Matemáticas II

PAU en Cataluña

Años 2017 a 2026

WWW.EBAUMATEMATICAS.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas PAU de Cataluña desde el año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas de educación secundaria.
La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también tiene publicados unos apuntes de la materia.

PAU septiembre 2026 3
PAU junio (serie 1) 2026 18
PAU junio (serie 5) 2026 35
PAU septiembre 2025 50
PAU junio (serie 1) 2025 63
PAU junio (serie 4) 2025 75
PAU septiembre 2024 87
PAU junio (serie 1) 2024 100
PAU junio (serie 5) 2024 115
PAU septiembre 2023 131
PAU junio (serie 1) 2023 146
PAU junio (serie 5) 2023 158
PAU septiembre 2022 172
PAU junio (serie 2) 2022 186
PAU junio (serie 5) 2022 199
PAU septiembre 2021 211
PAU junio (serie 2) 2021 223
PAU junio (serie 5) 2021 238
PAU septiembre 2020 249
PAU julio (serie 1) 2020 260
PAU julio (serie 3) 2020 271
PAU septiembre 2019 282
PAU junio (serie 1) 2019 294
PAU junio (serie 4) 2019 303
PAU septiembre 2018 315
PAU junio (serie 1) 2018 326
PAU junio (serie 5) 2018 337
PAU septiembre 2017 348
PAU junio (serie 1) 2017 358
PAU junio (serie 5) 2017 370

PAU septiembre 2026

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2026

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 2

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas e indíquela en la portada.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar las páginas en blanco del final del cuaderno para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

[2,5 puntos en total]

Considere la función $f(x)=\dfrac{5x}{x^2+1}$,

1.1. Estudie su dominio y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus posibles máximos y mínimos locales. [1 punto]

1.2. Calcule las ecuaciones de todas las asíntotas de esta función (si tiene) y dibuje un esbozo de su gráfica. [0.75 puntos]

1.3. Calcule la ecuación de la recta normal (es decir, la recta perpendicular a la tangente) a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$. [0.75 puntos]

Ejercicio 2

[2,5 puntos en total]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x+ky+z&=3\\ -x+2y+2z&=1\\ x+y+z&=2\end{aligned}\right\}$$

donde *k* es un parámetro real.

2.1. Discuta el sistema en función del parámetro *k*. [1 punto]

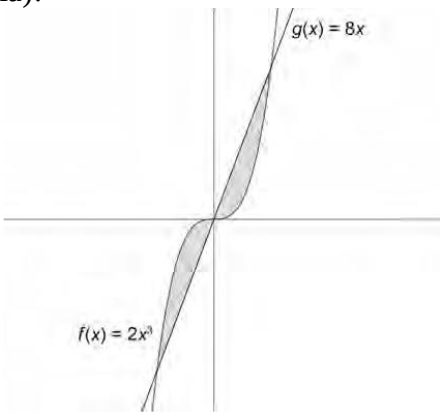
2.2. Resuelva el sistema para todos los valores de *k* y compruebe que, para $k\neq 1$, la solución no depende de *k*. [1 punto]

2.3. Interprete geométricamente el resultado de los apartados anteriores. [0,5 puntos]

Ejercicio 3

[2,5 puntos en total]

Se quiere construir un parque eólico en el Solsonès, formado por 10 aerogeneradores. La empresa que los construirá está diseñando las palas según el esquema siguiente, donde *x* y *f(x)* están medidos en metros (el dibujo no está a escala):



Se ha calculado que cada uno de los 10 aerogeneradores tendrá una potencia de 100 MW. Debido a varios factores, cada uno tiene una probabilidad del 10 % de estar parado, independientemente del resto de aerogeneradores.

3.1. ¿Cuál es la probabilidad de que se llegue a los 1 000 MW de potencia total en el parque? [0,75 puntos]

3.2. ¿Cuál es la probabilidad de que la potencia total del parque supere los 150 MW? [0,75 puntos]

3.3. Calcule el área de las palas de uno de estos aerogeneradores (parte sombreada en el gráfico). [1 punto]

Ejercicio 4

[2,5 puntos en total]

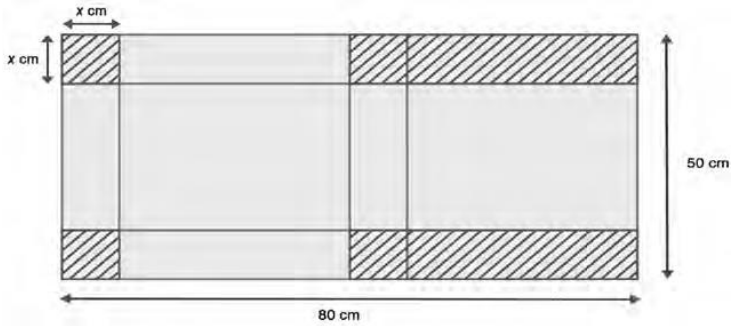
Aina quiere construir una caja de cartón en forma de prisma rectangular con tapa, para guardar la tableta y el cargador.

Escoja UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

Indique en la portada del examen la opción elegida.

OPCIÓN A

Aina construirá la caja a partir de un cartón rectangular de 80 cm × 50 cm. En la siguiente figura se muestra el desarrollo de la caja; las zonas rayadas son las partes que Aina recortará y retirará para poder montarla:



4.1. Compruebe que el volumen de la caja resultante es $V(x) = 2x^3 - 130x^2 + 2000x$, donde *x* es la longitud del lado del cuadrado que hay que recortar de las esquinas para poder montarla. [1 punto]

4.2. Calcule las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo. ¿Cuál es este volumen máximo? [1.5 puntos]

OPCIÓN B

Aina quiere hacer un croquis en 3D de la caja utilizando un programa informático. Para empezar, sitúa un lado de la tapa desde el vértice A(1, 1, 1) hasta el vértice B(4, 1, 5), y el otro lado de la tapa desde el vértice A hasta el vértice C(1, 10, 1).

4.1. ¿Cuáles son las coordenadas del cuarto vértice de la tapa? Calcule las longitudes de los dos lados de la tapa. [1 punto]

4.2. Sabiendo que los otros cuatro vértices de la caja están situados en el plano $\pi: -4x+3z=24$, calcule las coordenadas de uno de ellos (cualquiera) y la altura de la caja.

[1.5 puntos]

SOLUCIONES

Ejercicio 1
[2,5 puntos en total]
Considere la función $f(x)=\dfrac{5x}{x^2+1}$,

1.1. Estudie su dominio y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus posibles máximos y mínimos locales. [1 punto]

1.2. Calcule las ecuaciones de todas las asíntotas de esta función (si tiene) y dibuje un esbozo de su gráfica. [0.75 puntos]

1.3. Calcule la ecuación de la recta normal (es decir, la recta perpendicular a la tangente) a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$. [0.75 puntos]

1.1. La función tiene una expresión racional y su denominador nunca se anula. El dominio de la función es $\mathbb{R}$.
Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x)=\frac{5x}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{5\cdot(x^2+1)-2x\cdot 5x}{(x^2+1)^2}=\frac{5x^2+5-10x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{5-5x^2}{(x^2+1)^2}$$

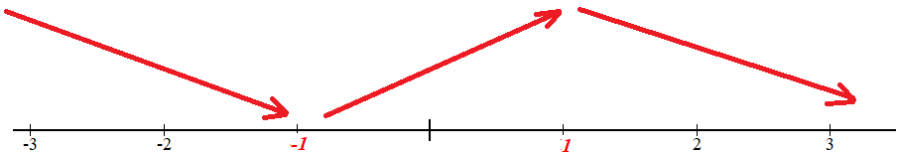
$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{5-5x^2}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow 5-5x^2=0\Rightarrow 5(1-x^2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los dos puntos críticos obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale
  $f'(-2)=\dfrac{5-5(-2)^2}{\left((-2)^2+1\right)^2}=\dfrac{-15}{25}<0$. La función decrece en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{5-5\cdot 0^2}{(0^2+1)^2}=5>0$. La función crece en $(-1,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{5-5\cdot 2^2}{(2^2+1)^2}=\dfrac{-15}{25}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función decrece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(-1,1)$.
La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un mínimo relativo en $x=-1$ y un máximo relativo en $x=1$. Como $f(-1)=\dfrac{5(-1)}{(-1)^2+1}=-2.5$ y $f(1)=\dfrac{5\cdot 1}{1^2+1}=2.5$ las coordenadas del mínimo relativo son $(-1,-2.5)$ y las del máximo relativo son $(1,2.5)$.

1.2. Asíntota vertical. $x=a$

El dominio de la función es $\mathbb{R}$ y por tanto, no tiene asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{5}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{1+0}=0$$

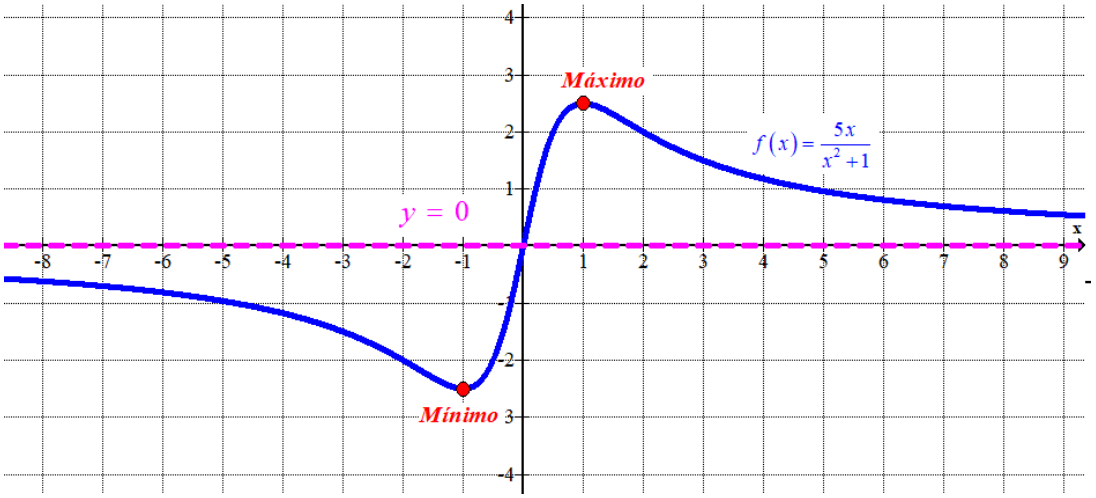
La recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

La función tiene asíntota horizontal y no puede tener asíntota oblicua.

Para dibujar la gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$f(x)=\dfrac{5x}{x^2+1}$
-3	-1.5
-1	-2.5
0	0
1	2.5
3	1.5



1.3. La recta normal a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$ tiene ecuación $y-f(2)=\dfrac{-1}{f'(2)}(x-2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f\left(2\right)=\dfrac{5\cdot 2}{2^2+1}=\dfrac{10}{5}=2 \\ f\,'\left(2\right)=\dfrac{-15}{25}=-0.6 \end{array}\right\} \Rightarrow y-2=\frac{-1}{-0.6}\left(x-2\right)\Rightarrow \boxed{y=\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}}$$

La recta normal a $y=f\left(x\right)$ en el punto de abscisa $x=2$ tiene ecuación $y=\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}$.

Ejercicio 2
[2,5 puntos en total]
Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x+ky+z&=3\\ -x+2y+2z&=1\\ x+y+z&=2\end{aligned}\right\}$$

donde k es un parámetro real.
2.1. Discuta el sistema en función del parámetro k. [1 punto]
2.2. Resuelva el sistema para todos los valores de k y compruebe que, para $k\neq 1$, la solución no depende de k. [1 punto]
2.3. Interprete geométricamente el resultado de los apartados anteriores. [0,5 puntos]

2.1. Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}2 & k & 1\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix}2 & k & 1 & 3\\ -1 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & k & 1\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=4+2k-1-2+k-4=3k-3$$

$$|A|=0\Rightarrow 3k-3=0\Rightarrow \boxed{k=1}$$

Estudiamos dos casos diferentes.

CASO 1. $k\neq 1$**.**
En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $k=1$
En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
La matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Observamos que las columnas 2ª y 3ª son iguales. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 3ª → $\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=4+1=5\neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}2&1&1&3\\-1&2&2&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 2ª columna → $\begin{vmatrix}2&1&3\\-1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=8+1-3-6+2-2=0$. El rango de A/B no es 3. El rango de la matriz ampliada es 2.

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $k\neq 1$ el sistema es **compatible determinado** y para $k=1$ el sistema es **compatible indeterminado.**

2.2. Para $k\neq 1$ el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

$$\left.\begin{matrix}2x+ky+z=3\\-x+2y+2z=1\\x+y+z=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2x+ky+z=3\\-x+2y+2z=1\\x=2-y-z\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}4-2y-2z+ky+z=3\\-2+y+z+2y+2z=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}(k-2)y-z=-1\\3y+3z=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}(k-2)y-z=-1\\y+z=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}(k-2)y-z=-1\\z=1-y\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(k-2)y-1+y=-1\Rightarrow(k-1)y=0\Rightarrow\{k\neq 1\rightarrow k-1\neq 0\}\Rightarrow\boxed{y=0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{z=1-0=1}\Rightarrow\boxed{x=2-0-1=1}$$

La solución es $x=1,\ y=0,\ z=1$. La solución no depende del valor de *k*.

Para $k=1$ el sistema es compatible indeterminado. Hallamos la expresión de sus soluciones.

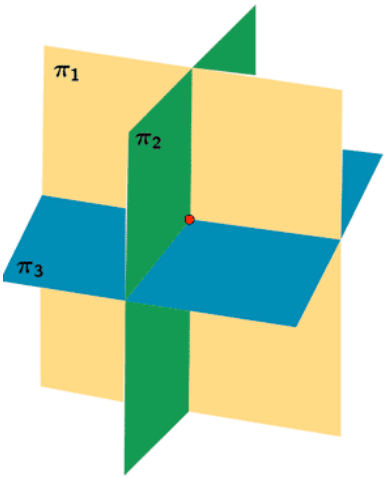
$$\left.\begin{matrix}2x+y+z=3\\-x+2y+2z=1\\x+y+z=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2x+y+z=3\\-x+2y+2z=1\\x=2-y-z\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}4-2y-2z+y+z=3\\-2+y+z+2y+2z=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}-y-z=-1\\3y+3z=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow y+z=1\Rightarrow y=1-z\Rightarrow x=2-1+z-z=1\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=1\\y=1-\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\z=\lambda\end{cases}}$$

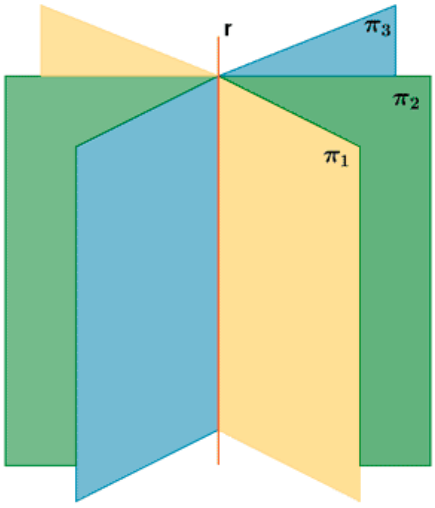
Para $k=1$ las soluciones del sistema son $\begin{cases}x=1\\y=1-\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\z=\lambda\end{cases}$.

2.3. Considerando cada ecuación como la ecuación de un plano podemos interpretar lo obtenido en el apartado anterior como:

Para $k \neq 1$ los tres planos coinciden en un punto.



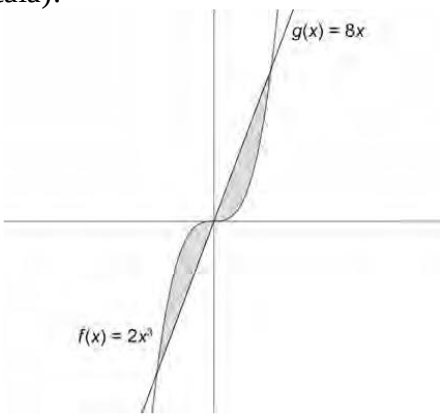
Para $k = 1$ los tres planos coinciden en una recta: $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$,



Ejercicio 3

[2,5 puntos en total]

Se quiere construir un parque eólico en el Solsonès, formado por 10 aerogeneradores. La empresa que los construirá está diseñando las palas según el esquema siguiente, donde *x* y *f(x)* están medidos en metros (el dibujo no está a escala):



Se ha calculado que cada uno de los 10 aerogeneradores tendrá una potencia de 100 MW. Debido a varios factores, cada uno tiene una probabilidad del 10 % de estar parado, independientemente del resto de aerogeneradores.

3.1. ¿Cuál es la probabilidad de que se llegue a los 1 000 MW de potencia total en el parque? [0,75 puntos]

3.2. ¿Cuál es la probabilidad de que la potencia total del parque supere los 150 MW? [0,75 puntos]

3.3. Calcule el área de las palas de uno de estos aerogeneradores (parte sombreada en el gráfico). [1 punto]

3.1. Para conseguir 1000 MW deben funcionar los 10 aerogeneradores. La probabilidad pedida es la probabilidad de que estén funcionando los 10 aerogeneradores.

La probabilidad de que un aerogenerador esté funcionando es 1 – 0.10 = 0.9.

Como el que funcione un aerogenerador es independiente de que funcione otro tenemos que la probabilidad de que funcionen los 10 aerogeneradores es el producto:

$$0.9\cdot 0.9\cdot 0.9\cdot ....\cdot 0.9 = 0.9^{10} \simeq 0.3487$$

La probabilidad de que se llegue a los 1 000 MW de potencia total en el parque tiene un valor aproximado de 0.3487.

3.2. Llamamos X a la variable que cuenta el número de aerogeneradores que están funcionando de un grupo de 10.

Esta variable es una binomial de parámetros n = número de repeticiones = 10 y p = probabilidad de que un aerogenerador esté funcionando = 0.9. $X = B(10, 0.9)$.

Para superar los 150 MW se deben producir al menos 200 MW, es decir, deben funcionar 2 o más aerogeneradores. Debemos calcular $P(X \geq 2)$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1)\right] = 1 - \binom{10}{0} 0.9^0 \cdot 0.1^{10} - \binom{10}{1} 0.9^1 \cdot 0.1^9 =$$

$$= 1 - 0.1^{10} - 10\cdot 0.9\cdot 0.1^9 = 1 - 0.0000000091 = \boxed{0.9999999909}$$

La probabilidad de que la potencia total del parque supere los 150 MW vale 0.9999999909.

3.3. Averiguamos los puntos de corte de $f(x)=2x^3$ y $g(x)=8x$.

$$2x^3=8x \Rightarrow 2x^3-8x=0 \Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ o \\ x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2} \end{cases}$$

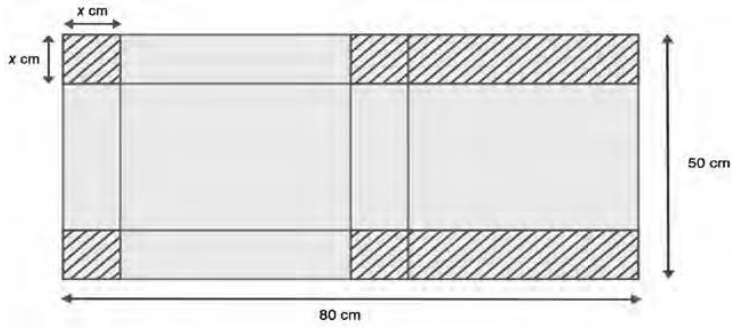
Las palas son simétricas respecto del origen de coordenadas, por lo que el área de una pala es el doble de la integral de 0 a 2 de la diferencia entre las dos funciones $8x-2x^3$.

$$\int_0^2 8x-2x^3 dx=\left[8\frac{x^2}{2}-2\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\left[4x^2-\frac{x^4}{2}\right]_0^2=\left[4\cdot 2^2-\frac{2^4}{2}\right]-\left[4\cdot 0^2-\frac{0^4}{2}\right]=8$$

El área de un aspa es de $2 \cdot 8 = 16$ metros cuadrados.

Ejercicio 4 OPCIÓN A

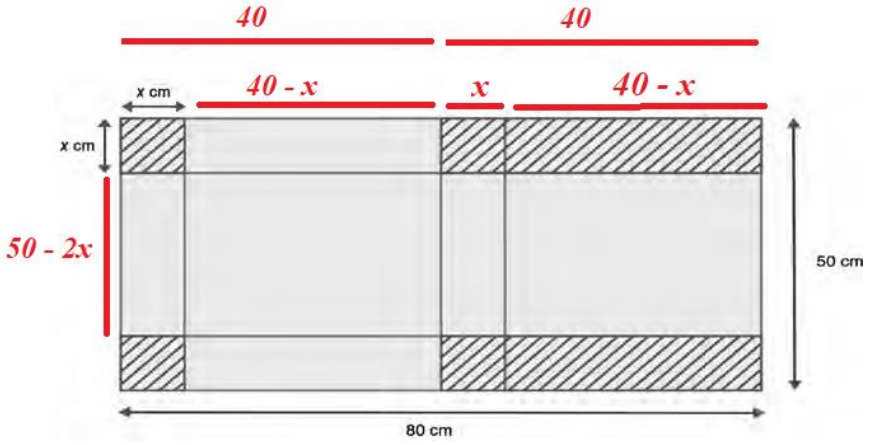
Aina construirá la caja a partir de un cartón rectangular de 80 cm × 50 cm. En la siguiente figura se muestra el desarrollo de la caja; las zonas rayadas son las partes que Aina recortará y retirará para poder montarla:



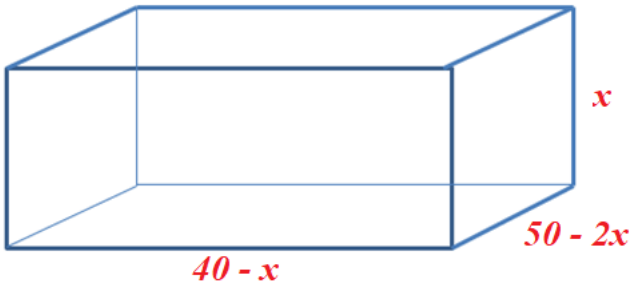
4.1. Compruebe que el volumen de la caja resultante es $V(x)=2x^3-130x^2+2000x$, donde x es la longitud del lado del cuadrado que hay que recortar de las esquinas para poder montarla.
[1 punto]

4.2. Calcule las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo. ¿Cuál es este volumen máximo?
[1.5 puntos]

4. 1. Añadimos más información al dibujo proporcionado para obtener las dimensiones de la caja una vez esté montada.



La caja quedaría como se indica.



El volumen de la caja es el producto de cada uno de los lados.

$$V(x)=x(50-2x)(40-x)=x\left(2000-50x-80x+2x^2\right)=2000x-130x^2+2x^3$$

4.2. Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada del volumen.

$$V(x)=2x^3-130x^2+2000x \Rightarrow V'(x)=6x^2-260x+2000$$

$$V'(x)=0 \Rightarrow 6x^2-260x+2000=0 \Rightarrow x=\frac{260\pm\sqrt{(-260)^2-4\cdot 6\cdot 2000}}{2\cdot 6}=$$

$$=\frac{260\pm 140}{12}=\begin{cases}\frac{260+140}{12}=\boxed{\frac{100}{3}=x}\\ \frac{260-140}{12}=\boxed{10=x}\end{cases}$$

Sustituimos $x=50$ y $x=\frac{100}{3}$ en la segunda derivada.

$$V'(x)=6x^2-260x+2000 \Rightarrow V''(x)=12x-260 \Rightarrow \begin{cases}V''(10)=12\cdot 10-260=-140<0\\ V''\left(\frac{100}{3}\right)=12\cdot\frac{100}{3}-260=140>0\end{cases}$$

Para $x=10$ la derivada de la función volumen se anula y la segunda derivada toma valor negativo. El volumen de la caja es máximo cortando un cuadrado de 10 cm.
El volumen máximo que se puede conseguir es $V(10)=2\cdot 10^3-130\cdot 10^2+2000\cdot 10=9000$ centímetros cúbicos.

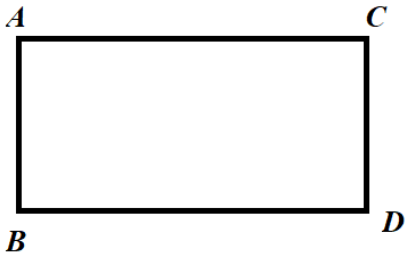
Ejercicio 4 OPCIÓN B

Aina quiere hacer un croquis en 3D de la caja utilizando un programa informático. Para empezar, sitúa un lado de la tapa desde el vértice A(1, 1, 1) hasta el vértice B(4, 1, 5), y el otro lado de la tapa desde el vértice A hasta el vértice C(1, 10, 1).

4.1. ¿Cuáles son las coordenadas del cuarto vértice de la tapa? Calcule las longitudes de los dos lados de la tapa. 1 punto]

4.2. Sabiendo que los otros cuatro vértices de la caja están situados en el plano $\pi: -4x+3z=24$, calcule las coordenadas de uno de ellos (cualquiera) y la altura de la caja. [1.5 puntos]

4.1. El vértice D se puede obtener sumando al punto B el vector $\overrightarrow{AC}$ o sumando al punto C el vector $\overrightarrow{AB}$.



$$\overrightarrow{AC}=(1,10,1)-(1,1,1)=(0,9,0)$$

$$D=B+\overrightarrow{AC}=(4,1,5)+(0,9,0)=(4,10,5)$$

El cuarto vértice de la tapa tiene coordenadas $D(4,10,5)$.

Los lados de la tapa son el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC}=(1,10,1)-(1,1,1)=(0,9,0)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{0^2+9^2+0^2}=9$$

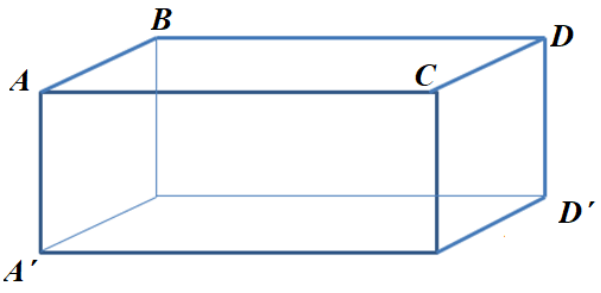
$$\overrightarrow{AB}=(4,1,5)-(1,1,1)=(3,0,4)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+0^2+4^2}=5$$

La tapa de la caja mide 5 y 9 unidades de longitud.

4.2. La altura de la caja es la distancia del plano a cualquiera de los puntos A, B, C o D.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:-4x+3z-24=0\\ A(1,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow d(A,\pi)=\frac{\left|-4\cdot1+3\cdot1-24\right|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=\frac{25}{5}=5$$

La altura de la caja es de 5 unidades de longitud.



El vértice A´ cumple que pertenece al plano $\pi: -4x+3z=24$ y que el vector $\overrightarrow{AA'}$ es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{matrix} A'(a,b,c) \\ A(1,1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = (a,b,c)-(1,1,1) = (a-1,b-1,c-1)$$

$$A'(a,b,c) \in \pi \Rightarrow -4a+3c=24 \Rightarrow 3c=24+4a \Rightarrow \boxed{c=8+\frac{4a}{3}}$$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AA'} = (a-1,b-1,c-1) \\ \overrightarrow{AC} = (0,9,0) \\ \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a-1,b-1,c-1)(0,9,0) = 0 \Rightarrow 9(b-1)=0 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AA'} = (a-1,b-1,c-1) \\ \overrightarrow{AB} = (3,0,4) \\ \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a-1,b-1,c-1)(3,0,4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(a-1)+4(c-1)=0 \Rightarrow 3a-3+4c-4=0 \Rightarrow 4c=7-3a \Rightarrow \boxed{c=\frac{7}{4}-\frac{3a}{4}}$$

Unimos los dos resultados obtenidos en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix} c=8+\frac{4a}{3} \\ c=\frac{7}{4}-\frac{3a}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 8+\frac{4a}{3}=\frac{7}{4}-\frac{3a}{4} \Rightarrow 96+16a=21-9a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25a=-75 \Rightarrow \boxed{a=-3} \Rightarrow \boxed{c=8+\frac{4(-3)}{3}=4}$$

El vértice A´ de la base tiene coordenadas $A'(-3,1,4)$.

PAU junio (serie 1) 2026

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2026

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 1

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas e indíquela en la portada.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar las páginas en blanco del final del cuaderno para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

[2,5 puntos en total]

Considere la siguiente función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}5e^{2x} & x\le 0\\ (x+m)^2+1 & 0<x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases},$$

Donde *m* es un parámetro real.

1.1. Determine los valores de *m* que hacen que la función *f(x)* sea continua en todo su dominio. Justifique la respuesta. [1 punto]

1.2. Haga un esbozo de la gráfica de $y=f(x)$ para el caso $m=-2$, y calcule el área delimitada por esta gráfica, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=3$. [1 punto]

1.3. Para $m=-2$, encuentre un punto donde la recta tangente a $y=f(x)$ sea paralela a $y=-2x$. Calcule la ecuación de esta recta tangente. [0.5 puntos]

Ejercicio 2

[2,5 puntos en total]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, el cual está formado por tres planos en el espacio y depende del parámetro real *m*:

$$\left.\begin{aligned}x+my+z&=4\\ x+3y+z&=5\\ mx+y+z&=4\end{aligned}\right\}$$

2.1. Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *m*. [1 punto]

2.2. Interprete geométricamente este sistema para todos los valores del parámetro *m* y resuélvalo, si es posible, para el caso *m* = 1. [1 punto]

2.3. Para $m=1$, ¿es posible añadir una cuarta ecuación de manera que el sistema resultante sea compatible determinado y tenga como solución $(x,y,z)=\left(3,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$? Razone la respuesta. [0,5 puntos]

Ejercicio 3

[2,5 puntos en total]

El Ayuntamiento de Canet de Mar ha conseguido 24 entradas gratuitas para un concierto de un grupo de rock catalán, y ha decidido sortearlas entre los vecinos interesados en asistir. Todos los vecinos del pueblo seguidores de este grupo se apuntan al sorteo, y solo al 16 % de ellos les toca una entrada. Del resto de seguidores del grupo, seis séptimas partes intentan comprar una entrada a través de la web, donde la probabilidad de conseguirla es del 25 %.

3.1. ¿Cuántas personas de este municipio tienen entrada para el concierto? [0,75 puntos]

3.2. Si se escoge al azar un vecino de Canet seguidor de este grupo de rock y no tiene entrada para el concierto, ¿cuál es la probabilidad de que haya intentado conseguirla vía web? [0,75 puntos]

3.3. El día del concierto, el equipo de sonido mide el nivel de decibelios generado por los gritos entusiastas del público a lo largo de los 5 minutos de duración de la canción más famosa del grupo; se puede aproximar por la siguiente función:

$$S(t)=-t^3+12t^2-30t+90,\ t\in[0,5],$$

donde t es el tiempo en minutos y S(t) los decibelios. Cuando se superan los 100 decibelios se considera que el público está muy entregado y se activan automáticamente unos efectos lumínicos especiales. ¿Se activarán en algún momento durante estos cinco minutos? Si la respuesta es afirmativa, calcule en qué minuto se activan, aproximado a las décimas. [1 punto]

Ejercicio 4

[2,5 puntos en total]

Escoja UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

Indique en la portada del examen la opción elegida.

OPCIÓN A

El alcalde de un pueblo de Catalunya encarga al arquitecto municipal el diseño de un parque infantil que se construirá en un terreno público. Para cumplir con la normativa vigente, en el parque tiene que haber dos espacios bien delimitados: uno para una boca de riego —el cual, según el arquitecto, debe tener forma circular—, y otro para una caseta donde guardar las herramientas de mantenimiento —el cual debe tener forma cuadrada—. Por motivos estéticos, el arquitecto quiere delimitar cada uno de estos dos espacios con una barandilla de forja. Sabiendo que las dos barandillas miden exactamente 10 m de longitud en total, ¿qué medida debe tener la barandilla de cada espacio para que la suma de las superficies de los dos espacios sea lo más pequeña posible? ¿Cuál es esta superficie mínima?

OPCIÓN B

Considere los puntos del espacio $P=(1,0,-1)$, $Q=(3,-2,0)$ y $R=(1,1,1)$.

4.1. Calcule la ecuación del plano que contiene los puntos P, Q y R.. [0,75 puntos]

4.2. Compruebe que el área del triángulo ΔPQR es $\frac{3\sqrt{5}}{2}\,u^2$. [0.75 puntos]

4.3. Determine las condiciones que deben cumplir las coordenadas de un cuarto punto $S=(x,y,z)$ para que P, Q, R y S formen un tetraedro de volumen 1. (El volumen del tetraedro formado por los puntos P, Q, R y S es: $volumen(PQRS)=\frac{área(\Delta PQR)\cdot altura}{3}$). [1 punto]

SOLUCIONES

Ejercicio 1
[2,5 puntos en total]
Considere la siguiente función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}5e^{2x} & x\le 0\\ (x+m)^2+1 & 0<x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases},$$

Donde *m* es un parámetro real.

1.1. Determine los valores de *m* que hacen que la función *f(x)* sea continua en todo su dominio. Justifique la respuesta. [1 punto]

1.2. Haga un esbozo de la gráfica de $y=f(x)$ para el caso $m=-2$, y calcule el área delimitada por esta gráfica, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=3$. [1 punto]

1.3. Para $m=-2$, encuentre un punto donde la recta tangente a $y=f(x)$ sea paralela a $y=-2x$. Calcule la ecuación de esta recta tangente. [0.5 puntos]

1.1. La función en $(-\infty,0)$ tiene la expresión $f(x)=5e^{2x}$ que es una expresión exponencial y es continua.

La función en $(0,2)$ tiene la expresión $f(x)=(x+m)^2+1$ que es una expresión polinómica y es continua.

La función en $(2,+\infty)$ tiene la expresión $f(x)=1$ que es una expresión constante y es continua.

La función para ser continua en su dominio debe serlo en los puntos de cambio de definición.

La función debe ser continua en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=5e^{2\cdot 0}=5\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 5e^{2x}=5\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+m)^2+1=(x+0)^2+1=m^2+1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\end{array}\right\}\Rightarrow m^2+1=5\Rightarrow m^2=4\Rightarrow \boxed{m=\sqrt{4}=\pm 2}$$

La función debe ser continua en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+m)^2+1=(2+m)^2+1\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 1=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\end{array}\right\}\Rightarrow (2+m)^2+1=1\Rightarrow (2+m)^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+m=0\Rightarrow \boxed{m=-2}$$

Para que la función sea continua en todo su dominio debe ser $m=-2$.

1.2. Para $m=-2$ la función queda $f(x)=\begin{cases}5e^{2x} & x\le 0\\ (x-2)^2+1 & 0<x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$. Sabemos que es continua.

Sabemos que su gráfica es un trozo de función exponencial, otro trozo de parábola y un trozo de recta horizontal. Hacemos una tabla y dibujamos su gráfica.

