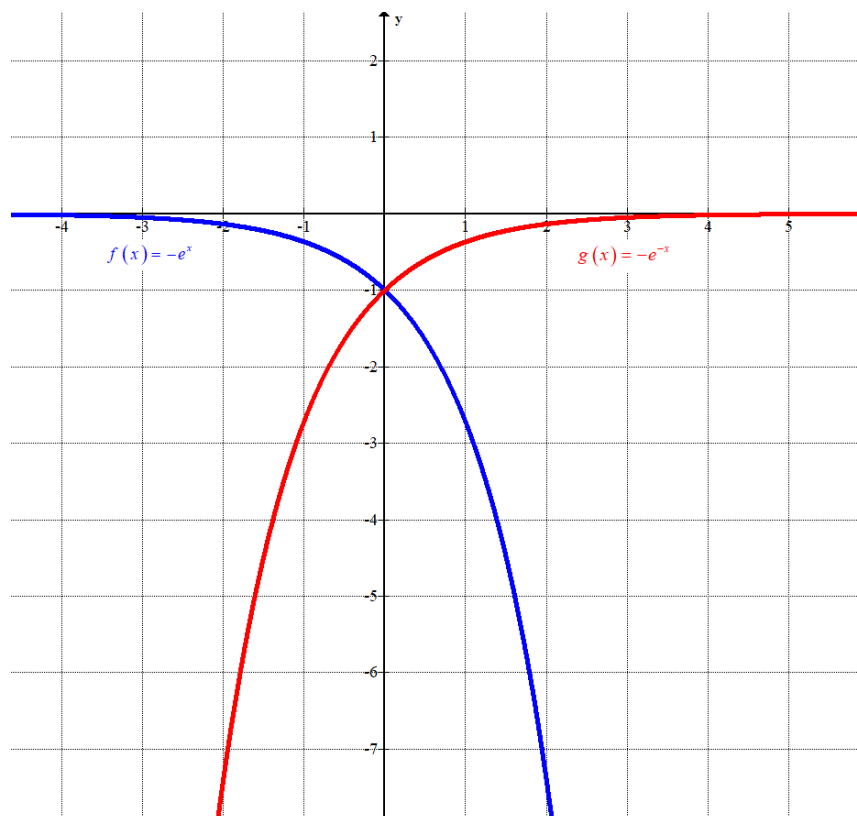
Determinamos los puntos de corte de las dos gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -e^x = -e^{-x} \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow e^x = \frac{1}{e^x} \Rightarrow e^x e^x = 1 \Rightarrow e^{2x} = 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

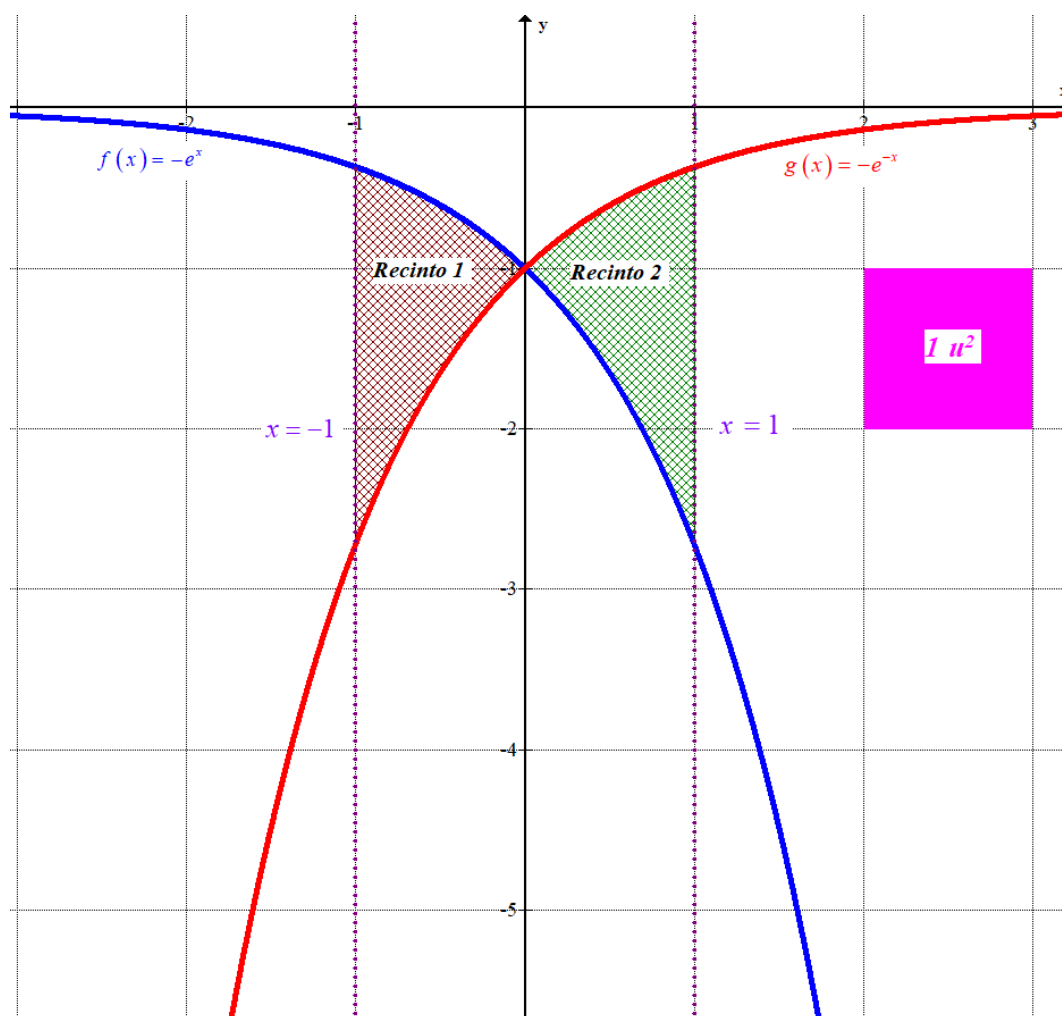
Las gráficas coinciden en el punto $(0, -1)$.

Hacemos una pequeña tabla de valores y dibujamos las gráficas de las dos funciones.

x	$f(x) = -e^x$	x	$g(x) = -e^{-x}$
-2	$-1/e^2$	-2	$-e^2$
-1	$-1/e$	-1	$-e$
0	-1	0	-1
1	$-e$	1	$-1/e$
2	$-e^2$	2	$-1/e^2$



b) Dibujamos la situación planteada.



Los recintos son simétricos, y por tanto el área del recinto 1 es igual que la del recinto 2. Calculamos el área del recinto 1.

$$\begin{aligned} \text{Área Recinto 1} &= \int_0^1 -e^{-x} - (-e^x) dx = \int_0^1 -e^{-x} + e^x dx = \\ &= [e^{-x} + e^x]_0^1 = [e^{-1} + e^1] - [e^{-0} + e^0] = \boxed{\frac{1}{e} + e - 2 \approx 1.0861 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

La suma de las áreas de los recintos acotados y limitados por las gráficas de las dos funciones y las rectas $x = -1$ y $x = 1$ es el doble del área del recinto 1: $\frac{2}{e} + 2e - 4 \approx 2.1723$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

El peso de las manzanas producidas en una granja sigue una distribución normal de media 200 gramos y desviación típica desconocida.

- a) **[1,25 puntos]** Si el 33% de las manzanas pesan más de 230 gramos, calcula la desviación típica del peso de las manzanas.
 b) **[1,25 puntos]** Si la desviación típica es de 50 gramos, calcula el porcentaje de manzanas que pesan entre 160 y 220 gramos.

a) Sea X = Peso en gramos de las manzanas producidas en una granja. $X = N(200, \sigma)$.

Nos dicen que $P(X > 230) = 0.33$. Utilizamos esta información para obtener el valor de σ .

$$P(X > 230) = 0.33 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{230 - 200}{\sigma}\right) = 0.33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{30}{\sigma}\right) = 0.33 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{30}{\sigma}\right) = 0.33 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{30}{\sigma}\right) = 1 - 0.33 = 0.67 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{30}{\sigma} = 0.44 \Rightarrow \sigma = \frac{30}{0.44} = \frac{750}{11} \approx 68.1818$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700

La desviación típica vale $\sigma = \frac{750}{11} \approx 68.1818$.

b) Tenemos que $X = N(200, 50)$. Calculamos $P(160 \leq X \leq 220)$.

$$P(160 \leq X \leq 220) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{160 - 200}{50} \leq Z \leq \frac{220 - 200}{50}\right) =$$

$$= P(-0.8 \leq Z \leq 0.4) = P(Z \leq 0.4) - P(Z \leq -0.8) = P(Z \leq 0.4) - P(Z \geq 0.8) =$$

$$= P(Z \leq 0.4) - [1 - P(Z \leq 0.8)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.6554 - 1 + 0.7881 = 0.4435$$

z	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7615
0,8	0,7881	0,7915

El porcentaje de manzanas que pesan entre 160 y 220 gramos es del 44.35 %.



PAU 2025 Ordinaria Matemáticas II
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
MATEMÁTICAS II
CURSO 2024-2025

Instrucciones:

- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en un bloque con un ejercicio obligatorio y tres bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- d) Deberá resolver el ejercicio obligatorio y solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques con optatividad.
- e) En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- h) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- i) Se proporcionará la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

BLOQUE OBLIGATORIO Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Juan ha gastado 80€ por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón. Sabemos que el precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos.

- a) **[1,25 puntos]** ¿Es posible determinar de forma única el precio del jersey? ¿Y el de la camisa? Razona la respuesta.
- b) **[1,25 puntos]** Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57€, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del 30%, del 40% y del 20%, respectivamente. Calcula el precio de cada prenda antes de las rebajas.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - ax + 2 - 2\cos(x)}{e^x - x\cos(x) - 1}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a + \frac{\ln(x)}{x^2}$.

- a) **[1 punto]** Calcula a para que $y = 1$ sea una asíntota horizontal de la gráfica de f .
- b) **[1,5 puntos]** Para $a = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . Estudia y halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025

MATEMÁTICAS II

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Sean los puntos $O(0, 0, 0)$, $A(0, 2, -2)$, $B(1, 2, m)$ y $C(2, 3, 2)$.

- a) **[1,25 puntos]** Halla los valores de m para que el tetraedro determinado por los puntos O , A , B y C tenga un volumen de 3 unidades cúbicas.
- b) **[1,25 puntos]** Para $m = 0$, calcula la distancia del punto O al plano que pasa por los puntos A , B y C .

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el punto $P(1, 1, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$

- a) **[1 punto]** Halla el plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r .
- b) **[1,5 puntos]** Halla la recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r .

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Halla la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que pasa por los puntos $(2, e - 2 - 2\ln(2))$ y $(1, 0)$, y

verifica que $f''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$..

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

En la tabla siguiente se recoge el número de coches y motos que se presentaron a la ITV en el año 2023:

	Coches	Motos
Aptos	116.383	160.667
No aptos	2.679	3.447

Se elige un vehículo al azar de entre los coches y motos que se presentaron a dicha inspección.

- a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el vehículo elegido sea una moto o haya resultado apto?
- b) **[1,25 puntos]** Si el vehículo elegido es un coche, ¿cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Juan ha gastado 80€ por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón. Sabemos que el precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos.

a) **[1,25 puntos]** ¿Es posible determinar de forma única el precio del jersey? ¿Y el de la camisa? Razona la respuesta.

b) **[1,25 puntos]** Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57€, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del 30%, del 40% y del 20%, respectivamente. Calcula el precio de cada prenda antes de las rebajas.

a) Llamamos “x”, “y” y “z” al precio de un jersey, una camisa y un pantalón.

Obtenemos las ecuaciones que podamos obtener de los datos del problema.

“Juan ha gastado 80€ por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón” $\rightarrow$

$$x + y + z = 80.$$

“El precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos” $\rightarrow x = \frac{y+z}{3}$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo intentamos resolver.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 80 \\ x = \frac{y+z}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 80 - x - z \\ 3x = y + z \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = 80 - x - \cancel{z} + \cancel{z} \Rightarrow 4x = 80 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{80}{4} = 20 \Rightarrow y = 80 - 20 - z = 60 - z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 20 \\ y = 60 - \lambda; 0 \leq \lambda \leq 60 \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Hemos obtenido el precio del jersey: 20 euros, pero del precio de la camisa y del pantalón solo sabemos que sus precios suman 60 €, por lo que no podemos determinar el precio de la camisa, solo que su precio está entre 0 y 60 euros.

b) Obtenemos la nueva ecuación.

“Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57€, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del 30%, del 40% y del 20%, respectivamente” el descuento que hubiese obtenido en las rebajas es de $80 - 57 = 23$ euros $\rightarrow 0.3x + 0.4y + 0.2z = 23$.

Añadimos esta ecuación al sistema anterior y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} y = 80 - x - z \\ 3x = y + z \\ 0.3x + 0.4y + 0.2z = 23 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 80 - x - z \\ 3x = y + z \\ 3x + 4y + 2z = 230 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x = 80 - x - z + z \\ 3x + 4(80 - x - z) + 2z = 230 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x = 80 \\ 3x + 320 - 4x - 4z + 2z = 230 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{80}{4} = 20 \\ -x - 2z = -90 \end{array} \right\} \Rightarrow -20 - 2z = -90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 70 = 2z \Rightarrow \boxed{z = \frac{70}{2} = 35} \Rightarrow \boxed{y = 80 - 20 - 35 = 25}$$

El jersey cuesta 20 €, la camisa cuesta 25 € y el pantalón 35 €.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - ax + 2 - 2\cos(x)}{e^x - x\cos(x) - 1}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Calculamos el límite indicado.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - ax + 2 - 2\cos(x)}{e^x - x\cos(x) - 1} = \frac{\operatorname{sen}(0) - a \cdot 0 + 2 - 2\cos(0)}{e^0 - 0 \cdot \cos(0) - 1} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - a + 2\operatorname{sen}(x)}{e^x - \cos(x) + x\operatorname{sen}(x)} =$$

$$= \frac{\cos(0) - a + 2\operatorname{sen}(0)}{e^0 - \cos(0) + 0 \cdot \operatorname{sen}(0)} = \frac{1 - a}{1 - 1 + 0} = \frac{1 - a}{0} = \dots$$

Para que este límite no valga ∞ debe ser el numerador igual a cero para que surja una indeterminación y sigamos con su cálculo. Es decir, debe ser $a = 1$. Seguimos con el cálculo del límite tomando $a = 1$.

$$\dots = \{a = 1\} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}(x) + 2\cos(x)}{e^x + \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x) + x\cos(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}(x) + 2\cos(x)}{e^x + 2\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)} = \frac{-\operatorname{sen}(0) + 2\cos(0)}{e^0 + 2\operatorname{sen}(0) + 0 \cdot \cos(0)} = \frac{2}{1 + 0 + 0} = \boxed{2}$$

El valor de a necesario para que el límite sea finito es $a = 1$. Para este valor el límite vale 2.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a + \frac{\ln(x)}{x^2}$.

- a) **[1 punto]** Calcula a para que $y = 1$ sea una asíntota horizontal de la gráfica de f .
 b) **[1,5 puntos]** Para $a = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . Estudia y halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

a) Para que $y = 1$ sea una asíntota horizontal debe cumplirse $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a + \frac{\ln(x)}{x^2} = a + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = a + \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= a + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = a + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = a + \frac{1}{\infty} = a$$

Como este límite debe valer 1 entonces debe ser $a = 1$.

b) Para $a = 0$ la función queda $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$. Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3} = 0 \Rightarrow 1 - 2 \ln(x) = 0 \Rightarrow 1 = 2 \ln(x) \Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = e^{1/2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de punto crítico $x = e^{1/2} \approx 1.65$.

- En el intervalo $(0, e^{1/2})$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1 - 2 \ln(1)}{1^3} = 1 > 0$.

La función crece en $(0, e^{1/2})$.

- En el intervalo $(e^{1/2}, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = \frac{1 - 2 \ln(2)}{2^3} = -0.024 < 0. \text{ La función decrece en } (e^{1/2}, +\infty).$$

La función crece en $(0, e^{1/2})$ y decrece en $(e^{1/2}, +\infty)$.

Con esta evolución de la función podemos decir que la función tiene un máximo relativo y

absoluto en $x = e^{1/2}$. Como $f(e^{1/2}) = \frac{\ln(e^{1/2})}{(e^{1/2})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$ las coordenadas del máximo son

$$\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2e} \right).$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Sean los puntos $O(0, 0, 0)$, $A(0, 2, -2)$, $B(1, 2, m)$ y $C(2, 3, 2)$.

- a) **[1,25 puntos]** Halla los valores de m para que el tetraedro determinado por los puntos O , A , B y C tenga un volumen de 3 unidades cúbicas.
- b) **[1,25 puntos]** Para $m = 0$, calcula la distancia del punto O al plano que pasa por los puntos A , B y C .

a) Hallamos la expresión del volumen del tetraedro $OABC$.

$$\left. \begin{array}{l} O(0, 0, 0) \\ A(0, 2, -2) \\ B(1, 2, m) \\ C(2, 3, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (0, 2, -2) \\ \overrightarrow{OB} = (1, 2, m) \\ \overrightarrow{OC} = (2, 3, 2) \end{array} \right. \Rightarrow \text{Volumen } OABC = \frac{[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]}{6} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & m \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |0 + 4m - 6 + 8 - 4 - 0| = \frac{|4m - 2|}{6}$$

Buscamos el valor de m para el que dicho volumen vale 3 unidades cúbicas.

$$\text{Volumen } OABC = 3 \Rightarrow \frac{|4m - 2|}{6} = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{4m - 2}{6} = 3 \rightarrow 4m - 2 = 18 \rightarrow 4m = 20 \rightarrow \boxed{m = 5} \\ \frac{-4m + 2}{6} = 3 \rightarrow -4m + 2 = 18 \rightarrow -4m = 16 \rightarrow \boxed{m = -4} \end{cases}$$

Para $m = -4$ y $m = 5$ el tetraedro determinado por los puntos O , A , B y C tiene un volumen de 3 unidades cúbicas.

- b) Para $m = 0$ los puntos quedan $O(0, 0, 0)$, $A(0, 2, -2)$, $B(1, 2, 0)$ y $C(2, 3, 2)$.

Hallamos el plano π determinado por los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} A(0, 2, -2) \\ B(1, 2, 0) \\ C(2, 3, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, 0) - (0, 2, -2) = (1, 0, 2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2, 3, 2) - (0, 2, -2) = (2, 1, 4) \\ A(0, 2, -2) \in \pi \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-2 & z+2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4(\cancel{y-2}) + z + 2 - 4(\cancel{y-2}) - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -2x + z + 2 = 0}$$

Hallamos la distancia del punto $O(0, 0, 0)$ al plano $\pi: -2x + z + 2 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -2x + z + 2 = 0 \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(O, \pi) = \frac{|-2 \cdot 0 + 0 + 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Para $m = 0$ la distancia del punto O al plano que pasa por los puntos A , B y C tiene un valor de $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ unidades.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el punto $P(1, 1, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$

a) [1 punto] Halla el plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r .

b) [1,5 puntos] Halla la recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r .

a) Hallamos un punto y un vector director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} Q_r(1, 2, 3) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 2) \end{cases}$$

El plano π que pasa por el punto P y contiene a la recta r tiene como vectores directores $\vec{v}_r(1, 2, 2)$ y $\overrightarrow{PQ_r}$.

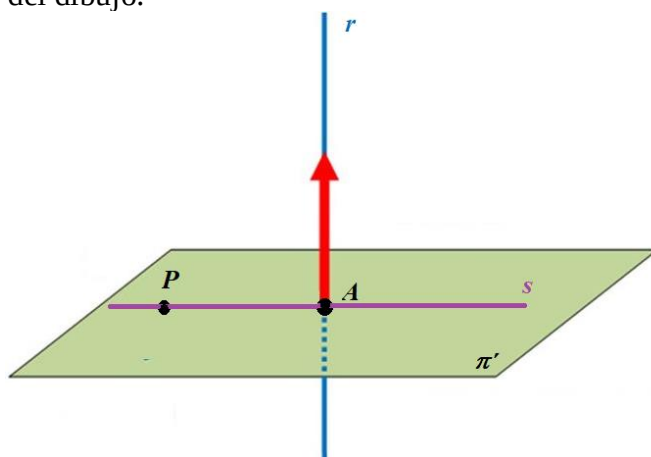
$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (1, 2, 2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ_r} = (1, 2, 3) - (1, 1, 1) = (0, 1, 2) \\ P(1, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-1) + z-1 - 2(y-1) - 2(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 4 + z - 1 - 2y + 2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x - 2y + z - 1 = 0}$$

El plano que pasa por el punto P y contiene la recta r tiene ecuación $\pi: 2x - 2y + z - 1 = 0$.

b) Seguimos los pasos del dibujo.



Hallamos el plano π' perpendicular a la recta r que pasa por P . Este plano tiene como vector normal el director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}' = \vec{v}_r = (1, 2, 2) \\ P(1, 1, 1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi': x + 2y + 2z + D = 0 \\ P(1, 1, 1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 2 + 2 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -5 \Rightarrow \boxed{\pi': x + 2y + 2z - 5 = 0}$$

Hallamos el punto A de corte del plano $\pi': x + 2y + 2z - 5 = 0$ y la recta r .

$$\pi': x + 2y + 2z - 5 = 0$$

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} Q_r(1, 2, 3) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 2) \end{array} \right\} \rightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + 2\alpha \\ z = 3 + 2\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \alpha + 2(2 + 2\alpha) + 2(3 + 2\alpha) - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \alpha + 4 + 4\alpha + 6 + 4\alpha - 5 = 0 \Rightarrow 9\alpha + 6 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \\ z = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

La recta s que buscamos pasa por los puntos P y A.

$$\left. \begin{array}{l} A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) \in s \\ P(1, 1, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = (1, 1, 1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right) \\ P(1, 1, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = 3\overrightarrow{AP} = 3\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right) = (2, 1, -2) \\ P(1, 1, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{array} \right. ; \lambda \in \mathbb{R}$$

La recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r tiene ecuación

$$\text{paramétrica } s: \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{array} \right. ; \lambda \in \mathbb{R}.$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Halla la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que pasa por los puntos $(2, e - 2 - 2\ln(2))$ y $(1, 0)$, y verifica que $f''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$..

Integramos la derivada segunda para obtener la derivada primera de la función.

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int e^{x-1} - \frac{1}{x} dx = e^{x-1} - \ln x + A$$

Integramos la primera derivada para obtener la función (salvo dos parámetros a determinar).

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int e^{x-1} - \ln x + A dx = e^{x-1} - \int \ln x dx + Ax = \dots$$

$$\int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x$$

$$\dots = e^{x-1} - (x \ln x - x) + Ax = e^{x-1} - x \ln x + (A+1)x + B$$

Sabemos que la función tiene la expresión $f(x) = e^{x-1} - x \ln x + (A+1)x + B$, falta por determinar A y B.

Si la función pasa por los puntos $(2, e - 2 - 2\ln(2))$ y $(1, 0)$ se debe cumplir:

$$f(2) = e - 2 - 2\ln 2 \text{ y } f(1) = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = e^{x-1} - x \ln x + (A+1)x + B \\ f(2) = e - 2 - 2\ln 2 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} e - 2 - 2\ln 2 = e^{2-1} - 2\ln 2 + (A+1)2 + B \\ 0 = e^{1-1} - \ln 1 + (A+1) + B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e - 2 - 2\ln 2 = e - 2\ln 2 + 2A + 2 + B \\ 0 = 1 - 0 + A + 1 + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 = 2A + B \\ 0 = A + 2 + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 - 2A = B \\ 0 = A + 2 + B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = A + 2 - 4 - 2A \Rightarrow 0 = -A - 2 \Rightarrow \boxed{A = -2} \Rightarrow \boxed{B = -4 - 2(-2) = 0}$$

Hemos obtenido que debe ser $A = -2$ y $B = 0$.

La función que cumple todo lo pedido es $f(x) = e^{x-1} - x \ln x - x$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

En la tabla siguiente se recoge el número de coches y motos que se presentaron a la ITV en el año 2023:

	Coches	Motos
Aptos	116.383	160.667
No aptos	2.679	3.447

Se elige un vehículo al azar de entre los coches y motos que se presentaron a dicha inspección.

- a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el vehículo elegido sea una moto o haya resultado apto?
- b) **[1,25 puntos]** Si el vehículo elegido es un coche, ¿cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

Completamos la tabla proporcionada añadiendo los totales.

	Coches	Motos	TOTALES
Aptos	116.383	160.667	277050
No aptos	2.679	3.447	6126
TOTALES	119062	164114	283176

- a) Acudieron a la ITV 164114 motos y resultaron aptos 116383 coches, por lo que la probabilidad de que el vehículo elegido sea una moto o haya resultado apto vale

$$\frac{164114 + 116383}{283176} = \frac{4921}{4968} \approx 0.9905.$$

- b) De los 119062 coches que acudieron a la ITV resultaron no aptos 2679, por lo que la probabilidad de que al elegir un coche este haya resultado no apto vale $\frac{2679}{119062} = 0.0225$.

PAU 2025 Ordinaria suplente 1 Matemáticas II



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025

MATEMÁTICAS II**Instrucciones:**

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos**
- b)** Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c)** Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en un bloque con un ejercicio obligatorio y tres bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- d)** Deberá resolver el ejercicio obligatorio y solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques con optatividad.
- e)** En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f)** Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- g)** En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- h)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- i)** Se proporcionará la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

BLOQUE OBLIGATORIO. Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)e^x$.

- a) [1,5 puntos]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.
- b) [1 punto]** Estudia y calcula las asíntotas de la función.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)^2$.

- a) [0,75 puntos]** Esboza el recinto acotado y limitado por la gráfica de f y la recta $y = a$ con $a > 0$.
- b) [1,75 puntos]** Calcula $a > 0$ para que el área del recinto acotado y limitado por la gráfica de f y la recta $y = a$ sea $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(2x) & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(\pi x) - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcula $\int_{-\frac{\pi}{4}}^1 f(x) dx$.



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025

MATEMÁTICAS II

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Sean los puntos $A(3, -1, 1)$, $B(1, 3, -3)$ y $C(-2, -2, 1)$.

- [1 punto]** Calcula el área del triángulo de vértices A , B y C .
- [1,5 puntos]** Halla los puntos D pertenecientes al eje OZ para que el tetraedro de vértices A , B , C y D tenga un volumen de 20 unidades cúbicas.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv 2x + y + 2z + 5 = 0$.

- [1,5 puntos]** Calcula el punto simétrico de $P(1, 0, 1)$ respecto de π .
- [1 punto]** Calcula los planos paralelos a π y que disten 2 unidades de π .

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + 4 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha + 4 & \alpha \end{pmatrix}$

- [1 punto]** Indica para qué valores de α la matriz A admite inversa.
- [1,5 puntos]** Para $\alpha = 1$ determina, si es posible, la matriz inversa de A .

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Los rodamientos de las ruedas de un coche se configuran con unas bolas cuyos diámetros siguen una distribución normal de media 13 mm y desviación típica 0,1 mm. Para que el funcionamiento del rodamiento sea óptimo el diámetro debe estar entre 12,9 mm y 13,15 mm. No obstante, la máquina que los elabora es muy sensible a los cambios de temperatura y pierde eficacia cuando ésta sube considerablemente. El 15 de julio, tras una rotura del sistema de refrigeración, la máquina configura bolas cuyos diámetros siguen una distribución normal de media 12,9 mm y desviación típica 0,2 mm.

- [1,25 puntos]** En circunstancias ideales, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina elabore piezas con rodamiento óptimo?
- [1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el 15 de julio la máquina elabore piezas con rodamiento óptimo?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)e^x$.

- a) **[1,5 puntos]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.
 b) **[1 punto]** Estudia y calcula las asíntotas de la función.

- a) Hallamos la segunda derivada de la función y averiguamos cuando se anula (candidato a punto de inflexión).

$$f(x) = (x-1)e^x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-1)e^x = (x-1+1)e^x = xe^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (x+1)e^x = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

Sustituimos $x = -1$ en la tercera derivada y vemos si no se anula.

$$f'''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x \Rightarrow f'''(-1) = (-1+2)e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0$$

La función tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

Hallamos el valor de la función y de su derivada para $x = -1$.

$$f(x) = (x-1)e^x \Rightarrow f(-1) = (-1-1)e^{-1} = \frac{-2}{e}$$

$$f'(x) = xe^x \Rightarrow f'(-1) = (-1)e^{-1} = \frac{-1}{e}$$

Hallamos la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión $x = -1$.

$$\text{Recta tangente} \rightarrow y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)) \Rightarrow y - \frac{-2}{e} = \frac{-1}{e}(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + \frac{2}{e} = \frac{-1}{e}x - \frac{1}{e} \Rightarrow y = \frac{-1}{e}x - \frac{1}{e} - \frac{2}{e} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{e}x - \frac{3}{e}}$$

$$\text{Recta normal} \rightarrow y - f(-1) = \frac{-1}{f'(-1)}(x - (-1)) \Rightarrow y - \frac{-2}{e} = \frac{-1}{\frac{-1}{e}}(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + \frac{2}{e} = e(x+1) \Rightarrow y = ex + e - \frac{2}{e} \Rightarrow \boxed{y = ex + \frac{e^2 - 2}{e}}$$

b) Asíntotas verticales. $x = a$

La función tiene como dominio todos los números reales. No tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

Estudiamos la situación cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = (+\infty)e^{+\infty} = +\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Estudiamos la situación cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{e^{+\infty}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-e^{+\infty}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

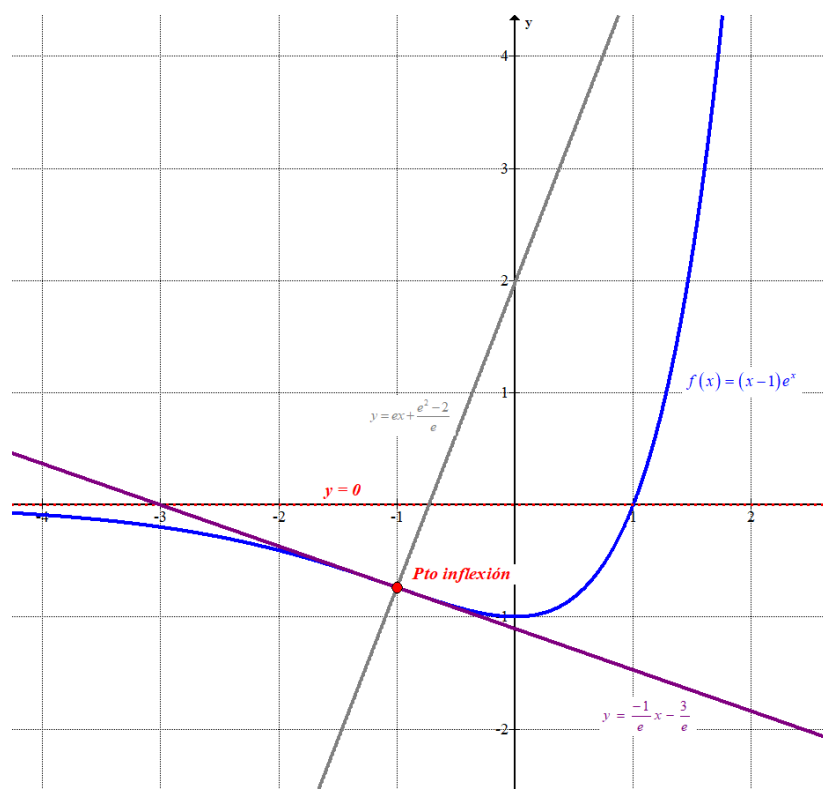
Estudiamos la situación cuando x tiende a $+\infty$. Como no tiene asíntota horizontal puede tener asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{1}{x} \right) e^x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) e^x = \left(1 - \frac{1}{+\infty} \right) e^{+\infty} = (1-0)(+\infty) = +\infty$$

La función no tiene asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$.

Estudiamos la situación cuando x tiende a $-\infty$. Como la función tiene asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.



EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)^2$.

a) [0,75 puntos] Esboza el recinto acotado y limitado por la gráfica de f y la recta $y = a$ con $a > 0$.

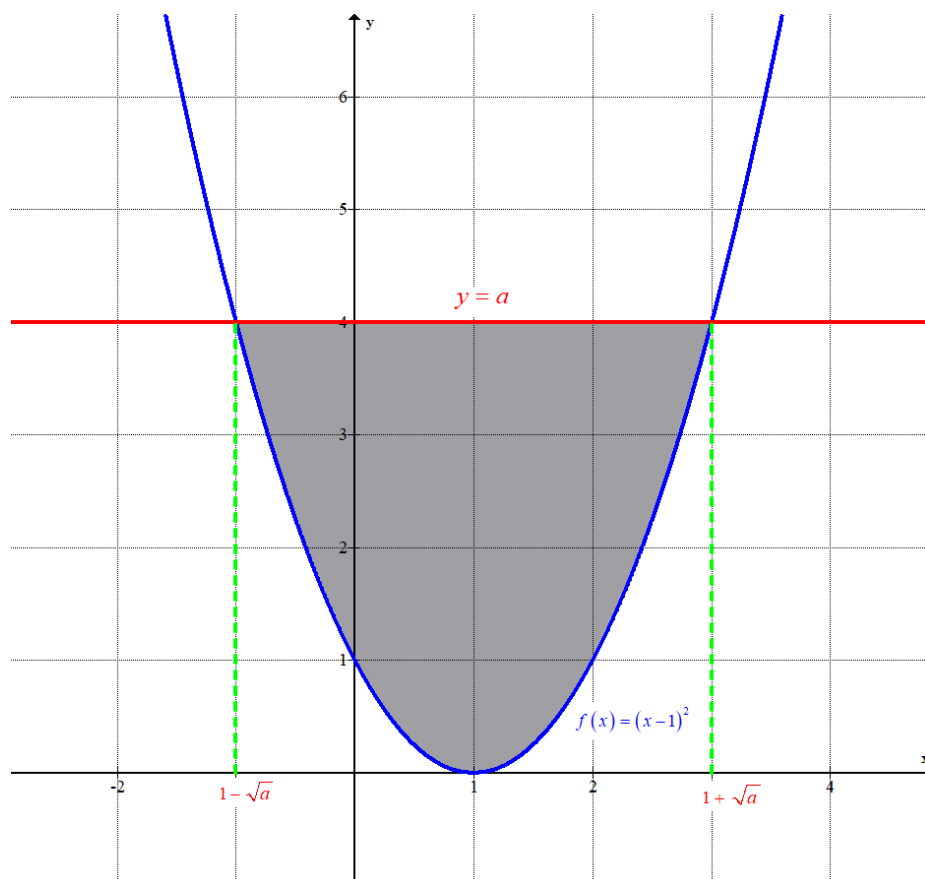
b) [1,75 puntos] Calcula $a > 0$ para que el área del recinto acotado y limitado por la gráfica de f y la recta $y = a$ sea $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

a) Hallamos los puntos de corte de la recta y la parábola.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (x-1)^2 \\ y = a \end{array} \right\} \Rightarrow (x-1)^2 = a \Rightarrow \{a > 0\} \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{a} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{a} \rightarrow \boxed{x = 1 + \sqrt{a}} \\ x-1 = -\sqrt{a} \rightarrow \boxed{x = 1 - \sqrt{a}} \end{cases}$$

Dibujamos la gráfica de la parábola y dibujamos la recta $y = 4$ para hacer una aproximación de la situación planteada.

x	$f(x) = (x-1)^2$	x	$y = 4$
-1	4	-1	4
0	1	0	4
1	0	1	4
2	1	2	4
3	4	3	4



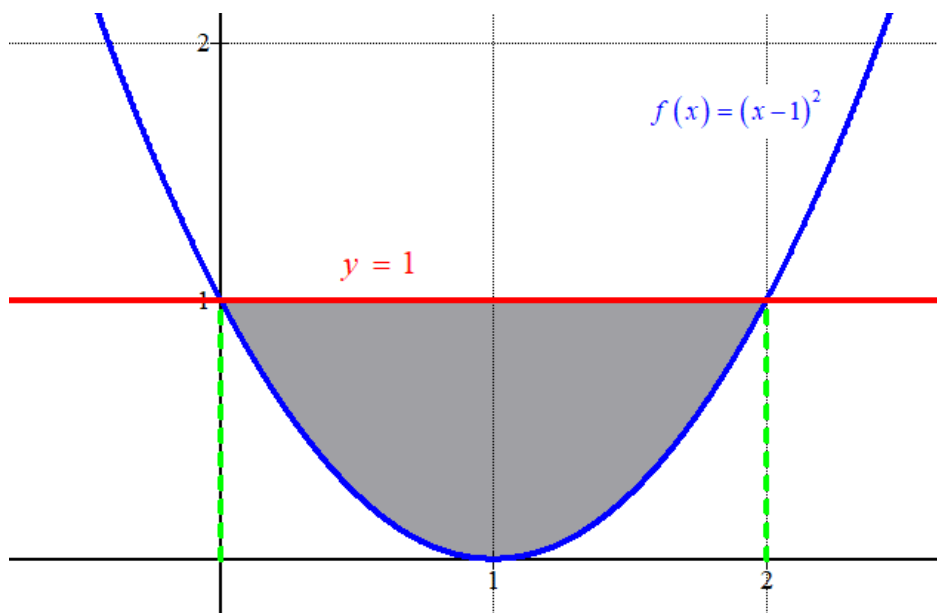
b) Hallamos la expresión del área como la integral definida de $1-\sqrt{a}$ a $1+\sqrt{a}$ de la diferencia entre la recta y la parábola.

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_{1-\sqrt{a}}^{1+\sqrt{a}} a - (x-1)^2 dx = \left[ax - \frac{(x-1)^3}{3} \right]_{1-\sqrt{a}}^{1+\sqrt{a}} = \\
 &= \left[a(1+\sqrt{a}) - \frac{(1+\sqrt{a}-1)^3}{3} \right] - \left[a(1-\sqrt{a}) - \frac{(1-\sqrt{a}-1)^3}{3} \right] = \\
 &= \cancel{a} + a\sqrt{a} - \frac{\sqrt{a^3}}{3} - \cancel{a} + a\sqrt{a} - \frac{\sqrt{a^3}}{3} = 2a\sqrt{a} - \frac{2\sqrt{a^3}}{3} = \\
 &= 2\sqrt{a^3} - \frac{2\sqrt{a^3}}{3} = \left(2 - \frac{2}{3}\right)\sqrt{a^3} = \boxed{\frac{4}{3}\sqrt{a^3}}
 \end{aligned}$$

Averiguamos cuando el área vale $\frac{4}{3}$.

$$\text{Área} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4}{3}\sqrt{a^3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \sqrt{a^3} = 1 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[3]{1} = 1}$$

Para $a=1$ se cumple lo pedido.



EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(2x) & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(\pi x) - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Calcula $\int_{-\frac{\pi}{4}}^1 f(x) dx$.

La función en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, 1\right]$ tiene un cambio de definición por lo que la integral definida la dividimos en suma de dos integrales definidas.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^1 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 x \operatorname{sen}(2x) dx + \int_0^1 \cos(\pi x) - 1 dx = \dots$$

$$\int x \operatorname{sen}(2x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(2x) dx \rightarrow v = \int \operatorname{sen}(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) \end{array} \right\} =$$

$$= x \cdot \frac{-1}{2} \cos(2x) - \int \frac{-1}{2} \cos(2x) dx = \frac{-x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx =$$

$$= \frac{-x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) = \frac{-x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + C$$

$$\dots = \left[\frac{-x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^0 + \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi x) - x \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{-0}{2} \cos(2 \cdot 0) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2 \cdot 0) \right] - \left[\frac{\pi/4}{2} \cos\left(2 \cdot \frac{-\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{-\pi}{4}\right) \right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi \cdot 1) - 1 \right] - \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi \cdot 0) - 0 \right] =$$

$$= -\frac{\pi}{8} \cdot \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi) - 1 = \frac{1}{4} - 1 = \boxed{\frac{-3}{4}}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)Sean los puntos $A(3, -1, 1)$, $B(1, 3, -3)$ y $C(-2, -2, 1)$.

a) [1 punto] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) [1,5 puntos] Halla los puntos D pertenecientes al eje OZ para que el tetraedro de vértices A, B, C y D tenga un volumen de 20 unidades cúbicas.

a) El área del triángulo de vértices A, B y C es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(3, -1, 1) \\ B(1, 3, -3) \\ C(-2, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 3, -3) - (3, -1, 1) = (-2, 4, -4) \\ \overrightarrow{AC} = (-2, -2, 1) - (3, -1, 1) = (-5, -1, 0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 4 & -4 \\ -5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 20j + 2k + 20k - 4i = -4i + 20j + 22k = (-4, 20, 22)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 20^2 + 22^2}}{2} = 15 \text{ u}^2$$

El área del triángulo de vértices A, B y C tiene un valor de 15 unidades cuadradas.

b) El punto D tiene coordenadas $D(0, 0, c)$. El volumen del tetraedro ABCD se obtiene como la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$.

$$\left. \begin{array}{l} A(3, -1, 1) \\ D(0, 0, c) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (0, 0, c) - (3, -1, 1) = (-3, 1, c-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-2, 4, -4) \\ \overrightarrow{AC} = (-5, -1, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (-3, 1, c-1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -4 \\ -5 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & c-1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(c-1) + 0 + 20 + 12 + 20(c-1) - 0 = 2c - 2 + 20 + 12 + 20c - 20 = 22c + 10$$

$$\text{Volumen } ABCD = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6} = \frac{|22c + 10|}{6} = \frac{|11c + 5|}{3}$$

Averiguamos cuando el volumen vale 20 unidades cúbicas.

$$\text{Volumen } ABCD = 20 \Rightarrow \frac{|11c + 5|}{3} = 20 \Rightarrow |11c + 5| = 60 \Rightarrow \begin{cases} 11c + 5 = 60 \rightarrow c = \frac{55}{11} = 5 \\ 11c + 5 = -60 \rightarrow c = \frac{-65}{11} \end{cases}$$

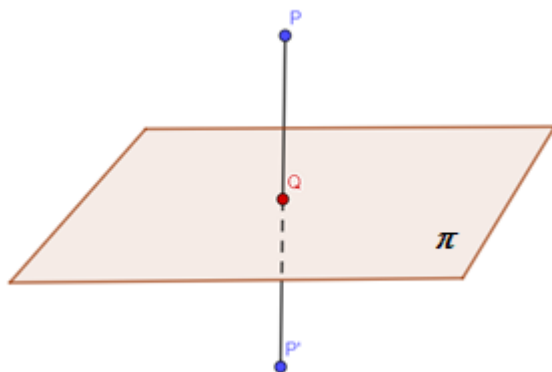
El valor buscado puede ser $c_1 = 5$ y el punto del eje Z que cumple lo pedido es $D_1(0, 0, 5)$.O bien $c_2 = \frac{-65}{11}$ y el punto del eje Z que cumple lo pedido es $D_2\left(0, 0, \frac{-65}{11}\right)$.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv 2x + y + 2z + 5 = 0$.

- a) [1,5 puntos] Calcula el punto simétrico de $P(1, 0, 1)$ respecto de π .
 b) [1 punto] Calcula los planos paralelos a π y que disten 2 unidades de π .

- a) Buscamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P, luego determinamos el punto Q de corte de recta y plano. Por último, determinamos el punto P' simétrico de P respecto de π .



Determinamos la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P. Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv 2x + y + 2z + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, 1, 2) \\ P(1, 0, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto Q de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R} \\ \pi \equiv 2x + y + 2z + 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + \lambda + 2(1 + 2\lambda) + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 4\lambda + \lambda + 2 + 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow 9 + 9\lambda = 0 \Rightarrow 9\lambda = -9 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2(-1) = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 + 2(-1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(-1, -1, -1)}$$

Obtenemos el punto P' sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (-1, -1, -1) - (1, 0, 1) = (-2, -1, -2)$$

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = (-1, -1, -1) + (-2, -1, -2) = (-3, -2, -3)$$

El punto simétrico de $P(1, 0, 1)$ respecto de π es el punto $P'(-3, -2, -3)$.

b) Un plano paralelo a $\pi \equiv 2x + y + 2z + 5 = 0$ tiene ecuación $\pi' \equiv 2x + y + 2z + D = 0$.

Como estos planos son paralelos la distancia entre ellos es el valor de la distancia entre un punto del plano π y el plano π' .

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ x = -2 \\ y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(-2) - 1 + 2z + 5 = 0 \Rightarrow -4 - 1 + 2z + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow A(-2, -1, 0) \in \pi$$

$$\left. \begin{array}{l} A(-2, -1, 0) \in \pi \\ \pi' \equiv 2x + y + 2z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi, \pi') = d(A, \pi') = \frac{|2(-2) - 1 + 2 \cdot 0 + D|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|-5 + D|}{3}$$

Averiguamos cuando esta distancia vale 2.

$$d(\pi, \pi') = 2 \Rightarrow \frac{|-5 + D|}{3} = 2 \Rightarrow |-5 + D| = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -5 + D = 6 \rightarrow D = 11 \rightarrow \boxed{\pi_1 : 2x + y + 2z + 11 = 0} \\ -5 + D = -6 \rightarrow D = -1 \rightarrow \boxed{\pi_2 : 2x + y + 2z - 1 = 0} \end{array} \right.$$

Los planos paralelos a π y que distan 2 unidades de π son $\pi_1 : 2x + y + 2z + 11 = 0$ y $\pi_2 : 2x + y + 2z - 1 = 0$.



EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+4 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha+4 & \alpha \end{pmatrix}$

a) **[1 punto]** Indica para qué valores de α la matriz A admite inversa.

b) **[1,5 puntos]** Para $\alpha = 1$ determina, si es posible, la matriz inversa de A.

a) Para que la matriz A tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha+4 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha+4 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + 0 + 0 - 0 - \alpha(\alpha+4) - \alpha(\alpha+4) = \alpha^3 - 2\alpha(\alpha+4) =$$

$$= \alpha[\alpha^2 - 2(\alpha+4)] = \alpha[\alpha^2 - 2\alpha - 8]$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \alpha[\alpha^2 - 2\alpha - 8] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bullet \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-8)}}{2} = \\ \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = 4 = \alpha \\ \frac{2-6}{2} = -2 = \alpha \end{cases} \\ \bullet \alpha = 0 \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de α distinto de $-2, 0$ y 4 .

b) Como hemos visto en el apartado anterior para $\alpha = 1$ existe la inversa de la matriz A. La

matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos la inversa de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 5 - 5 = -9 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-9} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Los rodamientos de las ruedas de un coche se configuran con unas bolas cuyos diámetros siguen una distribución normal de media 13 mm y desviación típica 0,1 mm. Para que el funcionamiento del rodamiento sea óptimo el diámetro debe estar entre 12,9 mm y 13,15 mm. No obstante, la máquina que los elabora es muy sensible a los cambios de temperatura y pierde eficacia cuando ésta sube considerablemente. El 15 de julio, tras una rotura del sistema de refrigeración, la máquina configura bolas cuyos diámetros siguen una distribución normal de media 12,9 mm y desviación típica 0,2 mm.

- a) [1,25 puntos] En circunstancias ideales, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina elabore piezas con rodamiento óptimo?
- b) [1,25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el 15 de julio la máquina elabore piezas con rodamiento óptimo?

Sea X = Diámetro de las bolas de los rodamientos de las ruedas de un coche en milímetros.

$X = N(13, 0.1)$.

Sea Y = Diámetro de las bolas de los rodamientos de las ruedas de un coche en milímetros el 15 de julio con mucho calor y la máquina funcionando mal. $Y = N(12.9, 0.2)$.

- a) En circunstancias ideales el diámetro de las bolas sigue la ley normal $X = N(13, 0.1)$. Nos piden calcular la probabilidad $P(12.9 \leq X \leq 13.15)$.

$$P(12.9 \leq X \leq 13.15) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 13}{0.1} \end{array} \right\} = P\left(\frac{12.9 - 13}{0.1} \leq Z \leq \frac{13.15 - 13}{0.1}\right) =$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1.5) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \geq 1) =$$

$$= P(Z \leq 1.5) - [1 - P(Z \leq 1)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9332 - (1 - 0.8413) = \boxed{0.7745}$$

z	0.00
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643

z	0.00
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643
1.2	0.8849
1.3	0.9032
1.4	0.9192
1.5	0.9332

En circunstancias ideales, la probabilidad de que la máquina elabore piezas con rodamiento óptimo es de 0.7745.

b) El 15 de Julio el diámetro de las bolas sigue la ley normal $Y = N(12.9, 0.2)$.. Nos piden calcular la probabilidad $P(12.9 \leq Y \leq 13.15)$.

$$P(12.9 \leq Y \leq 13.15) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 12.9}{0.2} \end{array} \right\} = P\left(\frac{12.9 - 12.9}{0.2} \leq Z \leq \frac{13.15 - 12.9}{0.2}\right) =$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.25) = P(Z \leq 1.25) - P(Z \leq 0) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8944 - 0.5 = \boxed{0.3944}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8848	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115

El 15 de Julio la probabilidad de que la máquina elabore piezas con rodamiento óptimo es de 0.3944.

PAU 2025 Ordinaria suplente 2 Matemáticas II



PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
MATEMÁTICAS II
CURSO 2024-2025

Instrucciones:

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos**
- b)** Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c)** Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en un bloque con un ejercicio obligatorio y tres bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- d)** Deberá resolver el ejercicio obligatorio y solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques con optatividad.
- e)** En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f)** Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- g)** En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- h)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- i)** Se proporcionará la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

BLOQUE OBLIGATORIO. Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 - e & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

- a) [1 punto]** Estudia la derivabilidad de f .
- b) [1,5 puntos]** Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{4x}{x^4 - 6x^2 + 10} dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = x^2 - 3$).

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sean las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = -x^2 + 1$.

- a) [1 punto]** Halla los puntos de corte (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de las gráficas de f y g . Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.
- b) [1,5 puntos]** Calcula el área del recinto acotado y limitado por las gráficas de f y g .



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- a) **[1,5 puntos]** Comprueba que $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula. Calcula A^{-1} .
- b) **[1 punto]** Calcula A^{2025} .

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = 1$, calcula razonadamente:

a) **[1,5 puntos]** $\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ a & b & c \\ 2a+u & 2b+v & 2c+w \end{vmatrix}$

b) **[1 punto]** $\begin{vmatrix} z & c & w \\ x & a & u \\ y & b & v \end{vmatrix}$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x + y + z + 1 = 0$ y los puntos $A(1, 2, 0)$ y $B(3, 1, 0)$.

- a) **[1,5 puntos]** Calcula el punto simétrico del punto A con respecto al plano π .
- b) **[1 punto]** Halla el plano que contiene a los puntos A y B y es perpendicular al plano π .

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Se hace un estudio sobre el café que se consume en la cafetería de una estación. Según el tipo de taza tenemos tres opciones: expreso, medio y americano; con porcentajes, respectivamente, de 29 %, 51% y 20 %. Por otra parte, también sabemos que el café puede ser de la variedad que tiene cafeína o ser descafeinado. En concreto, las tazas de café con cafeína presentan, para cada uno de los tipos de taza establecidos antes, los porcentajes 18 %, 31% y 11 %, respectivamente.

- a) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona adquiriera un café expreso descafeinado?
- b) **[1,75 puntos]** Si sabemos que el café es descafeinado, ¿cuál es la probabilidad de que sea un expreso?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 - e & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

a) **[1 punto]** Estudia la derivabilidad de f .

b) **[1,5 puntos]** Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

a) En el intervalo $[0, 1)$ la función tiene la expresión $f(x) = 1 - e^x$ que es una función continua y derivable, siendo su derivada $f'(x) = -e^x$.

En el intervalo $(1, 2]$ la función tiene la expresión $f(x) = 2x - 1 - e$ que es una función continua y derivable, siendo su derivada $f'(x) = 2$.

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot 1 - 1 - e = 1 - e \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 1 - e = 1 - e \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - e^x = 1 - e^1 = 1 - e \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1 - e$$

La función es continua en $x = 1$. La función es continua en $[0, 2)$.

La derivada de la función en $[0, 1) \cup (1, 2]$ tiene la expresión $f'(x) = \begin{cases} -e^x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$.

Estudiamos la derivabilidad de la función en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -e^x = -e^1 = -e \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(1^-) = -e \neq 2 = f'(1^+)$$

No coinciden las derivadas laterales en $x = 1$. La función no es derivable en $x = 1$.

La función es continua en $[0, 2)$ y derivable en $[0, 1) \cup (1, 2]$.

b) La derivada de la función tiene la expresión $f'(x) = \begin{cases} -e^x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$.

En el intervalo $[0, 1)$ la derivada tiene la expresión $f'(x) = -e^x$ y siempre es negativa. La función decrece en $[0, 1)$.

En el intervalo $(1, 2]$ la derivada tiene la expresión $f'(x) = 2$ y siempre es positiva. La función crece en $(1, 2]$.

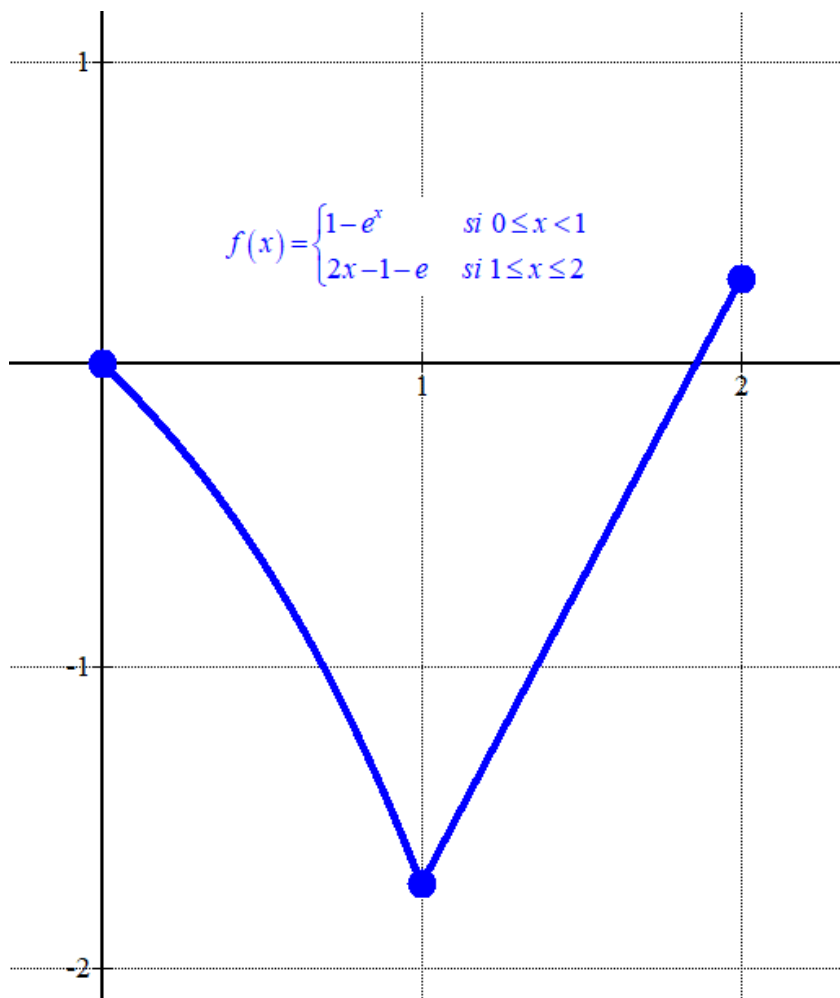
Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición y en el cambio de definición $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 1 - e^0 = 0 \\ f(1) &= 2 \cdot 1 - 1 - e = 1 - e \approx -1.71 \text{ Mínimo} \\ f(2) &= 2 \cdot 2 - 1 - e = 3 - e \approx 0.28 \text{ Máximo} \end{aligned} \right\}$$

La función decrece en $[0,1)$ desde 0 a -1.71 . Luego crece en $(1,2]$ desde -1.71 a 0.28 .

El máximo absoluto de la función es $3 - e$ y se alcanza en $x = 2$.

El mínimo absoluto de la función es $1 - e$ y se alcanza en $x = 1$.



EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{4x}{x^4 - 6x^2 + 10} dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = x^2 - 3$).

Hallamos primero la integral indefinida usando el cambio de variable sugerido.

$$\int \frac{4x}{x^4 - 6x^2 + 10} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 - 3 \rightarrow t^2 = (x^2 - 3)^2 = x^4 + 9 - 6x^2 = x^4 - 6x^2 + 10 - 1 \\ x^4 - 6x^2 + 10 = t^2 + 1 \\ dt = 2x dx \rightarrow \frac{dt}{2x} = dx \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{4x}{t^2 + 1} \cdot \frac{dt}{2x} = 2 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = 2 \arctg(t) = 2 \arctg(x^2 - 3) + C$$

Utilizo este resultado para obtener la integral definida pedida.

$$\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{4x}{x^4 - 6x^2 + 10} dx = \left[2 \arctg(x^2 - 3) \right]_{\sqrt{3}}^2 = 2 \arctg(2^2 - 3) - 2 \arctg\left(\left(\sqrt{3}\right)^2 - 3\right) =$$

$$= 2 \arctg(1) - 2 \arctg(0) = 2 \frac{\pi}{4} - 2 \cdot 0 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sean las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = -x^2 + 1$.

- a) [1 punto] Halla los puntos de corte (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de las gráficas de f y g . Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.
 b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto acotado y limitado por las gráficas de f y g .

a) Hallamos los puntos de corte de las dos gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - x \\ g(x) = -x^2 + 1 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - x = -x^2 + 1 \Rightarrow x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x^2 + 2x + 1)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2$$

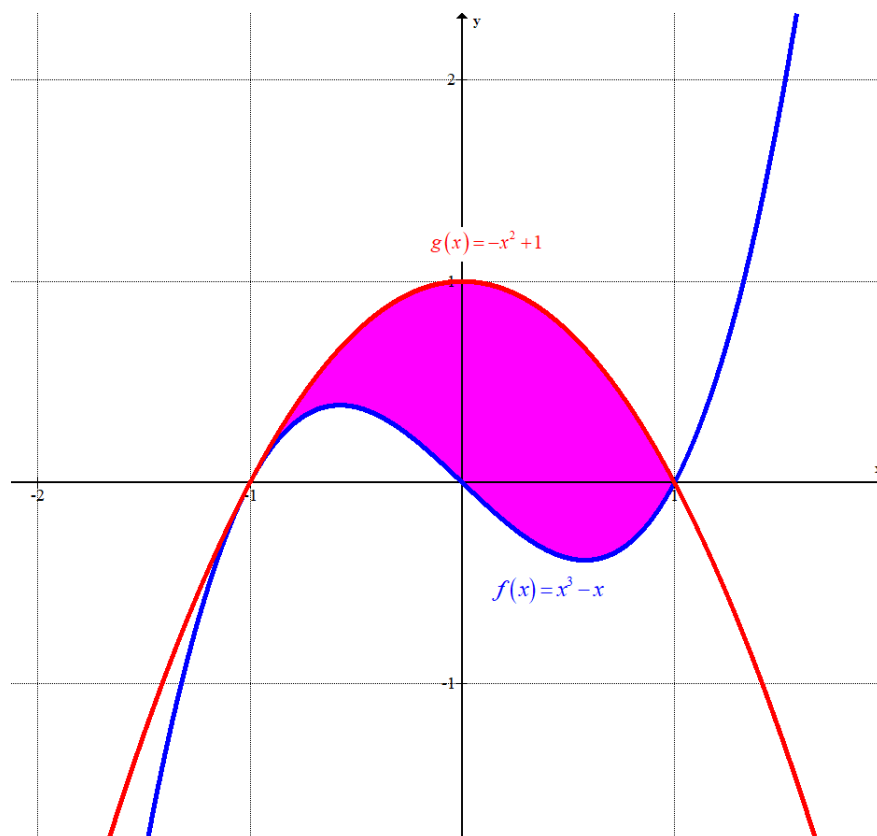
Los dos puntos de corte de las gráficas están en $x = -1$ y $x = 1$.

Tenemos que $f(-1) = (-1)^3 - (-1) = 0$ y $f(1) = 1^3 - 1 = 0$. Los puntos de corte tienen coordenadas $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

Hacemos una pequeña tabla de valores y dibujamos las gráficas en el intervalo $(-1, 1)$.

x	$f(x) = x^3 - x$
-2	10
-1	0
0	0
1	0
2	6

x	$g(x) = -x^2 + 1$
-2	-3
-1	0
0	1
1	0
2	-3



b) El área del recinto es el valor de la integral definida entre -1 y 1 de $g(x) - f(x)$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 g(x) - f(x) dx &= \int_{-1}^1 -x^2 + 1 - (x^3 - x) dx = \int_{-1}^1 -x^3 - x^2 + x + 1 dx = \\&= \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 = \left[-\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1 \right] - \left[-\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + (-1) \right] = \\&= -\cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} + 1 + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} + 1 = 2 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3} \simeq 1.3333 u^2}\end{aligned}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) **[1,5 puntos]** Comprueba que $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula. Calcula A^{-1} .

b) **[1 punto]** Calcula A^{2025} .

a) Comprobamos la igualdad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3-4 & 0-12+12 & 0-15+16 \\ 0-4+5 & 3+16-15 & 4+20-20 \\ 0+3-4 & -3-12+12 & -4-15+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0-1 & -3+0+3 & -4+0+4 \\ 0+4-4 & 3-16+12 & 4-20+16 \\ 0-3+3 & -3+12-9 & -4+15-12 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

Queda demostrado que se cumple la igualdad $A^3 + I = O$.

b) Hemos visto en el apartado anterior que $A^3 + I = O$, lo que implica que $A^3 = -I$. Esto nos lleva a decir que $A^6 = A^3 A^3 = (-I)(-I) = I$. Calculamos A^{2025} .

$$\left. \begin{array}{r} 2025 \quad \boxed{6} \\ -18 \quad 337 \\ \hline 225 \\ -18 \\ \hline 45 \\ -42 \\ \hline \boxed{3} \end{array} \right\} \Rightarrow A^{2025} = A^{6 \cdot 337 + 3} = (A^6)^{337} \cdot A^3 = (I)^{337} \cdot A^3 = A^3 = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hemos visto que } A^{2025} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = 1$, calcula razonadamente:

a) [1,5 puntos] $\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ a & b & c \\ 2a+u & 2b+v & 2c+w \end{vmatrix}$

b) [1 punto] $\begin{vmatrix} z & c & w \\ x & a & u \\ y & b & v \end{vmatrix}$

a) Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ a & b & c \\ 2a+u & 2b+v & 2c+w \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{A la fila 1ª le restamos la fila 2ª} \\ \text{Con esta operación el determinante no cambia} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 2a+u & 2b+v & 2c+w \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{A la fila 3ª le restamos la fila 2ª multiplicada por 2} \\ \text{Con esta operación el determinante no cambia} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Si intercambiamos de posición dos filas} \\ \text{el determinante cambia de signo} \\ \text{Fila 2ª} \leftrightarrow \text{Fila 1ª} \end{array} \right\} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \boxed{-1}$$

b) Calculamos el segundo determinante.

$$\begin{vmatrix} z & c & w \\ x & a & u \\ y & b & v \end{vmatrix} = \left\{ |A^T| = |A| \right\} = \begin{vmatrix} z & x & y \\ c & a & b \\ w & u & v \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Si intercambiamos de posición dos filas} \\ \text{el determinante cambia de signo} \\ \text{Fila 1} \leftrightarrow \text{Fila 2} \end{array} \right\} =$$

$$= - \begin{vmatrix} c & a & b \\ z & x & y \\ w & u & v \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Si intercambiamos de posición dos columnas} \\ \text{el determinante cambia de signo} \\ \text{Columna 1} \leftrightarrow \text{Columna 2} \end{array} \right\} =$$

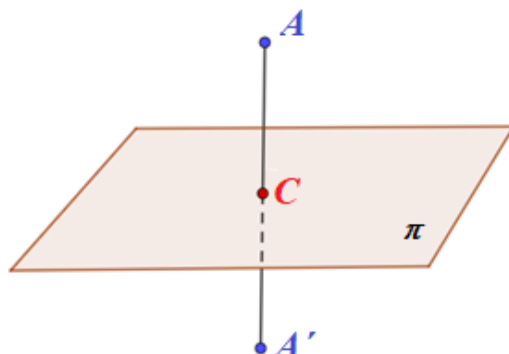
$$= + \begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ u & w & v \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Si intercambiamos de posición dos columnas} \\ \text{el determinante cambia de signo} \\ \text{Columna 2} \leftrightarrow \text{Columna 3} \end{array} \right\} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \boxed{-1}$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x + y + z + 1 = 0$ y los puntos A(1, 2, 0) y B(3, 1, 0).

- a) [1,5 puntos] Calcula el punto simétrico del punto A con respecto al plano π .
 b) [1 punto] Halla el plano que contiene a los puntos A y B y es perpendicular al plano π .

- a) Buscamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto A, luego determinamos el punto C de corte de recta y plano. Por último, determinamos el punto A' simétrico de A respecto de π .