$x\le 0$

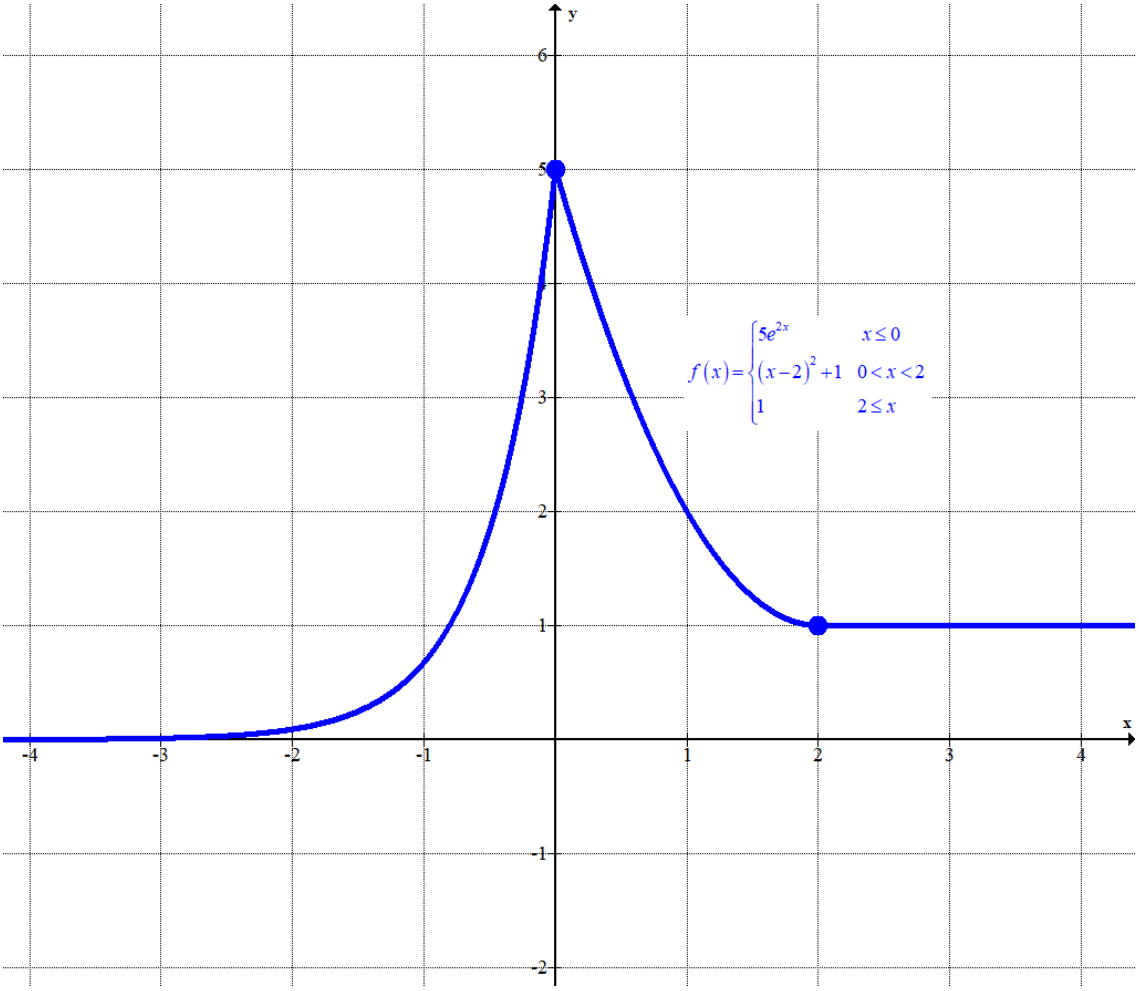
x	$f(x)=5e^{2x}$
-2	0.09
-1	0.68
0	5

$0<x<2$

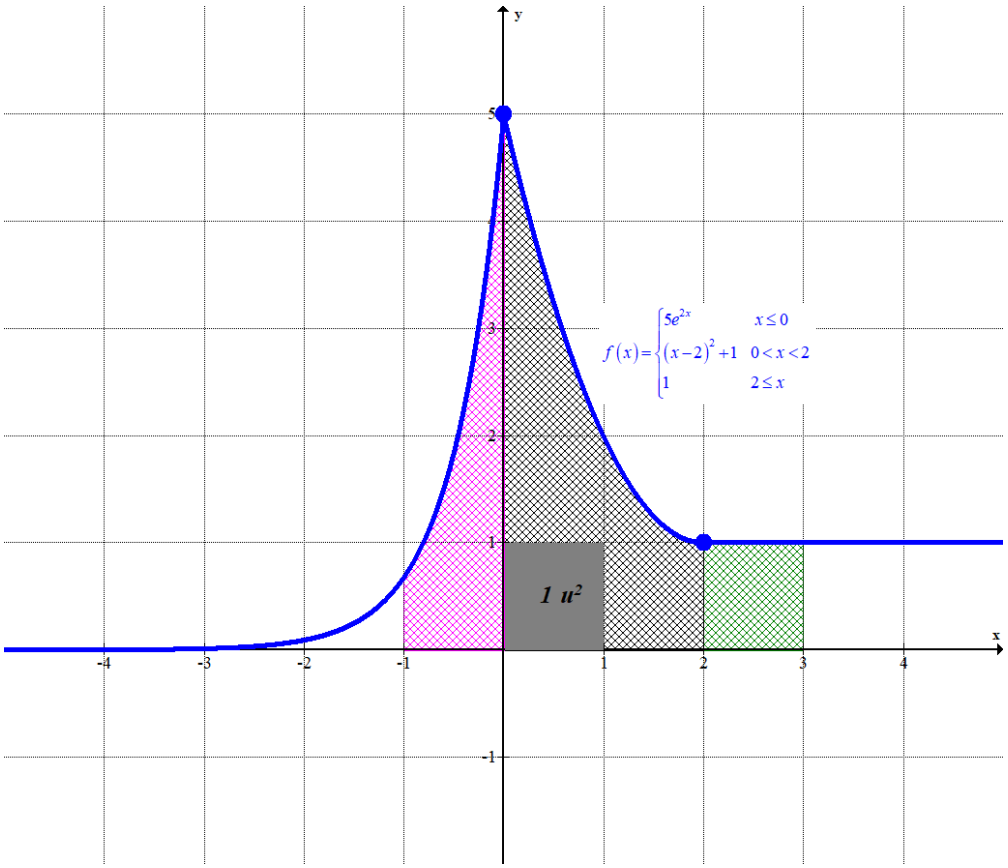
x	$f(x)=(x-2)^2+1$
0.5	3.25
1	2
1.5	1.25

$2\le x$

x	$f(x)=1$
2	1
3	1
4	1



Coloreamos la región del plano de la cual queremos hallar el área.



La región de color rosa tiene un área que se obtiene con la integral definida de –1 a 0 de $f(x)=5e^{2x}$.

$$Área 1=\int_{-1}^{0}5e^{2x}dx=\left[\frac{5}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{0}=\left[\frac{5}{2}e^{2\cdot 0}\right]-\left[\frac{5}{2}e^{2\cdot(-1)}\right]=\frac{5-5e^{-2}}{2}\simeq 2.16\ u^2$$

La región de color gris tiene un área que se obtiene con la integral definida de 0 a 2 de $f(x)=(x-2)^2+1$.

$$Área 2=\int_{0}^{2}(x-2)^2+1dx=\left[\frac{(x-2)^3}{3}+x\right]_{0}^{2}=$$

$$=\left[\frac{(2-2)^3}{3}+2\right]-\left[\frac{(0-2)^3}{3}+0\right]=2+\frac{8}{3}=\frac{14}{3}\simeq 4.6667\ u^2$$

La región de color verde es un cuadrado de lado 1 y su área vale 1 unidad cuadrada.
El área delimitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=3$ es la suma de las tres áreas obtenidas: $\frac{5-5e^{-2}}{2}+\frac{14}{3}+1=\frac{15-15e^{-2}+28+6}{6}=\frac{49-15e^{-2}}{6}\simeq 7.83$ unidades cuadradas.

1.3. La recta $y=-2x$ tiene pendiente –2. Para que la recta tangente sea paralela a $y=-2x$ tiene que tener pendiente –2. Para ello la derivada de la función tiene que valer –2 → $f'(x)=-2$

$$f(x)=\begin{cases}5e^{2x} & x\le 0\\ (x-2)^2+1 & 0<x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}10e^{2x} & x<0\\ 2(x-2) & 0<x<2\\ 0 & 2<x\end{cases}$$

$$f'(x)=-2\Rightarrow\begin{cases}10e^{2x}=-2\to\{e^{2x}>0\}\to\text{¡Imposible!} & x<0\\ 2(x-2)=-2\to x-2=-1\to \boxed{x=1}\in(0,2) & \\ 0=-2\to\text{¡Imposible!} & 2<x\end{cases}$$

La recta tangente a $y=f(x)$ es paralela a $y=-2x$ en $x=1$.

Hallamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}f(1)=(1-2)^2+1=2\\ f'(1)=-2\\ y-f(1)=f'(1)(x-1)\end{array}\right\}\Rightarrow y-2=-2(x-1)\Rightarrow y-2=-2x+2\Rightarrow \boxed{y=-2x+4}$$

Ejercicio 2

[2,5 puntos en total]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, el cual está formado por tres planos en el espacio y depende del parámetro real *m*:

$$\left.\begin{array}{r} x+my+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ mx+y+z=4 \end{array}\right\}$$

2.1. Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *m*. [1 punto]

2.2. Interprete geométricamente este sistema para todos los valores del parámetro *m* y resuélvalo, si es posible, para el caso *m* = 1. [1 punto]

2.3. Para $m=1$, ¿es posible añadir una cuarta ecuación de manera que el sistema resultante sea compatible determinado y tenga como solución $(x,y,z)=\left(3,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$? Razone la respuesta.

[0,5 puntos]

2.1. Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}=3+m^2+1-3m-m-1=m^2-4m+3$$

$$|A|=0\Rightarrow m^2-4m+3=0\Rightarrow m=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{4\pm2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=\boxed{3=m}\\ \frac{4-2}{2}=\boxed{1=m}\end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m\neq1$ **y** $m\neq3$**.**

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\1&3&1&5\\1&1&1&4\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{a}}-\text{Fila } 1^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}1&1&1&4\\-1&-1&-1&-4\\\hline 0&0&0&0\end{array}\rightarrow\text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{\text{a}}-\text{Fila } 1^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}1&3&1&5\\-1&-1&-1&-4\\\hline 0&2&0&1\end{array}\rightarrow\text{Nueva Fila } 2^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{1&1&1}^{A}&4\\0&2&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}^{A/B}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. $m=3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1&3&1&4\\1&3&1&5\\3&1&1&4\end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&3&1&4\\1&3&1&5\\3&1&1&4\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{a}}-3\cdot\text{Fila } 1^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}3&1&1&4\\-3&-9&-3&-12\\\hline 0&-8&-2&-8\end{array}\rightarrow\text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{\text{a}}-\text{Fila } 1^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}1&3&1&5\\-1&-3&-1&-4\\\hline 0&0&0&1\end{array}\rightarrow\text{Nueva Fila } 2^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3&1&4\\0&0&0&1\\0&-8&-2&-8\end{pmatrix}\Rightarrow$$

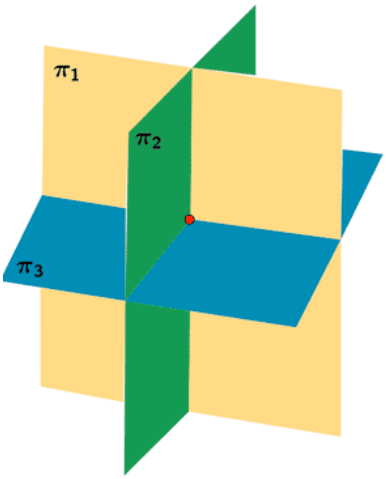
$$\Rightarrow\left\{\text{Fila } 3^{\text{a}}\leftrightarrow\text{Fila } 2^{\text{a}}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{1&3&1}^{A}&4\\0&-8&-2&-8\\\underbrace{0&0&0}_{A}&1\end{pmatrix}^{A/B}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

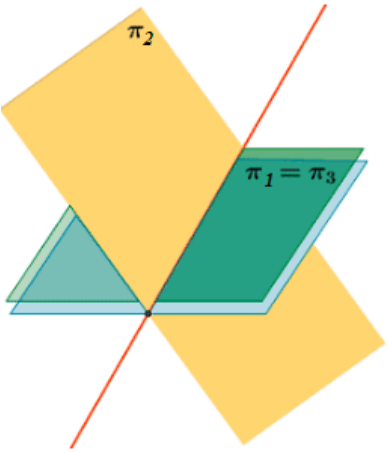
Resumiendo: Para $m\neq 1$ y $m\neq 3$ el sistema es **compatible determinado**, para $m=1$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $m=3$ el sistema es **incompatible.**

2.2. Considerando cada ecuación como la ecuación de un plano podemos interpretar lo obtenido en el apartado anterior como:

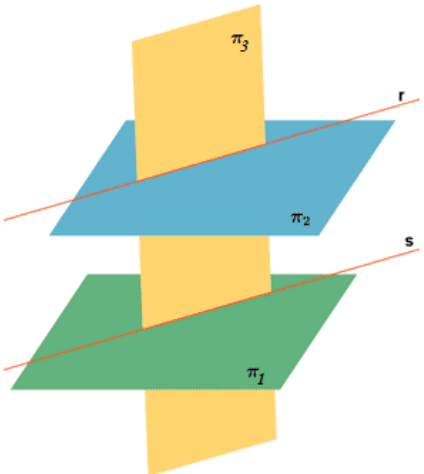
Para $m \neq 1$ y $m \neq 3$ los tres planos coinciden en un punto.



Para $m = 1$ los tres planos coinciden en una recta: $\left.\begin{matrix} x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+z=4 \end{matrix}\right\}$, el primer y tercer plano son el mismo.



Para $m = 3$ los planos no coinciden en ningún punto: $\left.\begin{matrix} x+3y+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ 3x+y+z=4 \end{matrix}\right\}$, el primer y segundo plano son paralelos, el tercer plano corta a los otros dos.



Resolvemos el sistema para $m=1$. Por lo visto en el apartado anterior sabemos que el sistema es compatible indeterminado (CASO 2). Lo resolvemos partiendo de la matriz triangular equivalente obtenida en el apartado a).

$$\left(\overbrace{\begin{array}{cccc}1&1&1&4\\0&2&0&1\\0&0&0&0\end{array}}^{A/B}\right)\Rightarrow\left.\begin{array}{rl}x+y+z=4\\2y\quad=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=4\\\boxed{y=\frac{1}{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow x+\frac{1}{2}+z=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{7}{2}-z\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{7}{2}-\lambda\\y=\frac{1}{2}\\z=\lambda\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases}x=\frac{7}{2}-\lambda\\y=\frac{1}{2}\\z=\lambda\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$.

2.3. Para $m=1$ el sistema que queda es $\left.\begin{array}{r}x+y+z=4\\x+3y+z=5\\x+y+z=4\end{array}\right\}$ que tiene como sistema equivalente $\left.\begin{array}{rl}x+y+z=4\\2y\quad=1\end{array}\right\}$. Hemos obtenido su solución $(x,y,z)=\left(\frac{7}{2}-\lambda,\frac{1}{2},\lambda\right)$, siendo $\lambda\in\mathbb{R}$.

Si queremos que tenga como solución $(x,y,z)=\left(3,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ añadimos la ecuación $z=\frac{1}{2}$.

El sistema quedaría $\left.\begin{array}{r}x+y+z=4\\x+3y+z=5\\x+y+z=4\\z=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ teniendo como solución $(x,y,z)=\left(3,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Este nuevo sistema es compatible determinado pues su sistema equivalente es $\left.\begin{array}{rl}x+y+z=4\\2y\quad=1\\z=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$

que tiene como matriz ampliada $\left(\overbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ \underbrace{0 & 0 & 1}_{A} & 1/2\end{matrix}}^{A/B}\right)$ siendo el rango de A y A/B el mismo que el número de ecuaciones (3), por lo que el sistema es compatible determinado.

Ejercicio 3

[2,5 puntos en total]

El Ayuntamiento de Canet de Mar ha conseguido 24 entradas gratuitas para un concierto de un grupo de rock catalán, y ha decidido sortearlas entre los vecinos interesados en asistir. Todos los vecinos del pueblo seguidores de este grupo se apuntan al sorteo, y solo al 16 % de ellos les toca una entrada. Del resto de seguidores del grupo, seis séptimas partes intentan comprar una entrada a través de la web, donde la probabilidad de conseguirla es del 25 %.

3.1. ¿Cuántas personas de este municipio tienen entrada para el concierto? [0,75 puntos]

3.2. Si se escoge al azar un vecino de Canet seguidor de este grupo de rock y no tiene entrada para el concierto, ¿cuál es la probabilidad de que haya intentado conseguirla vía web? [0,75 puntos]

3.3. El día del concierto, el equipo de sonido mide el nivel de decibelios generado por los gritos entusiastas del público a lo largo de los 5 minutos de duración de la canción más famosa del grupo; se puede aproximar por la siguiente función:

$$S(t) = -t^3 + 12t^2 - 30t + 90,\ t \in [0,5],$$

donde t es el tiempo en minutos y S(t) los decibelios. Cuando se superan los 100 decibelios se considera que el público está muy entregado y se activan automáticamente unos efectos lumínicos especiales. ¿Se activarán en algún momento durante estos cinco minutos? Si la respuesta es afirmativa, calcule en qué minuto se activan, aproximado a las décimas. [1 punto]

3.1. Las 24 entradas gratuitas se reparten entre los seguidores del grupo en Canet de Mar.

Estas entradas la consiguen el 16% de los seguidores del grupo. Hacemos una regla de tres para obtener el número de seguidores del grupo que viven en Canet de Mar.

- $\left.\begin{matrix} x \longrightarrow 100\% \\ 24 \longrightarrow 16\% \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{24 \cdot 100}{16} = 150$

En el pueblo hay 150 seguidores del grupo y 150 – 24 = 126 se han quedado sin entrada.

Sabemos que seis séptimas partes de los que no tienen entrada (126) intentan comprar una entrada a través de la web → $\frac{6}{7} \cdot 126 = 108$ seguidores intentan comprar entrada en la web.

El 25% de los 108 consiguen comprar entrada por internet → $0.25 \cdot 108 = 27$ compran entrada por internet.

El total de seguidores que tienen entrada para el concierto es 24 + 27 = 51 seguidores.

3.2. De los 150 seguidores del grupo hay 150 – 51 = 99 que no tienen entrada (nº casos posibles). Son 108 – 27 = 81 los seguidores que intentaron comprar entrada por internet y no lo consiguieron (casos favorables).

Aplicando la regla de Laplace la probabilidad pedida vale $\frac{81}{99} = \frac{9}{11} \simeq 0.8182$ □

3.3. Averiguamos si la función alcanza el valor de 100.

$$S(t) = 100 \Rightarrow -t^3 + 12t^2 - 30t + 90 = 100 \Rightarrow -t^3 + 12t^2 - 30t - 10 = 0$$

Nos planteamos si la función $D(t) = -t^3 + 12t^2 - 30t - 10$ se anula para $t \in [0,5]$.

La función es continua (polinómica) en el intervalo $[0,5]$ y

$$D(0)=-0^3+12\cdot 0^2-30\cdot 0-10=-10<0$$
$$D(5)=-5^3+12\cdot 5^2-30\cdot 5-10=15>0$$

Como la función es continua en $[0,5]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo aplicando el teorema de Bolzano podemos asegurar que existe $c\in(0,5)$ tal que $D(c)=0$. Es decir, existe un momento entre los 5 primeros minutos donde se alcanzan los 100 decibelios.
Para encontrar de forma aproximada cuando se alcanzan los 100 decibelios vamos valorando la función.

$$\left.\begin{array}{l} S(0)=-0^3+12\cdot 0^2-30\cdot 0+90=90 \\ S(2)=-2^3+12\cdot 2^2-30\cdot 2+90=70 \\ S(4)=-4^3+12\cdot 4^2-30\cdot 4+90=98 \\ S(5)=-5^3+12\cdot 5^2-30\cdot 5+90=115 \end{array}\right\}\Rightarrow c\in(4,5)$$

Volvemos a valorar la función entre 4 y 5.

$$\left.\begin{array}{l} S(4)=-4^3+12\cdot 4^2-30\cdot 4+90=98 \\ S(4.5)=-4.5^3+12\cdot 4.5^2-30\cdot 4.5+90=106.875 \\ S(5)=-5^3+12\cdot 5^2-30\cdot 5+90=115 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} S(4)=-4^3+12\cdot 4^2-30\cdot 4+90=98 \\ \Rightarrow S(4.2)=-4.2^3+12\cdot 4.2^2-30\cdot 4.2+90=101.592 \\ S(4.5)=-4.5^3+12\cdot 4.5^2-30\cdot 4.5+90=106.875 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

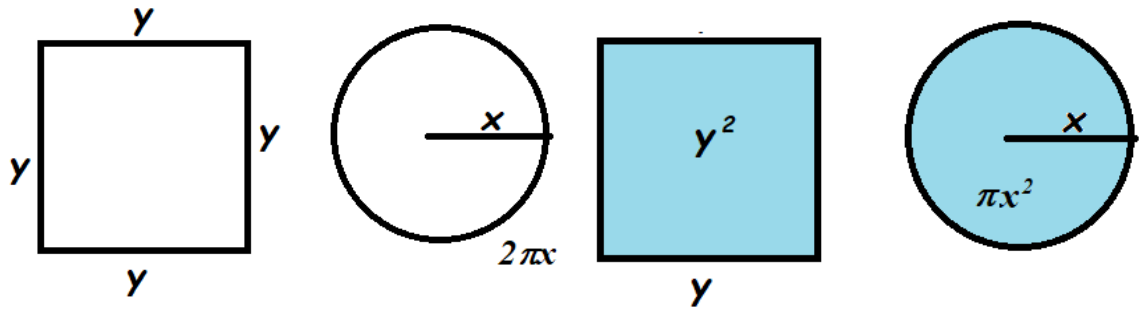
$$\left.\begin{array}{l} S(4)=-4^3+12\cdot 4^2-30\cdot 4+90=98 \\ \Rightarrow S(4.1)=-4.1^3+12\cdot 4.^2-30\cdot 4.1+90=99.799 \\ S(4.2)=-4.2^3+12\cdot 4.2^2-30\cdot 4.2+90=101.592 \end{array}\right\}\Rightarrow c\in(4.1,4.2)$$

El momento en que se alcanzan los 100 decibelios está entre los 4.1 y los 4.2 minutos.

Ejercicio 4 OPCIÓN A

El alcalde de un pueblo de Catalunya encarga al arquitecto municipal el diseño de un parque infantil que se construirá en un terreno público. Para cumplir con la normativa vigente, en el parque tiene que haber dos espacios bien delimitados: uno para una boca de riego —el cual, según el arquitecto, debe tener forma circular—, y otro para una caseta donde guardar las herramientas de mantenimiento —el cual debe tener forma cuadrada—. Por motivos estéticos, el arquitecto quiere delimitar cada uno de estos dos espacios con una barandilla de forja. Sabiendo que las dos barandillas miden exactamente 10 m de longitud en total, ¿qué medida debe tener la barandilla de cada espacio para que la suma de las superficies de los dos espacios sea lo más pequeña posible? ¿Cuál es esta superficie mínima?

Llamamos "x" al radio de la circunferencia e "y" al lado del cuadrado.



El perímetro de la circunferencia es $2\pi x$ y la del cuadrado es 4y.
La suma de los dos perímetros debe ser 10.

$$2\pi x+4y=10\rightarrow \pi x+2y=5\rightarrow 2y=5-\pi x\rightarrow y=\frac{5}{2}-\frac{\pi}{2}x$$

La superficie del círculo es πx^2 y la del cuadrado es y^2.
La suma de ambas superficies tiene la expresión $S(x,y)=\pi x^2+y^2$.

$$\left.\begin{array}{l} S(x,y)=\pi x^2+y^2 \\ y=\dfrac{5}{2}-\dfrac{\pi}{2}x \end{array}\right\}\Rightarrow S(x)=\pi x^2+\left(\frac{5}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(x)=\pi x^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2x^2-2\frac{5}{2}\cdot\frac{\pi}{2}x=\pi x^2+\frac{25}{4}+\frac{\pi^2}{4}x^2-\frac{5\pi}{2}x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(x)=\frac{4\pi x^2+25+\pi^2x^2-10\pi x}{4}=\frac{\left(4\pi+\pi^2\right)x^2-10\pi x+25}{4}$$

$$\boxed{S(x)=\frac{\pi(4+\pi)x^2-10\pi x+25}{4}}$$

La suma de las superficies de cuadrado y círculo viene dada por la función:

$$S(x)=\frac{\pi(4+\pi)x^2-10\pi x+25}{4}$$

Derivamos esta función y averiguamos cuando se anula.

$$S(x)=\frac{\pi(4+\pi)x^2-10\pi x+25}{4}\Rightarrow S'(x)=\frac{2\pi(4+\pi)x-10\pi}{4}=\frac{\pi(4+\pi)x-5\pi}{2}$$

$$S'(x)=0\Rightarrow\frac{\pi(4+\pi)x-5\pi}{2}=0\Rightarrow\pi(4+\pi)x-5\pi=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\pi(4+\pi)x=5\pi\Rightarrow\boxed{x=\frac{5\pi}{\pi(4+\pi)}=\frac{5}{4+\pi}}$$

La función suma de superficies tiene un punto crítico en $x=\frac{5}{4+\pi}$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$S'(x)=\frac{\pi(4+\pi)x-5\pi}{2}\Rightarrow S''(x)=\frac{\pi(4+\pi)}{2}\Rightarrow\boxed{S''\left(\frac{5}{4+\pi}\right)=\frac{\pi(4+\pi)}{2}>0}$$

Para $x=\frac{5}{4+\pi}$ se anula la primera derivada y la segunda derivada toma valor positivo. La función tiene un mínimo relativo en $x=\frac{5}{4+\pi}\simeq 0.7\ metros$.

Para este valor determinamos el valor de "y".

$$y=\frac{5}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{5}{4+\pi}=\frac{5}{2}\left(1-\frac{\pi}{4+\pi}\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{4+\pi-\pi}{4+\pi}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{4+\pi}=\frac{10}{4+\pi}\simeq 1.4\ metros$$

Para este valor hallamos la superficie total.

$$S\left(\frac{5}{4+\pi}\right)=\frac{\pi(4+\pi)\left(\frac{5}{4+\pi}\right)^2-10\pi\left(\frac{5}{4+\pi}\right)+25}{4}=\frac{\frac{25\pi}{4+\pi}-\frac{50\pi}{4+\pi}+25}{4}=$$

$$=\frac{25-\frac{25\pi}{4+\pi}}{4}=\frac{\frac{100+25\pi-25\pi}{4+\pi}}{4}=\frac{\frac{100}{4+\pi}}{4}=\frac{100}{4(4+\pi)}=\frac{25}{4+\pi}\simeq 3.5\ m^2$$

Para que la suma de las superficies de los dos espacios sea lo más pequeña posible debe ser la circunferencia de radio $x=\frac{5}{4+\pi}$ y el cuadrado de lado $\frac{10}{4+\pi}$.

La barandilla de la circunferencia mide $2\pi\cdot\frac{5}{4+\pi}=\frac{10\pi}{4+\pi}\simeq 4.4\ metros$ y la barandilla del cuadrado mide $4\cdot\frac{10}{4+\pi}=\frac{40}{4+\pi}\simeq 5.6\ metros$.

Ejercicio 4 OPCIÓN B

Considere los puntos del espacio $P=(1,0,-1)$, $Q=(3,-2,0)$ y $R=(1,1,1)$.

4.1. Calcule la ecuación del plano que contiene los puntos P, Q y R. [0,75 puntos]

4.2. Compruebe que el área del triángulo ΔPQR es $\frac{3\sqrt{5}}{2}\,u^2$. [0.75 puntos]

4.3. Determine las condiciones que deben cumplir las coordenadas de un cuarto punto $S=(x,y,z)$ para que P, Q, R y S formen un tetraedro de volumen 1. (El volumen del tetraedro formado por los puntos P, Q, R y S es: $volumen(PQRS)=\frac{área(\Delta PQR)\cdot altura}{3}$). [1 punto]

4.1. Hallamos el plano π que contiene los tres puntos.

$$\left.\begin{array}{l}P=(1,0,-1)\in\pi\\Q=(3,-2,0)\in\pi\\R=(1,1,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P=(1,0,-1)\in\pi\\\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(3,-2,0)-(1,0,-1)=(2,-2,1)\\\vec{v}=\overrightarrow{PR}=(1,1,1)-(1,0,-1)=(0,1,2)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix}x-1 & y & z+1\\ 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow -4(x-1)+0+2(z+1)-0-4y-(x-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x+4+2z+2-4y-x+1=0\Rightarrow\boxed{\pi:-5x-4y+2z+7=0}$$

El plano que contiene los puntos P, Q y R tiene ecuación $\pi:-5x-4y+2z+7=0$.

4.2. El área del triángulo ΔPQR es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}==(2,-2,1)\\\overrightarrow{PR}=(0,1,2)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-4i+0+2k-0-4j-i=$$

$$=-5i-4j+2k=(-5,-4,2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=\sqrt{(-5)^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{45}=\boxed{3\sqrt{5}}$$

El área del triángulo ΔPQR vale $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ unidades cuadradas.

4.3. Utilizamos la fórmula proporcionada.

$$volumen(PQRS)=\frac{área(\Delta PQR)\cdot altura}{3}\Rightarrow 1=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot altura}{3}\Rightarrow 3=\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot altura\Rightarrow$$

$$\Rightarrow altura=\frac{3}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}=\frac{6}{3\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Si el triángulo PQR es la base del tetraedro la altura es la distancia del punto S al plano **π** definido por los puntos P, Q y R. Buscamos el punto S que está a una distancia del plano π con valor $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

.

$$\left.\begin{array}{l} D(S,\pi)=\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ S(x,y,z) \\ \pi: -5x-4y+2z+7=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|-5x-4y+2z+7|}{\sqrt{(-5)^2+(-4)^2+2^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \frac{|-5x-4y+2z+7|}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |-5x-4y+2z+7|=\frac{2\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}}{5} \Rightarrow |-5x-4y+2z+7|=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5x-4y+2z+7=6 \rightarrow \boxed{5x+4y-2z-1=0} \\ o \\ -5x-4y+2z+7=-6 \rightarrow \boxed{5x+4y-2z-13=0} \end{cases}$$

Las coordenadas del punto S deben cumplir la igualdad $5x+4y-2z-1=0$ o bien $5x+4y-2z-13=0$.
Dicho de otra forma, el punto S debe pertenecer a uno de estos dos planos paralelos al plano π: $5x+4y-2z-1=0$ o bien $5x+4y-2z-13=0$.

PAU junio (serie 5) 2026

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2026

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 5

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas e indíquela en la portada.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar las páginas en blanco del final del cuaderno para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

[2,5 puntos en total]

Considere la parábola $y=f(x)$, con $f(x)=-x^2+5x$ y la hipérbola $y=g(x)$ con $g(x)=8-\frac{8}{x+1}$.

1.1. ¿En cuántos puntos se cortan las gráficas de estas dos funciones? Calcúlelos todos. [0.75 puntos]

1.2. Calcule el área de la región situada entre las dos curvas desde $x=1$ hasta $x=3$. [1 punto]

1.3. Compruebe que *f(x)* tiene sus raíces en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=5$, y que la ordenada del vértice de la parábola $y=f(x)$ es $y=6.25$. Justifique que $y=f(x)$ es la única parábola que existe con estas dos propiedades. [0.75 puntos]

Ejercicio 2

[2,5 puntos en total]

Considere las matrices $M=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde k es un número real cualquiera.

2.1. Calcule los valores de *k* para los cuales MN es invertible. [0.75 puntos]

2.2. Calcule los valores de *k* para los cuales NM es invertible. [0.75 puntos]

2.3. Estudie para qué valores reales de *m*, *n* y *k* el sistema $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ es compatible indeterminado. [1 punto]

Ejercicio 3

[2,5 puntos en total]

En una ciudad se ha estudiado la relación entre los hábitos de lectura y la práctica de deporte entre el alumnado de bachillerato. Para ello, se han formulado las dos preguntas siguientes al alumnado de esta etapa educativa: «¿Lees como mínimo dos libros al mes?» y «¿Practicas algún deporte al menos cuatro horas por semana?». De los resultados de la encuesta, se desprende que el 60 % leen como mínimo dos libros al mes, de los cuales el 70 % practican algún deporte un mínimo de cuatro horas por semana. También se observa que, de entre los que no leen un mínimo de dos libros al mes, el 50 % hacen menos de cuatro horas semanales de deporte. Si se elige al azar un alumno/a de bachillerato de esta ciudad:

3.1. ¿Cuál es la probabilidad de que haga deporte al menos cuatro horas semanales? [0,75 puntos]

3.2. Si se sabe que este alumno/a hace deporte menos de cuatro horas semanales, ¿cuál es la probabilidad de que lea al menos dos libros al mes? [0,75 puntos]

Alba es una estudiante de bachillerato que ha ido anotando durante todo el curso cuántas horas dedicaba a la semana a leer y cuántas a hacer deporte. Para cada semana tiene apuntado un número real x que corresponde a la cantidad de horas de lectura y que oscila entre 1 y 6, y un número real y que corresponde a la cantidad de horas de práctica deportiva. Ha observado que la relación $y = 7 - x + \ln(2x-1)$ se ajusta bastante bien a los datos que ha anotado.

3.3. Calcule, según este modelo, cuál es el máximo y el mínimo de horas por semana que Alba ha dedicado a practicar deporte. [1 punto]

Ejercicio 4

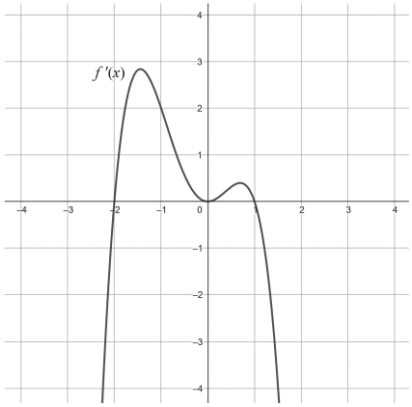
[2,5 puntos en total]

Escoja UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

Indique en la portada del examen la opción elegida.

OPCIÓN A

De una función *f(x)*, se sabe que pasa por el punto (–1, –1) y que la gráfica de su función derivada es la siguiente:



4.1. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f(x)* en el punto (–1, –1). [1 punto]

4.2. Estudie si *f(x)* tiene puntos críticos (puntos donde $f'(x) = 0$) y, en caso de tenerlos, determine sus abscisas y clasifíquelos según sean máximos, mínimos o puntos de inflexión de *f(x)*. [1 punto]

4.3. Sabiendo, además, que $f(0) = -0.2$, calcule el área entre la gráfica de $f'(x)$ y el eje de abscisas, desde $x = -1$ hasta $x = 0$. [0.5 puntos]

OPCIÓN B

En una industria se usan brazos robóticos con sensores para medir con precisión determinadas piezas metálicas y comprobar si tienen irregularidades. Las piezas se colocan sobre la superficie determinada por el plano $\pi:(x,y,z)=(6,1,1)+\lambda(1,1,0)+\mu(0,0,1)$ y, por encima de ella, un brazo robótico desplaza un sensor desde el punto $A=(1,2,3)$ hasta el punto $B=(5,3,7)$ en línea recta (las unidades de los tres ejes de coordenadas están expresadas en centímetros).

4.1. ¿Qué distancia ha recorrido el sensor? [0,5 puntos]

4.2. Al acabar el movimiento, ¿a qué distancia de la superficie se encuentra el sensor? [1 punto]

4.3. Si el sensor siguiera moviéndose en la misma línea recta y en el mismo sentido, ¿en qué punto chocaría con la superficie? [1 punto]

SOLUCIONES

Ejercicio 1
[2,5 puntos en total]

Considere la parábola $y=f(x)$, con $f(x)=-x^2+5x$ y la hipérbola $y=g(x)$ con $g(x)=8-\frac{8}{x+1}$.

1.1. ¿En cuántos puntos se cortan las gráficas de estas dos funciones? Calcúlelos todos. [0.75 puntos]

1.2. Calcule el área de la región situada entre las dos curvas desde $x=1$ hasta $x=3$. [1 punto]

1.3. Compruebe que *f(x)* tiene sus raíces en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=5$, y que la ordenada del vértice de la parábola $y=f(x)$ es $y=6.25$. Justifique que $y=f(x)$ es la única parábola que existe con estas dos propiedades. [0.75 puntos]

1.1. Hallamos los puntos de corte de las dos gráficas.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow 8-\frac{8}{x+1}=-x^2+5x\Rightarrow 8(x+1)-8=(x+1)(-x^2+5x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x+\cancel{8}\cancel{-8}=-x^3+5x^2-x^2+5x\Rightarrow x^3-4x^2+3x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2-4x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ x^2-4x+3=0\rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=\boxed{3=x}\\ \frac{4-2}{2}=\boxed{1=x}\end{cases}\end{cases}$$

$$f(0)=-0^2+5\cdot 0=0\Rightarrow A(0,0)$$

$$f(1)=-1^2+5\cdot 1=4\Rightarrow B(1,4)$$

$$f(3)=-3^2+5\cdot 3=6\Rightarrow C(3,6)$$

Las gráficas se cortan en tres puntos: A(0, 0), B(1, 4) y C(3, 6).

1.2. $x=1$ y $x=3$ son dos puntos de corte consecutivos de las dos gráficas. El área de la región situada entre las dos curvas desde $x=1$ hasta $x=3$ es el valor absoluto de la integral definida de 1 a 3 de la diferencia de las dos funciones. Como $g(2)=8-\frac{8}{2+1}=\frac{16}{3}\simeq 5.33$ y $f(2)=-2^2+5\cdot 2=6$ tomamos la diferencia $f(x)-g(x)$.

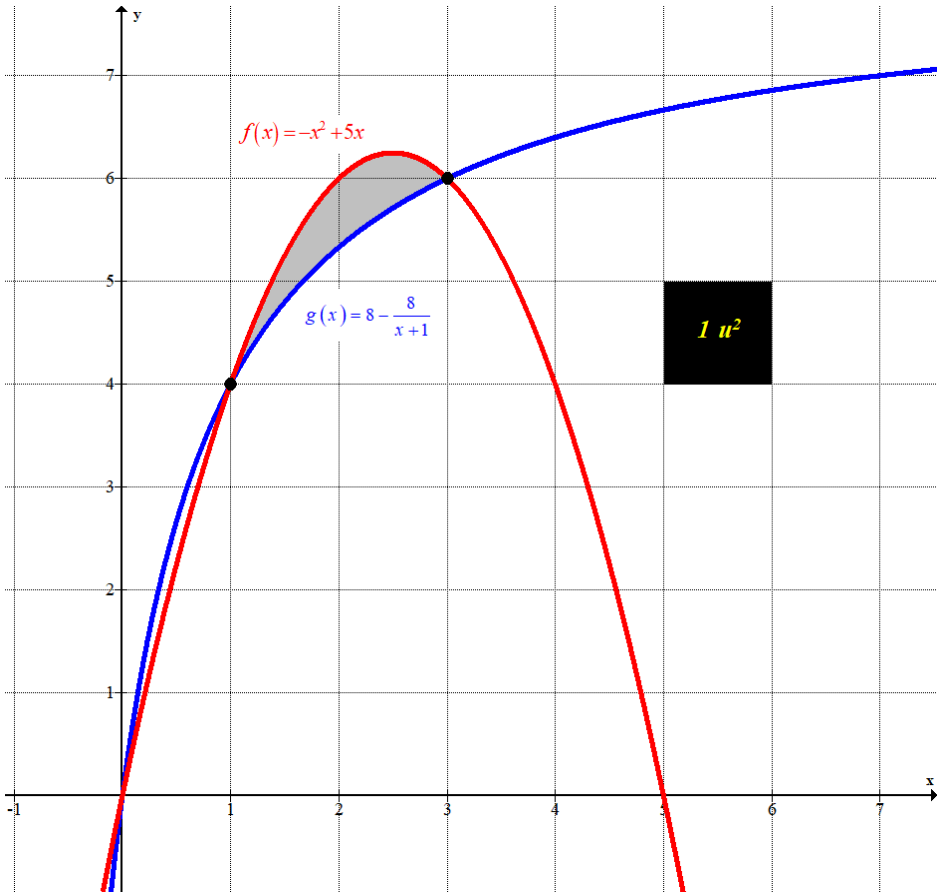
$$\int_1^3 f(x)-g(x)\,dx=\int_1^3 -x^2+5x-\left(8-\frac{8}{x+1}\right)dx=\int_1^3 -x^2+5x-8+\frac{8}{x+1}\,dx=$$

$$=\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-8x+8\ln(x+1)\right]_1^3=\left[\frac{-3^3}{3}+\frac{5\cdot 3^2}{2}-8\cdot 3+8\ln(3+1)\right]-$$

$$-\left[\frac{-1^3}{3}+\frac{5\cdot 1^2}{2}-8\cdot 1+8\ln(1+1)\right]=-9+\frac{45}{2}-24+8\ln 4+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+8-8\ln 2=$$

$$=-25+\frac{1}{3}+\frac{40}{2}+8\ln 2^2-8\ln 2=\frac{1}{3}-5+16\ln 2-8\ln 2=\boxed{\frac{-14}{3}+8\ln 2\simeq 0.8785\ u^2}$$

El área de la región situada entre las dos curvas desde $x=1$ hasta $x=3$ tiene un valor de $\frac{-14}{3}+8\ln 2\simeq 0.8785$ unidades cuadradas.



1.3. Hallamos las raíces de la parábola.

$$f(x)=0\Rightarrow -x^2+5x=0\Rightarrow -x(x-5)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ x-5=0\rightarrow\boxed{x=5}\end{cases}$$

La parábola *f(x)* tiene sus raíces en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=5$.

Como $f(0)=f(5)=0$ el vértice de la parábola está situado en el punto medio $x=\frac{5-0}{2}=2.5$.

Para la abscisa $x=2.5$ su ordenada es $f(2.5)=-2.5^2+5\cdot 2.5=6.25$.

La ordenada del vértice de la parábola es $y = 6.25$.

Justificamos que la función $f(x) = -x^2 + 5x$ es la única parábola que cumple lo pedido.

Que una parábola tenga las dos raíces en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 5$ significa que la parábola debe tener ecuación $h(x) = m(x-0)(x-5) = m(x^2 - 5x)$.

Pero además sabemos que el vértice de la parábola está en el punto de abscisa intermedio entre 0 y 5, por lo que el vértice de la parábola está situado en $x = 2.5$. Si debe tener ordenada $y = 6.25$ entonces debe ser $h(2.5) = 6.25$.

$$\left.\begin{array}{l} h(2.5) = 6.25 \\ h(x) = m(x^2 - 5x) \end{array}\right\} \Rightarrow 6.25 = m(2.5^2 - 5\cdot 2.5) \Rightarrow 6.25 = m\cdot(-6.25) \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

La parábola que cumple todo es $h(x) = -1(x^2 - 5x) = -x^2 + 5x = f(x)$.

La parábola que cumple todo lo pedido es única.

Ejercicio 2
[2,5 puntos en total]

Considere las matrices $M=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ k-1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}3 & 1\\ k-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ donde k es un número real cualquiera.

2.1. Calcule los valores de k para los cuales MN es invertible. [0.75 puntos]
2.2. Calcule los valores de k para los cuales NM es invertible. [0.75 puntos]
2.3. Estudie para qué valores reales de m, n y k el sistema $M\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m\\ n\end{pmatrix}$ es compatible indeterminado. [1 punto]

2.1. Obtenemos la matriz MN.

$$MN=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ k-1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ k-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+3k-3+0 & 3+0+0\\ 3k-3-k+1+0 & k-1+0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3k+6 & 3\\ 2k-2 & k-3\end{pmatrix}$$

La matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|MN|=\begin{vmatrix}3k+6 & 3\\ 2k-2 & k-3\end{vmatrix}=(3k+6)(k-3)-3(2k-2)=$$

$$=3k^2-9k+\cancel{6k}-18-\cancel{6k}+6=3k^2-9k-12$$

$$|MN|=0\Rightarrow 3k^2-9k-12=0\Rightarrow k^2-3k-4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(-4)}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{3+5}{2}=\boxed{4=k}\\ \frac{3-5}{2}=\boxed{-1=k}\end{cases}$$

La matriz MN es invertible para cualquier valor de k distinto de –1 y 4.

2.2. Obtenemos la matriz NM.

$$NM=\begin{pmatrix}3 & 1\\ k-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ k-1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+k-1 & 9-1 & 0-1\\ 3k-3+0 & 3k-3-0 & 0+0\\ 0+2k-2 & 0-2 & 0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k+8 & 8 & -1\\ 3k-3 & 3k-3 & 0\\ 2k-2 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

La matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|NM| = \begin{vmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 3k-3 & 3k-3 & 0 \\ 2k-2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (3k-3)\begin{vmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2k-2 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (3k-3)\left(-2(k+8)+0+2+(2k-2)+16+0\right) =$$

$$= 3(k-1)\left(-\cancel{2k} - \cancel{16} + \cancel{2} + \cancel{2k} - \cancel{2} + \cancel{16}\right) = 0$$

La matriz NM tiene determinante nulo independientemente del valor de *k*.
La matriz NM no es invertible para ningún valor de *k*.

2.3. Obtenemos la expresión del sistema planteado.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x+3y=m \\ (k-1)x-y-z=n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=\dfrac{m}{3} \\ (k-1)x-y-z=n \end{matrix}\right\}$$

Intentamos resolver el sistema.

$$\left.\begin{matrix} x+y=\dfrac{m}{3} \\ (k-1)x-y-z=n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=\dfrac{m}{3}-x \\ (k-1)x-y-z=n \end{matrix}\right\} \Rightarrow (k-1)x-\left(\frac{m}{3}-x\right)-z=n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kx-x-\frac{m}{3}+x-z=n \Rightarrow kx-z=n+\frac{m}{3} \Rightarrow \boxed{kx-n-\frac{m}{3}=z} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{m}{3}-\lambda \\ z=-n-\dfrac{m}{3}+k\lambda \end{cases}}$$

El sistema es compatible indeterminado independientemente de los valores de *m*, *n* y *k*, teniendo sus soluciones la expresión $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{m}{3}-\lambda \\ z=-n-\dfrac{m}{3}+k\lambda \end{cases}$, para cualquier valor $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3

[2,5 puntos en total]

En una ciudad se ha estudiado la relación entre los hábitos de lectura y la práctica de deporte entre el alumnado de bachillerato. Para ello, se han formulado las dos preguntas siguientes al alumnado de esta etapa educativa: «¿Lees como mínimo dos libros al mes?» y «¿Practicas algún deporte al menos cuatro horas por semana?». De los resultados de la encuesta, se desprende que el 60 % leen como mínimo dos libros al mes, de los cuales el 70 % practican algún deporte un mínimo de cuatro horas por semana. También se observa que, de entre los que no leen un mínimo de dos libros al mes, el 50 % hacen menos de cuatro horas semanales de deporte. Si se elige al azar un alumno/a de bachillerato de esta ciudad:

3.1. ¿Cuál es la probabilidad de que haga deporte al menos cuatro horas semanales? [0,75 puntos]

3.2. Si se sabe que este alumno/a hace deporte menos de cuatro horas semanales, ¿cuál es la probabilidad de que lea al menos dos libros al mes? [0,75 puntos]

Alba es una estudiante de bachillerato que ha ido anotando durante todo el curso cuántas horas dedicaba a la semana a leer y cuántas a hacer deporte. Para cada semana tiene apuntado un número real *x* que corresponde a la cantidad de horas de lectura y que oscila entre 1 y 6, y un número real y que corresponde a la cantidad de horas de práctica deportiva. Ha observado que la relación $y = 7 - x + \ln(2x-1)$ se ajusta bastante bien a los datos que ha anotado.

3.3. Calcule, según este modelo, cuál es el máximo y el mínimo de horas por semana que Alba ha dedicado a practicar deporte. [1 punto]

3.1. Consideramos L al suceso "el estudiante elegido lee como mínimo dos libros al mes" y D a "el estudiante elegido practica algún deporte al menos cuatro horas por semana".

El 60 % leen como mínimo dos libros al mes → $P(L) = 0.6$

El 60 % leen como mínimo dos libros al mes, de los cuales el 70 % practican algún deporte un mínimo de cuatro horas por semana → $P(D/L) = 0.7$.

De entre los que no leen un mínimo de dos libros al mes (40%), el 50 % hacen menos de cuatro horas semanales de deporte → $P(D^C / L^C) = 0.5$.

Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\left.\begin{array}{l} P(D/L) = 0.7 \\ P(L) = 0.6 \\ P(D/L) = \dfrac{P(D \cap L)}{P(L)} \end{array}\right\} \Rightarrow 0.7 = \frac{P(D \cap L)}{0.6} \Rightarrow \boxed{P(D \cap L) = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(D^C / L^C) = 0.5 \\ P(L^C) = 1 - 0.6 = 0.4 \\ P(D^C / L^C) = \dfrac{P(D^C \cap L^C)}{P(L^C)} \end{array}\right\} \Rightarrow 0.5 = \frac{P(D^C \cap L^C)}{0.4} \Rightarrow \boxed{P(D^C \cap L^C) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2}$$

Tenemos que $P(D\cap L)=0.42$ y $P(D^C\cap L^C)=0.2$. Aplicamos una de las leyes de Morgan y la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(D^C\cap L^C)=0.2\Rightarrow P\left((D\cup L)^C\right)=0.2\Rightarrow P(D\cup L)=1-0.2=0.8$$

$$\left.\begin{array}{l}P(L)=0.6\\P(D\cap L)=0.42\\P(D\cup L)=0.8\\P(D\cup L)=P(D)+P(L)-P(D\cap L)\end{array}\right\}\Rightarrow 0.8=P(D)+0.6-0.42\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(D)=0.8-0.18=0.62}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO
Supongamos que son 100 los estudiantes. Si el 60 % leen como mínimo dos libros al mes, de los cuales el 70 % practican algún deporte un mínimo de cuatro horas por semana entonces 60 estudiantes leen como mínimo dos libros al mes y 0.7 · 60 = 42 leen como mínimo dos libros al mes y practican algún deporte un mínimo de 4 horas por semana.
De entre los que no leen un mínimo de dos libros al mes (100 – 60 = 40), el 50 % hacen menos de cuatro horas semanales de deporte entonces 20 no leen un mínimo de dos libros al mes y hacen menos de cuatro horas semanales de deporte.
Ponemos los datos proporcionados en una tabla.

	Leen	No leen	
Hacen deporte	42		
No hacen deporte		20	
	60	40	100

Completamos la tabla.

	Leen	No leen	
Hacen deporte	42	**20**	**62**
No hacen deporte	**18**	20	**38**
	60	40	100

La probabilidad de que el estudiante elegido al azar haga deporte al menos cuatro horas semanales vale $\frac{62}{100}=0.62$.

3.2. Debemos calcular $P(L/D^C)$.

Obtenemos la probabilidad pedida mirando los datos de la tabla.
Tenemos que hay 38 estudiantes que no hacen deporte y 18 de ellos leen al menos 2 libros al mes. La probabilidad pedida vale $\frac{18}{38}=\frac{9}{19}\simeq 0.4737$.
Obtenemos la probabilidad pedida usando las fórmulas.

$$P\left(L/D^C\right)=\frac{P\left(L\cap D^C\right)}{P\left(D^C\right)}=\frac{P(L)-P(L\cap D)}{1-P(D)}=\frac{0.6-0.42}{1-0.62}=\frac{9}{19}\simeq 0.4737$$

3.3. Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$y=7-x+\ln(2x-1)\Rightarrow y'=-1+\frac{2}{2x-1}=\frac{-2x+1+2}{2x-1}=\frac{3-2x}{2x-1}$$

$$y'=0\Rightarrow\frac{3-2x}{2x-1}=0\Rightarrow 3-2x=0\Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}=1.5}$$

Sustituimos el valor del punto crítico obtenido en la segunda derivada.

$$y'=\frac{3-2x}{2x-1}\Rightarrow y''=\frac{-2\cdot(2x-1)-2(3-2x)}{(2x-1)^2}\Rightarrow$$

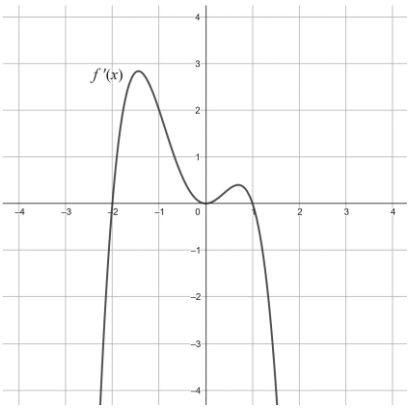
$$\Rightarrow y''(1.5)=\frac{-2\cdot(2\cdot 1.5-1)-2(3-2\cdot 1.5)}{(2\cdot 1.5-1)^2}=\frac{-4}{4}=-1<0$$

La función tiene un máximo relativo en $x=1.5$.
Valoramos la función en el punto crítico y en los extremos del intervalo de definición $[1,6]$.

$$\left.\begin{array}{l} y(1)=7-1+\ln(2\cdot 1-1)=6+\ln 1=6 \\ y(1.5)=7-1.5+\ln(2\cdot 1.5-1)=5.5+\ln 2\simeq 6.19\ \textit{Máximo} \\ y(6)=7-6+\ln(2\cdot 6-1)=1+\ln 11\simeq 3.39\ \textit{Mínimo}\end{array}\right\}$$

El número mínimo de horas que dedica al deporte son 3.39 horas y el máximo es de 6.19 horas.

Ejercicio 4
[2,5 puntos en total]
OPCIÓN A
De una función *f(x)*, se sabe que pasa por el punto (–1, –1) y que la gráfica de su función derivada es la siguiente:



4.1. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f(x)* en el punto (–1, –1). [1 punto]
4.2. Estudie si *f(x)* tiene puntos críticos (puntos donde $f'(x)=0$) y, en caso de tenerlos, determine sus abscisas y clasifíquelos según sean máximos, mínimos o puntos de inflexión de *f(x)*. [1 punto]
4.3. Sabiendo, además, que $f(0)=-0.2$, calcule el área entre la gráfica de $f'(x)$ y el eje de abscisas, desde $x=-1$ hasta $x=0$. [0.5 puntos]

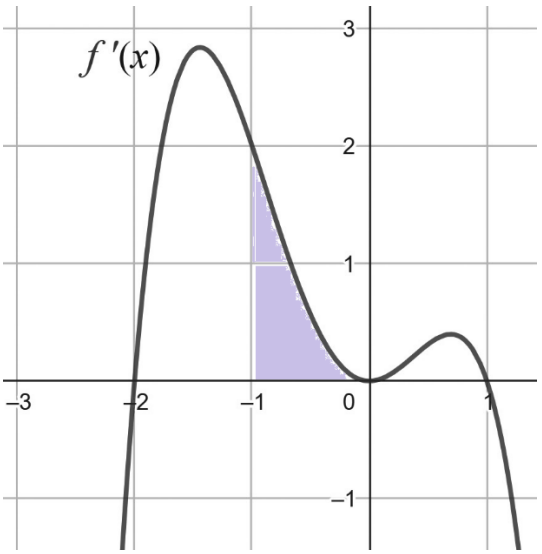
4.1. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f(x)* en el punto (–1, –1) es $y-f(-1)=f'(-1)\left(x-(-1)\right)$. Sabemos que la gráfica de la función pasa por el punto (–1, –1), por lo que $f(-1)=-1$. La gráfica de la derivada pasa por el punto (–1, 2), por lo que $f'(-1)=2$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1)=2 \\ f(-1)=-1 \\ y-f(-1)=f'(-1)\left(x-(-1)\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y-(-1)=2(x+1) \Rightarrow \boxed{y=2x+1}$$

La recta tangente a la gráfica de la función *f(x)* en el punto (–1, –1) tiene ecuación $y=2x+1$

4.2. Observando la gráfica de la derivada de la función sabemos que en $x=-2$, en $x=0$ y en $x=1$ la derivada corta el eje de abscisas y se anula.
En $x=-2$ la función derivada pasa de negativa a positiva, por lo que la función pasa de decrecer a crecer. En $x=-2$ la función tiene un mínimo relativo.
En $x=0$ la función derivada no cambia de signo, manteniéndose positiva, por lo que la función es creciente. La función en $x=0$ no tiene ni un máximo ni un mínimo. La derivada tiene una gráfica que nos indica que pasa de decrecer ($f''(x)<0$) a crecer ($f''(x)>0$), por lo que $f''(0)=0$ y la gráfica de *f(x)* pasa de cóncava a convexa. En $x=0$ la función tiene un punto de inflexión.
En $x=1$ la función derivada pasa de positiva a negativa, por lo que la función pasa de crecer a decrecer. En $x=1$ la función tiene un máximo relativo.

4.3. El área que debemos calcular tiene un valor menor que 1 unidad cuadrada.



Calculamos su valor exacto haciendo uso del cálculo integral. Este área es el valor de la integral definida de –1 a 0 de $f'(x)$.

$$Área = \int_{-1}^{0} f'(x)\,dx = \left[f(x) \right]_{-1}^{0} = f(0) - f(-1) = -0.2 - (-1) = \boxed{0.8\ u^2}$$

Ejercicio 4
[2,5 puntos en total]
OPCIÓN B
En una industria se usan brazos robóticos con sensores para medir con precisión determinadas piezas metálicas y comprobar si tienen irregularidades. Las piezas se colocan sobre la superficie determinada por el plano $\pi:(x,y,z)=(6,1,1)+\lambda(1,1,0)+\mu(0,0,1)$ y, por encima de ella, un brazo robótico desplaza un sensor desde el punto $A=(1,2,3)$ hasta el punto $B=(5,3,7)$ en línea recta (las unidades de los tres ejes de coordenadas están expresadas en centímetros).
4.1. ¿Qué distancia ha recorrido el sensor? [0,5 puntos]
4.2. Al acabar el movimiento, ¿a qué distancia de la superficie se encuentra el sensor? [1 punto]
4.3. Si el sensor siguiera moviéndose en la misma línea recta y en el mismo sentido, ¿en qué punto chocaría con la superficie? [1 punto]

4.1. Hallamos la distancia entre los puntos A y B como el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{matrix}A=(1,2,3)\\B=(5,3,7)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(5,3,7)-(1,2,3)=(4,1,4)$$

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+1^2+4^2}=\sqrt{33}\ cm$$

El sensor recorre $\sqrt{33}\simeq 5.74$ centímetros.

4.2. Hallamos la distancia del punto B al plano donde están situadas las piezas.

$$\pi:(x,y,z)=(6,1,1)+\lambda(1,1,0)+\mu(0,0,1)\Rightarrow \left.\begin{matrix}x=6+\lambda\\y=1+\lambda\\z=1+\mu\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}x-6=\lambda\\y=1+\lambda\\z=1+\mu\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}y=1+x-6\\z=1+\mu\end{matrix}\right\}\Rightarrow \pi: x-y-5=0$$

$$\left.\begin{matrix}B=(5,3,7)\\\pi: x-y-5=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow d(B,\pi)=\frac{|5-3-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\ cm$$

Al acabar el movimiento el sensor se encuentra a $\frac{3\sqrt{2}}{2}\simeq 2.12$ centímetros de la superficie.

4.3. Hallamos la ecuación de la recta definida por los puntos A y B.

$$\left.\begin{matrix}A=(1,2,3)\in r\\\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}=(4,1,4)\end{matrix}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=1+4\alpha\\y=2+\alpha\\z=3+4\alpha\end{cases}$$

Hallamos el punto de corte del plano π y la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x-y-5=0\\ r:\begin{cases}x=1+4\alpha\\ y=2+\alpha\\ z=3+4\alpha\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 1+4\alpha-2-\alpha-5=0\Rightarrow 3\alpha=6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=2\Rightarrow\begin{cases}x=1+4\cdot 2=9\\ y=2+2=4\\ z=3+4\cdot 2=11\end{cases}\Rightarrow \boxed{P(9,4,11)}$$

El sensor chocaría con la superficie en el punto $P(9,4,11)$.

PAU septiembre 2025

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2025

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 3

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas.

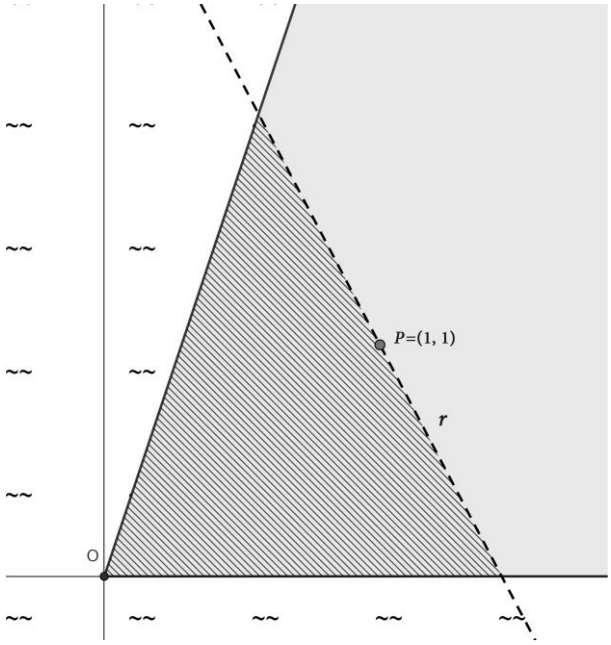
En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar las páginas en blanco del final del cuaderno para realizar esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos capaces de almacenar datos o de transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

Una familia quiere comprar un terreno para hacerse una casa rodeada de acantilados con vistas al mar. En esa zona de la costa, los acantilados siguen las rectas $y=0$ e $y=3x$. Además, la familia quiere que el terreno sea triangular y que el tercer lado del triángulo pase por el punto $P=(1,1)$, tal y como puede verse en la figura.



a) Plantee la ecuación de la recta *r* que define el tercer lado del triángulo en función de su pendiente *m*, y compruebe que el área del terreno viene dada por $A(m)=\frac{3}{2}\cdot\frac{m^2-2m+1}{m^2-3m}$.

[1 punto]

b) Calcule el valor de *m* que hace que el área de este terreno (y, por tanto, su precio) sea mínima. ¿Cuál es el valor de este área? [1,5 puntos]

Ejercicio 2

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x+3y+z&=5\\ mx+2z&=0\\ my-z&=m \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *m*.
[1,25 puntos]

b) Resuelva el sistema para $m=1$.
[0,5 puntos]

c) Resuelva el sistema cuando este tenga infinitas soluciones.
[0,75 puntos]

Ejercicio 3

La lesión por sesamoiditis (inflamación del hueso sesamoide del pie) es relativamente habitual entre la población que practica deportes de impacto (atletismo, baloncesto, tenis…). En una población de deportistas, se ha realizado un estudio diferenciando entre los que practican deportes de impacto y los que practican deportes sin impacto brusco (como natación, pilates, senderismo…). Se ha podido determinar que el 45% practican deportes de impacto. Entre ellos, un 10% sufren lesiones por sesamoiditis, mientras que entre los que no practican deportes de impacto sólo un 3% presentan esta lesión. Escogemos a un deportista al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sufra sesamoiditis?
[0,75 puntos]

b) Si el deportista elegido tiene una lesión por sesamoiditis, ¿cuál es la probabilidad de que practique deportes de impacto?
[0,75 puntos]

Una empresa de calzado deportivo ha creado una zapatilla con amortiguación para minimizar las lesiones por sesamoiditis. Los beneficios generados por la venta de este producto, en miles de euros, siguen una función de la forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, donde *x* son los años transcurridos desde que la zapatilla salió a la venta y *a*, *b* y *c* son constantes reales.

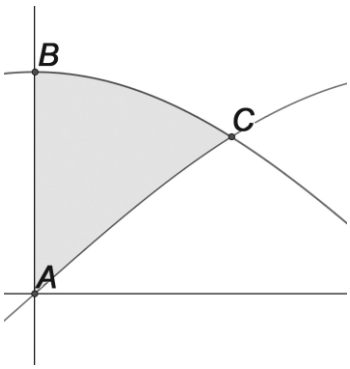
c) Calcule los valores de *a*, *b* y *c* sabiendo que el primer año se obtuvieron el máximo de beneficios, con un valor de 8 000 euros, y que en el segundo año hubo un punto de inflexión en los beneficios.
[1 punto]

Ejercicio 4

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

Un vidriero está reparando una de las vidrieras de la Sagrada Familia cuya forma es la de la parte sombreada de la figura adjunta. Se ha dado cuenta de que Gaudí lo diseñó de forma que uno de los lados sigue la función $y=3sin(x/4)$ y otro sigue la función $y=3cos(x/4)$, donde *x* e *y* están expresadas en metros.



a) Razone a qué función corresponde cada gráfica y calcula las coordenadas de los puntos B y C señalados en la figura (teniendo en cuenta que A es el origen de coordenadas).
[1 punto]

b) Calcula el precio de la vidriera sabiendo que cuesta 750 €/m^2.
[1,5 puntos]

OPCIÓN B

Considere el plano $\pi : 2x - y + z = 5$ y el punto $P = (0,1,3)$.

a) Compruebe que la distancia del punto P al plano π es $\frac{\sqrt{6}}{2}$.
[0.5 puntos]

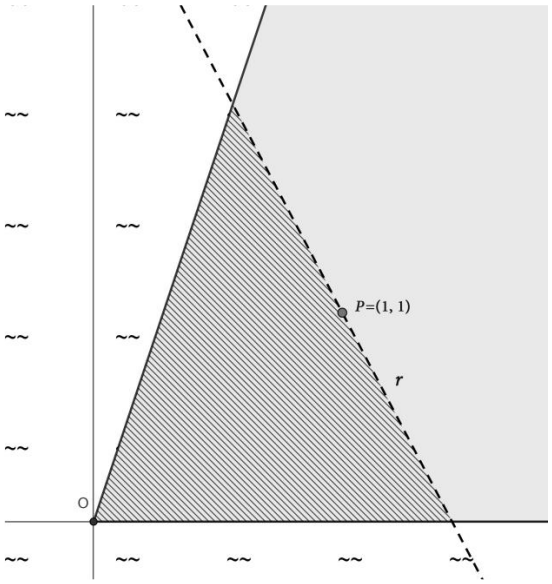
b) Encuentre la ecuación general de un plano π_1 paralelo a π y que pase por el punto P. ¿Cuánto vale la distancia entre π_1 y π?
[0.75 puntos]

c) Encuentre la ecuación general de un segundo plano π_2, diferente de π_1, que sea paralelo a π y que esté a una distancia $\frac{\sqrt{6}}{2}$ de π.
[1,25 puntos]

SOLUCIONES

Ejercicio 1

Una familia quiere comprar un terreno para hacerse una casa rodeada de acantilados con vistas al mar. En esa zona de la costa, los acantilados siguen las rectas $y=0$ e $y=3x$. Además, la familia quiere que el terreno sea triangular y que el tercer lado del triángulo pase por el punto $P=(1,1)$, tal y como puede verse en la figura.



a) Plantee la ecuación de la recta *r* que define el tercer lado del triángulo en función de su pendiente *m*, y compruebe que el área del terreno viene dada por $A(m)=\frac{3}{2}\cdot\frac{m^2-2m+1}{m^2-3m}$. [1 punto]

b) Calcule el valor de *m* que hace que el área de este terreno (y, por tanto, su precio) sea mínima. ¿Cuál es el valor de esta área? [1,5 puntos]

a) La recta *r* pasa por el punto $P=(1,1)$ y tiene pendiente *m*. Determinamos su ecuación.

$$\left.\begin{matrix} P=(1,1)\in r \\ pendiente=m \end{matrix}\right\}\Rightarrow r: y-1=m(x-1)\Rightarrow \boxed{r: y=mx-m+1}$$

La recta que define el tercer lado tiene ecuación $r: y=mx-m+1$.

Para hallar el área del terreno determinamos la base y la altura del triángulo, para ello determinamos donde corta la recta *r* el eje X (base) y donde corta la recta *r* la recta $y=3x$ (altura).

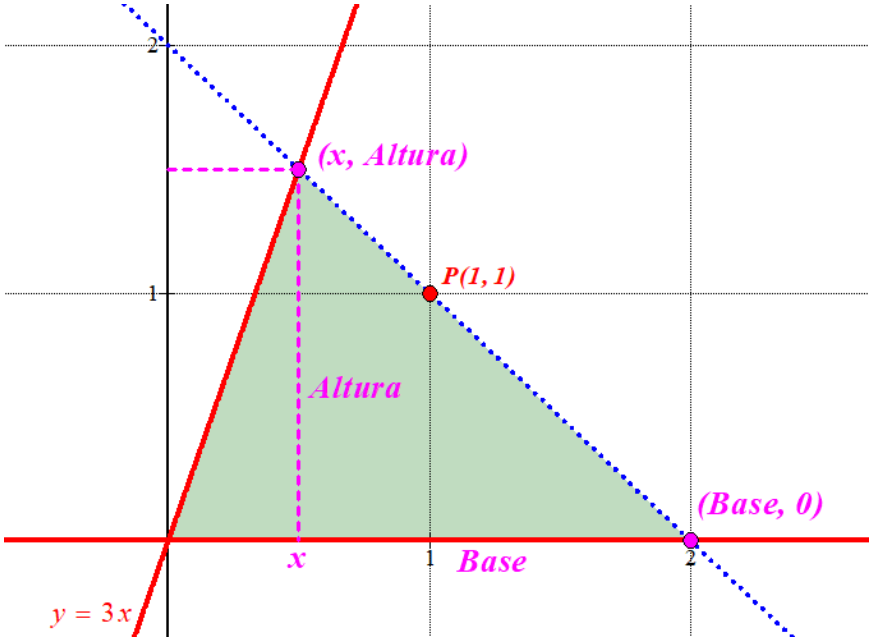
$$\left.\begin{matrix} y=mx-m+1 \\ y=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow mx-m+1=0\Rightarrow mx=m-1\Rightarrow \{m\neq 0\}\Rightarrow \boxed{x=\frac{m-1}{m}=base}$$

$$\left.\begin{matrix} y=3x \\ y=mx-m+1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow mx-m+1=3x\Rightarrow (m-3)x=m-1\Rightarrow \{m\neq 3\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{m-1}{m-3}\Rightarrow \boxed{y=3\frac{m-1}{m-3}=altura}$$

Aplicando la fórmula del área de un triángulo tenemos:

$$Área(m)=\frac{\frac{m-1}{m}\cdot 3\frac{m-1}{m-3}}{2}=\frac{3(m-1)^2}{2m(m-3)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{m^2-2m+1}{m^2-3m}$$



b) Derivamos la función área y averiguamos cuando se anula.

$$A(m)=\frac{3}{2}\cdot\frac{m^2-2m+1}{m^2-3m}\Rightarrow A'(m)=\frac{3}{2}\cdot\frac{(2m-2)(m^2-3m)-(2m-3)(m^2-2m+1)}{(m^2-3m)^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{2m^3-6m^2-2m^2+6m-(2m^3-4m^2+2m-3m^2+6m-3)}{(m^2-3m)^2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{-m^2-2m+3}{(m^2-3m)^2}$$

$$A'(m)=0\Rightarrow\frac{3}{2}\cdot\frac{-m^2-2m+3}{(m^2-3m)^2}=0\Rightarrow -m^2-2m+3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-1)\cdot 3}}{-2}=\frac{2\pm 4}{-2}=\begin{cases}\frac{2+4}{-2}=\boxed{-3=m}\\ \frac{2-4}{-2}=\boxed{1=m}\end{cases}$$

Como la recta *r* tiene pendiente negativa (decreciente) solo consideramos el valor $m=-3$.