Determinamos la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto A. Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x + y + z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 1) \\ A(1, 2, 0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto C de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ \pi \equiv x + y + z + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda + 2 + \lambda + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow 3\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{4}{3} = \frac{-1}{3} \\ y = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

Obtenemos el punto A' sumando al punto C el vector $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) - (1, 2, 0) = \left(\frac{-4}{3}, \frac{-4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$A' = C + \overrightarrow{AC} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-4}{3}\right) + \left(\frac{-4}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \left(\frac{-5}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-8}{3}\right)$$

El punto simétrico de $A(1, 2, 0)$ respecto de π es el punto $A'\left(\frac{-5}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-8}{3}\right)$.

b) El plano π' que contiene a los puntos A y B y es perpendicular al plano π , tiene como vectores directores el vector $\overrightarrow{AB}$ y el vector normal del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, 1, 0) - (1, 2, 0) = (2, -1, 0) \\ \vec{v} = \vec{n} = (1, 1, 1) \\ A(1, 2, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 1 + 2z + z - 2y + 4 = 0 \Rightarrow -x - 2y + 3z + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x + 2y - 3z - 5 = 0}$$

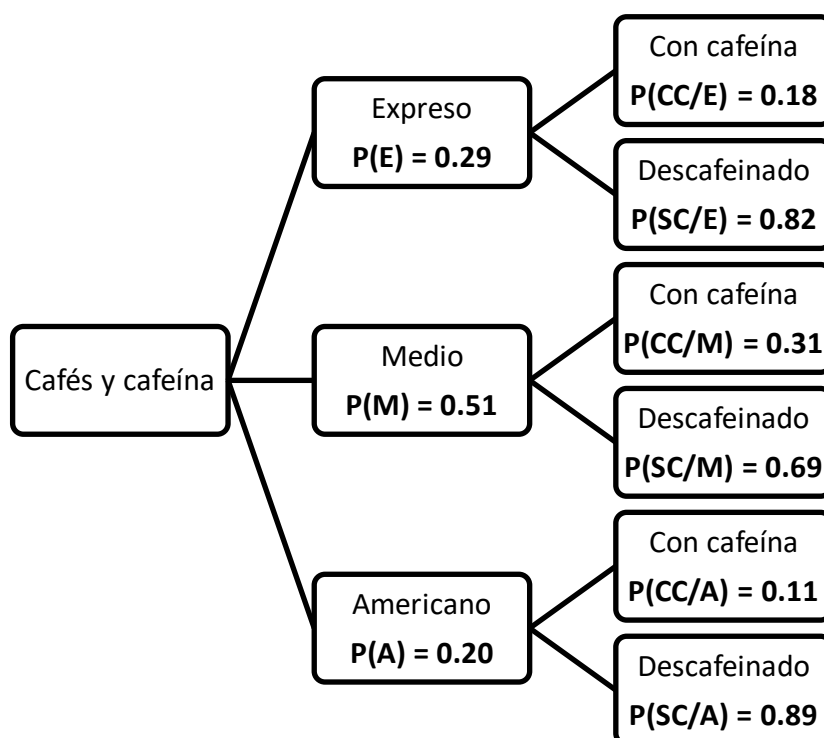
El plano π' que contiene a los puntos A y B y es perpendicular al plano π tiene ecuación $\pi': x + 2y - 3z - 5 = 0$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Se hace un estudio sobre el café que se consume en la cafetería de una estación. Según el tipo de taza tenemos tres opciones: expreso, medio y americano; con porcentajes, respectivamente, de 29 %, 51% y 20 %. Por otra parte, también sabemos que el café puede ser de la variedad que tiene cafeína o ser descafeinado. En concreto, las tazas de café con cafeína presentan, para cada uno de los tipos de taza establecidos antes, los porcentajes 18 %, 31% y 11 %, respectivamente.

- a) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona adquiriera un café expreso descafeinado?
- b) **[1,75 puntos]** Si sabemos que el café es descafeinado, ¿cuál es la probabilidad de que sea un expreso?

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Debemos calcular $P(E \cap SC)$.

$$P(E \cap SC) = P(E)P(SC/E) = 0.29 \cdot 0.82 = \boxed{0.2378}$$

- b) Debemos calcular $P(A/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(E/SC) &= \frac{P(E \cap SC)}{P(SC)} = \frac{P(E)P(SC/E)}{P(E)P(SC/E) + P(M)P(SC/M) + P(A)P(SC/A)} = \\
 &= \frac{0.2378}{0.2378 + 0.51 \cdot 0.69 + 0.2 \cdot 0.89} = \boxed{\frac{2378}{7677} \approx 0.31}
 \end{aligned}$$

PevAU 2024 Extraordinaria Matemáticas II



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.
- d) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- e) **Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque.** En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = a + b \cos(x) + c \sin(x)$$

Halla a, b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ a la recta $y = 1$ como recta tangente, y que la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

- a) **[1,5 puntos]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
- b) **[1 punto]** Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = |x^2 - 1|$.

- a) **[1 punto]** Halla los puntos de intersección de las gráficas de f y g . Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.
- b) **[1,5 puntos]** Calcula el área de dicho recinto.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Halla $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$.



BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) **[1,25 puntos]** Halla todas las matrices X que cumplen $XA = -AX^t$ y $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
- b) **[1,25 puntos]** Halla todas las matrices Y que cumplen $YA = AY$, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante -1 .

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes A, B y C. En un primer pedido una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1250 euros.

- a) **[1,25 puntos]** ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?
- b) **[1,25 puntos]** Si añadimos que el precio de un perfume de tipo C es $\frac{2}{5}$ del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

BLOQUE D. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

- a) **[1 punto]** Estudia la posición relativa de π y r .
- b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r .

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(4, 0, 0)$ y $B(0, 2, 0)$. Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = a + b \cos(x) + c \operatorname{sen}(x)$$

Halla a , b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ a la recta $y = 1$ como recta tangente, y que la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Si la recta $y = 1$ es recta tangente en $x = \frac{\pi}{2}$ significa que la función vale 1 para ese valor $\rightarrow$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y la pendiente de la recta tangente (recta horizontal $\rightarrow$ pendiente = 0) es el valor

de la derivada para $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = a + b \cos(x) + c \operatorname{sen}(x) \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{1 = a + c}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -b \operatorname{sen}(x) + c \cdot \cos(x) \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = -b \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + c \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0 = -b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

La recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ por lo que el valor de la función para $x = 0$ es $y = 0 - 1 = -1 \rightarrow f(0) = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = a + b \cos(x) + c \operatorname{sen}(x) \\ f(0) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 = a + b \cos(0) + c \operatorname{sen}(0) \Rightarrow \boxed{-1 = a + b}$$

Reunimos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a + c = 1 \\ \boxed{b = 0} \\ a + b = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + c = 1 \\ a + 0 = -1 \rightarrow \boxed{a = -1} \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + c = 1 \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

Los valores buscados son $a = -1$, $b = 0$ y $c = 2$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

- a) **[1,5 puntos]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
 b) **[1 punto]** Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

a) Buscamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f'(x) = (1)e^{-x^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2} + (-2x^2 + x)e^{-x^2} = (-2x^2 + x + 1)e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (-2x^2 + x + 1)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow -2x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)(1)}}{2(-2)} = \frac{-1 \pm 3}{-4} = \begin{cases} \frac{-1+3}{-4} = \boxed{\frac{-1}{2} = x} \\ \frac{-1-3}{-4} = \boxed{1 = x} \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos: $x = \frac{-1}{2}$ y $x = 1$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1/2)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = (-2(-1)^2 - 1 + 1)e^{-(-1)^2} = -2e^{-1} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1/2).$$

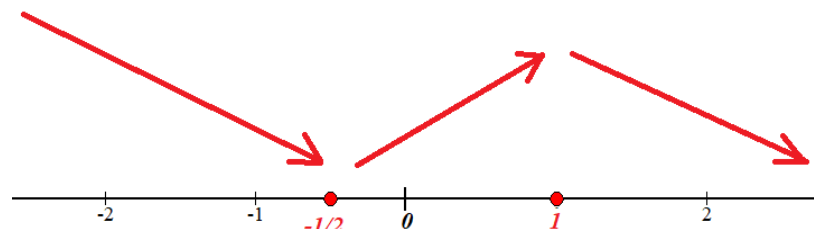
- En el intervalo $(-1/2, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = (-2(0)^2 + 0 + 1)e^{-0^2} = 1 > 0. \text{ La función crece en } (-1/2, 1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = (-2 \cdot 2^2 + 2 + 1)e^{-2^2} = -5e^{-4} < 0. \text{ La función decrece en } (1, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ y crece en $\left(\frac{-1}{2}, 1\right)$.

b) Observando el esquema anterior sabemos que la función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{-1}{2}$ y un máximo relativo en $x = 1$.

Para estos valores determinamos el valor de la función.

$$x = \frac{-1}{2} \rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\right)e^{-(0.5)^2} = -e^{-0.25} \simeq -0.7788$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)e^{-1^2} = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e} \simeq 0.1839$$

Calculamos los límites de la función cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$ para determinar si son máximos y mínimos absolutos.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{1}{2}}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{1}{2}}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

El mínimo absoluto de la función es $-e^{-0.25} \simeq -0.7788$ y se alcanza en $x = \frac{-1}{2}$.

El máximo absoluto de la función es $\frac{1}{2e} \simeq 0.1839$ y se alcanza en $x = 1$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = |x^2 - 1|$.

- a) **[1 punto]** Halla los puntos de intersección de las gráficas de f y g . Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.
 b) **[1,5 puntos]** Calcula el área de dicho recinto.

a) Hallamos los puntos de corte.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 7 \\ g(x) = |x^2 - 1| \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 7 = |x^2 - 1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x^2 + 7 = x^2 - 1 \rightarrow 8 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2} \rightarrow \begin{cases} f(-2) = -(-2)^2 + 7 = 3 \\ f(2) = -2^2 + 7 = 3 \end{cases} \\ -x^2 + 7 = -x^2 + 1 \rightarrow 7 = 1 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{array} \right.$$

Los puntos de corte de ambas gráficas son $A(-2, 3)$ y $B(2, 3)$.

La gráfica de la función f es una parábola. Hallamos su vértice.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -2x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Hallamos la expresión de la función g como una función a trozos.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

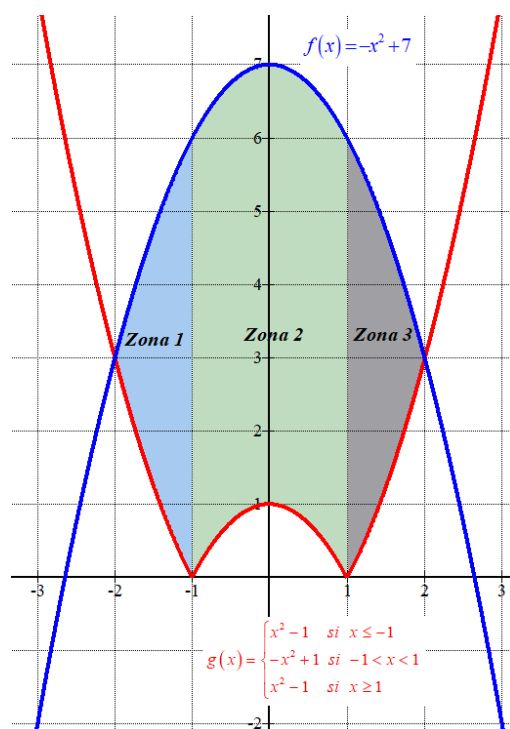
$$g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos el recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

$$f(x) = -x^2 + 7 \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

x	$y = -x^2 + 7$
-2	3
-1	6
0	7
1	6
2	3

x	$y = g(x)$
-2	3
-1	0
0	1
1	0
2	3



b) Hallamos el área pedida obteniendo por separado el área de cada zona.

Área de zona 1.

$$\int_{-2}^{-1} (-x^2 + 7 - (x^2 - 1)) dx = \int_{-2}^{-1} -2x^2 + 8 dx = \left[-2 \frac{x^3}{3} + 8x \right]_{-2}^{-1} = \left[-2 \frac{(-1)^3}{3} + 8(-1) \right] - \left[-2 \frac{(-2)^3}{3} + 8(-2) \right] = \frac{2}{3} - 8 - \frac{16}{3} + 16 = \frac{10}{3}$$

El área de la zona 1 tiene un valor de $\frac{10}{3}$ unidades cuadradas.

Área de zona 2.

$$\int_{-1}^1 (-x^2 + 7 - (-x^2 + 1)) dx = \int_{-1}^1 6 dx = [6x]_{-1}^1 = 6 - 6(-1) = 12$$

El área de la zona 2 tiene un valor de 12 unidades cuadradas.

Área de zona 3.

$$\int_1^2 (-x^2 + 7 - (x^2 - 1)) dx = \int_1^2 -2x^2 + 8 dx = \left[-2 \frac{x^3}{3} + 8x \right]_1^2 = \left[-2 \frac{2^3}{3} + 8 \cdot 2 \right] - \left[-2 \frac{1^3}{3} + 8 \cdot 1 \right] = -\frac{16}{3} + 16 + \frac{2}{3} - 8 = \frac{10}{3}$$

El área de la zona 3 tiene un valor de $\frac{10}{3}$ unidades cuadradas.

El área del recinto acotado y limitado por las gráficas de f y g es la suma de las áreas obtenidas: $\frac{10}{3} + 12 + \frac{10}{3} = \frac{56}{3} \approx 18.667$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Halla $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$.

Calculamos la integral indefinida.

$$\int e^x \cos(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \cos(x) \rightarrow du = -\operatorname{sen}(x) \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = e^x \cos(x) - \int -\operatorname{sen}(x) e^x dx =$$

$$= e^x \cos(x) + \int \operatorname{sen}(x) e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \operatorname{sen}(x) \rightarrow du = \cos(x) \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= e^x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) e^x - \int \cos(x) e^x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos(x) dx = e^x (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) - \int \cos(x) e^x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \int e^x \cos(x) dx = e^x (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) \Rightarrow \int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x}{2} (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) + K$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx = \left[\frac{e^x}{2} (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \right] - \left[\frac{e^0}{2} (\cos(0) + \operatorname{sen}(0)) \right] = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}}$$

Hemos obtenido que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) **[1,25 puntos]** Halla todas las matrices X que cumplen $XA = -AX^t$ y $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
- b) **[1,25 puntos]** Halla todas las matrices Y que cumplen $YA = AY$, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante -1 .

a) La matriz X es una matriz 2×2 . Consideramos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Debe cumplirse $XA = -AX^t$.

$$\begin{aligned} XA = -AX^t &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -a & -c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a = a \rightarrow \boxed{a=0} \\ b = c \\ -c = -b \\ d = -d \Rightarrow \boxed{d=0} \end{cases} \end{aligned}$$

La matriz X queda $X = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$. También debe cumplirse $X^2 = I$.

$$X^2 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Las matrices X que cumple lo pedido son $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Consideramos $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

La suma de los elementos de su diagonal principal es cero $\rightarrow a + d = 0 \Rightarrow d = -a$.

La matriz queda $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. Debe cumplir $YA = AY$.

$$YA = AY \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = -b \rightarrow \boxed{b=0} \\ c = -c \rightarrow \boxed{c=0} \end{cases}$$

La matriz queda $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$. Su determinante es -1 .

$$|Y| = -1 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow -a^2 = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Las matrices que cumplen lo pedido son $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $Y_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes A, B y C. En un primer pedido una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1250 euros.

- a) **[1,25 puntos]** ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?
- b) **[1,25 puntos]** Si añadimos que el precio de un perfume de tipo C es $\frac{2}{5}$ del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

- a) Llamamos “x” al precio de una unidad de perfume A, “y” al precio de una de B y “z” al precio de una de C.

“Una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2200 euros” $\rightarrow 20x + 30y + 15z = 2200$.

“En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1250 euros” $\rightarrow 15x + 10y + 10z = 1250$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y obtenemos sus soluciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 30y + 15z = 2200 \\ 15x + 10y + 10z = 1250 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 6y + 3z = 440 \\ 3x + 2y + 2z = 250 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \times 3 \rightarrow 12x + 18y + 9z = 1320 \\ \times (-4) \rightarrow -12x - 8y - 8z = -1000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$10y + z = 320 \Rightarrow \boxed{z = 320 - 10y} \Rightarrow 3x + 2y + 2(320 - 10y) = 250 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 2y + 640 - 20y = 250 \Rightarrow 3x - 18y = -390 \Rightarrow x - 6y = -130 \Rightarrow \boxed{x = 6y - 130}$$

Veamos cuanto se pagaría por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C.

$$\left. \begin{array}{l} x = 6y - 130 \\ z = 320 - 10y \end{array} \right\} \Rightarrow 25x + 10y + 16z = 25(6y - 130) + 10y + 16(320 - 10y) =$$

$$= \cancel{150y} - 3250 + \cancel{10y} + 5120 - \cancel{160y} = \boxed{1870}$$

Tendremos que pagar 1870 euros por el tercer pedido.

- b) Añadimos al sistema la ecuación que nos proporciona el dato: “el precio de un perfume de tipo C es $\frac{2}{5}$ del precio de una unidad de tipo A” $\rightarrow z = \frac{2}{5}x$.

Dado que hemos resuelto el sistema con las dos ecuaciones añadimos esta tercera ecuación a las soluciones obtenidas y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x = 6y - 130 \\ z = 320 - 10y \\ z = \frac{2}{5}x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6y - 130 \\ \frac{2}{5}x = 320 - 10y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6y - 130 \\ 2x = 1600 - 50y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6y - 130 \\ x = 800 - 25y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y - 130 = 800 - 25y \Rightarrow 31y = 930 \Rightarrow \boxed{y = \frac{930}{31} = 30} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 6 \cdot 30 - 130 = 50} \\ \boxed{z = 320 - 10 \cdot 30 = 20} \end{cases}$$

Una unidad del perfume A cuesta 50 €, una de B cuesta 30 € y una de C cuesta 20 €.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

- a) **[1 punto]** Estudia la posición relativa de π y r .
 b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r .

- a) Hallamos un vector normal del plano y un vector director de la recta.

$$\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -2, 1)$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 0) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases}$$

Comprobamos si los vectores $\vec{n}$ y $\vec{v}_r$ son perpendiculares.

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = (1, -2, 1) \cdot (2, 1, 0) = 2 - 2 + 0 = 0$$

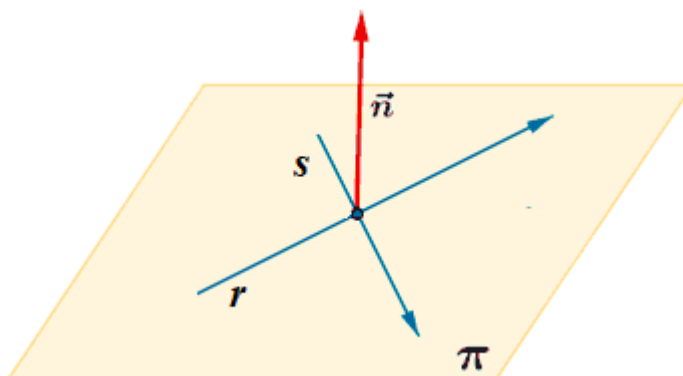
Como el producto escalar es nulo los vectores son perpendiculares, por lo que plano y recta son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Comprobamos si el punto $P_r(1, 0, 1)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left. \begin{aligned} \pi &\equiv x - 2y + z - 2 = 0 \\ \text{¿} P_r(1, 0, 1) &\in \pi? \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{¿} 1 - 2 \cdot 0 + 1 - 2 = 0?$$

La igualdad es cierta y la recta está contenida en el plano.

- b) La recta s contenida en π que es perpendicular a r es perpendicular también al vector normal del plano. Por lo que nos sirve como vector director de dicha recta el producto vectorial de $\vec{n}$ y $\vec{v}_r$.



Hallamos la expresión del vector director de la recta s .

$$\vec{u}_s = \vec{n} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2j + k + 4k - i = -i + 2j + 5k = (-1, 2, 5)$$

Hallamos la ecuación de la recta s que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y tiene vector director $\vec{u}_s = (-1, 2, 5)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (-1, 2, 5) \\ P(2, -1, -2) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 5\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

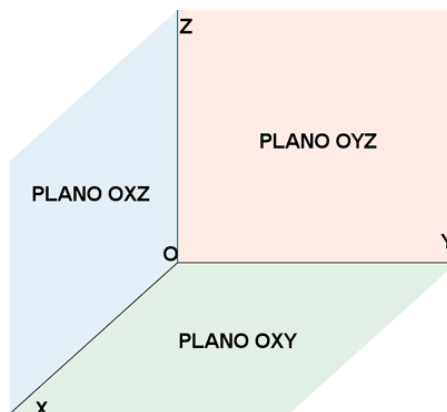
La ecuación de la recta s contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular

$$\text{a } r \text{ es } s: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 5\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

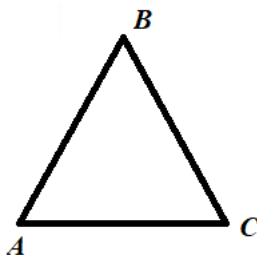
EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(4,0,0)$ y $B(0,2,0)$. Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B.

El plano OXZ tiene ecuación $y = 0$.



Un punto C del plano OXZ tiene coordenadas $C(a,0,c)$.



El triángulo ABC debe ser equilátero y para ello las distancias entre sus vértices debe ser la misma. Obtenemos la distancia del punto A al punto B.

$$\left. \begin{array}{l} A(4,0,0) \\ B(0,2,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (0,2,0) - (4,0,0) = (-4,2,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20}$$

Obtenemos la expresión de la distancia del punto A al punto C y la del punto B al punto C.

$$\left. \begin{array}{l} A(4,0,0) \\ C(a,0,c) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (a,0,c) - (4,0,0) = (a-4,0,c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(A,C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(a-4)^2 + 0^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + 16 - 8a + c^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} B(0,2,0) \\ C(a,0,c) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (a,0,c) - (0,2,0) = (a,2,c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(B,C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{a^2 + 2^2 + c^2} = \sqrt{4 + a^2 + c^2}$$

Igualemos estas distancias a $\sqrt{20}$ y resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{aligned} d(B, C) = \sqrt{20} &\Rightarrow \sqrt{4 + a^2 + c^2} = \sqrt{20} \Rightarrow 4 + a^2 + c^2 = 20 \\ d(A, C) = \sqrt{20} &\Rightarrow \sqrt{a^2 + 16 - 8a + c^2} = \sqrt{20} \Rightarrow a^2 + 16 - 8a + c^2 = 20 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} a^2 + c^2 &= 16 \\ a^2 + c^2 - 8a &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 16 - 8a = 4 \Rightarrow -8a = -12 \Rightarrow \boxed{a = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 + c^2 = 16 \Rightarrow \frac{9}{4} + c^2 = 16 \Rightarrow 9 + 4c^2 = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4c^2 = 55 \Rightarrow c^2 = \frac{55}{4} \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{\frac{55}{4}} = \frac{\pm\sqrt{55}}{2}}$$

Los puntos buscados son $C_1\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{-\sqrt{55}}{2}\right)$ y $C_2\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{55}}{2}\right)$.

PevAU 2024 Extraordinaria (suplente) Matemáticas II



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.**
 - c) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.**
 - d) **Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.**
 - e) **Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.**
 - f) **Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.**
 - g) **En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.**

BLOQUE A. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano.

- a) **[1 punto]** Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- b) **[1,5 puntos]** Estudia y halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(\ln(1+x) - x) + b(e^x - 1) + 1 - \cos(x)}{\sin^2(x)} = 5$$

donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano.

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^x \cos(t) \sin^2(t) dt.$$

Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\int \frac{dx}{\sqrt{4+4e^x}}$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{1+e^x}$).



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS II

BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 + a \\ x + 2y - z = 1 - a \\ x + (1 + a)y - az = 0 \end{cases}$$

- a) [1,5 puntos] Calcula a para que el sistema sea compatible indeterminado.
b) [1 punto] Resuelve el sistema, si es posible, para $a = 0$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 2.

- a) [1,5 puntos] Sabiendo que A verifica la identidad $(A + aI)^2 = bI$, halla a y b .
b) [0,75 puntos] Resuelve la ecuación $MX + M^2 = I$.

BLOQUE D. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - y = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$.

- a) [1,25 puntos] Calcula, si es posible, el plano perpendicular a π que contiene a r .
b) [1,25 puntos] Calcula, si es posible, la recta perpendicular a r , contenida en π y que pasa por el origen.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $O(0,0,0)$, $A(a,-1,2)$ y $B(a,1,0)$.

- a) [1,5 puntos] Determina a para que el triángulo OAB tenga área 3 unidades cuadradas.
b) [1 punto] Calcula a para que O , A y B sean coplanarios con el punto $C(1,1,0)$.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano.

- a) **[1 punto]** Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
 b) **[1,5 puntos]** Estudia y halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

a) Hallamos los puntos críticos de la función averiguando donde se anula su derivada.

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \ln(x^2+1) - \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{x} \Rightarrow 2x^2 = x^2+1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = 1}$$

Solo nos sirve el valor positivo de la raíz. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este punto crítico: $x = 1$.

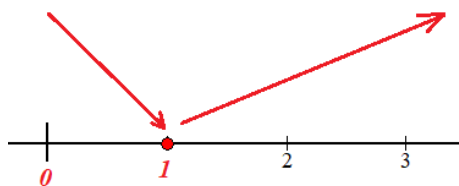
- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{2 \cdot 0.5}{0.5^2+1} - \frac{1}{0.5} = -1.2 < 0. \text{ La función decrece en } (0,1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2 \cdot 2}{2^2+1} - \frac{1}{2} = 0.3 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función decrece en $(0,1)$ y crece en $(1, +\infty)$.

b) Por lo visto en el apartado anterior la función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un mínimo relativo y absoluto en $x = 1$. Como $f(1) = \ln\left(\frac{1^2+1}{1}\right) = \ln 2$ el mínimo relativo y absoluto de la función tiene coordenada $(1, \ln 2)$.

Calculamos los límites de la función cuando x tiende a 0 y a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) = \ln(+\infty + 0) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(0 + \frac{1}{0^+}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

La función no tiene máximos relativos ni absolutos.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(\ln(1+x) - x) + b(e^x - 1) + 1 - \cos(x)}{\sin^2(x)} = 5$$

donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano.

Calculamos la expresión del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(\ln(1+x) - x) + b(e^x - 1) + 1 - \cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{a(\ln(1+0) - 0) + b(e^0 - 1) + 1 - \cos(0)}{\sin^2(0)} =$$

$$= \frac{a \cdot 0 + b \cdot 0 + 1 - 1}{0^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) + b(e^x) - (-\sin(x))}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) + b(e^x) + \sin(x)}{2\sin(x)\cos(x)} =$$

$$= \frac{a\left(\frac{1}{1+0} - 1\right) + b(e^0) + \sin(0)}{2\sin(0)\cos(0)} = \frac{a \cdot 0 + b + 0}{2 \cdot 0 \cdot 1} = \frac{b}{0} = \dots$$

Como el límite debe valer 5 el valor de b debe ser cero, pues, en caso contrario, el límite valdría ∞ .

Le damos a b el valor 0 y seguimos calculando el límite.

$$\dots = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\left(\frac{-1 \cdot 1}{(1+x)^2}\right) + b(e^x) + \cos(x)}{2\cos(x)\cos(x) + 2\sin(x)(-\sin(x))} = \{b = 0\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right) + \cos(x)}{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)} = \frac{-a\left(\frac{1}{(1+0)^2}\right) + \cos(0)}{2\cos^2(0) - 2\sin^2(0)} = \frac{-a + 1}{2 - 0} = \boxed{\frac{1-a}{2}}$$

Como queremos que este límite valga 5 igualamos el resultado obtenido a este valor.

$$\frac{1-a}{2} = 5 \Rightarrow 1-a = 10 \Rightarrow 1-10 = a \Rightarrow \boxed{a = -9}$$

Los valores buscados son $a = -9$ y $b = 0$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^x \cos(t) \operatorname{sen}^2(t) dt.$$

Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.

Obtenemos el valor de $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \int_0^{\pi/4} \cos(t) \operatorname{sen}^2(t) dt = \left[\frac{1}{3} \operatorname{sen}^3(t) \right]_0^{\pi/4} = \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3(0) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 0 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{12}} \end{aligned}$$

Obtenemos el valor de $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \cos(t) \operatorname{sen}^2(t) dt \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \operatorname{sen}^2(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}} \end{aligned}$$

Obtenemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{12} \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \boxed{y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\pi\sqrt{2}}{16}}$$

Obtenemos la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{12} \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{-1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{4}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \boxed{y = \frac{-4}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\int \frac{dx}{\sqrt{4+4e^x}}$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{1+e^x}$).

Calculamos la integral pedida.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+4e^x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4(1+e^x)}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{1+e^x}} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = \sqrt{1+e^x} \rightarrow t^2 = 1+e^x \\ t^2 - 1 = e^x \\ 2tdt = e^x dx = (t^2 - 1) dx \\ dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \frac{2t}{t^2 - 1} dt = \frac{2}{2} \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + B(t+1)}{(t+1)(t-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A(t-1) + B(t+1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t=1 \rightarrow 1 = 2B \rightarrow B = \frac{1}{2} \\ t=-1 \rightarrow 1 = -2A \rightarrow A = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{t^2 - 1} = \frac{-1/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1}$$

$$\dots = \int \frac{-1/2}{t+1} dt + \int \frac{1/2}{t-1} dt = \frac{-1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} dt = \frac{-1}{2} \ln(t+1) + \frac{1}{2} \ln(t-1) =$$

$$= \left\{ t = \sqrt{1+e^x} \right\} = \frac{-1}{2} \ln(\sqrt{1+e^x} + 1) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) - \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{1+e^x}) + K}$$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 + a \\ x + 2y - z = 1 - a \\ x + (1+a)y - az = 0 \end{cases}$$

a) **[1,5 puntos]** Calcula a para que el sistema sea compatible indeterminado.

b) **[1 punto]** Resuelve el sistema, si es posible, para $a = 0$.

a) El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+a & -a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1+a \\ 1 & 2 & -1 & 1-a \\ 1 & 1+a & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Para que el sistema sea compatible indeterminado las dos matrices deben tener el mismo rango y se menor de 3. Para ello lo primero que debe ocurrir es que el determinante de la matriz A sea nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+a & -a \end{vmatrix} = -2a^2 - 1 + 1 + a - 2 + a + a(1+a) =$$

$$= -2a^2 - 1 + 1 + a - 2 + a + a + a^2 = -a^2 + 3a - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(-2)}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{-2} = \boxed{1=a} \\ \frac{-3-1}{-2} = \boxed{2=a} \end{cases}$$

Analizamos estos dos casos por separado.

Si $a = 1$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila 2ª y 3ª son iguales. Consideramos

el menor de orden 2 que resulta de quitar la tercera fila y la tercera columna $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0. \text{ El rango de } A \text{ es } 2.$$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila 2ª y 3ª son iguales,

por lo que su rango no puede ser 3 y es 2 como el rango de la matriz A .

Rango de $A = \text{Rango de } A/B = 2 < 3 = \text{Número de incógnitas}$. El sistema es compatible indeterminado.

Si $a = 2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar

la tercera fila y la tercera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que

resulta de quitar la primera columna (columna $1^a = \text{columna } 2^a + \text{columna } 3^a$) $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 - 6 + 9 + 0 - 2 = -2 \neq 0. \text{ El rango de la matriz ampliada es 3.}$$

Rango de $A = 2 \neq 3 = \text{Rango de } A/B$. El sistema es incompatible.

El sistema es compatible indeterminado para $a = 1$.

- b) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado, pues es un valor distinto de 1 y 2 por lo que el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas.

El sistema queda $\begin{cases} y + z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 - y \\ x + 2y - z = 1 \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 - y \\ -y + 2y - 1 + y = 1 \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow \boxed{y = 1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z = 1 - 1 = 0} \\ \boxed{x = -1} \end{cases}$$

Para $a = 0$ la solución del sistema es $x = -1, y = 1$ y $z = 0$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 2.

a) [1,5 puntos] Sabiendo que A verifica la identidad $(A + aI)^2 = bI$, halla a y b .

b) [0,75 puntos] Resuelve la ecuación $MX + M^2 = I$.

a) Hallamos la expresión de la matriz $(A + aI)^2$.

$$\begin{aligned} A + aI &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 3 \\ -2 & 5+a \end{pmatrix} \\ (A + aI)^2 &= \begin{pmatrix} 1+a & 3 \\ -2 & 5+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a & 3 \\ -2 & 5+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+a)^2 - 6 & 3+3a+15+3a \\ -2-2a-10-2a & -6+(5+a)^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+a^2+2a-6 & 6a+18 \\ -4a-12 & -6+25+a^2+10a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+2a-5 & 6a+18 \\ -4a-12 & a^2+10a+19 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación matricial.

$$\begin{aligned} (A + aI)^2 &= bI \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+2a-5 & 6a+18 \\ -4a-12 & a^2+10a+19 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} a^2+2a-5=b \\ 6a+18=0 \\ -4a-12=0 \\ a^2+10a+19=b \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a^2+2a-5=b \\ a+3=0 \\ a+3=0 \rightarrow \boxed{a=-3} \\ a^2+10a+19=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3)^2+2(-3)-5=b \\ (-3)^2+10(-3)+19=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{-2=b} \\ -2=b \end{cases} \end{aligned}$$

Para $a = -3$ y $b = -2$ se cumple lo pedido.

b) Despejamos X de la ecuación: $MX + M^2 = I \Rightarrow MX = I - M^2 \Rightarrow X = M^{-1}(I - M^2)$

Comprobamos que la matriz M tiene inversa y la calculamos.

$$\begin{aligned} |M| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } M^{-1} \\ M^{-1} &= \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$\begin{aligned} I - M^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ X &= M^{-1}(I - M^2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - y = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$.

- a) **[1,25 puntos]** Calcula, si es posible, el plano perpendicular a π que contiene a r .
 b) **[1,25 puntos]** Calcula, si es posible, la recta perpendicular a r , contenida en π y que pasa por el origen.

- a) El plano π' que contiene a la recta r tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta. Como también debe ser perpendicular al plano π el otro vector director es el vector normal del plano π . Además, como contiene a la recta el plano contiene los puntos de la recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,0,2) \\ \vec{u}_r = (2,3,1) \end{cases} \quad \pi \equiv x - y = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1,0,2) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (2,3,1) \\ \vec{v} = \vec{n} = (1,-1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + y - 2(z-2) - 3(z-2) + 0 + x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2z + 4 - 3z + 6 + x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x + y - 5z + 9 = 0}$$

El plano perpendicular a π que contiene a r tiene ecuación $\pi': x + y - 5z + 9 = 0$.

- b) Como la recta s que nos piden hallar debe ser perpendicular a la recta r su vector director debe ser perpendicular a $\vec{u}_r = (2,3,1)$. También debe estar contenida en el plano π por lo que su vector director debe ser perpendicular al vector normal del plano. Un vector director de la recta s es el producto vectorial de $\vec{u}_r = (2,3,1)$ y $\vec{n} = (1,-1,0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2,3,1) \\ \vec{n} = (1,-1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_s = \vec{u}_r \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = j - 2k - 3k + i = i + j - 5k = (1,1,-5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1,1,-5) \\ O(0,0,0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -5\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

La recta perpendicular a r , contenida en π y que pasa por el origen tiene ecuación

$$s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -5\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}.$$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

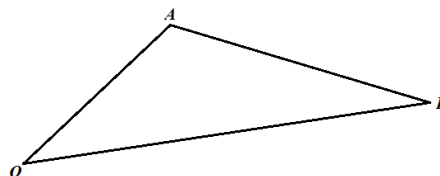
Considera los puntos $O(0,0,0)$, $A(a,-1,2)$ y $B(a,1,0)$.

a) [1,5 puntos] Determina a para que el triángulo OAB tenga área 3 unidades cuadradas.

b) [1 punto] Calcula a para que O, A y B sean coplanarios con el punto $C(1,1,0)$.

a) Hallamos la expresión del área del triángulo OAB.

$$\left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \\ A(a,-1,2) \\ B(a,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (a,-1,2) - (0,0,0) = (a,-1,2) \\ \overrightarrow{OB} = B(a,1,0) - (0,0,0) = (a,1,0) \end{array} \right.$$



$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & -1 & 2 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2aj + ak + ak - 2i = -2i + 2aj + 2ak = (-2, 2a, 2a)$$

$$\text{Área OAB} = \frac{|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (2a)^2 + (2a)^2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{4 + 4a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 8a^2}}{2} = \frac{\sqrt{4(1 + 2a^2)}}{2} = \sqrt{1 + 2a^2}$$

Iguamos este resultado a 3.

$$\sqrt{1 + 2a^2} = 3 \Rightarrow \left(\sqrt{1 + 2a^2}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow 1 + 2a^2 = 9 \Rightarrow 2a^2 = 8 \Rightarrow a^2 = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Los valores buscados son $a = \pm 2$.

b) Hallamos la ecuación del plano π definido por los puntos $O(0,0,0)$, $A(a,-1,2)$ y $B(a,1,0)$. Hemos hallado en el apartado anterior el vector normal de dicho plano como $\vec{n} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (-2, 2a, 2a)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (-2, 2a, 2a) \\ O(0,0,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: -2x + 2ay + 2az + D = 0 \\ O(0,0,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \pi: -2x + 2ay + 2az = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - ay - az = 0}$$

Para que los puntos O, A, B y C sean coplanarios el punto C debe pertenecer al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x - ay - az = 0 \\ C(1,1,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - a + 0 = 0 \Rightarrow 1 = a \Rightarrow \boxed{\pi: x - y - z = 0}$$

Para $a = 1$ los puntos O, A, B y C son coplanarios.

PevAU 2024 Extraordinaria (reserva) Matemáticas II



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.**
 - Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.**
 - Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.**
 - Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.**
 - Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.**
 - En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.**

BLOQUE A. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

De entre todos los rectángulos de área 25 cm^2 , determina las dimensiones de aquel en el que el producto de las longitudes de sus dos diagonales sea el menor posible.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f(x) = \frac{ax^3 + x - 1}{x^2 + bx - 3}$, para $x^2 + bx - 3 \neq 0$.

- [1,5 puntos]** Calcula a y b para que $y = x - 2$ sea una asíntota oblicua de la gráfica de f .
- [1 punto]** Estudia y halla las asíntotas verticales de la gráfica de f cuando $a = 0$ y $b = 2$.

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcula $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula una primitiva de la función $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)^2 \ln \frac{\sqrt{x-1}}{2}$

cuya gráfica pase por el punto $(5, -7/2)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano.
(Sugerencia: efectúa el cambio de variable $x-1 = t^2$).



BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & y & z \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Sabiendo que el determinante de A es 5, calcula $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, indicando las propiedades que utilizas.

b) [1,5 puntos] Calcula los valores $(x \ y \ z)$ tales que $B \cdot A = C$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el sistema

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) [1,75 puntos] Determina los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado.

b) [0,75 puntos] Para $m = 2$ resuelve el sistema, si es posible.

BLOQUE D. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv x = y + a = \frac{z+1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x-2y=3a \\ x+z=2 \end{cases}$.

a) [1,25 puntos] Calcula a para que las rectas se corten.

b) [1,25 puntos] Para $a = -1$, halla la recta que corta perpendicularmente a r y s .

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los vectores $\vec{u} = (1, a, 2)$ y $\vec{v} = (-2, 1, a)$.

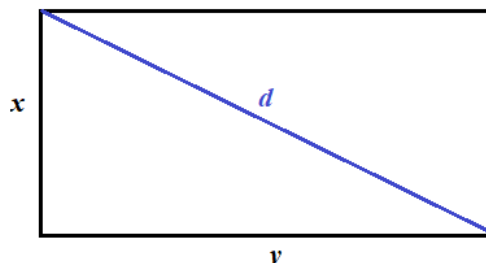
a) [1 punto] Calcula a para que ambos vectores formen un ángulo de $\pi/3$ radianes.

b) [1,5 puntos] Calcula a para que el vector $(\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{v}$ sea ortogonal a $\vec{u}$.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

De entre todos los rectángulos de área 25 cm^2 , determina las dimensiones de aquel en el que el producto de las longitudes de sus dos diagonales sea el menor posible.



El área del rectángulo es el producto de la longitud de la base por la altura y sabemos que debe valer 25 cm^2 .

$$\text{Área} = xy = 25 \Rightarrow y = \frac{25}{x}$$

Las dos diagonales del rectángulo miden lo mismo, por lo que el producto de las mismas vale d^2 .

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos x e y del dibujo.

$$x^2 + y^2 = d^2$$

Sustituimos y por $\frac{25}{x}$.

$$d^2 = x^2 + \left(\frac{25}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{625}{x^2}$$

Debemos minimizar la función $f(x) = x^2 + \frac{625}{x^2}$.

Buscamos sus puntos críticos averiguando cuando se anula la derivada.

$$f(x) = x^2 + \frac{625}{x^2} = x^2 + 625x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 2x + 625x^{-3}(-2) = 2x - \frac{1250}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{1250}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{1250}{x^3} \Rightarrow 2x^4 = 1250 \Rightarrow x^4 = 625 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[4]{625} = 5}$$

Solo nos interesa el valor positivo de la raíz. Estudiamos el signo de la segunda derivada para $x = 5$.

$$f'(x) = 2x - 1250x^{-3} \Rightarrow f''(x) = 2 - 1250(-3)x^{-4} = 2 + \frac{3750}{x^4} \Rightarrow f''(5) = 2 + \frac{3750}{5^4} = 8 > 0$$

Al ser la segunda derivada positiva la función tiene un mínimo para $x = 5$. Para este valor tenemos que $y = \frac{25}{5} = 5$.

Para que el producto de las longitudes de sus dos diagonales sea el menor posible debe ser un cuadrado de lado 5 cm .

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f(x) = \frac{ax^3 + x - 1}{x^2 + bx - 3}$, para $x^2 + bx - 3 \neq 0$.

a) [1,5 puntos] Calcula a y b para que $y = x - 2$ sea una asíntota oblicua de la gráfica de f .

b) [1 punto] Estudia y halla las asíntotas verticales de la gráfica de f cuando $a = 0$ y $b = 2$.

a) Si $y = x - 2$ es una asíntota oblicua de la función se debe cumplir que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ y que $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = -2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^3 + x - 1}{x^2 + bx - 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + x - 1}{x^3 + bx^2 - 3x} = a \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + x - 1}{x^2 + bx - 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + x - 1 - x^3 - bx^2 + 3x}{x^2 + bx - 3} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-bx^2 + 4x - 1}{x^2 + bx - 3} \right) = -b \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) &= -b \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -b = -2 \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = 2$.

b) Cuando $a = 0$ y $b = 2$ la función queda $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x-3}$. Esta función es racional y su dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = \boxed{1=x} \\ \frac{-2-4}{2} = \boxed{-3=x} \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$.

¿ $x = -3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-1}{x^2+2x-3} = \frac{-3-1}{(-3)^2+2(-3)-3} = \frac{-4}{0} = \infty$$

$x = -3$ es asíntota vertical.

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1-1}{1^2 + 2(1) - 3} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

$x=1$ **no** es asíntota vertical.

La función tiene una asíntota vertical: $x = -3$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Calcula $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

En el intervalo $(-\pi, \pi)$ la función cambia de definición por lo que la integral definida pedida la expresamos como la integral definida entre $-\pi$ y 0 más la integral definida entre 0 y π .

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 1 - e^x dx + \int_0^{\pi} x \cos(x) dx = \left[x - e^x \right]_{-\pi}^0 + \dots$$

$$\int x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos(x) dx \rightarrow v = \int \cos(x) dx = \sin(x) \end{array} \right\} = x \sin(x) - \int \sin(x) dx =$$

$$= x \sin(x) - (-\cos(x)) = x \sin(x) + \cos(x) + K$$

$$\dots = \left[x - e^x \right]_{-\pi}^0 + \left[x \sin(x) + \cos(x) \right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[0 - e^0 \right] - \left[-\pi - e^{-\pi} \right] + \left[\pi \sin(\pi) + \cos(\pi) \right] - \left[0 \cdot \sin(0) + \cos(0) \right] =$$

$$= -1 + \pi + \frac{1}{e^{\pi}} - 1 - 1 = \boxed{\pi + \frac{1}{e^{\pi}} - 3}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula una primitiva de la función $f : (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)^2 \ln \frac{\sqrt{x-1}}{2}$ cuya gráfica pase por el punto $(5, -7/2)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $x-1=t^2$).

Calculamos la integral de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (x-1)^2 \ln \frac{\sqrt{x-1}}{2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x-1=t^2 \rightarrow dx=2tdt \end{array} \right\} =$$

$$= \int (t^2)^2 \ln \frac{\sqrt{t^2}}{2} 2tdt = \int t^4 \ln \frac{t}{2} 2tdt = 2 \int t^5 \ln \frac{t}{2} dt = \dots$$

$$\int t^5 \ln \frac{t}{2} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln \frac{t}{2} \rightarrow du = \frac{1/2}{t/2} dt = \frac{1}{t} dt \\ dv = t^5 dt \rightarrow v = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} \end{array} \right\} = \frac{t^6}{6} \ln \frac{t}{2} - \int \frac{t^6}{6} \frac{1}{t} dt = \frac{t^6}{6} \ln \frac{t}{2} - \frac{1}{6} \int t^5 dt =$$

$$= \frac{t^6}{6} \ln \frac{t}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{t^6}{6} = \frac{t^6}{6} \ln \frac{t}{2} - \frac{t^6}{36}$$

$$\dots = 2 \left(\frac{t^6}{6} \ln \frac{t}{2} - \frac{t^6}{36} \right) = \frac{t^6}{3} \ln \frac{t}{2} - \frac{t^6}{18} = \frac{t^6}{3} \left(\ln \frac{t}{2} - \frac{1}{6} \right) = \left\{ \begin{array}{l} x-1=t^2 \rightarrow \sqrt{x-1}=t \\ t^6=(t^2)^3=(x-1)^3 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{(x-1)^3}{3} \left(\ln \frac{\sqrt{x-1}}{2} - \frac{1}{6} \right) + K$$

Como debe pasar por el punto $(5, -7/2)$ debe cumplirse que $F(5) = -7/2$.

$$F(x) = \frac{(x-1)^3}{3} \left(\ln \frac{\sqrt{x-1}}{2} - \frac{1}{6} \right) + K \quad \left\{ \begin{array}{l} F(5) = -7/2 \\ \Rightarrow \frac{-7}{2} = \frac{(5-1)^3}{3} \left(\ln \frac{\sqrt{5-1}}{2} - \frac{1}{6} \right) + K \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{-7}{2} = \frac{4^3}{3} \left(\ln 1 - \frac{1}{6} \right) + K \Rightarrow \frac{-7}{2} = -\frac{64}{18} + K \Rightarrow \frac{-7}{2} = \frac{-64}{18} + K \Rightarrow \boxed{K = \frac{-7}{2} + \frac{64}{18} = \frac{1}{18}}$$

La primitiva buscada tiene la expresión $F(x) = \frac{(x-1)^3}{3} \left(\ln \frac{\sqrt{x-1}}{2} - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{18}$.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (1 \ y \ z)$ y $C = (3 \ 0 \ 0)$.

a) [1 punto] Sabiendo que el determinante de A es 5, calcula $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, indicando las propiedades que utilizas.

b) [1,5 puntos] Calcula los valores $(x \ y \ z)$ tales que $B \cdot A = C$.

a) Sabemos que $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$. Calculamos el determinante pedido.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{La primera fila tiene una diferencia de elementos} \\ \text{el determinante es diferencia de dos determinantes} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{El segundo determinante tiene dos filas iguales} \\ \text{por lo que su determinante vale cero} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Resto a la 3ª fila la 2ª} \\ \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ \hline 3 & 0 & 2 \end{array} \\ \text{el determinante no cambia de valor} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambio las filas 2ª y 3ª} \\ \text{el determinante cambia de signo} \end{array} \right\} = - \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -|A| = -5$$

b) Resolvemos la ecuación matricial $B \cdot A = C$.

$$B \cdot A = C \Rightarrow (1 \ y \ z) \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (3 \ 0 \ 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+3y+z \quad y+0+z \quad z+2y+z) = (3 \quad 0 \quad 0) \Rightarrow \begin{cases} x+3y+z=3 \\ y+z=0 \\ 2y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3y+z=3 \\ y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y+z=3 \\ y+z=0 \rightarrow \boxed{z=-y} \end{cases} \Rightarrow x+3y-y=3 \Rightarrow x+2y=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=3-2y} \Rightarrow \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema tiene infinitas soluciones: $\begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} .$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el sistema

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) **[1,75 puntos]** Determina los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado.b) **[0,75 puntos]** Para $m=2$ resuelve el sistema, si es posible.

a) Obtenemos la expresión del sistema que se nos plantea.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 2y - 3z = mx \\ 2x - 2z = my \\ 3x - 2y - z = mz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 2y - 3z - mx = 0 \\ 2x - 2z - my = 0 \\ 3x - 2y - z - mz = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (5-m)x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - my - 2z = 0 \\ 3x - 2y + (-m-1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-m & -2 & -3 \\ 2 & -m & -2 \\ 3 & -2 & -m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema que se nos plantea es un sistema homogéneo que siempre es compatible. Será indeterminado cuando el rango de la matriz de coeficientes sea menor de 3, es decir, cuando su determinante sea nulo.

$$\begin{vmatrix} 5-m & -2 & -3 \\ 2 & -m & -2 \\ 3 & -2 & -m-1 \end{vmatrix} = \{ \text{Columna } 3^a + \text{Columna } 1^a \} = \begin{vmatrix} 5-m & -2 & 2-m \\ 2 & -m & 0 \\ 3 & -2 & 2-m \end{vmatrix} =$$

$$= \{ \text{Fila } 1^a - \text{Fila } 3^a \} = \begin{vmatrix} 2-m & 0 & 0 \\ 2 & -m & 0 \\ 3 & -2 & 2-m \end{vmatrix} = (2-m)(-m)(2-m) = -m(2-m)^2$$

Averiguamos cuando se anula el determinante.

$$\begin{vmatrix} 5-m & -2 & -3 \\ 2 & -m & -2 \\ 3 & -2 & -m-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -m(2-m)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ 2-m=0 \rightarrow m=2 \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado cuando $m=0$ o $m=2$.

b) Hemos visto en el apartado anterior que para $m=2$ el sistema es compatible indeterminado. Obtenemos la expresión de sus soluciones.

$$\begin{cases} (5-m)x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - my - 2z = 0 \\ 3x - 2y + (-m-1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ \text{Ecuación } 1^a = \text{Ecuación } 3^a \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3z = 2y \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - (3x - 3z) - 2z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 3x + 3z - 2z = 0 \Rightarrow -x + z = 0 \Rightarrow \boxed{x = z} \Rightarrow 2y = 3z - 3z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$, siendo λ cualquier número real.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv x = y + a = \frac{z+1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x-2y=3a \\ x+z=2 \end{cases}$.

a) [1,25 puntos] Calcula a para que las rectas se corten.

b) [1,25 puntos] Para $a = -1$, halla la recta que corta perpendicularmente a r y s .

a) Obtenemos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y+a}{1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 2) \\ P_r(0, -a, -1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-2y=3a \\ x+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y+3a \\ x+z=2 \end{cases} \Rightarrow 2y+3a+z=2 \Rightarrow \boxed{z=2-3a-2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=3a+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=2-3a-2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (2, 1, -2) \\ Q_s(3a, 0, 2-3a) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o se cruzan.

Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]$.

$$\left. \begin{matrix} P_r(0, -a, -1) \\ Q_s(3a, 0, 2-3a) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (3a, 0, 2-3a) - (0, -a, -1) = (3a, a, 3-3a)$$

$$\left. \begin{matrix} \vec{u}_r = (1, 1, 2) \\ \vec{v}_s = (2, 1, -2) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (3a, a, 3-3a) \end{matrix} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3a & a & 3-3a \end{vmatrix} =$$

$$= 3 - 3a - 6a + 4a - \cancel{6a} - 6 + \cancel{6a} + 2a = -3 - 3a$$

Para que las rectas se corten el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]$ debe valer cero.

$$\left. \begin{matrix} [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = -3 - 3a \\ [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -3 - 3a = 0 \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Las rectas se cortan cuando $a = -1$.

b) Para $a = -1$ las rectas tienen los siguientes vectores directores:

$$r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 2) \\ P_r(0, 1, -1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-2y = -3 \\ x+z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (2, 1, -2) \\ Q_s(-3, 0, 5) \end{cases}$$

Para este valor hemos comprobado que las rectas se cortan. La recta que corta perpendicularmente ambas rectas pasa por el punto de corte de ambas rectas y tiene como vector director el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

Hallamos el punto A de corte de las rectas.

$$r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 2) \\ P_r(0, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x - 2y = -3 \\ x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2(1 + \lambda) = -3 \\ \lambda - 1 + 2\lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2 - 2\lambda = -3 \\ 3\lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda = -1 \\ \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = -1 + 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1, 2, 1)}$$

Hallamos el vector director de la recta t perpendicular a r y s .

$$\vec{w}_t = \vec{v}_s \times \vec{u}_r = (2, 1, -2) \times (1, 1, 2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2i - 2j + 2k - k - 4j + 2i = 4i - 6j + k = (4, -6, 1)$$

Hallamos la ecuación de la recta t .

$$\begin{cases} \vec{w}_t = (4, -6, 1) \\ A(1, 2, 1) \in t \end{cases} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = 2 - 6\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

La recta que corta perpendicularmente a r y s tiene ecuación $t \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = 2 - 6\alpha, \text{ siendo } \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los vectores $\vec{u} = (1, a, 2)$ y $\vec{v} = (-2, 1, a)$.

a) [1 punto] Calcula a para que ambos vectores formen un ángulo de $\pi/3$ radianes.

b) [1,5 puntos] Calcula a para que el vector $(\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{v}$ sea ortogonal a $\vec{u}$.

a) Utilizamos la fórmula del producto escalar.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(1, a, 2)(-2, 1, a)}{\sqrt{1^2 + a^2 + 2^2} \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + a^2}} = \frac{-2 + a + 2a}{\sqrt{5 + a^2} \sqrt{5 + a^2}} = \frac{3a - 2}{5 + a^2}$$

El ángulo debe ser de $\pi/3$ radianes = 60° entonces el $\cos 60^\circ = 1/2$.

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{3a - 2}{5 + a^2} \\ (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3} \text{ radianes} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3a - 2}{5 + a^2} \Rightarrow 5 + a^2 = 6a - 4 \Rightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Para $a = 3$ los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de $\pi/3$ radianes.

b) Determinamos la expresión del vector $(\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{v}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (1, a, 2) \\ \vec{v} = (-2, 1, a) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & a & 2 \\ -2 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 i - 4j + k + 2ak - aj - 2i =$$

$$= (a^2 - 2)i + (-4 - a)j + (1 + 2a)k = (a^2 - 2, -4 - a, 1 + 2a)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{v} = (a^2 - 2, -4 - a, 1 + 2a) - (-2, 1, a) = (a^2, -5 - a, 1 + a)$$

Para que el vector $(\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{v}$ sea ortogonal a $\vec{u}$ su producto escalar debe ser nulo.

$$[(\vec{u} \times \vec{v}) - \vec{v}] \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (a^2, -5 - a, 1 + a)(1, a, 2) = 0 \Rightarrow a^2 + a(-5 - a) + 2(1 + a) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 5a - a^2 + 2 + 2a = 0 \Rightarrow -3a + 2 = 0 \Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

El valor buscado es $a = \frac{2}{3}$.



PevAU 2024 Ordinaria Matemáticas II
PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.**
 - c) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.**
 - d) **Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.**
 - e) **Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.**
 - f) **Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.**
 - g) **En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.**

BLOQUE A. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica $A(1, 0)$ y $B(e, 1)$.

- a) **[1,5 puntos]** Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B .
- b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A .

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función continua definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos(x) - a \sin(x)}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ b \cos(x) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula a y b .

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función definida por $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$, para $x \neq -1$, $x \neq 1$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 1)$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Halla la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = x \cos(x)$ y cuya gráfica pasa por los puntos $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi, 2\pi)$.



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS II

BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Calcula A^{2024} .
b) [1,5 puntos] Halla la matriz X , si es posible, que verifica $A^2 X A + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el sistema
$$\begin{cases} y + z = 1 \\ (k-1)x + y + z = k \\ x + (k-1)y + z = 0 \end{cases}$$

- a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores de k .
b) [0,75 puntos] Para $k=1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y=0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

BLOQUE D. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

- a) [1,25 punto] Halla el punto simétrico de $P(2,2,1)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+z=2 \\ y-z=1 \end{cases}$.
b) [1,25 puntos] Halla el punto simétrico de $Q(1,-1,-3)$ respecto del plano $\pi \equiv x-2y+z+6=0$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y+7=0 \\ z=0 \end{cases}$

- a) [1 puntos] Estudia la posición relativa de r y s .
b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica $A(1, 0)$ y $B(e, 1)$.

a) **[1,5 puntos]** Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B .

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A .

a) La función logaritmo neperiano es continua y derivable con derivada $f'(x) = \frac{1}{x}$.

La pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B es $m = \frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{e-1}$.

La pendiente de la recta tangente en $x = a$ es el valor de la derivada en ese punto $f'(a)$.

Para que la recta tangente sea paralela a la recta que pasa por A y B deben tener la misma pendiente, lo que implica la igualdad $f'(a) = \frac{1}{e-1}$.

Averiguamos para que valores de a ocurre.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{x} \\ m = \frac{1}{e-1} \\ f'(a) = \frac{1}{e-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{e-1} \Rightarrow \boxed{a = e-1}$$

Como $f(e-1) = \ln(e-1)$ el punto de la gráfica de la función donde la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B es el punto de coordenadas $(e-1, \ln(e-1))$.

b) La recta normal a la gráfica de f en $x = 1$ tiene ecuación $y - f(1) = \frac{-1}{f'(1)}(x-1)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = \ln(1) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1 \\ y - f(1) = \frac{-1}{f'(1)}(x-1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = \frac{-1}{1}(x-1) \Rightarrow \boxed{y = -x+1}$$

La recta normal a f en el punto A tiene ecuación $y = -x+1$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función continua definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos(x) - a \operatorname{sen}(x)}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ b \cos(x) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula a y b .

La función debe ser continua en $x = 0$. Para ello debe existir la función y su valor debe coincidir con el valor de los límites laterales.

- Existe $f(0) = b \cos(0) - 1 = b - 1$.

- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} b \cos(x) - 1 = b - 1$$

- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cos(x) - a \operatorname{sen}(x)}{x^3} = \frac{0 \cdot \cos(0) - a \operatorname{sen}(0)}{0^3} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x) - x \operatorname{sen}(x) - a \cos(x)}{3x^2} =$$

$$= \frac{\cos(0) - 0 \cdot \operatorname{sen}(0) - a \cos(0)}{3 \cdot 0^2} = \frac{1 - 0 - a}{0} = \frac{1 - a}{0} = \dots$$

Para que pueda existir el límite debe ser $a = 1$ pues en caso contrario el límite valdría ∞ y la función no sería continua en $x = 0$.

$$\{a = 1\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x) - x \operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \operatorname{sen}(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{3x} =$$

$$= \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\cos(x)}{3} = \frac{-\cos(0)}{3} = \frac{-1}{3}$$

- Los tres valores deben ser iguales $\rightarrow b - 1 = \frac{-1}{3} \Rightarrow \boxed{b = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}}$.

Los valores necesarios para que la función sea continua son $a = 1$ y $b = \frac{2}{3}$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función definida por $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$, para $x \neq -1$, $x \neq 1$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 1)$.

Calculamos la primitiva $F(x)$ de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} dx = \dots$$

$\begin{array}{r} x^3 + 2 \quad \quad x^2 - 1 \\ -x^3 + x \\ \hline x + 2 \end{array}$
--

$$\dots = \int x + \frac{x+2}{x^2-1} dx = \int x dx + \int \frac{x+2}{x^2-1} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x+2}{x^2-1} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow$$

$$x+2 = A(x+1) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow 1 = B(-2) \rightarrow B = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \rightarrow 3 = 2A \rightarrow A = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{3/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}$$

$$\dots = \frac{x^2}{2} + \int \frac{3/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

Hemos obtenido la primitiva: $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$.

Como esta primitiva debe pasar por el punto $(0, 1)$ debe cumplirse que $F(0) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C \\ F(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = \frac{0^2}{2} + \frac{3}{2} \ln|0-1| - \frac{1}{2} \ln|0+1| + C \Rightarrow \boxed{C=1}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + 1$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Halla la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = x \cos(x)$ y cuya gráfica pasa por los puntos $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi, 2\pi)$.

La integral de la segunda derivada es la derivada primera y la integral de la derivada primera es la función.

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int x \cos(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos(x) dx \rightarrow v = \int \cos(x) dx = \sin(x) \end{array} \right\} =$$

$$= x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + A$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x \sin(x) + \cos(x) + A dx = \int x \sin(x) dx + \int \cos(x) dx + \int A dx = \dots$$

$$\int x \sin(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \sin(x) dx \rightarrow v = \int \sin(x) dx = -\cos(x) \end{array} \right\} = -x \cos(x) - \int -\cos(x) dx =$$

$$= -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x)$$

$$\dots = -x \cos(x) + \sin(x) + \sin(x) + Ax = -x \cos(x) + 2\sin(x) + Ax + B$$

La función buscada, a falta de determinar los dos parámetros A y B tiene la expresión:

$$f(x) = -x \cos(x) + 2\sin(x) + Ax + B$$

Como pasa por el punto $(0, \pi/2)$ debe cumplirse que $f(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$f(x) = -x \cos(x) + 2\sin(x) + Ax + B \left\{ \begin{array}{l} f(0) = \pi/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = -0 \cdot \cos(0) + 2\sin(0) + A \cdot 0 + B \Rightarrow \boxed{B = \frac{\pi}{2}}$$

La función queda $f(x) = -x \cos(x) + 2\sin(x) + Ax + \pi/2$. Como pasa por el punto $(\pi, 2\pi)$ debe cumplirse que $f(\pi) = 2\pi$.

$$f(x) = -x \cos(x) + 2\sin(x) + Ax + \frac{\pi}{2} \left\{ \begin{array}{l} f(\pi) = 2\pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2\pi = -\pi \cdot \cos(\pi) + 2\sin(\pi) + A \cdot \pi + B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi = \pi + \pi A + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi - \pi - \frac{\pi}{2} = A\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} = A\pi \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

La función buscada tiene la expresión $f(x) = -x \cos(x) + 2\sin(x) + \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Calcula A^{2024} .

b) **[1,5 puntos]** Halla la matriz X , si es posible, que verifica $A^2 X A + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

a) Calculamos varias potencias de la matriz A hasta encontrar alguna regularidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 1/8+1/8+0 & 1/8+0+1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/8 & 2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2/8 & 2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 1/8+2/8+0 & 1/8+0+2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que lo único que cambia en cada potencia son los números rojos.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/8 & n/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostramos que si se cumple para n también se cumple para $n + 1$.

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n/8 & n/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 1/8+n/8+0 & 1/8+0+n/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)/8 & (n+1)/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La fórmula es correcta y así tenemos que:

$$A^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 2024/8 & 2024/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) La matriz A tiene determinante no nulo y por tanto existe la inversa. La calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1 & 0 \\ 1/8 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1/8 & 0 \\ 1/8 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1/8 & 1 \\ 1/8 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/8 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/8 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/8 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/8 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A^2 XA + I = O \Rightarrow A^2 XA = -I \Rightarrow \left\{ \text{Multiplico por } A^{-1} \right\} = A^{-1} A^2 XA = -I A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AXA = -A^{-1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Multiplico por } A^{-1} \\ \text{por ambos lados} \end{array} \right\} \Rightarrow A^{-1} A X A A^{-1} = -A^{-1} A^{-1} A^{-1} \Rightarrow X = -(A^{-1})^3$$

Calculamos la expresión de la matriz X.

$$\begin{aligned} X = -(A^{-1})^3 &= - \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= - \begin{pmatrix} 1 & -2/8 & -2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & -3/8 & -3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el sistema
$$\begin{cases} y + z = 1 \\ (k-1)x + y + z = k \\ x + (k-1)y + z = 0 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores de k .

b) [0,75 puntos] Para $k=1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y=0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

a) La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$\text{es } A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + (k-1)^2 - 1 - k + 1 + 0 = k^2 + 1 - 2k - k + 1 = k^2 - 3k + 2$$

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 = k \\ \frac{3-1}{2} = 1 = k \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $k \neq 1$ y $k \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $k=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A y de A/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3).

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

CASO 3. $k = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 2}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos.

El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

Resumiendo: Para $k \neq 1$ y $k \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y para $k = 2$ es incompatible (sin solución).

b) Lo resolvemos para $k = 1$. Sabemos que es compatible indeterminado (CASO 2)

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ \text{Ecuación } 1^a = \text{Ecuación } 2^a \} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - z \\ x = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las soluciones son $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

¿Hay alguna solución en la que $y = 0$?

Ponemos este valor en las soluciones y vemos si es posible.

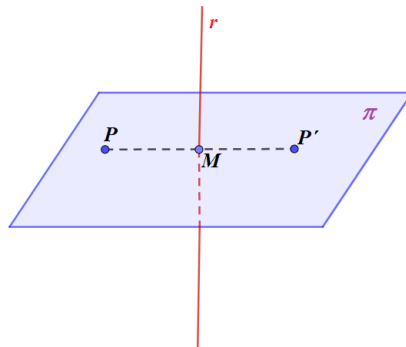
$$\begin{cases} x = -\lambda \\ 0 = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ \lambda = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Existe la solución pedida siendo la solución $x = -1, y = 0, z = 1$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

- a) [1,25 punto] Halla el punto simétrico de $P(2,2,1)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+z=2 \\ y-z=1 \end{cases}$.
- b) [1,25 puntos] Halla el punto simétrico de $Q(1,-1,-3)$ respecto del plano $\pi \equiv x-2y+z+6=0$.

- a) Vamos a determinar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r calculando previamente el plano π perpendicular a la recta que pasa por P , después el punto M de corte de recta y plano. Por último, hallamos el punto P' sumándole al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$ ya que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.



Hallamos la ecuación del plano π . Su vector normal es el vector director de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x-2y+z=2 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-z+2 \\ y=1+z \end{cases} \Rightarrow x=2+2z-z+2=4+z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=4+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1,1,1)$$

$$\vec{n} = \vec{v}_r = (1,1,1) \left\{ \begin{array}{l} \pi \equiv x+y+z+D=0 \\ P(2,2,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \pi \equiv x+y+z+D=0 \\ 2+2+1+D=0 \end{array} \Rightarrow D=-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv x+y+z-5=0}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x+y+z-5=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=4+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 4+\lambda+1+\lambda+\lambda-5=0 \Rightarrow 3\lambda=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4+0=4 \\ y=1+0=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M(4,1,0)$$

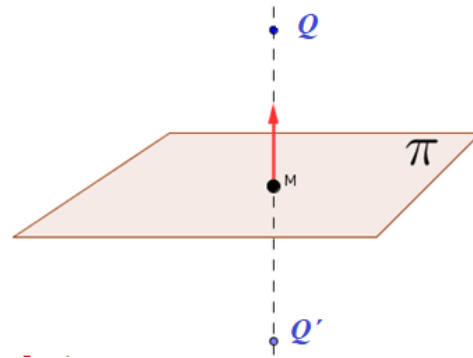
Hallamos las coordenadas del punto P' .

$$\overrightarrow{PM} = (4, 1, 0) - (2, 2, 1) = (2, -1, -1)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = (4, 1, 0) + (2, -1, -1) = (6, 0, -1)$$

El punto P' simétrico de P respecto de la recta r tiene coordenadas $P'(6, 0, -1)$.