Antes de este valor si tomamos $m=-4$ la derivada vale

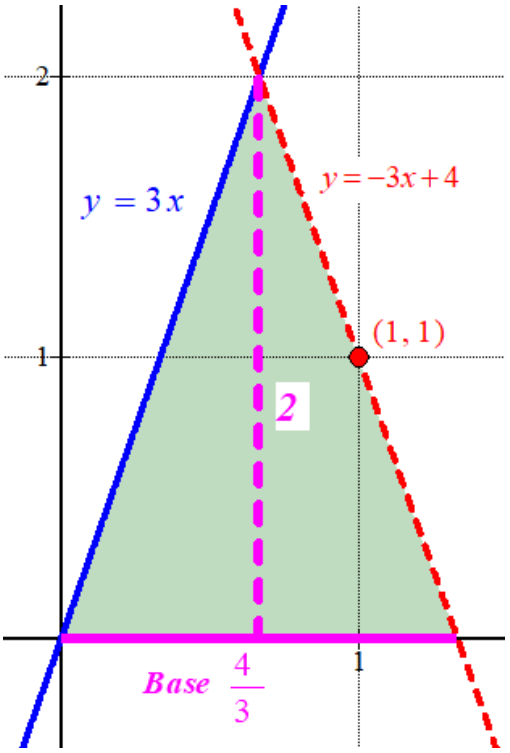
$A'(-4)=\frac{3}{2}\cdot\frac{-(-4)^2-2(-4)+3}{\left((-4)^2-3(-4)\right)^2}=\frac{-15}{1568}<0$. El área decrece antes de $m=-3$.

Después de este valor si tomamos $m=-2$ la derivada vale

$A'(-2)=\frac{3}{2}\cdot\frac{-(-2)^2-2(-2)+3}{\left((-2)^2-3(-2)\right)^2}=\frac{9}{200}>0$. El área crece después de $m=-3$.

El área decrece antes y crece después de $m=-3$, por lo que el área es mínima para $m=-3$.

Para este valor el área del triángulo vale $Área(-3)=\frac{3(-3-1)^2}{2(-3)(-3-3)}=\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.



Ejercicio 2

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x+3y+z&=5\\ mx+2z&=0\\ my-z&=m\end{aligned}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *m*.
[1,25 puntos]

b) Resuelva el sistema para $m=1$.
[0,5 puntos]

c) Resuelva el sistema cuando este tenga infinitas soluciones.
[0,75 puntos]

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ m & 0 & 2\\ 0 & m & -1\end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 5\\ m & 0 & 2 & 0\\ 0 & m & -1 & m\end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ m & 0 & 2\\ 0 & m & -1\end{vmatrix}=0+0+m^2-0+3m-2m=m^2+m$$

$$|A|=0\Rightarrow m^2+m=0\Rightarrow m(m+1)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{m=0}\\ \boxed{m=-1}\end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m\neq 0$ y $m\neq -1$**.**

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{\text{a}}+2\cdot\text{Fila } 3^{\text{a}}\\ 0\quad 0\quad 2\quad 0\\ 0\quad 0\quad -2\quad 0\\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad 0\rightarrow\text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow A/B=\left(\begin{array}{cccc}\overbrace{1 & 3 & 1}^{A} & 5\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0\end{array}\right)$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. $m=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1&3&1&5\\-1&0&2&0\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&3&1&5\\-1&0&2&0\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\text{Fila } 2^{\text{a}}+\text{Fila } 1^{\text{a}}&&&\\-1&0&2&0\\1&3&1&5\\\hline 0&3&3&5\end{array}\right.\rightarrow\text{Nueva Fila } 2^{\text{a}}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3&1&5\\0&3&3&5\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{cccc}\text{Fila } 2^{\text{a}}+3\cdot\text{Fila } 2^{\text{a}}&&&\\0&3&3&5\\0&-3&-3&-3\\\hline 0&0&0&2\end{array}\right.\rightarrow\text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{1&3&1}^{A}&5\\0&3&3&5\\\underbrace{0&0&0}_{A}&2\end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Para $m\neq 0$ y $m\neq -1$ el sistema es **compatible determinado**, para $m=0$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $m=-1$ el sistema es **incompatible.**

b) Para $m=1$ el sistema es compatible determinado (CASO 1). Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r}x+3y+z=5\\x+2z=0\\y-z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+3y+z=5\\x=-2z\\y=z+1\end{array}\right\}\Rightarrow -2z+3(z+1)+z=5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2z+3z+3+z=5\Rightarrow 2z=2\Rightarrow\boxed{z=1}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\boxed{x=-2\cdot 1=-2}\\\boxed{y=1+1=2}\end{array}\right.$$

La solución es $x=-2;\ y=2;\ z=1$.

c) Para $m=0$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r}x+3y+z=5\\2z=0\\-z=0\end{array}\right\}\Rightarrow x+3y=5\Rightarrow x=5-3y\Rightarrow\boxed{\left\{\begin{array}{l}x=5-3\lambda\\y=\lambda\\z=0\end{array}\right.\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

Ejercicio 3

La lesión por sesamoiditis (inflamación del hueso sesamoide del pie) es relativamente habitual entre la población que practica deportes de impacto (atletismo, baloncesto, tenis…). En una población de deportistas, se ha realizado un estudio diferenciando entre los que practican deportes de impacto y los que practican deportes sin impacto brusco (como natación, pilates, senderismo…). Se ha podido determinar que el 45% practican deportes de impacto. Entre ellos, un 10% sufren lesiones por sesamoiditis, mientras que entre los que no practican deportes de impacto sólo un 3% presentan esta lesión. Escogemos a un deportista al azar.

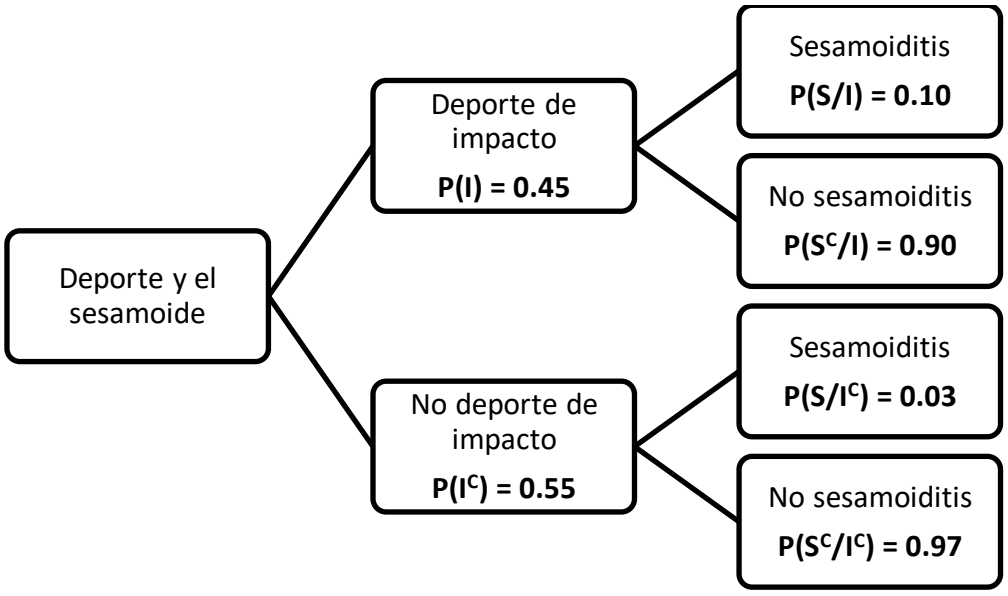
a) ¿Cuál es la probabilidad de que sufra sesamoiditis? [0,75 puntos]

b) Si el deportista elegido tiene una lesión por sesamoiditis, ¿cuál es la probabilidad de que practique deportes de impacto? [0,75 puntos]

Una empresa de calzado deportivo ha creado una zapatilla con amortiguación para minimizar las lesiones por sesamoiditis. Los beneficios generados por la venta de este producto, en miles de euros, siguen una función de la forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, donde x son los años transcurridos desde que la zapatilla salió a la venta y a, b y c son constantes reales.

c) Calcule los valores de a, b y c sabiendo que el primer año se obtuvieron el máximo de beneficios, con un valor de 8 000 euros, y que en el segundo año hubo un punto de inflexión en los beneficios. [1 punto]

Llamamos I al suceso "practicar deportes de impacto" y S a "padecer sesamoiditis". Realizamos un diagrama de árbol.



a) Debemos calcular $P(S)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(S)=P(I)P(S/I)+P(I^C)P(S/I^C)=0.45\cdot 0.10+0.55\cdot 0.03=\boxed{0.0615}$$

b) Debemos calcular $P(I/S)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(I/S)=\frac{P(I\cap S)}{P(S)}=\frac{P(I)P(S/I)}{P(S)}=\frac{0.45\cdot 0.10}{0.0615}=\boxed{\frac{30}{41}\simeq 0.7317}$$

c) Sabemos que $f(1)=8$ y que en $x=1$ hay un máximo de la función por lo que $f'(1)=0$. También sabemos que al tener un punto de inflexión la derivada segunda debe anularse, por lo que $f''(2)=0$. Utilizamos estos tres datos para obtener las tres constantes.

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f''(x)=6ax+2b$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(2)=0 \\ f''(x)=6ax+2b \end{array}\right\} \Rightarrow 6a(2)+2b=0 \Rightarrow 12a+2b=0 \Rightarrow 6a+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-6a}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=0 \\ f'(x)=3ax^2+2bx+c \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3a+2b+c \Rightarrow \boxed{c=-3a-2b}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx^2+cx \\ f(1)=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{8=a+b+c}$$

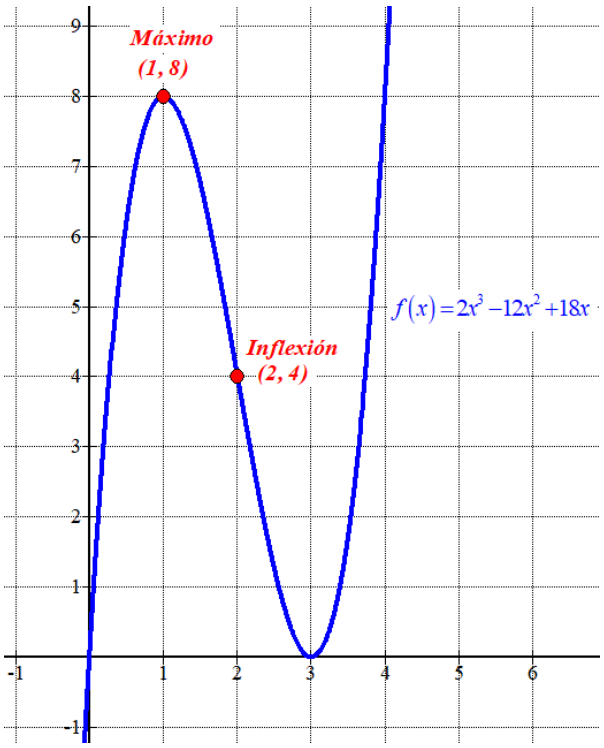
Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} b=-6a \\ c=-3a-2b \\ 8=a+b+c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=-3a-2(-6a) \\ 8=a-6a+c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=9a \\ 8=-5a+c \end{array}\right\} \Rightarrow 8=-5a+9a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8=4a \Rightarrow \boxed{a=2} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b=-6\cdot 2=-12} \\ \boxed{c=9\cdot 2=18} \end{cases}$$

Los valores que cumplen lo pedido son $a=2;\ b=-12$ y $c=18$.

La función queda $f(x)=2x^3-12x^2+18x$.

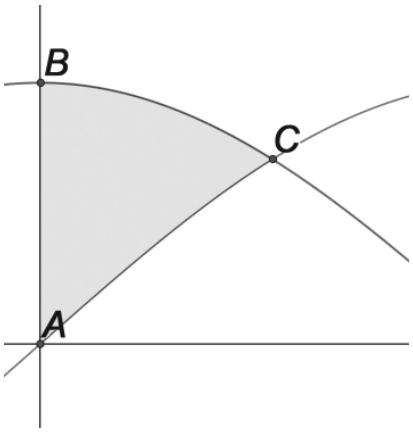


Ejercicio 4

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

Un vidriero está reparando una de las vidrieras de la Sagrada Familia cuya forma es la de la parte sombreada de la figura adjunta. Se ha dado cuenta de que Gaudí lo diseñó de forma que uno de los lados sigue la función $y=3sin(x/4)$ y otro sigue la función $y=3cos(x/4)$, donde x e y están expresadas en metros.



a) Razone a qué función corresponde cada gráfica y calcula las coordenadas de los puntos B y C señalados en la figura (teniendo en cuenta que A es el origen de coordenadas).
[1 punto]

b) Calcula el precio de la vidriera sabiendo que cuesta 750 €/m^2.
[1,5 puntos]

a) La gráfica que pasa por los puntos A y C toma el valor 0 para $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} y=3sin(x/4) \\ y=3cos(x/4) \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=3sin(0/4)=3\sin 0=0 \rightarrow ¡OK! \\ y=3cos(0/4)=3\cos 0=3 \rightarrow ¡NO! \end{array}\right\}$$

La función que pasa por los puntos A y C es $y=3sin(x/4)$.

La función que pasa por los puntos B y C es $y=3cos(x/4)$.

El punto A tiene coordenadas $A(0,0)$.

El punto B tiene coordenadas $(0,3\cos(0/4))=(0,3)$.

El punto C es el punto de corte de ambas gráficas. Determinamos sus coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} y=3sin(x/4) \\ y=3cos(x/4) \end{array}\right\} \Rightarrow 3sin(x/4)=3cos(x/4) \Rightarrow sin(x/4)=cos(x/4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{sin(x/4)}{cos(x/4)}=\frac{cos(x/4)}{cos(x/4)} \Rightarrow tg(x/4)=1 \Rightarrow \frac{x}{4}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x=\pi} \Rightarrow \boxed{y=3cos(\pi/4)=\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

El punto C tiene coordenadas $C\left(\pi,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) Hallamos el área de la región sombreada. El área la obtenemos como la integral definida entre 0 y π de la diferencia de las dos funciones.

$$Área = \int_0^{\pi} 3cos\left(x/4\right) - 3\sin\left(x/4\right) dx = \left[3\cdot 4\sin\left(x/4\right) - 3\cdot 4\left(-cos\left(x/4\right)\right)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[12\sin\left(x/4\right) + 12cos\left(x/4\right)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[12\sin\left(\pi/4\right) + 12cos\left(\pi/4\right)\right] - \left[12\sin\left(0/4\right) + 12cos\left(0/4\right)\right] =$$

$$= 12\frac{\sqrt{2}}{2} + 12\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 12 = \boxed{12\sqrt{2} - 12 \simeq 4.97\, m^2}$$

Multiplicamos el área obtenida por el precio de cada metro cuadrado y obtenemos el coste de la vidriera: $750\cdot\left(12\sqrt{2} - 12\right) \simeq 3727.92$ euros.

Ejercicio 4
Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN B
Considere el plano $\pi: 2x-y+z=5$ y el punto $P=(0,1,3)$.

a) Compruebe que la distancia del punto P al plano π es $\frac{\sqrt{6}}{2}$. [0.5 puntos]

b) Encuentre la ecuación general de un plano π_1 paralelo a π y que pase por el punto P. ¿Cuánto vale la distancia entre π_1 y π? [0.75 puntos]

c) Encuentre la ecuación general de un segundo plano π_2, diferente de π_1, que sea paralelo a π y que esté a una distancia $\frac{\sqrt{6}}{2}$ de π. [1,25 puntos]

a) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 2x-y+z-5=0\\ P=(0,1,3)\end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi)=\frac{|2\cdot 0-1+3-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\boxed{\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

b) Un plano paralelo a $\pi: 2x-y+z=5$ tiene ecuación $\pi_1: 2x-y+z+D=0$.
Determinamos el valor de D para que el plano pase por el punto $P=(0,1,3)$.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1: 2x-y+z+D=0\\ P=(0,1,3)\in\pi_1\end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 0-1+3+D=0 \Rightarrow D=-2 \Rightarrow \boxed{\pi_1: 2x-y+z-2=0}$$

El plano que cumple lo pedido tiene ecuación $\pi_1: 2x-y+z-2=0$.
La distancia entre los planos paralelos π_1 y π es la misma que la distancia de un punto del plano π_1, por ejemplo, el punto P al plano π. Esta distancia sabemos que vale $\frac{\sqrt{6}}{2}$ unidades.

c) El plano π_2 paralelo al plano $\pi: 2x-y+z=5$ tiene ecuación $\pi_2: 2x-y+z+D=0$.
Un punto del plano $\pi: 2x-y+z=5$ es $Q(0,0,5)$. Que la distancia entre los planos π_2 y π sea $\frac{\sqrt{6}}{2}$ implica que la distancia del punto Q al plano π_2 debe valer $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_2: 2x-y+z+D=0\\ Q=(0,0,5)\in\pi\\ d(\pi,\pi_2)=d(Q,\pi_2)=\frac{\sqrt{6}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|2\cdot 0-0+5+D|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3}{\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{|5+D|}{\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |5+D|=3 \Rightarrow \begin{cases}5+D=3 \rightarrow D=-2 \rightarrow \pi_1: 2x-y+z-2=0\\ 5+D=-3 \rightarrow D=-8 \rightarrow \boxed{\pi_2: 2x-y+z-8=0}\end{cases}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi_2: 2x-y+z-8=0$.

PAU junio (serie 1) 2025

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2025

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 1

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar las páginas en blanco del final del cuaderno para realizar esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos capaces de almacenar datos o de transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$.

a) Determine los puntos de corte de la curva $y=f(x)$ con los ejes de coordenadas, y las ecuaciones de sus posibles asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. [1 punto]

b) Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y=f(x)$ en los puntos $x=0$ y $x=2$. ¿Estas dos rectas son paralelas? Justifique la respuesta. [1 punto]

c) Hay algún punto donde la recta tangente a *f(x)* tenga pendiente 1? En caso afirmativo, encuéntrelo. [0.5 puntos]

Ejercicio 2

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} y-z&=p+3\\ p^2x-z&=5\\ x-y&=3 \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro p. [1.25 puntos]

b) Resuelva el sistema para el caso $p=-1$. [0,5 puntos]

c) Para el caso $p=-1$, ¿hay alguna solución que cumpla, además, $xy=10$? En caso afirmativo, indique cuántas hay y encuéntrelas todas. [0,75 puntos]

Ejercicio 3

Una empresa produce dos tipos de prendas, de hierro y de acero. El 60% de la producción total corresponde a piezas de hierro y el resto son de acero. Sabemos que el 95% de las piezas de hierro producidas no tienen ningún defecto, mientras que el 3% de las piezas de acero son defectuosas.

a) Si tomamos una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa? [0,75 puntos]

b) La empresa pronto diversificará la producción y empezará a producir también piezas de titanio, que se venderán en paquetes de 5. Si la probabilidad de que una pieza de titanio sea defectuosa es un valor desconocido *p*, y cada pieza es defectuosa independientemente de las otras, compruebe que la expresión que nos da la probabilidad de que en un paquete función de *p*) es $f(p)=5\left(p^4-p^5\right)$ [0,75 puntos]

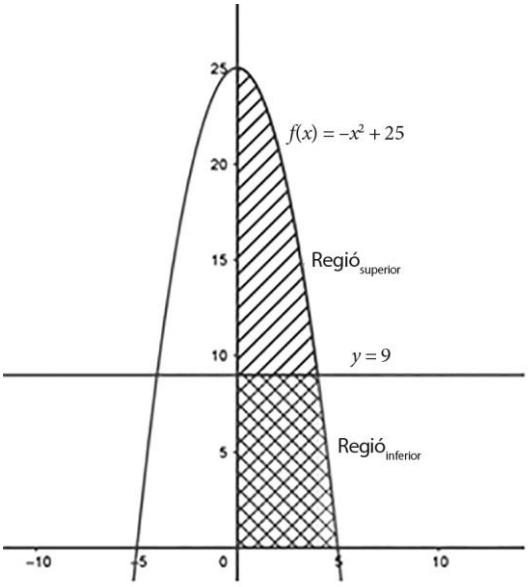
c) Considere la función *f(p)* del apartado anterior. Determine el valor máximo que toma *f(p)* cuando $p\geq 0$. [1 punto]

Ejercicio 4

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

La vela mayor de un velero tiene forma semiparabólica y está delimitada por las gráficas de $f(x)=-x^2+25$, $y=0$ y $x=0$ tal como se indica en la figura siguiente:



La vela tiene dos partes separadas por la recta $y=9$. Para su construcción, se emplea un tejido de nylon en la parte superior, que cuesta 50 €/u^2, y un tejido de poliéster en la parte inferior, que cuesta 70 €/u^2. Calcule el coste total del material que se necesita para construir esta vela.
[2.5 puntos]

OPCIÓN B

Considere el plano π de ecuación $x+y=0$.

a) Calcule la ecuación del plano π´ que es perpendicular a π y contiene los puntos $P=(1,-1,2)$ y $Q=(3,-3,6)$. [1 punto]

b) Calcule la ecuación paramétrica de la recta contenida en π´ y que contiene los puntos de π´ que están a la misma distancia de P que de Q. [1.5 puntos]

SOLUCIONES

Ejercicio 1

Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$.

a) Determine los puntos de corte de la curva $y=f(x)$ con los ejes de coordenadas, y las ecuaciones de sus posibles asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. [1 punto]

b) Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y=f(x)$ en los puntos $x=0$ y $x=2$. ¿Estas dos rectas son paralelas? Justifique la respuesta. [1 punto]

c) Hay algún punto donde la recta tangente a *f(x)* tenga pendiente 1? En caso afirmativo, encuéntrelo. [0.5 puntos]

a) Determinamos los puntos de corte de la gráfica con los ejes coordenados.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1} \\ Eje\,OX \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2-2x}{x-1}=0 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow \boxed{A(0,0)} \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow \boxed{B(2,0)} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1} \\ Eje\,OY \rightarrow x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{0^2-2\cdot 0}{0-1}=0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son A(0, 0) y B(2, 0).

Determinamos las asíntotas de la función.
El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio es $\mathbb{R}-\{1\}$.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿$x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x}{x-1}=\frac{1-2}{1-1}=\frac{-1}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty} x=\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2-2x}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}1=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x}=-1$$

La función tiene a la recta $y=x-1$ como asíntota oblicua.

b) La recta tangente a la curva en $x=0$ tiene ecuación $y-f\left(0\right)=f'\left(0\right)\left(x-0\right)$.

$$f\left(x\right)=\frac{x^2-2x}{x-1}\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{\left(2x-2\right)\left(x-1\right)-1\cdot\left(x^2-2x\right)}{\left(x-1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-2x-\cancel{2x}+2-x^2+\cancel{2x}}{\left(x-1\right)^2}=\frac{x^2-2x+2}{\left(x-1\right)^2}\Rightarrow f'\left(0\right)=\frac{0^2-2\cdot0+2}{\left(0-1\right)^2}=2$$

$$\left.\begin{array}{l}f\left(0\right)=\dfrac{0^2-2\cdot0}{0-1}=\dfrac{0}{-1}=0\\ f'\left(0\right)=2\\ y-f\left(0\right)=f'\left(0\right)\left(x-0\right)\end{array}\right\}\Rightarrow y-0=2x\Rightarrow\boxed{y=2x}$$

La recta tangente a la curva en $x=2$ tiene ecuación $y-f\left(2\right)=f'\left(2\right)\left(x-2\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}f\left(2\right)=\dfrac{2^2-2\cdot2}{2-1}=0\\ f'\left(2\right)=\dfrac{2^2-2\cdot2+2}{\left(2-1\right)^2}=2\\ y-f\left(2\right)=f'\left(2\right)\left(x-2\right)\end{array}\right\}\Rightarrow y-0=2\left(x-2\right)\Rightarrow\boxed{y=2x-4}$$

Las dos rectas tangentes obtenidas son paralelas pues tienen la misma pendiente $f'\left(0\right)=f'\left(2\right)=2$.

c) Para que la pendiente de la recta tangente sea 1 la derivada de la función debe valer 1. Buscamos esa posibilidad.

$$f'\left(x\right)=1\Rightarrow\frac{x^2-2x+2}{\left(x-1\right)^2}=1\Rightarrow x^2-2x+2=\left(x-1\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2x+2=x^2+1-2x\Rightarrow 2=1\ \text{¡Imposible!}$$

No existe ninguna tangente a la gráfica de la función que tenga pendiente 1.

Ejercicio 2

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} y-z &= p+3 \\ p^2x-z &= 5 \\ x-y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro p. [1.25 puntos]

b) Resuelva el sistema para el caso $p = -1$. [0,5 puntos]

c) Para el caso $p = -1$, ¿hay alguna solución que cumpla, además, $xy = 10$? En caso afirmativo, indique cuántas hay y encuéntrelas todas. [0,75 puntos]

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ p^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & p+3 \\ p^2 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ p^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0-1+p^2-0-0-0 = p^2-1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow p^2-1=0 \Rightarrow p^2=1 \Rightarrow \boxed{p=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $p \neq -1$ **y** $p \neq 1$**.**

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $p = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{Fila\,2^a \leftrightarrow Fila\,1^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -5 \end{array} \\ \hline 0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{a} + \text{Fila } 2^{a} \\ \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 0 & -1}^{A/B} & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. $p = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{Fila\,2^{a} \leftrightarrow Fila\,1^{a}\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -5 \end{array} \\ \hline 0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{a} + \text{Fila } 2^{a} \\ \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 0 & -1}^{A/B} & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 2 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Para $p \neq -1$ **y** $p \neq 1$ el sistema es **compatible determinado**, para $p = -1$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $p = 1$ el sistema es **incompatible.**

b) Resolvemos el sistema para $p = -1$. Por lo visto en el apartado anterior sabemos que el sistema es compatible indeterminado (CASO 2). Lo resolvemos partiendo de la matriz triangular equivalente obtenida en el apartado a).

$$\left(\overbrace{\begin{matrix}1 & 0 & -1 & 5\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0\end{matrix}}^{A/B}\right) \Rightarrow \left.\begin{matrix}x-z=5\\ y-z=2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x=5+z\\ y=2+z\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases}x=5+\lambda\\ y=2+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{cases}$$

Las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases}x=5+\lambda\\ y=2+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{cases}$.

c) Añadimos la condición $xy=10$ al sistema y vemos si existe alguna solución que lo cumpla.

$$\left.\begin{matrix}xy=10\\ \begin{cases}x=5+\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\end{matrix}\right\} \Rightarrow (5+\lambda)(2+\lambda)=10 \Rightarrow 10+5\lambda+2\lambda+\lambda^2=10 \Rightarrow \lambda^2+7\lambda=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda+7)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=0 \rightarrow \begin{cases}x=5+0=5\\ y=2+0=2\\ z=0\end{cases}\\ \lambda+7=0 \rightarrow \lambda=-7 \rightarrow \begin{cases}x=5-7=-2\\ y=2-7=-5\\ z=-7\end{cases}\end{cases}$$

Hay dos soluciones. Una es $x=5,\ y=2,\ z=0$ y otra es $x=-2,\ y=-5,\ z=-7$.

Ejercicio 3

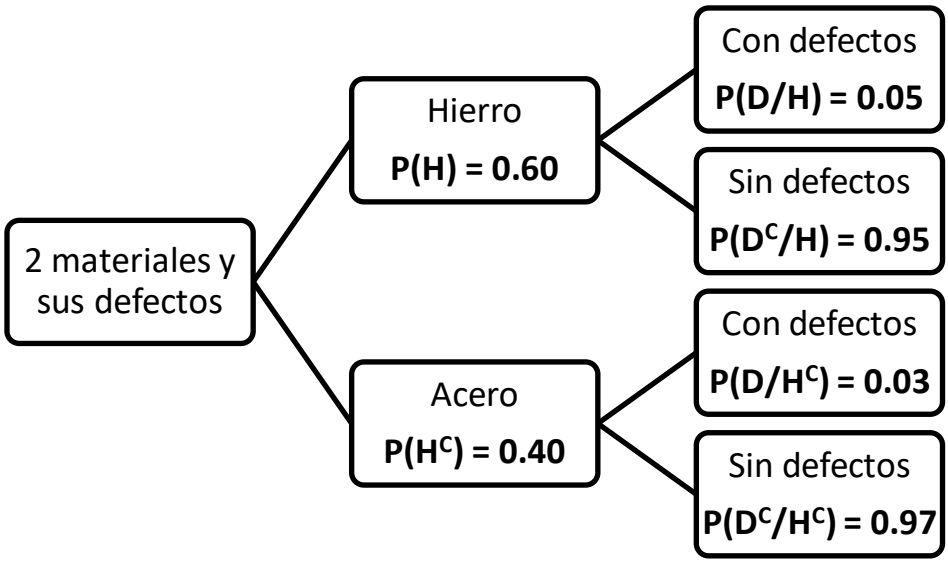
Una empresa produce dos tipos de prendas, de hierro y de acero. El 60% de la producción total corresponde a piezas de hierro y el resto son de acero. Sabemos que el 95% de las piezas de hierro producidas no tienen ningún defecto, mientras que el 3% de las piezas de acero son defectuosas.

a) Si tomamos una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa? [0,75 puntos]

b) La empresa pronto diversificará la producción y empezará a producir también piezas de titanio, que se venderán en paquetes de 5. Si la probabilidad de que una pieza de titanio sea defectuosa es un valor desconocido *p*, y cada pieza es defectuosa independientemente de las otras, compruebe que la expresión que nos da la probabilidad de que en un paquete de 5 piezas haya exactamente 4 defectuosas (en función de *p*) es $f(p)=5\left(p^4-p^5\right)$ [0,75 puntos]

c) Considere la función *f(p)* del apartado anterior. Determine el valor máximo que toma *f(p)* cuando $p\geq 0$. [1 punto]

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Debemos calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(H)P(D/H)+P(H^C)P(D/H^C)=0.6\cdot 0.05+0.4\cdot 0.03=\boxed{0.042}$$

b) Consideramos la variable aleatoria X = Número de piezas defectuosas en un paquete de 5 piezas. X = B(5, p). Calculamos la expresión de $P(X=4)$.

$$P(X=4)=\binom{5}{4}p^4\cdot(1-p)^1=5p^4(1-p)=5\left(p^4-p^5\right)$$

Se cumple que $f(p)=P(X=4)=5\left(p^4-p^5\right)$.

c) Derivamos la función y vemos cuando se anula la derivada, siempre cumpliendo que $p\geq 0$.

$$f(p)=5\left(p^4-p^5\right)\Rightarrow f'(p)=5\left(4p^3-5p^4\right)=5p^3(4-5p)$$

$$f'(p)=0\Rightarrow 5p^3(4-5p)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{p=0}\\ 4-5p=0\Rightarrow 5p=4\Rightarrow \boxed{p=\frac{4}{5}=0.8}\end{cases}$$

Estudiamos la evolución de la función antes y después de $p=0.8$.

- En el intervalo $(0,0.8)$ tomamos $x=0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=5\cdot 0.5^3(4-5\cdot 0.5)=0.9375>0$. La función crece en $(0,0.8)$.
- En el intervalo $(0.8,+\infty)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=5\cdot 1^3(4-5\cdot 1)=-5<0$. La función decrece en $(0.8,+\infty)$.

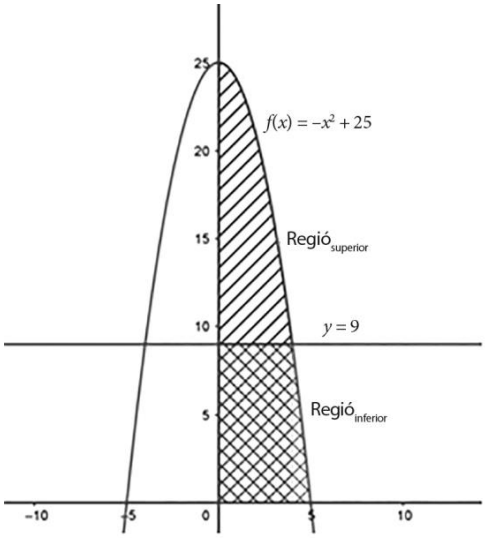
La función crece antes y decrece después de $p=0.8$. La función tiene un máximo relativo y absoluto en $p=0.8$. Este valor máximo de la función es $f(p)=5\left(0.8^4-0.8^5\right)=0.4096$

Ejercicio 4

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

La vela mayor de un velero tiene forma semiparabólica y está delimitada por las gráficas de $f(x)=-x^2+25$, $y=0$ y $x=0$ tal como se indica en la figura siguiente:



La vela tiene dos partes separadas por la recta $y=9$. Para su construcción, se emplea un tejido de nylon en la parte superior, que cuesta 50 €/u^2, y un tejido de poliéster en la parte inferior, que cuesta 70 €/u^2. Calcule el coste total del material que se necesita para construir esta vela.

[2.5 puntos]

Hallamos el área total de la vela como la integral definida entre 0 y 5 de la función $f(x)=-x^2+25$.

$$Área\,total=\int_0^5 f(x)\,dx=\int_0^5 -x^2+25dx=\left[\frac{-x^3}{3}+25x\right]_0^5=$$

$$=\left[\frac{-5^3}{3}+25\cdot 5\right]-\left[\frac{-0^3}{3}+25\cdot 0\right]=125-\frac{125}{3}=\boxed{\frac{250}{3}\,u^2}$$

Obtenemos el punto de corte de la parábola con la recta $y=9$.

$$\left.\begin{array}{l} y=9 \\ f(x)=-x^2+25 \end{array}\right\}\Rightarrow 9=-x^2+25\Rightarrow x^2=25-9=16\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{16}=4}$$

Calculamos el valor del área superior como como el valor de la integral definida entre 0 y 4 de la diferencia entre $f(x)=-x^2+25$ e $y=9$.

$$Área\,\sup erior=\int_0^4 -x^2+25-9dx=\int_0^4 -x^2+16dx=\left[\frac{-x^3}{3}+16x\right]_0^4=$$

$$=\left[\frac{-4^3}{3}+16\cdot 4\right]-\left[\frac{-0^3}{3}+16\cdot 0\right]=64-\frac{64}{3}=\boxed{\frac{128}{3}\,u^2}$$

El área de la parte inferior la obtenemos restando al área total el área de la parte superior.

$$\text{Área inferior} = \frac{250}{3} - \frac{128}{3} = \boxed{\frac{122}{3}\ u^2}$$

Una vez que tenemos el valor del área de cada trozo calculamos el coste total del material.

$$\text{Coste} = 50 \cdot \frac{128}{3} + 70 \cdot \frac{122}{3} = 4980\,€$$

El coste de todo el material necesario para hacer la vela es de 4980 euros.