- b) Para obtener el punto Q' simétrico de Q respecto de un plano determinamos la recta que pasa por Q y es perpendicular al plano. Luego determinamos el punto M de corte de recta y plano y por último hallamos Q' sumando a M el vector $\overrightarrow{QM}$.



Hallo la ecuación de la recta. Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -2, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q(1, -1, -3) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{n} = (1, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$$

Hallo el punto de corte de la recta s y el plano (lo llamamos M) resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda - 2(-1 - 2\lambda) - 3 + \lambda + 6 = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 3 + \lambda + 6 = 0 \Rightarrow 6\lambda = -6 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = -1 - 2(-1) = 1 \\ z = -3 - 1 = -4 \end{cases} \Rightarrow M(0, 1, -4)$$

Las coordenadas del punto simétrico Q' las hallamos sumando al punto M el vector $\overrightarrow{QM}$.

$$\left. \begin{array}{l} M(0, 1, -4) \\ Q(1, -1, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{QM} = (0, 1, -4) - (1, -1, -3) = (-1, 2, -1)$$

$$Q' = M + \overrightarrow{QM} = (0, 1, -4) + (-1, 2, -1) = (-1, 3, -5)$$

El punto simétrico de Q respecto del plano π es $Q'(-1, 3, -5)$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

a) [1 puntos] Estudia la posición relativa de r y s .

b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.

a) Obtenemos un punto y un vector de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 2x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,0,0) \\ \vec{u}_r = (1,0,2) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 - y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -7 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(-7,0,0) \\ \vec{v}_s = (-1,1,0) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni coincidentes ni paralelas. Las rectas se cortan o cruzan.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1,0,2) \\ \vec{v}_s = (-1,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{2}{0}$$

Averiguamos si el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ es nulo o no. Con ello decidimos si se cortan o cruzan.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0,0,0) \\ Q_s(-7,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (-7,0,0) - (0,0,0) = (-7,0,0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1,0,2) \\ \vec{v}_s = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (-7,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 + 14 - 0 - 0 = 14 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas r y s se cruzan en el espacio.

b) Hallamos la ecuación de un plano paralelo a ambas rectas. El vector normal de este plano es perpendicular al vector director de las dos rectas. El vector normal del plano es el producto vectorial de los dos vectores directores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1,0,2) \\ \vec{v}_s = (-1,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} = \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2j + k - 2i = -2i - 2j + k = (-2, -2, 1)$$

La ecuación de un plano paralelo a las dos rectas es $\pi: -2x - 2y + z + D = 0$.

Debemos hallar el valor D tal que el plano sea equidistante de las dos rectas. Debe cumplir que $d(r, \pi) = d(s, \pi)$.

Como las rectas son paralelas al plano la distancia de la recta al plano es la distancia de uno cualquiera de sus puntos al plano.

$$d(r, \pi) = d(s, \pi) \Rightarrow d(P_r, \pi) = d(Q_s, \pi)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -2x - 2y + z + D = 0 \\ P_r(0, 0, 0) \\ Q_s(-7, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|14 + D|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |D| = |14 + D| \Rightarrow \begin{cases} D = 14 + D \rightarrow 0 = 14 \text{ ¡Imposible!} \\ -D = 14 + D \rightarrow -14 = 2D \rightarrow D = -7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\pi: -2x - 2y + z - 7 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: -2x - 2y + z - 7 = 0$.



PevAU 2024 Ordinaria (suplente) Matemáticas II

PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.
- d) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- e) **Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque.** En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1}$, para $x \neq \pm 1$. Sabiendo que su gráfica tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(0, 1)$ y es paralela a la recta $y = 2x$, calcula la asíntota oblicua y los valores de a y b .

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{arctg}(x + \pi)$, donde arctg denota la función arcotangente.

a) **[1,5 puntos]** Calcula los intervalos de concavidad y convexidad de f . Estudia y halla, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1 punto]** Calcula $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\operatorname{arctg}(x + \pi)}{\operatorname{sen}(x)}$.

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Halla la función $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que pasa por el punto $(3, -4\ln 5)$ y verifica

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 4x + 12}{x^2 - 4} \quad \text{donde } \ln \text{ denota la función logaritmo neperiano.}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x^2 - 3x + 5)e^x$. Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 5)$.



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}$.

- a) **[0,75 puntos]** Determina los valores de m para los que la matriz A^2 tiene inversa.
b) **[1,75 puntos]** Para $m = 0$ calcula, si es posible, la matriz X que verifica $A^2 X = \frac{1}{2}(A + B)$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Determina un número natural de tres cifras sabiendo que la suma de sus dígitos es 9, que la diferencia de dicho número con el que se obtiene al intercambiar la cifra de las centenas por la de las unidades es 198, y que si consideramos la suma entre ambos números, es decir, entre el número a determinar y el que se obtiene al intercambiar sus cifras, el resultado es 828.

BLOQUE D. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera los puntos $P(1,0,1)$ y $Q(3,-2,1)$.

- a) **[1 punto]** Calcula el plano perpendicular al segmento PQ que pasa por su punto medio.
b) **[1,5 puntos]** Calcula el plano paralelo a la recta $r \equiv 1 - x = \frac{y-2}{3} = z+1$ que pasa por P y Q .

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1,1,2)$, $B(1,0,1)$ y $C(1,-1,2)$

- a) **[1,25 puntos]** Determina el área del triángulo de vértices A , B y C .
b) **[1,25 puntos]** Calcula D para que los puntos A , B , C y D sean los vértices consecutivos de un paralelogramo.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1}$, para $x \neq \pm 1$. Sabiendo que su gráfica tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(0, 1)$ y es paralela a la recta $y = 2x$, calcula la asíntota oblicua y los valores de a y b .

La asíntota oblicua es paralela a la recta $y = 2x$ por lo que tiene la misma pendiente y su ecuación será $y = 2x + c$.

Como la asíntota pasa por el punto $(0, 1)$ tenemos que $1 = 2 \cdot 0 + c \rightarrow c = 1$.

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = 2x + 1$.

Por ser esta la asíntota oblicua debe cumplirse que $2 = m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ y que

$$1 = n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x).$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x^3 - x} = \{a \neq 0\} =$$

$$= \{\text{Grado de numerador} = \text{Grado de denominador}\} = \frac{a}{1} = a \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Con $a = 2$ la función queda $f(x) = \frac{2x^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1}$. Aplicamos que $1 = n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x)$.

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{2x^3} + bx^2 + x - 1 - \cancel{2x^3} + 2x}{x^2 - 1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{bx^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} \right) = \{b \neq 0\} = \{\text{Grado de numerador} = \text{Grado de denominador}\} =$$

$$= \frac{b}{1} = b \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = 1$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{arctg}(x + \pi)$, donde arctg denota la función arcotangente.

a) **[1,5 puntos]** Calcula los intervalos de concavidad y convexidad de f . Estudia y halla, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1 punto]** Calcula $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\operatorname{arctg}(x + \pi)}{\operatorname{sen}(x)}$.

a) Calculamos la segunda derivada de la función y averiguamos cuando se anula (posibles puntos de inflexión).

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x + \pi) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + (x + \pi)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{0 \cdot (1 + (x + \pi)^2) - 2(x + \pi) \cdot 1}{1 + (x + \pi)^2} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2(x + \pi)}{1 + (x + \pi)^2} \\ f''(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-2(x + \pi)}{1 + (x + \pi)^2} = 0 \Rightarrow -2(x + \pi) = 0 \Rightarrow x + \pi = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\pi}$$

La función tiene un posible punto de inflexión en $x = -\pi$. Estudiamos la concavidad y convexidad antes y después de este valor.

- En el intervalo $(-\infty, -\pi)$ tomamos $x = -2\pi$ y la derivada segunda vale

$$f''(-2\pi) = \frac{-2(-2\pi + \pi)}{1 + (-2\pi + \pi)^2} = \frac{2\pi}{1 + \pi^2} > 0. \text{ La función es convexa (U) en } (-\infty, -\pi).$$

- En el intervalo $(-\pi, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale

$$f''(0) = \frac{-2(0 + \pi)}{1 + (0 + \pi)^2} = \frac{-2\pi}{1 + \pi^2} < 0. \text{ La función es cóncava (∩) en } (-\pi, +\infty).$$

La función es convexa (U) en $(-\infty, -\pi)$ y cóncava (∩) en $(-\pi, +\infty)$.

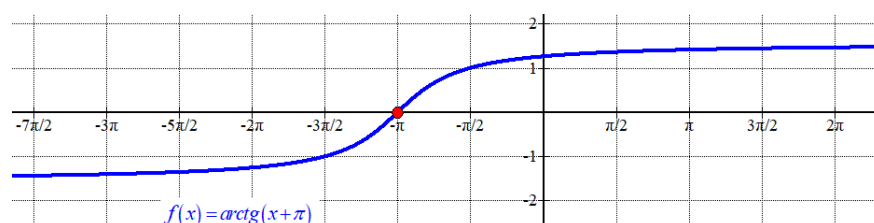
La función presenta un punto de inflexión en $x = -\pi$. Como

$$f(-\pi) = \operatorname{arctg}(-\pi + \pi) = \operatorname{arctg} 0 = 0 \text{ el punto de inflexión tiene coordenadas } (-\pi, 0).$$

b) Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\operatorname{arctg}(x + \pi)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{arctg}(-\pi + \pi)}{\operatorname{sen}(-\pi)} = \frac{\operatorname{arctg}(0)}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{1}{1 + (x + \pi)^2} = \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{1}{(1 + (x + \pi)^2) \cos(x)} = \frac{1}{(1 + (-\pi + \pi)^2) \cos(-\pi)} = \frac{1}{-1} = -1$$



EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Halla la función $f : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que pasa por el punto $(3, -4\ln 5)$ y verifica

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 4x + 12}{x^2 - 4} \text{ donde } \ln \text{ denota la función logaritmo neperiano.}$$

La función $f(x)$ es la integral de su derivada $f'(x)$.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{3x^2 + 4x + 12}{x^2 - 4} dx = \dots$$

$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x + 12 \quad \quad x^2 - 4 \\ -3x^2 \qquad + 12 \quad 3 \\ \hline 4x + 24 \end{array}$
--

$$\dots = \int 3 + \frac{4x + 24}{x^2 - 4} dx = \int 3 dx + \int \frac{4x + 24}{x^2 - 4} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{4x + 24}{x^2 - 4} = \frac{4x + 24}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} \Rightarrow$$

$$4x + 24 = A(x + 2) + B(x - 2) \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow -8 + 24 = B(-4) \rightarrow 16 = -4B \rightarrow B = -4 \\ x = 2 \rightarrow 8 + 24 = 4A \rightarrow 32 = 4A \rightarrow A = 8 \end{cases}$$

$$\frac{4x + 24}{x^2 - 4} = \frac{8}{x - 2} - \frac{4}{x + 2}$$

$$\dots = 3x + \int \frac{8}{x - 2} - \frac{4}{x + 2} dx = 3x + 8 \int \frac{1}{x - 2} dx - 4 \int \frac{1}{x + 2} dx =$$

$$= 3x + 8 \ln(x - 2) - 4 \ln(x + 2) + C$$

Como sabemos que la función pasa por el punto $(3, -4\ln 5)$ entonces debe cumplirse que

$$f(3) = -4\ln 5.$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 3x + 8 \ln(x - 2) - 4 \ln(x + 2) + C \\ f(3) = -4 \ln 5 \end{array} \right\} \Rightarrow -4 \ln 5 = 9 + 8 \ln 1 - 4 \ln 5 + C \Rightarrow \boxed{C = -9}$$

La función tiene la expresión $f(x) = 3x + 8 \ln(x - 2) - 4 \ln(x + 2) - 9$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x^2 - 3x + 5)e^x$. Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 5)$.

Calculamos la primitiva pedida.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (x^2 - 3x + 5)e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 - 3x + 5 \rightarrow du = (2x - 3) dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= (x^2 - 3x + 5)e^x - \int (2x - 3)e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = 2x - 3 \rightarrow du = 2 dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= (x^2 - 3x + 5)e^x - \left[(2x - 3)e^x - \int 2e^x dx \right] = (x^2 - 3x + 5)e^x - (2x - 3)e^x + 2e^x =$$

$$= (x^2 - 3x + 5 - 2x + 3 + 2)e^x = (x^2 - 5x + 10)e^x + C$$

La primitiva de $f(x)$ es $F(x) = (x^2 - 5x + 10)e^x + C$. Si pasa por el punto $(0, 5)$ entonces debe cumplirse $F(0) = 5$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = (x^2 - 5x + 10)e^x + C \\ F(0) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 = (0^2 - 5 \cdot 0 + 10)e^0 + C \Rightarrow 5 = 10 + C \Rightarrow \boxed{C = -5}$$

La primitiva buscada es $F(x) = (x^2 - 5x + 10)e^x - 5$.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}$.

a) **[0,75 puntos]** Determina los valores de m para los que la matriz A^2 tiene inversa.

b) **[1,75 puntos]** Para $m=0$ calcula, si es posible, la matriz X que verifica $A^2 X = \frac{1}{2}(A+B)$.

a) Calculamos la expresión de A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 0+0-1 & 1+0+2 \\ m+m+0 & 0+1+0 & m+0+0 \\ 1-m+2 & 0-1-2 & 1+0+4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2m & 1 & m \\ 3-m & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A^2 .

$$|A^2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2m & 1 & m \\ 3-m & -3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - m(3-m) - 18m - 3(3-m) + 10m + 6m =$$

$$= 10 - \cancel{3m} + m^2 - 18m - 9 + \cancel{3m} + 10m + 6m = m^2 - 2m + 1$$

$$|A^2| = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Para $m = 1$ se anula el determinante de A^2 y por tanto no existe la inversa. Para cualquier valor $m \neq 1$ el determinante es no nulo y existe la inversa de A^2 .

b) Para $m=0$ existe la inversa de A^2 . La calculamos.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 0 + 0 - 9 - 0 - 0 = 1 \neq 0$$

$$(A^2)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A^2)^T)}{|A^2|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}}{1} =$$

$$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de X.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 5 & 11 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^2 X = \frac{1}{2}(A + B) \Rightarrow X = \frac{1}{2}(A^2)^{-1}(A + B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 5 & 11 & 22 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -15 + 0 - 15 & 40 - 20 - 33 & 5 - 16 - 66 \\ 0 & 5 & 4 \\ 9 + 0 + 10 & -24 + 15 + 22 & -3 + 12 + 44 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -30 & -13 & -77 \\ 0 & 5 & 4 \\ 19 & 13 & 53 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -30 & -13 & -77 \\ 0 & 5 & 4 \\ 19 & 13 & 53 \end{pmatrix}.$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Determina un número natural de tres cifras sabiendo que la suma de sus dígitos es 9, que la diferencia de dicho número con el que se obtiene al intercambiar la cifra de las centenas por la de las unidades es 198, y que si consideramos la suma entre ambos números, es decir, entre el número a determinar y el que se obtiene al intercambiar sus cifras, el resultado es 828.

Sea el número $xyz = 100x + 10y + z$.

“La suma de sus dígitos es 9” $\rightarrow x + y + z = 9$.

“La diferencia de dicho número con el que se obtiene al intercambiar la cifra de las centenas por la de las unidades es 198” $\rightarrow xyz - zyx = 198$.

“La suma entre ambos números, es decir, entre el número a determinar y el que se obtiene al intercambiar sus cifras, es 828” $\rightarrow xyz + zyx = 828$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ xyz - zyx = 198 \\ xyz + zyx = 828 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ 100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 198 \\ 100x + 10y + z + 100z + 10y + x = 828 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ \Rightarrow 100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 198 \\ 100x + 10y + z + 100z + 10y + x = 828 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ 99x - 99z = 198 \\ 101x + 20y + 101z = 828 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ \Rightarrow x - z = 2 \rightarrow x = 2 + z \\ 101x + 20y + 101z = 828 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 + z + y + z = 9 \\ 101(2 + z) + 20y + 101z = 828 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 2z = 7 \\ 202 + 101z + 20y + 101z = 828 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 7 - 2z \\ 202z + 20y = 626 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 202z + 20(7 - 2z) = 626 \Rightarrow 202z + 140 - 40z = 626 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 162z = 486 \Rightarrow \boxed{z = \frac{486}{162} = 3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = 7 - 6 = 1} \\ \boxed{x = 2 + 3 = 5} \end{array} \right.$$

El número que cumple lo pedido es 513.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera los puntos $P(1,0,1)$ y $Q(3,-2,1)$.

- a) **[1 punto]** Calcula el plano perpendicular al segmento PQ que pasa por su punto medio.
 b) **[1,5 puntos]** Calcula el plano paralelo a la recta $r \equiv 1-x = \frac{y-2}{3} = z+1$ que pasa por P y Q.

- a) Calculamos las coordenadas del punto medio M del segmento PQ.

$$M = \frac{(1,0,1) + (3,-2,1)}{2} = (2,-1,1)$$

El plano perpendicular al segmento PQ que pasa por su punto medio M tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (3,-2,1) - (1,0,1) = (2,-2,0) \\ M(2,-1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 2x - 2y + D = 0 \\ M(2,-1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + 2 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -6 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x - 2y - 6 = 0}$$

El plano perpendicular al segmento PQ que pasa por su punto medio tiene ecuación $\pi: 2x - 2y - 6 = 0$.

- b) La recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{1}$ tiene como vector director $\vec{v}_r = (-1,3,1)$. El plano paralelo a la recta r tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta. El otro vector director es el vector $\overrightarrow{PQ} = (2,-2,0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (-1,3,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (2,-2,0) \\ P(1,0,1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 2y + 2(z-1) - 6(z-1) + 0 + 2(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y + 2z - 2 - 6z + 6 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 4z + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x + y - 2z + 1 = 0}$$

El plano paralelo a la recta $r \equiv 1-x = \frac{y-2}{3} = z+1$ que pasa por P y Q tiene ecuación $\pi': x + y - 2z + 1 = 0$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1,1,2)$, $B(1,0,1)$ y $C(1,-1,2)$

- a) [1,25 puntos] Determina el área del triángulo de vértices A, B y C.
 b) [1,25 puntos] Calcula D para que los puntos A, B, C y D sean los vértices consecutivos de un paralelogramo.

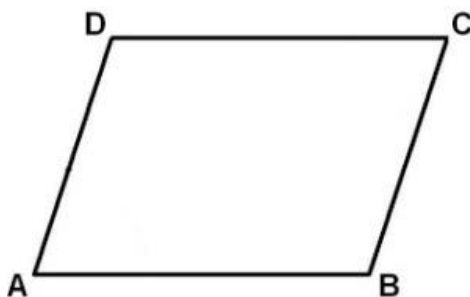
- a) El área del triángulo de vértices A, B y C es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,0,1) - (1,1,2) = (0,-1,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (1,-1,2) - (1,1,2) = (0,-2,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2i = (2,0,0)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2}}{2} = 1 \text{ u}^2$$

El área del triángulo es de 1 unidad cuadrada.

- b) La situación planteada es la del dibujo.



Al ser un paralelogramo los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ tienen las mismas coordenadas.
 El punto D se obtiene sumando al punto A el vector $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BC} = (1,-1,2) - (1,0,1) = (0,-1,1)$$

$$D = A + \overrightarrow{BC} = (1,1,2) + (0,-1,1) = (1,0,3)$$

El cuarto vértice del paralelogramo ABCD es $D(1,0,3)$.

PevAU 2024 Ordinaria (reserva) Matemáticas II



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.**
 - c) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.**
 - d) **Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.**
 - e) **Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.**
 - f) **Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.**
 - g) **En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.**

BLOQUE A. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

- a) **[1 punto]** Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
- b) **[1,5 puntos]** Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ae^{-x} + b \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x + \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, donde

$\ln$ denota la función logaritmo neperiano.

- a) **[1,5 puntos]** Determina a y b .
- b) **[1 punto]** Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.

- a) **[1 punto]** Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas y esboza dicha gráfica.
- b) **[1,5 puntos]** Calcula la suma de las áreas de los recintos acotados y limitados por la gráfica de f y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\int \frac{e^{3x} - 1}{e^x - 3} dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = e^x$).



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS II

BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) [1,25 puntos] Calcula los determinantes de las matrices $((AB)^5)^{-1}$ y $27AB^6$.
- b) [1,25 puntos] Halla la matriz X , si es posible, que verifica que $AXB = 9I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 5 & 3a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) [1,25 puntos] Calcula el rango de A según los valores de a .
- b) [1,25 puntos] Si $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $a = 2$ resuelve, si es posible, el sistema $AX = B$.

BLOQUE D. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = 3-z$ y el punto $P(0,2,-4)$.

- a) [1,25 puntos] Calcula el punto de r a menor distancia de P .
- b) [1,25 puntos] Halla los puntos de r cuya distancia a P sea igual a $\sqrt{50}$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Sea π_1 el plano determinado por los puntos $A(1,0,0)$, $B(1,1,-3)$ y $C(0,1,1)$, y sea

$\pi_2 \equiv x - y + z - 1 = 0$. Determina la ecuación de la recta paralela a ambos planos que pasa por el origen.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

- a) **[1 punto]** Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
 b) **[1,5 puntos]** Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

a) El dominio de la función son todos los números reales. Dominio = $\mathbb{R}$.

Utilizamos la derivada para hallar los puntos críticos de la función.

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x \Rightarrow f'(x) = (2x)e^x + (x^2 + 1)e^x = (x^2 + 2x + 1)e^x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + 2x + 1)e^x = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después del punto crítico $x = -1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = ((-2)^2 + 2(-2) + 1)e^{-2} = e^{-2} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = (0^2 + 2 \cdot 0 + 1)e^0 = 1 > 0. \text{ La función crece en } (-1, +\infty).$$

La función crece en todo $\mathbb{R}$.

b) Buscamos los valores que anulan la segunda derivada.

$$f'(x) = (x^2 + 2x + 1)e^x \Rightarrow f''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x + 1)e^x = (x^2 + 4x + 3)e^x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + 4x + 3)e^x = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-4+2}{2} = \boxed{-1=x} \\ \frac{-4-2}{2} = \boxed{-3=x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes, entre y después de los dos valores obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty, -3)$ tomamos $x = -4$ y la segunda derivada vale

$$f''(-4) = ((-4)^2 + 4(-4) + 3)e^{-4} = 3e^{-4} > 0. \text{ La función es convexa (U) en } (-\infty, -3).$$

- En el intervalo $(-3, -1)$ tomamos $x = -2$ y la segunda derivada vale

$$f''(-2) = ((-2)^2 + 4(-2) + 3)e^{-2} = -e^{-2} < 0. \text{ La función es cóncava (n) en } (-3, -1).$$

- En el intervalo $(-1, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la segunda derivada vale

$$f''(0) = (0^2 + 4 \cdot 0 + 3)e^0 = 3 > 0. \text{ La función es convexa (U) en } (-1, +\infty).$$

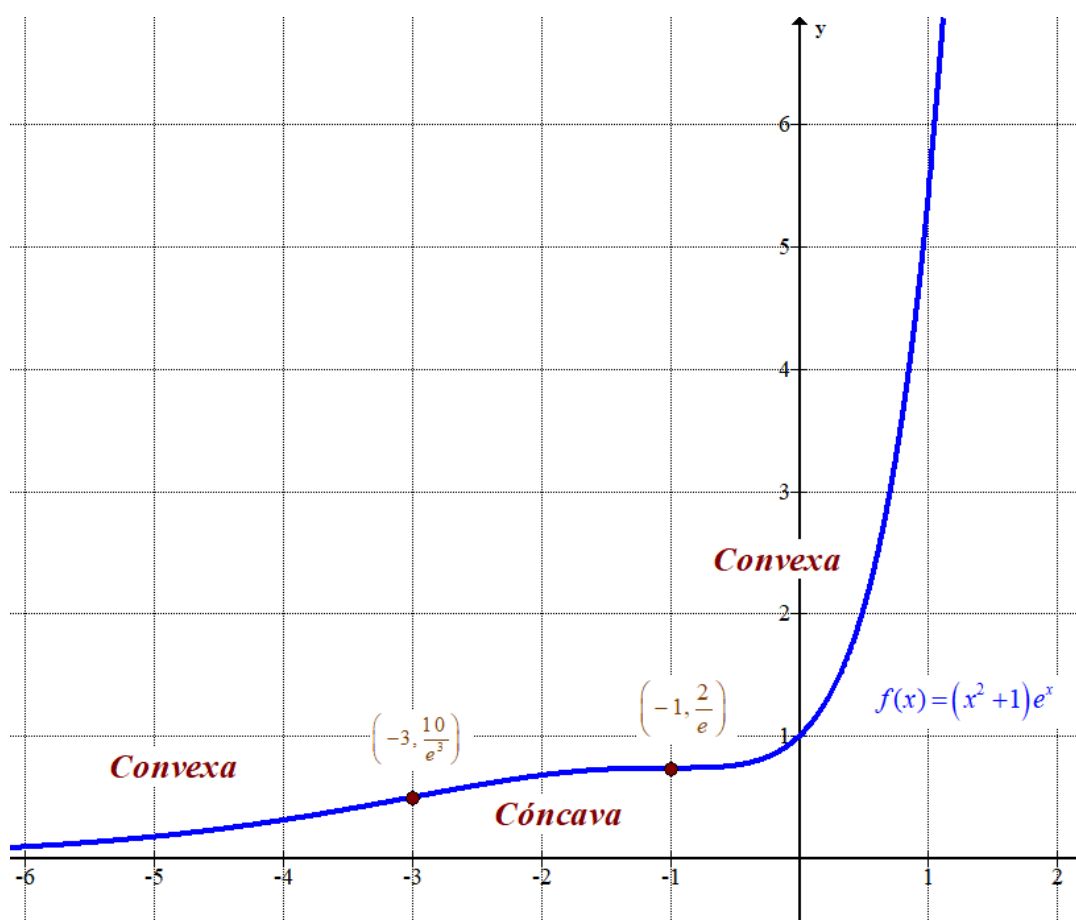
La función es convexa (U) en $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ y cóncava (n) en $(-3, -1)$.

La función tiene dos puntos de inflexión: $x = -3$ y $x = -1$.

Como $f(-3) = ((-3)^2 + 1)e^{-3} = \frac{10}{e^3}$ y $f(-1) = ((-1)^2 + 1)e^{-1} = \frac{2}{e}$ los puntos de inflexión

tienen coordenadas $\left(-3, \frac{10}{e^3}\right)$ y $\left(-1, \frac{2}{e}\right)$.

No lo pide el ejercicio, pero dibujamos la gráfica de la función.



EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ae^{-x} + b \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x + \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$,

donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano.

a) [1,5 puntos] Determina a y b .

b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

a) Si la función es derivable debe ser continua en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 + \ln(1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \ln(1+x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} ae^{-x} + b \ln(1-x) = ae^{-0} + b \ln(1-0) = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a=0}$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} b \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x + \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Al ser la función derivable en $x = 0$ deben coincidir las derivadas laterales en dicho valor.

$$f(x) = \begin{cases} b \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x + \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} b \frac{-1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 + \frac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} b \frac{-1}{1-x} = \frac{-b}{1} = -b \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{1}{1+x} = 1 + 1 = 2 \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -b = 2 \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

Los valores buscados son $a = 0$ y $b = -2$.

b) La función tiene la expresión $f(x) = \begin{cases} -2 \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x + \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y su derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 + \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}. \text{ Calculamos el valor de la función, el de su derivada en } x = 0 \text{ y}$$

determinamos la ecuación de la recta tangente y la recta normal en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 + \ln(1+0) = 0 \\ f'(0) &= 1 + \frac{1}{1+0} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{Recta tangente} \rightarrow y - f(0) = f'(0)(x-0) \rightarrow \boxed{y=2x} \\ \text{Recta normal} \rightarrow y - f(0) = \frac{-1}{f'(0)}(x-0) \rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{2}x} \end{cases}$$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.

- a) **[1 punto]** Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas y esboza dicha gráfica.
 b) **[1,5 puntos]** Calcula la suma de las áreas de los recintos acotados y limitados por la gráfica de f y el eje de abscisas.

a) Hallamos los puntos de corte con cada uno de los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \\ \text{Eje } OY \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

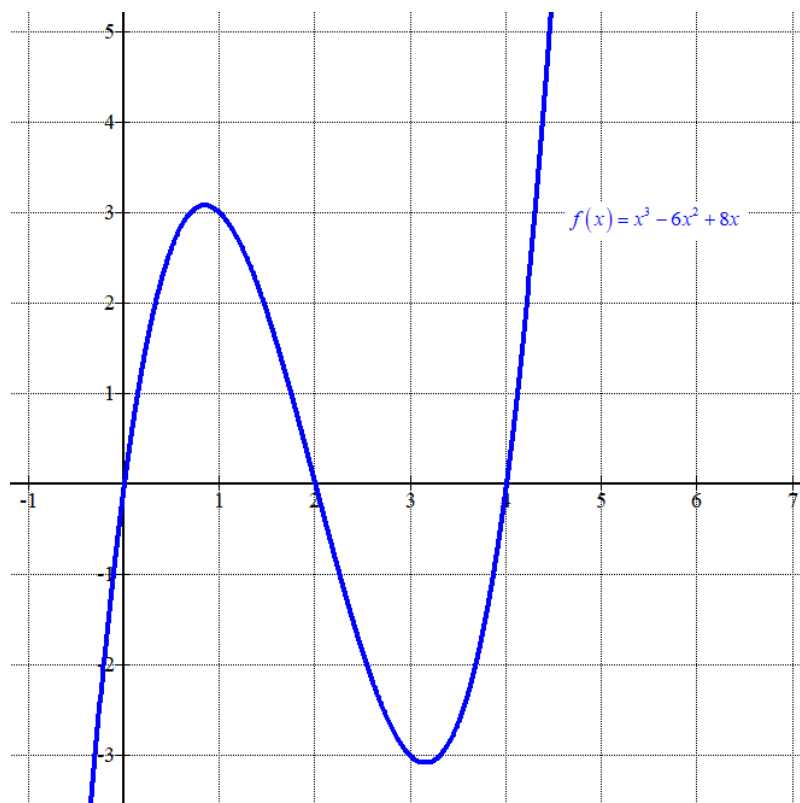
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow A(0,0) \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = 4 \rightarrow \boxed{B(4,0)} \\ \frac{6-2}{2} = 2 \rightarrow \boxed{C(2,0)} \end{cases} \end{array} \right.$$

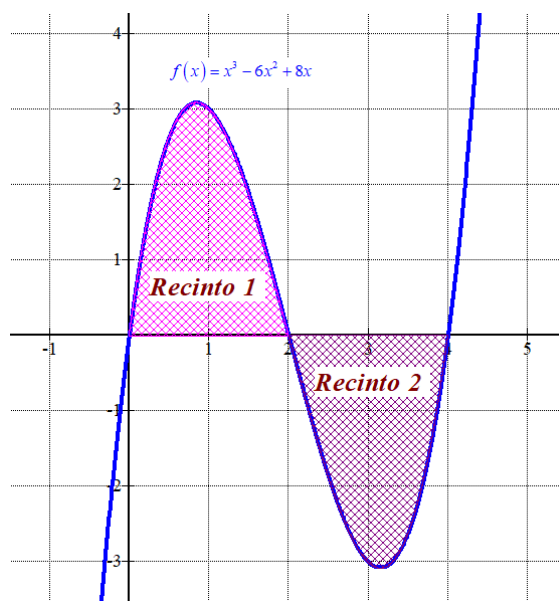
La gráfica de la función corta los ejes en tres puntos: $A(0,0)$, $B(4,0)$ y $C(2,0)$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$
-1	-15
0	0
1	3
2	0
3	-3
4	0
5	15



- b) Los recintos acotados limitados por la gráfica y el eje de abscisas los coloreamos en el siguiente dibujo.



El área del recinto 1 es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 2.

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x^3 - 6x^2 + 8x dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 \right] = 4 - 16 + 16 = \boxed{4u^2} \end{aligned}$$

Como el recinto 2 está situado por debajo del eje de abscisas su área es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 2 y 4.

$$\begin{aligned} \int_2^4 f(x) dx &= \int_2^4 x^3 - 6x^2 + 8x dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 = \\ &= \left[\frac{4^4}{4} - 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 \right] - \left[\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 \right] = 64 - 64 - (4 - 16 + 16) = -4 \end{aligned}$$

El área del recinto 2 tiene un valor de 4 unidades cuadradas.

La suma de las dos áreas es $4 + 4 = 8$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-3} dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = e^x$).

$$\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-3} dx = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t \rightarrow e^x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \\ e^{3x} = (e^x)^3 = t^3 \end{array} \right\} = \int \frac{t^3-1}{t-3} \frac{dt}{t} = \int \frac{t^3-1}{t^2-3t} dt = \dots$$

t^3	-1	$\overline{t^2-3t}$
$-t^3+3t^2$		$t+3$
$3t^2$		
	-1	
$-3t^2+9t$		
$9t-1$		

$$\dots = \int t+3 + \frac{9t-1}{t^2-3t} dt = \frac{t^2}{2} + 3t + \int \frac{9t-1}{t^2-3t} dt = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{9t-1}{t^2-3t} = \frac{9t-1}{t(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} = \frac{A(t-3)+Bt}{t(t-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9t-1 = A(t-3) + Bt \Rightarrow \begin{cases} t=0 \rightarrow 0-1 = -3A \rightarrow A = \frac{1}{3} \\ t=3 \rightarrow 27-1 = 3B \rightarrow B = \frac{26}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{9t-1}{t^2-3t} = \frac{1/3}{t} + \frac{26/3}{t-3}$$

$$\dots = \frac{t^2}{2} + 3t + \int \frac{1/3}{t} dt + \int \frac{26/3}{t-3} dt = \frac{t^2}{2} + 3t + \frac{1}{3} \int \frac{1}{t} dt + \frac{26}{3} \int \frac{1}{t-3} dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 3t + \frac{1}{3} \ln t + \frac{26}{3} \ln(t-3) = \{e^x = t\} = \frac{e^{2x}}{2} + 3e^x + \frac{1}{3} \ln e^x + \frac{26}{3} \ln(e^x-3) =$$

$$= \boxed{\frac{e^{2x}}{2} + 3e^x + \frac{x}{3} + \frac{26}{3} \ln(e^x-3) + K}$$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **[1,25 puntos]** Calcula los determinantes de las matrices $((AB)^5)^{-1}$ y $27AB^6$.

b) **[1,25 puntos]** Halla la matriz X, si es posible, que verifica que $AXB = 9I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

a) Calculamos el valor de los determinantes de las matrices A y B.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - 0 + 7 - 0 = 9 \neq 0 \rightarrow A \text{ tiene inversa}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - \frac{1}{9} - 0 - 0 = -\frac{1}{9} \neq 0 \rightarrow B \text{ tiene inversa}$$

Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$\left| ((AB)^5)^{-1} \right| = \frac{1}{|(AB)^5|} = \frac{1}{|AB|^5} = \frac{1}{(|A| \cdot |B|)^5} = \left\{ \begin{matrix} |A| = 9 \\ |B| = -\frac{1}{9} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\left(9 \cdot -\frac{1}{9} \right)^5} = \frac{1}{(-1)^5} = \boxed{-1}$$

$$\begin{aligned} |27AB^6| &= \left\{ \begin{matrix} AB^6 \text{ es una matriz} \\ \text{cuadrada de orden 3} \end{matrix} \right\} = 27^3 |AB^6| = 27^3 \cdot |A| \cdot |B|^6 = \\ &= 27^3 \cdot |A| \cdot |B|^6 = 27^3 \cdot 9 \cdot \left(-\frac{1}{9} \right)^6 = \boxed{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial despejando primero la matriz X.

$$AXB = 9I \Rightarrow X = A^{-1}(9I)B^{-1} = 9A^{-1}B^{-1}$$

Determinamos las matrices inversas de A y B.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{9} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{Adj(B^T)}{|B|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1/9} = -9 \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1/9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1/9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1/9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1/9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = -9 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X = 9A^{-1}B^{-1} = 9 \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -18 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+1+0 & 18+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & -63+0+0 \\ 0+0+9 & 0+0+0 & 0+0-162 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & -63 \\ 9 & 0 & -162 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 5 & 3a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1,25 puntos] Calcula el rango de A según los valores de a.

b) [1,25 puntos] Si $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $a = 2$ resuelve, si es posible, el sistema $AX = B$.

a) Calculamos el determinante de la matriz A y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 5 & 3a-1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 6a - 2 - 0 - 0 - 3a^2 + a = -3a^2 + 7a - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3a^2 + 7a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(-3)(-2)}}{2(-3)} = \frac{-7 \pm 5}{-6} = \begin{cases} \frac{-7+5}{-6} = \frac{1}{3} \\ \frac{-7-5}{-6} = 2 \end{cases}$$

Nos surgen tres situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq \frac{1}{3}$ y $a \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $a = \frac{1}{3}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1/3 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar

la primera fila y segunda columna (nula) $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1/3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{5}{3} \neq 0$. El rango de A es 2.

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar

la primera fila y primera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $a \neq \frac{1}{3}$ y $a \neq 2$ el rango de A es 3 y si $a = \frac{1}{3}$ o $a = 2$ el rango de A es 2.

b) Para $a = 2$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Intentamos resolver el sistema $AX = B$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ 2x+2z=2 \\ 5x+5y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ x+z=1 \\ 5x+5y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ 5x+5y=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ 5x+5y=4 \end{cases} \Rightarrow 5(1-z)+5y=4 \Rightarrow 5y=4-5+5z \Rightarrow 5y=5z-1 \Rightarrow y=z-\frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\frac{-1}{5}+\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

El sistema tiene infinitas soluciones: $x=1-\lambda$; $y=\frac{-1}{5}+\lambda$; $z=\lambda$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

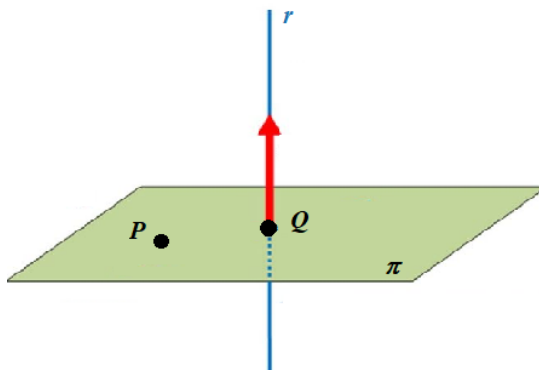
EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = 3-z$ y el punto $P(0, 2, -4)$.

a) [1,25 puntos] Calcula el punto de r a menor distancia de P .

b) [1,25 puntos] Halla los puntos de r cuya distancia a P sea igual a $\sqrt{50}$.

a) El punto de la recta a menor distancia del punto P es el punto Q del dibujo. Siendo π el plano perpendicular a la recta que contiene al punto P .



El plano π al ser perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta. Hallamos su ecuación.

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow \vec{v}_r = (2, 2, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (2, 2, -1) \\ P(0, 2, -4) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 2x + 2y - z + D = 0 \\ P(0, 2, -4) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - (-4) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D + 8 = 0 \Rightarrow D = -8 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + 2y - z - 8 = 0}$$

Hallamos el punto Q intersección de recta y plano resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 2, -1) \\ A_r(-1, 2, 3) \in r \end{array} \right. \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + 2y - z - 8 = 0 \\ r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(-1 + 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) - (3 - \lambda) - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 + 4\lambda + 4 + 4\lambda - 3 + \lambda - 8 = 0 \Rightarrow 9\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = 2 + 2 = 4 \\ z = 3 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(1, 4, 2)}$$

El punto de r a menor distancia de P es $Q(1, 4, 2)$.

b) Un punto B de la recta r tiene coordenadas $B(-1+2\lambda, 2+2\lambda, 3-\lambda)$.

La distancia del punto B al punto P es el módulo del vector $\overrightarrow{PB}$.

$$\left. \begin{array}{l} B(-1+2\lambda, 2+2\lambda, 3-\lambda) \\ P(0, 2, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PB} = (-1+2\lambda, 2+2\lambda, 3-\lambda) - (0, 2, -4) = (-1+2\lambda, 2\lambda, 7-\lambda)$$

$$d(P, B) = |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{(-1+2\lambda)^2 + (2\lambda)^2 + (7-\lambda)^2} =$$

$$= \sqrt{1-4\lambda+4\lambda^2+4\lambda^2+49-14\lambda+\lambda^2} = \sqrt{9\lambda^2-18\lambda+50}$$

Igualemos esta distancia a $\sqrt{50}$ y determinamos el valor de λ .

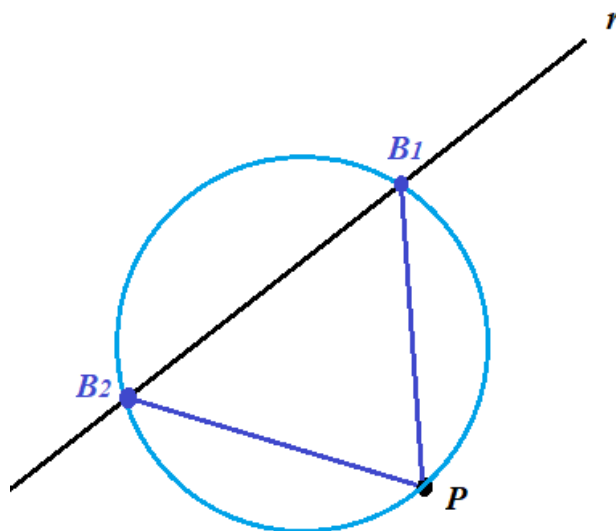
$$d(P, B) = \sqrt{50} \Rightarrow \sqrt{9\lambda^2-18\lambda+50} = \sqrt{50} \Rightarrow 9\lambda^2-18\lambda+50=50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\lambda^2-18\lambda=0 \Rightarrow 9\lambda(\lambda-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda-2=0 \rightarrow \lambda=2 \end{cases}$$

Obtenemos dos puntos que cumplen lo pedido.

Para $\lambda=0$ el punto de la recta es $B_1(-1, 2, 3)$.

Para $\lambda=2$ el punto de la recta es $B_2(-1+4, 2+4, 3-2) \rightarrow B_2(3, 6, 1)$.



EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Sea π_1 el plano determinado por los puntos $A(1,0,0)$, $B(1,1,-3)$ y $C(0,1,1)$, y sea $\pi_2 \equiv x - y + z - 1 = 0$. Determina la ecuación de la recta paralela a ambos planos que pasa por el origen.

Hallamos la ecuación del plano π_1 .

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,0) \\ B(1,1,-3) \\ C(0,1,1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,-3) - (1,0,0) = (0,1,-3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,1,1) - (1,0,0) = (-1,1,1) \\ A(1,0,0) \in \pi_1 \end{array} \Rightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1+3y+0+z-0+3x-3=0 \Rightarrow \boxed{\pi_1: 4x+3y+z-4=0}$$

Los dos planos coinciden en la recta r definida por las ecuaciones de los planos.

$$r: \begin{cases} \pi_1: 4x+3y+z-4=0 \\ \pi_2: x-y+z-1=0 \end{cases}$$

Cualquier recta paralela a la recta r será paralela a ambos planos. Hallamos un vector director de la recta r .

$$r: \begin{cases} 4x+3y+z-4=0 \rightarrow \vec{n}_1 = (4,3,1) \\ x-y+z-1=0 \rightarrow \vec{n}_2 = (1,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3i + j - 4k - 3k - 4j + i = 4i - 3j - 7k = (4, -3, -7)$$

La recta pedida es la recta s que pasa por el punto $O(0,0,0)$ y tiene como vector director $\vec{v}_r = (4, -3, -7)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \vec{v}_r = (4, -3, -7) \\ O(0,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -3\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -7\lambda \end{cases}$$

La recta paralela a ambos planos que pasa por el origen tiene ecuación $s: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -3\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -7\lambda \end{cases}$.



PevAU 2023 Extraordinaria Matemáticas II

**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2022-2023

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Sea la función $f : [-2, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 5x+1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ e^x \cos(x) & \text{si } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$.

- a) **[2 puntos]** Halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) **[0,5 puntos]** Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(\ln(x))^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

- a) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula a con $0 < a < 1$, tal que $\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx + 2 = 0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = \frac{4}{x^2}$.

- a) **[1,25 puntos]** Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.
- b) **[1,25 puntos]** Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g .



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS
DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2022-2023**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

- a) [1 punto] Halla los valores de m para que la matriz $A - mI$ no tenga inversa.
- b) [1,5 puntos] Halla x , distinto de cero, para que $A - xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A - I)$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos. El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos. Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el 30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros. Calcula el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada una de las bebidas.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y = 2$.

- a) [1,5 puntos] Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto $P(2, 6, -2)$.
- b) [1 punto] Halla el ángulo que forman π_1 y π_2 .

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos $A(0, 2, -2)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(2, 3, 2)$ con los planos cartesianos.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f : [-2, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 5x+1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ e^x \cos(x) & \text{si } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$.

- a) **[2 puntos]** Halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
 b) **[0,5 puntos]** Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$.

- a) En el intervalo $-2 \leq x \leq 0$ la función es $f(x) = 5x+1$ una recta creciente, por lo que el valor mínimo lo alcanza en $x = -2$ y el máximo en $x = 0$. Como $f(-2) = 5(-2)+1 = -9$ y $f(0) = 5(0)+1 = 1$ tenemos que el valor mínimo en $[-2, 0]$ es -9 y el máximo es 1 .

En el intervalo $0 < x \leq 2\pi$ la función es $f(x) = e^x \cos(x)$ usamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x) = e^x (\cos(x) - \sin(x))$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x (\cos(x) - \sin(x)) = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow \cos(x) - \sin(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(x) = \sin(x) \Rightarrow \{0 < x \leq 2\pi\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en estos valores.

$$f'(x) = e^x (\cos(x) - \sin(x)) \Rightarrow f''(x) = e^x (\cos(x) - \sin(x)) + e^x (-\sin(x) - \cos(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = e^x (\cos(x) - \sin(x) - \sin(x) - \cos(x)) = e^x (-2\sin(x)) = -2e^x \sin(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2e^{\pi/4} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -e^{\pi/4} \sqrt{2} < 0 \rightarrow \text{¡Máximo!} \\ f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2e^{5\pi/4} \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = e^{\pi/4} \sqrt{2} > 0 \rightarrow \text{¡Mínimo!} \end{cases}$$

La función presenta un máximo relativo en $x = \frac{\pi}{4}$. En dicho valor la función vale

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\pi/4} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi/4} \approx 1.55.$$

La función presenta un mínimo relativo en $x = \frac{5\pi}{4}$. En dicho valor la función vale

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = e^{5\pi/4} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{5\pi/4} \approx -35.88.$$

Comprobamos si la función es continua en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 5x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \cos(x) = e^0 \cos(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

La función es continua en el intervalo $x = 0$.

En $x = 0$ la función cambia de definición y no tiene un máximo relativo pues al tener un máximo relativo en $x = \frac{\pi}{4}$ significa que la función crece en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

El máximo relativo de la función es $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi/4}\right)$ y el mínimo relativo es $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{5\pi/4}\right)$

Reunimos toda la información obtenida para decidir donde está el máximo y mínimo absoluto de la función. También valoramos la función en los extremos del intervalo de definición $[-2, 2\pi]$.

- El valor mínimo en $[-2, 0]$ está en $x = -2$ y es -9 y el máximo está en $x = 0$ y es 1 .
- El valor mínimo relativo en $[0, 2\pi]$ está en $x = \frac{5\pi}{4}$ y es -35.88 y el máximo relativo está en $x = \frac{\pi}{4}$ y es 1.55 .
- La función en $x = 2\pi$ vale $e^{2\pi} \cos(2\pi) = e^{2\pi} \approx 535.49$.

El máximo absoluto está en $x = 2\pi$ con valor $e^{2\pi} \approx 535.49$.

El mínimo absoluto está en $x = \frac{5\pi}{4}$ y su valor es $-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{5\pi/4} \approx -35.88$.

b) La función en un entorno de $x = \frac{\pi}{2}$ es $f(x) = e^x \cos(x)$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ es:

$$\left. \begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -e^{\pi/2} \\ y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = -e^{\pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y = -e^{\pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(\ln(x))^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

- a) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
 b) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

a) Averiguamos cuando se anula la función derivada

$$f'(x) = (\ln(x))^2 + x \cdot 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} = (\ln(x))^2 + 2 \ln(x) = \ln(x)(\ln(x) + 2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(x)(\ln(x) + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln(x) = 0 \rightarrow \boxed{x=1} \\ \ln(x) + 2 = 0 \rightarrow \ln(x) = -2 \rightarrow \boxed{x=e^{-2}} \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$f'(x) = (\ln(x))^2 + 2 \ln(x) \Rightarrow f''(x) = 2 \ln(x) \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{x} \Rightarrow$$

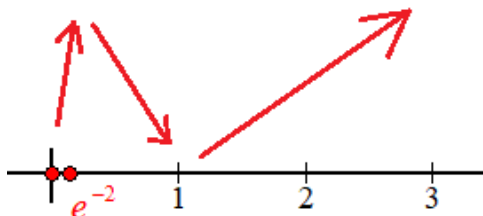
$$\Rightarrow \begin{cases} f''(1) = 2 \ln(1) \frac{1}{1} + 2 \frac{1}{1} = 2 > 0 \rightarrow x=1 \text{ es mínimo} \\ f''(e^{-2}) = 2 \ln(e^{-2}) \frac{1}{e^{-2}} + 2 \frac{1}{e^{-2}} = 2(-2)e^2 + 2e^2 = -2e^2 < 0 \rightarrow x=e^{-2} \text{ es máximo} \end{cases}$$

Obtenemos el valor de la función en estos dos puntos críticos:

$$f(1) = 1 \cdot (\ln(1))^2 = 0; \quad f(e^{-2}) = e^{-2} (\ln(e^{-2}))^2 = 4e^{-2}$$

El mínimo relativo tiene coordenadas $(1, 0)$ y el máximo relativo es $(e^{-2}, 4e^{-2})$.

b) A partir de la información de los extremos relativos la función sigue el esquema siguiente:



Como la función $f(x) = x(\ln(x))^2$ en su dominio $(0, +\infty)$ siempre es mayor o igual que cero el mínimo absoluto de la función es el mínimo relativo $(1, 0)$.

Para decidir el máximo absoluto necesitamos conocer la evolución de la función cuando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x))^2 = +\infty(+\infty)^2 = +\infty$$

Por lo que la función no tiene máximo absoluto.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula a con $0 < a < 1$, tal que $\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx + 2 = 0$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

Hay que determinar cuando $\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx + 2 = 0 \Rightarrow \int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx = -2$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int \ln(x) \frac{1}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x} dx \rightarrow v = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) \end{array} \right\} =$$

$$= \ln(x) \ln(x) - \int \ln(x) \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \ln(x) \frac{1}{x} dx = (\ln(x))^2 - \int \ln(x) \frac{1}{x} dx \Rightarrow 2 \int \ln(x) \frac{1}{x} dx = (\ln(x))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \ln(x) \frac{1}{x} dx = \frac{(\ln(x))^2}{2} + K$$

Aplicamos este resultado a la integral definida.

$$\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_a^1 = \left[\frac{(\ln(1))^2}{2} \right] - \left[\frac{(\ln(a))^2}{2} \right] = -\frac{(\ln(a))^2}{2}$$

Igualamos este resultado a -2 .

$$\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx = -2 \Rightarrow -\frac{(\ln(a))^2}{2} = -2 \Rightarrow \frac{(\ln(a))^2}{2} = 2 \Rightarrow (\ln(a))^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(a) = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} \ln(a) = 2 \rightarrow a = e^2 > 1 \\ \ln(a) = -2 \rightarrow \boxed{a = e^{-2} < 1} \end{cases}$$

El valor buscado es $a = e^{-2}$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 5 - x^2$ y

$$g(x) = \frac{4}{x^2}.$$

- a) [1,25 puntos] Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.
 b) [1,25 puntos] Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g .

a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 5 - x^2 = \frac{4}{x^2} \Rightarrow 5x^2 - x^4 = 4 \Rightarrow -x^4 + 5x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

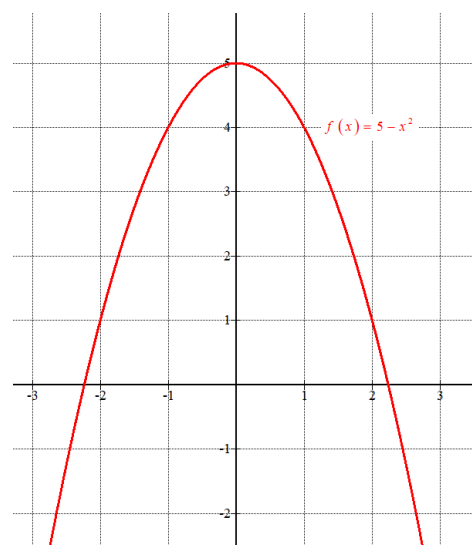
$$\Rightarrow x^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-1)(-4)}}{2(-1)} = \frac{-5 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{-5+3}{-2} = 1 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \\ \frac{-5-3}{-2} = 4 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Las gráficas tienen 4 puntos de corte: $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

La función $f(x) = 5 - x^2$ es una parábola con vértice en $x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0$.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

x	$y = 5 - x^2$
-2	1
-1	4
0	5
1	4
2	1

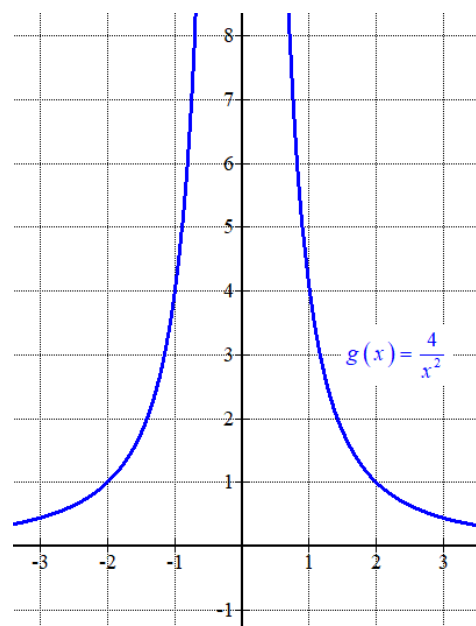


La función $g(x) = \frac{4}{x^2}$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y una asíntota horizontal en $y = 0$

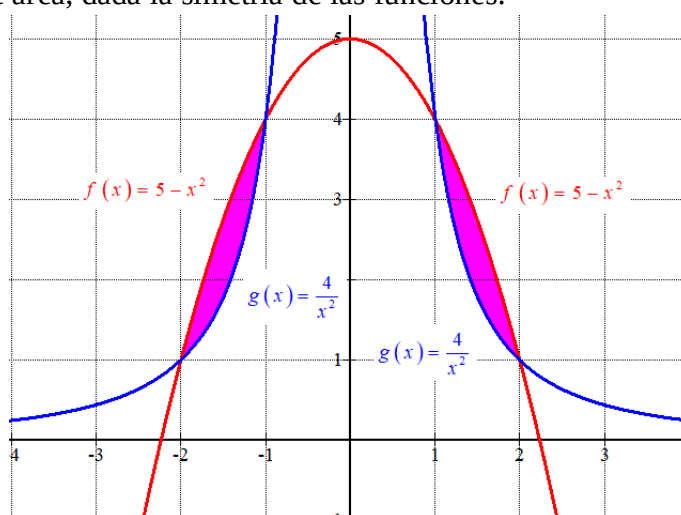
, ya que se cumple que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} = \frac{4}{\infty} = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2} = \frac{4}{\infty} = 0$.

Hacemos una tabla de valores de la función $g(x) = \frac{4}{x^2}$ y la representamos.

x	$y = \frac{4}{x^2}$
-2	1
-1	4
-0.5	16
0.5	16
1	4
2	1



b) Hay dos recintos limitados por las gráficas. Dibujamos los recintos y observamos que tienen el mismo valor de área, dada la simetría de las funciones.



Calculamos una de las áreas.

$$\begin{aligned}
 \text{Área}_1 &= \int_{-2}^{-1} 5 - x^2 - \frac{4}{x^2} dx = \int_{-2}^{-1} 5 - x^2 - 4x^{-2} dx = \left[5x - \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^{-1}}{-1} \right]_{-2}^{-1} = \\
 &= \left[5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x} \right]_{-2}^{-1} = \left[5(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{4}{-1} \right] - \left[5(-2) - \frac{(-2)^3}{3} + \frac{4}{-2} \right] = \\
 &= -5 + \frac{1}{3} - 4 - \left(-10 + \frac{8}{3} - 2 \right) = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3} u^2
 \end{aligned}$$

El área total es $2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \approx 1.33 u^2$.

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) [1 punto] Halla los valores de m para que la matriz $A - mI$ no tenga inversa.

b) [1,5 puntos] Halla x , distinto de cero, para que $A - xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A - I)$.

a) Para que no tenga inversa el determinante debe ser nulo.

$$A - mI = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$|A - mI| = \begin{vmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a & & \\ 1 & 1 & 1-m \\ -1 & -1+m & -1 \\ 0 & m & -m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 0 & m & -m \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a & & \\ 1 & 1-m & 1 \\ -1+m & -1 & -1 \\ m & -m & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ m & -m & 0 \\ 0 & m & -m \end{vmatrix} = m^2(1-m) + 0 + m^2 - 0 + m^2 - 0 =$$

$$= m^2(1-m) + 2m^2 = m^2(1-m+2) = m^2(3-m)$$

$$|A - mI| = 0 \Rightarrow m^2(3-m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 3-m = 0 \rightarrow m = 3 \end{cases}$$

La matriz $A - mI$ no tiene inversa cuando $m = 0$ o $m = 3$.

b) Para que $A - xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A - I)$ debe cumplirse que su producto sea la matriz identidad.

Obtenemos la expresión de las dos matrices.

$$\frac{1}{x}(A - I) = \frac{1}{x} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - xI = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix}$$

Calculamos el producto $\frac{1}{x}(A-I)(A-xI)$ y lo igualamos a la matriz identidad.

$$\frac{1}{x}(A-I)(A-xI) = I \Rightarrow \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 1+1 & 1-x+1 & 1+1-x \\ 1-x+1 & 1+1 & 1+1-x \\ 1-x+1 & 1+1-x & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 2 & 2-x & 2-x \\ 2-x & 2 & 2-x \\ 2-x & 2-x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2-x & 2-x \\ 2-x & 2 & 2-x \\ 2-x & 2-x & 2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2-x & 2-x \\ 2-x & 2 & 2-x \\ 2-x & 2-x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2=x \\ 2-x=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=2}$$

El valor buscado es $x = 2$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos. El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos. Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el 30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros. Calcula el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada una de las bebidas.

Llamamos “x” el gasto en refrescos sin impuestos, “y” al gasto en cerveza sin impuestos y “z” al gasto en vino sin impuestos.

El gasto total es de un importe de 500 euros sin incluir impuestos $\rightarrow x + y + z = 500$.

El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos $\rightarrow z = x + y - 60$

Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el 30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros. Obtenemos el valor de los impuestos: $592.4 - 500 = 92.4 \text{ €} \rightarrow 0.06 \cdot x + 0.12 \cdot y + 0.30 \cdot z = 92.4$

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ z = x + y - 60 \\ 0.06 \cdot x + 0.12 \cdot y + 0.30 \cdot z = 92.4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ z = x + y - 60 \\ 6 \cdot x + 12 \cdot y + 30 \cdot z = 9240 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ \Rightarrow z - y + 60 = x \\ x + 2y + 5z = 1540 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z - y + 60 + y + z = 500 \\ z - y + 60 + 2y + 5z = 1540 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z = 440 \rightarrow \boxed{z = 220} \\ y + 6z = 1480 \end{array} \right\} \Rightarrow y + 6 \cdot 220 = 1480 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 1480 - 1320 = 160} \Rightarrow \boxed{x = 220 - 160 + 60 = 120}$$

Sin incluir impuestos se ha gastado 120 euros en refrescos, 160 en cerveza y 220 en vino. Incluyendo impuestos el gasto es de $120 \cdot 1.06 = 127.2 \text{ €}$ en refrescos, $160 \cdot 1.12 = 179.2 \text{ €}$ en cerveza y $220 \cdot 1.30 = 286 \text{ €}$ en vino.

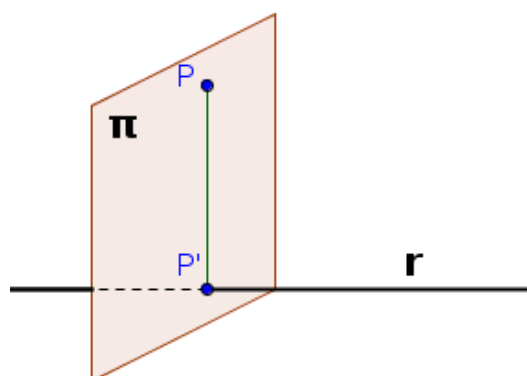
EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y = 2$.

- a) [1,5 puntos] Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto $P(2, 6, -2)$.
 b) [1 punto] Halla el ángulo que forman π_1 y π_2 .

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2 .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x - y + z = 0 \\ \pi_2 \equiv x + y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x = 2 - y \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - y - y + z = 0 \Rightarrow z = -2 + 2y \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$



Hallamos el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto P. Dicho plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-1, 1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (-1, 1, 2) \\ P(2, 6, -2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: -x + y + 2z + D = 0 \\ P(2, 6, -2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + 6 + 2(-2) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -x + y + 2z = 0}$$

Determinamos el punto P' de corte de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -x + y + 2z = 0 \\ r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -(2 - \lambda) + \lambda + 2(-2 + 2\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 + \lambda + \lambda - 4 + 4\lambda = 0 \Rightarrow 6\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 1 \\ z = -2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow P'(1, 1, 0)$$

La distancia de P a la recta r es la distancia de P a P' .

$$\overrightarrow{PP'} = (1, 1, 0) - (2, 6, -2) = (-1, -5, 2)$$

$$d(P, r) = d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2 + 2^2} = \boxed{\sqrt{30} \approx 5.47u}$$

b) El ángulo que forman π_1 y π_2 es el ángulo que forman sus vectores normales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x - y + z = 0 \\ \pi_2 \equiv x + y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1, -1, 1) \\ \vec{n}_2 = (1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{(1, -1, 1)(1, 1, 0)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1-1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \arccos(0) = 90^\circ$$

Los planos π_1 y π_2 forman un ángulo de 90° , los planos son perpendiculares.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos $A(0, 2, -2)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(2, 3, 2)$ con los planos cartesianos.

Hallamos la ecuación del plano determinado por los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, 2, 1) - (0, 2, -2) = (3, 0, 3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2, 3, 2) - (0, 2, -2) = (2, 1, 4) \\ B(3, 2, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(y-2) + 3(z-1) - 12(y-2) - 3(x-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y - 12 + 3z - 3 - 12y + 24 - 3x + 9 = 0 \Rightarrow$$

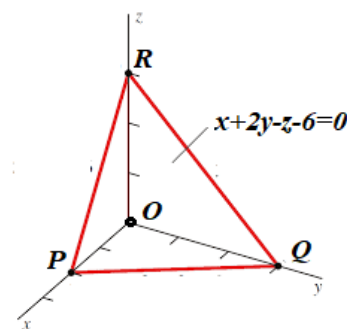
$$\Rightarrow -3x - 6y + 3z + 18 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x + 2y - z - 6 = 0}$$

Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.

$$\pi : x + 2y - z - 6 = 0 \left\{ \begin{array}{l} OX \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow P(6, 0, 0)$$

$$\pi : x + 2y - z - 6 = 0 \left\{ \begin{array}{l} OY \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow Q(0, 3, 0)$$

$$\pi : x + 2y - z - 6 = 0 \left\{ \begin{array}{l} OZ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -z - 6 = 0 \Rightarrow z = -6 \Rightarrow R(0, 0, -6)$$



El volumen del tetraedro definido por el origen $O(0, 0, 0)$ y los puntos P, Q y R es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = (6, 0, 0) - (0, 0, 0) = (6, 0, 0) \\ \overrightarrow{OQ} = (0, 3, 0) - (0, 0, 0) = (0, 3, 0) \\ \overrightarrow{OR} = (0, 0, -6) - (0, 0, 0) = (0, 0, -6) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}] = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -108$$

$$\text{Volumen } OPQR = \frac{|\llbracket \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR} \rrbracket|}{6} = \frac{108}{6} = \boxed{18 \text{ u}^3}$$

El volumen del tetraedro es de 18 u^3 .

PevAU 2023 Extraordinaria (suplente) Matemáticas II



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{\ln(x+1) + a}{3x+4}$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

- a) **[1 punto]** Determina a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 0$ es 1.
- b) **[1,5 puntos]** Para $a = 0$, estudia y calcula las asíntotas de f .

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

En una fábrica de pinturas, las latas que se utilizan para envasar la pintura tienen forma cilíndrica y una capacidad de 20 litros. Halla las dimensiones del cilindro, con tapas, para que la chapa empleada en su construcción sea mínima.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula una primitiva de la función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctg(\sqrt{x})$ cuya gráfica pase por el punto $(0; 1)$ ($\arctg$ denota la función arco tangente). Sugerencia: efectúa el cambio $x = t^2$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+1)$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta $x = e - 1$.



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible, la matriz X

que verifica la ecuación $3X - B^t = AX$, siendo B^t la matriz traspuesta de B .

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Una plataforma de streaming se especializa en series de tres géneros: animación, ciencia ficción y comedia. Se sabe que el 30% de las series de animación más el 50% de las de ciencia ficción coincide con el 20% de total de series. El 25% de las series de animación más el 50% de las de ciencia ficción más el 60% de las de comedia representan la mitad del total de series. Hay 100 series menos de animación que de ciencia ficción. Halla el número de series de cada género.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Determina los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ que son equidistantes de los planos OYZ y OXZ .

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 2z = -2 \end{cases}$

a) **[1,5 puntos]** Determina la ecuación del plano paralelo a r que contiene a la recta

$$-x + 1 = y = \frac{z - 3}{2}.$$

b) **[1 punto]** Calcula la distancia entre la recta r y el plano $2x + 5y + 3z = 41$.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{\ln(x+1)+a}{3x+4}$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

- a) **[1 punto]** Determina a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 0$ es 1.
 b) **[1,5 puntos]** Para $a = 0$, estudia y calcula las asíntotas de f .

- a) La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 0$ se obtiene con el valor de $f'(0)$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}(3x+4) - 3(\ln(x+1)+a)}{(3x+4)^2} = \frac{\frac{3x+4}{x+1} - 3\ln(x+1) - 3a}{(3x+4)^2}$$

$$f'(0) = \frac{\frac{3 \cdot 0 + 4}{0+1} - 3\ln(0+1) - 3a}{(3 \cdot 0 + 4)^2} = \frac{4 - 3a}{16}$$

Igualemos la pendiente a 1 y obtenemos el valor de a .

$$\frac{4-3a}{16} = 1 \Rightarrow 4-3a = 16 \Rightarrow -3a = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{-3} = -4$$

El valor buscado es $a = -4$.

- b) Para $a = 0$ la función es $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{3x+4}$.

El dominio de esta función son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$$3x+4=0 \Rightarrow 3x=-4 \Rightarrow x = \frac{-4}{3}$$

$x = \frac{-4}{3} \approx -1.33 \notin (-1, +\infty)$. No pertenece al dominio de definición de la función.

El dominio de la función es $(-1, +\infty)$.

Asíntota vertical. $x = a$

No tiene asíntota vertical, pues la función es continua en su dominio de definición.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{3x+4} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x+3} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

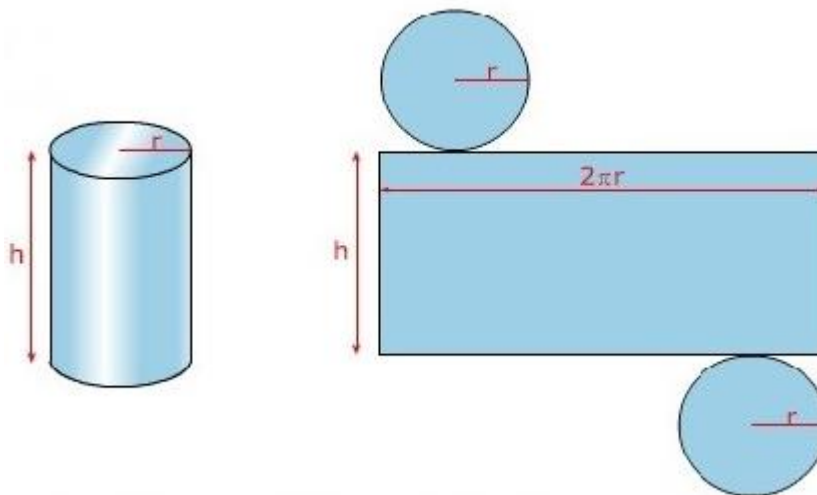
La asíntota horizontal es $y = 0$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Como la función tiene una asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

En una fábrica de pinturas, las latas que se utilizan para envasar la pintura tienen forma cilíndrica y una capacidad de 20 litros. Halla las dimensiones del cilindro, con tapas, para que la chapa empleada en su construcción sea mínima.



Sabemos que su volumen es 20 litros = 20 000 cm³.

Si el bote de forma cilíndrica tiene un radio de tapa r y una altura h tenemos que su volumen es $Volumen = \text{Área base} \times \text{Altura} = \pi r^2 \cdot h$. Igualamos este volumen a 20000 y despejamos h de la expresión.

$$\pi r^2 \cdot h = 20000 \Rightarrow h = \frac{20000}{\pi r^2}$$

Debemos minimizar la superficie del cilindro que es la suma del área de las dos tapas más el rectángulo del lateral $\rightarrow A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Sustituimos en esta expresión h y obtenemos una función superficie que depende solo de r .

$$\left. \begin{array}{l} A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh \\ h = \frac{20000}{\pi r^2} \end{array} \right\} \Rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{20000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{40000}{r}$$

Derivamos esta función, la igualamos a cero y obtenemos sus puntos críticos.

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{40000}{r} \Rightarrow A'(r) = 4\pi r - \frac{40000}{r^2}$$

$$A'(r) = 0 \Rightarrow 4\pi r - \frac{40000}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{40000}{r^2} \Rightarrow 4\pi r^3 = 40000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{40000}{4\pi} = \frac{10000}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}} \approx 14.71 \text{ cm}$$

Averiguamos si es un mínimo viendo la evolución de la derivada antes y después de dicho valor.

- En el intervalo $\left(0, \sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}}\right)$ tomamos $r = 1$ y la derivada vale

$$A'(1) = 4\pi - \frac{40000}{1^2} = -39987.4 < 0, \text{ La función decrece en } \left(0, \sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}}\right).$$

- En el intervalo $\left(\sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}}, +\infty\right)$ tomamos $r = 20$ y la derivada vale

$$A'(20) = 80\pi - \frac{40000}{20^2} = 80\pi - 100 = 151.3 > 0, \text{ La función crece en } \left(\sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}}, +\infty\right).$$

Como la función decrece antes de $r = \sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}} \approx 14.71 \text{ cm}$ y crece después tenemos que la

función superficie presenta un valor mínimo para $r = \sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}} \approx 14.71 \text{ cm}$.

Para $r = \sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}}$ la altura vale:

$$h = \frac{20000}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}}\right)^2} = \frac{20000}{\pi \sqrt[3]{100000000}} = \frac{20000 \sqrt[3]{\pi^2}}{100 \sqrt[3]{\pi^3} \sqrt[3]{100}} = \frac{200}{\sqrt[3]{100\pi}} \approx 29.42 \text{ cm}$$

El bote de 20 litros con forma cilíndrica y superficie mínima tiene radio

$$r = \sqrt[3]{\frac{10000}{\pi}} \approx 14.71 \text{ cm} \text{ y altura } h = \frac{200}{\sqrt[3]{100\pi}} \approx 29.42 \text{ cm}.$$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula una primitiva de la función $f:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\arctg(\sqrt{x})$ cuya gráfica pase por el punto $(0; 1)$ ($\arctg$ denota la función arco tangente). Sugerencia: efectúa el cambio $x=t^2$.

Determinamos la expresión de la primitiva de la función $f(x)$.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int \arctg(\sqrt{x}) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x=t^2 \rightarrow dx=2t dt \end{array} \right\} = \int \arctg(\sqrt{t^2}) 2t dt = \\
 &= \int 2t \cdot \arctg(t) dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \arctg(t) \rightarrow du = \frac{1}{1+t^2} dt \\ dv = 2t dt \rightarrow v = \int 2t dt = t^2 \end{array} \right\} = t^2 \arctg(t) - \int t^2 \frac{1}{1+t^2} dt = \\
 &= t^2 \arctg(t) - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = t^2 \arctg(t) - \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt = \\
 &= t^2 \arctg(t) - \int \frac{1+t^2}{1+t^2} dt + \int \frac{1}{1+t^2} dt = t^2 \arctg(t) - \int dt + \int \frac{1}{1+t^2} dt = \\
 &= t^2 \arctg(t) - t + \arctg(t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el} \\ \text{cambio de variable} \\ x=t^2 \rightarrow t=\sqrt{x} \end{array} \right\} = \boxed{x \arctg(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctg(\sqrt{x}) + C}
 \end{aligned}$$

Las primitivas de la función son $F(x) = x \arctg(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctg(\sqrt{x}) + C$. Como la primitiva debe pasar por el punto $(0, 1)$ entonces debe cumplirse que $F(0) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} F(0) = 0 \cdot \arctg(\sqrt{0}) - \sqrt{0} + \arctg(\sqrt{0}) + C = C \\ F(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{C=1}$$

La primitiva buscada es $F(x) = x \arctg(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctg(\sqrt{x}) + 1$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+1)$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta $x = e-1$.

Buscamos los puntos de corte de la función $f(x) = \ln(x+1)$ y la recta $x = e-1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln(x+1) \\ x = e-1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(e-1) = \ln(e-1+1) = \ln e = 1$$

El punto de corte es $(e-1, 1)$.

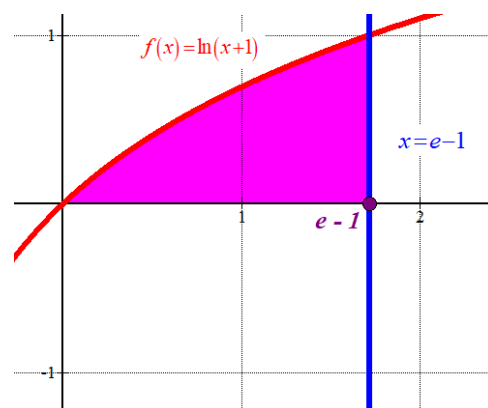
Hallamos el punto de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln(x+1) \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ln(x+1) = 0 \Rightarrow x+1 = e^0 = 1 \Rightarrow x = 0$$

El punto de corte es $(0, 0)$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la función.

x	$f(x) = \ln(x+1)$
0.5	0.4
0	0
$e-1$	1
10	2.4
100	4.6



Calculamos el área de la región pintada de rosa como la integral definida de 0 a $e-1$ de $f(x) = \ln(x+1)$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int \ln(x+1) dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x+1) \rightarrow du = \frac{1}{x+1} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \ln(x+1) - \int x \frac{1}{x+1} dx = \\ &= x \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx = x \ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \\ &= x \ln(x+1) - \int \frac{x+1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = x \ln(x+1) - \int dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \\ &= \boxed{x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C} \end{aligned}$$

Aplicamos este resultado al cálculo del área.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx = \left[x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) \right]_0^{e-1} = \\ &= \left[(e-1) \ln(e-1+1) - (e-1) + \ln(e-1+1) \right] - \left[0 \cdot \ln(0+1) - 0 + \ln(0+1) \right] = \\ &= e-1 - e+1+1-0 = \boxed{1 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El área tiene un valor de 1 unidad cuadrada.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible, la matriz X que verifica la ecuación $3X - B^t = AX$, siendo B^t la matriz traspuesta de B .

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$3X - B^t = AX \Rightarrow 3X - AX = B^t \Rightarrow (3I - A)X = B^t \Rightarrow X = (3I - A)^{-1} B^t$$

Hallamos la inversa de la matriz $3I - A$.

$$3I - A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|3I - A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 - 4 - (0 + 0 + 1) = 1 \neq 0$$

$$(3I - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(3I - A)^t}{|3I - A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(3I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$X = (3I - A)^{-1} B^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 3+2-5 \\ -6+0-5 & -18-12+25 \\ 2+0+2 & 6+5-10 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3} \cdot \boxed{3} \times 2 \longrightarrow 3 \times 2$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -11 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Una plataforma de streaming se especializa en series de tres géneros: animación, ciencia ficción y comedia. Se sabe que el 30% de las series de animación más el 50% de las de ciencia ficción coincide con el 20% de total de series. El 25% de las series de animación más el 50% de las de ciencia ficción más el 60% de las de comedia representan la mitad del total de series. Hay 100 series menos de animación que de ciencia ficción. Halla el número de series de cada género.

Llamamos “ x ” al número de series de animación, “ y ” al número de series de ciencia ficción y “ z ” al número de series de comedia.

“Se sabe que el 30% de las series de animación más el 50% de las de ciencia ficción coincide con el 20% de total de series” $\rightarrow 0.30x + 0.50y = 0.20(x + y + z)$.

“El 25% de las series de animación más el 50% de las de ciencia ficción más el 60% de las de comedia representan la mitad del total de series” $\rightarrow$

$$0.25x + 0.50y + 0.60z = \frac{x + y + z}{2}.$$

“Hay 100 series menos de animación que de ciencia ficción” $\rightarrow x = y - 100$.

Juntamos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 0.30x + 0.50y = 0.20(x + y + z) \\ 0.25x + 0.50y + 0.60z = \frac{x + y + z}{2} \\ x = y - 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.30x + 0.50y = 0.20x + 0.20y + 0.20z \\ 0.5x + y + 1.2z = x + y + z \\ x = y - 100 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 0.10x + 0.30y - 0.20z = 0 \\ \Rightarrow -0.5x + 0.2z = 0 \\ x = y - 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.10(y - 100) + 0.30y - 0.20z = 0 \\ -0.5(y - 100) + 0.2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.10y - 10 + 0.30y - 0.20z = 0 \\ -0.5y + 50 + 0.2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.40y - 0.20z = 10 \\ -0.5y + 0.2z = -50 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y - 2z = 100 \\ -5y + 2z = -500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y - z = 50 \\ -5y + 2z = -500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y - 50 = z \\ -5y + 2z = -500 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y + 2(2y - 50) = -500 \Rightarrow -5y + 4y - 100 = -500 \Rightarrow -y = -400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 400} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 400 - 100 = 300} \\ \boxed{z = 2 \cdot 400 - 50 = 750} \end{array} \right.$$

Hay 300 series de animación, 400 de ciencia ficción y 750 de comedia.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Determina los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ que son equidistantes de los planos OYZ y OXZ.

El plano OYZ tiene ecuación $OYZ \equiv x = 0$, el plano OXZ tiene ecuación $OXZ \equiv y = 0$.
Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y - z + 3y - 1 = 0 \Rightarrow 4y - z - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y - 1 = z \Rightarrow x = y - (4y - 1) = y - 4y + 1 = 1 - 3y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Un punto perteneciente a la recta r tiene coordenadas $P(1 - 3\lambda, \lambda, -1 + 4\lambda)$.

Hallamos la distancia del punto P al plano OYZ.

$$\left. \begin{matrix} P(1 - 3\lambda, \lambda, -1 + 4\lambda) \\ OYZ \equiv x = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow d(P, OYZ) = \frac{|1 - 3\lambda|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = |1 - 3\lambda|$$

Hallamos la distancia del punto P al plano OXZ.

$$\left. \begin{matrix} P(1 - 3\lambda, \lambda, -1 + 4\lambda) \\ OXZ \equiv y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow d(P, OXZ) = \frac{|\lambda|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = |\lambda|$$

Igualamos las distancias y determinamos el valor de λ .

$$d(P, OYZ) = d(P, OXZ) \Rightarrow |1 - 3\lambda| = |\lambda| \Rightarrow \begin{cases} 1 - 3\lambda = \lambda \rightarrow 1 = 4\lambda \rightarrow \lambda = \frac{1}{4} \\ 1 - 3\lambda = -\lambda \rightarrow 1 = 2\lambda \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Obtenemos los puntos sustituyendo en la recta el valor de λ obtenido.

$$\text{Si } \lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow P\left(1 - 3\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1 + 4\frac{1}{4}\right) \Rightarrow P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$$

$$\text{Si } \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow P\left(1 - 3\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 + 4\frac{1}{2}\right) \Rightarrow P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Los dos puntos de la recta r equidistantes de los planos OYZ y OXZ son:

$$P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right) \text{ y } P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 2z = -2 \end{cases}$

a) [1,5 puntos] Determina la ecuación del plano paralelo a r que contiene a la recta

$$-x + 1 = y = \frac{z - 3}{2}.$$

b) [1 punto] Calcula la distancia entre la recta r y el plano $2x + 5y + 3z = 41$.

a) Un plano paralelo a la recta r tiene como uno de sus vectores directores el director de la recta. Hallamos un vector director de la recta r obteniendo las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z + 1 \\ 3x - 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow 3(y - z + 1) - 2z = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y - 3z + 3 - 2z = -2 \Rightarrow 3y - 5z = -5 \Rightarrow 3y = -5 + 5z \Rightarrow y = \frac{-5}{3} + \frac{5}{3}z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5}{3} + \frac{5}{3}z - z + 1 = \frac{-2}{3} + \frac{2}{3}z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{-2}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \frac{-5}{3} + \frac{5}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1 \right) \Rightarrow \boxed{\vec{u}_r = (2, 5, 3)}$$

Hallamos un punto y un vector director de la recta $s \equiv -x + 1 = y = \frac{z - 3}{2}$.

$$-x + 1 = y = \frac{z - 3}{2} \Rightarrow \frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_s(1, 0, 3) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 2) \end{cases}$$

El plano π paralelo a la recta r y que contiene la recta s tiene como vectores directores los vectores $\vec{u}_r = (2, 5, 3)$, $\vec{v}_s = (-1, 1, 2)$ y pasa por el punto $P_s(1, 0, 3)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_r = (2, 5, 3) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (-1, 1, 2) \\ P_s(1, 0, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10(x - 1) - 3y + 2(z - 3) + 5(z - 3) - 4y - 3(x - 1) = 0 \Rightarrow$$

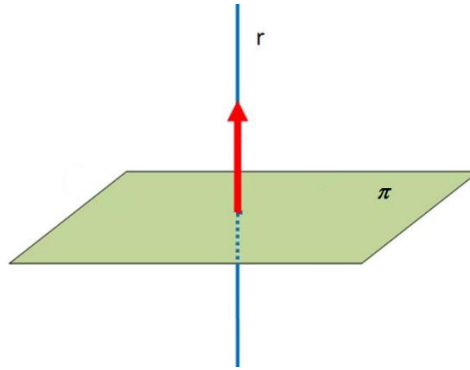
$$\Rightarrow 7(x - 1) + 7(z - 3) - 7y = 0 \Rightarrow 7x - 7 + 7z - 21 - 7y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x - 7y + 7z - 28 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - y + z - 4 = 0}$$

b) Estudiamos la posición relativa de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 5y + 3z = 41 \Rightarrow \vec{n} = (2, 5, 3) \\ \vec{u}_r = (2, 5, 3) \end{array} \right\}$$

El vector normal del plano y el vector director de la recta son el mismo, por lo que la recta y plano son perpendiculares y la distancia entre ambos no tiene sentido.



PevAU 2023 Extraordinaria (reserva) Matemáticas II



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Halla dos números mayores o iguales que 0, cuya suma sea 1, y el producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f(x) = \frac{x^2 + a}{x - b}$, para $x \neq b$.

- a) **[1,5 puntos]** Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(1, -2)$ y tenga a la recta $y = x + 4$ como asíntota oblicua.
- b) **[1 punto]** En el caso $a = 5$ y $b = 4$, calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de f que pasa por el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sabiendo que $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de f .

- a) **[1,25 puntos]** Comprueba que f es creciente.
- b) **[1,25 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función f , el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(\sqrt{x})$. Calcula, si es posible, una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 5)$. Sugerencia: haz el cambio $t = \sqrt{x}$



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- [0,75 puntos]** Calcula A^{10} .
- [1,75 puntos]** Calcula, si es posible, la matriz inversa de $I + A + A^2$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se define la matriz $M = A + (\lambda - 1)B$.

- [1,5 puntos]** Halla los valores de λ para los que la matriz M tiene rango menor que 3.
- [1 punto]** Para $\lambda = -1$, resuelve el sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es M .

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el plano π , determinado por los puntos $A(-1,0,0)$, $B(0,1,1)$ y $C(2,1,0)$, y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Halla los puntos de r cuya distancia a π es $\sqrt{14}$ unidades.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el paralelogramo cuyos vértices consecutivos son los puntos

$P(-1,2,3)$, $Q(-2,1,0)$, $R(0,5,1)$ y S .

- [1 punto]** Halla las coordenadas del punto S .
- [1,5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos P , Q y R .

SOLUCIONES**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Halla dos números mayores o iguales que 0, cuya suma sea 1, y el producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.

Llamamos x e y a los números que buscamos.

Su suma debe ser 1 $\rightarrow x + y = 1$.

El producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.

$$f(x, y) = y\sqrt{x}; \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

Despejamos “ y ” en la primera ecuación y sustituimos en la función.

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = y\sqrt{x} \\ x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = (1 - x)\sqrt{x} = \sqrt{x} - x\sqrt{x} = \sqrt{x} - \sqrt{x^3}$$

Derivamos e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x^3} = \sqrt{x} - x^{3/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}x^{3/2-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2} \Rightarrow 2 = 6(\sqrt{x})^2 \Rightarrow 2 = 6x \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$$

Comprobamos si es máximo estudiando la evolución de la función.

- En el intervalo $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ tomamos $x = 0.1$ y la derivada vale

$$f'(0.1) = \frac{1}{2\sqrt{0.1}} - \frac{3\sqrt{0.1}}{2} = \frac{7\sqrt{10}}{20} > 0. \text{ La función crece en el intervalo } \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{1}{2\sqrt{0.5}} - \frac{3\sqrt{0.5}}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{4} < 0. \text{ La función decrece en el intervalo } \left(\frac{1}{3}, 1\right).$$

Como la función crece antes de $x = \frac{1}{3}$ y decrece después de este valor la función presenta un valor máximo en $x = \frac{1}{3}$.

Para $x = \frac{1}{3}$ tenemos que $y = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Los números buscados son $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f(x) = \frac{x^2 + a}{x - b}$, para $x \neq b$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(1, -2)$ y tenga a la recta $y = x + 4$ como asíntota oblicua.

b) **[1 punto]** En el caso $a = 5$ y $b = 4$, calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de f que pasa por el punto de abscisa $x = 0$.

a) Para que la gráfica de f pase por el punto $(1, -2)$ debe cumplirse que $f(1) = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2 + a}{x - b} \\ f(1) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1^2 + a}{1 - b} = -2 \Rightarrow 1 + a = -2 + 2b \Rightarrow \boxed{a = -3 + 2b}$$

Para que la función tenga a la recta $y = x + 4$ como asíntota oblicua ($y = mx + n$) debe

cumplirse que $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ y $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + a}{x - b}}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + a}{x^2 - bx} = 1 \Rightarrow \text{¡Se cumple!}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + a}{x - b} - x = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + a - \cancel{x^2} + bx}{x - b} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a + bx}{x - b} = 4 \Rightarrow \frac{b}{1} = 4 \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación y obtenemos $a \rightarrow a = -3 + 2(4) = -3 + 8 = 5$

Los valores buscados son $a = 5$ y $b = 4$.

b) Para $a = 5$ y $b = 4$ la función queda $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 4}$, para $x \neq 4$.

La recta normal a la gráfica de f que pasa por el punto de abscisa $x = 0$ tiene ecuación

$$y - f(0) = \frac{-1}{f'(0)}(x - 0).$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 4} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 + 5}{0 - 4} = \frac{-5}{4}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x - 4) - 1(x^2 + 5)}{(x - 4)^2} = \frac{2x^2 - 8x - x^2 - 5}{(x - 4)^2} = \frac{x^2 - 8x - 5}{(x - 4)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{0^2 - 8 \cdot 0 - 5}{(0 - 4)^2} = \frac{-5}{16}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -5/4 \\ f'(0) = -5/16 \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{-5}{4} = \frac{-1}{-5/16}x \Rightarrow y + \frac{5}{4} = \frac{16}{5}x \Rightarrow \boxed{y = \frac{16}{5}x - \frac{5}{4}}$$

La recta normal buscada tiene ecuación $y = \frac{16}{5}x - \frac{5}{4}$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sabiendo que $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de f .

- a) [1,25 puntos] Comprueba que f es creciente.
 b) [1,25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función f , el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

a) Al ser $F(x)$ una primitiva de la función f tenemos que $f(x) = F'(x)$.

$$f(x) = F'(x) = 2xe^{x^2}$$

Hallamos la derivada de la función $f(x)$, la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f'(x) = 2e^{x^2} + 2x \cdot 2xe^{x^2} = (2 + 4x^2)e^{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2 + 4x^2)e^{x^2} = 0 \Rightarrow 2 + 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-2}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{-2}{4}} = \text{¡Imposible!}$$

La función no presenta puntos críticos y siempre es creciente o decreciente.

Comprobamos el signo de la derivada en un punto cualquiera, por ejemplo, en $x = 0$.

$$f'(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2} \Rightarrow f'(0) = (2 + 4 \cdot 0^2)e^{0^2} = 2 > 0$$

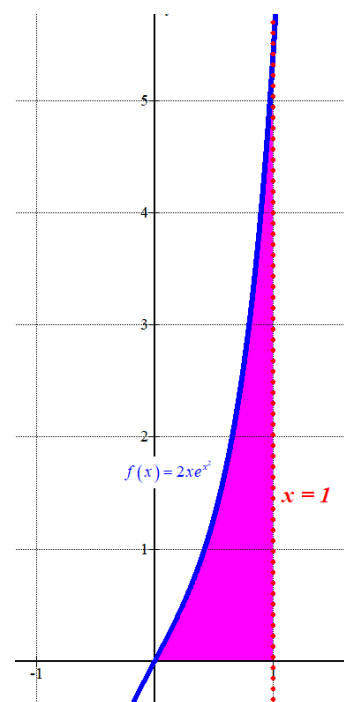
La función es creciente en $x = 0$ y, por tanto, es creciente en cualquier valor real.

b) Buscamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 2xe^{x^2} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2xe^{x^2} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

El área pedida es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 1.

$$\text{Área} = \int_0^1 2xe^{x^2} dx = \left[e^{x^2} \right]_0^1 = e^1 - e^0 = \boxed{e - 1 \approx 1.72 \text{ u}^2}$$



EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(\sqrt{x})$. Calcula, si es posible, una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 5)$. Sugerencia: haz el cambio $t = \sqrt{x}$

Calculamos la integral de la función $f(x)$.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int \cos(\sqrt{x}) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt \end{array} \right\} = \\
 &= \int 2t \cos(t) dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ 2t = u \rightarrow du = 2dt \\ \cos(t) dt = dv \rightarrow v = \int \cos(t) dt = \sin(t) \end{array} \right\} = \\
 &= 2t \sin(t) - \int 2 \sin(t) dt = 2t \sin(t) + 2 \cos(t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio} \\ \text{de variable} \\ \sqrt{x} = t \end{array} \right\} = \\
 &= 2\sqrt{x} \cdot \sin(\sqrt{x}) + 2 \cos(\sqrt{x}) + C
 \end{aligned}$$

Las primitivas de la función $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ son $F(x) = 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2 \cos(\sqrt{x}) + C$.

Como la primitiva debe pasar por el punto $(0, 5)$ debe cumplirse que $F(0) = 5$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2 \cos(\sqrt{x}) + C \\ F(0) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow F(0) = 2\sqrt{0} \sin(\sqrt{0}) + 2 \cos(\sqrt{0}) + C = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + C = 5 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow \boxed{F(x) = 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2 \cos(\sqrt{x}) + 3}$$

La primitiva buscada es $F(x) = 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2 \cos(\sqrt{x}) + 3$.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [0,75 puntos] Calcula A^{10} .

b) [1,75 puntos] Calcula, si es posible, la matriz inversa de $I + A + A^2$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

a) Calculamos las primeras potencias de la matriz A .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = A^3 A^3 A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos la expresión de $I + A + A^2$.

$$I + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & -b+ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si esta matriz tiene inversa viendo si su determinante es no nulo.

$$|I + A + A^2| = \begin{vmatrix} 1 & a & -b+ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

La matriz tiene inversa. La calculamos.

$$\begin{aligned} (I + A + A^2)^{-1} &= \frac{\text{Adj}(I + A + A^2)^t}{|I + A + A^2|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ -b+ab & b & 1 \end{pmatrix}}{1} = \\ &= \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a & 0 \\ -b+ab & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a & 1 \\ -b+ab & b \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -b+ab & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -b+ab & b \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab+b-ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -a & b \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se define la matriz $M = A + (\lambda - 1)B$.

- a) **[1,5 puntos]** Halla los valores de λ para los que la matriz M tiene rango menor que 3.
 b) **[1 punto]** Para $\lambda = -1$, resuelve el sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es M.

a) Hallamos la expresión de la matriz M.

$$M = A + (\lambda - 1)B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (\lambda - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ \lambda - 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz M tenga rango menor que 3 su determinante debe ser nulo.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 1 + \lambda - 1 + \lambda - 1 - (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 1) - 1 - 1$$

$$|M| = 3\lambda - 5 - (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda - 1) = 3\lambda - 5 - (\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda^2 + 2\lambda + \lambda - 1) =$$

$$= 3\lambda - 5 - (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = \cancel{3\lambda} - 5 - \lambda^3 + 3\lambda^2 - \cancel{3\lambda} + 1 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$$

$$|M| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 3 & 0 & -4 \\ -1 & & 1 & -4 & 4 \\ \hline & -1 & 4 & -4 & \underline{0} \end{array} \Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = (\lambda + 1)(-\lambda^2 + 4\lambda - 4)$$

$$-\lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(-4)}}{2(-1)} = \frac{-4 \pm 0}{-2} = 2$$

Para $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$ el determinante de M se anula.

Para $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$ el rango de M es menor que 3.

b) Para $\lambda = -1$ la matriz queda $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matriz M tiene rango menor que 3,

por lo que el sistema no puede ser compatible determinado.

Como todo sistema lineal homogéneo tiene solución el sistema será compatible indeterminado (infinitas soluciones).

El sistema queda:
$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$$
. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y + 2z \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 2z - 2y + z = 0 \\ -2(-y + 2z) + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3y + 3z = 0 \\ 2y - 4z + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow y - z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = z \Rightarrow x = -z + 2z = z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $x = y = z$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el plano π , determinado por los puntos $A(-1,0,0)$, $B(0,1,1)$ y $C(2,1,0)$, y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Halla los puntos de r cuya distancia a π es $\sqrt{14}$ unidades.

Hallamos la ecuación del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} A(-1,0,0) \in \pi \\ B(0,1,1) \in \pi \\ C(2,1,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(-1,0,0) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0,1,1) - (-1,0,0) = (1,1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2,1,0) - (-1,0,0) = (3,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 3y + z - 3z - 0 - x - 1 = 0 \Rightarrow -x + 3y - 2z - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - 3y + 2z + 1 = 0}$$

Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta r .

$$r \equiv \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = z + 2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Un punto P de la recta r tiene coordenadas $P(3+2\lambda, 2+\lambda, \lambda)$.

Hallamos la distancia de P al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} P(3+2\lambda, 2+\lambda, \lambda) \\ \pi \equiv x - 3y + 2z + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|3+2\lambda - 3(2+\lambda) + 2\lambda + 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{|3+2\lambda - 6 - 3\lambda + 2\lambda + 1|}{\sqrt{14}} = \frac{|\lambda - 2|}{\sqrt{14}}$$

Igualemos esta distancia a $\sqrt{14}$ y hallamos el valor de λ .

$$d(P, \pi) = \frac{|\lambda - 2|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \Rightarrow |\lambda - 2| = 14 \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2 = 14 \rightarrow \lambda = 16 \\ \lambda - 2 = -14 \rightarrow \lambda = -12 \end{cases}$$

$$\text{Si } \lambda = 16 \Rightarrow P(3+32, 2+16, 16) \Rightarrow \boxed{P(35, 18, 16)}$$

$$\text{Si } \lambda = -12 \Rightarrow P'(3-24, 2-12, -12) \Rightarrow \boxed{P'(-21, -10, -12)}$$

Los dos puntos de la recta r que están a una distancia $\sqrt{14}$ unidades del plano π son $P(35, 18, 16)$ y $P'(-21, -10, -12)$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

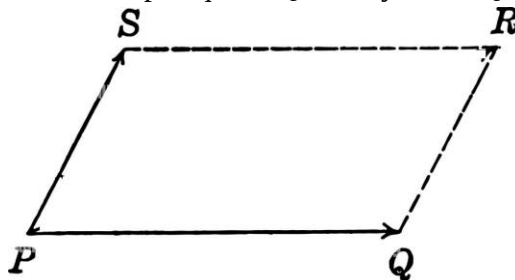
Considera el paralelogramo cuyos vértices consecutivos son los puntos

$P(-1,2,3)$, $Q(-2,1,0)$, $R(0,5,1)$ y S .

a) [1 punto] Halla las coordenadas del punto S .

b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos P , Q y R .

a) El paralelogramo PQRS debe cumplir que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ y $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$.



$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (-2,1,0) - (-1,2,3) = (-1,-1,-3) \\ \overrightarrow{SR} = (0,5,1) - (x,y,z) = (-x,5-y,1-z) \\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \end{array} \right\} \Rightarrow (-1,-1,-3) = (-x,5-y,1-z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 = -x \quad x = 1 \\ -1 = 5 - y \Rightarrow y = 6 \\ -3 = 1 - z \quad z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{S(1,6,4)}$$

Comprobamos que se cumple $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PS} = (1,6,4) - (-1,2,3) = (2,4,1) \\ \overrightarrow{QR} = (0,5,1) - (-2,1,0) = (2,4,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR} = (2,4,1)$$

El punto S tiene coordenadas $S(1,6,4)$.

b) Hallamos la ecuación del plano que contiene a los puntos P , Q y R .

$$\left. \begin{array}{l} P(-1,2,3) \in \pi \\ Q(-2,1,0) \in \pi \\ R(0,5,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(-1,2,3) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-1,-1,-3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{QR} = (2,4,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-1-6(y-2)-4(z-3)+2(z-3)+y-2+12(x+1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-1-6y+12-4z+12+2z-6+y-2+12x+12=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 11x-5y-2z+27=0}$$

La recta s es perpendicular al plano $\pi \equiv 11x-5y-2z+27=0$ y tiene como vector director el vector normal del plano $\vec{n} = (11,-5,-2)$.

$$\left. \begin{array}{l} (0,0,0) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{n} = (11,-5,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 11\lambda \\ y = -5\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2\lambda \end{cases}$$



PevAU 2023 Ordinaria Matemáticas II
PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2022-2023

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

- a) **[1,5 puntos]** Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) **[1 punto]** Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f(x))$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 2x + 5$.

- a) **[1,5 puntos]** Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$.
- b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|x-1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x F(x)}{\sin(x^2)}$.



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA
EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE
ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2022-2023

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos. El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- [0,5 puntos]** Determina para que valores de m tiene inversa de la matriz A ?
- [2 puntos]** Para todo $m \neq -1$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX + X = B$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

El plano perpendicular al segmento de extremos $P(0, 3, 8)$ y $Q(2, 1, 6)$ que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A , B y C . Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A , B y C .

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el punto $A(-1, 1, 3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2, 1, 1)$ y $C(0, 1, -1)$

- [1,5 puntos]** Halla la distancia del punto A a la recta r .
- Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A , B y C .

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

- a) **[1,5 puntos]** Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
 b) **[1 punto]** Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f(x))$.

a) Usamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = \frac{0 - 1(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = 0 \Rightarrow -e^x + e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = e^x \Rightarrow -x = x \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Estudiamos el cambio de signo de la derivada antes y después de $x = 0$.

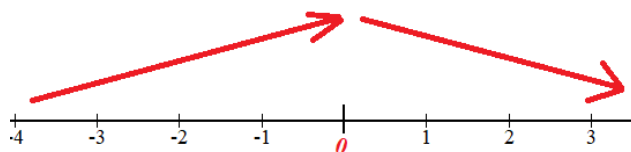
- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-e^{-1} + e^1}{(e^{-1} + e^1)^2} \approx 0.24 > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = \frac{-e^1 + e^{-1}}{(e^1 + e^{-1})^2} \approx -0.24 < 0. \text{ La función decrece en } (0, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo que es absoluto en $x = 0$. En dicho valor la función vale $f(0) = \frac{1}{e^0 + e^{-0}} = \frac{1}{2}$. El máximo absoluto tiene coordenadas $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

La función no presenta mínimo relativo ni absoluto pues su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{0 + \infty} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\infty + 0} = 0$. La función es siempre positiva, pero no alcanza el valor 0 en ningún punto de la gráfica.

b) Hallamos la expresión de $x^2 f(x)$ y calculamos el límite pedido.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f(x)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x + e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty + 0} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty - 0} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{\infty + 0} = \frac{2}{\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 2x + 5$.

- a) **[1,5 puntos]** Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$.
- b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

a) La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$ vale:

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) = (-2)^3 - 2(-2) + 5 = 1 \\ f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 5 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Pendiente} = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{9 - 1}{4} = 2$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada. Igualamos las expresiones y hallamos el punto o puntos pedidos.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 2 \\ \text{Pendiente} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 2 = 2 \Rightarrow 3x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$$

Existen dos puntos donde se cumple lo pedido: $x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$; $x = +\sqrt{\frac{4}{3}}$

b) Hallamos las coordenadas del punto de inflexión igualando a cero la segunda derivada.

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \Rightarrow f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Como } f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(0) = 6 \neq 0$$

La función presenta un punto de inflexión en $x = 0$.

Hallamos la ecuación de la recta tangente en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0 + 5 = 5 \\ f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 5 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 5$$

Hallamos la ecuación de la recta normal en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 5 \\ f'(0) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 5 = -\frac{1}{-2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 5$$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|x-1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$.

La función valor absoluto la expresamos como una función a trozos.

$$f(x) = x|x-1| = \begin{cases} x(-x+1) & \text{si } x \leq 1 \\ x(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallamos la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$. En el entorno de este valor la función es $f(x) = x|x-1| = x(-x+1)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x(-x+1) = -x^2 + x \rightarrow f'(x) = -2x + 1 \\ f'(0) &= -0 + 1 = 1 \\ f(0) &= 0(-0+1) = 0 \\ y - f(0) &= f'(0)(x-0) \end{aligned} \Rightarrow y - 0 = 1(x-0) \Rightarrow y = x$$

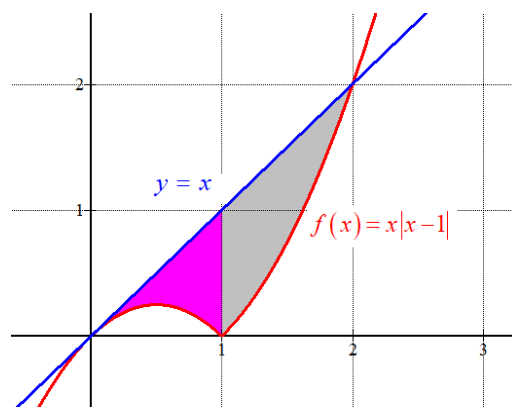
Nos piden calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = x|x-1|$ y la recta $y = x$. Averiguamos donde se cortan ambas funciones.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} f(x) &= x|x-1| \\ y &= x \end{aligned} \right\} \Rightarrow x|x-1| = x \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x(x-1) = x \rightarrow x^2 - x = x \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \\ x(-x+1) = x \rightarrow -x^2 + x = x \rightarrow -x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

El recinto del cual queremos hallar el área es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y 2 de la diferencia de las dos funciones. Como la función cambia de definición en $x = 1$ y pertenece al intervalo $(0, 2)$ dividimos el área en dos partes.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(-x+1) dx &= \int_0^1 -x^2 + x dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= \left[-\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} \right] = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 x(x-1) dx &= \int_1^2 x^2 - x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} \right] - \left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} \right] = \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$



El área del recinto es la suma de estos dos valores: $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$ *unidad cuadrada*.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2) dt$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x F(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x F(x)}{\operatorname{sen}(x^2)} = \frac{0 \cdot F(0)}{\operatorname{sen}(0^2)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \dots$$

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ por lo que la función $F(x)$ es continua y derivable siendo su derivada $F'(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

Usando esta propiedad calculamos el valor del límite pedido.

$$\dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) + x F'(x)}{2x \cdot \cos(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) + x \operatorname{sen}(x^2)}{2x \cdot \cos(x^2)} = \frac{F(0) + 0 \operatorname{sen}(0^2)}{2 \cdot 0 \cdot \cos(0^2)} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x) + \operatorname{sen}(x^2) + x \cdot 2x \cdot \cos(x^2)}{2 \cos(x^2) + 2x \cdot 2x \cdot [-\operatorname{sen}(x^2)]} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2) + \operatorname{sen}(x^2) + 2x^2 \cdot \cos(x^2)}{2 \cos(x^2) - 4x^2 \cdot \operatorname{sen}(x^2)} = \frac{0 + 0 + 0}{2 \cos(0) + 0} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos. El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

Llamamos “x” al número de coches blancos, “y” al número de coches negros y “z” al número de coches rojos.

El número total de coches vendidos es $x + y + z$.

“El 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos” $\rightarrow 0.6 \cdot x + 0.50 \cdot y = 0.30(x + y + z)$

“El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos” $\rightarrow$

$$0.20 \cdot x + 0.60 \cdot y + 0.60 \cdot z = \frac{x + y + z}{2}$$

“Se han vendido 100 coches negros más que blancos” $\rightarrow y = x + 100$.

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 0.6 \cdot x + 0.50 \cdot y = 0.30(x + y + z) \\ 0.20 \cdot x + 0.60 \cdot y + 0.60 \cdot z = \frac{x + y + z}{2} \\ y = x + 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 5y = 3(x + y + z) \\ 2x + 6y + 6z = 10 \frac{x + y + z}{2} \\ y = x + 100 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 5y = 3x + 3y + 3z \\ \Rightarrow 2x + 6y + 6z = 5x + 5y + 5z \\ y = x + 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y - 3z = 0 \\ -3x + y + z = 0 \\ y = x + 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2(x + 100) - 3z = 0 \\ -3x + x + 100 + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2x + 200 - 3z = 0 \\ -2x + z + 100 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x - 3z = -200 \\ z = -100 + 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 5x - 3(-100 + 2x) = -200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x + 300 - 6x = -200 \Rightarrow -x = -500 \Rightarrow \boxed{x = 500} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = 500 + 100 = 600} \\ \boxed{z = -100 + 2 \cdot 500 = 900} \end{array} \right.$$

Se han vendido 500 coches blancos, 600 negros y 900 rojos.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [0,5 puntos] Determina para que valores de m tiene inversa de la matriz A ?

b) [2 puntos] Para todo $m \neq -1$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX + X = B$.

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + m^3 - 0 - 0 - 0 = m^3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^3 = 0 \Rightarrow m = 0$$

La matriz A tiene inversa cuando m es distinto de 0.

b) Despejo X de la ecuación $AX + X = B$.

$$(A + I)X = B \Rightarrow X = (A + I)^{-1}B$$

Comprobamos que la matriz $A + I$ tiene inversa viendo si su determinante es no nulo.

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A + I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + m^3 - 0 - 0 - 0 = m^3 + 1$$

$$|A + I| = 0 \Rightarrow m^3 + 1 = 0 \Rightarrow m^3 = -1 \Rightarrow m = \sqrt[3]{-1} = -1$$

La matriz $A + I$ tiene inversa pues $m \neq -1$. La calculamos.

$$(A + I)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A + I)^T}{|A + I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}}{m^3 + 1} = \frac{1}{m^3 + 1} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m & 0 \\ 1 & m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{m^3 + 1} \begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz X.

$$X = (A + I)^{-1} B = \frac{1}{m^3 + 1} \begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{m^3 + 1} \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ -m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AX + X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} mg & mh & mi \\ ma & mb & mc \\ md & me & mf \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} mg+a & mh+b & mi+c \\ ma+d & mb+e & mc+f \\ md+g & me+h & mf+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} mg+a=1 \\ mh+b=0 \\ mi+c=0 \\ ma+d=0 \\ mb+e=0 \\ mc+f=1 \\ md+g=0 \\ me+h=1 \\ mf+i=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = -mi \\ a = \frac{-d}{m} \\ e = -mb \\ g = -md \\ f = \frac{-i}{m} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m(-md) - \frac{d}{m} = 1 \\ m(-mi) - \frac{i}{m} = 1 \\ m(-mb) - \frac{b}{m} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -m^2d - \frac{d}{m} = 1 \\ -m^2i - \frac{i}{m} = 1 \\ -m^2b - \frac{b}{m} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d \left(-m^2 - \frac{1}{m} \right) = 1 \\ i \left(-m^2 - \frac{1}{m} \right) = 1 \\ b \left(-m^2 - \frac{1}{m} \right) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} d \left(-\frac{m^3+1}{m} \right) = 1 \\ i \left(-\frac{m^3+1}{m} \right) = 1 \\ b \left(-\frac{m^3+1}{m} \right) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d = \frac{-m}{m^3+1} \\ i = \frac{-m}{m^3+1} \\ b = \frac{-m}{m^3+1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h = \frac{-1}{m} \frac{-m}{m^3+1} = \frac{1}{m^3+1} \\ c = -m \frac{-m}{m^3+1} = \frac{m^2}{m^3+1} \\ a = \frac{-1}{m} \frac{-m}{m^3+1} = \frac{1}{m^3+1} \\ e = -m \frac{-m}{m^3+1} = \frac{m^2}{m^3+1} \\ g = -m \frac{-m}{m^3+1} = \frac{m^2}{m^3+1} \\ f = \frac{-1}{m} \frac{-m}{m^3+1} = \frac{1}{m^3+1} \end{array} \right\} \Rightarrow X = \frac{1}{m^3+1} \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ -m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

El plano perpendicular al segmento de extremos $P(0, 3, 8)$ y $Q(2, 1, 6)$ que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C.

El punto medio M del segmento PQ tiene coordenadas $M = \frac{(0, 3, 8) + (2, 1, 6)}{2} = (1, 2, 7)$.

El plano π perpendicular al segmento PQ tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{PQ}$. Y contiene al punto M.

$$\overrightarrow{PQ} = (2, 1, 6) - (0, 3, 8) = (2, -2, -2)$$

$$\pi: \begin{cases} \vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (2, -2, -2) \\ M(1, 2, 7) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi: 2x - 2y - 2z + D = 0 \\ M(1, 2, 7) \in \pi \end{cases} \Rightarrow 2 - 4 - 14 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 16 \Rightarrow \pi: 2x - 2y - 2z + 16 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - y - z + 8 = 0}$$

Hallamos los puntos de corte con cada uno de los ejes de coordenadas.

$$A \rightarrow \begin{cases} \pi: x - y - z + 8 = 0 \\ OX: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8 \Rightarrow A(-8, 0, 0)$$

$$B \rightarrow \begin{cases} \pi: x - y - z + 8 = 0 \\ OY: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow -y + 8 = 0 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow B(0, 8, 0)$$

$$C \rightarrow \begin{cases} \pi: x - y - z + 8 = 0 \\ OZ: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow -z + 8 = 0 \Rightarrow z = 8 \Rightarrow C(0, 0, 8)$$

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (0, 8, 0) - (-8, 0, 0) = (8, 8, 0) \\ \overrightarrow{AC} &= (0, 0, 8) - (-8, 0, 0) = (8, 0, 8) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 64i - 64k - 64j$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (64, -64, -64)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{64^2 + (-64)^2 + (-64)^2}}{2} = \boxed{32\sqrt{3} \approx 55.426 \text{ unidades cuadradas}}$$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el punto $A(-1, 1, 3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2, 1, 1)$ y $C(0, 1, -1)$

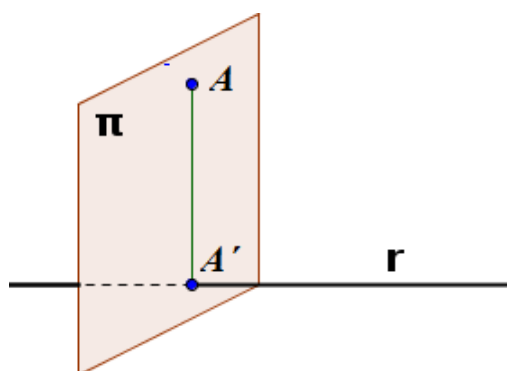
a) **[1,5 puntos]** Halla la distancia del punto A a la recta r .

b) **[1 punto]** Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A , B y C .

a) Hallamos la ecuación de la recta r .

$$r: \begin{cases} B(2, 1, 1) \in r \\ C(0, 1, -1) \in r \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{v}_r = \overrightarrow{CB} = (2, 1, 1) - (0, 1, -1) = (2, 0, 2) \\ B(2, 1, 1) \in r \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$



Hallamos la proyección ortogonal del punto A en la recta r . Para ello hallamos el punto A' perteneciente a la recta tal que el vector $\overrightarrow{AA'}$ sea ortogonal al vector director de la recta $\vec{v}_r = (2, 0, 2)$.

$$r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow A'(2 + 2t, 1, 1 + 2t) \\ A' \in r$$

$$\overrightarrow{AA'} = (2 + 2t, 1, 1 + 2t) - (-1, 1, 3) = (3 + 2t, 0, -2 + 2t)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_r &= (2, 0, 2) \\ \overrightarrow{AA'} &= (3 + 2t, 0, -2 + 2t) \\ \vec{v}_r \cdot \overrightarrow{AA'} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2, 0, 2)(3 + 2t, 0, -2 + 2t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 + 4t - 4 + 4t = 0 \Rightarrow 8t = -2 \Rightarrow t = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 \cdot \frac{-1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ y = 1 \\ z = 1 + 2 \cdot \frac{-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

La distancia del punto A a la recta r es la distancia del punto A al punto A', es decir, el módulo del vector $\overrightarrow{AA'}$.

$$\overrightarrow{AA'} = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) - (-1, 1, 3) = \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{-5}{2}\right)$$

$$d(A, r) = d(A, A') = |\overrightarrow{AA'}| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3.54 \text{ unidades}$$

b) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 1, 1) - (-1, 1, 3) = (3, 0, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, -1) - (-1, 1, 3) = (1, 0, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -2j + 12j = 10j$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 10, 0)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 10^2 + 0^2}}{2} = \boxed{5 \text{ unidades cuadradas}}$$

PevAU 2023 Ordinaria (suplente) Matemáticas II



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

De entre todos los rectángulos de diagonal 10 cm (cada una), calcula las dimensiones del que tiene mayor área.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f(x) = \frac{1}{x|x|}$, para $x \neq 0$.

- a) **[1 punto]** Calcula los intervalos de concavidad y de convexidad de f , así como los puntos de inflexión de su gráfica, si existen.
- b) **[1,5 puntos]** Estudia y calcula las asíntotas de la función. Esboza su gráfica.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Determina la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto $(1, 0)$, $f'(e) = e$ y $f''(x) = 2\ln(x) + 1$, para todo $x > 0$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x^2 - 1|$ y $g(x) = x + 5$.

- a) **[1,25 puntos]** Calcula los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que determinan.
- b) **[1,25 puntos]** Determina el área del recinto anterior.



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA
EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE
ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) **[1 punto]** Calcula m para que la matriz A tenga inversa.
- b) **[1,5 puntos]** Para $m = 0$, resuelve, si es posible, la ecuación matricial $\frac{1}{2}AX + C^4 = B$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & x \\ z & z & y \end{pmatrix}$, $B = (\alpha \ 1 \ 1)$ y $C = (1 \ 1 \ 1)$.

- a) **[1,5 puntos]** Discute el sistema $BA = C$, según los valores de α .
- b) **[1 punto]** Resuelve el sistema, si es posible, para $\alpha = 0$ y para $\alpha = 1$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Determina el punto simétrico de $A(2, -4, -3)$ con respecto al plano que contiene a los puntos $B(1, 1, 2)$, $C(0, 1/3, 1)$ y $D(-3, 0, 3)$.

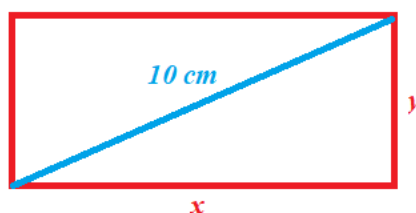
EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Dados los puntos $O(0, 0, 0)$, $A(2, -1, 0)$, $B(3, 0, x)$ y $C(-x, 1, -1)$, los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ determinan un paralelepípedo.

- a) **[1,5 puntos]** Calcula los posibles valores de x sabiendo que el volumen del paralelepípedo es 5 unidades cúbicas.
- b) **[1 punto]** Para $x = 1$, halla el área de la cara del paralelepípedo que contiene a los vértices O , A y B .

SOLUCIONES**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

De entre todos los rectángulos de diagonal 10 cm (cada uno), calcula las dimensiones del que tiene mayor área.



Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos x, y .

$$x^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow y^2 = 100 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$$

El área del rectángulo es $\text{Base} \cdot \text{altura} = xy$.

$$A(x) = xy = x\sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100x^2 - x^4}; \quad 0 \leq x \leq 10$$

Hallamos los puntos críticos de la función Área.

$$A(x) = \sqrt{100x^2 - x^4} \Rightarrow A'(x) = \frac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 200x - 4x^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x(50 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Área} = 0 \\ 50 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 50 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{50} \approx 7.07} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = \sqrt{50}$.

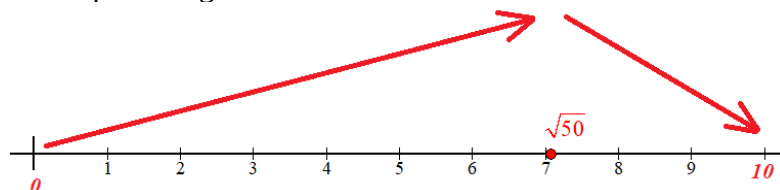
- En el intervalo $(0, \sqrt{50})$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale

$$A'(5) = \frac{200 \cdot 5 - 4 \cdot 5^3}{2\sqrt{100 \cdot 5^2 - 5^4}} = \frac{500}{+} > 0. \text{ La función crece en } (0, \sqrt{50}).$$

- En el intervalo $(\sqrt{50}, 10)$ tomamos $x = 8$ y la derivada vale

$$A'(8) = \frac{200 \cdot 8 - 4 \cdot 8^3}{2\sqrt{100 \cdot 8^2 - 8^4}} = \frac{-448}{+} < 0. \text{ La función decrece en } (\sqrt{50}, 10).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo en $x = \sqrt{50}$.

$$\text{Para } x = \sqrt{50} \text{ tenemos que } y = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - (\sqrt{50})^2} = \sqrt{50}.$$

El rectángulo de área máxima con diagonal 10 cm es un cuadrado de lado $\sqrt{50} \approx 7.07$ cm.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f(x) = \frac{1}{x|x|}$, para $x \neq 0$.

- a) **[1 punto]** Calcula los intervalos de concavidad y de convexidad de f , así como los puntos de inflexión de su gráfica, si existen.
 b) **[1,5 puntos]** Estudia y calcula las asíntotas de la función. Esboza su gráfica.

a) Expresamos la función como una función a trozos.

$$f(x) = \frac{1}{x|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x \cdot (-x)} = \frac{-1}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x \cdot (x)} = \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calculamos la derivada segunda y averiguamos cuando se anula.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2} = -x^{-2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x^2} = x^{-2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2x^{-3} & \text{si } x < 0 \\ -2x^{-3} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} -6x^{-4} = \frac{-6}{x^4} & \text{si } x < 0 \\ 6x^{-4} = \frac{6}{x^4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Esta expresión de la segunda derivada nunca se anula y en cada intervalo no cambia su signo.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale

$$f''(-1) = \frac{-6}{(-1)^4} = -6 < 0. \text{ La función es cóncava } (\cap) \text{ en el intervalo } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale $f''(1) = \frac{6}{1^4} = 6 > 0$.

La función es convexa ($\cup$) en el intervalo $(0, +\infty)$.

La función es cóncava ($\cap$) en el intervalo $(-\infty, 0)$ y convexa ($\cup$) en el intervalo $(0, +\infty)$. No presenta puntos de inflexión, pues $x = 0$ no pertenece al dominio de la función.

b) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

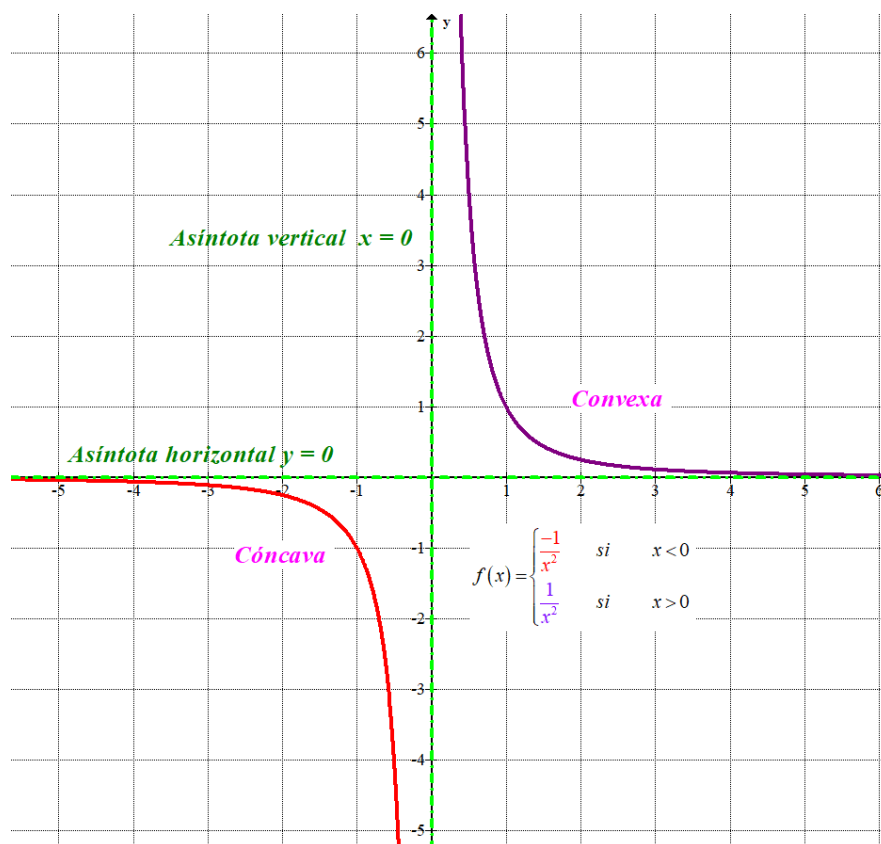
$y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene asíntota oblicua, pues tiene asíntota horizontal.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

$x < 0$		$x > 0$	
x	$y = \frac{-1}{x^2}$	x	$y = \frac{1}{x^2}$
-2	-0.25	0.5	4
-1	-1	1	1
-0.5	-4	2	0.25



EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Determina la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto $(1, 0)$, $f'(e) = e$ y $f''(x) = 2\ln(x) + 1$, para todo $x > 0$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

Si la segunda derivada es $f''(x) = 2\ln(x) + 1$ su integral será la derivada primera.

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int 2\ln(x) + 1 dx = 2 \int \ln x dx + \int dx = \dots$$

$$\int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integral por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x$$

$$\dots = 2(x \ln x - x) + x = 2x \ln x - 2x + x = 2x \ln x - x + A$$

Si $f'(e) = e$ entonces:

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x \ln x - x + A \\ f'(e) = e \end{array} \right\} \Rightarrow e = 2e \ln e - e + A \Rightarrow e = 2e - e + A \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

La primera derivada queda $f'(x) = 2x \ln x - x$.

Si la primera derivada es $f'(x) = 2x \ln x - x$ su integral será la función.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 2x \ln x - x dx = 2 \int x \ln x dx - \int x dx = \dots$$

$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integral por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$$

$$\dots = 2 \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) - \frac{x^2}{2} = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} = x^2 \ln x - x^2 + B$$

La función tiene la expresión $f(x) = x^2 \ln x - x^2 + B$.

Si su gráfica pasa por el punto $(1, 0) \rightarrow f(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 \ln x - x^2 + B \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 1^2 \ln 1 - 1^2 + B \Rightarrow \boxed{B = 1}$$

La función tiene la expresión $f(x) = x^2 \ln x - x^2 + 1$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x^2 - 1|$ y $g(x) = x + 5$.

- a) [1,25 puntos] Calcula los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que determinan.
b) [1,25 puntos] Determina el área del recinto anterior.

a) Expresamos la función $f(x)$ como una función a trozos.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Buscamos los puntos de corte de las gráficas.

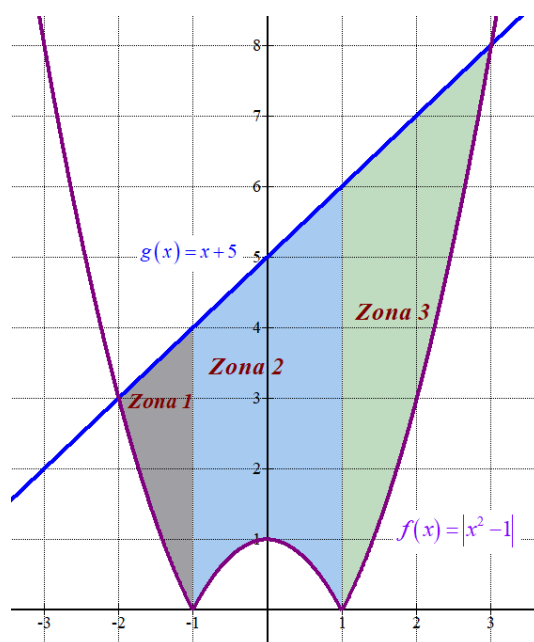
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = |x^2 - 1| \\ g(x) = x + 5 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow |x^2 - 1| = x + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = x + 5 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 = x \\ \frac{1-5}{2} = -2 = x \end{cases} \\ x^2 - 1 = -(x + 5) \rightarrow x^2 + x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \text{No existe} \end{cases}$$

Como $g(3) = 3 + 5 = 8$ y $g(-2) = -2 + 5 = 3$ los puntos de corte de las gráficas son $P(3, 8)$ y $Q(-2, 3)$.

Hacemos una tabla de valores y esbozamos las gráficas y el recinto que delimitan.

x	$y = x^2 - 1 $	x	$y = x + 5$
-2	3	-2	3
-1	0	-1	4
0	1	0	5
1	0	1	6
3	8	3	8



- b) El recinto del cual queremos hallar el área lo dividimos en tres zonas.
Calculamos el área de cada una de ellas

Zona 1:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} x+5-(x^2-1)dx &= \int_{-2}^{-1} x+5-x^2+1dx = \int_{-2}^{-1} -x^2+x+6dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^{-1} = \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 6(-1) \right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} + 6(-2) \right] = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 6 - \frac{8}{3} - 2 + 12 = 4 - \frac{7}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{13}{6}}\end{aligned}$$

Zona 2:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x+5-(-x^2+1)dx &= \int_{-1}^1 x+5+x^2-1dx = \int_{-1}^1 x^2+x+4dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^1 = \left[\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 4 \cdot 1 \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 4(-1) \right] = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 = 8 + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{26}{3}}\end{aligned}$$

Zona 3:

$$\begin{aligned}\int_1^3 x+5-(x^2-1)dx &= \int_1^3 x+5-x^2+1dx = \int_1^3 -x^2+x+6dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_1^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 6 \cdot 3 \right] - \left[-\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 6 \cdot 1 \right] = \\ &= -9 + \frac{9}{2} + 18 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 6 = 3 + \frac{8}{2} + \frac{1}{3} = 7 + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{22}{3}}\end{aligned}$$

El área del recinto es la suma de estos tres valores: $\frac{13}{6} + \frac{26}{3} + \frac{22}{3} = \frac{109}{6} \approx 18.16$ unidades cuadradas.

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) [1 punto] Calcula m para que la matriz A tenga inversa.b) [1,5 puntos] Para $m = 0$, resuelve, si es posible, la ecuación matricial $\frac{1}{2}AX + C^4 = B$.a) Para que la matriz A tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = (m+1)^2 + m-1 + m-1 - (m-1)^2 - (m+1) - (m+1) =$$

$$= m^2 + 2m + 1 + 2m - 2 - (m^2 - 2m + 1) - m - 1 - m - 1 =$$

$$= \cancel{m^2} + 2m + \cancel{1} + 2m - 2 - \cancel{m^2} + \cancel{2m} - \cancel{1} - \cancel{2m} - 2 = 4m - 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4m - 4 = 0 \Rightarrow 4m = 4 \Rightarrow \boxed{m=1}$$

El determinante de A se anula para $m = 1$. La matriz A tiene inversa para cualquier valor de m distinto de 1.

b) Para $m = 0$ la matriz A tiene inversa. Despejamos X en la ecuación matricial.

$$\frac{1}{2}AX + C^4 = B \Rightarrow \frac{1}{2}AX = B - C^4 \Rightarrow AX = 2(B - C^4) \Rightarrow X = 2A^{-1}(B - C^4)$$

Calculamos la inversa de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -4 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de X.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$C^4 = C^2 \cdot C^2 = I \cdot I = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B - C^4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = 2A^{-1}(B - C^4) = 2 \cdot \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2+4 & -8 \\ 2-4 & -8-4 & -4 \\ -2 & 8+2 & 4-8 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 6 & -8 \\ -2 & -12 & -4 \\ -2 & 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & x \\ z & z & y \end{pmatrix}$, $B = (\alpha \ 1 \ 1)$ y $C = (1 \ 1 \ 1)$.

a) [1,5 puntos] Discute el sistema $BA = C$, según los valores de α .

b) [1 punto] Resuelve el sistema, si es posible, para $\alpha = 0$ y para $\alpha = 1$.

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones asociado a la ecuación matricial.

$$BA = C \Rightarrow (\alpha \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & x \\ z & z & y \end{pmatrix} = (1 \ 1 \ 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x\alpha + y + z & y\alpha + x + z & z\alpha + x + y \end{pmatrix} = (1 \ 1 \ 1) \Rightarrow \begin{cases} x\alpha + y + z = 1 \\ y\alpha + x + z = 1 \\ z\alpha + x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + 1 + 1 - \alpha - \alpha - \alpha = \alpha^3 - 3\alpha + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow 1 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ & 1 & 1 & -2 \\ & 1 & 1 & -2 \end{array} \right| \Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = 1} \\ \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \boxed{1 = \alpha} \\ \frac{-1-3}{2} = \boxed{-2 = \alpha} \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda tan sencillo que lo analizamos sin usar los rangos.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Tres ecuaciones iguales}\} \Rightarrow x + y + z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda - \beta \\ y = \beta \\ z = \lambda \end{cases}, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 3. Si $\alpha = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Obtenemos una matriz triangular equivalente utilizando el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A/B &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ -2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 2 \quad -4 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 3 \quad 3 \rightarrow \text{Fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a + 2 \cdot \text{Fila } 3^a \\ -2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \quad -4 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -3 \quad 3 \rightarrow \text{Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 3 \quad -3 \quad 3 \\ 0 \quad -3 \quad 3 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right) \end{aligned}$$

La matriz A tiene rango 2 y la matriz ampliada A/B tiene rango 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$ el sistema $BA = C$ tiene una única solución, si $\alpha = -2$ el sistema no tiene solución y si $\alpha = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones.

- b) Para $\alpha = 0$ el sistema tiene una única solución la obtenemos a partir del sistema de ecuaciones obtenido en el apartado a).