Ejercicio 4 OPCIÓN B

Considere el plano π de ecuación $x+y=0$.

a) Calcule la ecuación del plano π´ que es perpendicular a π y contiene los puntos $P=(1,-1,2)$ y $Q=(3,-3,6)$. [1 punto]

b) Calcule la ecuación paramétrica de la recta contenida en π´ y que contiene los puntos de π´ que están a la misma distancia de P que de Q. [1.5 puntos]

a) El plano perpendicular a π tiene como uno de sus vectores directores el vector normal de π. El otro vector director del plano π´ es el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\pi: x+y=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,0) \qquad \overrightarrow{PQ}=(3,-3,6)-(1,-1,2)=(2,-2,4)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\vec{n}=(1,1,0)\\ \vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(2,-2,4)=(1,-1,2)\\ P(1,-1,2)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-2-z+2-z+2-2y-2=0\Rightarrow 2x-2y-2z=0\Rightarrow \boxed{\pi': x-y-z=0}$$

El plano π´ que es perpendicular a π y contiene los puntos $P=(1,-1,2)$ y $Q=(3,-3,6)$ tiene ecuación $\pi': x-y-z=0$.

b) Los puntos que equidistan de P y Q constituyen una recta. El vector director de esta recta es perpendicular al vector normal del plano π´ pues la recta está contenida en el plano, también es perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}$.. Podemos tomar como vector director de la recta el producto vectorial del vector $\vec{n'}$ y $\overrightarrow{PQ}$. Además, esta recta pasa por el punto medio del segmento PQ.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(2,-2,4)\\ \pi': x-y-z=0\rightarrow \vec{n'}=(1,-1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n'}\times\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=-4i-2j-2k+2k-4j-2i=-6i-6j=(-6,-6,0)$$

Hallamos el punto medio del segmento PQ y la ecuación de la recta *r* pedida.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{(3,-3,6)+(1,-1,2)}{2}=(2,-2,4)\in r\\ \vec{v_r}=\frac{1}{-6}\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{-6}(-6,-6,0)=(1,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=-2+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=4\end{cases}$$

La recta que buscamos tiene ecuación $r:\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=-2+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=4\end{cases}$.

PAU junio (serie 4) 2025

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2025

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 4

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar las páginas en blanco del final del cuaderno para realizar esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos capaces de almacenar datos o de transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

Considere la función $f(x)=+\sqrt{1+x^3}$.

a) Indique el dominio de esta función y los puntos de corte de la curva $y=f(x)$ con los ejes de coordenadas. [0.5 puntos]

b) Resuelve la ecuación $f'(x)=0$ y estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, así como sus máximos y mínimos locales. [1 punto]

c) Determine el valor de *a* para que el punto $(a,3)$ pertenezca a la gráfica de la función y calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en este punto. [1 punto]

Ejercicio 2

Considere el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+az=1 \\ -2x-6y+2z=2a \\ ax+3y+z=3 \end{array}\right\}$$

Donde *a* es un parámetro real, y sean π_1 el plano determinado por la primera ecuación, π_2 el determinado por la segunda, y π_3 el determinado por la tercera.

a) Discuta el sistema en función del valor de *a*. [1 punto]

b) Describa la posición relativa de los tres planos π_1, π_2 y π_3 en función del valor de *a*. [0,75 puntos]

c) ¿En algún caso la intersección de los tres planos es una recta? En caso afirmativo, diga para que valor del parámetro, y dé un vector director y un punto de esta recta. [0,75 puntos]

Ejercicio 3

Un usuario de Internet ha estimado que el 25% de los correos electrónicos que recibe son spam, mientras que el resto no lo son. Para facilitar la clasificación del correo, se ha instalado un filtro que envía a la carpeta de spam el 95% de los mensajes que efectivamente lo son. Desgraciadamente, este filtro deja en la bandeja de entrada sólo el 90% de los mensajes buenos (y el resto los envía a la carpeta de spam).

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un mensaje sea enviado por el filtro a la carpeta de spam? [0,75 puntos]

b) Un día, este usuario abre la carpeta de correo basura. ¿Qué porcentaje de mensajes que no son correo basura encontrará? [0,75 puntos]

En un servidor de correo electrónico determinado, la probabilidad de recibir al menos dos correos en menos de *t* minutos viene dada por la función $F(t)=\int_0^t Ae^{-0,5x}dx$, donde A es una constante real.

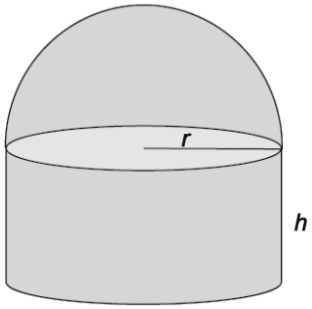
c) Sabiendo que la probabilidad de recibir al menos dos correos en menos de dos minutos es $1-e^{-1}$, encuentre el valor de A. [1 punto]

Ejercicio 4

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

El diseñador de una casa de perfumes ha decidido que la botella del próximo perfume que la empresa sacará al mercado será de vidrio y tendrá la forma de un cilindro con una media esfera en la parte superior, tal y como se puede ver en la siguiente figura:



El perfume estará contenido en la parte cilíndrica, que tiene una capacidad de 100 cm^3. El ingeniero a cargo del proceso de producción se propone minimizar el coste total del vidrio usado y, por tanto, quiere que la superficie total de la botella sea mínima.

a) Compruebe que la superficie total de la botella de perfume viene dada por la fórmula $S(r)=3\pi r^2+\frac{200}{r}$.

[1 punto]

b) ¿Qué dimensiones debe tener la botella de perfume para que la superficie total sea mínima? ¿Cuál es la superficie total de la botella en este caso?

[1,5 puntos]

Nota: Recuerde que la superficie de una esfera viene dada por la fórmula $4\pi r^2$, donde *r* es su radio.

OPCIÓN B

Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$, donde *a* es un parámetro real, y $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Encuentre los valores de *a* qué hacen que las matrices A y B conmuten. (Dos matrices A y B conmutan si $AB=BA$.) [0.75 puntos]

b) Encuentre los valores de *a* para los que la matriz A es invertible. [0.75 puntos]

c) Encuentre los valores de *a* para los que $A^{-1}=A$. [1 punto]

SOLUCIONES

Ejercicio 1

Considere la función $f(x)=+\sqrt{1+x^3}$.

a) Indique el dominio de esta función y los puntos de corte de la curva $y=f(x)$ con los ejes de coordenadas. [0.5 puntos]

b) Resuelve la ecuación $f'(x)=0$ y estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, así como sus máximos y mínimos locales. [1 punto]

c) Determine el valor de *a* para que el punto $(a,3)$ pertenezca a la gráfica de la función y calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en este punto. [1 punto]

a) El dominio de la función son todos los valores que hacen positivo o cero el radicando.
Averiguamos cuando se anula el radicando.

$$1+x^3=0\Rightarrow x^3=-1\Rightarrow x=\sqrt[3]{-1}=-1$$

- Si tomamos un valor menor que –1, por ejemplo $x=-2$ entonces $f(-2)=+\sqrt{1+(-2)^3}=+\sqrt{-7}=$ No existe. La función no existe en $(-\infty,-1)$.
- Si tomamos un valor mayor que –1, por ejemplo $x=0$ entonces $f(0)=+\sqrt{1+0^3}=1$. La función existe en $[-1,+\infty)$.

El dominio de la función es $[-1,+\infty)$.
Determinamos los puntos de corte de la gráfica con los ejes coordenados.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=+\sqrt{1+x^3} \\ Eje\,OX\rightarrow y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow +\sqrt{1+x^3}=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow \boxed{A(-1,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=+\sqrt{1+x^3} \\ Eje\,OY\rightarrow x=0 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=+\sqrt{1+0^3}=+1\Rightarrow \boxed{B(0,1)}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son $A(-1,0)$ y $B(0,1)$.

b) Obtenemos la expresión de la ecuación y la resolvemos.

$$f(x)=+\sqrt{1+x^3}\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}=0\Rightarrow 3x^2=0\Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor. Debemos tener en cuenta que el dominio de la función es $[-1,+\infty)$.

- En el intervalo $[-1,0)$ tomamos $x=-0.5$ y la derivada vale $f'(-0.5)=\dfrac{3(-0.5)^2}{2\sqrt{1+(-0.5)^3}}\approx 0.4>0$. La función crece en $[-1,0)$.
- En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{3\cdot 1^2}{2\sqrt{1+1^3}}\approx 1.06>0$. La función crece en $(0,+\infty)$.

La función crece en todo su dominio $[-1,+\infty)$.

Como la función siempre crece y está definida en el intervalo $[-1,+\infty)$ la función tiene un mínimo local en $x=-1$, siendo las coordenadas de este punto $A(-1,0)$.

La función no tiene máximos locales pues es siempre creciente.

c) Averiguamos cuando la función toma el valor 3.

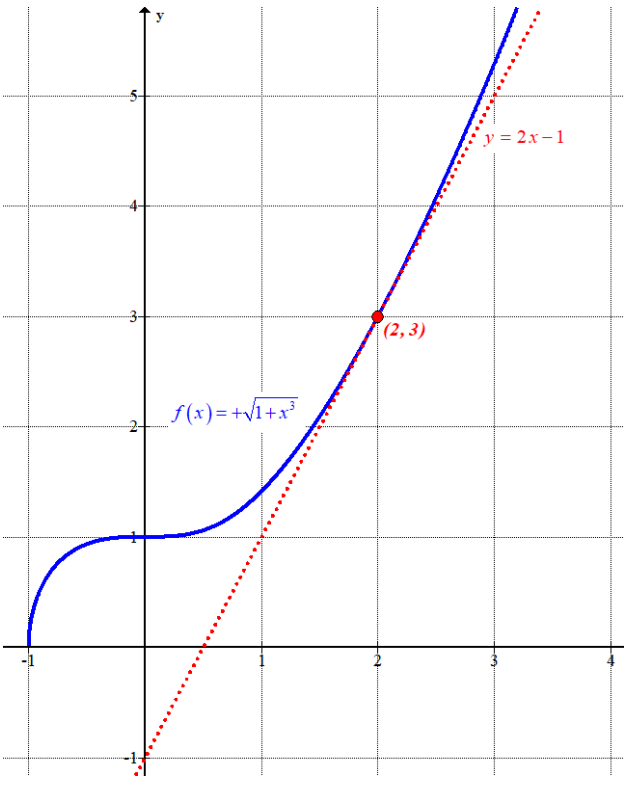
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=+\sqrt{1+x^3} \\ f(a)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow +\sqrt{1+a^3}=3 \Rightarrow 1+a^3=9 \Rightarrow a^3=8 \Rightarrow \boxed{a=\sqrt[3]{8}=2}$$

El valor buscado es $a=2$.

La recta tangente a la curva en $a=2$ tiene ecuación $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=+\sqrt{1+2^3}=3 \\ f'(2)=\dfrac{3\cdot 2^2}{2\sqrt{1+2^3}}=2 \\ y-f(2)=f'(2)(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow y-3=2(x-2) \Rightarrow y-3=2x-4 \Rightarrow \boxed{y=2x-1}$$

La recta tangente a la curva en $x=2$ tiene ecuación $y=2x-1$.



Ejercicio 2

Considere el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+az=1 \\ -2x-6y+2z=2a \\ ax+3y+z=3 \end{array}\right\}$$

Donde a es un parámetro real, y sean π_1 el plano determinado por la primera ecuación, π_2 el determinado por la segunda, y π_3 el determinado por la tercera.

a) Discuta el sistema en función del valor de a. [1 punto]

b) Describa la posición relativa de los tres planos π_1, π_2 y π_3 en función del valor de a. [0,75 puntos]

c) ¿En algún caso la intersección de los tres planos es una recta? En caso afirmativo, diga para que valor del parámetro, y dé un vector director y un punto de esta recta. [0,75 puntos]

b) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ -2 & -6 & 2 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & a & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 2a \\ a & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$.

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ -2 & -6 & 2 \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix}=-6+6a-6a+6a^2+6-6=6a^2-6$$

$$|A|=0\Rightarrow 6a^2-6=0\Rightarrow a^2-1=0\Rightarrow \boxed{a=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a\neq -1$ y $a\neq 1$**.**

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^{\text{a}}+\text{Fila } 1^{\text{a}} \\ -1\quad 3\quad 1\quad 3 \\ \hline 1\quad 3\quad -1\quad 1 \\ 0\quad 6\quad 0\quad 4\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{a} + 2\cdot\text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} -2 & -6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{Fila\,2^{a} \leftrightarrow Fila 3^{a}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{\overbrace{ccc}^{A}|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

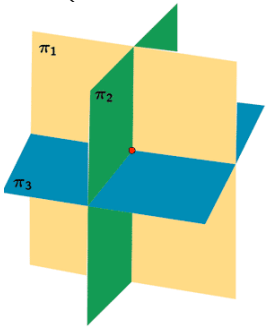
$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{a} + 2\cdot\text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} -2 & -6 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{\overbrace{ccc}^{A}|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 2 \end{array}\right)$$

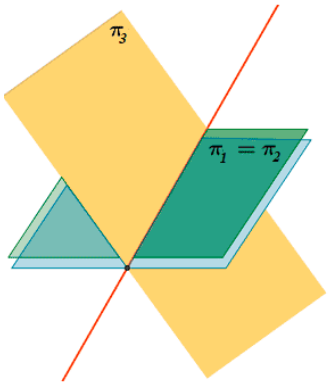
El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Para $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es **compatible determinado**, para $a = -1$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $a = 1$ el sistema es **incompatible.**

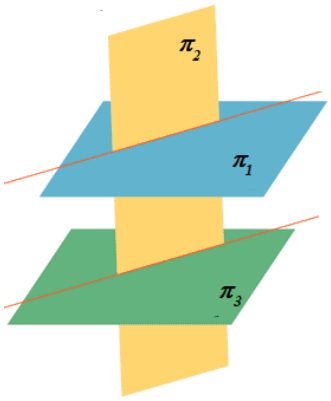
b) Para $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución), lo cual significa que los tres planos coinciden en un punto (la solución del sistema de ecuaciones).



Para $a=-1$ el sistema es **compatible indeterminado (infinitas soluciones)**, lo cual significa que los tres planos coinciden en una recta (hemos visto que el plano π_1 y π_2 son iguales).



Para $a=1$ el sistema es **incompatible**, en los cálculos realizados hemos visto que el plano π_1 y π_3 son paralelos y ambos son cortados por el plano π_2.



c) Para $a=-1$ el sistema es **compatible indeterminado (infinitas soluciones)**, lo cual significa que los tres planos coinciden en una recta. Resolvemos el sistema partiendo de la matriz triangular equivalente obtenida en el apartado a).

$$\left(\overbrace{\begin{array}{cccc}1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 6 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}}^{A/B}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y-z=1\\ 6y=4\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y-z=1\\ \boxed{y=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}}\end{array}\right\} \Rightarrow x+3\frac{2}{3}-z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-1+z \Rightarrow \begin{cases} x=-1+\lambda\\ y=\frac{2}{3}\\ z=\lambda\end{cases} ;\ \lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} P_r\left(-1,\frac{2}{3},0\right)\\ \vec{v_r}(1,0,1)\end{cases}$$

Un punto de la recta intersección de los tres planos es $P_r\left(-1,\frac{2}{3},0\right)$ y un vector director es $\vec{v_r}(1,0,1)$.

Ejercicio 3

Un usuario de Internet ha estimado que el 25% de los correos electrónicos que recibe son spam, mientras que el resto no lo son. Para facilitar la clasificación del correo, se ha instalado un filtro que envía a la carpeta de spam el 95% de los mensajes que efectivamente lo son. Desgraciadamente, este filtro deja en la bandeja de entrada sólo el 90% de los mensajes buenos (y el resto los envía a la carpeta de spam).

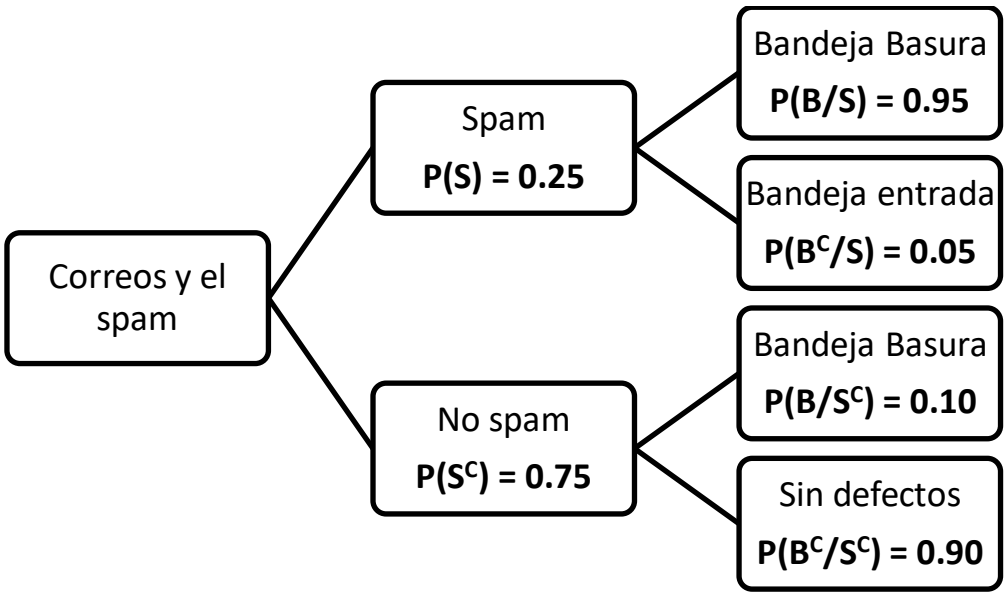
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un mensaje sea enviado por el filtro a la carpeta de spam? [0,75 puntos]

b) Un día, este usuario abre la carpeta de correo basura. ¿Qué porcentaje de mensajes que no son correo basura encontrará? [0,75 puntos]

En un servidor de correo electrónico determinado, la probabilidad de recibir al menos dos correos en menos de *t* minutos viene dada por la función $F(t)=\int_0^t Ae^{-0,5x}dx$, donde A es una constante real.

c) Sabiendo que la probabilidad de recibir al menos dos correos en menos de dos minutos es $1-e^{-1}$, encuentre el valor de A. [1 punto]

Llamamos S al suceso "El correo es Spam" y B a "el correo es enviado a la carpeta de correo Basura". Realizamos un diagrama de árbol.



a) Debemos calcular $P(B)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B)=P(S)P(B/S)+P(S^C)P(B/S^C)=0.25\cdot 0.95+0.75\cdot 0.10=\boxed{0.3125}$$

b) Calculamos $P(S^C/B)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(S^C/B)=\frac{P(S^C\cap B)}{P(B)}=\frac{P(S^C)P(B/S^C)}{P(B)}=\frac{0.75\cdot 0.10}{0.3125}=\boxed{0.24}$$

El porcentaje de mensajes que no son spam en la carpeta de correo basura es del 24%.

c) Calculamos la integral que nos da la probabilidad.

$$F(t)=\int_0^t Ae^{-0,5x}dx=\left[\frac{Ae^{-0.5x}}{-0.5}\right]_0^t=A\frac{e^{-0.5t}}{-0.5}-A\frac{e^{-0.5\cdot 0}}{-0.5}=-2Ae^{-0.5t}+2A=\boxed{2A\left(-e^{-0.5t}+1\right)}$$

Como nos dicen que $F(2)=1-e^{-1}$, utilizamos este dato para obtener el valor de A.

$$\left.\begin{array}{l}F(2)=1-e^{-1}\\ F(t)=2A\left(-e^{-0.5t}+1\right)\end{array}\right\}\Rightarrow 1-e^{-1}=2A\left(1-e^{-0.5\cdot 2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-e^{-1}=2A\left(1-e^{-1}\right)\Rightarrow 2A=1\Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{2}}$$

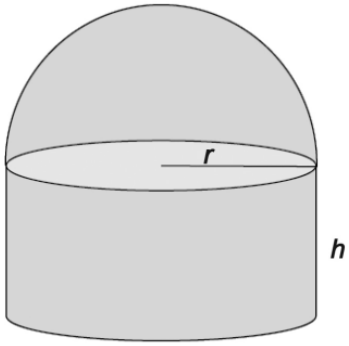
El valor buscado es $A=\frac{1}{2}$.

Ejercicio 4

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

El diseñador de una casa de perfumes ha decidido que la botella del próximo perfume que la empresa sacará al mercado será de vidrio y tendrá la forma de un cilindro con una media esfera en la parte superior, tal y como se puede ver en la siguiente figura:



El perfume estará contenido en la parte cilíndrica, que tiene una capacidad de 100 cm^3. El ingeniero a cargo del proceso de producción se propone minimizar el coste total del vidrio usado y, por tanto, quiere que la superficie total de la botella sea mínima.

a) Compruebe que la superficie total de la botella de perfume viene dada por la fórmula $S(r)=3\pi r^2+\frac{200}{r}$.

[1 punto]

b) ¿Qué dimensiones debe tener la botella de perfume para que la superficie total sea mínima? ¿Cuál es la superficie total de la botella en este caso?

[1,5 puntos]

Nota: Recuerde que la superficie de una esfera viene dada por la fórmula $4\pi r^2$, donde *r* es su radio.

a) Sabemos que el volumen del cilindro es 100 cm^3.

$$\left.\begin{array}{l} V(h,r)=\pi r^2 h \\ Volumen=100 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi r^2 h=100 \Rightarrow \boxed{h=\frac{100}{\pi r^2}}$$

La superficie de la botella es la suma del área de la base circular (πr^2), el área del rectángulo lateral ($2\pi rh$) y la superficie de la semiesfera ($\frac{4\pi r^2}{2}$).

$$\left.\begin{array}{l} S(r,h)=\pi r^2+2\pi rh+\frac{4\pi r^2}{2} \\ h=\frac{100}{\pi r^2} \end{array}\right\} \Rightarrow S(r)=\pi r^2+2\pi \cancel{r}\,\frac{100}{\pi \cancel{r^2}}+2\pi r^2=3\pi r^2+\frac{200}{r}$$

b) Hallamos la derivada de la función superficie y averiguamos cuando se anula.

$$\left.\begin{array}{l} S'(r)=6\pi r-\frac{200}{r^2} \\ S'(r)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6\pi r-\frac{200}{r^2}=0 \Rightarrow 6\pi r=\frac{200}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\pi r^3 = 200 \Rightarrow r^3 = \frac{200}{6\pi} \Rightarrow \boxed{r = \sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}} \simeq 2.1974\,cm}$$

Tenemos un punto crítico de la función superficie para un radio de $\sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}} \simeq 2.1974$ cm.

Determinamos el signo de la segunda derivada para este valor.

$$S'(r) = 6\pi r - \frac{200}{r^2} = 6\pi r - 200r^{-2} \Rightarrow S''(r) = 6\pi + 400r^{-3} = 6\pi + \frac{400}{r^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S''\left(\sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}}\right) = 6\pi + \frac{400}{\left(\sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}}\right)^3} = 6\pi + \frac{400}{\frac{100}{3\pi}} = 18\pi > 0$$

Al ser la segunda derivada positiva la superficie de la botella es mínima para $r = \sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}}$.

Para este valor del radio la altura del cilindro es $h = \frac{100}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{900}{\pi}} \simeq 6.59$ cm.

La botella con superficie mínima tiene radio 2.1974 cm y altura 6.59 cm.

La superficie de la botella es de $S\left(\sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}}\right) = 3\pi\left(\sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}}\right)^2 + \frac{200}{\sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}}} \simeq 136.525$ cm^2.

Ejercicio 4

OPCIÓN B

Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real, y $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Encuentre los valores de a que hacen que las matrices A y B conmuten. (Dos matrices A y B conmutan si $AB=BA$.) [0.75 puntos]

b) Encuentre los valores de a para los que la matriz A es invertible. [0.75 puntos]

c) Encuentre los valores de a para los que $A^{-1}=A$. [1 punto]

a) Resolvemos la igualdad $AB=BA$.

$$AB=BA\Rightarrow\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2+a^2 & 4a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ a+4 & 4a^2 \end{pmatrix}\Rightarrow 2+a^2=a+4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-a-2=0\Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1(-2)}}{2}=\frac{1\pm3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=\boxed{2=a}\\ \frac{1-3}{2}=\boxed{-1=a}\end{cases}$$

Las matrices conmutan para $a=2$ y $a=-1$.

b) Para que la matriz A sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix}=a^3-0=a^3$$

Para cualquier valor de a distinto de cero la matriz A es invertible.

c) Para que $A^{-1}=A$ se debe cumplir que $A\cdot A=I$.

$$A\cdot A=I\Rightarrow\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+a^2 & a^4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a^2=1\rightarrow a=\sqrt{1}=\pm1 \\ a+a^2=0\rightarrow a(1+a)=0\rightarrow\begin{cases}a=0\\ a=-1\end{cases}\Rightarrow\boxed{a=-1} \\ a^4=1\rightarrow a=\sqrt[4]{1}=\pm1\end{cases}$$

Se cumple para $a=-1$.

PAU septiembre 2024

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2024

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 3

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Considere la función polinómica $f(x) = 3x^{13} + 5x^3 + 2$.

a) Justifique que su gráfica corta el eje de abscisas en un punto del intervalo [–2, 0]. Dé un intervalo de longitud 0,5 donde se encuentre este punto de corte. [1.25 puntos]

b) Estudie las zonas de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de $y = f(x)$. ¿Cuántos puntos de corte tiene exactamente la gráfica de esta función con el eje de abscisas? Justifique su respuesta. [1.25 puntos]

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde *m* es un parámetro real.

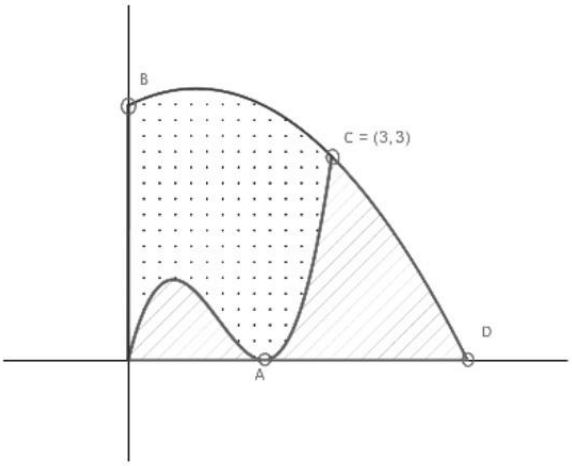
$$\left.\begin{aligned} x - 3y + mz &= -2 \\ x + my + 2z &= 3 \\ x + y + 2z &= m \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta el sistema según el valor del parámetro *m*. [1.25 puntos]

b) Encuentre la solución del sistema para $m = 0$. [0.5 puntos]

c) Para $m = 2$, dé una solución (x, y, z) del sistema que, además, cumpla $x = 5y$. [0,75 puntos]

3. La clase de Èlia ha diseñado el siguiente logotipo para pintarlo en la pared del instituto:



La curva que pasa por el punto A es $y = f(x)$, con $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, y la que pasa por los puntos B, C =(3, 3) y D es $y = g(x)$, con $g(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4$.

a) Calcule las coordenadas de los puntos A, B y D. [0,75 puntos]

b) Calcule el área de la zona punteada. [1,25 puntos]

c) Los alumnos quieren pintar la parte punteada de color azul y la parte rayada de color rojo. Sabiendo que el área total del logotipo es $\frac{175}{12}$ m^2, ¿de qué color necesitarán más pintura? [0,5 puntos]

4. Se estima que el 20 % de los habitantes de una región padecen algún tipo de arritmia. Para diagnosticarla, existe la posibilidad de colocar al paciente un monitor Holter, que detecta la arritmia en un 95 % de los casos de personas que la padecen, pero que también da falsos positivos, por motivos eléctricos, en personas que no padecen arritmias en un 0,5 % de los casos.

a) Si se escogen 4 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas padezca arritmias? [0,75 puntos]

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar obtenga un diagnóstico positivo de arritmia? [0,75 puntos]

c) Si una persona obtiene un diagnóstico negativo en la prueba del Holter, ¿cuál es la probabilidad de que realmente padezca arritmias? [1 punto]

5. Para cada punto (x, y) de la curva $y = e^{-2x}$, con $x > 0$ e $y > 0$, considere el rectángulo con vértices en los puntos $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ y (x, y).

a) Compruebe que, de entre todos estos rectángulos, el que tiene $x = \frac{1}{2}$ es el de área máxima. ¿Cuál es el valor de esta área? [1,5 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $y = e^{-2x}$ en el punto de abscisa $x = 0$, y su punto de corte con el eje de abscisas. [1 punto]

6. Considere el punto $P = (1, 3, 0)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 2z = -7$.

a) Sea r la recta que es perpendicular a π y pasa por P. Calcule el punto de intersección de π con r. [1 punto]

b) Calcule la distancia d del punto P al plano π. [0,5 puntos]

c) Calcule la ecuación de otro plano π' que sea paralelo a π y que también esté a distancia d de P. [1 punto]

SOLUCIONES

1. Considere la función polinómica $f(x)=3x^{13}+5x^3+2$.

a) Justifique que su gráfica corta el eje de abscisas en un punto del intervalo [–2, 0]. Dé un intervalo de longitud 0,5 donde se encuentre este punto de corte. [1.25 puntos]

b) Estudie las zonas de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de $y=f(x)$. ¿Cuántos puntos de corte tiene exactamente la gráfica de esta función con el eje de abscisas? Justifique su respuesta. [1.25 puntos]

a) La función es continua en el intervalo [–2, 0] y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo.

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=3(-2)^{13}+5(-2)^3+2=-24614<0 \\ f(0)=3\cdot 0^{13}+5\cdot 0^3+2=2>0 \end{array}\right\}$$

Podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c\in(-2,0)$ tal que $f(c)=0$.

Buscamos un intervalo de menor amplitud que cumpla las condiciones del teorema de Bolzano. Como el valor de la función para $x = -2$ es -24614 probamos con valores más cercanos a 0.

$$\left.\begin{array}{l} f(-0.5)=3(-0.5)^{13}+5(-0.5)^3+2\simeq 1.37>0 \\ f(-1)=3\cdot(-1)^{13}+5\cdot(-1)^3+2=-6<0 \end{array}\right\}$$

Si consideramos el intervalo $[-1,-0.5]$ en dicho intervalo la función es continua y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo. Aplicando el teorema de Bolzano podemos afirmar que existe $c\in(-1,-0.5)$ tal que $f(c)=0$.

b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x)=3x^{13}+5x^3+2 \Rightarrow f'(x)=39x^{12}+15x^2$$

Esta expresión de la derivada siempre es positiva pues las potencias son pares y se suman los resultados de dichas potencias.
Al ser la derivada siempre positiva la función siempre crece.
La función no tiene máximos ni mínimos relativos.

Puntos de corte de la función con el eje de abscisas hemos encontrado uno en el intervalo $[-1,-0.5]$. Como la función es continua y siempre crece no hay ningún punto de corte más con el eje de abscisas.
Existe un único punto de corte de la gráfica de la función y el eje de abscisas.

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde *m* es un parámetro real.

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+mz=-2 \\ x+my+2z=3 \\ x+y+2z=m \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema según el valor del parámetro *m*. [1.25 puntos]
b) Encuentre la solución del sistema para $m = 0$. [0.5 puntos]
c) Para $m = 2$, dé una solución (x, y, z) del sistema que, además, cumpla $x = 5y$. [0,75 puntos]

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & m \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & m & -2 \\ 1 & m & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & m \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -3 & m \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2m-6+m-m^2+6-2=-m^2+3m-2$$

$$|A|=0\Rightarrow -m^2+3m-2=0\Rightarrow m^2-3m+2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=\boxed{2=m} \\ \frac{3-1}{2}=\boxed{1=m}\end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m\neq1$ y $m\neq2$**.**

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{a}}-\text{Fila } 2^{\text{a}}\\ 1\quad 1\quad 2\quad 1\\ -1\quad -1\quad -2\quad -3\\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad -2\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{\text{a}}-\text{Fila } 1^{\text{a}}\\ 1\quad 1\quad 2\quad 3\\ -1\quad 3\quad -1\quad 2\\ \hline 0\quad 4\quad 1\quad 5\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{1 & -3 & 1 & -2}^{A/B}\\ 0 & 4 & 1 & 5\\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & -2\end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $m=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & -2\\ 1 & 2 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & -2\\ 1 & 2 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{a}}-\text{Fila } 2^{\text{a}}\\ 1\quad 1\quad 2\quad 2\\ -1\quad -2\quad -2\quad -3\\ \hline 0\quad -1\quad 0\quad -1\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{\text{a}}-\text{Fila } 1^{\text{a}}\\ 1\quad 2\quad 2\quad 3\\ -1\quad 3\quad -2\quad 2\\ \hline 0\quad 5\quad 0\quad 5\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & -2\\ 0 & 5 & 0 & 5\\ 0 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{\text{a}}+5\cdot\text{ Fila } 3^{\text{a}}\\ 0\quad 5\quad 0\quad 5\\ 0\quad -5\quad 0\quad -5\\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad 0\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{1 & -3 & 2 & -2}^{A/B}\\ 0 & 5 & 0 & 5\\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0\end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $m\neq 1$ y $m\neq 2$ el sistema es **compatible determinado**, para $m=1$ el sistema es **incompatible y** para $m=2$ el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Para *m = 0* el sistema tiene una única solución (caso 1). Lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix} x-3y=-2 \\ x+2z=3 \\ x+y+2z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-2+3y \\ x+2z=3 \\ x+y+2z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2+3y+2z=3 \\ -2+3y+y+2z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 3y+2z=5 \\ 4y+2z=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3y+2z=5 \\ 2z=2-4y \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3y+2-4y=5 \Rightarrow -y=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-3} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=-2+3(-3)=-11} \\ 2z=2-4(-3)=14 \rightarrow \boxed{z=\frac{14}{2}=7} \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = -11$, $y = -3$, $z = 7$.

c) Resolvemos el sistema para $m = 2$. Es el caso 3 estudiado y el sistema tiene infinitas soluciones. Lo resolvemos partiendo del sistema equivalente obtenido en el estudio.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-3y+2z=-2 \\ 5y=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-3y+2z=-2 \\ \boxed{y=\frac{5}{5}=1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x-3+2z=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-2z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=1-2\alpha \\ y=1 \qquad ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z=\alpha \end{cases}}$$

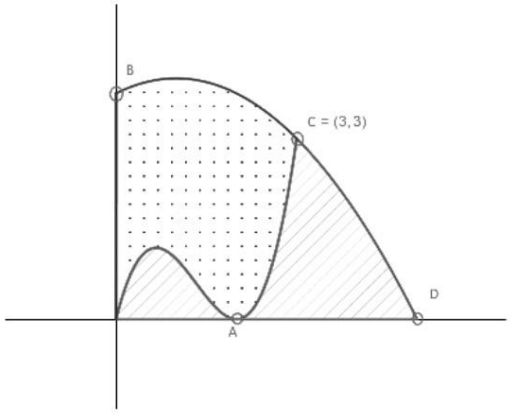
Para $m = 2$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=1-2\alpha \\ y=1 \qquad ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z=\alpha \end{cases}$.