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - z \\ x + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ x + 1 - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ x = z \end{cases} \Rightarrow z + z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z = 1 \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1/2} \\ \boxed{y = 1 - 1/2 = 1/2} \end{cases}$$

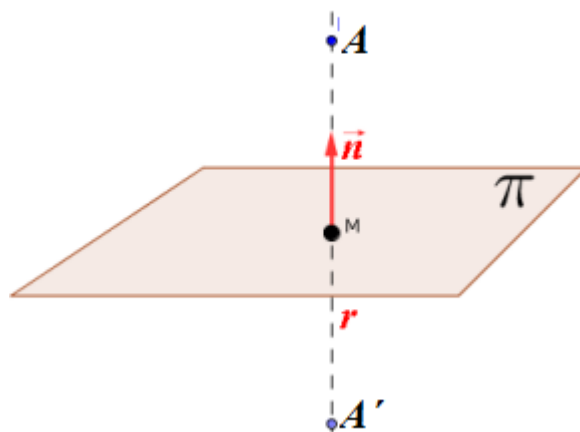
Para $\alpha = 0$ la solución del sistema es $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Para $\alpha = 1$ las soluciones son: $\begin{cases} x = 1 - \lambda - \beta \\ y = \beta \\ z = \lambda \end{cases}, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$, obtenidas en el apartado a).

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Determina el punto simétrico de $A(2, -4, -3)$ con respecto al plano que contiene a los puntos $B(1, 1, 2)$, $C(0, 1/3, 1)$ y $D(-3, 0, 3)$.

Debemos hallar el punto A' simétrico del punto A respecto del plano π que contiene a los puntos B , C y D .



Hallamos la ecuación del plano π que contiene los puntos B , C y D .

$$\pi : \begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{CB} = (1, 1, 2) - \left(0, \frac{1}{3}, 1\right) = \left(1, \frac{2}{3}, 1\right) \\ \vec{v} = \overrightarrow{BD} = (-3, 0, 3) - (1, 1, 2) = (-4, -1, 1) \\ B(1, 1, 2) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2/3 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} - 4(y-1) - z + 2 + \frac{8}{3}(z-2) - (y-1) + x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} - 4y + 4 - z + 2 + \frac{8}{3}z - \frac{16}{3} - y + 1 + x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{5}{3}x - 5y + \frac{5}{3}z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x - 15y + 5z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - 3y + z = 0}$$

Hallamos la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto A .

$$\pi : x - 3y + z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -3, 1)$$

$$r : \begin{cases} A(2, -4, -3) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (1, -3, 1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -4 - 3\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$$

El punto medio M del segmento AA' es el punto de corte de la recta r con el plano π .

$$\pi : x - 3y + z = 0$$
$$r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -4 - 3\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow 2 + \lambda - 3(-4 - 3\lambda) - 3 + \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + \lambda + 12 + 9\lambda - 3 + \lambda = 0 \Rightarrow 11\lambda + 11 = 0 \Rightarrow 11\lambda = -11 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = -4 - 3(-1) = -1 \\ z = -3 - 1 = -4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(1, -1, -4)}$$

El punto A' es $M + \overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{AM} = (1, -1, -4) - (2, -4, -3) = (-1, 3, -1)$$

$$A' = M + \overrightarrow{AM} = (1, -1, -4) + (-1, 3, -1) = (0, 2, -5)$$

El punto A' simétrico de A con respecto al plano que contiene a los puntos B, C y D tiene coordenadas A'(0, 2, -5)

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Dados los puntos $O(0,0,0)$, $A(2,-1,0)$, $B(3,0,x)$ y $C(-x,1,-1)$, los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ determinan un paralelepípedo.

a) **[1,5 puntos]** Calcula los posibles valores de x sabiendo que el volumen del paralelepípedo es 5 unidades cúbicas.

b) **[1 punto]** Para $x = 1$, halla el área de la cara del paralelepípedo que contiene a los vértices O , A y B .

a) El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]$.

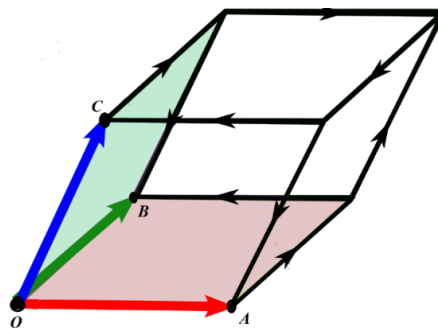
$$\overrightarrow{OA} = (2, -1, 0) - (0, 0, 0) = (2, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{OB} = (3, 0, x) - (0, 0, 0) = (3, 0, x)$$

$$\overrightarrow{OC} = (-x, 1, -1) - (0, 0, 0) = (-x, 1, -1)$$

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & x \\ -x & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + x^2 + 0 - 0 - 3 - 2x = \boxed{x^2 - 2x - 3}$$



Como el volumen del paralelepípedo debe valer 5 unidades cúbicas tenemos:

$$|x^2 - 2x - 3| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 5 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \boxed{1} \\ x^2 - 2x - 3 = -5 \rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow \boxed{2} \end{cases}$$

$$\boxed{1} \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = \boxed{4=x} \\ \frac{2-6}{2} = \boxed{-2=x} \end{cases}$$

$$\boxed{2} \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \text{No existe}$$

Los dos valores buscados son $x = -2$ y $x = 4$.

b) Para $x = 1$ los puntos son $O(0,0,0)$, $A(2,-1,0)$, $B(3,0,1)$.

Utilizamos la fórmula del área de un paralelogramo como el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ que lo definen.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (2, -1, 0) \\ \overrightarrow{OB} = (3, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + 3k - 2j = (-1, -2, 3)$$

$$\text{Área } OAB = |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \boxed{\sqrt{14} \approx 3.74 \text{ unidades cuadradas}}$$

PevAU 2023 Ordinaria (reserva) Matemáticas II



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Determina las longitudes de los lados de un rectángulo de área máxima que está inscrito en una semicircunferencia de 6 cm de radio, teniendo uno de sus lados sobre el diámetro de ella.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \ln(1+x)}{ax^2 - x + e^x - \cos(2x)} = -\frac{1}{7}$, calcula a ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula $\int_6^{12} \frac{1}{9-x^2} dx$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 + 1$.

- a) **[0,75 puntos]** Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = 4x - 3$.
- b) **[1,75 puntos]** Haz un esbozo del recinto limitado por la gráfica de f , la recta $y = 4x - 3$ y el eje de ordenadas. Calcula el área del recinto indicado.



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS
DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Una fábrica dispone de tres líquidos L_1 , L_2 y L_3 , en los que se encuentran disueltas dos sustancias: sodio y magnesio. Cada litro del líquido L_1 contiene 120 mg de sodio y 90 mg de magnesio, cada litro del líquido L_2 contiene 100 mg de sodio y 90 mg de magnesio y cada litro del líquido L_3 contiene 60 mg de sodio y 180 mg de magnesio. ¿Es posible obtener un litro de un líquido mezclando distintas cantidades de L_1 , L_2 y L_3 en el que la cantidad de sodio y de magnesio sea de 100 mg cada una? En caso afirmativo, calcula dichas cantidades.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

- [1 punto]** Determina los valores de m para que la matriz A tenga inversa.
- [1,5 puntos]** Calcula para $m=1$, si es posible, la matriz X tal que $AX = B^t$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B .

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1, -2, 3)$ y $B(2, 0, -1)$.

- [1,5 puntos]** Halla los puntos que dividen el segmento AB en cuatro partes iguales.
- [1 punto]** Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento AB que pasa por el punto medio de dicho segmento.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$. Halla la ecuación del plano

π' , paralelo a π , tal que si Q y Q' son respectivamente los puntos de corte de la recta r con los planos π y π' , entonces la distancia entre Q y Q' sea de 2 unidades.

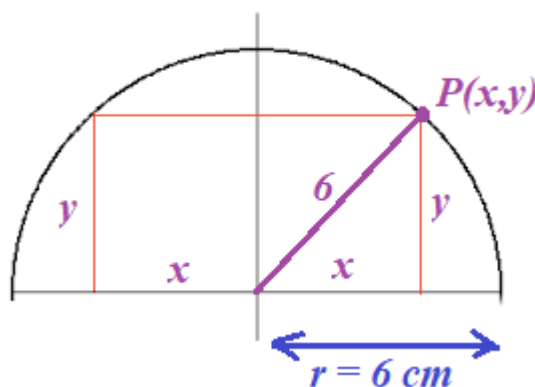
SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Determina las longitudes de los lados de un rectángulo de área máxima que está inscrito en una semicircunferencia de 6 cm de radio, teniendo uno de sus lados sobre el diámetro de ella.

La situación planteada es la del dibujo. La semicircunferencia tiene radio 6 cm.



El área del rectángulo es $A(x, y) = 2x \cdot y$, $0 \leq x \leq 6$, $0 \leq y \leq 6$.

Si miramos el dibujo tenemos un triángulo rectángulo de hipotenusa 6 y de catetos x e y . Aplicando el teorema de Pitágoras se cumple $x^2 + y^2 = 6^2$.

Sustituimos en la expresión de la función área.

$$x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y^2 = 36 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = 2x \cdot y \\ y = \sqrt{36 - x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = 2x\sqrt{36 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 6$$

Hallamos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$A(x) = 2x\sqrt{36 - x^2} = 2\sqrt{36x^2 - x^4} \Rightarrow A'(x) = 2 \frac{72x - 4x^3}{2\sqrt{36x^2 - x^4}} = \frac{72x - 4x^3}{\sqrt{36x^2 - x^4}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{72x - 4x^3}{\sqrt{36x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 72x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 18x - x^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(18 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 18 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 18 \rightarrow x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4.24 \end{cases}$$

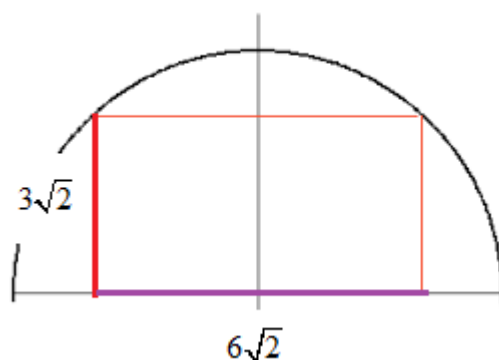
Averiguamos el valor de x que nos proporciona un área máxima viendo la evolución de la derivada de la función en el intervalo $[0, 6]$.

- En el intervalo $[0, 3\sqrt{2})$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $A'(1) = \frac{72-4}{\sqrt{36-1}} = \frac{68}{\sqrt{35}} > 0$. La derivada es positiva y la función crece en el intervalo $[0, 3\sqrt{2})$.
- En el intervalo $(3\sqrt{2}, 6]$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $A'(5) = \frac{72 \cdot 5 - 4 \cdot 5^3}{\sqrt{36 \cdot 5^2 - 5^4}} = \frac{-140}{\sqrt{275}} < 0$. La derivada es negativa y la función decrece en el intervalo $(3\sqrt{2}, 6]$.

La función área tiene un valor máximo en $x = 3\sqrt{2}$.

Para $x = 3\sqrt{2}$ tenemos que $y = \sqrt{36 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

El rectángulo de área máxima que está inscrito en una semicircunferencia de 6 cm de radio tiene unas dimensiones de base $2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ y de altura $3\sqrt{2}$.



EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - \ln(1+x)}{ax^2 - x + e^x - \cos(2x)} = -\frac{1}{7}$, calcula a ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - \ln(1+x)}{ax^2 - x + e^x - \cos(2x)} = \frac{\operatorname{sen}(0) - \ln(1+0)}{a \cdot 0^2 - 0 + e^0 - \cos(2 \cdot 0)} = \frac{0-0}{0-0+1-1} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \frac{1}{1+x}}{2ax - 1 + e^x + 2\operatorname{sen}(2x)} =$$

$$= \frac{\cos(0) - \frac{1}{1+0}}{2a \cdot 0 - 1 + e^0 + 2\operatorname{sen}(2 \cdot 0)} = \frac{1-1}{0-1+1+0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{(1+x)^2}}{2a + e^x + 4\cos(2x)} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}(0) + \frac{1}{(1+0)^2}}{2a + e^0 + 4\cos(2 \cdot 0)} = \frac{0+1}{2a+1+4} = \boxed{\frac{1}{5+2a}}$$

Igualamos el valor del límite a $-\frac{1}{7}$.

$$\frac{1}{5+2a} = -\frac{1}{7} \Rightarrow 7 = -5 - 2a \Rightarrow 12 = -2a \Rightarrow a = \frac{12}{-2} = -6$$

El valor buscado es $a = -6$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula $\int_6^{12} \frac{1}{9-x^2} dx$.

Calculamos primero la integral indefinida usando el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{1}{9-x^2} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$9-x^2=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$$

$$\frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x}$$

$$\frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{A(3+x)}{(3-x)(3+x)} + \frac{B(3-x)}{(3-x)(3+x)} = \frac{A(3+x)+B(3-x)}{(3-x)(3+x)}$$

$$1 = A(3+x) + B(3-x) \Rightarrow \begin{cases} x=3 \rightarrow 1=6A \rightarrow A=\frac{1}{6} \\ x=-3 \rightarrow 1=6B \rightarrow B=\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1/6}{3-x} + \frac{1/6}{3+x}$$

$$\dots = \int \frac{1/6}{3-x} + \frac{1/6}{3+x} dx = \int \frac{1/6}{3-x} dx + \int \frac{1/6}{3+x} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{3-x} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{3+x} dx =$$

$$= \frac{-1}{6} \ln|3-x| + \frac{1}{6} \ln|3+x| = \boxed{\frac{1}{6}(-\ln|3-x| + \ln|3+x|) + C}$$

Aplicamos este resultado en el cálculo de la integral definida pedida en el ejercicio.

$$\begin{aligned} \int_6^{12} \frac{1}{9-x^2} dx &= \left[\frac{1}{6}(-\ln|3-x| + \ln|3+x|) \right]_6^{12} = \\ &= \left[\frac{1}{6}(-\ln|3-12| + \ln|3+12|) \right] - \left[\frac{1}{6}(-\ln|3-6| + \ln|3+6|) \right] = \\ &= -\frac{1}{6} \ln 9 + \frac{1}{6} \ln 15 + \frac{1}{6} \ln 3 - \frac{1}{6} \ln 9 = \frac{1}{6} (\ln 15 + \ln 3 - 2 \ln 9) = \\ &= \frac{1}{6} (\ln 15 \cdot 3 - \ln 9^2) = \frac{1}{6} \ln \frac{15 \cdot 3}{9^2} = \boxed{\frac{1}{6} \ln \frac{5}{9}} \end{aligned}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 + 1$.

a) [0,75 puntos] Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = 4x - 3$.

b) [1,75 puntos] Haz un esbozo del recinto limitado por la gráfica de f , la recta $y = 4x - 3$ y el eje de ordenadas. Calcula el área del recinto indicado.

a) Para que la recta tangente a la función $f(x) = x^2 + 1$ en $x = a$ sea $y = 4x - 3$ deben cumplirse dos cosas:

- Recta tangente y función coinciden en $x = a$.

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = a^2 + 1 \\ y = 4a - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + 1 = 4a - 3 \Rightarrow \boxed{a^2 - 4a + 4 = 0}$$

- La pendiente de la recta tangente (m) es el valor de la derivada en $x = a$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x \rightarrow f'(a) = 2a \\ m = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Comprobamos que el valor obtenido cumple la primera condición.

$$2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$$

Se cumple y el punto de la gráfica es $x = 2$. Para dicho valor $y = 4 \cdot 2 - 3 = 5$. El punto de la gráfica tiene coordenadas (2, 5).

b) Averiguamos donde corta la función el eje de ordenadas ($x = 0$).

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 + 1 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0^2 + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{P(0,1)}$$

Averiguamos donde se cortan la función $f(x) = x^2 + 1$ y la recta $y = 4x - 3$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 + 1 \\ y = 4x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + 1 = 4x - 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2 \Rightarrow y = 4 \cdot 2 - 3 = 5 \Rightarrow \boxed{Q(2,5)}$$

La gráfica de la función es una parábola. Averiguamos su vértice.

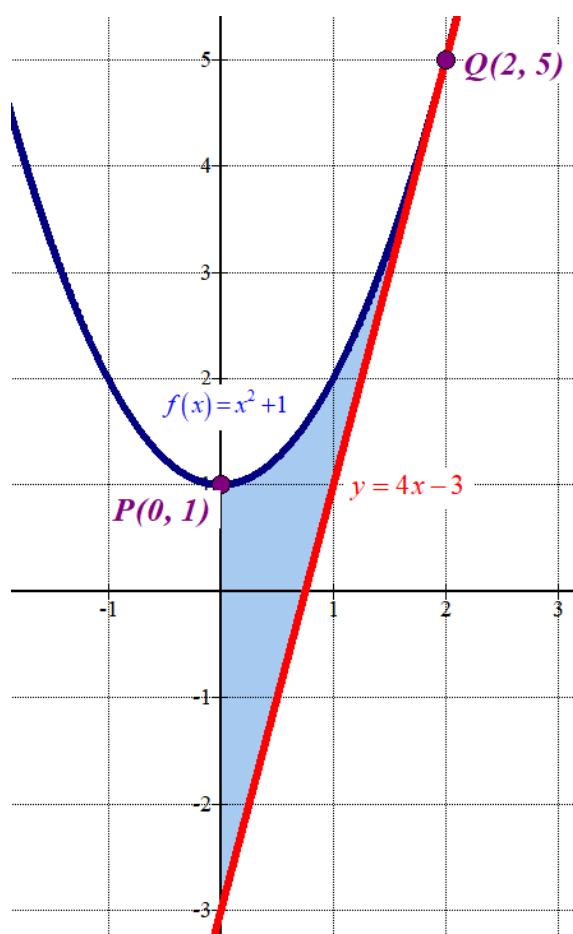
$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

El vértice es el punto de corte con el eje de ordenadas (0, 1).

Hacemos una tabla de valores de la función $f(x) = x^2 + 1$ y de la recta $y = 4x - 3$ y las representamos.

x	$y = 4x - 3$
0	-3
1	1
2	5

x	$f(x) = x^2 + 1$
0	1
1	2
2	5



El área del recinto es el valor de la integral definida entre 0 y 2 de la parábola menos la recta.

$$\int_0^2 x^2 + 1 - (4x - 3) dx = \int_0^2 x^2 + 1 - 4x + 3 dx = \int_0^2 x^2 - 4x + 4 dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \left[\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \right] =$$

$$= \frac{8}{3} - 8 + 8 - 0 = \boxed{\frac{8}{3} \simeq 2.67 u^2}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Una fábrica dispone de tres líquidos L_1 , L_2 y L_3 , en los que se encuentran disueltas dos sustancias: sodio y magnesio. Cada litro del líquido L_1 contiene 120 mg de sodio y 90 mg de magnesio, cada litro del líquido L_2 contiene 100 mg de sodio y 90 mg de magnesio y cada litro del líquido L_3 contiene 60 mg de sodio y 180 mg de magnesio. ¿Es posible obtener un litro de un líquido mezclando distintas cantidades de L_1 , L_2 y L_3 en el que la cantidad de sodio y de magnesio sea de 100 mg cada una? En caso afirmativo, calcula dichas cantidades.

Llamamos “ x ” al número de litros de L_1 , “ y ” al número de litros de L_2 y “ z ” al número de litros de L_3 que hay que utilizar en la mezcla.

Hacemos una tabla con los datos.

	Sodio (mg)	Magnesio (mg)
x (litros de L_1)	$120x$	$90x$
y (litros de L_2)	$100y$	$90y$
z (litros de L_3)	$60z$	$180z$
TOTAL	$120x + 100y + 60z$	$90x + 90y + 180z$

Por las condiciones dadas tenemos que:

“Obtener un litro de un líquido mezclando distintas cantidades de L_1 , L_2 y L_3 en el que la cantidad de sodio y de magnesio sea de 100 mg cada una” $\rightarrow$

$$x + y + z = 1; 90x + 90y + 180z = 100; 120x + 100y + 60z = 100.$$

Intentamos resolver el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 90x + 90y + 180z = 100 \\ 120x + 100y + 60z = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 9x + 9y + 18z = 10 \\ 6x + 5y + 3z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - y - z \\ 9x + 9y + 18z = 10 \\ 6x + 5y + 3z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9(1 - y - z) + 9y + 18z = 10 \\ 6(1 - y - z) + 5y + 3z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9 - 9y - 9z + 9y + 18z = 10 \\ 6 - 6y - 6z + 5y + 3z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9z = 1 \rightarrow \boxed{z = \frac{1}{9}} \\ -y - 3z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -y - 3\frac{1}{9} = -1 \Rightarrow -y - \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}} \Rightarrow \boxed{x = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}}$$

Es posible obtener la mezcla pedida con $\frac{2}{9}$ de litro de L_1 , $\frac{6}{9}$ de litro de L_2 y $\frac{1}{9}$ de litro de L_3 .

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Determina los valores de m para que la matriz A tenga inversa.
 b) [1,5 puntos] Calcula para $m = 1$, si es posible, la matriz X tal que $AX = B^t$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B .

- a) Para que la matriz A tenga inversa debe de tener determinante no nulo. Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2m & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3m & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 12m^2 - 3 - (0 + 12m - 2) = 12m^2 - 12m - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 12m^2 - 12m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(12)(-1)}}{24} =$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(12)(-1)}}{24} = \frac{12 \pm 8\sqrt{3}}{24} = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de $m \neq \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{6}$

- b) Para $m = 1$ la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 12 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 - 1 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial, sustituimos el valor de la matriz inversa de A obtenido y calculamos la expresión de X.

$$AX = B^t \Rightarrow X = A^{-1}B^t$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-5+12 & 0+10+4 & -4+25+16 \\ 0-1+3 & 0+2+1 & 0+5+4 \\ -3-7+18 & 0+14+6 & -6+35+24 \end{pmatrix}$$

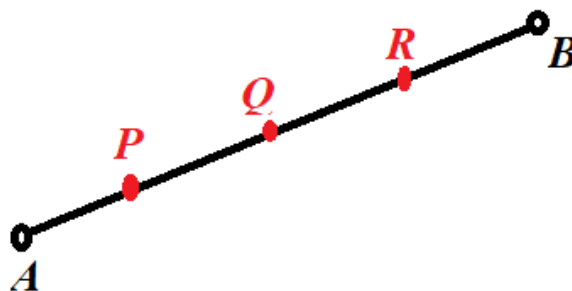
$$X = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 37 \\ 2 & 3 & 9 \\ 8 & 20 & 53 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1, -2, 3)$ y $B(2, 0, -1)$.

- a) [1,5 puntos] Halla los puntos que dividen el segmento AB en cuatro partes iguales.
 b) [1 punto] Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento AB que pasa por el punto medio de dicho segmento.

- a) Necesitamos encontrar tres puntos P , Q y R tales que dividen el segmento AB en cuatro partes iguales.



Para determinar las coordenadas del punto P hallamos el vector $\overrightarrow{AB}$. El vector $\overrightarrow{AP}$ será la cuarta parte del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (2, 0, -1) - (1, -2, 3) = (1, 2, -4)$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} = \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{-4}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1\right)$$

El punto P se obtiene sumando a las coordenadas de A el vector $\overrightarrow{AP}$.

$$P = A + \overrightarrow{AP} = (1, -2, 3) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{5}{4}, \frac{-3}{2}, 2\right)$$

El punto Q se obtiene sumando a las coordenadas de P el vector $\overrightarrow{AP}$.

$$Q = P + \overrightarrow{AP} = \left(\frac{5}{4}, \frac{-3}{2}, 2\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{6}{4}, \frac{-2}{2}, 1\right) = \left(\frac{3}{2}, -1, 1\right)$$

El punto R se obtiene sumando a las coordenadas de Q el vector $\overrightarrow{AP}$.

$$R = Q + \overrightarrow{AP} = \left(\frac{3}{2}, -1, 1\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{-1}{2}, 0\right)$$

Como comprobación deberíamos obtener el punto B al sumar a R el vector $\overrightarrow{AP}$.

$$R + \overrightarrow{AP} = \left(\frac{7}{4}, \frac{-1}{2}, 0\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{8}{4}, 0, -1\right) = (2, 0, -1) = B$$

Los puntos que dividen el segmento AB en cuatro partes iguales son $P\left(\frac{5}{4}, \frac{-3}{2}, 2\right)$, $Q\left(\frac{3}{2}, -1, 1\right)$ y $R\left(\frac{7}{4}, \frac{-1}{2}, 0\right)$.

b) El punto medio del segmento AB es el punto $Q\left(\frac{3}{2}, -1, 1\right)$.

Como el plano que nos piden hallar es perpendicular al segmento AB el vector normal de dicho plano es el vector $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -4)$.

Nos piden hallar la ecuación del plano que pasa por el punto Q y que tiene por vector normal el vector $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -4)$.

$$\left. \begin{array}{l} Q\left(\frac{3}{2}, -1, 1\right) \in \pi \\ \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q\left(\frac{3}{2}, -1, 1\right) \in \pi \\ \pi \equiv x + 2y - 4z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2} + 2(-1) - 4(1) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} - 2 - 4 + D = 0 \Rightarrow D = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow \pi \equiv x + 2y - 4z + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x + 4y - 8z + 9 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi \equiv 2x + 4y - 8z + 9 = 0$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$. Halla la ecuación del plano π' , paralelo a π , tal que si Q y Q' son respectivamente los puntos de corte de la recta r con los planos π y π' , entonces la distancia entre Q y Q' sea de 2 unidades.

Si el plano π' es paralelo al plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ tiene ecuación $\pi' \equiv x + y + z + D = 0$.

Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta r .

$$r \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_r(1, 0, -1) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto Q de corte entre el plano π y la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda + 2\lambda - 1 + 2\lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(1, 0, -1)}$$

Hallamos el punto Q' de corte entre el plano π' y la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv x + y + z + D = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda + 2\lambda - 1 + 2\lambda + D = 0 \Rightarrow 5\lambda + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-D}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{D}{5} \\ y = -\frac{2D}{5} \\ z = -1 - \frac{2D}{5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q'\left(1 - \frac{D}{5}, -\frac{2D}{5}, -1 - \frac{2D}{5}\right)}$$

Hallamos la distancia entre Q y Q' como el módulo del vector que une dichos puntos.

$$\left. \begin{array}{l} Q'\left(1 - \frac{D}{5}, -\frac{2D}{5}, -1 - \frac{2D}{5}\right) \\ Q(1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{QQ'} = \left(1 - \frac{D}{5}, -\frac{2D}{5}, -1 - \frac{2D}{5}\right) - (1, 0, -1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{QQ'} = \left(-\frac{D}{5}, -\frac{2D}{5}, -\frac{2D}{5}\right)$$

$$\begin{aligned}d(Q, Q') &= |\overline{QQ'}| = \sqrt{\left(-\frac{D}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2D}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2D}{5}\right)^2} = \\&= \sqrt{\frac{D^2}{25} + \frac{4D^2}{25} + \frac{4D^2}{25}} = \sqrt{\frac{9D^2}{25}} = \boxed{\frac{3|D|}{5}}\end{aligned}$$

Igualamos la distancia a 2 unidades para determinar el valor de D y por tanto la ecuación del plano π' .

$$\frac{3|D|}{5} = 2 \Rightarrow |D| = \frac{10}{3} \Rightarrow \begin{cases} D = \frac{10}{3} \rightarrow \pi' \equiv x + y + z + \frac{10}{3} = 0 \rightarrow \boxed{\pi' \equiv 3x + 3y + 3z + 10 = 0} \\ D = -\frac{10}{3} \rightarrow \pi'' \equiv x + y + z - \frac{10}{3} = 0 \rightarrow \boxed{\pi'' \equiv 3x + 3y + 3z - 10 = 0} \end{cases}$$

Los planos que cumplen lo pedido en el ejercicio son $\pi' \equiv 3x + 3y + 3z + 10 = 0$ y también $\pi'' \equiv 3x + 3y + 3z - 10 = 0$

PevAU 2022 Extraordinaria Matemáticas II



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA, CURSO 2021-2022**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Calcula a sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(\ln x)^3 + 2x} = 1$ (donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano)

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula $\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{1+x}-1$).

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.

- a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g . Esboza sus gráficas. **(1,25 puntos)**
- b) Determina el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante. **(1,25 puntos)**



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA, CURSO 2021-2022**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa. **(0,5 puntos)**
b) Para $a = 1$ calcula X tal que $AXB = C$, si es posible. **(2 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$.

a) Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$ **(1 punto)**

b) Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$ **(1,5 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv x+1 = y-a = -z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

- a) Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte. **(1,5 puntos)**
b) Halla la ecuación del plano que pasa por $P(8, -7, 2)$ y que contiene a la recta s . **(1 punto)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Sea el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1$.

- a) Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r . **(0,75 puntos)**
b) Dado el punto $Q(2, 6, 3)$, halla su simétrico respecto del plano π . **(1,75 puntos)**

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Calcula a sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(\ln x)^3 + 2x} = 1$ (donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano)

Calculamos el valor del límite en función de “ a ”.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(\ln x)^3 + 2x} &= \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación(L'Hôpital)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{3(\ln x)^2 \frac{1}{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\frac{3(\ln x)^2}{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\frac{3(\ln x)^2 + 2x}{x}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{3(\ln x)^2 + 2x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación(L'Hôpital)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{6(\ln x) \frac{1}{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\frac{6(\ln x) + 2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{6(\ln x) + 2x} = \\
 &= \text{Indeterminación(L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{6\frac{1}{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\frac{6}{x} + 2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\frac{6 + 2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{6 + 2x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Grado del numerador} \\ \text{igual que el grado del} \\ \text{denominador} \end{array} \right\} = \boxed{\frac{a}{2}}
 \end{aligned}$$

Como el límite debe valer 1 debe ser $\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

El valor de “ a ” que hace cierta la igualdad es $a = 2$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

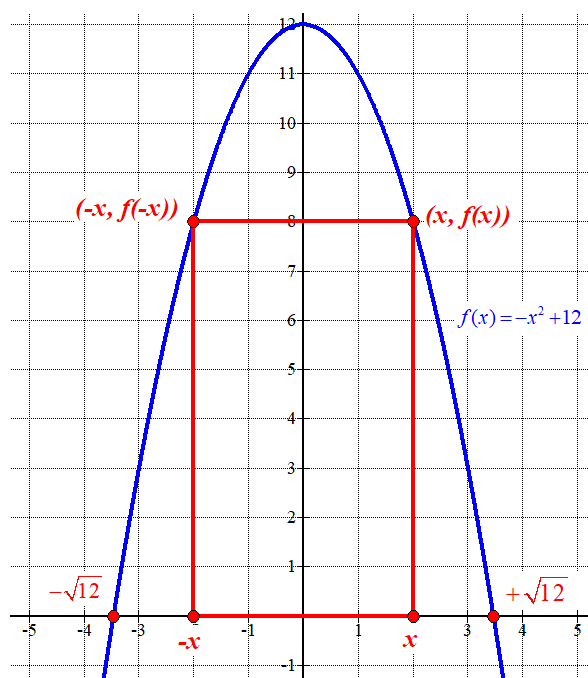
Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

Veamos cuando corta el eje de abscisas la parábola.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 12 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{12}}$$

Hacemos una table y dibujamos la situación planteada.

x	$y = -x^2 + 12$
$-\sqrt{12}$	0
-2	8
0	12
2	8
$\sqrt{12}$	0



El área del rectángulo rojo del dibujo es:

$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} = 2x \cdot f(x) = 2x(-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x$$

La función que debemos maximizar es $A(x) = -2x^3 + 24x$, $x \in [0, +\sqrt{12}]$

Hallamos su derivada y la igualamos a cero.

$$A(x) = -2x^3 + 24x \Rightarrow A'(x) = -6x^2 + 24$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = 2$$

Comprobamos si es máximo o mínimo utilizando el signo de la segunda derivada.

$$A'(x) = -6x^2 + 24 \Rightarrow A''(x) = -12x \Rightarrow A''(2) = -12(2) = -24 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa tenemos que en $x = 2$ hay un máximo relativo de la función área.

$$\text{El área máxima es } A(2) = -2 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2 = -16 + 48 = \boxed{32 \text{ u}^2}$$

Para $x = 2$ la función vale $f(2) = -2^2 + 12 = 8$. Para $x = -2$ toma el mismo valor $f(-2) = 8$

Las coordenadas de los vértices son: $(-2, 0)$; $(2, 0)$; $(-2, 8)$ y $(2, 8)$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula $\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{1+x}-1$).

Calculamos primero la integral indefinida usando el cambio de variable sugerido.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = \sqrt{1+x}-1 \rightarrow t+1 = \sqrt{1+x} \\ (t+1)^2 = 1+x \rightarrow 2(t+1)dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t} 2(1+t) dt =$$

$$= 2 \int \frac{1+t}{t} dt = 2 \int \frac{1}{t} dt + 2 \int \frac{t}{t} dt = 2 \ln|t| + 2 \int dt = 2 \ln|t| + 2t =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio} \\ t = \sqrt{1+x}-1 \end{array} \right\} = 2 \ln|\sqrt{1+x}-1| + 2\sqrt{1+x} - 2 + K =$$

$$= 2 \ln|\sqrt{1+x}-1| + 2\sqrt{1+x} + K$$

Lo aplicamos en el calculo de la integral definida pedida.

$$\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx = \left[2 \ln|\sqrt{1+x}-1| + 2\sqrt{1+x} \right]_3^8 =$$

$$= \left[2 \ln|\sqrt{1+8}-1| + 2\sqrt{1+8} \right] - \left[2 \ln|\sqrt{1+3}-1| + 2\sqrt{1+3} \right] =$$

$$= 2 \ln 2 + 6 - 2 \ln 1 - 4 = \boxed{2 + 2 \ln 2}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.

- a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g . Esboza sus gráficas. **(1,25 puntos)**
 b) Determina el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante. **(1,25 puntos)**

a) Calculamos los puntos de corte de las gráficas de f y g .

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 + 2 = -x^2 + 2x + 2 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases} \end{cases}$$

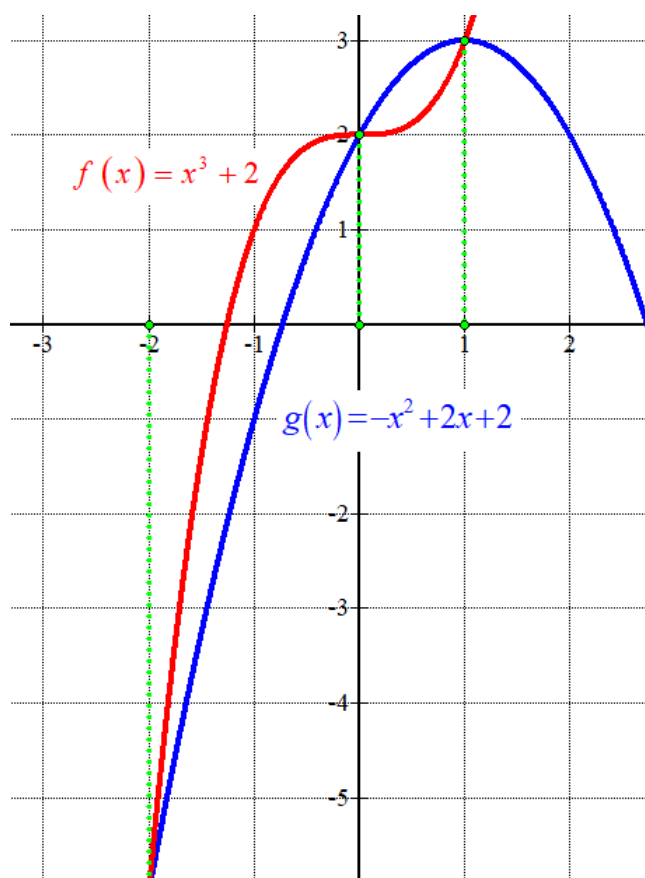
Las gráficas se cortan en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$.

Como $f(-2) = (-2)^3 + 2 = -6$, $f(0) = 0^3 + 2 = 2$ y $f(1) = 1^3 + 2 = 3$ los puntos de corte tienen coordenadas $(-2, -6)$, $(0, 2)$ y $(1, 3)$

Para dibujar sus gráficas hacemos una tabla de valores.

x	$y = x^3 + 2$
-2	-6
-1	1
0	2
1	3
2	10

x	$y = -x^2 + 2x + 2$
-2	-6
-1	-1
0	2
1	3
2	2
3	-1

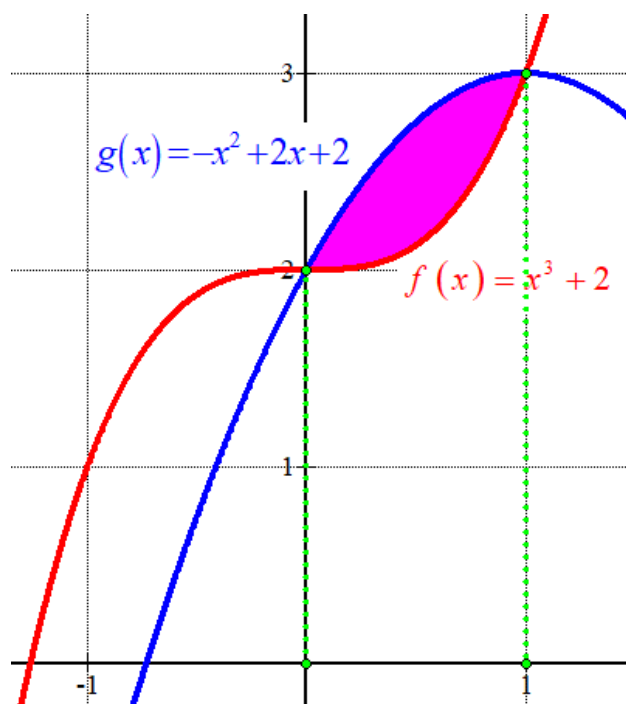


- b) En el primer cuadrante el recinto limitado por las gráficas está situado entre 0 y 1.
El área es la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre 0 y 1.

$$\text{Área} = \int_0^1 g(x) - f(x) dx = \int_0^1 -x^2 + 2x + 2 - (x^3 + 2) dx = \int_0^1 -x^2 + 2x - x^3 - 2 dx =$$

$$= \int_0^1 -x^3 - x^2 + 2x dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = \left[-\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + 1^2 \right] - \left[-\frac{0^4}{4} - \frac{0^3}{3} + 0^2 \right] =$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \boxed{\frac{5}{12} \approx 0.417 u^2}$$



BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa. **(0,5 puntos)**
 b) Para $a = 1$ calcula X tal que $AXB = C$, si es posible. **(2 puntos)**

a) Para que no tenga inversa la matriz B su determinante debe ser nulo.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 4a - 2a^2 + 0 - 2 = -2a^2 + 4a$$

$$|B| = 0 \Rightarrow -2a^2 + 4a = 0 \Rightarrow -2a(a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

La matriz B no tiene inversa cuando $a = 0$ o $a = 2$.

- b) Para $a = 1$ la matriz B tiene inversa y la matriz A también.
 Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

Hallamos la matriz inversa de A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la inversa de B .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 4 - 2 - 2 = 2$$

$$B^{-1} = \frac{Adj(B^T)}{|B|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X.

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-2 & 1 & 1 \\ -2-1-1 & 2+1 & -1/2+1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -6-4 & 2+3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$.

a) Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$ **(1 punto)**

b) Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$ **(1,5 puntos)**

a) Usamos las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambiamos columna 2ª y 3ª} \\ \text{El determinante cambia de signo} \end{array} \right\} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ -3p & -3q & -3r \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos factor común} \\ 2 \text{ en fila } 2^{\text{a}} \text{ y } -3 \text{ en fila } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} = -2(-3) \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambiamos Fila } 2^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}} \\ \text{El determinante cambia de signo} \end{array} \right\} = -6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -6 \cdot (-2) = \boxed{12}$$

b) Usamos las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{En la columna } 2^{\text{a}} \\ \text{la separamos en dos determinantes} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} x & a & -2a \\ y & b & -2b \\ z & c & -2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -3p & -2a \\ y & -3q & -2b \\ z & -3r & -2c \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos factor común} \end{array} \right\} = -2 \begin{vmatrix} x & a & a \\ y & b & b \\ z & c & c \end{vmatrix} + (-3)(-2) \begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{En el primer determinante} \\ \text{la columna } 2^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}} \text{ son iguales} \\ \text{El determinante vale } 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{En el segundo determinante} \\ \text{intercambiamos columna } 1^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}} \\ \text{El determinante cambia de signo} \end{array} \right\} =$$

$$= 0 - 6 \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Trasponemos la matriz} \\ \text{El determinante no cambia} \end{array} \right\} = -6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -6(-2) = \boxed{12}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv x+1 = y-a = -z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2-\lambda \end{cases}$

- a) Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte. **(1,5 puntos)**
 b) Halla la ecuación del plano que pasa por $P(8, -7, 2)$ y que contiene a la recta s . **(1 punto)**

a) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv x+1 = y-a = -z \\ s \equiv \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2-\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 5+2\lambda+1 = -3-a = -(2-\lambda) \Rightarrow 6+2\lambda = -3-a = -2+\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6+2\lambda = -3-a \rightarrow a = -9-2\lambda \\ 6+2\lambda = -2+\lambda \rightarrow 8 = -\lambda \rightarrow \boxed{\lambda = -8} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -9-2(-8) = 7}$$

Para que el sistema tenga solución debe ser $a = 7$.

Termino de resolver el sistema con el valor $a = 7$ y determino las coordenadas del punto A de corte de las dos rectas.

$$\lambda = -8 \Rightarrow \begin{cases} x = 5+2(-8) = -11 \\ y = -3 \\ z = 2-(-8) = 10 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-11, -3, 10)}$$

- b) El plano que contiene a la recta s tiene como uno de sus vectores directores el director de la recta. El otro vector director es el vector $\overrightarrow{Q_s P}$ que une el punto P y un punto Q_s de la recta s .

$$s \equiv \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(5, -3, 2) \\ \vec{v}_s = (2, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{Q_s P} = (8, -7, 2) - (5, -3, 2) = (3, -4, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_s = (2, 0, -1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{Q_s P} = (3, -4, 0) \\ P(8, -7, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-8 & y+7 & z-2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y - 21 - 8z + 16 - 4x + 32 = 0 \Rightarrow -4x - 3y - 8z + 27 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 4x + 3y + 8z - 27 = 0}$$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Sea el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1$.

a) Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r . **(0,75 puntos)**

b) Dado el punto $Q(2, 6, 3)$, halla su simétrico respecto del plano π . **(1,75 puntos)**

a) Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta r .

$$r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(0, 0, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 3, 1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

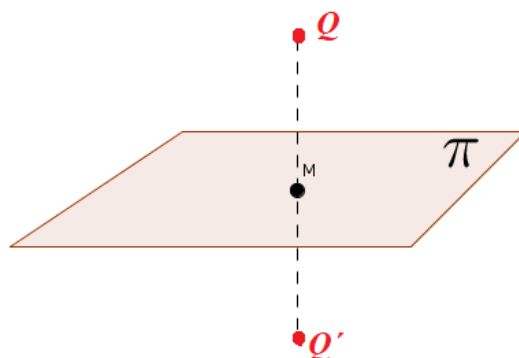
Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano e intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y - z = 2 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + 3\lambda - (1 + \lambda) = 2 \Rightarrow \lambda + 3\lambda - 1 - \lambda = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1, 3, 2)}$$

Recta y plano son secantes y se cortan en el punto $A(1, 3, 2)$.

b) Dibujamos la situación planteada.



Hallamos la recta s perpendicular al plano π que pasa por el punto Q .

$$\pi \equiv x + y - z = 2 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = \vec{n} = (1, 1, -1) \\ Q(2, 6, 3) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\pi \equiv x + y - z = 2$$
$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 2 + \lambda + 6 + \lambda - (3 - \lambda) = 2 \Rightarrow 2 + \lambda + 6 + \lambda - 3 + \lambda = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 6 - 1 = 5 \\ z = 3 - (-1) = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(1, 5, 4)}$$

El punto Q' simétrico de Q respecto del plano π se obtiene sumando al punto M el vector $\overrightarrow{QM}$.

$$\overrightarrow{QM} = (1, 5, 4) - (2, 6, 3) = (-1, -1, 1)$$

$$Q' = M + \overrightarrow{QM} = (1, 5, 4) + (-1, -1, 1) = (0, 4, 5)$$

El punto Q' simétrico de Q respecto del plano π tiene coordenadas Q'(0, 4, 5).



PevAU 2022 Ordinaria Matemáticas II
PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función continua f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- a) Calcula a y b . **(1 punto)**
- b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . **(1,5 puntos)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas

de las funciones $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}$ y $g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < 0 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

- a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función. **(1 punto)**
- b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y por el eje de abscisas. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$ para $x \neq 1$. Halla una primitiva de f que pase por el punto (2, 6).



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2021-2022**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el sistema:

$$\begin{cases} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores de m . **(1,75 puntos)**
b) Para $m = 2$ resuelve el sistema, si es posible. **(0.75 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m \geq 0$.

- a) ¿Para que valores de m tiene inversa la matriz A ? **(1 punto)**
b) Para $m = 4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX = 12I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1,5 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$, así como el punto $A(-4, 4, 7)$.

- a) Calcula a y b para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**
b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\vec{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. **(1,75 puntos)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{2}$ así como la recta s determinada por el punto $P(1, 2, 3)$

y el vector director $\vec{v} = (1 + a, -a, 3a)$.

- a) Calcula a para que las rectas r y s se corten. **(1,5 puntos)**
b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares. **(1 punto)**

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función continua f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula a y b . (1 punto)

b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . (1,5 puntos)

a) La función debe ser continua en $x = -1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} ax + b = -a + b \\ f(-1) &= -a + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a + b = -1$$

La función debe ser continua en $x = 1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax + b = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{2} \\ f(1) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$$

Juntamos las dos ecuaciones y resolvemos el sistema que se forma.

$$\left. \begin{aligned} -a + b &= -1 \\ a + b &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -a + b &= -1 \\ b &= \frac{1}{2} - a \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a + \frac{1}{2} - a = -1 \Rightarrow -2a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

Los valores buscados son $a = \frac{3}{4}$ y $b = -\frac{1}{4}$.

b) Con $a = \frac{3}{4}$ y $b = -\frac{1}{4}$ la función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ \frac{3x}{4} - \frac{1}{4} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Estudiamos sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

Asíntota vertical. $x = a$

No tiene. Pues su dominio es $\mathbb{R}$.

$x = 0$ y $x = -1$ anulan los denominadores, pero las funciones no están definidas en dichos valores.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Una asíntota horizontal en $-\infty$ es $y = 0$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$

No hay asíntota horizontal en $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

En $-\infty$ no hay pues existe asíntota horizontal.

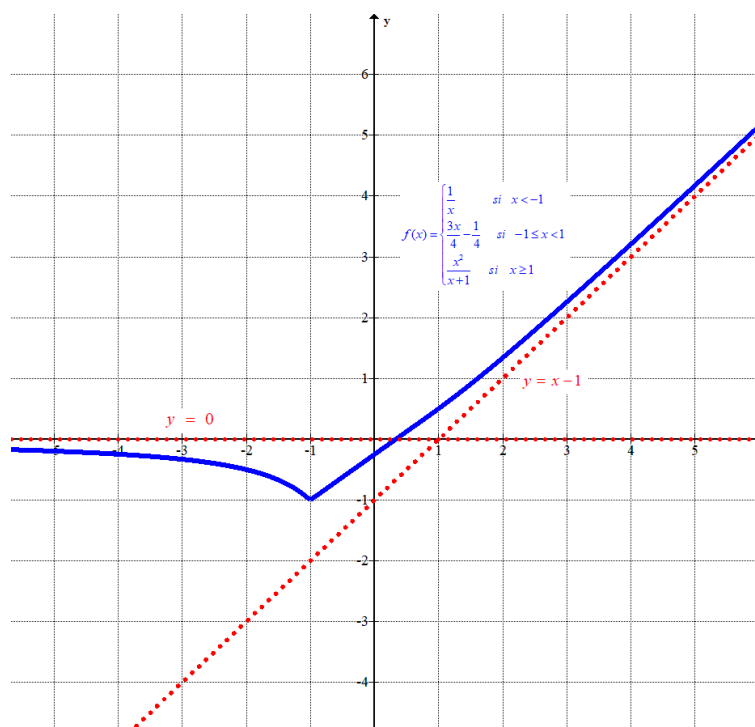
Hacemos el estudio en $+\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

En $+\infty$ la asíntota oblicua tiene ecuación $y = x - 1$.

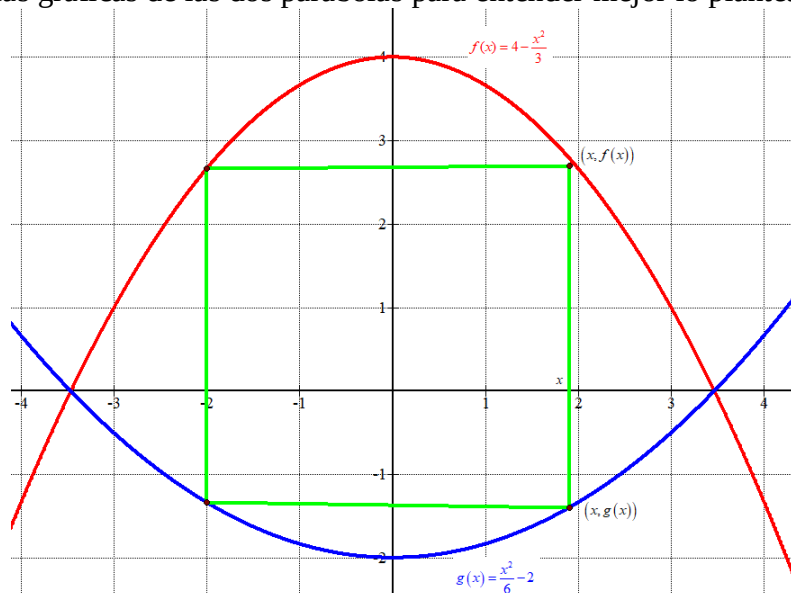
Resumiendo: La función no tiene asíntotas verticales, tiene una asíntota horizontal en $-\infty$ con ecuación $y = 0$, en $+\infty$ tiene una asíntota oblicua con ecuación $y = x - 1$.



EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}$ y $g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$.

Dibujamos las gráficas de las dos parábolas para entender mejor lo planteado.



Averiguamos donde se cortan las gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 4 - \frac{x^2}{3} = \frac{x^2}{6} - 2 \Rightarrow 24 - 2x^2 = x^2 - 12 \Rightarrow -3x^2 = -36 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12}$$

Por la simetría de las funciones podemos decir que la base del rectángulo ($2x$) es variable dependiendo de la coordenada x del punto de la gráfica elegido estando x comprendida entre 0 y $\sqrt{12}$.

Y la altura del rectángulo es el valor positivo ($f(x)$) menos el valor negativo ($g(x)$).

$$\text{Altura} = f(x) - g(x) = 4 - \frac{x^2}{3} - \left(\frac{x^2}{6} - 2 \right) = 4 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{6} + 2 = 6 - \frac{3x^2}{6} = 6 - \frac{x^2}{2}$$

El área del rectángulo es el producto de la base por la altura.

$$A(x) = 2x \left(6 - \frac{x^2}{2} \right) = 12x - x^3$$

Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de un máximo.

$$A(x) = 12x - x^3 \Rightarrow A'(x) = 12 - 3x^2$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 3x^2 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -12 \Rightarrow x^2 = \frac{-12}{-3} = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Como } A''(x) = -6x \Rightarrow A''(2) = -12 < 0$$

La función presenta un máximo relativo en $x = 2$.

Las dimensiones del rectángulo son $2 \cdot 2 = 4$ de base y altura $6 - \frac{2^2}{2} = 6 - 2 = 4$. Es un cuadrado de lado 4.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x < 0 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

- a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función. **(1 punto)**
 b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y por el eje de abscisas. **(1.5 puntos)**

a) Igualamos a cero la función.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2 & (\text{si } x < 0) \\ (x-2)^2=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 & (\text{si } x \geq 0) \end{cases}$$

La gráfica corta el eje de abscisas en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

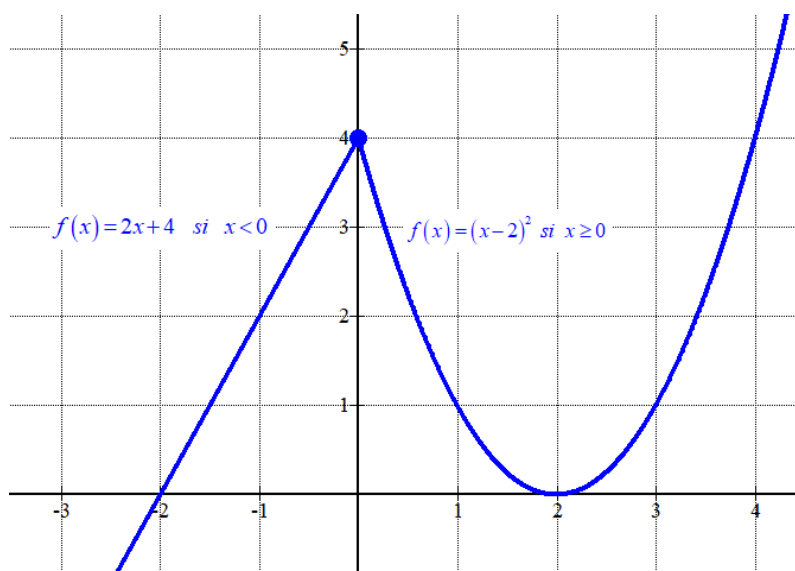
La gráfica es un trozo de recta y un trozo de parábola. Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

$$f(x) = 2x+4 \quad \text{si } x < 0$$

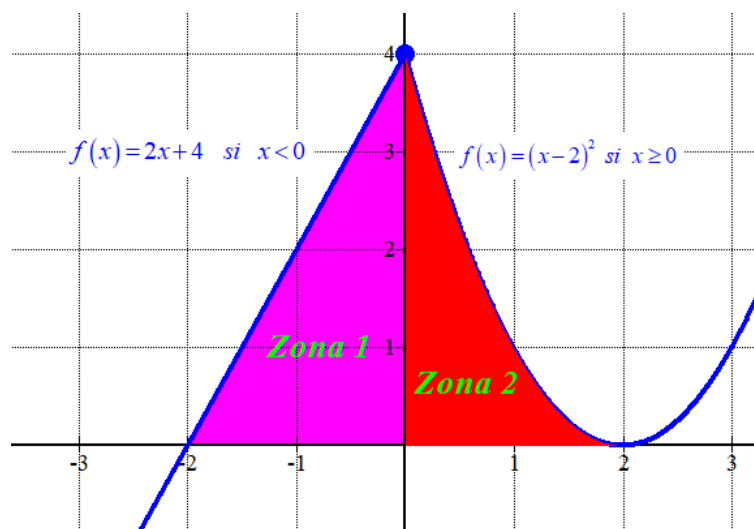
x	$y = 2x+4$
-3	-2
-2	0
-1	2
0	4 No incluido

$$f(x) = (x-2)^2 \quad \text{si } x \geq 0$$

x	$y = (x-2)^2$
0	4
1	1
2	0
3	1



b) Nos piden hallar el área del recinto coloreado de rosa y rojo.



Contando cuadraditos el área será un valor entre 6 y 7 unidades cuadradas.

Calculamos su valor exacto con el cálculo integral.

$$\text{Área 1} = \int_{-2}^0 2x + 4 dx = \left[x^2 + 4x \right]_{-2}^0 = \left[0^2 + 4 \cdot 0 \right] - \left[(-2)^2 + 4(-2) \right] = 0 - (4 - 8) = 4u^2$$

$$\text{Área 2} = \int_0^2 (x-2)^2 dx = \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{(2-2)^3}{3} - \frac{(0-2)^3}{3} = 0 - \frac{-8}{3} = \frac{8}{3}u^2$$

$\text{Área total} = \text{Área 1} + \text{Área 2} = 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3} \simeq 6.66u^2$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$ para $x \neq 1$. Halla una primitiva de f que pase por el punto (2, 6).

Calculamos la integral de la función f utilizando la descomposición en fracciones simples.

$$F(x) = \int \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} dx = \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{ccc} x^3 & & \overline{x^2 - 2x + 1} \\ -x^3 & +2x^2 & -x \\ & +2x^2 & -x \\ & -2x^2 & +4x & -2 \\ & & 3x & -2 \end{array}} \end{array} = \int x + 2 + \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1} dx =$$

$$= \int x + 2 dx + \int \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1} dx = \dots$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 = 0 &\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = 1 \quad \text{raiz doble} \\ \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1} &= \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} = \frac{A(x - 1) + B}{(x - 1)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3x - 2 = Ax - A + B \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ -2 = -A + B \end{cases} \Rightarrow -2 = -3 + B \Rightarrow B = 1 \\ \int \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1} dx &= \int \frac{3}{x - 1} dx + \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx = 3 \ln|x - 1| + \int (x - 1)^{-2} dx = \\ &= 3 \ln|x - 1| + \frac{(x - 1)^{-1}}{-1} = 3 \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} \end{aligned}$$

$$\dots = \frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + K$$

La primitiva de $f(x)$ es $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + K$

Como pasa por el punto (2, 6) debe cumplirse $F(2) = 6$.

$$F(2) = 6 = \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 + 3 \ln|2 - 1| - \frac{1}{2 - 1} + K \Rightarrow 2 + 4 + 0 - 1 + K = 6 \Rightarrow \boxed{K = 1}$$

La primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto (2, 6) es $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + 1$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el sistema:

$$\begin{cases} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores de m . **(1,75 puntos)**
 b) Para $m = 2$ resuelve el sistema, si es posible. **(0.75 puntos)**

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{pmatrix}$ y la ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m & -3 \\ -m & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & m & -6 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{vmatrix} = 3m + 1 + 4m^2 - 3m - m^2 - 4 = 3m^2 - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3m^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3m^2 = 3 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{1} = \pm 1}$$

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de A y de A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad 3 \quad -1 \quad 1 \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -4 \quad 1 \quad -6 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad 3 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 0 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a + 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -6 \quad 0 \quad -6 \\ 0 \quad 6 \quad 0 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -12 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad -1 \quad 1 \quad -3}^{A/B} \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad -2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -12}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $m = -1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de A y de A/B.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 3 \quad -1 \quad 1 \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 4 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -4 \quad -1 \quad -6 \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 0 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Fila } 3^a + 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -12 \quad 0 \quad -12 \\ 0 \quad 12 \quad 0 \quad 12 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

El rango de A y el de A/B es 2 y el número de incógnitas es 3. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$ el sistema es compatible determinado, si $m = 1$ el sistema es incompatible y si $m = -1$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $m = 2$ el sistema es compatible determinado. Utilizamos el método de Gauss para encontrar su solución.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ -2x + 3y - z = 1 \\ x - 4y + 2z = -6 \end{cases} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ -2x \quad +3y \quad -z \quad = 1 \\ 2x \quad -2y \quad +4z \quad = -6 \\ \hline 0 \quad y \quad +3z \quad = -5 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x \quad -4y \quad +2z \quad = -6 \\ -x \quad +y \quad -2z \quad = 3 \\ \hline 0 \quad -3y \quad \quad = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ y + 3z = -5 \\ -3y = -3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ y + 3z = -5 \\ \boxed{y = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 + 2z = -3 \\ 1 + 3z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = -2 \\ 3z = -6 \end{cases} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = -2 \\ \boxed{z = -2} \end{cases} &\Rightarrow x + 2(-2) = -2 \Rightarrow x - 4 = -2 \Rightarrow \boxed{x = 2}
 \end{aligned}$$

La solución es $x = 2$; $y = 1$; $z = -2$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m \geq 0$.

a) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A? **(1 punto)**

b) Para $m = 4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX = 12I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1,5 puntos)**

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{m}\sqrt{m} & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Saco factor común } \sqrt{m} \\ \text{en columna 1ª} \end{array} \right\} = \sqrt{m} \begin{vmatrix} \sqrt{m} & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Saco factor común } \sqrt{m} \\ \text{en fila 1ª} \end{array} \right\} = \sqrt{m}\sqrt{m} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \\
 &= m(m^2 + 1 + 1 - m - m - 1) = m(m^2 - 2m + 1)
 \end{aligned}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m(m^2 - 2m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = 1 \end{cases}$$

La inversa de la matriz A existe para cualquier valor de m distinto de 0 y 1.

b) Para $m = 4$ existe la inversa de A.

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX = 12I \Rightarrow X = 12A^{-1}I = 12A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 64 + 4 + 4 - 16 - 16 - 4 = 36$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}}{36} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Terminamos de resolver la ecuación matricial.

$$X = 12A^{-1} = 12 \cdot \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$, así como el punto $A(-4, 4, 7)$.

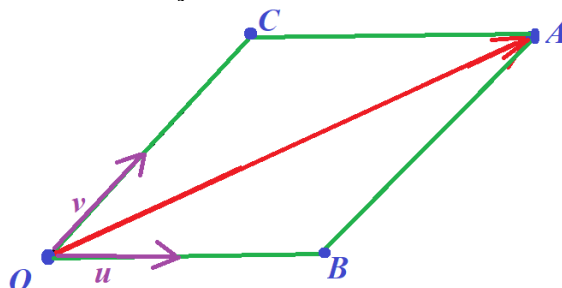
- a) Calcula a y b para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**
 b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\vec{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. **(1,75 puntos)**

- a) Para que $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$ el producto escalar debe ser cero.

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (1, a, b)(2, 0, -1) = 0 \Rightarrow 2 - b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2} \Rightarrow \vec{w} = (1, a, 2)$$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (1, a, 2)(-1, 2, 3) = 0 \Rightarrow -1 + 2a + 6 = 0 \Rightarrow 2a = -5 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-5}{2} = -2.5}$$

- b) La situación planteada es la del dibujo.



Tenemos que hallar los puntos B y C tales que se forme un paralelogramo.

Como los puntos B y C están en la dirección de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{u} = (-1, 2, 3) \Rightarrow B = a(-1, 2, 3) = (-a, 2a, 3a)$$

$$\vec{v} = (2, 0, -1) \Rightarrow C = b(2, 0, -1) = (2b, 0, -b)$$

Como es un paralelogramo $\vec{OC} = \vec{BA}$ y $\vec{OB} = \vec{CA}$.

$$\vec{OC} = \vec{BA} \Rightarrow (2b, 0, -b) = (-4, 4, 7) - (-a, 2a, 3a) = (-4 + a, 4 - 2a, 7 - 3a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b = -4 + a \\ 0 = 4 - 2a \\ -b = 7 - 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = -4 + a \\ 2a = 4 \\ -b = 7 - 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = -4 + a \\ \boxed{a = 2} \\ -b = 7 - 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = -4 + 2 \\ -b = 7 - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = -2 \\ -b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{-2}{2} = -1 \\ \boxed{b = -1} \end{cases}$$

$$\vec{OB} = \vec{CA} \Rightarrow (-a, 2a, 3a) = (-4, 4, 7) - (2b, 0, -b) \text{ Igual que el anterior.}$$

Sustituyendo en las coordenadas de los vértices:

$$B = (-a, 2a, 3a) = (-2, 4, 6)$$

$$C = (2b, 0, -b) = (-2, 0, 1)$$

Los cuatro vértices del paralelogramo son $O(0, 0, 0)$; $A(-4, 4, 7)$; $B(-2, 4, 6)$ y $C(-2, 0, 1)$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{2}$ así como la recta s determinada por el punto $P(1, 2, 3)$ y el vector director $\vec{v} = (1 + a, -a, 3a)$.

a) Calcula a para que las rectas r y s se corten. **(1,5 puntos)**

b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares. **(1 punto)**

a) Hallamos un punto y un vector de cada recta.

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow r: \begin{cases} Q_r(2, 0, 1) \\ \vec{u}_r = (1, -1, 2) \end{cases} \quad s: \begin{cases} P(1, 2, 3) \\ \vec{v}_s = (1 + a, -a, 3a) \end{cases}$$

Para que las rectas se corten deben pertenecer al mismo plano. Para ello el producto mixto de los vectores directores $\vec{u}_r$, $\vec{v}_s$ y el vector $\overrightarrow{Q_r P}$ debe ser nulo.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Q_r P} &= (1, 2, 3) - (2, 0, 1) = (-1, 2, 2) \\ [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{Q_r P}] &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1+a & -a & 3a \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2a + 3a + 4 + 4a - 2a + 2 + 2a - 6a = -a + 6 \end{aligned}$$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{Q_r P}] = 0 \Rightarrow -a + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

Comprobamos que para $a = 6$ también se cumple que los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales y por tanto las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_r &= (1, -1, 2) \\ a = 6 \rightarrow \vec{v}_s &= (7, -6, 18) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{7} \neq \frac{-1}{-6} = \frac{2}{18}$$

El valor buscado es $a = 6$.

b) Para que sean perpendiculares el producto escalar de los vectores directores debe ser nulo. Pueden estar en distinto plano pero sus direcciones son perpendiculares.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_r &= (1, -1, 2) \\ \vec{v}_s &= (1 + a, -a, 3a) \\ \vec{u}_r &\perp \vec{v}_s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (1, -1, 2)(1 + a, -a, 3a) = 0 \Rightarrow 1 + a + a + 6a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 8a = 0 \Rightarrow 8a = -1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{8}}$$



PevAU 2021 Extraordinaria Matemáticas II

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
 CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA, CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos(x)) + b \operatorname{sen}(x) - 2(e^x - 1)}{x^2} = 7$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Halla $a > 0$ y $b > 0$ sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto $(1, 2)$ un punto crítico.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 + \int_0^x t e^t dt.$$

Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtiene y valores que se alcanzan)).

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ (para $x \neq -1, x \neq 1$). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(2, 4)$



PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
 CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- a) Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$. **(1.25 puntos)**
 b) Dadas las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz X que verifica $A^4 X + B = AC$. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

- a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta. **(1.25 puntos)**
 b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta? **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

La recta perpendicular desde el punto $A(1,1,0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto

$$B = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

- a) Calcula la ecuación del plano π . **(1.5 puntos)**
 b) Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π . **(1 punto)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

- a) Estudia la posición relativa de r y s . **(1.25 puntos)**
 b) Halla la recta que corta perpendicularmente a r y a s . **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES**BLOQUE A****EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos(x)) + b \operatorname{sen}(x) - 2(e^x - 1)}{x^2} = 7$.

Calculamos el límite y luego lo igualamos a 7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos(x)) + b \operatorname{sen}(x) - 2(e^x - 1)}{x^2} = \frac{a(1 - \cos(0)) + b \operatorname{sen}(0) - 2(e^0 - 1)}{0^2} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(0 + \operatorname{sen}(x)) + b \cos(x) - 2(e^x - 0)}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \operatorname{sen}(x) + b \cos(x) - 2e^x}{2x} = \frac{a \cdot \operatorname{sen}(0) + b \cos(0) - 2e^0}{2 \cdot 0} = \frac{b - 2}{0} = \dots$$

Como el límite debe valer 7 no puede ser $b - 2$ distinto de cero pues entonces valdría ∞ . Entonces $b = 2$ y seguimos calculando el límite.

$$\dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) - 2e^x}{2x} = \frac{a \cdot \operatorname{sen}(0) + 2 \cos(0) - 2e^0}{2 \cdot 0} = \frac{2 - 2}{0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \cos(x) - 2 \operatorname{sen}(x) - 2e^x}{2} =$$

$$= \frac{a \cdot \cos(0) - 2 \operatorname{sen}(0) - 2e^0}{2} = \frac{a - 2}{2}$$

Como el límite debe dar 7 entonces $\frac{a - 2}{2} = 7 \Rightarrow a - 2 = 14 \Rightarrow \boxed{a = 16}$

Los valores buscados son $a = 16$ y $b = 2$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Halla $a > 0$ y $b > 0$ sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto $(1, 2)$ un punto crítico.

La función tiene un punto crítico en el punto $(1, 2)$ lo que significa dos cosas:

La función pasa por dicho punto, es decir, $f(1) = 2$ y otra que la derivada se anula en $x = 1$, es decir $f'(1) = 0$.

Primero: La función pasa por dicho punto, es decir, $f(1) = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4} \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = \frac{b \cdot 1^2}{1+a \cdot 1^4} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow 2(1+a) = b \Rightarrow \boxed{b = 2 + 2a}$$

Segundo: La derivada se anula en $x = 1$, es decir $f'(1) = 0$.

$$f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2bx(1+ax^4) - 4ax^3(bx^2)}{(1+ax^4)^2} = \frac{2bx + 2abx^5 - 4abx^5}{(1+ax^4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2bx - 2abx^5}{(1+ax^4)^2}$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow \frac{2b - 2ab}{(1+a)^2} = 0 \Rightarrow 2b - 2ab = 0 \Rightarrow 2b(1-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b=0} \\ o \\ 1-a=0 \rightarrow \boxed{a=1} \end{cases}$$

Hay dos formas de conseguir lo pedido:

1ª forma.

$$\left. \begin{array}{l} b = 2 + 2a \\ b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}} \text{ Esta opción no es válida pues } a > 0.$$

2ª forma.

$$\left. \begin{array}{l} b = 2 + 2a \\ a = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow b = 2 + 2 = 4 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}}$$

Se consigue lo pedido en el ejercicio con $a = 1$ y $b = 4$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 + \int_0^x te^t dt.$$

Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtiene y valores que se alcanzan)).

Calculamos la expresión de la función $f(x)$ hallando primero la integral indefinida y con ello la integral definida.

$$\int te^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = t \rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \rightarrow v = \int e^t dt = e^t \end{array} \right\} = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + K$$

$$\int_0^x te^t dt = [te^t - e^t]_0^x = [xe^x - e^x] - [0e^0 - e^0] = xe^x - e^x + 1$$

$$f(x) = 1 + \int_0^x te^t dt = 1 + xe^x - e^x + 1 = xe^x - e^x + 2$$

Calculamos la derivada segunda y la igualamos a cero para obtener los posibles puntos de inflexión.

$$f(x) = xe^x - e^x + 2 \Rightarrow f'(x) = \cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x} = xe^x \Rightarrow f''(x) = e^x + xe^x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^x + xe^x = 0 \Rightarrow e^x(1+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0, \text{ ¡Imposible!} \\ 0 \\ 1+x = 0 \rightarrow \boxed{x = -1} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = -1$.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada segunda vale $f''(-2) = e^{-2} - 2e^{-2} < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = e^0 + 0 \cdot e^0 = 1 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $(-1, +\infty)$.

La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, -1)$ y convexa ($\cup$) en $(-1, +\infty)$.

Y tiene un punto de inflexión en $x = -1$. Como $f(-1) = -e^{-1} - e^{-1} + 2 = 2 - 2e^{-1} = 2 - \frac{2}{e}$ el

punto de inflexión tiene coordenadas $\left(-1, 2 - \frac{2}{e}\right)$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ (para $x \neq -1, x \neq 1$). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(2, 4)$

Calculamos la integral de la función $f(x)$ usando la descomposición en fracciones simples.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx = \dots$$

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = \frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$$

$$\dots = \int 1 + \frac{2}{x^2-1} dx = \int 1 dx + \int \frac{2}{x^2-1} dx = x + \int \frac{2}{x^2-1} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow 2 = A(x+1)+B(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \rightarrow 2 = A(0)+B(-2) \rightarrow 2 = -2B \rightarrow B = -1 \\ x=1 \rightarrow 2 = A(2)+B(0) \rightarrow 2 = 2A \rightarrow A = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$\dots = x + \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + K$$

Las primitivas de $f(x)$ son $F(x) = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + K$.

La primitiva que pasa por $(2, 4)$ debe cumplir que $F(2) = 4$.

$$F(2) = 4 \Rightarrow 2 + \ln|2-1| - \ln|2+1| + K = 4 \Rightarrow 2 + 0 - \ln 3 + K = 4 \Rightarrow K = 2 + \ln 3$$

La primitiva pedida tiene la expresión $F(x) = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2 + \ln 3$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$. **(1.25 puntos)**

b) Dadas las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz X que verifica $A^4 X + B = AC$. **(1.25 puntos)**

a) Calculamos A^2 y $-A^{-1}$ y vemos si son iguales.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3-4 & 0-12+12 & 0-15+16 \\ 0-4+5 & 3+16-15 & 4+20-20 \\ 0+3-4 & -3-12+12 & -4-15+16 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0+15+12-16-12-0 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como se observa se cumple que } A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = -A^{-1}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Comprobamos que $A^2 \cdot (-A) = Id$. De cumplirse tendríamos que $A^2 = -A^{-1}$.

$$\begin{aligned}
 A^2 \cdot (-A) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \\
 &= - \begin{pmatrix} 0+0-1 & -3+0+3 & -4+0+4 \\ 0+4-4 & 3-16+12 & 4-20+16 \\ 0-3+3 & -3+12-9 & -4+15-12 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id
 \end{aligned}$$

Queda comprobado que $A^2 = -A^{-1}$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$\begin{aligned}
 A^4 X + B &= AC \Rightarrow A^4 X = AC - B \Rightarrow A^2 A^2 X = AC - B \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (-A^{-1})(-A^{-1})X = AC - B \Rightarrow (A^{-1})(A^{-1})X = AC - B \Rightarrow \\
 &\Rightarrow A(A^{-1})(A^{-1})X = AAC - AB \Rightarrow A^{-1}X = A^2C - AB \Rightarrow \\
 &\Rightarrow A^{-1}X = -A^{-1}C - AB \Rightarrow AA^{-1}X = -AA^{-1}C - AAB \Rightarrow \\
 &\Rightarrow X = -C - A^2B \Rightarrow \boxed{X = -C + A^{-1}B}
 \end{aligned}$$

Sustituyo cada matriz por su valor y determino la expresión de la matriz X.

$$X = -C + A^{-1}B = - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+0+4 & -1+0-5 \\ -1-12+16 & 1+0-20 \\ 1+9-12 & -1+0+15 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -19 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

- a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta. **(1.25 puntos)**
- b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta? **(1.25 puntos)**

- a) Llamamos a = número de viajes semanales en la ruta A, b = número de viajes semanales en la ruta B, c = número de viajes semanales en la ruta C.

“Semanalmente hace un total de 70 viajes” $\rightarrow a+b+c=70$

“El número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C”
 $\rightarrow b=a+c$

“El doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70” $\rightarrow 2(a+c)=70$

Planteamos el sistema de ecuaciones y averiguamos si tiene solución.

$$\left. \begin{array}{l} a+b+c=70 \\ b=a+c \\ 2(a+c)=70 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+b+c=70 \\ -a+b-c=0 \\ a+c=\frac{70}{2}=35 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+b+c=70 \\ -a+b-c=0 \\ a+c=35 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª + Ecuación 1ª} \\ -a + b - c = 0 \\ a + b + c = 70 \\ \hline 0 \quad 2b \quad 0 = 70 \\ \text{Nueva Ecuación 2ª} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ a \quad \quad + c = 35 \\ -a \quad -b \quad -c = -70 \\ \hline 0 \quad -b \quad 0 = -35 \\ \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} a+b+c=70 \\ 2b=70 \\ -b=-35 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+b+c=70 \\ b=35 \\ -b=-35 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª} \\ -b = 35 \\ b = -35 \\ \hline 0 = 0 \\ \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} a+b+c=70 \\ b=35 \\ 0=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+b+c=70 \\ \boxed{b=35} \end{array} \right\} \Rightarrow a+35+c=70 \Rightarrow a+c=35 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} b=35 \\ a+c=35 \end{array}}$$

Se pueden encontrar muchas soluciones, pero no existe una solución única.
 Habría 35 viajes en la ruta B y otros 35 entre las rutas A y C.

Podría ser una solución $a = 0$, $b = 35$ y $c = 35$, pero también valdría como solución $a = 10$, $b = 35$ y $c = 25$. Podríamos dar muchas soluciones más.

- b) Si añadimos la condición “*el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5*” $\rightarrow 2c = b - 5$ y añadimos esta nueva ecuación al sistema tendremos que:

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ \boxed{b = 35} \\ 2c = b - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + 35 + c = 70 \\ 2c = 35 - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + c = 35 \\ \boxed{c = 15} \end{array} \right\} \Rightarrow a + 15 = 35 \Rightarrow \boxed{a = 20}$$

En este caso la solución si es única y vale $a = 20$, $b = 35$ y $c = 15$.

La solución es 20 viajes en la ruta A, 35 en la ruta B y 15 en la ruta C.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

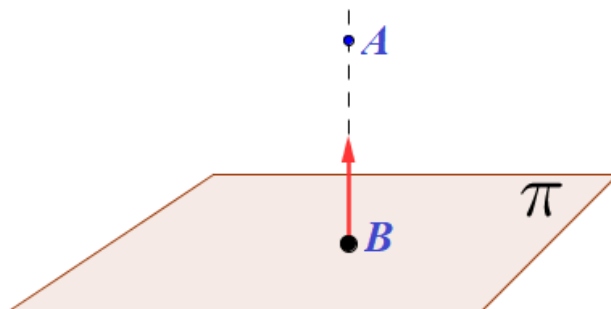
La recta perpendicular desde el punto $A(1,1,0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto

$$B = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

a) Calcula la ecuación del plano π . (1.5 puntos)

b) Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π . (1 punto)

a) La situación planteada es la del dibujo.

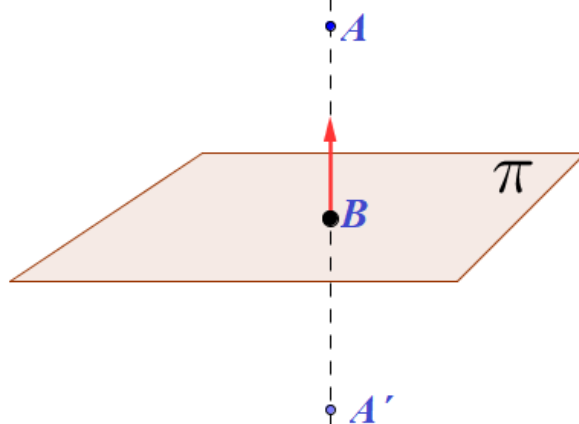


El vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular al plano, por lo que podemos considerarlo como vector normal del plano.

$$\left. \begin{aligned} \vec{n} = \overrightarrow{AB} &= \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1, 1, 0) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ B = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &\in \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \pi &\equiv -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + D = 0 \\ B = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &\in \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \pi \equiv -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv -y + z = 0}$$

b) Dibujamos la situación planteada. Siendo A' al punto simétrico de A respecto del plano π .



La distancia entre A y su simétrico A' es el doble de la distancia entre A y el plano π .

$$\left. \begin{aligned} A(1,1,0) \\ \pi \equiv -y + z = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d(A, A') = 2d(A, \pi) = 2 \frac{|-1+0|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2} \text{ u}}$$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de r y s . **(1.25 puntos)**b) Halla la recta que corta perpendicularmente a r y a s . **(1.25 puntos)**

a) Obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 0, -1) \\ P_r(3, 1, -3) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 - \beta \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (-1, 1, 0) \\ Q_s(1, 0, 0) \end{cases}$$

¿Los vectores directores tienen coordenadas proporcionales?

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 0, -1) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{-1}{0}$$

No tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

¿El producto mixto de $\vec{u}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_r Q_s}$ es cero o distinto de cero?

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, 0, 0) - (3, 1, -3) = (-2, -1, 3) \\ \vec{u}_r = (1, 0, -1) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 3 - 2 = 0$$

Al ser nulo el producto mixto las rectas r y s se cortan en un punto.b) La recta t que nos piden hallar tiene como vector director el producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas y pasa por el punto C de corte de ambas rectas.Hallamos el punto C de corte de r y s .

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 - \beta \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3 + \lambda = 1 - \beta \\ 1 = \beta \\ -3 - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 - \beta \\ \beta = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = \beta = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(0, 1, 0)}$$

Hallamos el vector director de la recta t .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 0, -1) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{w}_t = \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

Con estos datos hallamos la ecuación de la recta t pedida que sabemos que tiene como vector director $\vec{w}_t = \vec{u}_r \times \vec{v}_s$ y que pasa por $C(0, 1, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_t = (1, 1, 1) \\ C(0, 1, 0) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$



PevAU 2021 Ordinaria Matemáticas II

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
 CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x - 1}$ (para $x \neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(1, 1)$ y tiene pendiente 2. Calcula a y b .

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función continua $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (3x - 6)e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{36(\operatorname{sen}(x) - ax)}{x^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) Calcula a . **(1.5 puntos)**
- b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$. **(1 punto)**

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 - x^4$.

- a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . **(1 punto)**
- b) Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $F: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.



BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + \frac{2}{5} \end{cases}$$

- Discute el sistema según los valores de m . **(2 puntos)**
- Resuelve el sistema para $m = 0$. ¿Hay alguna solución en la que $x = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(0.5 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.

El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora.

¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

- Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1, 0, -5)$. **(1.5 puntos)**
- Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$. **(1 punto)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

La recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta s , que pasa por los puntos $P(1, 0, 2)$ y $A(a, 1, 0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x-1}$ (para $x \neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(1, 1)$ y tiene pendiente 2. Calcula a y b .

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = mx + n$. Si pasa por el punto $(1, 1)$ entonces $1 = m + n$. Además, la pendiente es 2, lo que significa que $m = 2$. Por lo que $1 = 2 + n \rightarrow n = -1$.

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = 2x - 1$.

Aplicamos las fórmulas que nos permiten obtener la ecuación de la asíntota oblicua a $f(x)$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2 + bx + 2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2}{x^2} + \frac{bx}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = a$$

Tenemos que $a = 2$. La función queda $f(x) = \frac{2x^2 + bx + 2}{x-1}$ (para $x \neq 1$)

Seguimos averiguando el valor de b .

$$\begin{aligned} n = -1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + bx + 2}{x-1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2x^2} + bx + 2 - \cancel{2x^2} + 2x}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2+b)x + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2+b)x}{x} + \frac{2}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+b + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2+b + \frac{2}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = 2+b \end{aligned}$$

$$-1 = 2 + b \Rightarrow \boxed{b = -3}$$

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = -3$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función continua $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (3x-6)e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{36(\operatorname{sen}(x)-ax)}{x^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Calcula a . (1.5 puntos)

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$. (1 punto)

a) Como la función es continua debe serlo en $x = 0$ y por tanto el valor de la función y los límites laterales deben coincidir.

El valor de la función es $f(0) = (0-6)e^0 = -6$.

El límite de la función por la izquierda de $x = 0$ es $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x-6)e^x = -6$.

Calculo el límite de la función por la derecha de $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(\operatorname{sen}(x)-ax)}{x^3} = \frac{36(\operatorname{sen}(0)-a \cdot 0)}{0^3} = \frac{0}{0} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(\cos(x)-a)}{3x^2} = \frac{36(\cos(0)-a)}{3 \cdot 0^2} = \frac{36(1-a)}{0} = \dots \end{aligned}$$

Como debe ser un valor finito el numerador debe ser nulo $\rightarrow a = 1$.

De ser $a \neq 1$ el límite daría ∞ y la función no sería continua.

Consideramos $a = 1$ y seguimos calculando el límite por la derecha.

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{36(1-1)}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(-\operatorname{sen}(x))}{6x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-36\operatorname{sen}(x)}{6x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-36\cos(x)}{6} = -6 \end{aligned}$$

Se cumple que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -6$.

La función es continua si $a = 1$.

b) En las proximidades de $x = -1$ la función es $f(x) = (3x-6)e^x$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$ es:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)) \Rightarrow y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$$

$$\text{Como } f(-1) = (-3-6)e^{-1} = -\frac{9}{e}$$

$$\text{Y también } f(x) = (3x-6)e^x \Rightarrow f'(x) = 3e^x + (3x-6)e^x = (3+3x-6)e^x = (3x-3)e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(-1) = (-3-3)e^{-1} = -\frac{6}{e} \text{ la recta tangente nos quedaría:}$$

$$y - \left(-\frac{9}{e}\right) = -\frac{6}{e}(x+1) \Rightarrow y + \frac{9}{e} = -\frac{6}{e}x - \frac{6}{e} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{6}{e}x - \frac{15}{e}}$$

$$\text{La ecuación de la recta tangente es } y = -\frac{6}{e}x - \frac{15}{e}$$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 - x^4$.

- a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . **(1 punto)**
 b) Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas. **(1.5 puntos)**

a) Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos

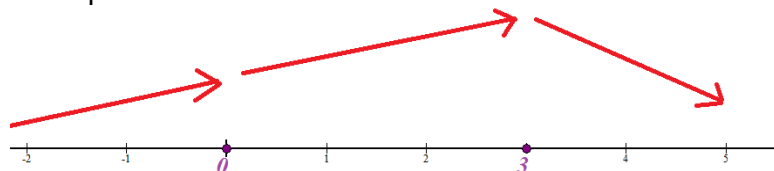
$$f(x) = 4x^3 - x^4 \Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 4x^3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x^2(3 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vemos que ocurre antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty, 0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 12(-1)^2 - 4(-1)^3 = 16 > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$
- En $(0, 3)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 12 - 4 = 8 > 0$. La función crece en $(0, 3)$
- En $(3, +\infty)$ tomo $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = 12 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4^3 = -64 < 0$. La función decrece en $(3, +\infty)$

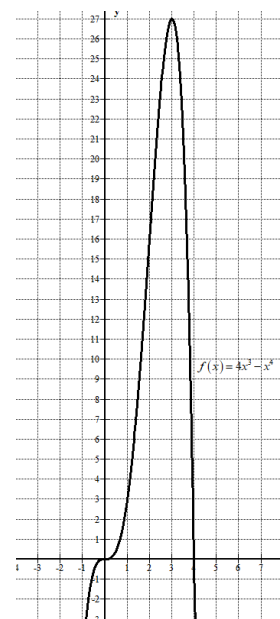
La función sigue el esquema:



La función crece en $(-\infty, 3)$ y decrece en $(3, +\infty)$.

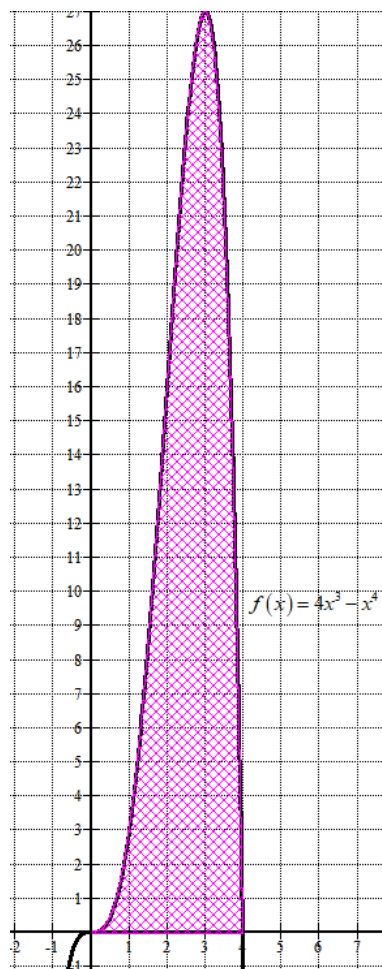
- b) La función es continua, pues es polinómica. Sabemos que la función tiene un máximo relativo en $x = 3$, hacemos una tabla de valores y la representamos.

x	$y = 4x^3 - x^4$
-1	$-4 - 1 = -5$
0	0
1	$4 - 1 = 3$
3	27
4	0



En la tabla de valores y en la gráfica de la función observamos que corta el eje de abscisas en $x = 0$ y en $x = 4$. El área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas lo calculamos con la integral definida entre 0 y 4 de la función.

$$\text{Área} = \int_0^4 4x^3 - x^4 dx = \left[x^4 - \frac{x^5}{5} \right]_0^4 = \left[4^4 - \frac{4^5}{5} \right] - \left[0^4 - \frac{0^5}{5} \right] = \boxed{\frac{256}{5} = 51.2 \text{ u}^2}$$



EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $F : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

Obtenemos la expresión de la función $F(x)$.

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt = \int_0^x \left(2t + t^{\frac{1}{2}} \right) dt = \left[t^2 + \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^x = \left[t^2 + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^x = \left[t^2 + \frac{2\sqrt{t^3}}{3} \right]_0^x =$$

$$= \left[x^2 + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \right] - \left[0^2 + \frac{2\sqrt{0^3}}{3} \right] = x^2 + \frac{2\sqrt{x^3}}{3}$$

$$F(x) = x^2 + \frac{2\sqrt{x^3}}{3}$$

Como nos piden la recta tangente a F en $x = 1$ la ecuación es $y - F(1) = F'(1)(x - 1)$ y necesitamos el valor de la función y el de la derivada en $x = 1$.

$$F(x) = x^2 + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \Rightarrow F(1) = 1^2 + \frac{2\sqrt{1^3}}{3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$F(x) = x^2 + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} = x^2 + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \Rightarrow F'(x) = 2x + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = 2x + x^{\frac{1}{2}} = 2x + \sqrt{x}$$

$$F'(1) = 2 + 1 = 3$$

Sustituyendo en la ecuación queda:

$$\left. \begin{array}{l} y - F(1) = F'(1)(x - 1) \\ F(1) = \frac{5}{3} \\ F'(1) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{5}{3} = 3(x - 1) \Rightarrow y - \frac{5}{3} = 3x - 3 \Rightarrow \boxed{y = 3x - \frac{4}{3}}$$

También se puede realizar sabiendo que si $F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt$ entonces $F'(x) = 2x + \sqrt{x}$.

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + \frac{2}{5} \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores de m . **(2 puntos)**
 b) Resuelve el sistema para $m = 0$. ¿Hay alguna solución en la que $x = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(0.5 puntos)**

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} m & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 3m & 0 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} m & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3m & 0 & m + \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 3m & 0 \end{vmatrix} = 4 - 15m - 4 - 6m^2 = -6m^2 - 15m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -6m^2 - 15m = 0 \Rightarrow -m(6m + 15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 6m + 15 = 0 \Rightarrow 2m + 5 = 0 \Rightarrow m = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Estudiamos por separado 3 casos diferentes.

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq -\frac{5}{2}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (única solución)

CASO 2. $m = 0$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para

obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{multiplicamos la fila 3ª por 5} \\ \text{Cambiamos fila 2ª por fila 1ª} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Fila 3ª - Fila 1ª} \\ \begin{matrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 4 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 4 & -2 & 2 \end{matrix} \\ \text{Nueva fila 3ª} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Fila 3ª - 2 · Fila 2ª} \\ \begin{matrix} 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \text{Nueva fila 3ª} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero el número de incógnitas es 3. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

CASO 3. $m = -\frac{5}{2}$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -\frac{15}{2} & 0 & -\frac{21}{10} \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de

Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -\frac{15}{2} & 0 & -\frac{21}{10} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{multiplicamos la fila 3ª por 10} \\ \text{multiplicamos fila 1ª por 2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 10 & -75 & 0 & -21 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Fila 2ª + Fila 1ª} \\ \begin{matrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & -2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix} \\ \text{Nueva fila 2ª} \end{cases} \begin{cases} \text{Fila 3ª + 2 · Fila 1ª} \\ \begin{matrix} 10 & -75 & 0 & -21 \\ -10 & 8 & -4 & 4 \\ \hline 0 & -67 & -4 & -17 \end{matrix} \\ \text{Nueva fila 3ª} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -67 & -4 & -17 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Cambio fila } 3^{\text{a}} \text{ por fila } 2^{\text{a}}\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -67 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Contando filas no nulas tenemos que el rango de A es 2 y el de A/B es 3, por lo que son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Para $m \neq 0$ y $m \neq -\frac{5}{2}$ el sistema es compatible determinado, para $m = 0$ el sistema es compatible indeterminado y para $m = -\frac{5}{2}$ el sistema es incompatible.

- b) Para $m = 0$ estamos en el caso 2 y el sistema tiene infinitas soluciones.
Resolvemos el sistema a partir de la matriz triangular obtenida en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 4y + 2z = 0 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 4y + 2z = 0 \\ \boxed{2y - 1 = z} \end{cases} \Rightarrow 5x - 4y + 2(2y - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x - \cancel{4y} + \cancel{4y} - 2 = 0 \Rightarrow 5x - 2 = 0 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{5}}$$

Las soluciones son: $x = \frac{2}{5}$; $y = t$; $z = -1 + 2t$

¿Hay alguna solución en la que $x = 0$?

Si nos preguntan tomando $m = 0$ la respuesta es: No, pues el valor de x es siempre igual a $\frac{2}{5}$

Si nos preguntan tomando m cualquier valor: Solo nos falta verlo en el caso 1 con $m \neq 0$ y $m \neq -\frac{5}{2}$ y donde la solución es única. Si le añadimos $x = 0$ al sistema nos quedaría:

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 + 2y - z = 1 \\ 0 - 4y + 2z = 0 \\ 0 + 3my = m + \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - z = 1 \\ 2y - z = 0 \\ 3my = m + \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema no tiene solución.

En cualquier caso, no existe ninguna solución con $x = 0$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.

El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora.

¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Llamamos x = número de botellas producidas por hora, y = número de garrafas, z = número de bidones.

“Se utiliza como materia prima 10000 gramos de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1000 gramos para cada bidón” $\rightarrow 50x + 100y + 1000z = 10000$

“Se debe producir el doble de botellas que de garrafas” $\rightarrow x = 2y$

“Se producen en total 52 productos cada hora” $\rightarrow x + y + z = 52$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} 50x + 100y + 1000z = 10000 \\ x = 2y \\ x + y + z = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + 20z = 200 \\ x = 2y \\ x + y + z = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2y + 20z = 200 \\ 2y + y + z = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + 20z = 200 \\ 3y + z = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 5z = 50 \\ 3y + z = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 50 - 5z \\ 3y + z = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(50 - 5z) + z = 52 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 150 - 15z + z = 52 \Rightarrow -14z = -98 \Rightarrow \boxed{z = \frac{98}{14} = 7} \Rightarrow \boxed{y = 50 - 35 = 15} \Rightarrow \boxed{x = 30}$$

Se producen cada hora 30 botellas, 15 garrafas y 7 bidones.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

- a) Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1, 0, -5)$. **(1.5 puntos)**
 b) Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$. **(1 punto)**

- a) Si el plano π es perpendicular a la recta s entonces el vector normal del plano es el director de la recta.

$$s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (-2, 1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_s = (-2, 1, 2) \\ P(1, 0, -5) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv -2x + y + 2z + D = 0 \\ P(1, 0, -5) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + 0 - 10 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 12 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv -2x + y + 2z + 12 = 0}$$

- b) El seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$ es el coseno del ángulo que forma el vector director de la recta y el vector normal del plano. Este coseno lo puedo calcular usando el producto escalar de dichos vectores. Hallamos primero el vector director de la recta r como el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (2, -3, 1) \times (-3, 2, 2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8i - 7j - 5k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_r = (-8, -7, -5)$$

Tomamos como vector director de la recta r el mismo vector con las coordenadas positivas:
 $\vec{u}_r = (8, 7, 5)$

$$\pi \equiv -2x + y + 2z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (-2, 1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (8, 7, 5) \\ \vec{n} = (-2, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \sin(r, \pi) = \cos(\vec{u}_r, \vec{n}) = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{n}}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(8, 7, 5) \cdot (-2, 1, 2)}{\sqrt{8^2 + 7^2 + 5^2} \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}}$$

$$\boxed{\sin(r, \pi) = \frac{-16 + 7 + 10}{\sqrt{138} \sqrt{9}} = \frac{1}{3\sqrt{138}}}$$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

La recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta s , que pasa por los puntos $P(1, 0, 2)$ y $A(a, 1, 0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

Hallamos un vector director y un punto de cada una de las rectas.

$$r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(-3, -4, 3) \\ \vec{u}_r = (2, 2, 3) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 0, 2) \in s \\ A(a, 1, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(1, 0, 2) \in s \\ \vec{v}_s = \overrightarrow{AP} = (1, 0, 2) - (a, 1, 0) = (1-a, -1, 2) \end{array} \right\}$$

Si las rectas son secantes entonces el producto mixto de los vectores directores de las rectas y el vector que une un punto de r con otro punto de s debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 2, 3) \\ \vec{v}_s = (1-a, -1, 2) \\ \overrightarrow{PP_r} = (-3, -4, 3) - (1, 0, 2) = (-4, -4, 1) \\ [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PP_r}] = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1-a & -1 & 2 \\ -4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 - 16 - 12 + 12a - 12 - 2 + 2a + 16 = 0 \Rightarrow 14a - 28 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

El valor buscado es $a = 2$.

Comprobamos que para este valor las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$a = 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 2, 3) \\ \vec{v}_s = (-1, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{-1} = \frac{2}{-1} \neq \frac{3}{2}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

El punto de corte lo averiguamos resolviendo el sistema formado por ambas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} P_r(-3, -4, 3) \\ \vec{u}_r = (2, 2, 3) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = -4 + 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} P(1, 0, 2) \in s \\ \vec{v}_s = (-1, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -3 + 2\lambda = 1 - t \\ -4 + 2\lambda = -t \\ 3 + 3\lambda = 2 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 + 2\lambda = -t \\ 4 - 2\lambda = t \\ 1 + 3\lambda = 2t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 3\lambda = 2(4 - 2\lambda) \Rightarrow 1 + 3\lambda = 8 - 4\lambda \Rightarrow 7\lambda = 7 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2 = -1 \\ y = -4 + 2 = -2 \\ z = 3 + 3 = 6 \end{cases}$$

El punto de corte de las rectas es $P(-1, -2, 6)$



PevAU 2020 Extraordinaria Matemáticas II

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
 CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS II**Instrucciones:** a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**b) **Este examen consta de 8 ejercicios.**

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 6)$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula $\int_0^{\pi} x \sin^2(x) dx$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Discute el sistema según los valores de m . **(1.5 puntos)**

b) Para $m = -2$, ¿existe alguna solución con $z = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - y + az = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$

a) Halla a sabiendo que π es paralelo a r . **(1.5 puntos)**

b) Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$. **(1 punto)**



EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea la función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{2ax-4b} & \text{si } x < 1 \\ 1 - x \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano)

- Determina los valores de a y b . **(1.75 puntos)**
- Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$. **(0.75 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 2$.

- Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g . Esboza el recinto que determinan. **(1 punto)**
- Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

- Halla los valores de λ tales que $|A - \lambda I| = 0$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1.25 puntos)**
- Para $\lambda = 1$, resuelve el sistema dado por $(A - \lambda I)X = 0$. ¿Existe alguna solución tal que $z = 1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - y + z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

- Calcula la distancia entre r y π . **(1 punto)**
- Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r . **(1.5 puntos)**

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 6)$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

$$f(x) = e^x(x^2 - 5x + 6) \Rightarrow f'(x) = e^x(x^2 - 5x + 6) + e^x(2x - 5) = e^x(x^2 - 5x + 6 + 2x - 5)$$

$$f''(x) = e^x(x^2 - 3x + 1) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - 3x + 1 + 2x - 3)$$

$$f''(x) = e^x(x^2 - x - 2)$$

$$f'''(x) = e^x(x^2 - x - 2) + e^x(2x - 1) = e^x(x^2 - x - 2 + 2x - 1) = e^x(x^2 + x - 3)$$

Igualamos a cero la derivada segunda para encontrar los puntos de inflexión.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \Rightarrow \text{¡No es posible!} \\ x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = x \\ \frac{1-3}{2} = -1 = x \end{cases} \end{cases}$$

Comprobamos si la derivada tercera se anula o no en estos dos valores.

$$f'''(2) = e^2(2^2 + 2 - 3) = 3e^2 \neq 0 \rightarrow x = 2 \text{ es punto de inflexión.}$$

$$f'''(-1) = e^{-1}((-1)^2 - 1 - 3) = -3e^{-1} \neq 0 \rightarrow x = -1 \text{ es punto de inflexión.}$$

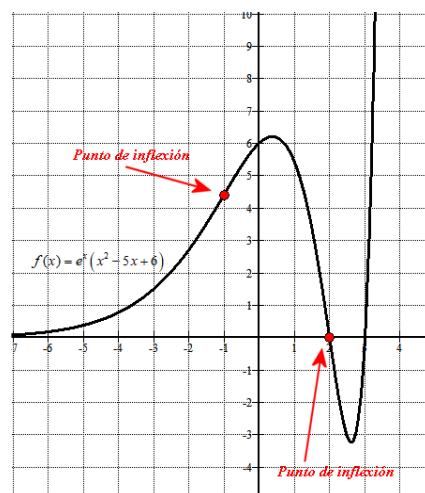
Estudiamos el signo de la segunda derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ la derivada segunda vale

$$f''(-2) = e^{-2}((-2)^2 + 2 - 2) = 4e^{-2} > 0, \text{ es positiva. En el intervalo } (-\infty, -1) \text{ la gráfica es convexa } (\cup).$$

- En $(-1, 2)$ tomamos $x = 0$ la derivada segunda vale $f''(0) = e^0(0^2 - 0 - 2) = -2 < 0$, es negativa. En el intervalo $(-1, 2)$ la gráfica es cóncava $(\cap)$.

- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ la derivada segunda vale $f''(3) = e^3(3^2 - 3 - 2) = 4e^3 > 0$, es positiva. En el intervalo $(2, +\infty)$ la gráfica es convexa $(\cup)$.



EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}^2(x) dx$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int x \operatorname{sen}^2(x) dx = \int x \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \operatorname{sen} x \Rightarrow du = (\operatorname{sen} x + x \cos x) dx \\ dv = \operatorname{sen} x dx \Rightarrow v = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= x \operatorname{sen} x (-\cos x) - \int (-\cos x) (\operatorname{sen} x + x \cos x) dx =$$

$$= -x \operatorname{sen} x \cos x + \int (\cos x \operatorname{sen} x + x \cos^2 x) dx =$$

$$= -x \operatorname{sen} x \cos x + \int \cos x \operatorname{sen} x dx + \int x \cos^2 x dx =$$

$$= -x \operatorname{sen} x \cos x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + \int x (1 - \operatorname{sen}^2 x) dx =$$

$$= -x \operatorname{sen} x \cos x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + \int x dx - \int x \operatorname{sen}^2 x dx = -x \operatorname{sen} x \cos x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + \frac{x^2}{2} - \int x \operatorname{sen}^2 x dx$$

En la igualdad obtenida despejamos la integral $\int x \operatorname{sen}^2(x) dx$.

$$\int x \operatorname{sen}^2(x) dx = -x \operatorname{sen} x \cos x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + \frac{x^2}{2} - \int x \operatorname{sen}^2 x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \int x \operatorname{sen}^2(x) dx = -x \operatorname{sen} x \cos x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + \frac{x^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int x \operatorname{sen}^2(x) dx = \frac{-x \operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{4} + \frac{x^2}{4} + K$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}^2(x) dx = \left[\frac{-x \operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{4} + \frac{x^2}{4} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[\frac{-\pi \operatorname{sen} \pi \cos \pi}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \pi}{4} + \frac{\pi^2}{4} \right] - \left[\frac{-0 \cdot \operatorname{sen} 0 \cos 0}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2 0}{4} + \frac{0^2}{4} \right] = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}$$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Discute el sistema según los valores de m . (1.5 puntos)
 b) Para $m = -2$, ¿existe alguna solución con $z = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. (1 punto)

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{vmatrix} = -12 + m^2 + 2m - 6m + 2m + 4 = m^2 - 2m - 8$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = 4 = m \\ \frac{2-6}{2} = -2 = m \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones que discutimos por separado.

CASO 1. $m \neq -2$ y $m \neq 4$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $m = -2$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada quedan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

Como la fila 2ª es proporcional a la 1ª y la columna 2ª es proporcional a la 1ª, considero

el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$. El rango de A es 2.

¿El rango de A/B es 3?

Como la columna 2ª es proporcional a la 1ª considero el menor de orden 3 que resulta de

quitar la 1ª columna $\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 24 - 4 + 24 = 0$$

El rango de A/B no es 3 y por lo tanto es igual al rango de A.

Rango de A = 2 = Rango de A/B < N° de incógnitas = 3.

El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $m=4$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada quedan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

Como la columna 2ª es proporcional a la 3ª, considero el menor de orden 2 que resulta de

quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 8 = 12 \neq 0$.

El rango de A es 2.

¿El rango de A/B es 3?

Como la columna 2ª es proporcional a la 3ª considero el menor de orden 3 que resulta de

quitar la 2ª columna $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 24 - 4 + 24 = -6 \neq 0$

Rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 $\neq$ 3 = Rango de A/B

El sistema es incompatible.

Resumiendo: Si $m \neq -2$ y $m \neq 4$ el sistema es compatible indeterminado, si $m = -2$ el sistema es compatible indeterminado y si $m = 4$ el sistema es incompatible.

- b) Para $m = -2$ el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. Hallamos la expresión de estas soluciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2+2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ -2x + 4y - 2z = -4 \\ -3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ -2x + 4y - 2z = -4 \\ \boxed{z = -\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y - \frac{1}{3} = 2 \\ -2x + 4y + \frac{2}{3} = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 6y - 1 = 6 \\ -6x + 12y + 2 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 6y = 7 \\ -6x + 12y = -14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 2^a = -2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \text{Quito Ecuación } 2^a \end{cases} \Rightarrow 3x - 6y = 7 \Rightarrow \boxed{x = \frac{7+6y}{3}}$$

¿Existe alguna solución con $z = 0$? NO, pues todas las soluciones tienen $z = -\frac{1}{3}$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - y + az = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$

a) Halla a sabiendo que π es paralelo a r . **(1.5 puntos)**

b) Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1,2,3)$. **(1 punto)**

a) Si la recta r es paralela al plano π se cumple que vector director de recta y el normal del plano son perpendiculares y el producto escalar de ambos debe ser 0.

Vector normal del plano $\rightarrow \pi \equiv x - y + az = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -1, a)$

Vector director de la recta $\rightarrow r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (4, -3, 4) \times (3, -2, 1)$

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3i + 12j - 8k + 9k - 4j + 8i = 5i + 8j + k = (5, 8, 1)$$

Producto escalar es cero $\rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = (5, 8, 1)(1, -1, a) = 5 - 8 + a = -3 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

Para $a = 3$ el plano y la recta son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Compruebo que la recta no está contenida en el plano viendo que un punto cualquiera de la recta no está en el plano.

$$\begin{aligned} r &\equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ z = -3x + 2y \end{cases} \Rightarrow 4x - 3y + 4(-3x + 2y) = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4x - 3y - 12x + 8y = 1 \Rightarrow -8x + 5y = 1; \text{ tomo } \boxed{x = 3} \Rightarrow -24 + 5y = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5y = 25 \Rightarrow \boxed{y = 5} \Rightarrow z = -9 + 10 \Rightarrow \boxed{z = 1} \end{aligned}$$

Un punto de la recta es $A(3, 5, 1)$. Veamos si pertenece al plano y cumple su ecuación.

$$\left. \begin{aligned} &\text{¿} A(3, 5, 1) \in \pi? \\ &\pi \equiv x - y + 3z = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{¿} 3 - 5 + 3 = 0?$$

La respuesta es NO. Recta y plano son paralelos para $a = 3$.

b) El plano π' perpendicular a la recta r debe tener como vector normal el director de la recta.

$$\left. \begin{aligned} &P(1, 2, 3) \in \pi' \\ &\vec{n} = \vec{v}_r = (5, 8, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} &P(1, 2, 3) \in \pi' \\ &\pi': 5x + 8y + z + D = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5 + 16 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -24$$

$$\boxed{\pi': 5x + 8y + z - 24 = 0}$$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea la función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{2ax-4b} & \text{si } x < 1 \\ 1 - x \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano)

a) Determina los valores de a y b . **(1.75 puntos)**

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$. **(0.75 puntos)**

a) Si es derivable también es continua, y debe serlo en $x = 1$ que es punto en el que cambia de definición.

- Existe $f(1) = 1 - 1 \cdot \ln 1 = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Calculo los límites laterales y deben ser iguales.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{2ax-4b} = e^{2a-4b} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x \ln x) = 1 - 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow e^{2a-4b} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a - 4b = 0 \Rightarrow 2a = 4b \Rightarrow \underline{a = 2b}$$

- Ambos valores deben ser iguales. $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Las tres condiciones se cumplen cuando $a = 2b$.

Nuestra función queda con esta expresión: $f(x) = \begin{cases} e^{4bx-4b} & \text{si } x < 1 \\ 1 - x \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Para que sea derivable en $x = 1$ sus derivadas laterales deben ser iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 4b \cdot e^{4bx-4b} & \text{si } x < 1 \\ -\ln x - x \frac{1}{x} = -1 - \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 4b \cdot e^{4b-4b} = 4b \cdot e^0 = 4b \\ f'(1^+) &= -1 - \ln 1 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4b = -1 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{4}}$$

Como $a = 2b \Rightarrow \boxed{a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}}$

b) La función queda con la expresión $f(x) = \begin{cases} e^{-x+1} & \text{si } x < 1 \\ 1 - x \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

La tangente a $f(x)$ en $x = 2$ tiene la expresión $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 1 - 2 \ln 2 \\ f'(2) &= -1 - \ln 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 1 + 2 \ln 2 = (-1 - \ln 2)(x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 1 + 2 \ln 2 = (-1 - \ln 2)x + 2 + 2 \ln 2 \Rightarrow \boxed{y = (-1 - \ln 2)x + 3}$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 2$.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g . Esboza el recinto que determinan. (1 punto)

b) Determina el área del recinto anterior. (1.5 puntos)

a) Obtenemos la expresión como función a trozos de la función f .

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Obtenemos los puntos de corte de ambas gráficas $\rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow |x| = x^2 - 2$:

$$\text{Si } x > 0 \Rightarrow x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = x \\ \frac{1-3}{2} = -1 = x \text{ No es válida, } -1 < 0 \end{cases}$$

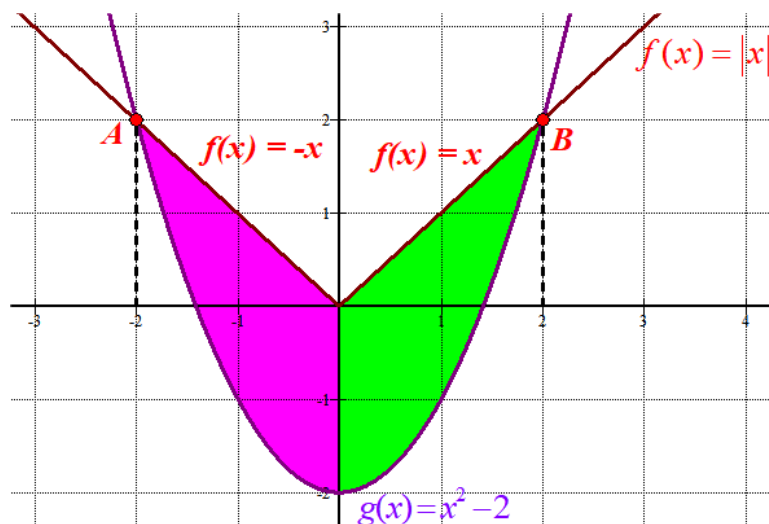
$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow -x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x, \text{ No es válida. } 1 > 0 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

Hallamos las coordenadas de estos dos puntos de corte.

x	$f(x) = x $
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

x	$g(x) = x^2 - 2$
-2	2
0	-2
2	2



b) Por la simetría del recinto calculamos solo el área de la parte verde y el área total será el doble de lo hallado.

$$\begin{aligned} \text{Área de recinto verde} &= \int_0^2 x - (x^2 - 2) dx = \int_0^2 x - x^2 + 2 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} + 4 \right] - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} + 0 \right] = 2 - \frac{8}{3} + 4 = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\text{El área del recinto vale } 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3} = 6,66 u^2.$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

a) Halla los valores de λ tales que $|A - \lambda I| = 0$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

(1.25 puntos)

b) Para $\lambda = 1$, resuelve el sistema dado por $(A - \lambda I)X = 0$. ¿Existe alguna solución tal que $z = 1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1.25 puntos)**

a) Hallamos la expresión de la matriz $A - \lambda I$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Comprobamos cuando se anula su determinante.

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| = 0 &\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda(1-\lambda)(1-\lambda) - 2(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1-\lambda)[- \lambda(1-\lambda) - 2] = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1-\lambda)[- \lambda + \lambda^2 - 2] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \\ \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = \lambda \\ \frac{1-3}{2} = -1 = \lambda \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Los valores de λ son $\lambda = 1$; $\lambda = -1$; $\lambda = 2$.

b) Para $\lambda = 1$ la matriz $A - \lambda I$ queda $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolvemos el sistema $(A - I)X = 0$.

$$(A - I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = 0}$$

Las soluciones del sistema son $x = t$; $y = z = 0$; $t \in \mathbb{R}$.

No hay ninguna solución con $z = 1$, pues todas las soluciones deben ser con $z = 0$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - y + z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

a) Calcula la distancia entre r y π . (1 punto)

b) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r . (1.5 puntos)

a) Hallamos primero la posición relativa de recta y plano.

$$\pi \equiv x - y + z = 2 \Rightarrow \vec{n} = (1, -1, 1)$$

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, -1, -2) \\ \vec{v}_r = (2, 1, -1) \end{cases}$$

Calculamos el producto escalar del vector director de la recta y el normal del plano.

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = (1, -1, 1)(2, 1, -1) = 2 - 1 - 1 = 0$$

Al ser nulo el producto escalar la recta y el plano son paralelos o coincidentes.

Comprobamos si el punto $P_r(0, -1, -2)$ pertenece al plano $\pi \equiv x - y + z = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P_r(0, -1, -2) \in \pi? \\ \pi \equiv x - y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 0 + 1 - 2 = 0?$$

No es cierto. Recta y plano son paralelos.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, -1, -2) \\ \pi \equiv x - y + z - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|0 + 1 - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3} = 1.732 u}$$

b) El plano π' perpendicular a π tiene como uno de sus vectores directores el vector normal del plano π .

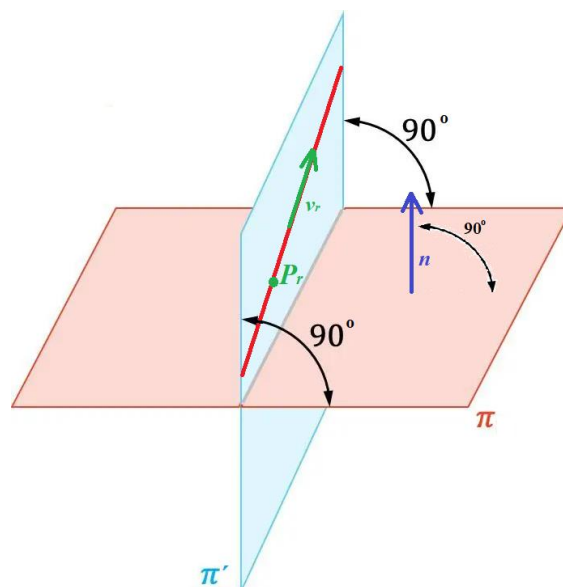
El otro vector director es el director de la recta r ya que la contiene. Y un punto del plano π' es $P_r(0, -1, -2)$, pues contiene a la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, -1, -2) \\ \vec{u} = \vec{n} = (1, -1, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y+1 & z+2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x + 2y + 2 + z + 2 + 2z + 4 + y + 1 - x = 0$$

$$3y + 3z + 9 = 0$$

$$\boxed{\pi': y + z + 3 = 0}$$





PevAU 2020 Ordinaria Matemáticas II
PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) Este examen consta de 8 ejercicios.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.**
 - d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios de los ocho ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.**
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.**

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$ para $x \neq 1, -1$.

- a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . **(1.25 puntos)**
- b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\frac{1}{9}$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

- a) Estudia el rango de A según los valores de m . **(1.5 puntos)**
- b) Para $m = 2$, calcula la inversa de $2020A$. **(1 punto)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z - 1}{a} \quad y \quad s \equiv \frac{x - 3}{-a} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 1}{2}$$

- a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a . **(1.25 puntos)**
- b) Para $a = 2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas. **(1.25 puntos)**



EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$.

- Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(2 puntos)**
- Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$. **(0.5 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Sea f la función dada por $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{(x-2)^2}$ para $x \neq 2$.

- Calcula $\int f(x) dx$. **(2 puntos)**
- Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(3, 5)$. **(0.5 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

- Discute el sistema dado por $AX = B$, según los valores de a . **(1.25 puntos)**
- Para $a = 0$, resuelve el sistema dado por $AX = B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y + z = 4$. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Se considera el punto $A(1, -2, 0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$.

- Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r . **(1.25 puntos)**
- Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r . **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$ para $x \neq 1, -1$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . **(1.25 puntos)**

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . **(1.25 puntos)**

a) El dominio de la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$ es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = -1$ es asíntota?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{1 + 2 - 3}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} =$$

$x^2 - 2x - 3 = 0$			
-1	1	-2	-3
		-1	3
		1	-3
			0

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-3}{x-1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

No hay asíntota en $x = -1$

¿ $x = 1$ es asíntota?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{1 - 2 - 3}{0} = \frac{-4}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La asíntota horizontal es $y = 1$.

Asíntota oblicua. No hay pues la función tiene asíntota horizontal.

b) Calculamos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-1) - 2x(x^2-2x-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2x^3} - 2x - 2x^2 + 2 - \cancel{2x^3} + 4x^2 + 6x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2 + 4x + 2}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x^2 + 2x + 1)}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x+1)^2}{(x^2-1)^2}$$

Esta función derivada es siempre positiva, por lo que la función siempre crece.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función

$$f(x) = xe^{3x}, \text{ el eje de abscisas y la recta } x = a \text{ vale } \frac{1}{9}.$$

Buscamos puntos de corte con el eje de abscisas ($y = 0$).

$$f(x) = 0 \Rightarrow xe^{3x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

El área es el valor de la integral definida entre 0 y a de $f(x) = xe^{3x}$, pues $a > 0$.

Antes hallamos la integral indefinida.

$$\int xe^{3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right\} = x \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx =$$

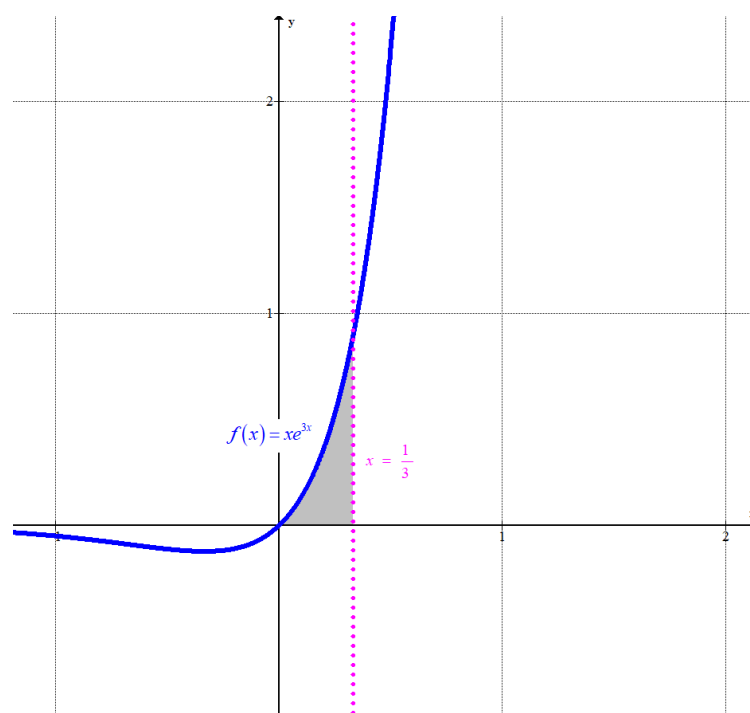
$$= \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{3x} = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} = \frac{e^{3x}(3x-1)}{9}$$

A partir de esta primitiva el área es:

$$\text{Área} = \int_0^a xe^{3x} dx = \left[\frac{e^{3x}(3x-1)}{9} \right]_0^a = \left[\frac{e^{3a}(3a-1)}{9} \right] - \left[\frac{e^0(0-1)}{9} \right] = \frac{e^{3a}(3a-1)}{9} + \frac{1}{9}$$

Como debe ser $\frac{1}{9}$ entonces:

$$\frac{e^{3a}(3a-1)}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{e^{3a}(3a-1)}{9} = 0 \Rightarrow e^{3a}(3a-1) = 0 \Rightarrow 3a-1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{3}}$$



EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

- a) Estudia el rango de A según los valores de m. **(1.5 puntos)**
 b) Para $m=2$, calcula la inversa de 2020A. **(1 punto)**

a) El determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - m^2 - m - m^2 - 2m = -2m^2 - 3m + 5$$

Lo igualo a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow -2m^2 - 3m + 5 = 0 \Rightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 + 40}}{-4} = \frac{3 \pm 7}{-4} = \begin{cases} \frac{3+7}{-4} = -2,5 = m \\ \frac{3-7}{-4} = 1 = m \end{cases}$$

Establecemos tres casos diferentes que estudiamos a continuación.

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq -2,5$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $m = 1$

El determinante es nulo y su rango no es 3.

¿Su rango es 2?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Extraemos un menor de orden 2 quitando la 1ª fila y la 1ª columna}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ con determinante } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

CASO 3. $m = -2,5$

El determinante es nulo y su rango no es 3.

¿Su rango es 2?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0,5 \\ 0 & 1 & -1,5 \\ -2,5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Extraemos el menor de orden 2 quitando la 3ª fila y la 3ª}$$

$$\text{columna} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con determinante } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $m \neq 1$ y $m \neq -2,5$ el rango de A es 3 y si $m = 1$ o $m = -2,5$ el rango es 2.

b) Para $m=2$ tenemos que la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 - 8 = -9 \neq 0$$

Por lo que existe la inversa de A y también de 2020A.

Calculamos la inversa de A.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}}{-9} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de 2020A.

$$(2020A)^{-1} = \frac{1}{2020} A^{-1} = \frac{1}{2020} \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{18180} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2020A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3636} & \frac{-1}{3636} & \frac{7}{18180} \\ \frac{-1}{3030} & \frac{1}{6060} & \frac{1}{6060} \\ \frac{1}{9090} & \frac{1}{9090} & \frac{-1}{18180} \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r \equiv x-1 = y-2 = \frac{z-1}{a} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

- a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a . **(1.25 puntos)**
 b) Para $a = 2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas. **(1.25 puntos)**

- a) El vector director de r es $\vec{u}_r = (1, 1, a)$ y el de s es $\vec{v}_s = (-a, -1, 2)$.

¿Las rectas son paralelas o coincidentes?

Para ello las coordenadas de los vectores directores deben ser proporcionales.

$$\frac{1}{-a} = \frac{1}{-1} = \frac{a}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{-a} = \frac{1}{-1} \Rightarrow -1 = -a \Rightarrow a = 1 \\ \frac{1}{-1} = \frac{a}{2} \Rightarrow 2 = -a \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

No pueden ser paralelas, pues no hay ningún valor de a que lo haga posible.

Las rectas se cruzan o se cortan en un punto.

Un punto de la recta r es $P_r(1, 2, 1)$ y uno de s es $Q_s(3, 3, -1)$

El vector que une esos dos puntos tiene coordenadas $\overrightarrow{P_rQ_s} = (3, 3, -1) - (1, 2, 1) = (2, 1, -2)$

Calculamos el producto mixto de $\vec{u}_r$; $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$.

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \cancel{2} + 4 - a^2 + \cancel{2a} - \cancel{2a} - \cancel{2} = -a^2 + 4$$

Veamos cuando se anula.

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = 0 \Rightarrow -a^2 + 4 = 0 \Rightarrow -a^2 = -4 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \sqrt{4} = \pm 2$$

Si $a = \pm 2$ el producto mixto es cero y las rectas se cortan en un punto.

Si $a \neq \pm 2$ el producto mixto es no nulo y las rectas se cruzan (tienen distinta dirección y están en planos paralelos, no son coplanarias).

- b) Para $a = 2$ las rectas se cortan.

Ponemos las rectas en ecuaciones paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 2) \\ P_r(1, 2, 1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

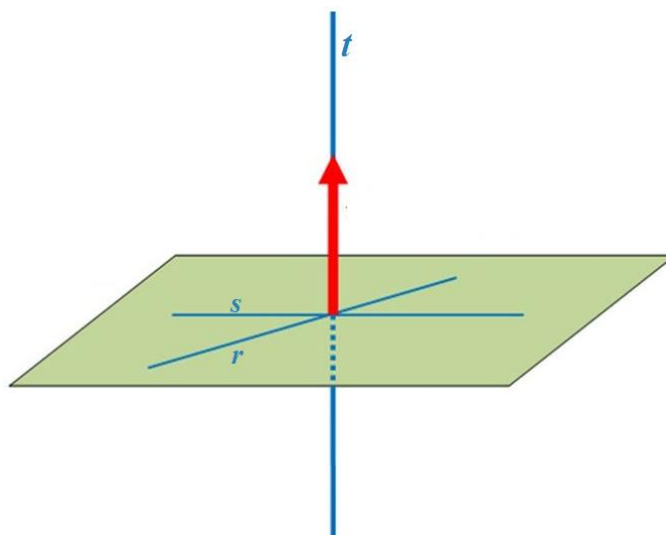
$$s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (-2, -1, 2) \\ P_s(3, 3, -1) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases}$$

Averiguamos el punto de corte resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\begin{cases} 3-2\mu=1+\lambda \\ 3-\mu=2+\lambda \\ -1+2\mu=1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-2\mu=\lambda \\ 1-\mu=\lambda \\ -2+2\mu=2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-2\mu=1-\mu \\ -2+2\mu=2-2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=\mu \\ 4\mu=4 \end{cases} \Rightarrow 1=\mu$$

Sustituyendo en la recta s obtenemos el punto $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow P_r(1,2,1)$

Tenemos que hallar la recta que pasa por $P_r(1,2,1)$ y es perpendicular a las dos rectas. Por lo que tendrá como vector director el producto vectorial de los vectores directores de las rectas: $\vec{u}_r=(1,1,2)$ y $\vec{v}_s=(-2,-1,2)$.



$$\vec{w}_t = \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2i - 4j - k + 2k - 2j + 2i = 4i - 6j + k = (4, -6, 1)$$

La recta pedida es $\left. \begin{matrix} P_r(1,2,1) \in t \\ \vec{w}_t = (4, -6, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=1+4\lambda \\ y=2-6\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$.

a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). (2 puntos)

b) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$. (0.5 puntos)

a) Hallamos los puntos críticos de la función viendo donde se anula la derivada.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x} &\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x(2 - \cos x) - \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x)}{(2 - \cos x)^2} = \\ &= \frac{2 \cos x - \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2 \cos x - (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2 \cos x - 1}{(2 - \cos x)^2} \\ f'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{2 \cos x - 1}{(2 - \cos x)^2} = 0 \Rightarrow 2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Valoramos la función en los extremos del dominio de definición $[0, 2\pi]$ y en los puntos críticos en busca de los extremos absolutos.

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{\operatorname{sen} 0}{2 - \cos 0} = 0$$

$$x = \frac{\pi}{3} \rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}}{2 - \cos \frac{\pi}{3}} = 0.57$$

$$x = \frac{5\pi}{3} \rightarrow f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}}{2 - \cos \frac{5\pi}{3}} = -0.57$$

$$x = 2\pi \rightarrow f(2\pi) = \frac{\operatorname{sen} 2\pi}{2 - \cos 2\pi} = 0$$

La función tiene un máximo absoluto en $\left(\frac{\pi}{3}, 0.57\right)$ y un mínimo absoluto en $\left(\frac{5\pi}{3}, -0.57\right)$.

$$\text{b) En } x = \frac{\pi}{3} \rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}}{2 - \cos \frac{\pi}{3}} = 0.57 \text{ y } f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2 \cos \frac{\pi}{3} - 1}{\left(2 - \cos \frac{\pi}{3}\right)^2} = \frac{1 - 1}{(2 - 0.5)^2} = 0$$

$$\text{La recta tangente tiene ecuación } y - 0.57 = 0 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow \boxed{y = 0.57}$$

La recta normal es perpendicular a la recta tangente. Al ser la recta tangente una recta

horizontal la recta normal debe ser vertical. Su ecuación es $\boxed{x = \frac{\pi}{3}}$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Sea f la función dada por $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{(x-2)^2}$ para $x \neq 2$.

a) Calcula $\int f(x)dx$. **(2 puntos)**

b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (3, 5). **(0.5 puntos)**

a) Calculamos la integral usando la descomposición en fracciones simples.

$$\int f(x)dx = \int \frac{3x^2 + 4}{(x-2)^2} dx =$$

$$\frac{3x^2 + 4}{(x-2)^2} = \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4}$$

$3x^2$	$+4$	$x^2 - 4x + 4$
$-3x^2$	$+12x$	-12
	$12x$	-8
		3

$$\frac{3x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4} = 3 + \frac{12x - 8}{(x-2)^2}$$

Desarrollamos en fracciones simples

$$\frac{12x - 8}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$$\frac{12x - 8}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2) + B}{(x-2)^2} \Rightarrow 12x - 8 = A(x-2) + B$$

$$x = 2 \rightarrow 24 - 8 = 0 + B \rightarrow B = 16$$

$$x = 0 \rightarrow 4 = -2A + B \rightarrow 4 = -2A + 28 \rightarrow -24 = -2A \rightarrow A = 12$$

$$\frac{12x + 4}{(x-2)^2} = \frac{12}{x-2} + \frac{16}{(x-2)^2}$$

$$= \int 3 + \frac{12}{x-2} + \frac{16}{(x-2)^2} dx = 3x + 12 \ln|x-2| + 16 \int (x-2)^{-2} dx =$$

$$= 3x + 12 \ln|x-2| + 16 \left(\frac{1}{-1} \right) (x-2)^{-1} = \boxed{3x + 12 \ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + C}$$

b) Si $F(x) = 3x + 12 \ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + C$ y además $F(3) = 5$

$$F(3) = 9 + 12 \ln|3-2| - \frac{16}{3-2} + C = 5 \Rightarrow 9 + 0 - 16 + C = 5 \Rightarrow C = 12$$

La primitiva buscada es $\boxed{F(x) = 3x + 12 \ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + 12}$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

- a) Discute el sistema dado por $AX = B$, según los valores de a . **(1.25 puntos)**
 b) Para $a = 0$, resuelve el sistema dado por $AX = B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y + z = 4$. **(1.25 puntos)**

- a) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 4 - 1 = 0$$

El rango de A no es 3.

Tomamos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \text{ El rango de } A \text{ es } 2$$

Estudiamos el rango de $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 2a \\ 4 & 1 & 4 & 3a \end{pmatrix}$

Consideramos el menor que resulta de quitar la columna 1ª, pues la columna 1ª y la 3ª son

iguales $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 4 & 3a \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 4 & 3a \end{vmatrix} = 3a + 2a - a - 8a = -4a$

Se plantean dos situaciones posibles.

Si $a = 0$ este determinante es nulo y el rango de A/B es 2.

Rango de A = rango de A/B = $2 < 3$ = número de incógnitas. El sistema es **compatible indeterminado**.

Si $a \neq 0$ el determinante es no nulo y el rango de A/B es 3.

Rango de A = $2 \neq 3$ = rango de A/B . El sistema es **incompatible**.

- b) Para $a = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones.

$$AX = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ 4x + y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = -z \\ 4x + y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -z + y + z = 0 \\ -4z + y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

Las soluciones son $\boxed{x = -t; \quad y = 0; \quad z = t}$

Para que sea $y + z = 4$ como $y = 0$ debe ser $z = 4$ y entonces $x = -4$.

La solución es $x = -4; y = 0; z = 4$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Se considera el punto $A(1, -2, 0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$.

- a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r . **(1.25 puntos)**
 b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r . **(1.25 puntos)**

a) Pasamos la ecuación de la recta a paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = 3z - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 3z \\ y = -2 + 3z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

La recta pasa por $P(2, -2, 0)$ y tiene vector director $\vec{v}_r = (-3, 3, 1)$

El plano perpendicular a la recta tiene como vector normal el director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, -2, 0) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (-3, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(1, -2, 0) \in \pi \\ \pi \equiv -3x + 3y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -3 - 6 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 9$$

$$\boxed{\pi \equiv -3x + 3y + z + 9 = 0}$$

- b) El plano que pasa por A y contiene a r tiene como vectores directores el vector director de r y el vector $\overrightarrow{AP} = (2, -2, 0) - (1, -2, 0) = (1, 0, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AP} = (1, 0, 0) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (-3, 3, 1) \\ A(1, -2, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3z - y - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv -y + 3z - 2 = 0}$$

PevAU 2019 Extraordinaria Matemáticas II



PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2018-2019

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
 - c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Dada la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de $f(x)$ y la recta $y = 0$.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina la función $f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple

$$f'(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de f pasa por $(1, 0)$.