Le añadimos la condición $x=5y$. Comprobamos si existe alguna solución que lo cumpla.

$$\left.\begin{matrix} x=1-2\alpha \\ y=1 \\ z=\alpha \\ x=5y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=1-2\alpha \\ \boxed{y=1} \\ z=\alpha \\ \boxed{x=5} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5=1-2\alpha \\ z=\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4=-2\alpha \\ z=\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha=\frac{4}{-2}=-2 \\ z=\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{z=-2}$$

Existe una solución que cumple lo pedido: $x = 5$, $y = 1$, $z = -2$.

3. La clase de Èlia ha diseñado el siguiente logotipo para pintarlo en la pared del instituto:



La curva que pasa por el punto A es $y = f(x)$, con $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, y la que pasa por los puntos B, C =(3, 3) y D es $y = g(x)$, con $g(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4$.

a) Calcule las coordenadas de los puntos A, B y D. [0,75 puntos]
b) Calcule el área de la zona punteada. [1,25 puntos]
c) Los alumnos quieren pintar la parte punteada de color azul y la parte rayada de color rojo. Sabiendo que el área total del logotipo es $\frac{175}{12}$ m^2, ¿de qué color necesitarán más pintura? [0,5 puntos]

a) El punto A es el punto de corte de la gráfica de la función $y = f(x)$ con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x \\ Eje\,OX \rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = x^3 - 4x^2 + 4x \Rightarrow x\left(x^2 - 4x + 4\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0,0) \\ x^2 - 4x + 4 \rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \rightarrow \boxed{A(2,0)} \end{cases}$$

El punto B es el punto de corte de la gráfica de la función $y = g(x)$ con el eje OY.

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = -\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2 + 4 \\ Eja\,OY \rightarrow x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0) = -\left(\frac{0-1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{-1}{4} + 4 = \frac{15}{4} \Rightarrow \boxed{B\left(0, \frac{15}{4}\right)}$$

El punto D es el punto de corte de la gráfica de la función $y = g(x)$ con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = -\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2 + 4 \\ Eja\,OX \rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 \Rightarrow \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{2} = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 4 \rightarrow x = 5 \rightarrow \boxed{D(5,0)} \\ x - 1 = -4 \rightarrow x = -3 \text{ No nos sirve} \end{cases}$$

Los puntos tienen coordenadas: $A(2,0)$, $B\left(0,\frac{15}{4}\right)$ y $D(5,0)$.

b) El área de la zona punteada es el valor de la integral definida entre 0 y 3 de la diferencia entre las dos funciones: $g(x)-f(x)$.

$$g(x)-f(x)=-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+4-\left(x^3-4x^2+4x\right)=-\frac{x^2-2x+1}{4}+4-x^3+4x^2-4x=$$

$$=\frac{-x^2+2x-1+16-4x^3+16x^2-16x}{4}=\frac{-4x^3+15x^2-14x+15}{4}$$

$$\int_0^3 g(x)-f(x)\,dx=\int_0^3\frac{-4x^3+15x^2-14x+15}{4}dx=\frac{1}{4}\int_0^3 -4x^3+15x^2-14x+15dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left[-x^4+5x^3-7x^2+15x\right]_0^3=\frac{1}{4}\left(3^4-5\cdot3^3+7\cdot3^2-15\cdot3-0\right)=\frac{1}{4}(36)=\boxed{9}$$

El área de la zona punteada es de 9 unidades cuadradas.

c) Como el área del logotipo es $\frac{175}{12}$ m^2 y la zona punteada es de 9 m^2 entonces la zona rayada tiene un área de $\frac{175}{12}-9=\frac{67}{12}\simeq 5.583$ m^2.

Se quiere pintar la parte punteada de color azul (9 m^2) y la parte rayada de color rojo ($\frac{67}{12}\simeq 5.583$ m^2). Como $9>5.583$ se necesita más pintura de color azul.

4. Se estima que el 20 % de los habitantes de una región padecen algún tipo de arritmia. Para diagnosticarla, existe la posibilidad de colocar al paciente un monitor Holter, que detecta la arritmia en un 95 % de los casos de personas que la padecen, pero que también da falsos positivos, por motivos eléctricos, en personas que no padecen arritmias en un 0,5 % de los casos.

a) Si se escogen 4 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas padezca arritmias? [0,75 puntos]

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar obtenga un diagnóstico positivo de arritmia? [0,75 puntos]

c) Si una persona obtiene un diagnóstico negativo en la prueba del Holter, ¿cuál es la probabilidad de que realmente padezca arritmias? [1 punto]

Llamamos A al suceso "sufrir arritmia" y D al suceso "el monitor Holter detecta la arritmia".

Por los datos proporcionados sabemos que $P(A)=0.20, P(D/A)=0.95,\ P(D/\overline{A})=0.005$.

a) Consideramos la variable binomial que cuenta el número de personas que sufren arritmia de un grupo de 4. X = B(4, 0.2).

Nos piden calcular $P(X\geq 1)$. Calculamos esta probabilidad usando el suceso contrario.

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{4}{0}0.2^0\cdot 0.8^4=1-0.8^4=\frac{369}{625}=\boxed{0.5904}$$

La probabilidad de que al menos una de las 4 personas padezca arritmias es de 0.5904.

b) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(\overline{A})P(D/\overline{A})=0.2\cdot 0.95+0.8\cdot 0.005=\boxed{0.194}$$

La probabilidad de que una persona escogida al azar obtenga un diagnóstico positivo de arritmia es de 0.194.

c) Nos piden calcular $P(A/\overline{D})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/\overline{D})=\frac{P(A\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{P(A)P(\overline{D}/A)}{1-P(D)}=\frac{P(A)\left[1-P(D/A)\right]}{1-P(D)}=$$

$$=\frac{0.2\cdot(1-0.95)}{1-0.194}=\boxed{\frac{5}{403}\simeq 0.0124}$$

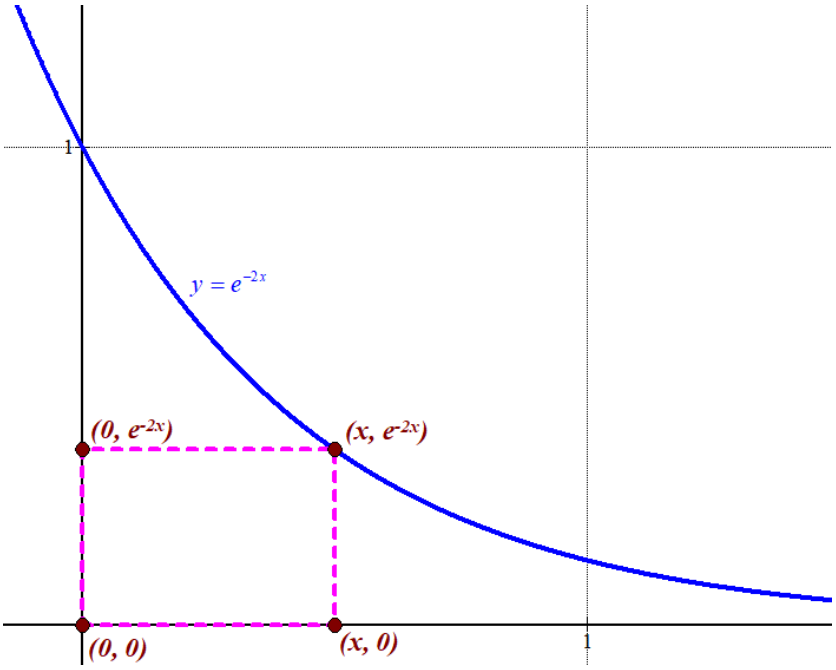
La probabilidad de que una persona que ha dado negativo en la prueba de Holter realmente padezca arritmias tiene un valor aproximado de 0.0124.

5. Para cada punto (x, y) de la curva $y = e^{-2x}$, con $x > 0$ e $y > 0$, considere el rectángulo con vértices en los puntos $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ y (x, y).

a) Compruebe que, de entre todos estos rectángulos, el que tiene $x = \frac{1}{2}$ es el de área máxima. ¿Cuál es el valor de esta área? [1,5 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $y = e^{-2x}$ en el punto de abscisa $x = 0$, y su punto de corte con el eje de abscisas. [1 punto]

a) Dibujamos la situación planteada.



Obtenemos la expresión del área del rectángulo del dibujo: $A(x) = x \cdot e^{-2x}$.

Derivamos la función y obtenemos los valores donde se anula la derivada (puntos críticos).

$$A(x) = x \cdot e^{-2x} \Rightarrow A'(x) = e^{-2x} + x(-2)e^{-2x} = (1-2x)e^{-2x}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow (1-2x)e^{-2x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-2x} = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ 1-2x = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

Sustituimos el valor obtenido $x = \frac{1}{2}$ en la segunda derivada para determinar si es un máximo de la función.

$$A'(x) = (1-2x)e^{-2x} \Rightarrow A''(x) = (-2)e^{-2x} + (1-2x)(-2)e^{-2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A''\left(\frac{1}{2}\right) = (-2)e^{-2\frac{1}{2}} + \left(1-2\frac{1}{2}\right)(-2)e^{-2\frac{1}{2}} = -2e^{-1} + 0 = -\frac{2}{e} < 0$$

Como el signo de la segunda derivada es negativo la función presenta un máximo en $x=\frac{1}{2}$.

Como $A\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot e^{-2\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2e}\simeq 0.184$ el área máxima tiene un valor de $\frac{1}{2e}\simeq 0.184$ unidades cuadradas.

b) La ecuación de la recta tangente a la función $y=e^{-2x}$ en el punto de abscisa $x = 0$ tiene la expresión $y-y(0)=y'(0)(x-0)$.

$$\left.\begin{array}{l} y=e^{-2x}\rightarrow y(0)=e^{0}=1 \\ y'=-2e^{-2x}\rightarrow y'(0)=-2e^{0}=-2 \\ y-y(0)=y'(0)(x-0) \end{array}\right\}\Rightarrow y-1=-2x\Rightarrow \boxed{y=1-2x}$$

La ecuación de la recta tangente a la función $y=e^{-2x}$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y=1-2x$. Hallamos el punto de corte de la tangente con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} y=1-2x \\ Eje\ de\ abscisas\rightarrow y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1-2x=0\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{P\left(\frac{1}{2},0\right)}$$

El punto de corte de la tangente y el eje de abscisas es $P\left(\frac{1}{2},0\right)$.

6. Considere el punto $P = (1, 3, 0)$ y el plano π de ecuación $x+2y-2z=-7$.

a) Sea r la recta que es perpendicular a π y pasa por P. Calcule el punto de intersección de π con r. [1 punto]

b) Calcule la distancia d del punto P al plano π. [0,5 puntos]

c) Calcule la ecuación de otro plano π' que sea paralelo a π y que también esté a distancia d de P. [1 punto]

a) Al ser la recta perpendicular al plano un vector director de la recta es el vector normal del plano. Determinamos la ecuación de la recta.

$$\pi: x+2y-2z=-7 \Rightarrow \vec{n}=(1,2,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=\vec{n}=(1,2,-2)\\ P(1,3,0)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{r:\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=3+2\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R}\\ z=-2\alpha\end{cases}}$$

La recta r que es perpendicular a π y pasa por P tiene ecuación $r:\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=3+2\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R}\\ z=-2\alpha\end{cases}$.

Hallamos el punto de corte de plano y recta.

$$\left.\begin{array}{l}r:\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=3+2\alpha\\ z=-2\alpha\end{cases}\\ \pi: x+2y-2z=-7\end{array}\right\}\Rightarrow 1+\alpha+2(3+2\alpha)-2(-2\alpha)=-7\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\alpha+6+4\alpha+4\alpha=-7\Rightarrow 9\alpha=-14\Rightarrow \alpha=\frac{-14}{9}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=1-\dfrac{14}{9}=\dfrac{-5}{9}\\ y=3+2\dfrac{-14}{9}=\dfrac{-1}{9}\\ z=-2\dfrac{-14}{9}=\dfrac{28}{9}\end{cases}\Rightarrow \boxed{P\left(\frac{-5}{9},\frac{-1}{9},\frac{28}{9}\right)}$$

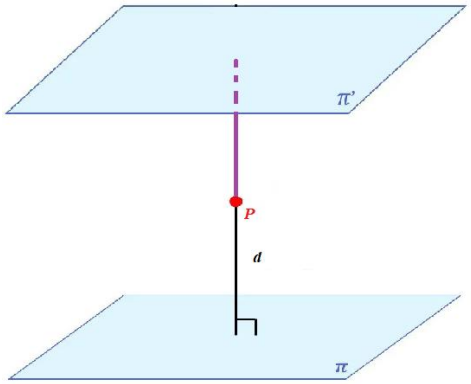
El punto de corte de plano y recta es $P\left(\frac{-5}{9},\frac{-1}{9},\frac{28}{9}\right)$.

b) Calculamos la distancia pedida usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+2y-2z+7=0\\ P=(1,3,0)\end{array}\right\}\Rightarrow d(\pi,P)=\frac{|1+2\cdot 3-2\cdot 0+7|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{14}{\sqrt{9}}=\frac{14}{3}\simeq 4.667\,unidades$$

La distancia del punto P al plano π tiene un valor $d=\frac{14}{3}$ unidades.

c) Deseamos hallar un plano π´ paralelo a $\pi: x+2y-2z+7=0$ por lo que su ecuación será $\pi': x+2y-2z+D=0$. Debemos determinar el valor de D para que la distancia de π´ a P sea $d=\frac{14}{3}$.



$$\left.\begin{array}{l}\pi': x+2y-2z+D=0\\ P=(1,3,0)\\ d(\pi',P)=\frac{14}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow d(\pi',P)=\frac{|1+2\cdot 3-2\cdot 0+D|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{14}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|7+D|}{3}=\frac{14}{3}\Rightarrow |7+D|=14\Rightarrow \begin{cases}7+D=14\rightarrow D=7\rightarrow \pi: x+2y-2z+7=0\\ 7+D=-14\rightarrow D=-21\rightarrow \boxed{\pi': x+2y-2z-21=0}\end{cases}$$

El plano paralelo a π y que esté a distancia $\frac{14}{3}$ de P tiene ecuación $\pi': x+2y-2z-21=0$.

PAU junio (serie 1) 2024

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2024

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 1

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Considere la función $f(x) = 2\dfrac{\ln x}{x}$ definida para $x > 0$.

a) Estudie sus máximos y sus mínimos, y sus zonas de crecimiento y de decrecimiento. [1 punto]

b) ¿Esta función tiene asíntotas? Haga un esbozo de su gráfica. [1 punto]

c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. [0,5 puntos]

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 4x + 2y - z &= 4 \\ x - y + kz &= 3 \\ 3x + 3y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

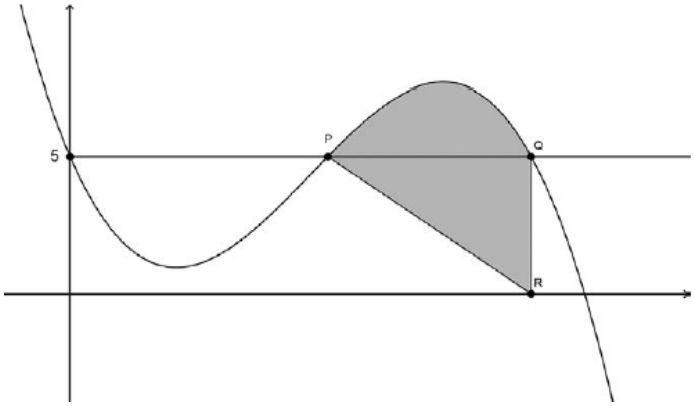
donde k es un parámetro real.

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k, y resuélvalo para $k = 0$. [1 punto]

b) Resuelva el sistema para $k = -1$. [0,75 puntos]

c) Para $k = -1$, modifique la tercera ecuación de manera que el sistema resulte incompatible. Justifique la respuesta. [0,75 puntos]

3. Joan encuentra entre los papeles de su abuelo un esbozo como el de la figura adjunta, donde se describe un terreno de regadío que ha dejado en herencia a su padre.



La curva de la gráfica es $y = f(x)$, con $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

a) A partir de la expresión de $f(x)$, calcule las coordenadas de los puntos P, Q y R indicados en la figura. Calcule también la ecuación de la recta PR. [1,25 puntos]

b) Calcule la superficie del terreno. [1,25 puntos]

4. Andreu pone las nueve bolas que se muestran a continuación dentro de una bolsa.

a) A continuación, saca de la bolsa dos bolas al azar, una después de otra y sin reemplazo (es decir, no devuelve a la bolsa la primera bola antes de sacar la segunda).

— Calcule la probabilidad de que la primera bola sea una A o una E. [0,5 puntos]

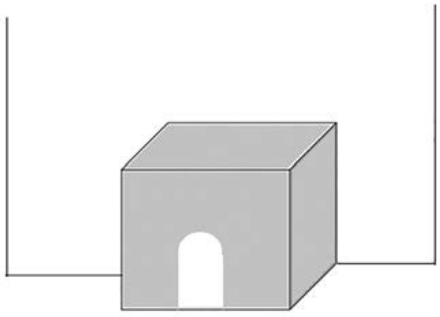
— Calcule la probabilidad de que las dos bolas sean diferentes. [0,75 puntos]

b) Andreu vuelve a poner todas las bolas en la bolsa y saca cinco al azar, una detrás de otra, pero ahora con reemplazo (es decir, devolviendo a la bolsa cada bola extraída antes de sacar la siguiente).

— Calcule la probabilidad de que no haya sacado ninguna A. [0,5 puntos]

— Calcule la probabilidad de que haya sacado al menos dos A. [0,75 puntos]

5. Se quiere construir un pequeño cobertizo de madera de 6 m^3 de volumen, en forma de prisma rectangular, adosado a la pared lateral de una casa, para guardar leña. Solo hay que construir, por tanto, el techo y tres paredes (la pared del fondo del cobertizo es la de la casa a la que está adosado). Además, se quiere que el cobertizo mida el triple de anchura que de profundidad. Cada metro cuadrado de pared tiene un coste de construcción de 30 € y el techo cuesta 50 € por metro cuadrado. Una vez construido el cobertizo, añadir una puerta tiene un coste fijo de 35 €.



a) Compruebe que el coste de construcción del cobertizo viene dado por la función $C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35$, donde x es la profundidad del cobertizo en metros. [1,25 puntos]

b) Calcule cuáles han de ser las dimensiones del cobertizo para que el coste de construcción sea mínimo y justifique la respuesta. ¿Cuál es este coste? [1,25 puntos]

6. Considere los puntos $A = (1, 2, 3)$ y $B = (–3, –2, 3)$.

a) Calcule la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto medio entre A y B. Justifique que este plano está formado, precisamente, por los puntos $P = (x, y, z)$ que están a igual distancia de A que de B, es decir, $d(P, A) = d(P, B)$. [1 punto]

b) Calcule las distancias de A y de B al plano π y compruebe que son iguales. ¿Es casualidad? Razone la respuesta. [0,75 puntos]

c) Sea $C = (–7, 6, 3)$. ¿El triángulo ABC es isósceles? Calcule su área. [0,75 puntos]

SOLUCIONES

1. Considere la función $f(x)=2\dfrac{\ln x}{x}$ definida para $x>0$.

a) Estudie sus máximos y sus mínimos, y sus zonas de crecimiento y de decrecimiento. [1 punto]
b) ¿Esta función tiene asíntotas? Haga un esbozo de su gráfica. [1 punto]
c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$. [0,5 puntos]

a) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

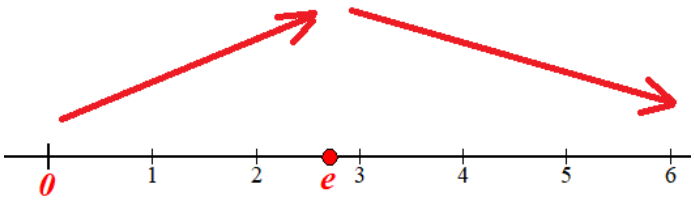
$$f(x)=2\frac{\ln x}{x}\Rightarrow f'(x)=2\frac{\frac{1}{x}x-1\cdot\ln x}{x^2}=2\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 2\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow \boxed{x=e}$$

La función tiene un punto crítico en $x=e$.
Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(0,e)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=2\dfrac{1-\ln 1}{1^2}=2>0$. La función crece en $(0,e)$.
- En el intervalo $(e,+\infty)$ tomamos $x=e^2$ y la derivada vale $f'(e^2)=2\dfrac{1-\ln e^2}{(e^2)^2}=2\dfrac{-1}{e^4}=\dfrac{-2}{e^4}<0$. La función decrece en $(e,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(0,e)$ y decrece en $(e,+\infty)$.
La función tiene un máximo relativo en $x=e$.

b) Esta función es continua en su dominio $(0,+\infty)$.
Calculamos el límite de la función cuando x tiende a 0^+.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 2\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+} 2\frac{1}{x}\ln x=2(+\infty)(-\infty)=-\infty$$

La función tiene la recta $x=0$ como asíntota vertical.
Comprobamos si tiene asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\frac{\ln x}{x} = 2\frac{+\infty}{+\infty} = In\det er\min ación(L´Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} 2\frac{1}{x} = 2\frac{1}{+\infty} = 0$$

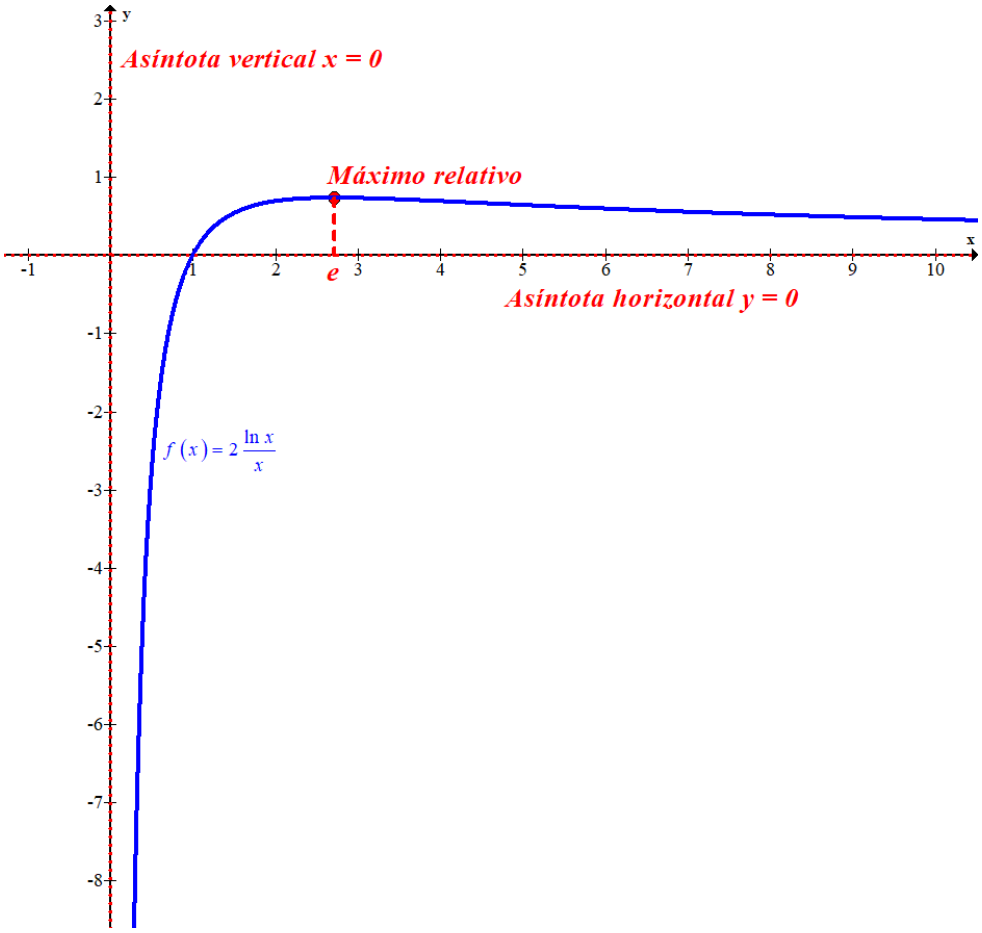
La función tiene la recta $y=0$ como asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

La función no tiene asíntotas oblicuas.

c) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=2\frac{\ln x}{x}$ en $x=1$ es $y-f(1)=f´(1)(x-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} y-f(1)=f´(1)(x-1) \\ f(1)=2\frac{\ln 1}{1}=0 \\ f´(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow f´(1)=2\frac{1-\ln 1}{1^2}=2 \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=2(x-1) \Rightarrow \boxed{y=2x-2}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=2\frac{\ln x}{x}$ en $x=1$ es $y=2x-2$.



2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 4x+2y-z&=4\\ x-y+kz&=3\\ 3x+3y&=1\end{aligned}\right\}$$

donde k es un parámetro real.

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k, y resuélvalo para $k = 0$. [1 punto]

b) Resuelva el sistema para $k = -1$. [0,75 puntos]

c) Para $k = -1$, modifique la tercera ecuación de manera que el sistema resulte incompatible. Justifique la respuesta. [0,75 puntos]

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}4&2&-1\\1&-1&k\\3&3&0\end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix}4&2&-1&4\\1&-1&k&3\\3&3&0&1\end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix}4&2&-1\\1&-1&k\\3&3&0\end{vmatrix}=0+6k-3-3-0-12k=-6k-6$$

$$|A|=0\Rightarrow -6k-6=0\Rightarrow -6k=6\Rightarrow \boxed{k=\frac{6}{-6}=-1}$$

Estudiamos dos casos diferentes.

CASO 1. $k\neq -1$**.**

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $k=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}4&2&-1&4\\1&-1&-1&3\\3&3&0&1\end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}4&2&-1&4\\1&-1&-1&3\\3&3&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\text{Fila } 3^{\text{a}} & -3\cdot\text{Fila } 2^{\text{a}} & & \\ 3&3&0&1\\ \hline -3&3&3&-9\\ 0&6&3&-8\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{Fila } 1^{\text{a}} \; -4\cdot \text{ Fila } 2^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 4 & 2 & -1 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & -12 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 6 & 3 & -8 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{Fila } 3^{\text{a}} \; - \text{Fila } 2^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 6 & 3 & -8 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{4}^{A/B} & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \\ \underbrace{0}_{A} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $k \neq -1$ el sistema es **compatible determinado** y para $k = -1$ el sistema es **compatible indeterminado**.

Resolvemos el sistema para k = 0.

$$\left.\begin{array}{r} 4x+2y-z=4 \\ x-y=3 \\ 3x+3y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+2y-z=4 \\ x=3+y \\ 3x+3y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4(3+y)+2y-z=4 \\ 3(3+y)+3y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 12+4y+2y-z=4 \\ 9+3y+3y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 6y=-8 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 6y-z=-8 \\ \boxed{y=\dfrac{-8}{6}=\dfrac{-4}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 6\dfrac{-4}{3}-z=-8 \Rightarrow -8-z=-8 \Rightarrow \boxed{z=0} \\ \boxed{x=3-\dfrac{4}{3}=\dfrac{5}{3}} \end{array}\right.$$

Para k = 0 la solución del sistema es $x=\frac{5}{3}$, $y=\frac{-4}{3}$, $z=0$.

b) Si $k=-1$ el sistema es compatible indeterminado (CASO 2).
Buscamos las soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+2y-z=4 \\ 6y+3z=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+2y-z=4 \\ 3z=-8-6y \rightarrow z=\dfrac{-8}{3}-2y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+2y+\frac{8}{3}+2y=4\Rightarrow 4x=4-\frac{8}{3}-4y\Rightarrow 4x=\frac{4}{3}-4y\Rightarrow x=\frac{1}{3}-y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}-\lambda\\ y=\lambda \qquad ;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\frac{-8}{3}-2\lambda\end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $x=\frac{1}{3}-\lambda;\ y=\lambda;\ z=\frac{-8}{3}-2\lambda;$ para cualquier $\lambda\in\mathbb{R}$.

c) Para $k=-1$ el sistema queda $\left.\begin{matrix}4x+2y-z=4\\ x-y-z=3\\ 3x+3y=1\end{matrix}\right\}$. Cambiamos el término independiente de la tercera ecuación por "a" y utilizamos el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B=\begin{pmatrix}4&2&-1&4\\1&-1&-1&3\\3&3&0&a\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Fila } 3^{\text{a}}\ -3\cdot\text{Fila } 2^{\text{a}}\\ 3\quad 3\quad 0\quad a\\ -3\quad 3\quad 3\quad -9\\ \hline 0\quad 6\quad 3\quad a-9\rightarrow\text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

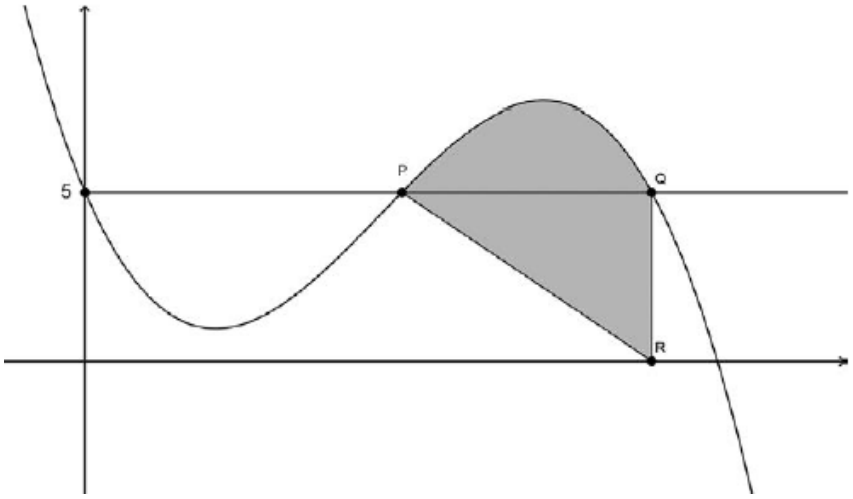
$$\left\{\begin{matrix}\text{Fila } 1^{\text{a}}\ -4\cdot\text{ Fila } 2^{\text{a}}\\ 4\quad 2\quad -1\quad 4\\ -4\quad 4\quad 4\quad -12\\ \hline 0\quad 6\quad 3\quad -8\rightarrow\text{Nueva Fila } 2^{\text{a}}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}4&2&-1&4\\0&6&3&-8\\0&6&3&a-9\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{Fila } 3^{\text{a}}\ -\text{Fila } 2^{\text{a}}\\ 0\quad 6\quad 3\quad a-9\\ 0\quad -6\quad -3\quad 8\\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad a-1\rightarrow\text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\begin{matrix}\overbrace{\begin{matrix}4&2&-1&4\\0&6&3&-8\end{matrix}}^{A/B}\\ \underbrace{\begin{matrix}0&0&0\end{matrix}}_{A}\quad a-1\end{matrix}\right)$$

Para que sea un sistema incompatible "a" debe tomar cualquier valor distinto de 1, por ejemplo 2.

Un sistema incompatible sería $\left.\begin{matrix}4x+2y-z=4\\ x-y-z=3\\ 3x+3y=2\end{matrix}\right\}$.

3. Joan encuentra entre los papeles de su abuelo un esbozo como el de la figura adjunta, donde se describe un terreno de regadío que ha dejado en herencia a su padre.



La curva de la gráfica es $y = f(x)$, con $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

a) A partir de la expresión de $f(x)$, calcule las coordenadas de los puntos P, Q y R indicados en la figura. Calcule también la ecuación de la recta PR. [1,25 puntos]

b) Calcule la superficie del terreno. [1,25 puntos]

a) La recta horizontal que corta el terreno tiene ecuación $y = 5$, por lo que los puntos P y Q tienen coordenadas P(p,5) y Q(q,5).
Los puntos P y Q son los puntos de corte de la recta $y = 5$ con la curva.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5 \\ y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^3 + 7x^2 - 6x + 5 = 5 \Rightarrow -x^3 + 7x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(-x^2 + 7x - 6\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow A(0,5) \\ -x^2 + 7x - 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(-1)(-6)}}{2(-1)} = \\ \quad = \dfrac{-7 \pm 5}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-7+5}{-2} = 1 = x \rightarrow \boxed{P(1,5)} \\ \dfrac{-7-5}{-2} = 6 = x \rightarrow \boxed{Q(6,5)} \end{cases} \end{cases}$$

El punto P tiene coordenadas P(1, 5) y el punto Q tiene coordenadas Q(6. 5).
El punto R está en la misma vertical que el punto Q por lo que tiene coordenadas R(6, 0).

Hallamos la ecuación de la recta PR.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PR} = (6,0) - (1,5) = (5,-5) \rightarrow m = \dfrac{-5}{5} = -1 \\ R(6,0) \in \text{recta } PR \end{array}\right\} \Rightarrow y - 0 = -1(x - 6) \Rightarrow \boxed{y = -x + 6}$$

La ecuación de la recta PR es $y=-x+6$.

b) La superficie del terreno es el valor de la integral definida entre 1 y 6 de la diferencia entre la curva y la recta.

$$Área=\int_1^6 -x^3+7x^2-6x+5-\left(-x+6\right)dx=\int_1^6 -x^3+7x^2-5x-1dx=$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+7\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}-x\right]_1^6=\left[-\frac{6^4}{4}+7\frac{6^3}{3}-5\frac{6^2}{2}-6\right]-\left[-\frac{1^4}{4}+7\frac{1^3}{3}-5\frac{1^2}{2}-1\right]=$$

$$=-324+504-90-6+\frac{1}{4}-\frac{7}{3}+\frac{5}{2}+1=\boxed{\frac{1025}{12}\simeq 85.4167\ u^2}$$

El terreno tiene una superficie de $\frac{1025}{12}\simeq 85.4167\ u^2$.

4. Andreu pone las nueve bolas que se muestran a continuación dentro de una bolsa.

a) A continuación, saca de la bolsa dos bolas al azar, una después de otra y sin reemplazo (es decir, no devuelve a la bolsa la primera bola antes de sacar la segunda).
— Calcule la probabilidad de que la primera bola sea una A o una E. [0,5 puntos]
— Calcule la probabilidad de que las dos bolas sean diferentes. [0,75 puntos]

b) Andreu vuelve a poner todas las bolas en la bolsa y saca cinco al azar, una detrás de otra, pero ahora con reemplazo (es decir, devolviendo a la bolsa cada bola extraída antes de sacar la siguiente).
— Calcule la probabilidad de que no haya sacado ninguna A. [0,5 puntos]
— Calcule la probabilidad de que haya sacado al menos dos A. [0,75 puntos]

a) Hay 9 bolas que puede extraerse en la primera extracción. De estas hay dos A y una E. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que la primera bola sea una A o una E es $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

Las únicas bolas repetidas son la A y la S. Llamamos R al suceso "sacar dos bolas repetidas" = "sacar dos A o dos S". Calculamos la probabilidad del suceso R.

$$P(R)=P(A1)P(A2/A1)+P(S1)P(S2/S1)=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\boxed{\frac{1}{18}}$$

El suceso "sacar dos bolas diferentes" es el suceso complementario del suceso R. Calculamos su probabilidad como la probabilidad de R^C.

$$P(R^C)=1-P(R)=1-\frac{1}{18}=\boxed{\frac{17}{18}}$$

La probabilidad de que las dos bolas sean diferentes tiene un valor de $\frac{17}{18}\simeq 0.9444$.

b) La probabilidad de sacar A en una extracción es 2/9 y la de no sacar A es 7/9.
La probabilidad de no sacar ninguna A en 5 extracciones es:

$$P(\textit{Ninguna } A)=P(A1^C\cap A2^C\cap A3^C\cap A4^C\cap A5^C)=$$

$$=P(A1^C)\cdot P(A2^C)\cdot P(A3^C)\cdot P(A4^C)\cdot P(A5^C)=\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}=\left(\frac{7}{9}\right)^5\simeq 0.2846$$

El suceso complementario de B = "sacar al menos dos A en 5 extracciones" es B^C = "sacar 1 o ninguna A en 5 extracciones".
Calculamos la probabilidad de B^C.

$$P\left(B^C\right)=P\left(sacar\,0\,veces\,A\right)+P\left(sacar\,1\,vez\,A\right)=$$

$$=P\left(\text{sacar 5 veces letra distinta de A}\right)+P\left(A1\cap A2^C\cap A3^C\cap A4^C\cap A5^C\right)+$$

$$+P\left(A1^C\cap A2\cap A3^C\cap A4^C\cap A5^C\right)+P\left(A1^C\cap A2^C\cap A3\cap A4^C\cap A5^C\right)+$$

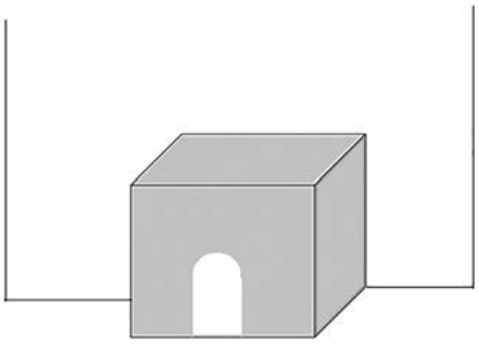
$$+P\left(A1^C\cap A2^C\cap A3^C\cap A4\cap A5^C\right)+P\left(A1^C\cap A2^C\cap A3^C\cap A4^C\cap A5\right)=$$

$$=\left(\frac{7}{9}\right)^5+\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{9}=$$

$$=\left(\frac{7}{9}\right)^5+5\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^4\simeq\boxed{0.6912}$$

Aplicando la probabilidad del suceso complementario tenemos que la probabilidad de que haya sacado al menos dos A vale $1-P\left(B^C\right)=1-0.6912=0.3088$.

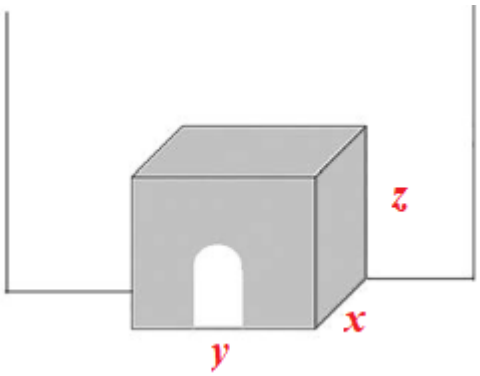
5. Se quiere construir un pequeño cobertizo de madera de 6 m^3 de volumen, en forma de prisma rectangular, adosado a la pared lateral de una casa, para guardar leña. Solo hay que construir, por tanto, el techo y tres paredes (la pared del fondo del cobertizo es la de la casa a la que está adosado). Además, se quiere que el cobertizo mida el triple de anchura que de profundidad. Cada metro cuadrado de pared tiene un coste de construcción de 30 € y el techo cuesta 50 € por metro cuadrado. Una vez construido el cobertizo, añadir una puerta tiene un coste fijo de 35 €.



a) Compruebe que el coste de construcción del cobertizo viene dado por la función $C(x)=\frac{300}{x}+150x^2+35$, donde *x* es la profundidad del cobertizo en metros. [1,25 puntos]

b) Calcule cuáles han de ser las dimensiones del cobertizo para que el coste de construcción sea mínimo y justifique la respuesta. ¿Cuál es este coste? [1,25 puntos]

a) Llamamos "*x*" a la profundidad, "*y*" a la anchura y "z" a la altura del cobertizo.



El cobertizo mide el triple de anchura que de profundidad → $y=3x$.

El cobertizo de madera tiene 6 m^3 de volumen → $xyz=6\Rightarrow z=\frac{6}{xy}=\frac{6}{x\cdot 3x}=\frac{2}{x^2}$.

Calculamos la superficie de las tres paredes.

$$Paredes=2xz+yz=2x\frac{2}{x^2}+3x\frac{2}{x^2}=\frac{4}{x}+\frac{6}{x}=\frac{10}{x}$$

Calculamos la superficie del techo.

$$Techo=xy=x3x=3x^2$$

Calculamos el coste total sumando el coste de las paredes más el coste del techo.

Cada metro cuadrado de pared tiene un coste de construcción de 30 € y el techo cuesta 50 € por metro cuadrado → $C(x)=30\frac{10}{x}+50\cdot 3x^2=\frac{300}{x}+150x^2$.

Añadir una puerta tiene un coste fijo de 35 € → $C(x)=\frac{300}{x}+150x^2+35$.

El coste del cobertizo en función de la profundidad del cobertizo (x) tiene la expresión $C(x)=\frac{300}{x}+150x^2+35$.

b) Derivamos la función coste y buscamos cuando se anula.

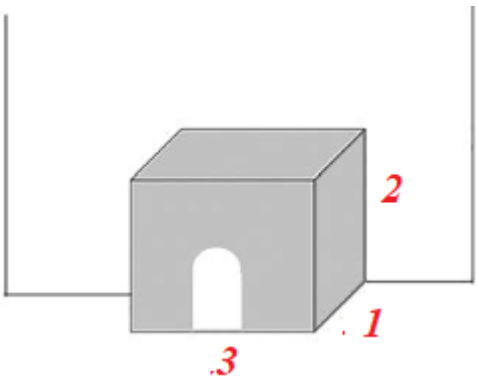
$$C(x)=\frac{300}{x}+150x^2+35 \Rightarrow C'(x)=-\frac{300}{x^2}+300x$$

$$C'(x)=0 \Rightarrow -\frac{300}{x^2}+300x=0 \Rightarrow 300x=\frac{300}{x^2} \Rightarrow 300x^3=300 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{1}=1}$$

Sustituimos $x = 1$ en la segunda derivada para averiguar si en dicho valor la función tiene un máximo o un mínimo.

$$C'(x)=-\frac{300}{x^2}+300x \Rightarrow C''(x)=2\frac{300}{x^3}+300 \Rightarrow C''(1)=2\frac{300}{1^3}+300=900>0$$

Al tener la segunda derivada un valor positivo podemos afirmar que la función coste tiene un mínimo relativo en $x = 1$.
Las medidas del cobertizo con coste mínimo son 1 metro de profundidad, 3 metros de anchura y $\frac{2}{1^2}=2$ metros de altura.



Sustituimos $x = 1$ en la función coste y obtenemos el coste mínimo del cobertizo.

$$C(1)=\frac{300}{1}+150\cdot 1^2+35=485$$

El coste mínimo tiene un valor de 485 euros.

6. Considere los puntos $A = (1, 2, 3)$ y $B = (–3, –2, 3)$.

a) Calcule la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto medio entre A y B. Justifique que este plano está formado, precisamente, por los puntos $P=(x,y,z)$ que están a igual distancia de A que de B, es decir, $d(P, A) = d(P, B)$. [1 punto]

b) Calcule las distancias de A y de B al plano π y compruebe que son iguales. ¿Es casualidad? Razone la respuesta. [0,75 puntos]

c) Sea $C = (–7, 6, 3)$. ¿El triángulo ABC es isósceles? Calcule su área. [0,75 puntos]

a) El plano π que es perpendicular a la recta AB tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{AB}=(-3,-2,3)-(1,2,3)=(-4,-4,0)$. Tomamos como vector normal del plano este vector dividido entre –4.

Hallamos del punto P punto medio del segmento AB.

$$P=\frac{(1,\ 2,\ 3)+(-3,\ -2,\ 3)}{2}=(-1,0,3)$$

Hallamos la ecuación del plano π como la ecuación del plano que pasa por P(–1,0,3) y tiene como vector normal el vector $\frac{1}{-4}\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{-4}=(1,1,0)\\ P=(-1,0,3)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi: x+y+D=0\\ P=(-1,0,3)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow -1+0+D=0\Rightarrow D=1\Rightarrow \boxed{\pi: x+y+1=0}$$

El plano π que es perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto medio entre A y B tiene ecuación $\pi: x+y+1=0$.

Comprobamos que los puntos del plano $P=(x,y,z)$ están a igual distancia de A que de B, es decir, $d(P, A) = d(P, B)$.

$$\left.\begin{array}{l}P(x,y,z)\in\pi\\ \pi: x+y+1=0\Rightarrow \pi: y=-1-x\end{array}\right\}\Rightarrow P(x,-1-x,z)$$

$$\overrightarrow{AP}=(x,-1-x,z)-(1,2,3)=(x-1,-3-x,z-3)$$

$$\overrightarrow{BP}=(x,-1-x,z)-(-3,-2,3)=(x+3,1-x,z-3)$$

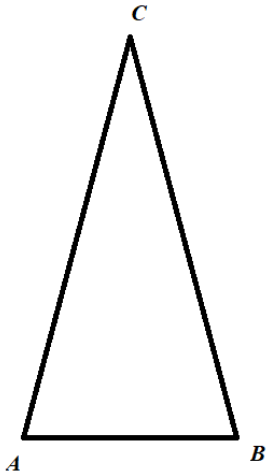
$$\left.\begin{array}{l}d(P,A)=\left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{(x-1)^2+(-3-x)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(1-x)^2+(3+x)^2+(z-3)^2}\\ d(P,B)=\left|\overrightarrow{BP}\right|=\sqrt{(x+3)^2+(1-x)^2+(z-3)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(P,A)=d(P,B)$$

b) Por lo visto en el apartado anterior todos los puntos del plano están a la misma distancia de los puntos A y B, por lo que el plano pasa por el punto medio del segmento AB y es perpendicular a la recta AB. Por ello la distancia de A y de B al plano es la misma.
Comprobamos que $d(A,\pi)=d(B,\pi)$.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+y+1=0\\ A(1,2,3)\end{array}\right\}\Rightarrow d(A,\pi)=\frac{|1+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}$$
$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+y+1=0\\ B(-3,-2,3)\end{array}\right\}\Rightarrow d(B,\pi)=\frac{|-3-2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow d(A,\pi)=d(B,\pi)=2\sqrt{2}$$

c) Para que el triángulo *ABC* sea isósceles debe tener dos lados iguales y un tercero desigual.



Hallamos la longitud de los lados.

$$\overrightarrow{AC}=(-7,6,3)-(1,2,3)=(-8,4,0)\Rightarrow d(A,C)=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-8)^2+4^2}=4\sqrt{5}$$
$$\overrightarrow{BC}=(-7,6,3)-(-3,-2,3)=(-4,8,0)\Rightarrow d(B,C)=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{8^2+(-4)^2}=4\sqrt{5}$$
$$\overrightarrow{AB}=(-3,-2,3)-(1,2,3)=(-4,-4,0)\Rightarrow d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$$

El triángulo ABC tiene dos lados iguales y uno desigual. El triángulo ABC es isósceles.
Hallamos el área del triángulo ABC como la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(-8,4,0)\\ \overrightarrow{AB}=(-4,-4,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -8 & 4 & 0\\ -4 & -4 & 0\end{vmatrix}=32k+16k=48k=(0,0,48)$$

$$\text{Área } ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{48}{2}=24$$

El triángulo ABC tiene un área de 24 unidades cuadradas.

PAU junio (serie 5) 2024

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2024

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 5

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Considere la función $f(x) = -2 + 10(x-1)\ln x$, definida para $x > 0$.

a) Compruebe que $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo [1, 1,5] y busque un intervalo de una décima de longitud que también contenga esta misma raíz. [0,75 puntos]

b) Sin calcular los puntos críticos, justifique que $f(x)$ es decreciente en el intervalo (0, 1) y creciente en (1, +∞). ¿Qué máximos y mínimos tiene esta función? [1 punto]

c) Calcule $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, y haga un esbozo de la gráfica de esta función. [0,75 puntos]

2. Considere las matrices $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Decida si la matriz $\boldsymbol{P}$ es invertible y, en caso de serlo, calcule su inversa. Explique detalladamente el procedimiento seguido. [1,25 puntos]

b) Calcule una matriz $\boldsymbol{X}$ de 3 filas y 3 columnas que cumpla $\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Q} = 2\boldsymbol{R}$. [1,25 puntos]

3. Considere las parábolas $y = f_a(x)$, con $f_a(x) = ax^2 + 2x + 5 - a$, donde a es un parámetro real.

a) Determine el valor del parámetro a para el que la recta tangente a $y = f_a(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ pasa por el punto (2, 13). [1 punto]

b) Calcule los puntos de corte de las parábolas $y = f_1(x)$ e $y = f_3(x)$. [0,5 puntos]

c) Calcule el área de la región situada entre las dos parábolas $y = f_1(x)$ e $y = f_3(x)$. [1 punto]

4. Rut usa el siguiente método para hacer los problemas de matemáticas: tira un dado equilibrado y, si el resultado es como máximo 4, piensa y resuelve el problema ella misma; si el resultado es 5 o

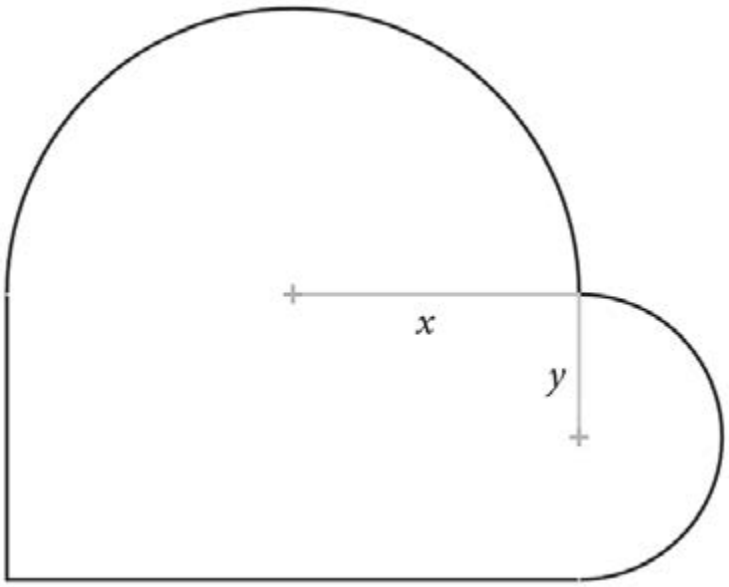
6, busca la solución del problema por Internet y la copia. Cuando es ella quien ha pensado la solución, la respuesta es correcta en el 75 % de los casos; cuando copia la solución de Internet, la respuesta es correcta solamente en el 40 % de los casos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la solución de un problema respondido siguiendo este método sea correcta? [0,75 puntos]

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un problema haya sido resuelto por Rut si se sabe que la solución es correcta? [0,75 puntos]

c) Mañana Rut tiene que entregar 5 problemas de matemáticas. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 4 sean correctos? [1 punto]

5. Carles quiere construir un decorado para la obra de teatro de final de curso en forma de un rectángulo y dos semicírculos, tal como se muestra en la siguiente figura:



a) Determine el perímetro y el área del decorado a construir en función de x y de y. [1 punto]

b) Para revestir el perímetro del decorado, Carles tiene material para cubrir hasta 10 m. Si lo quiere gastar todo, ¿cuáles serán las medidas del decorado de área máxima que podrá construir? ¿Cuál es el valor de esta área? [1,5 puntos]

6. Considere las rectas $r: \dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$ y $s: \begin{cases} x=4+2k \\ y=3+k \\ z=-1 \end{cases}$.

a) ¿Cuál es su posición relativa? Calcule la ecuación implícita de un plano π que sea paralelo a las dos rectas y que pase por el origen de coordenadas. [1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta t que corta las dos rectas r y s perpendicularmente. [1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Considere la función $f(x)=-2+10(x-1)\ln x$ definida para $x>0$.

a) Compruebe que *f*(*x*) tiene una raíz en el intervalo [1, 1,5] y busque un intervalo de una décima de longitud que también contenga esta misma raíz. [0,75 puntos]

b) Sin calcular los puntos críticos, justifique que *f*(*x*) es decreciente en el intervalo (0, 1) y creciente en (1, +∞). ¿Qué máximos y mínimos tiene esta función? [1 punto]

c) Calcule $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, y haga un esbozo de la gráfica de esta función. [0,75 puntos]

a) La función es continua en el intervalo [1, 1.5]. La función toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo:

$$f(1)=-2+10(1-1)\ln 1=-2 \qquad f(1.5)=-2+10(1.5-1)\ln 1.5=0.02>0.$$

Podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c\in(1,1.5)$ tal que $f(c)=0$.

Para reducir la amplitud del intervalo vamos probando el signo de la función en 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4.

$$f(1.1)=-2+10(1.1-1)\ln 1.1=-1.904<0 \rightarrow \text{¡No nos sirve!}$$

$$f(1.4)=-2+10(1.4-1)\ln 1.4=-0.65<0 \rightarrow \text{¡Nos sirve!}$$

Si consideramos el intervalo [1.4,1.5] la función toma signo negativo en *x = 1.4* y signo positivo en *x = 1.5*, por lo que podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c\in(1.4,1.5)$ tal que $f(c)=0$

b) Calculamos la derivada de la función.

$$f'(x)=10\ln x+10(x-1)\frac{1}{x}=10\left(\ln x+\frac{x-1}{x}\right)=10\left(\ln x+1-\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Si } x\in(0,1)\Rightarrow 0<x<1\Rightarrow\begin{cases}\ln x<0\\ \frac{1}{x}>1\Rightarrow\frac{1}{x}-1>0\Rightarrow 1-\frac{1}{x}<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=10\left(\ln x+1-\frac{1}{x}\right)<0.$$

$$\text{Si } x\in(1,+\infty)\Rightarrow x>1\Rightarrow\begin{cases}\ln x>0\\ \frac{1}{x}<1\Rightarrow\frac{1}{x}-1<0\Rightarrow 1-\frac{1}{x}>0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=10\left(\ln x+1-\frac{1}{x}\right)>0.$$

La función es decreciente en (0, 1) y creciente en (1, +∞).

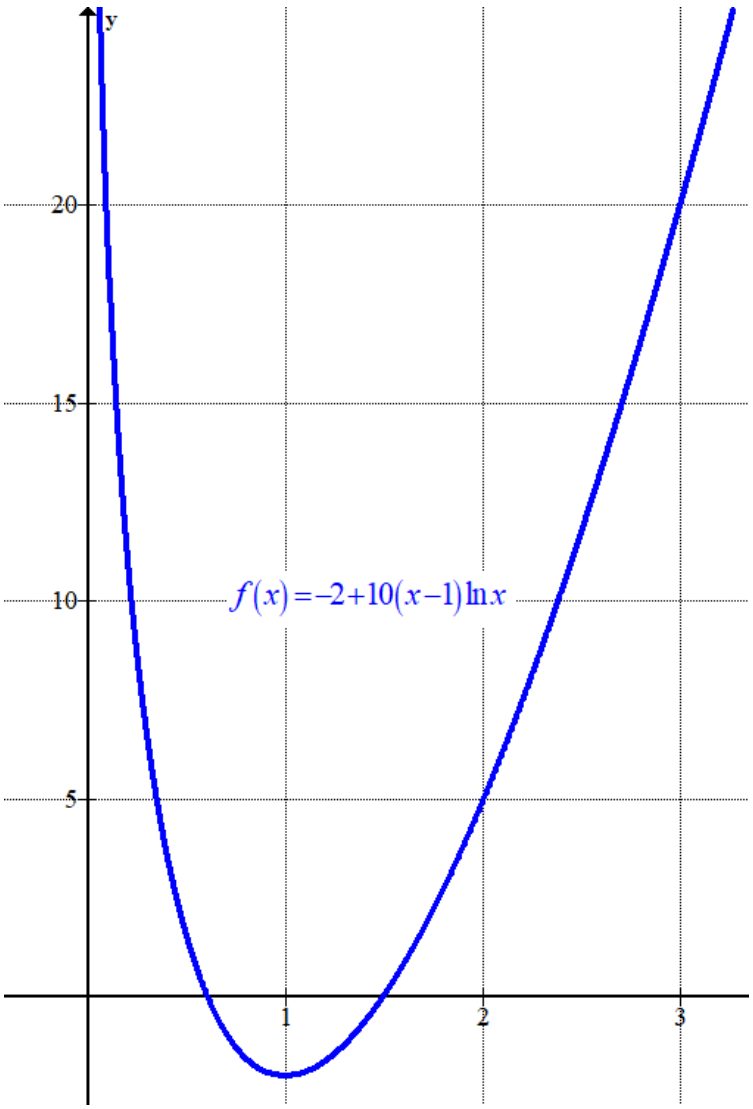
Como el signo de la derivada no cambia en ningún otro momento la función solo tiene un mínimo relativo en *x = 1*. La función no tiene máximo relativo.

c) Calculamos los límites pedidos.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}-2+10(x-1)\ln x=-2+10(0-1)\lim_{x\to 0^+}(\ln x)=-2-10(-\infty)=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -2+10(x-1)\ln x = -2+10(+\infty-1)\ln(+\infty) = -2+\infty = \boxed{+\infty}$$

Representamos la gráfica de la función.



2. Considere las matrices $P=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$ y $R=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}$

a) Decida si la matriz ***P*** es invertible y, en caso de serlo, calcule su inversa. Explique detalladamente el procedimiento seguido. [1,25 puntos]

b) Calcule una matriz ***X*** de 3 filas y 3 columnas que cumpla $\boldsymbol{P\,X}+\boldsymbol{Q}=2\boldsymbol{R}$. [1,25 puntos]

a) Para que la matriz sea invertible su determinante debe ser no nulo.

$$|P|=\begin{vmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=2+0-0+1-2-0=1\neq 0$$

Existe la matriz inversa de P. La calculamos.

$$P^{-1}=\frac{Adj\left(P^T\right)}{|P|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2&2&1\\1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\-1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&1\\-1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&2\\-1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&2\\1&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&3&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$PX+Q=2R\Rightarrow PX=2R-Q\Rightarrow X=P^{-1}\left(2R-Q\right)$$

Sustituimos las matrices y realizamos las operaciones para obtener la matriz X.

$$2R-Q=2\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\2&2&2\\6&4&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&4\\0&0&0\\4&2&0\end{pmatrix}$$

$$X=P^{-1}\left(2R-Q\right)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&3&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&4\\0&0&0\\4&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2+2&4\\-8&-4-4&-8\\0&-2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&4\\-8&-8&-8\\0&-2&-4\end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X=\begin{pmatrix}4&4&4\\-8&-8&-8\\0&-2&-4\end{pmatrix}$.

3. Considere las parábolas $y = f_a(x)$, con $f_a(x) = ax^2 + 2x + 5 - a$, donde a es un parámetro real.

a) Determine el valor del parámetro a para el que la recta tangente a $y = f_a(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ pasa por el punto (2, 13). [1 punto]

b) Calcule los puntos de corte de las parábolas $y = f_1(x)$ e $y = f_3(x)$. [0,5 puntos]

c) Calcule el área de la región situada entre las dos parábolas $y = f_1(x)$ e $y = f_3(x)$. [1 punto]

a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f_a(x) = ax^2 + 2x + 5 - a$ en $x = 1$ es $y - f_a(1) = f_a'(1)(x-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} f_a(1) = a\cdot 1^2 + 2 + 5 - a = 7 \\ f_a'(x) = 2ax + 2 \rightarrow f_a'(1) = 2a + 2 \\ y - f_a(1) = f_a'(1)(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 7 = (2a+2)(x-1)$$

Aplicamos que la recta tangente pasa por el punto (2, 13).

$$\left.\begin{array}{l} y - 7 = (2a+2)(x-1) \\ Pasa\ por\ (2,13) \end{array}\right\} \Rightarrow 13 - 7 = (2a+2)(2-1) \Rightarrow 6 = 2a + 2 \Rightarrow 4 = 2a \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Para $a = 2$ se cumple lo pedido.

b) Obtenemos los puntos de corte de las parábolas.

$$\left.\begin{array}{l} y = f_1(x) = x^2 + 2x + 5 - 1 = x^2 + 2x + 4 \\ y = f_3(x) = 3x^2 + 2x + 5 - 3 = 3x^2 + 2x + 2 \\ f_3(x) = f_1(x) \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2 + \cancel{2x} + 2 = x^2 + \cancel{2x} + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_1(1) = 1^2 + 2 + 4 = 7 \rightarrow \boxed{A(1,7)} \\ f_1(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 4 = 3 \rightarrow \boxed{B(-1,3)} \end{array}\right.$$

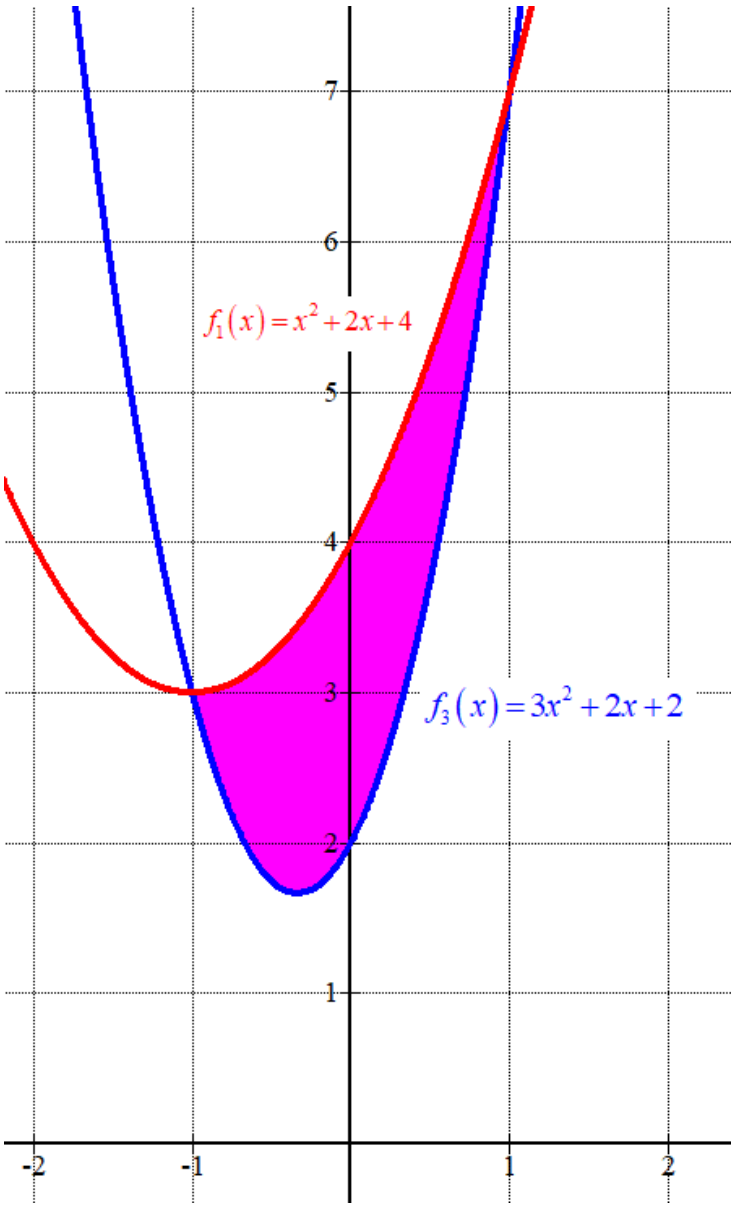
Los puntos de corte de ambas gráficas son A(1, 7) y B(–1, 3).

c) El área de la región situada entre las dos parábolas $y = f_1(x)$ e $y = f_3(x)$ es el valor absoluto de la integral definida entre –1 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x) = x^2 + 2x + 4 \\ f_3(x) = 3x^2 + 2x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1} 3x^2 + 2x + 2 - (x^2 + 2x + 4)\,dx = \int_{-1}^{1} 2x^2 - 2\,dx =$$

$$= \left[2\frac{x^3}{3} - 2x\right]_{-1}^{1} = \left[2\frac{1^3}{3} - 2\cdot 1\right] - \left[2\frac{(-1)^3}{3} - 2(-1)\right] = \frac{2}{3} - 2 + \frac{2}{3} - 2 = \frac{-8}{3}$$

El área de la región situada entre las dos parábolas $y = f_1(x)$ e $y = f_3(x)$ tiene un valor de $\frac{8}{3} \simeq 2.667$ unidades cuadradas.



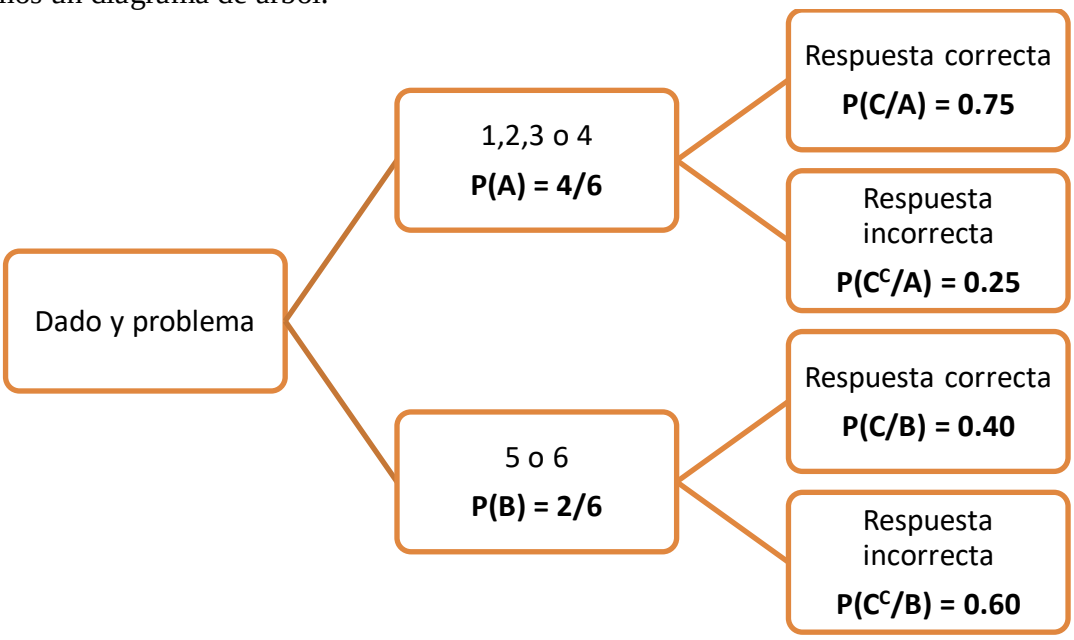
4. Rut usa el siguiente método para hacer los problemas de matemáticas: tira un dado equilibrado y, si el resultado es como máximo 4, piensa y resuelve el problema ella misma; si el resultado es 5 o 6, busca la solución del problema por Internet y la copia. Cuando es ella quien ha pensado la solución, la respuesta es correcta en el 75 % de los casos; cuando copia la solución de Internet, la respuesta es correcta solamente en el 40 % de los casos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la solución de un problema respondido siguiendo este método sea correcta? [0,75 puntos]

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un problema haya sido resuelto por Rut si se sabe que la solución es correcta? [0,75 puntos]

c) Mañana Rut tiene que entregar 5 problemas de matemáticas. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 4 sean correctos? [1 punto]

Realizamos un diagrama de árbol.



Respondemos a las preguntas planteadas.

a) Nos piden calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C)=P(A)P(C/A)+P(B)P(C/B)=\frac{4}{6}\cdot 0.75+\frac{2}{6}\cdot 0.4=\boxed{\frac{19}{30}\simeq 0.633}$$

b) Nos piden calcular $P(A/C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{P(A)P(C/A)}{P(C)}=\frac{\frac{4}{6}\cdot 0.75}{\frac{19}{30}}=\boxed{\frac{15}{19}\simeq 0.7895}$$

c) La probabilidad de que al menos 4 sean correctos es la de que sean 4 correctos y 1 incorrecto o bien los 5 correctos. Llamamos D al suceso "Al menos 4 de los 5 ejercicios son correctos".

$$P(D)=P\left(C1^{C}\cap C2\cap C3\cap C4\cap C5\right)+P\left(C1\cap C2^{C}\cap C3\cap C4\cap C5\right)+$$

$$+P\left(C1\cap C2\cap C3^{C}\cap C4\cap C5\right)+P\left(C1\cap C2\cap C3\cap C4^{C}\cap C5\right)+$$

$$+P\left(C1\cap C2\cap C3\cap C4\cap C5^{C}\right)+P\left(C1\cap C2\cap C3\cap C4\cap C5\right)=$$

$$=5\cdot\frac{11}{30}\cdot\frac{19}{30}\cdot\frac{19}{30}\cdot\frac{19}{30}\cdot\frac{19}{30}+\frac{19}{30}\cdot\frac{19}{30}\cdot\frac{19}{30}\cdot\frac{19}{30}\cdot\frac{19}{30}\simeq\boxed{0.3969}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Sea X la variable que cuenta el número de ejercicios resueltos correctamente de un grupo de 5. La probabilidad de éxito (ejercicio correcto) es 19/30. El número de repeticiones es 5.

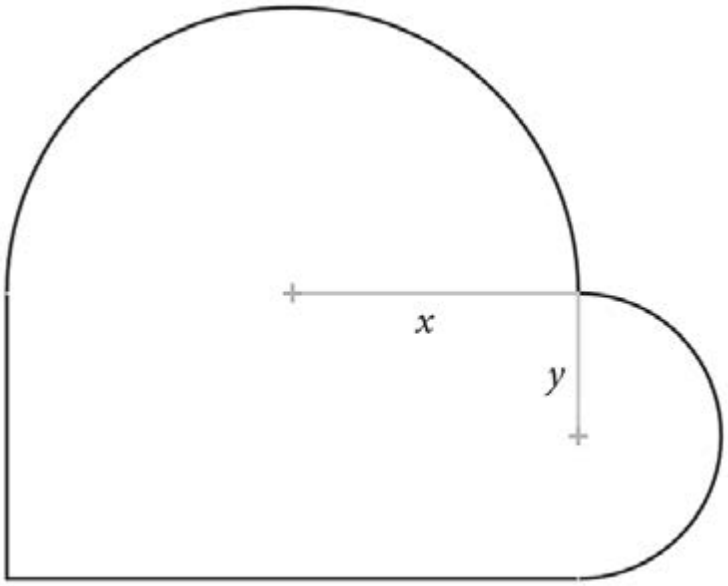
La variable X es una variable binomial. $X=B\left(5,\frac{19}{30}\right)$.