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ (m+2)x + y - z = m \\ 3x + (m+2)y + z = m \end{array} \right\}$$

- a) **[1,5 puntos]** Discute el sistema según los valores de m .
- b) **[1 punto]** Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 0$.

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Se consideran los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ $\vec{v} = (1, -2, -1)$ $\vec{w} = (2, \alpha, \beta)$, donde α y β son números reales.

- a) **[0,75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- b) **[0,75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tengan la misma dirección.
- c) **[1 punto]** Para $\alpha = 8$ determina el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2018-2019**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
 - c)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - d)** En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción B

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) + ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b.

Ejercicio 2.- Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x e^{-x^2}$.

- a) [1'25 puntos]** Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) [1'25 puntos]** Determina $a > 0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0, a]$ y el eje de abscisas.

Ejercicio 3.- [2'5 puntos] Calcula en grados los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Ejercicio 4.- Considera las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$

- (a) [1'25 puntos]** Halla k sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.
- (b) [1'25 puntos]** Para $k = 1$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s .

SOLUCIONES

OPCIÓN A

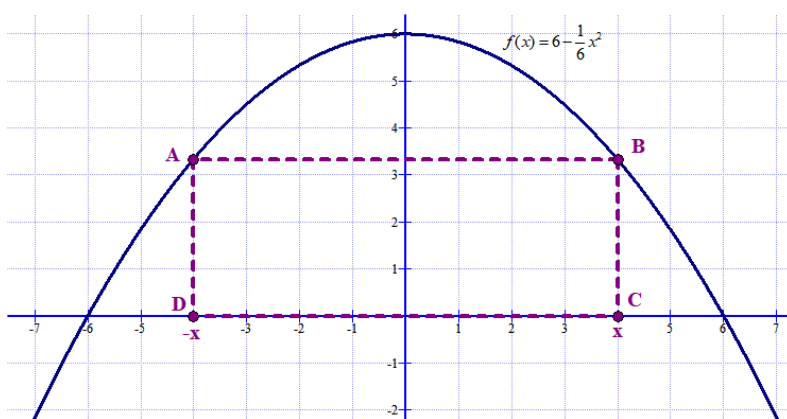
Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$, calcule las dimensiones del rectángulo de área máxima con lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de $f(x)$ y la recta $y = 0$.

Vamos a representar la función para observar como es el recinto.

Su vértice está en $x = 0$, ya que su derivada es $f'(x) = -\frac{1}{6}2x = -\frac{1}{3}x \Rightarrow -\frac{1}{3}x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Hacemos una tabla de valores para dibujar la parábola $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$.

x	$y = 6 - \frac{1}{6}x^2$
0	6
6	0
-6	0
4	$10/3$
2	$16/3$
-4	$10/3$



Los vértices del rectángulo tienen coordenadas:

$$A\left(-x, 6 - \frac{1}{6}x^2\right), \quad B\left(x, 6 - \frac{1}{6}x^2\right), \quad C(x, 0), \quad D(-x, 0).$$

El área del rectángulo es:

$$\text{Área}(x) = \text{Base} \cdot \text{altura} = 2x \cdot \left(6 - \frac{1}{6}x^2\right) = 12x - \frac{2}{6}x^3 = 12x - \frac{1}{3}x^3$$

Derivamos esta función e igualamos a cero en busca del área máxima.

$$\text{Área}(x) = 12x - \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow \text{Área}'(x) = 12 - x^2$$

$$\text{Área}'(x) = 0 \Rightarrow 12 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12}$$

Comprobemos si es un máximo sustituyendo en la segunda derivada este valor.

$$\text{Área}'(x) = 12 - x^2 \Rightarrow \text{Área}''(x) = -2x$$

$$\text{Área}''(\sqrt{12}) = -2\sqrt{12} < 0$$

Por lo que en $x = \sqrt{12} = 3,46$ el rectángulo alcanza área máxima.

Calculamos las dimensiones del rectángulo de área máxima:

La base es $2x = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$

La altura es $f(\sqrt{12}) = 6 - \frac{1}{6}(\sqrt{12})^2 = 6 - \frac{1}{6} \cdot 12 = 6 - 2 = 4$.

El rectángulo de área máxima tiene de base $4\sqrt{3}$ y altura 4.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que es derivable, que su función derivada cumple $f'(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de f pasa por $(1,0)$.

Nos piden hallar la primitiva de $f'(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ que pasa por $(1,0)$. Es decir, tal que $f(1) = 0$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx \rightarrow v = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \end{array} \right\} =$$

$$= \ln x \cdot 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x} \frac{1}{x} dx = 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx =$$

$$= 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x - 4 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\boxed{f(x) = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + K}$$

Como además sabemos que $f(1) = 0$ sustituimos y determinamos el valor de K.

$$f(1) = 2\sqrt{1} \ln 1 - 4\sqrt{1} + K = 0 \Rightarrow -4 + K = 0 \Rightarrow K = 4$$

La función pedida es $f(x) = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + 4$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ (m+2)x + y - z = m \\ 3x + (m+2)y + z = m \end{array} \right\}$$

- a) **[1,5 puntos]** Discute el sistema según los valores de “m”.
 b) **[1 punto]** Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 0$.

a) La matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m+2 & 1 & -1 & m \\ 3 & m+2 & 1 & m \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz A vale:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 + 2(m+2)^2 - 6 - m - 2 + m + 2 = -8 + 2m^2 + 8 + 8m = 2m^2 + 8m$$

Igualamos el determinante a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m^2 + 8m = 0 \Rightarrow 2m(m+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 \end{cases}$$

Hay tres casos distintos a analizar por separado.

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq -4$

En este caso el determinante de la matriz de los coeficientes no se anula y su rango es 3 (el máximo posible) al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $m = 0$

El sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{array} \right\}$$

Se observa que la ecuación tercera es la suma de la primera y la segunda, por lo que este sistema es equivalente al que solo tiene la ecuación 1ª y 2ª, que pasamos a resolver.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = -2z \\ 2x + y = z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \hline 2x + y = z \\ -2x - 2y = 4z \\ \hline -y = 5z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = -2z \\ -y = 5z \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = -2z \\ y = -5z \end{array} \right\} &\Rightarrow x - 5z = -2z \Rightarrow \boxed{x = 3z} \end{aligned}$$

El sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $m = -4$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ -2x + y - z = -4 \\ 3x - 2y + z = -4 \end{array} \right\}$$

El sistema queda

La matriz de coeficientes asociada es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene determinante cero. El

menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª tiene determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Calculamos el valor del menor que

$$\text{resulta de quitar la 3ª columna. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 12 - 8 - 8 = -32 \neq 0. \text{ El rango de la}$$

matriz ampliada A/B es 3.

Como rango de A $\neq$ rango de A/B el sistema es incompatible. No tiene solución.

- b) La solución para $m = 0$ la hemos hallado en el caso 2 del apartado a) y dicha solución es $x = 3t; y = -5t; z = t$ siendo $t \in \mathbb{R}$

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Se consideran los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ $\vec{v} = (1, -2, -1)$ $\vec{w} = (2, \alpha, \beta)$, donde α y β son números reales.

- a) **[0,75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
 b) **[0,75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tengan la misma dirección.
 c) **[1 punto]** Para $\alpha = 8$ determina el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

- a) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es ortogonal a ambos, por lo que el vector $\vec{w}$ debería tener esa misma dirección, es decir, sus coordenadas deben ser proporcionales al producto vectorial.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 3j - 2k - 2k + j + 6i = 4i + 4j - 4k$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (4, 4, -4)$$

Como $\vec{w} = (2, \alpha, \beta)$ debe indicar la misma dirección sus coordenadas deben ser proporcionales.

$$(4, 4, -4) \parallel (2, \alpha, \beta) \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{4}{\alpha} = \frac{-4}{\beta} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{2} = \frac{4}{\alpha} \Rightarrow 4\alpha = 8 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2} \\ \frac{4}{2} = \frac{-4}{\beta} \Rightarrow 4\beta = -8 \Rightarrow \boxed{\beta = -2} \end{cases}$$

Los valores buscados son $\alpha = 2$ y $\beta = -2$.

OTRA FORMA DE HACERLO

Como $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$ su producto escalar es cero $\rightarrow$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (2, \alpha, \beta) \cdot (1, 2, 3) = 0 \Rightarrow 2 + 2\alpha + 3\beta = 0 \Rightarrow 2\alpha + 3\beta = -2$$

Como $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{v}$ su producto escalar es cero $\rightarrow$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (2, \alpha, \beta) \cdot (1, -2, -1) = 0 \Rightarrow 2 - 2\alpha - \beta = 0 \Rightarrow -2\alpha - \beta = -2$$

Debemos de resolver el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{matrix} 2\alpha + 3\beta = -2 \\ -2\alpha - \beta = -2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Ecuación 2ª + Ecuación 1ª} \\ 2\alpha + 3\beta = -2 \\ -2\alpha - \beta = -2 \\ \hline 2\beta = -4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 2\alpha + 3\beta = -2 \\ 2\beta = -4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{\beta = -2}$$

$$\Rightarrow 2\alpha - 6 = -2 \Rightarrow 2\alpha = 4 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

Los valores buscados son $\alpha = 2$ y $\beta = -2$

- b) Para que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tengan la misma dirección deben tener coordenadas proporcionales.

$$(1, -2, -1) \parallel (2, \alpha, \beta) \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{\alpha}{-2} = \frac{\beta}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{1} = \frac{\alpha}{-2} \Rightarrow \boxed{-4 = \alpha} \\ \frac{2}{1} = \frac{\beta}{-1} \Rightarrow \boxed{-2 = \beta} \end{cases}$$

La solución es $\alpha = -4$ y $\beta = -2$.

c) Si $\alpha = 8$ las coordenadas del vector $\vec{w}$ son $\vec{w} = (2, 8, \beta)$.

Si $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (1, -2, -1)$ significa que son vectores linealmente dependientes y el determinante formado por las coordenadas de los tres vectores es nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & \beta \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4 + 24 - 2\beta - 2\beta + 8 + 12 = 0 \Rightarrow -4\beta = -40 \Rightarrow \boxed{\beta = 10}$$

El valor buscado es $\beta = 10$.

OTRA FORMA DE HACERLO

Si $\alpha = 8$ las coordenadas del vector $\vec{w}$ son $\vec{w} = (2, 8, \beta)$.

Si $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (1, -2, -1)$ significa que existen números p y q tales que $\vec{w} = p\vec{u} + q\vec{v} \Rightarrow (2, 8, \beta) = p(1, 2, 3) + q(1, -2, -1)$. De aquí surge un sistema, que resolvemos:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} 2 = p + q \\ 8 = 2p - 2q \\ \beta = 3p - q \end{array} \right\} & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 - q = p \\ 8 = 2p - 2q \\ \beta = 3p - q \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8 = 2(2 - q) - 2q \\ \beta = 3(2 - q) - q \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8 = 4 - 2q - 2q \\ \beta = 6 - 3q - q \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4 = -4q \\ \beta = 6 - 4q \end{array} \right\} & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -1 = q \\ \beta = 6 - 4q \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = 6 - 4(-1) = 6 + 4 = 10 \Rightarrow \boxed{\beta = 10} \end{aligned}$$

El valor buscado es $\beta = 10$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) + ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}. \text{ (ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable.}$$

Calcula a y b.

Si la función es derivable también es continua. Debe ser continua en $x = 0$, por lo que:

- Existe $f(0) = \sin(0) + 0 + b = b$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin(x) + ax + b = b$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(0+1)}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1 \end{aligned}$$

- Los tres valores son iguales $\rightarrow \boxed{b=1}$

Con $b=1$, la función es $f(x) = \begin{cases} \sin(x) + ax + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

La función es derivable en $x \neq 0$ y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x) + a & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \cos(x) + a & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como debe ser derivable en $x = 0$, la derivada por derecha e izquierda deben ser iguales.

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos(x) + a) = \cos 0 + a = 1 + a$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{\frac{0}{0+1} - \ln(0+1)}{0^2} = \frac{0-0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x+1}{(x+1)^2}}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1-x-1}{(x+1)^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\cancel{x}}{2\cancel{x}(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2(x+1)^2} = \frac{-1}{2(0+1)^2} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

Igualamos las derivadas laterales y obtenemos el valor de “a”.

$$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow 1+a = \frac{-1}{2} \Rightarrow 2+2a = -1 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-3}{2}}$$

Los valores buscados son $a = \frac{-3}{2}$; $b = 1$.

Ejercicio 2.- Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x e^{-x^2}$.

- a) [1'25 puntos] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) [1'25 puntos] Determina $a > 0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0, a]$ y el eje de abscisas.

a) Los puntos de corte.

$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0 \cdot e^{-0^2} = 0$. El punto de corte con el eje OY es $(0, 0)$.

$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$, ya que la función exponencial no se anula..

Obtenemos el punto ya obtenido $(0, 0)$.

La gráfica solo tiene un punto de corte con los ejes coordenados $P(0, 0)$.

Los extremos relativos.

Necesitamos la derivada de $f(x) = x e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$

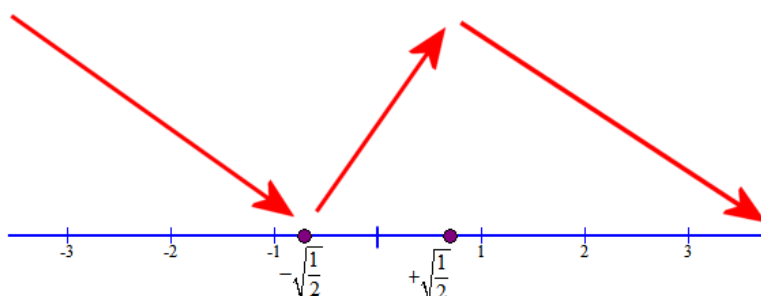
Si igualamos a cero la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1 - 2x^2)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ 0 \\ e^{-x^2} = 0, \text{ Imposible} \end{cases}$$

Veamos que ocurre antes, entre y después de los valores $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ y $x = +\sqrt{\frac{1}{2}}$.

- En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ tomamos $x = -1$ la derivada vale $f'(-1) = (1 - 2)e^{-1} = -\frac{1}{e} < 0$. La función decrece.
- En $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, +\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ tomamos $x = 0$ la derivada vale $f'(0) = (1 - 0)e^0 = 1 > 0$. La función crece.
- En $\left(+\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ la derivada vale $f'(1) = (1 - 2)e^{-1} = -\frac{1}{e} < 0$. La función decrece.

La función evoluciona como indica el esquema siguiente.



La función tiene un mínimo en $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ y un máximo en $x = +\sqrt{\frac{1}{2}}$, tomando los valores

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = -\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2e}} = -0,43$$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}} = 0,43$$

b) La función solo corta al eje OX en (0, 0), por lo que el área es la integral definida de la función entre 0 y a.

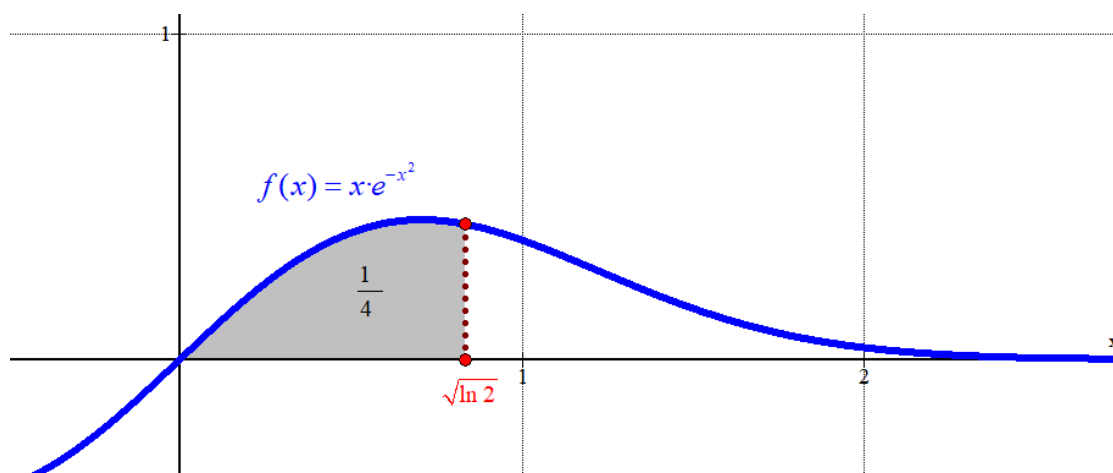
$$\text{Área} = \int_0^a x e^{-x^2} dx = \frac{1}{-2} \int_0^a (-2x) e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^a = \left[-\frac{1}{2} e^{-a^2} \right] - \left[-\frac{1}{2} e^{-0^2} \right] = -\frac{1}{2} e^{-a^2} + \frac{1}{2}$$

Como queremos que el área sea igual a $\frac{1}{4}$ se nos plantea la ecuación:

$$-\frac{1}{2} e^{-a^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow -2e^{-a^2} + 2 = 1 \Rightarrow -2e^{-a^2} = -1 \Rightarrow e^{-a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{e^{a^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{a^2} = 2$$

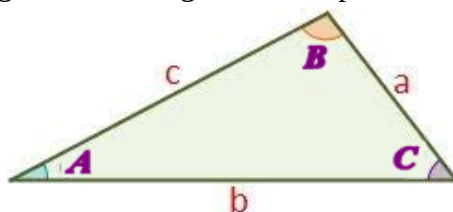
Tomamos logaritmos.

$$\ln e^{a^2} = \ln(2) \Rightarrow a^2 = \ln 2 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{\ln 2}}$$



Ejercicio 3.- [2'5 puntos] Calcula en grados los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Damos nombre a los ángulos del triángulo como aparece en la imagen:



Se cumple:

- Los tres ángulos de un triángulo suman $180^\circ \rightarrow A + B + C = 180$
- El menor de ellos es la mitad del ángulo mayor $\rightarrow A = \frac{B}{2}$
- La suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo $\rightarrow A + B = 2C$

Juntando las tres condiciones surge un sistema que hay que resolver:

$$\left. \begin{array}{l} A + B + C = 180 \\ A = \frac{B}{2} \\ A + B = 2C \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{B}{2} + B + C = 180 \\ \frac{B}{2} + B = 2C \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} B + 2B + 2C = 360 \\ B + 2B = 4C \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3B + 2C = 360 \\ 3B - 4C = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a & & \\ 3B & -4C & = 0 \\ -3B & -2C & = -360 \\ \hline -6C & = & -360 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3B + 2C = 360 \\ -6C = -360 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3B + 2C = 360 \\ C = \frac{-360}{-6} = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3B - 4 \cdot 60 = 0 \Rightarrow 3B = 240 \Rightarrow \boxed{B = \frac{240}{3} = 80} \Rightarrow \boxed{A = \frac{80}{2} = 40}$$

El triángulo de la solución tiene ángulos de 40° , 60° y 80° .

Ejercicio 4.- Considera las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$

(a) [1'25 puntos] Halla k sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.

(b) [1'25 puntos] Para $k = 1$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s .

(a) Los vectores directores de las rectas son $\vec{u}_r = (1, 2, 2)$ y $\vec{v}_s = (-1, 1, 1)$.

$\frac{1}{-1} \neq \frac{2}{1} = \frac{2}{1} \rightarrow$ No son proporcionales las coordenadas, por lo que las rectas no son paralelas.

Para que se corten debe cumplirse que el determinante de la matriz formada por las coordenadas de estos dos vectores junto con uno que va de un punto cualquiera de r a otro punto cualquiera de s es cero.

$$P_r(2, k, 0) \text{ y } Q_s(-1, 1, 3) \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (-1, 1, 3) - (2, k, 0) = (-3, 1-k, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 2, 2) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (-3, 1-k, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1-k & 3 \end{vmatrix} = 3 - 6 - 2 + 2k + 6 + 6 - 1 + k = 3k + 6$$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = 0 \Rightarrow 3k + 6 = 0 \Rightarrow 3k = -6 \Rightarrow \boxed{k = \frac{-6}{3} = -2}$$

Para $k = -2$ las rectas se cortan.

(b) Si $k = 1$ las rectas son:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2} \text{ y } s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$$

El plano que buscamos contiene a r , por lo que contiene al punto $P_r(2, 1, 0)$ y tiene como vector director $\vec{u}_r = (1, 2, 2)$. Como además es paralelo a s también tiene como vector director el de la recta s $\vec{v}_s = (-1, 1, 1)$.

Conocidos dos vectores directores y un punto del plano podemos determinar la ecuación del plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(2, 1, 0) \in \pi \\ \vec{v}_1 = (1, 2, 2) \\ \vec{v}_2 = (-1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 4 - 2y + 2 + z + 2z - y + 1 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y + 3z + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv y - z - 1 = 0}$$

PevAU 2019 Ordinaria Matemáticas II



PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2018-2019

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.**
 - c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.**
 - d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.**

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} \quad \text{para } x \neq -1.$$

- (a) [1,5 puntos]** Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .
- (b) [1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$).

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4.- Considera la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x=0$ y $\pi_2 \equiv y=0$.

- (a) [1,25 puntos]** Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2 .
- (b) [1,25 puntos]** Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2 .



PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2018-2019

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
 - c)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - d)** En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-a)e^x$.

- (a) [1,25 puntos]** Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x = 0$.
- (b) [1,25 puntos]** Para $a = 1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f .

Ejercicio 2.- Considera las funciones $f: (-2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$.

- (a) [1 punto]** Esboza el recinto que determinan la gráfica de f , la gráfica de g , la recta $x = 1$ y la recta $x = 3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).
- (b) [1,5 puntos]** Determina el área del recinto anterior.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ considera el sistema de ecuaciones dado por $X^t A = B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelos según los distintos valores de m .

Ejercicio 4.- Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,1,0), B(1,0,2) y C(0,2,1).

- (a) [1,25 puntos]** Halla el área de dicho triángulo.
- (b) [1,25 puntos]** Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} \quad \text{para } x \neq -1.$$

(a) [1,5 puntos] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .

(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

(a) Asíntotas verticales: $x = a$.

Siendo a el valor excluido del dominio. La asíntota es $x = -1$

Comprobamos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - 3 + 4}{0} = \frac{2}{0} = \infty$$

Asíntotas horizontales: $y = b$. Siendo $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{Calculemos } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

No hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2} + 3\cancel{x} + 4}{2\cancel{x^2} + 2\cancel{x}} = \frac{1}{2} \\ n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} - \frac{x}{2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 3x + 4) \cdot 2 - x(2x + 2)}{(2x + 2) \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2x^2} + 6x + 8 - \cancel{2x^2} - 2x}{4x + 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 8}{4x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = \frac{1}{2}x + 1$

(b) Necesitamos la derivada de la función.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x + 3)(2x + 2) - (x^2 + 3x + 4)(2)}{(2x + 2)^2} \\ f'(x) &= \frac{4x^2 + 4x + 6x + 6 - (2x^2 + 6x + 8)}{(2x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - 2}{(2x + 2)^2} \end{aligned}$$

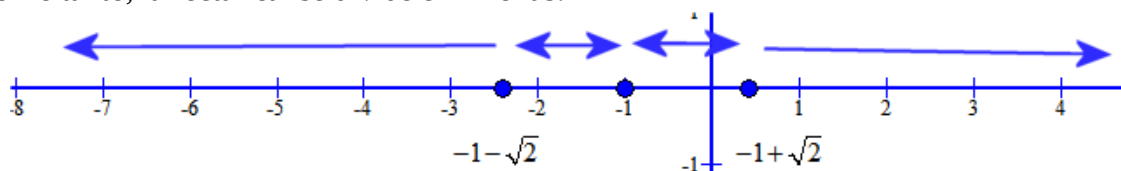
Buscamos los puntos críticos de la función igualando a cero la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 4x - 2}{(2x + 2)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 16}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{4} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{4} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Tendremos 3 puntos a considerar para el cambio de signo de la derivada: -1 ; $-1 - \sqrt{2}$ y $-1 + \sqrt{2}$.

Por lo tanto, la recta real se divide en 4 zonas:



Estudiamos el signo en cada zona:

- En la semirrecta $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$ tomamos el valor $x = -4 \rightarrow$

$$f'(-4) = \frac{2(-4)^2 + 4(-4) - 2}{(2(-4) + 2)^2} = \frac{32 - 16 - 2}{+} > 0. \text{ La función crece.}$$

- En el intervalo $(-1 - \sqrt{2}, -1)$ tomamos el valor $x = -2 \rightarrow$

$$f'(-2) = \frac{2(-2)^2 + 4(-2) - 2}{(2(-2) + 2)^2} = \frac{8 - 8 - 2}{+} < 0. \text{ La función decrece.}$$

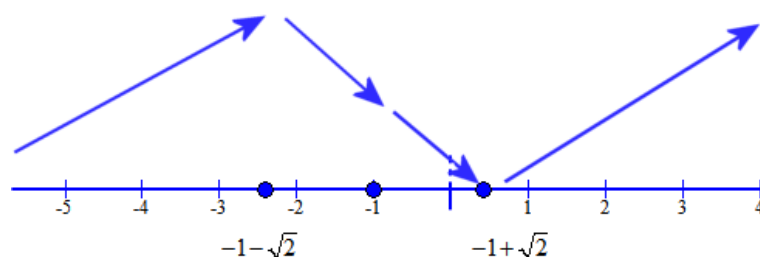
- En el intervalo $(-1, -1 + \sqrt{2})$ tomamos el valor $x = 0 \rightarrow$

$$f'(0) = \frac{2(0)^2 + 4(0) - 2}{(2(0) + 2)^2} = \frac{-2}{+} < 0. \text{ La función decrece.}$$

- En la semirrecta $(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$ tomamos el valor $x = 4 \rightarrow$

$$f'(4) = \frac{2(4)^2 + 4(4) - 2}{(2(4) + 2)^2} = \frac{32 + 16 - 2}{+} > 0. \text{ La función crece.}$$

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, +\infty)$ y decrece en $(-1 - \sqrt{2}, -1) \cup (-1, -1 + \sqrt{2})$.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Sea la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$).

Calculamos la integral indefinida usando el cambio de variable sugerido.

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \\ dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t} dt \end{array} \right\} = \int \frac{1+t}{1-t} \frac{1}{t} dt = \int \frac{1+t}{t(1-t)} dt =$$

= {Integración por descomposición en fracciones simples}

$$\frac{1+t}{t(1-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} \Rightarrow \frac{1+t}{t(1-t)} = \frac{A(1-t) + Bt}{t(1-t)} \Rightarrow 1+t = A(1-t) + Bt$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tomando } t=1 \Rightarrow 1+1 = A \cdot 0 + B \Rightarrow B=2 \\ \text{Tomando } t=0 \Rightarrow 1+0 = A \cdot 1 + B \cdot 0 \Rightarrow A=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1+t}{t(1-t)} = \frac{1}{t} + \frac{2}{1-t}$$

Nuestra integral se descompone en la suma de dos integrales más sencillas.

$$\int \frac{1+t}{t(1-t)} dt = \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{2}{1-t} dt = \ln t - 2 \ln(1-t) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ t = e^x \end{array} \right\} = \ln e^x - 2 \ln |1 - e^x| = \boxed{x - 2 \ln |1 - e^x| + C}$$

La primitiva es $F(x) = x - 2 \ln |1 - e^x| + C$.

Como nos piden además que pase por el punto $(1,1)$, se debe cumplir que $F(1) = 1$.

$$F(1) = 1 \Rightarrow F(1) = 1 - 2 \ln |1 - e^1| + C = 1 \Rightarrow -2 \ln |1 - e| + C = 0 \Rightarrow C = 2 \ln |1 - e|$$

La primitiva pedida es $F(x) = x - 2 \ln |1 - e^x| + 2 \ln |1 - e|$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Obtenemos un sistema de ecuaciones a partir de la ecuación matricial.

$$\left. \begin{array}{l} AX = XA \\ a + d = 1 \Rightarrow a = 1 - d \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-d & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-d & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ 1-d & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -1+d \\ d & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -c = b \\ -d = -1+d \\ 1-d = d \\ b = -c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = -c \\ 1 = 2d \end{array} \right\} \Rightarrow d = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

La matriz X queda $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -c \\ c & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz X vale 1.

$$|X| = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -c \\ c & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Las matrices que cumplen lo pedido son $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ o $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.- Considera la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x=0$ y $\pi_2 \equiv y=0$.

- (a) [1,25 puntos] Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2 .
 (b) [1,25 puntos] Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2 .

(a) Pasamos la ecuación de la recta a paramétricas.

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right\}$$

Un punto de la recta r tiene coordenadas $P_r(2 - \lambda, 2 + 3\lambda, 1 + \lambda)$.

Si el punto equidista de los planos debe cumplir: $\text{distancia}(P_r, \pi_1) = \text{distancia}(P_r, \pi_2)$.

$$\text{distancia}(P_r, \pi_1) = \text{distancia}(P_r, \pi_2) \Rightarrow \frac{|2 - \lambda|}{\sqrt{1}} = \frac{|2 + 3\lambda|}{\sqrt{1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |2 - \lambda| = |2 + 3\lambda| \Rightarrow \begin{cases} 2 - \lambda = 2 + 3\lambda \Rightarrow 0 = 4\lambda \Rightarrow \lambda = 0 \\ \text{o} \\ 2 - \lambda = -(2 + 3\lambda) \Rightarrow 2 - \lambda = -2 - 3\lambda \Rightarrow 2\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = -2 \end{cases}$$

Los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2 son dos:

$$\left. \begin{array}{l} P_r(2 - \lambda, 2 + 3\lambda, 1 + \lambda) \\ \lambda = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P_r(2, 2, 1) \text{ o bien } \left. \begin{array}{l} P_r(2 - \lambda, 2 + 3\lambda, 1 + \lambda) \\ \lambda = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow P_r(4, -4, -1)$$

- (b) Llamemos s a la recta definida por los planos π_1 y π_2 . Obtengamos de su ecuación el vector director:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x = 0 \\ \pi_2 \equiv y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_s = (0, 0, 1)$$

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \vec{v}_r = (-1, 3, 1)$$

Para que las rectas sean coincidentes o paralelas los vectores directores deben ser proporcionales, y estos no los son.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \\ \vec{u}_s = (0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{0} \neq \frac{1}{1}$$

Por lo que solo cabe la posibilidad de que se corten o crucen.

Tomemos un tercer vector que vaya de un punto de la recta s a otro de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow P_r(2,2,1) \\ x=0 \\ s \equiv y=0 \\ z=\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{Q_s P_r} = (2,2,1) - (0,0,0) = (2,2,1)$$

Calculamos el valor del producto mixto $[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{Q_s P_r}]$.

$$[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{Q_s P_r}] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 0 - (0 + 0 + 6) = -8 \neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas se cruzan.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-a)e^x$.

- (a) [1,25 puntos] Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x = 0$.
 (b) [1,25 puntos] Para $a = 1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f .

- (a) Calculamos la derivada de la función.

$$f(x) = (x-a)e^x \Rightarrow f'(x) = e^x + (x-a)e^x = (1+x-a)e^x$$

Igualamos a cero la derivada para obtener sus puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1+x-a)e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+x-a = 0 \Rightarrow x = a-1 \\ e^x = 0; \text{ No es posible} \end{cases}$$

Como el punto crítico debe ser $x = 0 \Rightarrow a-1 = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$

- (b) Si $a = 1$ la función es $f(x) = (x-1)e^x$ y su derivada $f'(x) = (1+x-1)e^x = xe^x$

La derivada segunda será: $f''(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$.

Si igualamos a cero la segunda derivada obtenemos los posibles puntos de inflexión.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (1+x)e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+x = 0 \Rightarrow x = -1 \\ e^x = 0; \text{ No es posible} \end{cases}$$

Veamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = -1$.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos el valor $x = -2 \rightarrow f''(-2) = (1-2)e^{-2} = -e^{-2} < 0$. La gráfica de la función es cóncava ($\cap$).
- En $(-1, +\infty)$ tomamos el valor $x = 0 \rightarrow f''(0) = (1+0)e^0 = 1 > 0$. La gráfica de la función es convexa ($\cup$).

La función cambia de ser cóncava a convexa y por tanto, presenta un punto de inflexión en $x = -1$.

También lo podríamos haber comprobado viendo si la derivada tercera tiene un valor no nulo para $x = -1$.

$$f''(x) = e^x + xe^x \Rightarrow f'''(x) = e^x + e^x + xe^x \Rightarrow f'''(-1) = e^{-1} + e^{-1} - e^{-1} = e^{-1} \neq 0$$

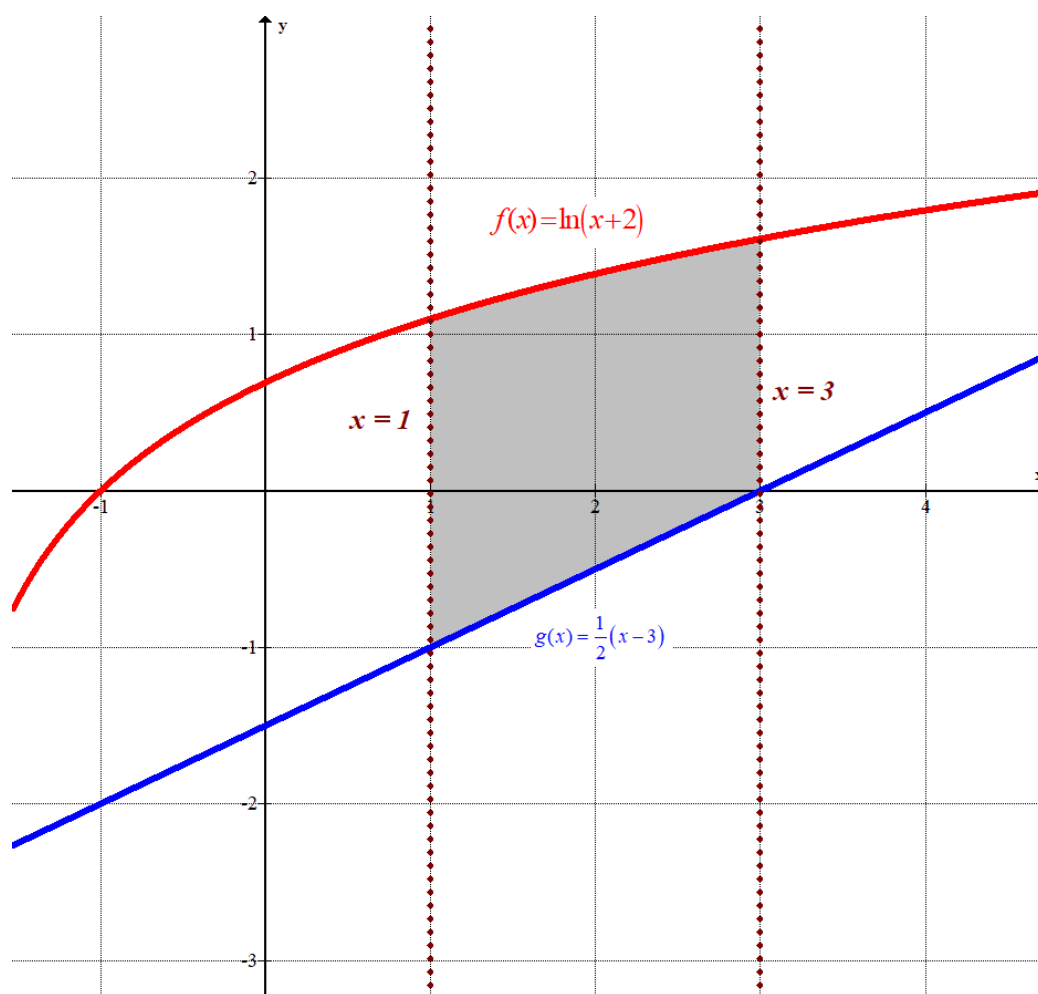
Al ser $f'''(-1) = e^{-1} \neq 0$ la función tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

Ejercicio 2.- Considera las funciones $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$.

- (a) **[1 punto]** Esboza el recinto que determinan la gráfica de f , la gráfica de g , la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).
 (b) **[1,5 puntos]** Determina el área del recinto anterior.

- (a) Hacemos una tabla de valores para cada función y representamos sus gráficas. Representamos las rectas verticales: $x=1$; $x=3$. Pintamos de gris el recinto limitado por las cuatro gráficas.

x	$f(x) = \ln(x+2)$	x	$g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$
0	$\ln 2 = 0.69$	0	-1.5
1	$\ln 3 = 1.098$	1	-1
2	$\ln 4 = 1.386$	2	-0.5
3	$\ln 5 = 1.609$	3	0



Observando el dibujo y contando cuadraditos (1 unidad cuadrada) el área del recinto debe tener un valor aproximado a 4 unidades cuadradas.

- (b) El área del recinto es la integral definida de la diferencia de las funciones entre 1 y 3.

Calculemos primero la integral indefinida de la función f .

$$\begin{aligned}\int \ln(x+2)dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = \ln(x+2) \Rightarrow du = \frac{1}{x+2} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \cdot \ln(x+2) - \int x \frac{1}{x+2} dx = \\ &= x \cdot \ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2} dx = x \cdot \ln(x+2) - \int \frac{x+2-2}{x+2} dx = \\ &= x \cdot \ln(x+2) - \int \frac{x+2}{x+2} dx + \int \frac{2}{x+2} dx = x \cdot \ln(x+2) - \int dx + 2 \int \frac{1}{x+2} dx = \\ &= x \cdot \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2)\end{aligned}$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida que nos proporciona el valor del área del recinto dibujado.

$$\begin{aligned}\int_1^3 \ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3) dx &= \int_1^3 \ln(x+2) dx - \frac{1}{2} \int_1^3 x - 3 dx = \\ &= \left[x \cdot \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2) \right]_1^3 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_1^3 = \\ &= (3 \cdot \ln(3+2) - 3 + 2 \ln(3+2)) - (1 \cdot \ln(1+2) - 1 + 2 \ln(1+2)) - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3^2}{2} - 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 3 \cdot 1 \right) \right] = \\ &= 5 \ln 5 - 3 - 3 \ln 3 + 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} - 9 - \frac{1}{2} + 3 \right) = 5 \ln 5 - 2 - 3 \ln 3 + 1 = -1 + 5 \ln 5 - 3 \ln 3 = \boxed{3,75 \text{ u}^2}\end{aligned}$$

El área del recinto tiene un valor de 3.75 unidades cuadradas.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ considera el sistema de ecuaciones dado por $X^t A = B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m .

Obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$X^t A = B^t \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}^t$$

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2m^2-1 \ m \ 1)$$

$$((2-m)x + y + mz \quad x + my + z \quad (2m-1)x + y + z) = (2m^2-1 \ m \ 1)$$

$$\left. \begin{aligned} (2-m)x + y + mz &= 2m^2-1 \\ x + my + z &= m \\ (2m-1)x + y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Discutamos el sistema. Para ello considero la matriz de coeficientes $B = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de B.

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-m)m + 2m-1 + m - [m^2(2m-1) + 1 + 2-m] = \\ &= 2m - \cancel{m^2} + 2m-1 + m - 2m^3 + \cancel{m^2} - 3 + m = -2m^3 + 6m - 4 \end{aligned}$$

$$|B| = 0 \Rightarrow -2m^3 + 6m - 4 = 0 \Rightarrow 1 \left| \begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 6 & -4 \\ & -2 & -2 & 4 \\ & -2 & -2 & 4 \end{array} \right| \Rightarrow m=1 \text{ es raíz}$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado que resulta del cociente de la división por Ruffini.

$$-2m^2 - 2m + 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{-4} = \frac{2 \pm 6}{-4} = \begin{cases} m = \frac{2+6}{-4} = -2 \\ m = \frac{2-6}{-4} = 1 \end{cases}$$

Distinguiremos 3 casos diferentes:

CASO 1. $m \neq 1; m \neq -2$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema tiene solución única. Existe una única matriz X que cumpla la ecuación $X^t A = B^t$.

CASO 2. $m = 1$

$$\text{Para este valor el sistema queda } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x + y + z = 1$$

Se observa que las tres ecuaciones son iguales. Este sistema tiene infinitas soluciones.

$$\text{Existen infinitas matrices } X \text{ solución del sistema: } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix}$$

CASO 3. $m = -2$

$$\text{Para este valor el sistema queda } \left. \begin{array}{l} 4x + y - 2z = 7 \\ x - 2y + z = -2 \\ -5x + y + z = 1 \end{array} \right\}$$

Obtenemos un sistema triangular equivalente usando el método de Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y - 2z = 7 \\ x - 2y + z = -2 \\ -5x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y + z = -2 \\ 4x + y - 2z = 7 \\ -5x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 4 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ -4x + 8y - 4z = 8 \\ 4x + y - 2z = 7 \\ \hline 9y - 6z = 15 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + 5 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 5x - 10y + 5z = -10 \\ -5x + y + z = 1 \\ \hline -9y + 6z = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y + z = -2 \\ 9y - 6z = 15 \\ -9y + 6z = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ 9y - 6z = 15 \\ -9y + 6z = -9 \\ \hline 0 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y + z = -2 \\ 9y - 6z = 15 \\ 0 = 6 \end{array} \right\}$$

La última ecuación es imposible y el sistema no tiene solución.

Ejercicio 4.- Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,1,0), B(1,0,2) y C(0,2,1).

(a) [1,25 puntos] Halla el área de dicho triángulo.

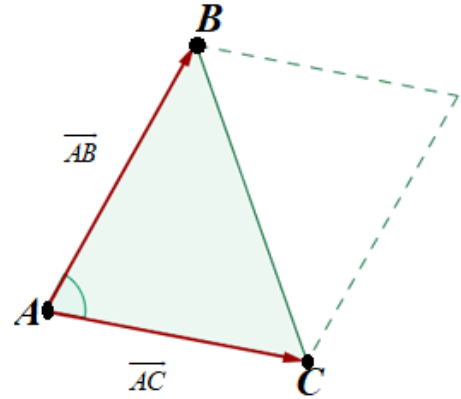
(b) [1,25 puntos] Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

(a) El área del triángulo es la mitad del valor absoluto del módulo del producto vectorial de los vectores que unen un vértice del triángulo con los otros dos vértices.

Las coordenadas de los vectores que forman el triángulo son:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 2) - (1, 1, 0) = (0, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, 2, 1) - (1, 1, 0) = (-1, 1, 1)$$



El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de ambos vectores. Calculamos el producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i - 2j - k - 2i = -3i - 2j - k = (-3, -2, -1)$$

Su módulo es

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

Por lo tanto, su área vale $\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2} u^2$

(b) El coseno del ángulo en el vértice A es el coseno del ángulo que existe entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (1, 0, 2) - (1, 1, 0) = (0, -1, 2) \\ \overrightarrow{AC} &= (0, 2, 1) - (1, 1, 0) = (-1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0, -1, 2) \cdot (-1, 1, 1) = \sqrt{1+4} \sqrt{1+1+1} \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + 2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-1+2}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = 0,2581$$

PevAU 2018 Extraordinaria Matemáticas II

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS II

CURSO 2017-2018

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
 - c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determina a , b y c sabiendo que f es continua, alcanza un máximo relativo en $x = -1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$ tiene pendiente 2.

Ejercicio 2.- [2.5 puntos] Considera la función f definida por

$f(x) = ax \ln(x) - bx$ para $x > 0$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que

$$\int_1^2 f(x) dx = 8 \ln(2) - 9.$$

Ejercicio 3.- Considera las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) **[0,75 puntos]** Determina, si existen, los valores de a , b y c para los que las matrices A y B conmutan.
- b) **[1 punto]** Calcula A^2 , A^3 , A^{2017} y A^{2018} .
- c) **[0,75 puntos]** Calcula, si existe, la matriz inversa de A .

Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$$

- a) **[1 punto]** Estudia y determina la posición relativa de r y s .
- b) **[1,5 puntos]** Calcula la distancia entre r y s .

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS II

CURSO 2017-2018

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por $f(x) = a \ln(x) + bx^2 + x$ para $x > 0$, donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.

- a) [1,5 puntos] Halla a y b sabiendo que f tiene extremos relativos en $x = 1$ y en $x = 2$.
 b) [1 punto] ¿Qué tipo de extremos tiene f en $x = 1$ y en $x = 2$?

Ejercicio 2.- Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-2x}$.

- a) [0,75 puntos] Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = -2ex$.
 b) [0,5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , la recta $y = -2ex$ y el eje de ordenadas.
 c) [1,25 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ y - z = m \\ x + my + z = m \end{cases},$$

- a) [1,5 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m .
 b) [1 punto] Resuélvelo para $m = 1$. Para dicho valor de m , calcula, si es posible, una solución en la que $z = 2$.

Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + nz = -2 \\ y - z = -3 \end{cases}.$$

- a) [1,5 puntos] Halla los valores de m y n para que r y s se cortan perpendicularmente.
 b) [1 punto] Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación general del plano que contiene a r y a s .

SOLUCIONES

Opción A

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determina a , b y c sabiendo que f es continua, alcanza un máximo relativo en $x = -1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$ tiene pendiente 2.

La función debe ser continua en $x = 0$ y para ello deben coincidir los límites laterales.

Límite por la izquierda ($x < 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ax^2 + bx + c = c$$

Límite por la derecha ($x > 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = \frac{1-1-0}{0-\operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1+1-2}{1-\cos 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{0 + \operatorname{sen} x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow \boxed{c = 2}$

Si tiene un máximo relativo en $x = -1$ la derivada debe de anularse en ese punto.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{si } x \leq 0 \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 2a(-1) + b = 0 \Rightarrow -2a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2a}$$

Si la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$ tiene pendiente 2 significa que la derivada en $x = -2$ vale 2 $\Rightarrow f'(-2) = 2$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{si } x \leq 0 \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(-2) = 2a(-2) + b = -4a + b \\ f'(-2) = 2 \end{cases} \Rightarrow -4a + b = 2 \Rightarrow \boxed{b = 4a + 2}$$

Juntamos las dos ecuaciones y hallamos los valores de a y b .

$$\left. \begin{array}{l} b = 2a \\ b = 4a + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a = 4a + 2 \Rightarrow -2a = 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{-2} = -1} \Rightarrow \boxed{b = 2(-1) = -2}$$

Los valores obtenidos son $a = -1$, $b = -2$ y $c = 2$.

Ejercicio 2.- [2.5 puntos] Considera la función f definida por

$f(x) = ax \ln(x) - bx$ para $x > 0$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que

$$\int_1^2 f(x) dx = 8 \ln(2) - 9.$$

Si la función tiene un extremo relativo en $x = 1$ significa que su derivada se anula en dicho valor $\rightarrow f'(1) = 0$.

$$f(x) = ax \ln(x) - bx \Rightarrow f'(x) = a \ln(x) + ax \cdot \frac{1}{x} - b = a \ln(x) + a - b$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1) = a \ln(1) + a - b = a - b \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow \boxed{a = b}$$

Calculamos la integral indefinida de $f(x) = ax \ln(x) - ax$.

$$\int f(x) dx = \int ax \ln x - ax dx = \int ax \ln x dx - \int ax dx = \int ax \ln x dx - a \frac{x^2}{2} = \dots$$

$$\int ax \ln x dx = a \int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = a \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= a \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \right) = a \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right) = a \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right)$$

$$\dots = a \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) - a \frac{x^2}{2} = a \frac{x^2}{2} \ln x - a \frac{x^2}{4} - a \frac{x^2}{2}$$

Aplicamos este resultado a la integral definida.

$$\int_1^2 f(x) dx = \left[a \frac{x^2}{2} \ln x - a \frac{x^2}{4} - a \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \left[a \frac{2^2}{2} \ln 2 - a \frac{2^2}{4} - a \frac{2^2}{2} \right] - \left[a \frac{1^2}{2} \ln 1 - a \frac{1^2}{4} - a \frac{1^2}{2} \right] =$$

$$= 2a \ln 2 - a - 2a - \left[0 - \frac{a}{4} - \frac{a}{2} \right] = 2a \ln 2 - \frac{4a}{4} - \frac{8a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{2a}{4} = 2a \ln 2 - \frac{9a}{4} = \frac{8a \ln 2 - 9a}{4}$$

$$\int_1^2 f(x) dx = 8 \ln(2) - 9 \Rightarrow \frac{8a \ln 2 - 9a}{4} = 8 \ln 2 - 9 \Rightarrow 8a \ln 2 - 9a = 32 \ln 2 - 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(8 \ln 2 - 9) = 32 \ln 2 - 36 \Rightarrow a = \frac{32 \ln 2 - 36}{8 \ln 2 - 9} = \frac{4(8 \ln 2 - 9)}{8 \ln 2 - 9} = 4$$

Los valores buscados son $a = b = 4$.

Ejercicio 3.- Considera las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) [0,75 puntos] Determina, si existen, los valores de a , b y c para los que las matrices A y B conmutan.
 b) [1 punto] Calcula A^2 , A^3 , A^{2017} y A^{2018} .
 c) [0,75 puntos] Calcula, si existe, la matriz inversa de A .

a) Debe cumplirse que $A \cdot B = B \cdot A$

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1 = c \\ 0 = -b \\ 0 = a \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{matrix}}$$

Los valores buscados son $a = 0$, $b = 0$ y $c = -1$.

b) Calculamos varias potencias de la matriz A en busca de una regularidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_3$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A^4 = A^3 A = AA = A^2 = Id_3$$

Si el exponente " n " es par la potencia $A^n = Id_3 \rightarrow 2017$ es impar y será $A^{2017} = A$.

Si el exponente " n " es impar la potencia $A^n = A \rightarrow 2018$ es par y será $A^{2018} = Id_3$

- c) Si miramos el resultado del apartado b) podemos decir que su inversa es la misma matriz A , pues $A \cdot A = A^2 = Id_3$.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

La matriz inversa de A existe si su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (-1 + 0 + 0) = 1 \neq 0$$

Existe la inversa y la calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} 2x-3y=-5 \\ y-2z=-1 \end{cases}$$

a) [1 punto] Estudia y determina la posición relativa de r y s .

b) [1,5 puntos] Calcula la distancia entre r y s .

a) Obtengamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 1, 3) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{array} \right\}$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x-3y=-5 \\ y-2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=3y-5 \\ 2z=y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3y-5}{2} \\ z = \frac{y+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5}{2} + \frac{3}{2}y \\ y = y \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q_s(-2.5, 0, 0.5) \\ \vec{v}_s = (1.5, 1, 0.5) \end{array} \right\}$$

Para ser paralelas o coincidentes los vectores directores deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 1, 3) \\ \vec{v}_s = (1.5, 1, 0.5) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \frac{2}{1.5} = \frac{1}{1} = \frac{3}{0.5} \text{?} \quad \text{¡NO ES CIERTO!}$$

Por lo que no son paralelas ni coincidentes. Son secantes o se cruzan.

Calculamos el producto mixto de los dos vectores directores y del vector que une un punto de una recta con un punto de la otra. Si es nulo son secantes y en caso contrario se cruzan.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 1, 3) \\ \vec{v}_s = (1.5, 1, 0.5) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (-2.5, 0, 0.5) - (-1, 0, -1) = (-1.5, 0, 1.5) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1.5 & 1 & 0.5 \\ -1.5 & 0 & 1.5 \end{vmatrix} = 3 - 0.75 + 0 + 4.5 - 2.25 - 0 = 4.5 \neq 0$$

Al ser no nulo el producto mixto las rectas r y s se cruzan.

b) La distancia se obtiene con la división entre el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores anteriores $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ y el área del paralelogramo definido por los vectores directores y que es la base del paralelepípedo.

El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto obtenido en el

apartado anterior: $Volumen = |[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]| = |4.5| = 4.5 u^3$.

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los vectores directores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 1, 3) \\ \vec{v}_s = (1.5, 1, 0.5) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 1.5 & 1 & 0.5 \end{vmatrix} = 0.5i + 4.5j + 2k - 1.5k - j - 3i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_r \times \vec{v}_s = -2.5i + 3.5j + 0.5k = (-2.5, 3.5, 0.5)$$

$$\text{Área} = |\vec{u}_r \times \vec{v}_s| = |(-2.5, 3.5, 0.5)| = \sqrt{(-2.5)^2 + 3.5^2 + 0.5^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} u^2$$

Por lo que aplicando la fórmula tenemos que:

$$\boxed{\text{Distancia}(r, s)} = \frac{\text{Volumen}}{\text{Área}} = \frac{\left| [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] \right|}{|\vec{u}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{4.5}{5\sqrt{3}/2} = \boxed{\frac{9}{5\sqrt{3}} = 1,039 u}$$

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por $f(x) = a \ln(x) + bx^2 + x$ para $x > 0$, donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.

a) [1,5 puntos] Halla a y b sabiendo que f tiene extremos relativos en $x = 1$ y en $x = 2$.

b) [1 punto] ¿Qué tipo de extremos tiene f en $x = 1$ y en $x = 2$?

a) Si la función presenta un extremo relativo en $x = 1$ entonces la derivada se anula en $x = 1$.

$$f(x) = a \ln(x) + bx^2 + x \Rightarrow f'(x) = a \frac{1}{x} + 2bx + 1$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow a \frac{1}{1} + 2b \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 - 2b$$

Si la función presenta un extremo relativo en $x = 2$ entonces la derivada se anula en $x = 2$.

$$f'(2) = 0 \Rightarrow a \frac{1}{2} + 2b \cdot 2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0 \Rightarrow a + 8b + 2 = 0 \Rightarrow a = -2 - 8b$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} a = -2 - 8b \\ a = -1 - 2b \end{array} \right\} \Rightarrow -2 - 8b = -1 - 2b \Rightarrow -2 + 1 = -2b + 8b \Rightarrow -1 = 6b \Rightarrow b = -\frac{1}{6}$$

$$a = -1 - 2\left(-\frac{1}{6}\right) = -1 + \frac{2}{6} = \frac{-6 + 2}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

Los valores buscados son $a = -\frac{2}{3}$ y $b = -\frac{1}{6}$.

b) La función queda $f(x) = -\frac{2}{3} \ln(x) - \frac{1}{6}x^2 + x$ y su derivada es $f'(x) = -\frac{2}{3x} - \frac{x}{3} + 1$.

Veamos como evoluciona la función antes de $x = 1$, entre $x = 1$ y $x = 2$ y después de $x = 2$.

- En $(0,1)$ tomamos $x = 0,5$ y la derivada es $f'(0,5) = -\frac{2}{3 \cdot 0,5} - \frac{0,5}{3} + 1 = -0,5 < 0$,

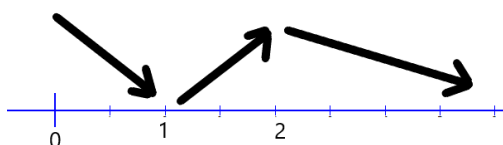
por lo que la función decrece en el intervalo $(0,1)$.

- En $(1,2)$ tomamos $x = 1,5$ y la derivada es $f'(1,5) = -\frac{2}{3 \cdot 1,5} - \frac{1,5}{3} + 1 = \frac{1}{18} > 0$, por lo

que la función crece en el intervalo $(1,2)$.

- En $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada es $f'(3) = -\frac{2}{9} - \frac{3}{3} + 1 = -\frac{2}{9} < 0$, por lo que la función decrece en el intervalo $(2,+\infty)$.

Resumimos esta información en el siguiente gráfico.



La función presenta un mínimo relativo en $x = 1$ y un máximo relativo en $x = 2$.

Ejercicio 2.- Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-2x}$.

- a) [0,75 puntos] Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = -2ex$.
- b) [0,5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , la recta $y = -2ex$ y el eje de ordenadas.
- c) [1,25 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

- a) La recta tangente se obtiene a partir del valor de la función y su derivada en un punto $x = a$, tiene por ecuación: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

$$f(x) = e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = -2e^{-2x}$$

La recta tangente a la gráfica tiene ecuación

$$y - e^{-2a} = -2e^{-2a}(x - a) \Rightarrow y = -2e^{-2a}x + 2ae^{-2a} + e^{-2a} \Rightarrow y = -2e^{-2a}x + (2a + 1)e^{-2a}$$

Comparando esta ecuación con la que nos debe salir $y = -2ex$ tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} -2e^{-2a} = -2e \\ (2a + 1)e^{-2a} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} e^{-2a} = e \\ 2a + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2a = 1 \\ 2a + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

El punto de la gráfica es $x = -\frac{1}{2}$ y sustituyendo en la función $f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-2\left(-\frac{1}{2}\right)} = e$.

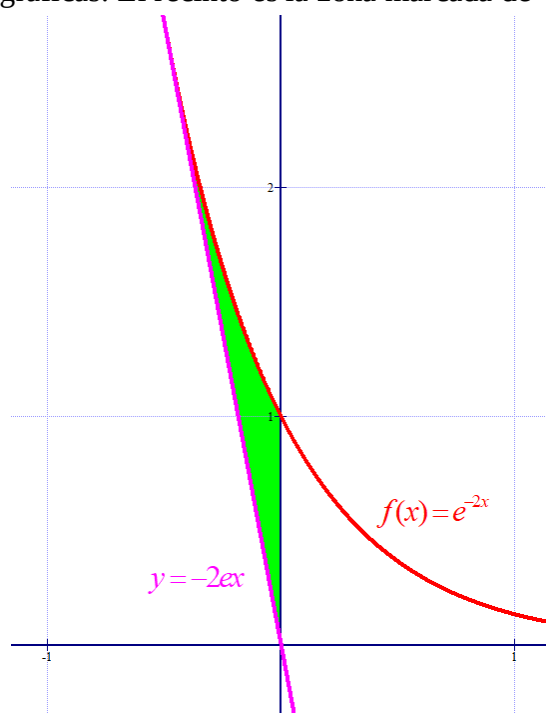
El punto de la gráfica buscado tiene coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, e\right)$

- b) El punto de corte de la función y la recta tangente es el punto de tangencia $x = -\frac{1}{2}$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas. El recinto es la zona marcada de verde.

x	$y = e^{-2x}$
-0.5	e
0	1
1	e^{-2}

x	$y = -2ex$
-0.5	e
0	0
1	$-2e$



- c) El área del recinto es la integral definida entre $-0,5$ y 0 de la diferencia entre la función $f(x) = e^{-2x}$ y su tangente $y = -2ex$.

$$\begin{aligned}\int_{-0,5}^0 f(x) - (-2ex) dx &= \int_{-0,5}^0 e^{-2x} + 2ex dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2} + ex^2 \right]_{-0,5}^0 = \\&= \left[\frac{e^{-0}}{-2} + e \cdot 0^2 \right] - \left[\frac{e^{-2(-0,5)}}{-2} + e(-0,5)^2 \right] = \\&= -\frac{1}{2} + \frac{e}{2} - \frac{e}{4} = -\frac{2}{4} + \frac{2e}{4} - \frac{e}{4} = \boxed{\frac{e-2}{4} = 0,1796 \quad u^2}\end{aligned}$$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ y - z = m \\ x + my + z = m \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m .

b) [1 punto] Resuélvelo para $m = 1$. Para dicho valor de m , calcula, si es posible, una solución en la que $z = 2$.

a) Consideramos la matriz de coeficientes asociada al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \text{ con determinante } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 0 - (m + 0 - m) = 0$$

El rango de A es menor de 3.

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª con

$$\text{determinante } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

El rango de A es 2, independientemente del valor de " m ".

$$\text{Consideremos la matriz ampliada asociada al sistema } A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 1 & m & 1 & m \end{pmatrix}.$$

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª con determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = m + m + 0 - (m^2 + 0 + m^2) = 2m - 2m^2$$

$$\text{Lo igualamos a cero } \rightarrow 2m - 2m^2 = 0 \Rightarrow 2m(1 - m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \text{ó} \\ 1 - m = 0 \rightarrow m = 1 \end{cases}$$

Consideramos los 3 casos siguientes:

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq 1$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 de A/B es no nulo y el rango de A/B es 3, como el rango de A es 2 tenemos que los rangos son distintos y por tanto el sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

CASO 2. $m = 0$

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \text{ . Queda un sistema muy sencillo que intentamos resolver.}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=-y} \\ y-z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Rightarrow y-z=0 \Rightarrow \boxed{z=y}$$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

Siendo las soluciones: $x = -\lambda$; $y = \lambda$; $z = \lambda$

CASO 3. $m = 1$

El sistema queda $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \{1^a \text{ y } 3^a \text{ ecuación son iguales}\} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ \boxed{y=1+z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + (1+z) + z = 1 \Rightarrow x + 2z = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2z}$$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

Siendo las soluciones: $x = -2\lambda$; $y = 1 + \lambda$; $z = \lambda$

Resumiendo: Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ el sistema es compatible determinado, si $m = 0$ o $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $m = 1$ las soluciones se han obtenido previamente y son $x = -2\lambda$; $y = 1 + \lambda$; $z = \lambda$.

$$\text{Si queremos obtener una solución con } z = 2 \text{ tomamos } \lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \cdot 2 = -4 \\ y = 1 + 2 = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x+nz = -2 \\ y-z = -3 \end{cases}.$$

a) [1,5 puntos] Halla los valores de m y n para que r y s se cortan perpendicularmente.

b) [1 punto] Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación general del plano que contiene a r y a s .

a) Obtengamos un punto y el vector director de cada una de las rectas.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (2, m, 1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+nz = -2 \\ y-z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 - nz \\ y = -3 + z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (-n, 1, 1) \\ Q_s(-2, -3, 0) \end{cases}$$

Para que se corten el producto mixto de los vectores $\vec{u}_r$; $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$ debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{P_rQ_s} = (-2, -3, 0) - (1, -1, 0) = (-3, -2, 0) \\ \vec{u}_r = (2, m, 1) \\ \vec{v}_s = (-n, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{P_rQ_s}, \vec{u}_r, \vec{v}_s] = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & m & 1 \\ -n & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3m + 2n + 4 + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{-3m + 2n + 7 = 0}$$

Y para que se corten perpendicularmente deben ser ortogonales los vectores directores, es decir, su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, m, 1) \\ \vec{v}_s = (-n, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (2, m, 1)(-n, 1, 1) = 0 \Rightarrow \boxed{-2n + m + 1 = 0}$$

Juntamos las dos ecuaciones y resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} -3m + 2n + 7 = 0 \\ -2n + m + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3m + 2n + 7 = 0 \\ m = 2n - 1 \end{cases} \Rightarrow -3(2n - 1) + 2n + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6n + 3 + 2n + 7 = 0 \Rightarrow -4n + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{n = \frac{10}{4} = 2,5} \Rightarrow \boxed{m = 2 \cdot 2,5 - 1 = 4}$$

Los valores buscados son $m = 4$ y $n = 2,5$.

b) Para $m = 3$ y $n = 1$ las rectas se cortan pues cumplen la condición obtenida

$$\left. \begin{array}{l} m=3 \\ n=1 \\ -3m+2n+7=0 \end{array} \right\} \Rightarrow -3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 7 = 0? \quad \text{¡SE CUMPLE!}$$

El vector normal del plano π que contiene a las dos rectas es el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 3, 1) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3i - j + 2k + 3k - 2j - i = 2i - 3j + 5k = (2, -3, 5)$$

El plano π contiene al punto $P_r(1, -1, 0)$ y tiene como vector normal $\vec{n} = (2, -3, 5)$ por lo que su ecuación se obtiene de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (2, -3, 5) \\ P_r(1, -1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 2x - 3y + 5z + D = 0 \\ P_r(1, -1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - 3(-1) + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -5$$

$$\boxed{\pi: 2x - 3y + 5z - 5 = 0}$$

PevAU 2018 Ordinaria Matemáticas II

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS II

CURSO 2017-2018

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.**
 - c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.**
 - d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.**

Opción A

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Halla los coeficientes a , b y c sabiendo que la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto $(1,1)$.

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x|$.

- a) [1'25 puntos]** Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.
- b) [1'25 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3 \\ x + y + z = 3m \\ 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 \end{cases}$$

- a) [1'75 puntos]** Discútelos según los valores del parámetro m .
- b) [0'75 puntos]** Resuelve el sistema para $m = -2$.

Ejercicio 4.- Considera los puntos $P(1,0,-1)$, $Q(2,1,1)$ y la recta r dada por $x - 5 = y = \frac{z+2}{-2}$.

- a) [1'25 puntos]** Determina el punto simétrico de P respecto a r .
- b) [1'25 puntos]** Calcula el punto de r que equidista de P y Q .

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS II

CURSO 2017-2018

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
 - c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción B

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{kx} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{es derivable}$$

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $g(x) = -\frac{x^2}{4}$ y

$$f(x) = 3 - x^2$$

- a) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de g . Determina el punto de tangencia con la gráfica de g .
- b) **[0'75 puntos]** Esboza el recinto limitado por la recta $y = 4 - 2x$ y las gráficas de f y g . Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).
- c) **[0'75 punto]** Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Ejercicio 3.-

- a) **[1,5 puntos]** Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:
 - utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros;
 - se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas;
 - tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.
 ¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?
- b) **[1 punto]** Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(2, -1, 3)$ y el plano π de ecuación $3x + 2y + z = 5$.

- a) **[1,75 puntos]** Calcula el punto simétrico de P respecto de π .
- b) **[0,75 puntos]** Calcula la distancia de P a π .

SOLUCIONES

Opción A

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Halla los coeficientes a , b y c sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto $(1,1)$.

Calculamos la derivada de la función.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

Sabemos que la derivada se anula en $x = 1$.

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0 \Rightarrow \boxed{2a + b = -3}$$

Como $x = 1$ no es extremo relativo la derivada segunda se anula en $x = 1$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a$$

$$x = 1 \text{ no es extremo} \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

La gráfica pasa por el punto $(1, 1)$.

$$f(1) = 1 \Rightarrow 1 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow \boxed{a + b + c = 0}$$

Juntamos las tres ecuaciones y resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ \boxed{a = -3} \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(-3) + b = -3 \\ -3 + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 + b = -3 \\ b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b = 3} \\ b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow 3 + c = 3 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

Los valores buscados son $a = -3$, $b = 3$ y $c = 0$.

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x|$.

- a) [1'25 puntos]** Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.
b) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

- a)** La función $f(x) = 6x - x^2$ es una parábola y la función $g(x) = |x^2 - 2x|$ es una función valor absoluto que expresamos como función a trozos:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow g(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ -(x^2 - 2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Igualamos las funciones en busca de los puntos de corte.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow |x^2 - 2x| = 6x - x^2 \Rightarrow$$

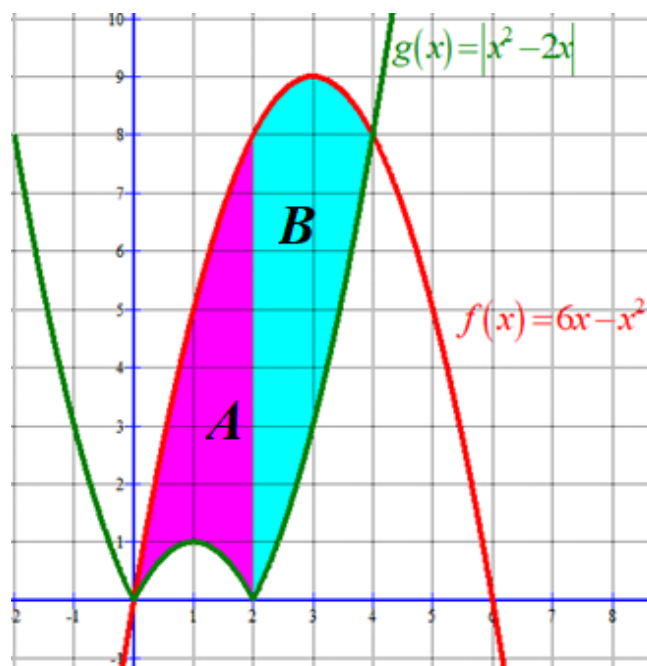
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 6x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases} \\ \text{ó} \\ -(x^2 - 2x) = 6x - x^2 \Rightarrow -x^2 + 2x = 6x - x^2 \Rightarrow 0 = 4x \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Se cortan en $x = 0$ y en $x = 4$.

Hacemos una tabla de valores para cada una de las funciones entre 0 y 4.

x	$y = f(x) = 6x - x^2$
0	0
1	$6 - 1 = 5$
2	$12 - 4 = 8$
3	$18 - 9 = 9$
4	$24 - 16 = 8$

x	$y = g(x) = x^2 - 2x $
0	$ 0 = 0$
1	$ 1 - 2 = 1$
2	$ 4 - 4 = 0$
3	$ 9 - 6 = 3$
4	$ 16 - 8 = 8$



b) Calculamos el valor del área del recinto de color rosa (A), limitada por las funciones

$$f(x) = 6x - x^2 \text{ y } g(x) = |x^2 - 2x| = 2x - x^2 \text{ si } 0 < x < 2.$$

$$\begin{aligned}\text{Área recinto rosa} &= \int_0^2 (6x - x^2 - (2x - x^2)) dx = \int_0^2 (6x - x^2 - 2x + x^2) dx = \int_0^2 4x dx = \\ &= \left[2x^2 \right]_0^2 = 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 0^2 = 8 \text{ u}^2\end{aligned}$$

Calculamos el valor del área del recinto de color azul (B), limitada por las funciones

$$f(x) = 6x - x^2 \text{ y } g(x) = |x^2 - 2x| = x^2 - 2x \text{ si } x > 2.$$

$$\begin{aligned}\text{Área recinto azul} &= \int_2^4 (6x - x^2 - (x^2 - 2x)) dx = \int_2^4 (6x - x^2 - x^2 + 2x) dx = \int_2^4 (-2x^2 + 8x) dx = \\ &= \left[-2 \frac{x^3}{3} + 4x^2 \right]_2^4 = \left[-2 \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4^2 \right] - \left[-2 \frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2^2 \right] = -\frac{128}{3} + 64 + \frac{16}{3} - 16 = \frac{32}{3} = 10,66 \text{ u}^2\end{aligned}$$

El área total es la suma del área de ambas regiones: Área total = 8 + 10,66 = 18,66 u²

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3 \\ x + y + z = 3m \\ 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 \end{cases}$$

a) [1'75 puntos] Discútelos según los valores del parámetro m .

b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para $m = -2$.

a) Consideramos la matriz de coeficientes asociada al sistema $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3(m+1) \end{pmatrix}$ con

$$\text{determinante } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3(m+1) \end{vmatrix} = 3m + 3 + 4 + 4m + 12 - (2m + 6 + 6m + 6 + 4) = -m + 3$$

Lo igualamos a cero $\rightarrow -m + 3 = 0 \Rightarrow m = 3$

Analizamos el sistema en los dos casos siguientes.

CASO 1. $m \neq 3$

Para $m \neq 3$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3 e igual que el número de incógnitas.

El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (una única solución).

CASO 2. $m = 3$

En este caso el sistema queda:

$$\begin{cases} x + 2y + 6z = 3 \\ x + y + z = 9 \\ 2x + 4y + 12z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Simplificamos la ecuación 3ª} \\ \text{dividiéndola entre 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 6z = 3 \\ x + y + z = 9 \\ x + 2y + 6z = 4 \end{cases}$$

Como observamos la ecuación 1ª y la 3ª tienen el primer miembro de la igualdad idénticos y el segundo distinto, esto plantea un sistema de ecuaciones imposible y por tanto el sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución).

b) Para $m = -2$ estamos en el caso 1 y el sistema es compatible determinado, podemos resolverlo utilizando el método de Cramer.

Para $m = -2$ el sistema queda:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + y + z = -6 \\ 2x + 4y - 3z = 8 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-9 + 16 - 24 - 8 - 36 - 12}{-3 + 4 + 4 - 2 + 6 - 4} = \frac{-73}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \\ 2 & 8 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{18 + 6 + \cancel{9} + 12 + 9 - \cancel{9}}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -6 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{8 - \cancel{24} + 12 - 6 - 16 + \cancel{24}}{5} = \frac{-2}{5}$$

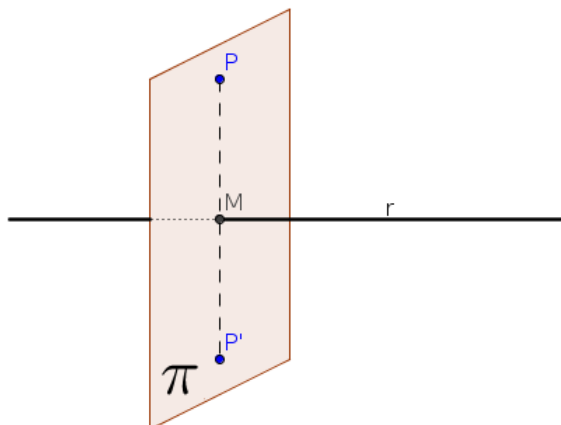
La solución del sistema es $x = \frac{-73}{5}$; $y = 9$; $z = \frac{-2}{5}$

Ejercicio 4.- Considera los puntos $P(1,0,-1)$, $Q(2,1,1)$ y la recta r dada por $x-5=y=\frac{z+2}{-2}$.

a) [1'25 puntos] Determina el punto simétrico de P respecto a r .

b) [1'25 puntos] Calcula el punto de r que equidista de P y Q .

a) Para calcular las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r procederemos como indica el dibujo:



Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P(1,0,-1)$

$$r \equiv x-5=y=\frac{z+2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1,1,-2) \\ P_r(5,0,-2) \end{cases}$$

$$\vec{n} = \vec{v}_r = (1,1,-2) \Rightarrow \begin{cases} \pi \equiv x+y-2z+D=0 \\ P(1,0,-1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow 1+0+2+D=0 \Rightarrow D=-3$$

$$\pi \equiv x+y-2z-3=0$$

Hallamos el punto M de corte entre la recta y el plano.

$$\begin{aligned} r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (1,1,-2) \\ P_r(5,0,-2) \end{cases} &\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=5+t \\ y=t \\ z=-2-2t \end{cases} \\ \pi \equiv x+y-2z-3=0 &\Rightarrow \begin{cases} x=5+t \\ y=t \\ z=-2-2t \end{cases} \Rightarrow (5+t)+t-2(-2-2t)-3=0 \Rightarrow \\ &\pi \equiv x+y-2z-3=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 5+t+t+4+4t-3=0 \Rightarrow 6t+6=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=5-1=4 \\ y=-1 \\ z=-2+2=0 \end{cases} \Rightarrow M(4,-1,0)$$

Si P' tiene coordenadas (a, b, c) como el punto M es el punto medio del segmento PP' tenemos que se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} P'(a,b,c) \\ P(1,0,-1) \\ M(4,-1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow (4,-1,0) = \frac{(a,b,c) + (1,0,-1)}{2} \Rightarrow (8,-2,0) = (a,b,c) + (1,0,-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a,b,c) = (8,-2,0) - (1,0,-1) = (7,-2,1)$$

El punto simétrico de $P(1,0,-1)$ respecto de la recta r tiene coordenadas $P'(7,-2,1)$.

$$\text{b) Un punto A de la recta } r \equiv \begin{cases} x = 5+t \\ y = t \\ z = -2-2t \end{cases} \text{ tiene coordenadas } A(5+t, t, -2-2t).$$

Hallamos las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} P(1,0,-1) \\ Q(2,1,1) \\ A(5+t, t, -2-2t) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AP} = (1,0,-1) - (5+t, t, -2-2t) = (-4-t, -t, 1+2t) \\ \overrightarrow{AQ} = (2,1,1) - (5+t, t, -2-2t) = (-3-t, 1-t, 3+2t) \end{cases}$$

Para que el punto A sea equidistante de los puntos P y Q deben tener el mismo módulo los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(-4-t)^2 + (-t)^2 + (1+2t)^2} \\ |\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{(-3-t)^2 + (1-t)^2 + (3+2t)^2} \\ |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AQ}| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-4-t)^2 + (-t)^2 + (1+2t)^2} = \sqrt{(-3-t)^2 + (1-t)^2 + (3+2t)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-4-t)^2 + (-t)^2 + (1+2t)^2 = (-3-t)^2 + (1-t)^2 + (3+2t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 + \cancel{t^2} + 8t + \cancel{t^2} + 1 + \cancel{4t^2} + 4t = 9 + \cancel{t^2} + 6t + 1 + \cancel{t^2} - 2t + 9 + \cancel{4t^2} + 12t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12t + 17 = 16t + 19 \Rightarrow -4t = 2 \Rightarrow \boxed{t = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}}$$

$$\text{El punto A buscado tiene coordenadas } A\left(5 - \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -2 - 2 \cdot \frac{-1}{2}\right) \Rightarrow A\left(\frac{9}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right)$$

Opción B

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{kx} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{es derivable}$$

Para ser derivable debe ser continua y para ello debe serlo en $x = 1$. Los límites laterales en $x = 1$ deben ser iguales.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 3 - kx^2 = 3 - k \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{kx} = \frac{2}{k} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2}{k} = 3 - k \Rightarrow 2 = 3k - k^2 \Rightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2=k} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1=k} \end{cases}$$

Calculamos la derivada de la función en $\mathbb{R} - \{1\}$

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{kx} & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2kx & \text{si } x < 1 \\ -\frac{2}{kx^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = 1$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -2kx = -2k \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{2}{kx^2} = -\frac{2}{k} \\ f'(1^-) &= f'(1^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{2}{k} = -2k \Rightarrow 2 = 2k^2 \Rightarrow 1 = k^2 \Rightarrow \boxed{k = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Para que se cumplan las dos condiciones y la función sea derivable el valor de k debe ser 1.

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $g(x) = -\frac{x^2}{4}$ y $f(x) = 3 - x^2$

- a) [1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de g . Determina el punto de tangencia con la gráfica de g .
- b) [0'75 puntos]** Esboza el recinto limitado por la recta $y = 4 - 2x$ y las gráficas de f y g . Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).
- c) [0'75 punto]** Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

a) La ecuación de la recta tangente a f en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 3 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x \\ f(1) = 3 - 1 = 2 \\ f'(1) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow y - 2 = -2x + 2 \Rightarrow \boxed{y = -2x + 4}$$

Para que sea tangente a la función g debemos buscar el punto de la gráfica de g que tiene derivada igual a -2 .

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -\frac{x^2}{4} \Rightarrow g'(x) = -\frac{2x}{4} = -\frac{x}{2} \\ g'(x) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{x}{2} = -2 \Rightarrow -x = -4 \Rightarrow x = 4$$

Calculamos la recta tangente a la gráfica de g en $x = 4$ y comprobamos si es igual a la recta tangente obtenida anteriormente.

La ecuación de la recta tangente a g en $x = 4$ es $y - g(4) = g'(4)(x - 4)$

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = -\frac{x}{2} \Rightarrow g'(4) = -2 \\ g(4) = -\frac{4^2}{4} = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow y - (-4) = -2(x - 4) \Rightarrow y + 4 = -2x + 8 \Rightarrow \boxed{y = -2x + 4}$$

Como se comprueba las rectas tangentes a f en $x = 1$ y a g en $x = 4$ son iguales.

b) Hallamos los puntos de corte de la recta con cada una de las funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 3 - x^2 \\ y = -2x + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 4 = 3 - x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

La función $f(x)$ solo corta a la recta tangente en $x = 1$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -\frac{x^2}{4} \\ y = -2x + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 4 = -\frac{x^2}{4} \Rightarrow -8x + 16 = -x^2 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2} = 4$$

La función $g(x)$ solo corta a la recta tangente en $x = 4$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 3 - x^2 = -\frac{x^2}{4} \Rightarrow 12 - 4x^2 = -x^2 \Rightarrow -3x^2 = -12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

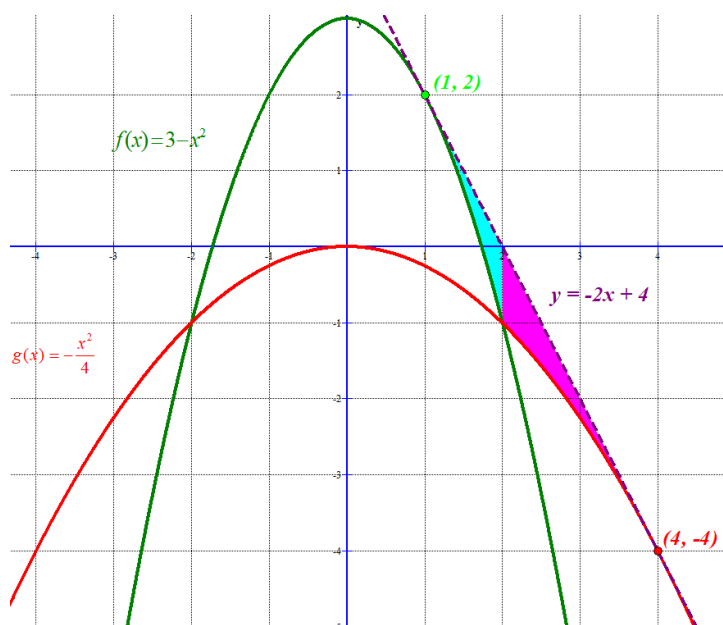
Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ solo coinciden en $x = -2$ y en $x = 2$

Dibujamos la gráfica de las funciones y la recta tangente realizando previamente una tabla de valores entre -2 y 4 .

x	$g(x) = -\frac{x^2}{4}$
-2	-1
-1	-0,25
0	0
1	-0,25
2	-1
4	-4

x	$f(x) = 3 - x^2$
-2	-1
-1	2
0	3
1	2
2	-1
4	-13

x	$y = -2x + 4$
0	4
1	2
2	0
3	-2
4	-4



- c) Observando el dibujo del recinto este es pequeño y nos debe salir un área aproximada a 1 unidad cuadrada.

Lo dividimos en dos partes, calculamos el área de cada parte y las sumamos para obtener el área total.

El área del recinto azul es una integral definida entre 1 y 2 de la función $y = -2x+4$ menos $f(x) = 3-x^2$.

$$\begin{aligned} \text{Área azul} &= \int_1^2 -2x + 4 - (3 - x^2) dx = \int_1^2 -2x + 4 - 3 + x^2 dx = \int_1^2 x^2 - 2x + 1 dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2 \right] - \left[\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1 \right] = \frac{8}{3} - 4 + 2 - \frac{1}{3} + 1 - 1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3} u^2 \end{aligned}$$

El área del recinto rosa es una integral definida entre 2 y 4 de la función $y = -2x+4$ menos

$$g(x) = -\frac{x^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Área rosa} &= \int_2^4 -2x + 4 - \left(-\frac{x^2}{4} \right) dx = \int_2^4 -2x + 4 + \frac{x^2}{4} dx = \int_2^4 \frac{x^2}{4} - 2x + 4 dx = \left[\frac{x^3}{12} - x^2 + 4x \right]_2^4 = \\ &= \left[\frac{4^3}{12} - 4^2 + 4 \cdot 4 \right] - \left[\frac{2^3}{12} - 2^2 + 4 \cdot 2 \right] = \frac{64}{12} - 16 + 16 - \frac{8}{12} + 4 - 8 = \frac{56}{12} - 4 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} u^2 \end{aligned}$$

El área total es $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 u^2$.

Ejercicio 3.-

a) [1,5 puntos] Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:

- utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros;
 - se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas;
 - tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.
- ¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b) [1 punto] Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

a) Llamemos x = número de monedas de 50 cts, y = nº de monedas de 1 euro, z = nº monedas de 2 euros.

Obtenemos las ecuaciones correspondientes a las condiciones ofrecidas en el ejercicio.

“Se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas” $\rightarrow x + y + z = 30$

“Tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas” $\rightarrow y = x + z$

“Hacer un pago de 34,50 euros” $\rightarrow 0,5x + y + 2z = 34,5$

Formamos un sistema con las tres ecuaciones y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ 0,5x + y + 2z = 34,5 \\ y = x + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Para no manejar decimales} \\ \text{multiplico por 2 la 2ª ecuación} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ x + 2y + 4z = 69 \\ -x + y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 1ª} \\ -x + y - z = 0 \\ x + y + z = 30 \\ \hline 2y = 30 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ x + 2y + 4z = 69 \\ 2y = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ x + 2y + 4z = 69 \\ -x - y - z = -30 \\ \hline y + 3z = 39 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ y + 3z = 39 \\ \boxed{y = 15} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 15 + z = 30 \\ 15 + 3z = 39 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 15 \\ 3z = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 15 \\ \boxed{z = 8} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 8 = 15 \Rightarrow \boxed{x = 7}$$

Solo hay una forma de conseguirlo, con 7 monedas de 50 cts, 15 de 1 euro y 8 de 2 euros.

b) Cambiamos la ecuación correspondiente y volvemos a resolver.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ 0,5x + y + 2z = 35 \\ y = x + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Para no manejar decimales} \\ \text{multiplico por 2 la 2ª ecuación} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ x + 2y + 4z = 70 \\ -x + y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 1ª} \\ -x + y - z = 0 \\ x + y + z = 30 \\ \hline 2y = 30 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ x + 2y + 4z = 70 \\ 2y = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ x + 2y + 4z = 70 \\ -x - y - z = -30 \\ \hline y + 3z = 40 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ y + 3z = 40 \\ \boxed{y = 15} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 15 + z = 30 \\ 15 + 3z = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 15 \\ 3z = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 15 \\ \boxed{z = \frac{25}{3}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{25}{3} = 15 \Rightarrow x = 15 - \frac{25}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{20}{3}}$$

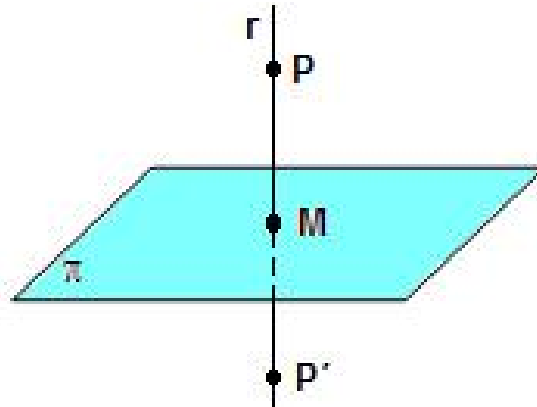
No es posible, pues la solución da un número decimal de monedas de 50 cts y de 2 euros.

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(2, -1, 3)$ y el plano π de ecuación $3x + 2y + z = 5$.

a) [1,75 puntos] Calcula el punto simétrico de P respecto de π .

b) [0,75 puntos] Calcula la distancia de P a π .

a) Para obtener las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de un plano π seguiremos el procedimiento descrito en el dibujo.



Hallamos la recta r perpendicular al plano $3x + 2y + z = 5$ que pasa por P . Por ser perpendicular el vector director de la recta es el vector normal del plano.

$$\pi \equiv 3x + 2y + z = 5 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (3, 2, 1) \\ P(2, -1, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \left. \begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + t \end{array} \right\}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 3x + 2y + z = 5 \\ x = 2 + 3t \\ r \equiv y = -1 + 2t \\ z = 3 + t \end{array} \right\} \Rightarrow 3(2 + 3t) + 2(-1 + 2t) + 3 + t = 5 \Rightarrow 6 + 9t - 2 + 4t + 3 + t = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14t = -2 \Rightarrow t = -\frac{2}{14} = -\frac{1}{7} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2 + 3\left(-\frac{1}{7}\right) = 2 - \frac{3}{7} = \frac{11}{7} \\ y = -1 + 2\left(-\frac{1}{7}\right) = -1 - \frac{2}{7} = -\frac{9}{7} \\ z = 3 - \frac{1}{7} = \frac{20}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow M\left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right)$$

Llamamos a las coordenadas del punto $P'(a, b, c)$. El punto M es el punto medio del segmento PP' por lo que se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} M\left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right) \\ P(2, -1, 3) \\ P'(a, b, c) \end{array} \right\} \Rightarrow M\left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right) = \frac{(2, -1, 3) + (a, b, c)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right) = (2, -1, 3) + (a, b, c) \Rightarrow \left(\frac{22}{7}, -\frac{18}{7}, \frac{40}{7}\right) - (2, -1, 3) = (a, b, c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a, b, c) = \left(\frac{8}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{19}{7}\right)$$

El punto P' tiene coordenadas $\left(\frac{8}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{19}{7}\right)$

b) La distancia de P al plano π es el módulo del vector $\overline{PM}$.

$$\overline{PM} = \left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right) - (2, -1, 3) = \left(-\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}\right)$$

$$|\overline{PM}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{14}{49}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

La distancia es $\frac{\sqrt{14}}{7} = 0,53 u$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO b)

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 3x + 2y + z - 5 = 0 \\ P(2, -1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 + 2(-1) + 3 - 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{7} u$$

PevAU 2017 Extraordinaria Matemáticas II



UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS II

CURSO 2016-2017

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
 - c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm^2 , el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno.

Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = xe^x$, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en $x = 1$.

Ejercicio 3.- Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} m \\ 2m+1 \\ m-1 \end{pmatrix}$$

- a) **[1,25 puntos]** Discute el sistema según los valores de m .
- b) **[1,25 puntos]** Para $m = 2$, calcula, si es posible, una solución del sistema anterior para la que $z = 17$.

Ejercicio 4.- Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$ y $C(1, 3, 3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.

- a) **[1 punto]** Calcula el área del paralelogramo.
- b) **[1 punto]** Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.
- c) **[0,5 puntos]** Calcula las coordenadas del vértice D .



UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
 CURSO 2016-2017

MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- a) [2 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f . Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) [0,5 puntos] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 2.- Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje OX , la recta $y = x$, la gráfica $y = \frac{1}{x^3}$ y la recta $x = 3$.

- a) [0,5 puntos] Haz un esbozo del recinto descrito.
- b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto.
- c) [0,5 puntos] Si consideras la gráfica $y = \frac{1}{x}$ en lugar de $y = \frac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o será menor que la del recinto inicial? ¿por qué?.

Ejercicio 3.- Considera $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$

- a) [1,5 puntos] Discute el rango de A según los valores de k .
- b) [1 punto] Para $k = 1$, calcula el determinante de $2(A^t A^{-1})^{2017}$, siendo A^t la traspuesta de A .

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(0, 1, 1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ z = 2 \end{cases}$

- a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r .
- b) [1,25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r .

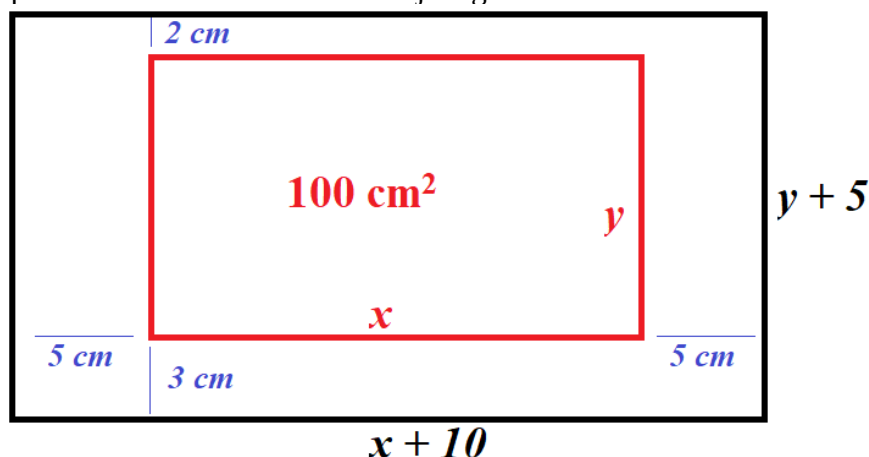
SOLUCIONES

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm^2 , el margen superior tiene que ser de 2 cm , el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno.

Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.

La situación planteada se describe en el dibujo siguiente:



La tarjeta a utilizar tiene dimensiones $x + 10 \text{ cm}$ de largo e $y + 5 \text{ cm}$ de ancho.

La zona impresa (de color rojo) tiene dimensiones $x \text{ cm}$ de largo e $y \text{ cm}$ de ancho. Por lo que los 100 cm^2 nos proporcionan la igualdad:

$$x \cdot y = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x}$$

La función a minimizar es el área del rectángulo total (en negro):

$$A(x) = (x + 10)(y + 5) = xy + 5x + 10y + 50 \quad \left. \begin{array}{l} y = \frac{100}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = x \frac{100}{x} + 5x + 10 \frac{100}{x} + 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x) = 100 + 5x + \frac{1000}{x} + 50 = 5x + \frac{1000}{x} + 150$$

Calculamos la derivada y la igualamos a cero, en busca del mínimo de la función área.

$$A(x) = 5x + \frac{1000}{x} + 150 \Rightarrow A'(x) = 5 - \frac{1000}{x^2}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 5 - \frac{1000}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1000}{x^2} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1000 = 5x^2 \Rightarrow x^2 = 200 \Rightarrow x = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} = 14,14 \text{ cm}$$

Solo consideramos el valor positivo de la raíz ya que estamos trabajando con longitudes.

Veamos como evoluciona el área antes de 14,14 cm y después de este valor.

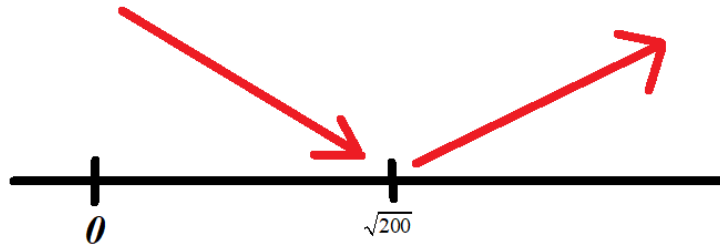
- En el intervalo $(0, \sqrt{200})$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$A'(10) = 5 - \frac{1000}{10^2} = 5 - 10 = -5 < 0, \text{ la función decrece.}$$

- En el intervalo $(\sqrt{200}, +\infty)$ tomamos $x = 20$ y la derivada vale

$$A'(20) = 5 - \frac{1000}{20^2} = 2,5 > 0, \text{ la función crece.}$$

El área sigue el esquema del dibujo siguiente.



La función presenta un mínimo relativo en $x = \sqrt{200}$.

Hallamos el valor de y para $x = \sqrt{200}$.

$$y = \frac{100}{\sqrt{200}} = \frac{100\sqrt{200}}{200} = \frac{\sqrt{200}}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ cm.}$$

Las dimensiones de la tarjeta que hacen mínimo el consumo de papel tiene de largo $x+10=10+10\sqrt{2} \approx 24,14$ cm y de ancho $y+5=5+5\sqrt{2} \approx 12,07$ cm.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = xe^x$, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en $x = 1$.

Si $f''(x) = xe^x$ integrando obtendremos el valor de la derivada $f'(x)$.

$$f''(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = \int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + K$$

Al tener un extremo relativo en $x = 1$ la derivada se anula en dicho valor $\rightarrow f'(1) = 0$.

$$f'(1) = 0 \Rightarrow f'(1) = 1 \cdot e^1 - e^1 + K = 0 \Rightarrow \boxed{K = 0}$$

La derivada queda $f'(x) = xe^x - e^x$.

Volvemos a integrar la derivada para obtener la función $f(x)$.

$$f'(x) = xe^x - e^x \Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = \int xe^x - e^x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \int xe^x dx - \int e^x dx = (xe^x - e^x) - e^x + K' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = xe^x - 2e^x + K'$$

Hemos obtenido la función que nos piden y tiene la expresión $f(x) = xe^x - 2e^x + K'$

Determinamos el valor de K' a partir de los datos proporcionados en el ejercicio.

Si la gráfica pasa por el origen de coordenadas entonces se cumple que $f(0) = 0$.

$$f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0e^0 - 2e^0 + K' = -2 + K' = 0 \Rightarrow \boxed{K' = 2}$$

La función buscada tiene la expresión $f(x) = xe^x - 2e^x + 2$

Ejercicio 3.- Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} m \\ 2m+1 \\ m-1 \end{pmatrix}$$

a) [1,25 puntos] Discute el sistema según los valores de m .

b) [1,25 puntos] Para $m = 2$, calcula, si es posible, una solución del sistema anterior para la que $z = 17$.

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 0 + 3 + 6 - 0 - 2m + 4 - 9 = -2m + 4$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = 0 \Rightarrow -2m + 4 = 0 \Rightarrow -2m = -4 \Rightarrow m = \frac{-4}{-2} = 2$$

Analizamos los dos casos diferentes que se nos pueden plantear.

CASO 1. $m \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y por tanto el rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas.

El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (una única solución)

CASO 2. $m = 2$.

Vemos como queda el sistema y lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$AX = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3z = 5 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 2x \quad \quad + 3z = 5 \\ -2x \quad -2y \quad -2z = -4 \\ \hline -2y \quad + z = 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x \quad + 3y \quad \quad = 1 \\ -x \quad -y \quad -z = -2 \\ \hline 2y \quad -z = -1 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ -2y + z = 1 \\ 2y - z = -1 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a = (-1) \text{ Ecuación } 2^a \\ \text{Elimino la ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ -2y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ z = 1 + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow x + y + 1 + 2y = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1 - 3y} \end{aligned}$$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones) y las soluciones tienen la expresión: $x = 1 - 3t$; $y = t$; $z = 1 + 2t$.

b) Para $m = 2$ el sistema está resuelto en el apartado anterior y sus soluciones son:

$$x = 1 - 3t; y = t; z = 1 + 2t.$$

Para conseguir una solución con $z = 17$ debe ser $1 + 2t = 17 \Rightarrow t = 8$.

Sustituyendo en el resto de incógnitas tenemos: $t = 8 \Rightarrow x = 1 - 24 = -23$; $y = 8$; $z = 17$.

La solución es $x = -23$; $y = 8$; $z = 17$

Ejercicio 4.- Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$ y $C(1, 3, 3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.

a) [1 punto] Calcula el área del paralelogramo.

b) [1 punto] Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.

c) [0,5 puntos] Calcula las coordenadas del vértice D .

a) Dibujamos el paralelogramo para aclarar la situación.



El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los vectores que forman sus lados. Tomamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 1, 1) \\ B(2, 2, 2) \\ C(1, 3, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 2, 2) - (1, 1, 1) = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{BC} = (1, 3, 3) - (2, 2, 2) = (-1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = i - j + k + k - j - i = -2j + 2k = (0, -2, 2)$$

$$\boxed{\text{Área de } ABCD = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2,8284 u^2}$$

b) El plano que contiene el paralelogramo tiene como vector normal el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ y contiene el punto $A(1,1,1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (0, -2, 2) \\ A(1,1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv -2y + 2z + D = 0 \\ A(1,1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv -2y + 2z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv y - z = 0}$$

c) El punto D se obtiene sumando al punto A el vector $\overrightarrow{BC}$ ya que este vector y el $\overrightarrow{AD}$ son iguales.

$$D = A + \overrightarrow{BC} = (1, 1, 1) + (-1, 1, 1) = (0, 2, 2)$$

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- a) [2 puntos]** Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f . Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) [0,5 puntos]** Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

a) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

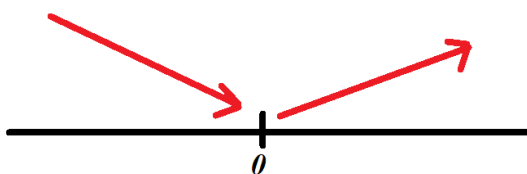
$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow e^x = \frac{1}{e^x} \Rightarrow e^{2x} = 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Veamos cómo evoluciona la función antes y después de $x = 0$.

- En $(-\infty, 0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{e^{-1} - e^1}{2} = -1,17 < 0$, la función decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$
- En $(0, +\infty)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = 1,17 > 0$, la función crece en el intervalo $(0, +\infty)$

Reflejamos lo obtenido en el esquema siguiente.



La función decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y crece en el intervalo $(0, +\infty)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$. La función toma el valor $f(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$.

El punto $(0, 1)$ es el mínimo relativo.

b) La recta normal a la gráfica en $x = 0$ tiene ecuación $y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x - 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f'(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{0}x \Rightarrow 0(y - 1) = -x \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

La recta normal es la recta vertical $x = 0$. Es lógico, pues en $x = 0$ hay un mínimo relativo lo que implica que la recta tangente es horizontal y la normal es vertical.

Ejercicio 2.- Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje OX , la recta $y = x$, la gráfica $y = \frac{1}{x^3}$ y la recta $x = 3$.

a) [0,5 puntos] Haz un esbozo del recinto descrito.

b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto.

c) [0,5 puntos] Si consideras la gráfica $y = \frac{1}{x}$ en lugar de $y = \frac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o será menor que la del recinto inicial? ¿por qué?.

a) Veamos donde coinciden las gráficas.

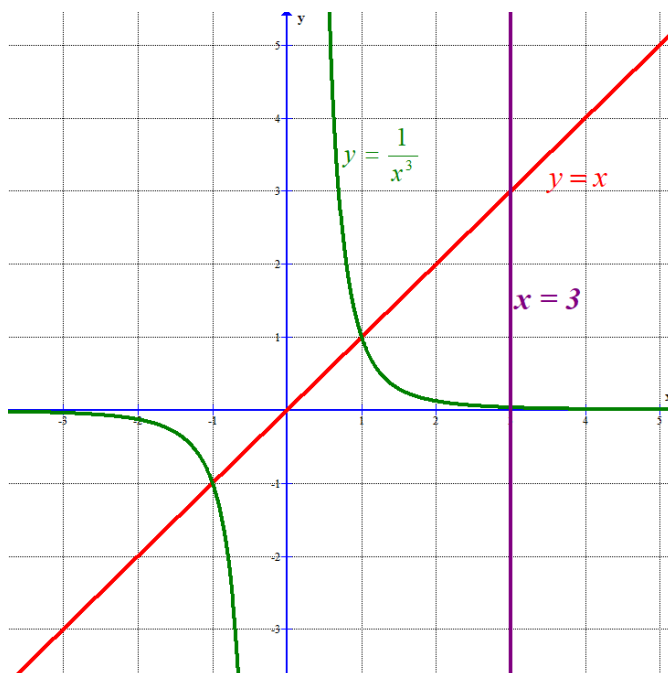
$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ y = \frac{1}{x^3} \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{1}{x^3} \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[4]{1} = \pm 1$$

La función $y = \frac{1}{x^3}$ no existe para $x = 0$, por lo que presenta una asíntota vertical en $x = 0$.

Hacemos una tabla de valores para la recta $y = x$ y otra para la curva $y = \frac{1}{x^3}$ y con ello dibujamos las gráficas.

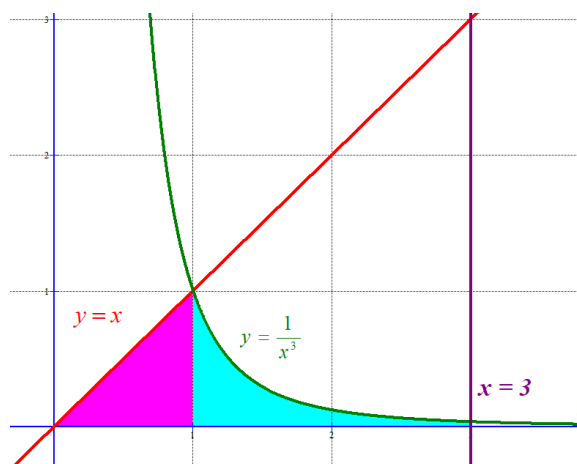
x	$y = \frac{1}{x^3}$
-3	-0,012
-2	-0,125
-1	-1
0	No existe
1	1
2	0,125
3	0,012

x	$y = x$
-1	-1
1	1



El recinto debe estar en el primer cuadrante y además limitado por el eje OX y las líneas roja, verde y violeta.

Para el cálculo de su área lo dividimos en dos partes: la zona rosa tiene por encima a la recta $y = x$, por debajo el eje OX y la zona azul claro tiene por encima la función $y = \frac{1}{x^3}$ y por debajo el eje OX .

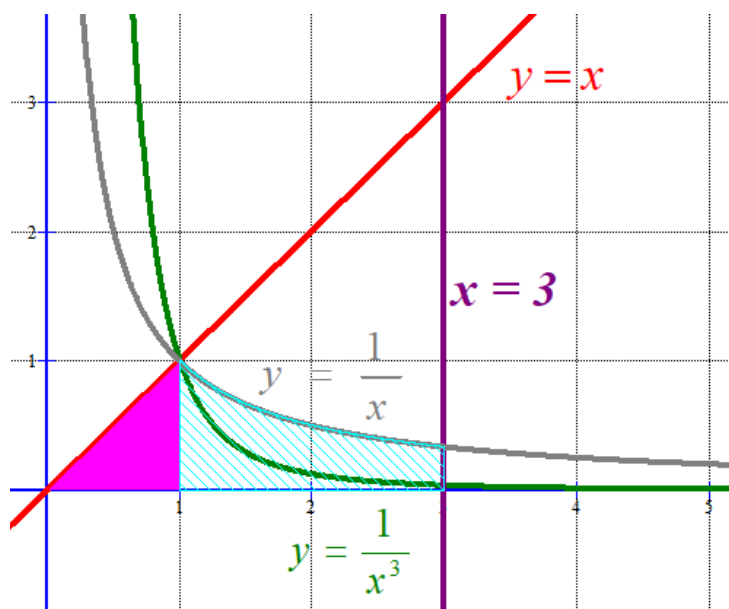


- b) Para calcular el área total calculamos el área del recinto rosa y del azul y los sumamos. Observando el dibujo el recinto rosa ocupa medio cuadrado, por lo que tiene área = $0,5 \text{ u}^2$. El recinto azul lo calculamos haciendo uso de la integral definida de $x = 1$ hasta $x = 3$ de la función $y = \frac{1}{x^3}$.

$$\int_1^3 \frac{1}{x^3} dx = \int_1^3 x^{-3} dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^3 = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^3 = \left[-\frac{1}{2 \cdot 3^2} \right] - \left[-\frac{1}{2 \cdot 1^2} \right] = -\frac{1}{18} + \frac{1}{2} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} = 0,444$$

El área total es la suma de las dos áreas: **Área total = $0,5 + 0,444 = 0,944 \text{ u}^2$**

- c) Dibujamos la función $y = \frac{1}{x}$ y dibujamos el nuevo recinto.



El área del nuevo recinto sería mayor que el área del recinto inicial, pues se observa que la función $y = \frac{1}{x}$ toma valores superiores a $y = \frac{1}{x^3}$ en el intervalo $(1, 3)$.

Ejercicio 3.- Considera $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$

a) [1,5 puntos] Discute el rango de A según los valores de k .

b) [1 punto] Para $k = 1$, calcula el determinante de $2(A^t A^{-1})^{2017}$, siendo A^t la traspuesta de A .

a) Calculamos el determinante de A y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{vmatrix} = k^2(k+1) + k(k+1)^2 = k(k+1)[k + (k+1)] = k(k+1)[2k+1]$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k(k+1)[2k+1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k+1 = 0 \rightarrow k = -1 \\ 2k+1 = 0 \rightarrow 2k = -1 \rightarrow k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Nos planteamos cuatro situaciones distintas.

CASO 1. $k \neq 0$, $k \neq -1$ y $k \neq -\frac{1}{2}$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.

CASO 2. $k = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor que 3.

¿El rango de A es 2?

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde la fila 1ª es nula y la 2ª y 3ª columna son

iguales. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 1ª y la columna 3ª y su determinante es $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

CASO 3. $k = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde la fila 3ª es nula y la 1ª y 2ª columna son

iguales. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 3ª y su determinante es $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

CASO 4. $k = -\frac{1}{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 2 que

resulta de quitar la fila 3ª y la columna 3ª y su determinante es $\begin{vmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = 1/4 \neq 0$.

El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $k \neq 0$, $k \neq -1$ y $k \neq -\frac{1}{2}$ el rango de A es 3 y si $k = -\frac{1}{2}$, $k = -1$ o $k = 0$ el rango de A es 2.

b) Para $k = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Si B es una matriz cuadrada de orden 3 se cumple que $|2B| = 2^3 |B|$

Como la matriz $(A^t A^{-1})^{2017}$ es una matriz cuadrada de orden 3 el determinante

$$|2(A^t A^{-1})^{2017}| = 2^3 |(A^t A^{-1})^{2017}|$$

Si B y C son dos matrices se cumple que $|B \cdot C| = |B| \cdot |C|$

También se cumple que $|B^{2017}| = |B \cdot B \cdot \dots \cdot B| = |B| \cdot |B| \cdot \dots \cdot |B| = |B|^{2017}$

Aplicándolo a nuestro ejercicio tenemos que:

$$|2(A^t A^{-1})^{2017}| = 2^3 |(A^t A^{-1})^{2017}| = 8 |A^t A^{-1}|^{2017} = 8 (|A^t| \cdot |A^{-1}|)^{2017}$$

Sabemos que $|A^t| = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6$ y $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{6}$

Terminamos de calcular el determinante pedido.

$$|2(A^t A^{-1})^{2017}| = 8 (|A^t| |A^{-1}|)^{2017} = 8 \left(6 \cdot \frac{1}{6} \right)^{2017} = 8$$

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(0, 1, 1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ z = 2 \end{cases}$

a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r .

b) [1,25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r .

a) Determinamos un punto y el vector director de la recta r .

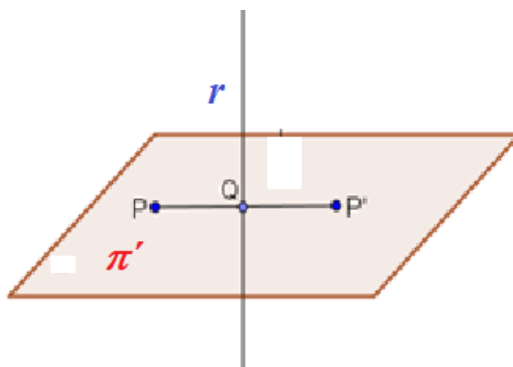
$$r \equiv \begin{cases} x - 2y = -5 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -5 + 2y \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 0) \\ P_r(-5, 0, 2) \end{cases}$$

El plano π que contiene la recta y el punto P tiene como vectores directores $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{PP_r}$.

$$\pi \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 0) \\ \overrightarrow{PP_r} = (-5, 0, 2) - (0, 1, 1) = (-5, -1, 1) \\ P(0, 1, 1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv x - 2z + 2 + 5z - 5 - 2y + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - 2y + 3z - 1 = 0}$$

b) Para obtener el punto P' simétrico de P respecto de r seguimos los pasos indicados en el dibujo.



Hallamos el plano π' perpendicular a la recta r que pasa por P . Este plano tiene como vector normal el director de la recta.

$$\pi' \equiv \begin{cases} \vec{n} = \vec{v}_r = (2, 1, 0) \\ P(0, 1, 1) \in \pi' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi' \equiv 2x + y + D = 0 \\ P(0, 1, 1) \in \pi' \end{cases} \Rightarrow 0 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv 2x + y - 1 = 0}$$

Hallamos las coordenadas del punto Q de corte de la recta r y del plano π' .

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y = -5 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2y - 5 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi' \equiv 2x + y - 1 = 0 \\ \pi' \equiv 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2(2y - 5) + y - 1 = 0 \Rightarrow 4y - 10 + y - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y = 11 \Rightarrow y = \frac{11}{5} \Rightarrow x = 2 \cdot \frac{11}{5} - 5 = -\frac{3}{5} \Rightarrow Q\left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right)$$

El punto P' lo obtenemos sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right) - (0, 1, 1) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 1\right)$$

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right) + \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 1\right) = \left(-\frac{6}{5}, \frac{17}{5}, 3\right)$$

El punto P' simétrico de P respecto de la recta r tiene coordenadas $P' \left(-\frac{6}{5}, \frac{17}{5}, 3\right)$

PevAU 2017 Ordinaria Matemáticas II



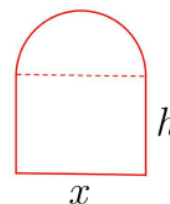
UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2016-2017

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
 - c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados.



Si es posible, determina la base x para que el perímetro sea mínimo.

Ejercicio 2.- Considera la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$

- a) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.
- b) [0,75 puntos] Expresa el área como una integral.
- c) [1 punto] Calcula el área.

Ejercicio 3.- Considera $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- a) [1 punto] Determina los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa (I es la matriz identidad).
- b) [1,5 puntos] Resuelve $AX = -3X$. Determina, si existe, alguna solución con $x = 1$.

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(1, -1, 0)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$.

- a) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r .
- b) [1'25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r .



UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
 CURSO 2016-2017

MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ para $x \neq 1$.

a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

b) [1,5 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f . Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Ejercicio 2.- Calcula $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$ (sugerencia $t = \sqrt[4]{x}$).

Ejercicio 3.- Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

a) [1,5 puntos] Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona la respuesta.

b) [1 punto] Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

Ejercicio 4.- Considera los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 2, 1)$ y $\vec{w} = (m, 1, n)$.

a) [1,25 puntos] Halla m y n sabiendo que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

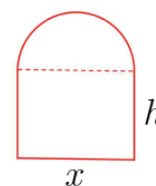
b) [1,25 puntos] Para $n = 1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas.

SOLUCIONES

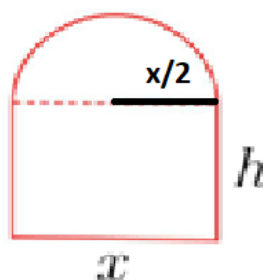
Opción A

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados.

Si es posible, determina la base x para que el perímetro sea mínimo.



Añadimos al dibujo los datos necesarios para determinar el área del rectángulo y del semicírculo que la forman.



El área del rectángulo es $x \cdot h$ y del semicírculo es $\frac{1}{2} \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot x^2}{8}$.

El área total es la suma de ambas.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Área del hueco} = \frac{\pi \cdot x^2}{8} + x \cdot h \\ \text{Hueco} = 16 \text{ m}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\pi \cdot x^2}{8} + x \cdot h = 16 \Rightarrow x \cdot h = 16 - \frac{\pi \cdot x^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{16}{x} - \frac{\pi \cdot x^2}{8x} \Rightarrow h = \frac{16}{x} - \frac{\pi}{8} x$$

Deseamos hacer mínimo el perímetro. Averiguamos su expresión en función de x .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Perímetro} = x + 2h + \pi \frac{x}{2} \\ h = \frac{16}{x} - \frac{\pi}{8} x \end{array} \right\} \Rightarrow P(x) = x + 2\left(\frac{16}{x} - \frac{\pi}{8} x\right) + \pi \frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$P(x) = x + \frac{32}{x} - \frac{\pi}{4} x + \frac{\pi}{2} x = \frac{32}{x} + \left(1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) x = \frac{32}{x} + \frac{4 + \pi}{4} x$$

Calculamos la derivada del perímetro y la igualamos a cero.

$$P'(x) = -\frac{32}{x^2} + \frac{4 + \pi}{4} \Rightarrow P'(x) = -\frac{32}{x^2} + \frac{4 + \pi}{4}$$

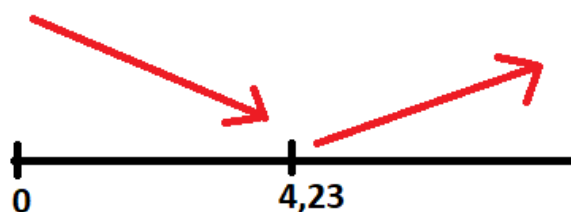
$$P'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{32}{x^2} + \frac{4+\pi}{4} = 0 \Rightarrow \frac{32}{x^2} = \frac{4+\pi}{4} \Rightarrow 128 = (4+\pi)x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{128}{4+\pi} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{128}{4+\pi}} \approx 4,23$$

Como “x” es una longitud solo consideramos el valor positivo de la raíz.
Veamos cómo cambia el signo de la derivada antes y después de $x = 4,23$.

- En el intervalo $(0, 4.23)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $P'(1) = -\frac{32}{1^2} + \frac{4+\pi}{4} < 0$ el perímetro decrece.
- En el intervalo $(4.23, +\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $P'(5) = -\frac{32}{5^2} + \frac{4+\pi}{4} = 0.5 > 0$ el perímetro crece.

La variación del perímetro sigue el esquema siguiente:



Por lo que el perímetro presenta un mínimo en $x = \sqrt{\frac{128}{4+\pi}} = 4,23$ metros

Ejercicio 2.- Considera la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$

a) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.

b) [0,75 puntos] Expresa el área como una integral.

c) [1 punto] Calcula el área.

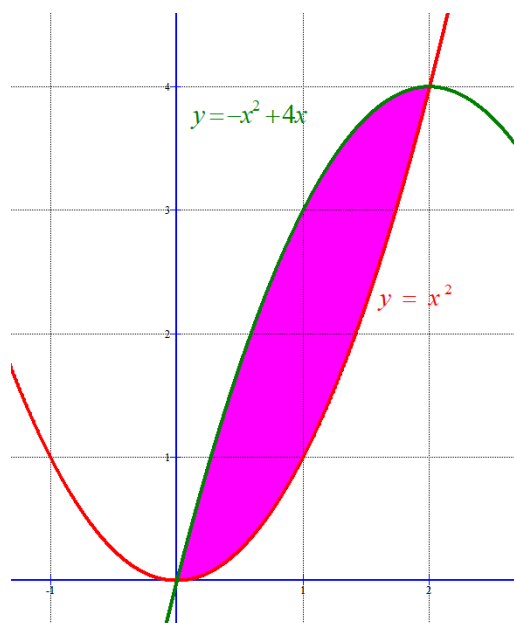
a) Las funciones son dos parábolas, para dibujarlas empezamos hallando los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -x^2 + 4x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = -x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x = 2 \end{cases}$$

Obtenemos unas tablas de valores y dibujamos la región limitada por ambas gráficas.

x	$y = -x^2 + 4x$
-1	$-1 - 4 = -5$
0	0
1	$-1 + 4 = 3$
2	4

x	$y = x^2$
-1	1
0	0
1	1
2	4



b) El valor del área se puede calcular como la integral definida entre $x = 0$ y $x = 2$ de la diferencia entre la función superior $y = -x^2 + 4x$ y la función inferior $y = x^2$.

$$\text{Área} = \int_0^2 (-x^2 + 4x) - (x^2) dx = \int_0^2 -2x^2 + 4x dx$$

c) Observando el dibujo de la región y contando cuadraditos ($1 u^2$) el área de la región rosa tiene un valor aproximado de 3 unidades cuadradas. Calculamos el valor exacto resolviendo la integral del apartado anterior.

$$\text{Área} = \int_0^2 -x^2 + 4x - x^2 dx = \int_0^2 -2x^2 + 4x dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^2 =$$

$$= \left[-2\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 \right] - \left[-2\frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0^2 \right] = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3} = 2,667 u^2$$

Ejercicio 3.- Considera $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- a) [1 punto]** Determina los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa (I es la matriz identidad).
b) [1,5 puntos] Resuelve $AX = -3X$. Determina, si existe, alguna solución con $x = 1$.

a) Para que la matriz $A + \lambda I$ no tenga inversa debe tener determinante nulo.

$$A + \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante

$$|A + \lambda I| = \begin{vmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{vmatrix} = (-2+\lambda)(1+\lambda)(-2+\lambda) - 4(-2+\lambda) =$$

$$= (-2+\lambda)[(1+\lambda)(-2+\lambda) - 4] = (-2+\lambda)[-2+\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4] = (-2+\lambda)[\lambda^2 - \lambda - 6]$$

Lo igualamos a cero y surgen dos opciones:

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = \boxed{3 = \lambda} \\ \frac{1-5}{2} = \boxed{-2 = \lambda} \end{cases}$$

O bien $-2 + \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$

La matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa para los valores $\lambda = -2; \lambda = 2$ y $\lambda = 3$

b) Convertimos la igualdad matricial $AX = -3X$ en un sistema de ecuaciones y lo resolvemos.

$$\begin{aligned} AX = -3X &\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2x-2y \\ -2x+y \\ -2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -2x-2y = -3x \\ -2x+y = -3y \\ -2z = -3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y = 0 \\ -2x+4y = 0 \\ \boxed{z=0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y = 0 \\ -2x+4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dividimos la 2ª ecuación} \\ \text{por } -2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x-2y = 0 \\ x-2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ \text{Ecuaciones iguales} \} \Rightarrow x-2y = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2y} \end{aligned}$$

La solución a la igualdad $AX = -3X$ es $x = 2t; y = t; z = 0; t \in \mathbb{R}$.

Para tener una solución con $x = 1$ tomamos el valor de $t = 0,5$.

La solución sería: $x = 1; y = 0,5; z = 0$

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(1, -1, 0)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$.

a) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r .

b) [1'25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r .

a) Obtenemos un vector director y un punto de la recta.

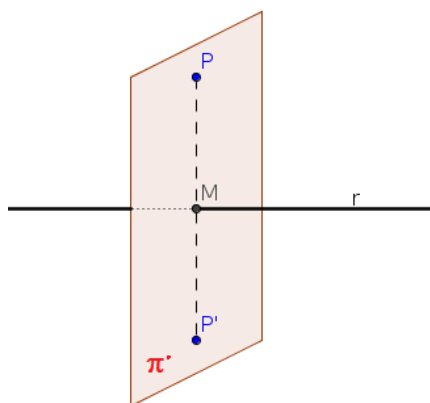
$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (3, 0, 1) \\ Q_r = (1, -2, 0) \end{cases}$$

El plano π que pasa por P y contiene a r , tiene como vectores directores $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{PQ_r}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (3, 0, 1) \\ \overrightarrow{PQ_r} = (1, -2, 0) - (1, -1, 0) = (0, -1, 0) \\ P(1, -1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv -3z + x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - 3z - 1 = 0}$$

b) Para hallar el punto P' simétrico de P respecto de la recta r seguimos los pasos indicados en el dibujo.



El plano π' perpendicular a la recta r que pasa por el punto P tiene como vector normal el vector director de r .

$$\pi' \equiv \left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (3, 0, 1) \\ P(1, -1, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{cases} 3x + z + D = 0 \\ P(1, -1, 0) \in \pi' \end{cases} \Rightarrow 3 + 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -3 \Rightarrow \pi' \equiv 3x + z - 3 = 0$$

Hallamos el punto M de corte de la recta r y el plano π' .

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} \pi' \equiv 3x + z - 3 = 0 \\ x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{array} \right\} \Rightarrow 3(1 + 3t) + t - 3 = 0 \Rightarrow 3 + 9t + t - 3 = 0 \Rightarrow 10t = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 3 \cdot 0 = 1 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow M(1, -2, 0)$$

El punto M es el punto medio del segmento $\overline{P'P}$, por lo que se cumple:

$$\left\{ \begin{array}{l} M(1, -2, 0) \\ P(1, -1, 0) \\ P'(a, b, c) \end{array} \right\} \Rightarrow (1, -2, 0) = \frac{(1, -1, 0) + (a, b, c)}{2} \Rightarrow (2, -4, 0) = (1, -1, 0) + (a, b, c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2, -4, 0) - (1, -1, 0) = (a, b, c) \Rightarrow (a, b, c) = (1, -3, 0)$$

El punto P' simétrico de P respecto de la recta r tiene coordenadas $P'(1, -3, 0)$

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ para $x \neq 1$.

a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

b) [1,5 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f . Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

a) El dominio de la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ es $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntota vertical. $x = 1$

$$\text{Comprobamos } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

La asíntota vertical es $x = 1$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

No tiene asíntota horizontal

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x + 1$

b) Calculamos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

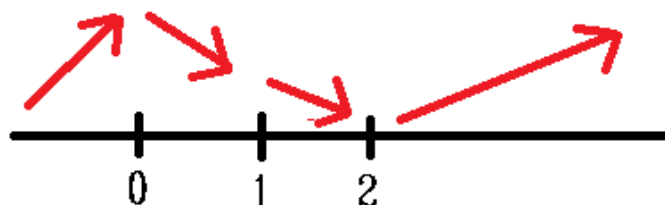
La igualamos a cero, en busca de los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Como el valor $x = 1$ está excluido del dominio lo añadimos a los valores $x = 0$ y $x = 2$ y valoramos la evolución del signo de la derivada antes de $x = 0$, entre 0 y 1, entre 1 y 2 y después de $x = 2$.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1)}{(-1-1)^2} = \frac{1+2}{4} > 0$, la función crece.
- En $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{0.5^2 - 2 \cdot 0.5}{(0.5-1)^2} = \frac{-0.75}{0.25} < 0$, la función decrece.
- En $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5) = \frac{(1.5)^2 - 2(1.5)}{(1.5-1)^2} = \frac{2.25-3}{0.25} < 0$, la función decrece.
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{3^2 - 6}{(3-1)^2} = \frac{3}{4} > 0$, la función crece.

Lo obtenido se resume en un gráfico.



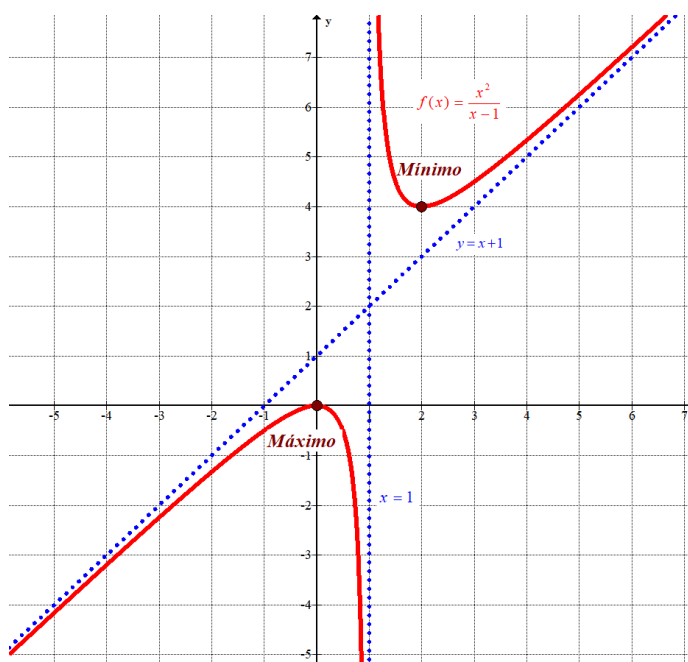
La función crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

Presenta un máximo relativo en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

El valor de la función en estos puntos es:

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0 \quad x = 2 \rightarrow f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

El máximo relativo es el punto $(0, 0)$ y el mínimo relativo es $(2, 4)$.



Ejercicio 2.- Calcula $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$ (sugerencia $t = \sqrt[4]{x}$).

Calculamos primero la integral indefinida con el cambio de variable sugerido.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt[4]{x} = x^{1/4} \rightarrow t^4 = x \\ \sqrt{x} = x^{1/2} = (t^4)^{1/2} = t^{4/2} = t^2 \\ 4t^3 dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{4t^3 dt}{t^2 + t} = 4 \int \frac{t^3 dt}{t^2 + t} = \dots$$

$$\frac{t^3}{t^2 + t} = \frac{t^3}{t(t+1)} = \frac{t^2}{t+1} = \frac{t^2 - 1 + 1}{t+1} = \frac{t^2 - 1}{t+1} + \frac{1}{t+1} = \frac{(t-1)(t+1)}{t+1} + \frac{1}{t+1} = t - 1 + \frac{1}{t+1}$$

$$\dots = 4 \int t - 1 + \frac{1}{t+1} dt = 4 \left(\int t dt - \int 1 dt + \int \frac{1}{t+1} dt \right) = 4 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln(t+1) \right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos} \\ \text{el cambio de variable} \\ t = \sqrt[4]{x} \end{array} \right\} = 4 \left(\frac{(\sqrt[4]{x})^2}{2} - \sqrt[4]{x} + \ln(\sqrt[4]{x} + 1) \right) =$$

$$= 4 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt[4]{x} + \ln(\sqrt[4]{x} + 1) \right) = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x} + 1) + K$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} &= \left[2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x} + 1) \right]_1^{16} = \\ &= \left[2\sqrt{16} - 4\sqrt[4]{16} + 4\ln(\sqrt[4]{16} + 1) \right] - \left[2\sqrt{1} - 4\sqrt[4]{1} + 4\ln(\sqrt[4]{1} + 1) \right] = \\ &= 8 - 8 + 4\ln 3 - 2 + 4 - 4\ln 2 = \boxed{2 + 4\ln 3 - 4\ln 2} \end{aligned}$$

Ejercicio 3.- Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

a) [1,5 puntos] Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona la respuesta.

b) [1 punto] Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

Llamamos $x = \text{precio de 1 lápiz}$, $y = \text{precio de 1 rotulador}$, $z = \text{precio de 1 carpeta}$.

“El coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros” $\rightarrow 3x + y + 2z = 15$

“El coste de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros” $\rightarrow 2x + 4y + z = 20$

a) Añadimos la condición dada. “El coste de 1 lápiz y 7 rotuladores es de 25 euros” $\rightarrow x + 7y = 25$.

Planteamos el sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y + 2z = 15 \\ 2x + 4y + z = 20 \\ x + 7y = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio la ecuación 1ª por la 3ª} \\ \Rightarrow 2x + 4y + z = 20 \\ 3x + y + 2z = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 2x + 4y + z = 20 \\ -2x - 14y = -50 \\ \hline -10y + z = -30 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 3 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 3x + y + 2z = 15 \\ -3x - 21y = -75 \\ \hline -20y + 2z = -60 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 7y = 25 \\ -10y + z = -30 \\ -20y + 2z = -60 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Divido ecuación 3ª por 2} \\ x + 7y = 25 \\ -10y + z = -30 \\ -10y + z = -30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} = \text{Ecuación 2ª} \\ x + 7y = 25 \\ -10y + z = -30 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 7y = 25 \\ -10y + z = -30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 25 - 7y \\ z = -30 + 10y \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\left\{ \begin{array}{l} x = 25 - 7t \\ y = t \\ z = -30 + 10t \end{array} \right\}}$$

No se puede deducir el precio de cada artículo. La información proporcionada no es suficiente. Todos los precios quedan dependientes del precio de uno de los artículos.

b) “Con el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices” $\rightarrow z = 10x$

Añadimos esta ecuación al sistema anterior y resolvemos este sistema nuevo.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y + 2z = 15 \\ 2x + 4y + z = 20 \\ x + 7y = 25 \\ z = 10x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y + 20x = 15 \\ 2x + 4y + 10x = 20 \\ x + 7y = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 15 - 23x \\ 12x + 4y = 20 \\ x + 7y = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12x + 4(15 - 23x) = 20 \\ x + 7(15 - 23x) = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12x + 60 - 92x = 20 \\ x + 105 - 161x = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -80x = -40 \\ -160x = -80 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{-40}{-80} = \frac{1}{2} \\ x = \frac{-80}{-160} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2} = 0.5} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = 15 - 23 \cdot 0.5 = 3.5} \\ \boxed{z = 10 \cdot 0.5 = 5} \end{array} \right.$$

En este caso los precios se pueden determinar: 0,5 euros cada lápiz, 3,5 euros cada rotulador y 5 euros cada carpeta.

Ejercicio 4.- Considera los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 2, 1)$ y $\vec{w} = (m, 1, n)$.

- a) [1,25 puntos] Halla m y n sabiendo que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.
- b) [1,25 puntos] Para $n = 1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas.

- a) Si los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 2, 1)$ y $\vec{w} = (m, 1, n)$ son linealmente dependientes entonces se cumple que el determinante formado por sus coordenadas vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2n - 2m - 1 = 0$$

Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$ el producto escalar de ambos vale 0.

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow (1, 0, 1) \cdot (m, 1, n) = 0 \Rightarrow m + n = 0 \Rightarrow m = -n$$

Si juntamos las dos condiciones tendremos un sistema que podemos resolver.

$$\left. \begin{array}{l} 2n - 2m - 1 = 0 \\ m = -n \end{array} \right\} \Rightarrow 2n + 2n - 1 = 0 \Rightarrow 4n = 1 \Rightarrow \boxed{n = \frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{4}}$$

Los valores buscados son $n = \frac{1}{4}$; $m = -\frac{1}{4}$

- b) Para $n = 1$ los vectores quedan:

$$\vec{u} = (1, 0, 1), \vec{v} = (0, 2, 1) \text{ y } \vec{w} = (m, 1, 1)$$

El volumen del tetraedro determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los 3 vectores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (1, 0, 1) \\ \vec{v} = (0, 2, 1) \\ \vec{w} = (m, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |2 - 2m - 1| = \frac{1}{6} |1 - 2m|$$

Como el volumen debe ser 10 unidades cúbicas tenemos la igualdad siguiente que resolvemos.

$$\frac{1}{6} |1 - 2m| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2m = 60 \Rightarrow 1 - 60 = 2m \Rightarrow \boxed{m = -\frac{59}{2}} \\ \text{ó} \\ 1 - 2m = -60 \Rightarrow -2m = -61 \Rightarrow \boxed{m = \frac{61}{2}} \end{cases}$$