Nos piden calcular $P(X\geq 4)$.

$$P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)=\binom{5}{4}\left(\frac{19}{30}\right)^{4}\left(\frac{11}{30}\right)^{1}+\binom{5}{5}\left(\frac{19}{30}\right)^{5}\left(\frac{11}{30}\right)^{0}=$$

$$=\frac{5!}{4!\cdot 1!}\left(\frac{19}{30}\right)^{4}\left(\frac{11}{30}\right)+\left(\frac{19}{30}\right)^{5}=5\left(\frac{19}{30}\right)^{4}\left(\frac{11}{30}\right)+\left(\frac{19}{30}\right)^{5}=\frac{5\cdot 19^{4}\cdot 11+19^{5}}{30^{5}}\simeq 0.396$$

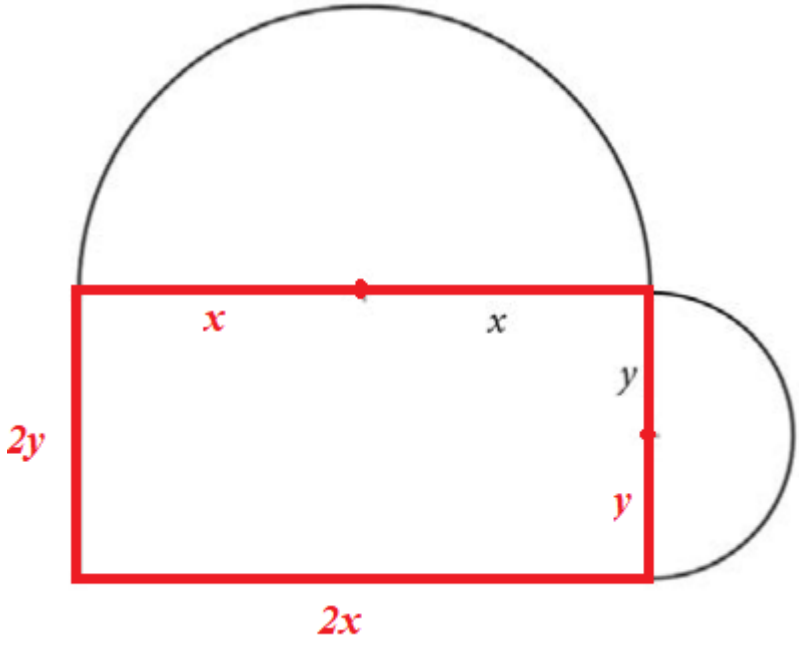
5. Carles quiere construir un decorado para la obra de teatro de final de curso en forma de un rectángulo y dos semicírculos, tal como se muestra en la siguiente figura:



a) Determine el perímetro y el área del decorado a construir en función de x y de y. [1 punto]

b) Para revestir el perímetro del decorado, Carles tiene material para cubrir hasta 10 m. Si lo quiere gastar todo, ¿cuáles serán las medidas del decorado de área máxima que podrá construir? ¿Cuál es el valor de esta área? [1,5 puntos]

Completamos la información del dibujo.



a) El perímetro total es la suma de los lados del rectángulo ($2x+2y$), la de la semicircunferencia pequeña (πy) y la de la semicircunferencia grande (πx).

$$P(x,y)=2x+2y+\pi y+\pi x=(2+\pi)(x+y)$$

El área es la suma del área del rectángulo ($2x\cdot 2y = 4xy$), el área del semicírculo pequeño ($\frac{\pi y^2}{2}$) y el área del semicírculo grande ($\frac{\pi x^2}{2}$).

$$A(x,y) = 4xy + \frac{\pi y^2}{2} + \frac{\pi x^2}{2} = 4xy + \frac{\pi}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

b) Carles tiene material para cubrir hasta 10 m. Si lo quiere gastar todo → $P(x,y) = 10$.

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = 10 \\ P(x,y) = (2+\pi)(x+y) \end{array}\right\} \Rightarrow (2+\pi)(x+y) = 10 \Rightarrow x + y = \frac{10}{2+\pi} \Rightarrow y = \frac{10}{2+\pi} - x$$

Obtenemos la función Área añadiéndole esta nueva condición.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y) = 4xy + \frac{\pi}{2}\left(x^2 + y^2\right) \\ y = \frac{10}{2+\pi} - x \end{array}\right\} \Rightarrow A(x) = 4x\left(\frac{10}{2+\pi} - x\right) + \frac{\pi}{2}\left(x^2 + \left(\frac{10}{2+\pi} - x\right)^2\right) =$$

$$= \frac{40}{2+\pi}x - 4x^2 + \frac{\pi}{2}\left(x^2 + \frac{100}{(2+\pi)^2} + x^2 - \frac{20}{2+\pi}x\right) =$$

$$= \frac{40}{2+\pi}x - 4x^2 + \frac{\pi}{2}\left(2x^2 + \frac{100}{(2+\pi)^2} - \frac{20}{2+\pi}x\right) =$$

$$= \frac{40}{2+\pi}x - 4x^2 + \pi x^2 + \frac{50\pi}{(2+\pi)^2} - \frac{10\pi}{2+\pi}x = (\pi-4)x^2 + \frac{40-10\pi}{2+\pi}x + \frac{50\pi}{(2+\pi)^2}$$

Calculamos la derivada de la función Área y buscamos cuando se anula.

$$A(x) = (\pi-4)x^2 + \frac{40-10\pi}{2+\pi}x + \frac{50\pi}{(2+\pi)^2} \Rightarrow A'(x) = 2(\pi-4)x + \frac{40-10\pi}{2+\pi}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 2(\pi-4)x + \frac{40-10\pi}{2+\pi} = 0 \Rightarrow 2(\pi-4)x = \frac{10\pi-40}{2+\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{10\pi-40}{2+\pi}}{2(\pi-4)} = \frac{10\pi-40}{2(\pi-4)(2+\pi)} = \frac{10\cancel{(\pi-4)}}{2\cancel{(\pi-4)}(2+\pi)} = \boxed{\frac{5}{2+\pi} \simeq 0.972}$$

Este valor del punto crítico lo sustituimos en la segunda derivada.

$$A''(x)=2(\pi-4)\Rightarrow A''(0.972)=2(\pi-4)\simeq -1.7<0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función área es máxima para $x=\dfrac{5}{2+\pi}\simeq 0.972$.

Obtenemos el valor de "y".

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{10}{2+\pi}-x \\ x=\dfrac{5}{2+\pi} \end{array}\right\}\Rightarrow y=\frac{10}{2+\pi}-\frac{5}{2+\pi}=\frac{5}{2+\pi}\simeq 0.972$$

Calculamos el valor del área máxima.

$$A\left(\frac{5}{2+\pi}\right)=(\pi-4)\left(\frac{5}{2+\pi}\right)^2+\frac{40-10\pi}{2+\pi}\left(\frac{5}{2+\pi}\right)+\frac{50\pi}{(2+\pi)^2}=$$

$$=\frac{25\pi-100}{(2+\pi)^2}+\frac{200-50\pi}{(2+\pi)^2}+\frac{50\pi}{(2+\pi)^2}=\frac{100+25\pi}{(2+\pi)^2}\simeq 6.75\ m^2$$

Las medidas para obtener un área máxima son $x=y=\dfrac{5}{2+\pi}\simeq 0.972$ metros.

El área máxima tiene un valor aproximado de 6.75 metros cuadrados.

6. Considere las rectas $r: \dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$ y $s: \begin{cases} x=4+2k \\ y=3+k \\ z=-1 \end{cases}$.

a) ¿Cuál es su posición relativa? Calcule la ecuación implícita de un plano π que sea paralelo a las dos rectas y que pase por el origen de coordenadas. [1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta *t* que corta las dos rectas *r* y *s* perpendicularmente. [1,25 puntos]

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r: \frac{x-5}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(5,4,3) \\ \vec{u_r}=(4,3,-1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x=4+2k \\ y=3+k \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(4,3,-1) \\ \vec{v_s}=(2,1,0) \end{cases}$$

Los vectores directores $\vec{u_r}=(4,3,-1)$ y $\vec{v_s}=(2,1,0)$ no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni coincidentes ni paralelas.

$$\left.\begin{matrix} \vec{u_r}=(4,3,-1) \\ \vec{v_s}=(2,1,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{4}{2} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{-1}{0}$$

Las rectas se cortan o cruzan.

Hallamos el valor del producto mixto $\left[\vec{u_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\overrightarrow{P_rQ_s}=(4,3,-1)-(5,4,3)=(-1,-1,-4)$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{u_r}=(4,3,-1) \\ \vec{v_s}=(2,1,0) \\ \overrightarrow{P_rQ_s}=(-1,-1,-4) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\vec{u_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix}=-16+0+2-1+24-0=9\neq 0$$

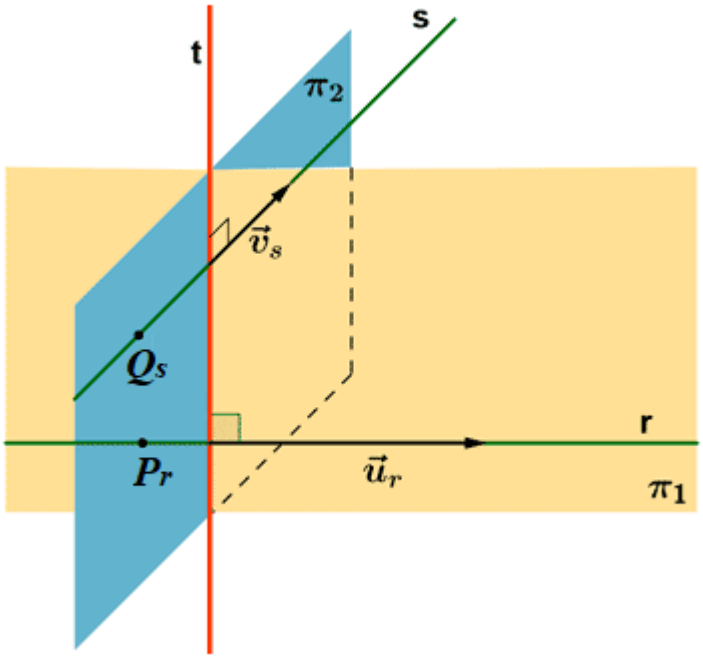
Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan (distinta dirección en planos paralelos).

El plano π que sea paralelo a las dos rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas. Además, pasa por el punto (0, 0, 0). Hallamos la ecuación implícita de este plano.

$$\left.\begin{matrix} \vec{u}=\vec{u_r}=(4,3,-1) \\ \vec{v}=\vec{v_s}=(2,1,0) \\ O=(0,0,0)\in\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -2y+4z-6z+x=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x-2y-2z=0}$$

El plano π que es paralelo a las dos rectas y que pasa por el origen de coordenadas tiene la ecuación implícita siguiente: $\pi: x-2y-2z=0$.

b) La recta *t* que corta las dos rectas *r* y *s* perpendicularmente es la recta del dibujo.



Hallamos un vector director de la recta *t* que será el producto vectorial $\overrightarrow{w_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{v_s}$.

$$\overrightarrow{w_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2j + 4k - 6k + i = i - 2j - 2k = (1,-2,-2)$$

Hallamos la ecuación del plano π_1 que contiene a la recta *r* y tiene como uno de sus vectores directores $\overrightarrow{w_t} = (1,-2,-2)$. Los vectores directores del plano son $\overrightarrow{w_t} = (1,-2,-2)$ y $\overrightarrow{u_r} = (4,3,-1)$, y pasa por el punto $P_r(5,4,3)$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{w_t} = (1,-2,-2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{u_r} = (4,3,-1) \\ P_r(5,4,3) \in \pi_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x-5 & y-4 & z-3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-5) - 8(y-4) + 3(z-3) + 8(z-3) + y - 4 + 6(x-5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8(x-5) - 7(y-4) + 11(z-3) = 0 \Rightarrow 8x - 40 - 7y + 28 + 11z - 33 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_1 : 8x - 7y + 11z - 45 = 0}$$

Hallamos la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta *s* y tiene como vector director $\overrightarrow{w_t}=(1,-2,-2)$. Los vectores directores del plano son $\overrightarrow{w_t}=(1,-2,-2)$ y $\overrightarrow{v_s}=(2,1,0)$, y pasa por el punto $Q_s(4,3,-1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{w_t}=(1,-2,-2)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(2,1,0)\\ Q_s(4,3,-1)\in\pi_2\end{array}\right\}\Rightarrow \pi_1:\begin{vmatrix}x-4 & y-3 & z+1\\ 1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(y-3)+z+1+4(z+1)+2(x-4)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4y+12+z+1+4z+4+2x-8=0\Rightarrow \boxed{\pi_2: 2x-4y+5z+9=0}$$

La recta *t* es la intersección de ambos planos, por lo que su ecuación es:

$$t:\begin{cases}8x-7y+11z-45=0\\ 2x-4y+5z+9=0\end{cases}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Hallamos un punto A de la recta *r* y un punto B de la recta *s* tal que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular a ambas rectas. Este vector tiene que tener producto escalar nulo con los vectores directores de las rectas.

$$r:\frac{x-5}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{-1}\Rightarrow\begin{cases}P_r(5,4,3)\\ \overrightarrow{u_r}=(4,3,-1)\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=5+4\alpha\\ y=4+3\alpha\\ z=3-\alpha\end{cases}\Rightarrow A(5+4\alpha,4+3\alpha,3-\alpha)$$

$$s:\begin{cases}x=4+2k\\ y=3+k\\ z=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Q_s(4,3,-1)\\ \overrightarrow{v_s}=(2,1,0)\end{cases}\Rightarrow B(4+2k,3+k,-1)$$

$$\overrightarrow{AB}=(4+2k,3+k,-1)-(5+4\alpha,4+3\alpha,3-\alpha)=(-1+2k-4\alpha,-1+k-3\alpha,-4+\alpha)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u_r}=0\Rightarrow(-1+2k-4\alpha,-1+k-3\alpha,-4+\alpha)(4,3,-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4+8k-16\alpha-3+3k-9\alpha+4-\alpha=0\Rightarrow \boxed{11k-26\alpha=3}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{v_s}=0\Rightarrow(-1+2k-4\alpha,-1+k-3\alpha,-4+\alpha)(2,1,0)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2+4k-8\alpha-1+k-3\alpha=0\Rightarrow \boxed{5k-11\alpha=3}$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{matrix}11k-26\alpha=3\\5k-11\alpha=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\times(-5)\rightarrow -55k+130\alpha=-15\\\times(11)\rightarrow 55k-121\alpha=33\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$9\alpha=18\Rightarrow\alpha=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5k-22=3\Rightarrow 5k=25\Rightarrow k=5$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha=2\\A(5+4\alpha,4+3\alpha,3-\alpha)\end{matrix}\right\}\Rightarrow A(13,10,1)$$

$$\left.\begin{matrix}k=5\\B(4+2k,3+k,-1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow B(14,8,-1)$$

La recta t buscada es la recta que pasa por los puntos A y B.

$$\left.\begin{matrix}A(13,10,1)\in t\\B(14,8,-1)\in t\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}A(13,10,1)\in t\\\overrightarrow{w_t}=\overrightarrow{AB}=(14,8,-1)-(13,10,1)=(1,-2,-2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t:\begin{cases}x=13+\lambda\\y=10-2\lambda\\z=1-2\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}$$

La recta t es la intersección de ambos planos, por lo que su ecuación es:

$$t:\begin{cases}x=13+\lambda\\y=10-2\lambda\\z=1-2\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}$$

PAU septiembre 2023

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2023

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 2

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Sean $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ y la matriz identidad de orden dos $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Compruebe que $(A-2I)^2=3I$. [0,5 puntos]

b) Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre la matriz inversa de la matriz A en función de las matrices A e I, y compruebe que coincide con la matriz B. [1,25 puntos]

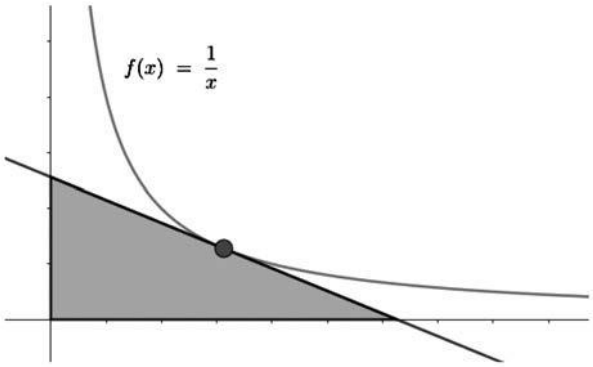
c) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A\cdot X=B$. [0,75 puntos]

2. Considere la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=2$.[0,75 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=k$, donde *k* es un número real positivo. [0,75 puntos]

c) Compruebe que, tal y como puede verse en la figura de abajo, la recta del apartado *b* determina un triángulo de área constante con los semiejes positivos de coordenadas. Calcule este área. [1 punto]



3. Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x+y=1+z \\ my+z=2-x \\ mz+3=3x+y \end{cases}$, donde *m* es un número real.

a) Discute el sistema según los valores del parámetro *m*. [1,25 puntos]

b) Resuelve el sistema, si tiene solución, para el caso *m = 1*. [1,25 puntos]

4. Considere la función *f(x)* definida por $f(x)=-3x+e^{2x^3-1}$.

a) Justifique que $f(x)=2$ tiene una solución en el intervalo $(-1,0)$. [1,25 puntos]

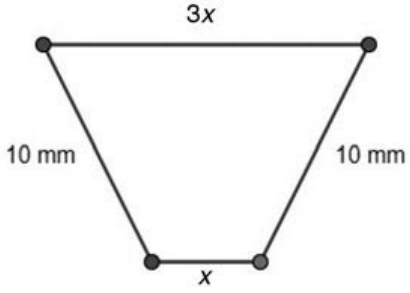
b) Sea la función $h(x)=-3x^2+e^{2x^3-1}$. Calcule el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones *f(x)* y *h(x)*. [1,25 puntos]

5. Sean r_1 y r_2 las rectas definidas por $r_1: x-1=y=-z$ y por $r_2: x=y=z$, respectivamente.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que corta perpendicularmente las rectas r_1 y r_2. [1,75 puntos]

b) Calcule la distancia entre r_1 y r_2. [0,75 puntos]

6. Queremos construir una pieza metálica que tenga por sección un trapecio isósceles con la base superior tres veces más larga que la base inferior. Los otros lados del trapecio miden 10 mm, tal y como se puede observar en la siguiente figura:



a) Exprese la altura del trapecio en función de la longitud *x* de la base inferior. [0,5 puntos]

b) Calcule la longitud de la base inferior del trapecio de forma que el área de la pieza sea máxima y encuentre el valor de esa área máxima. [2 puntos]

SOLUCIONES

1. Sean $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ y la matriz identidad de orden dos $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Compruebe que $(A-2I)^2=3I$. [0,5 puntos]

b) Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre la matriz inversa de la matriz A en función de las matrices A e I, y compruebe que coincide con la matriz B. [1,25 puntos]

c) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A\cdot X=B$. [0,75 puntos]

a)

$$A-2I=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2 & 1-0\\ 3-0 & 2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^2=\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3 & 0+0\\ 0+0 & 3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=3I$$

b) Desarrollamos la igualdad.

$$(A-2I)^2=3I\Rightarrow(A-2I)(A-2I)=3I\Rightarrow A^2-2AI-2IA+4I^2=3I\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2-2A-2A+4I=3I\Rightarrow A^2-4A=3I-4I\Rightarrow A^2-4A=-I\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4A-A^2=I\Rightarrow A(4I-A)=I\Rightarrow \boxed{A^{-1}=4I-A}$$

Calculamos la expresión de la matriz inversa de *A* y comprobamos que la inversa coincide con la matriz *B*.

$$A^{-1}=4I-A=4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-2 & 0-1\\ 0-3 & 4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=B$$

c) Despejamos X de la ecuación matricial. Sabemos que la matriz A tiene inversa.

$$A\cdot X=B\Rightarrow X=A^{-1}B\Rightarrow\{A^{-1}=B\}\Rightarrow X=B\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

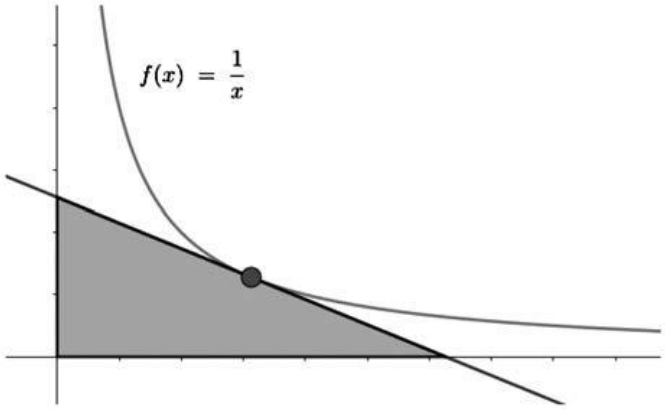
$$\Rightarrow\boxed{X=\begin{pmatrix}4+3 & -2-2\\ -6-6 & 3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -4\\ -12 & 7\end{pmatrix}}$$

2. Considere la función $f(x)=\frac{1}{x}$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=2$.[0,75 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=k$, donde *k* es un número real positivo. [0,75 puntos]

c) Compruebe que, tal y como puede verse en la figura de abajo, la recta del apartado *b* determina un triángulo de área constante con los semiejes positivos de coordenadas. Calcule este área. [1 punto]



a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función *f(x)* en el punto de abscisa *x = 2* es $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}\Rightarrow f'(x)=-x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$$

$$\left.\begin{aligned} f(2)&=\frac{1}{2}\\ f'(2)&=\frac{-1}{2^2}=\frac{-1}{4}\\ y-f(2)&=f'(2)(x-2)\end{aligned}\right\}\Rightarrow y-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}(x-2)\Rightarrow y-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}x+\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{4}x+1}$$

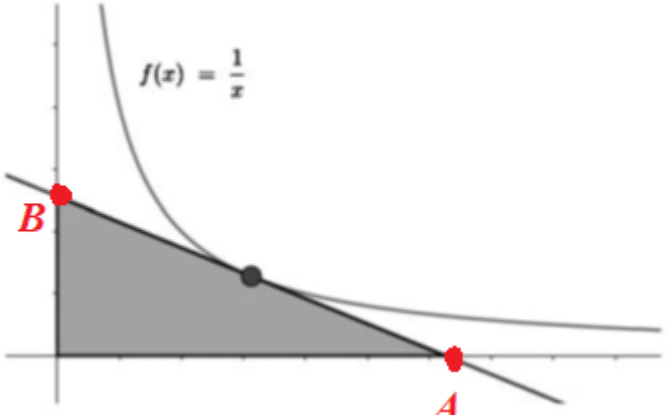
La ecuación de la recta tangente es $y=\frac{-1}{4}x+1$.

b) Repetimos el proceso anterior para un punto de abscisa $x=k$.

$$\left.\begin{aligned} f(k)&=\frac{1}{k}\\ f'(k)&=\frac{-1}{k^2}\\ y-f(k)&=f'(k)(x-k)\end{aligned}\right\}\Rightarrow y-\frac{1}{k}=\frac{-1}{k^2}(x-k)\Rightarrow y-\frac{1}{k}=\frac{-1}{k^2}x+\frac{1}{k}\Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{k^2}x+\frac{2}{k}}$$

La recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x=k$ tiene ecuación $y=\frac{-1}{k^2}x+\frac{2}{k}$.

c) Averiguamos los puntos A y B de corte de la recta tangente $y=\frac{-1}{k^2}x+\frac{2}{k}$ con los ejes coordenados.

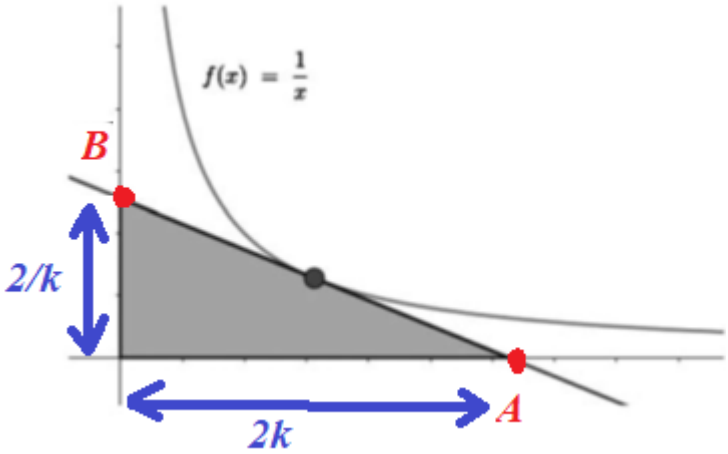


Punto *A* de corte de la recta tangente con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{-1}{k^2}x+\frac{2}{k} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{k^2}x+\frac{2}{k}=0 \Rightarrow \frac{2}{k}=\frac{1}{k^2}x \Rightarrow 2k^2=kx \Rightarrow \{k\neq 0\} \Rightarrow x=2k \Rightarrow \boxed{A(2k,0)}$$

Punto *B* de corte de la recta tangente con el eje OY.

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{-1}{k^2}x+\frac{2}{k} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{-1}{k^2}\cdot 0+\frac{2}{k}=\frac{2}{k} \Rightarrow \boxed{B\left(0,\frac{2}{k}\right)}$$



El área del triángulo sombreado es la mitad del producto de la base (*2k*) por la altura (*1/k*).

$$Área=\frac{2k\cdot\frac{2}{k}}{2}=\frac{4}{2}=\boxed{2\ u^2}$$

Como comprobamos el valor del área es independiente del valor de *k* y siempre vale 2 unidades cuadradas.

3. Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x+y=1+z \\ my+z=2-x \\ mz+3=3x+y \end{cases}$, donde m es un número real.

a) Discute el sistema según los valores del parámetro m. [1,25 puntos]

b) Resuelve el sistema, si tiene solución, para el caso $m = 1$. [1,25 puntos]

a) Ordenamos el sistema para establecer la matriz de coeficientes y la matriz ampliada.

$$\begin{cases} 2x+y=1+z \\ my+z=2-x \\ mz+3=3x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+my+z=2 \\ -3x-y+mz=-3 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ -3 & -1 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 2 \\ -3 & -1 & m & -3 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ -3 & -1 & m \end{vmatrix} = 2m^2-3+1-3m-m+2=2m^2-4m$$

$$|A|=0 \Rightarrow 2m^2-4m=0 \Rightarrow 2m(m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{m=0} \\ m-2=0 \rightarrow \boxed{m=2} \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. Si $m \neq 0$ y $m \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3. Al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. Si $m = 0$.

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A es menor de 3.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot \text{Fila } 2^{\text{a}} - \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ 2 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \\ -2 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 3 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}2\cdot \text{Fila } 3^{a}+3\cdot \text{Fila } 1^{a}\\ \begin{array}{cccc}-6 & -2 & 0 & -6\\ 6 & 3 & -3 & 3\end{array}\\ \hline \begin{array}{cccc}0 & 1 & -3 & -3\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & -3 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{a}+\text{Fila } 2^{a}\\ \begin{array}{cccc}0 & 1 & -3 & -3\\ 0 & -1 & 3 & 3\end{array}\\ \hline \begin{array}{cccc}0 & 0 & 0 & 0\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc}\overbrace{2 & 1 & -1}^{A} & 1\\ 0 & -1 & 3 & 3\\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0\end{array}\right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B también es 2, los rangos son iguales a 2 pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $m=2$.

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A es menor de 3.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ -3 & -1 & 2 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2\cdot \text{Fila } 2^{a}-\text{Fila } 1^{a}\\ \begin{array}{cccc}2 & 4 & 2 & 4\\ -2 & -1 & 1 & -1\end{array}\\ \hline \begin{array}{cccc}0 & 3 & 3 & 3\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{a}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}2\cdot \text{Fila } 3^{a}+3\cdot \text{Fila } 1^{a}\\ \begin{array}{cccc}-6 & -2 & 4 & -6\\ 6 & 3 & -3 & 3\end{array}\\ \hline \begin{array}{cccc}0 & 1 & 1 & -3\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}3\cdot \text{Fila } 3^{a}-\text{Fila } 2^{a}\\ \begin{array}{cccc}0 & 3 & 3 & -9\\ 0 & -3 & -3 & -3\end{array}\\ \hline \begin{array}{cccc}0 & 0 & 0 & -12\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc}\overbrace{2 & 1 & -1}^{A} & 1\\ 0 & 3 & 3 & 3\\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & -12\end{array}\right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3, los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $m\neq 0$ y $m\neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución). Si $m=0$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $m=2$ el sistema es incompatible (sin solución).

b) Si *m = 1* el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=2 \\ -3x-y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x=2-y-z \\ -3x-y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2-y-z)+y-z=1 \\ -3(2-y-z)-y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4-2y-2z+y-z=1 \\ -6+3y+3z-y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y-3z=-3 \\ 2y+4z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3z+3=y \\ 2y+4z=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(-3z+3)+4z=3 \Rightarrow -6z+6+4z=3 \Rightarrow -2z=-3 \Rightarrow \boxed{z=\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-3\cdot\frac{3}{2}+3=\frac{-3}{2}} \Rightarrow \boxed{x=2-\frac{-3}{2}-\frac{3}{2}=2}$$

La solución del sistema para $m = 1$ es $x=2;\ y=\frac{-3}{2};\ z=\frac{3}{2}$.

4. Considere la función *f(x)* definida por $f(x)=-3x+e^{2x^3-1}$.

a) Justifique que $f(x)=2$ tiene una solución en el intervalo $(-1,0)$. [1,25 puntos]

b) Sea la función $h(x)=-3x^2+e^{2x^3-1}$. Calcule el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones *f(x)* y *h(x)*. [1,25 puntos]

a) Consideramos la función $g(x)=f(x)-2=\left(-3x+e^{2x^3-1}\right)-2=-3x-2+e^{2x^3-1}$

El problema se traduce en buscar un valor en el intervalo $(-1,0)$ donde la función *g(x)* se anule.

Aplicamos el teorema de Bolzano a la función $g(x)=-3x-2+e^{2x^3-1}$ en el intervalo $(-1,0)$.

Comprobamos que se cumplen las hipótesis de partida del teorema.

1. La función *g(x)* es continua en [–1, 0].
   Es continua pues es la suma de dos funciones continuas: una polinómica (*–3x–2*) y otra exponencial (e^{2x^3-1}).
2. La función toma signos diferentes en los extremos del intervalo $(-1,0)$.

$$\left.\begin{aligned} g(-1)&=-3(-1)-2+e^{2(-1)^3-1}=1+e^{-3}\simeq 1.04>0\\ g(0)&=-3\cdot 0-2+e^{2\cdot 0^3-1}=-2+e^{-1}\simeq -1.63<0\end{aligned}\right\}$$

Podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe un valor $c\in(-1,0)$ tal que $g(c)=0$. Y por tanto existe un valor $c\in(-1,0)$ tal que $f(c)=2$.

b) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$\left.\begin{aligned} h(x)&=-3x^2+e^{2x^3-1}\\ f(x)&=-3x+e^{2x^3-1}\\ f(x)&=h(x)\end{aligned}\right\}\Rightarrow -3x^2+e^{2x^3-1}=-3x+e^{2x^3-1}\Rightarrow -3x^2=-3x\Rightarrow$$

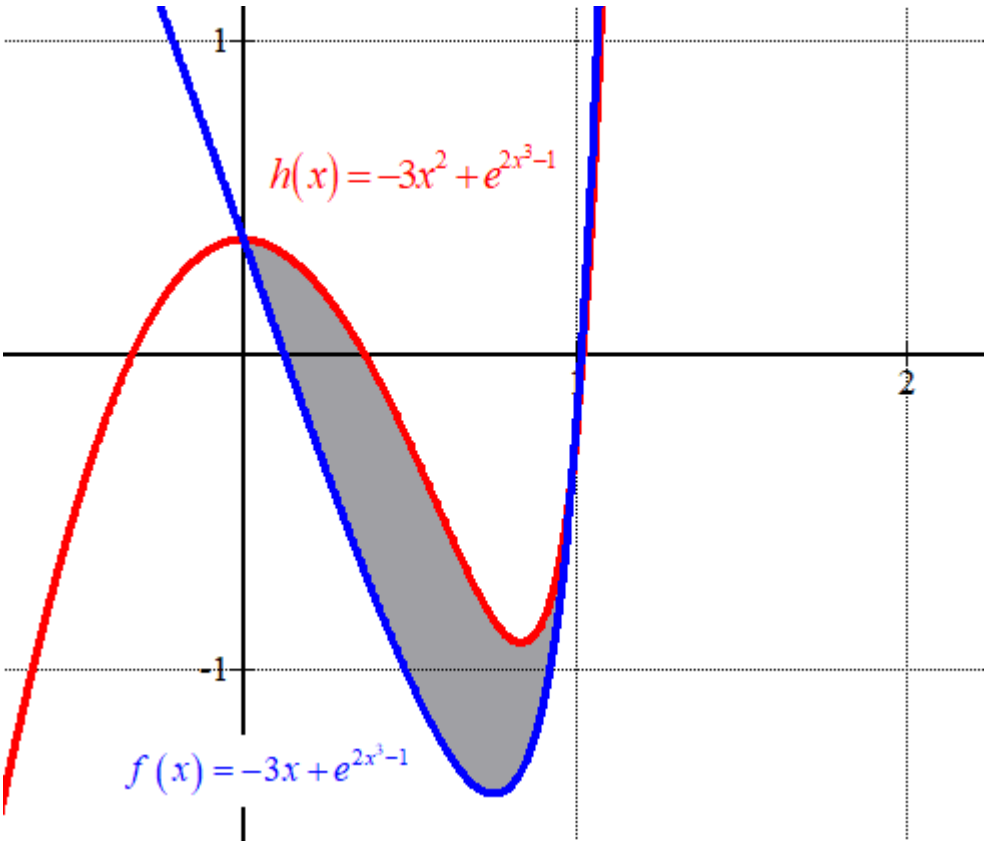
$$\Rightarrow -3x^2+3x=0\Rightarrow -3x(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ x-1=0\rightarrow\boxed{x=1}\end{cases}$$

El área de la región encerrada entre las dos gráficas es el valor absoluto de la integral definida entre 0 a 1 de la diferencia de las dos funciones. Tomamos valor absoluto para no buscar que función tiene su gráfica situada por encima.

$$\int_0^1 h(x)-f(x)\,dx=\int_0^1 -3x^2+e^{2x^3-1}-\left(-3x+e^{2x^3-1}\right)dx=\int_0^1 -3x^2+e^{2x^3-1}+3x-e^{2x^3-1}dx=$$

$$=\int_0^1 -3x^2+3x\,dx=\left[-x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1=\left[-1^3+\frac{3}{2}\cdot 1^2\right]-\left[-0^3+\frac{3}{2}\cdot 0^2\right]=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}=\boxed{0.5\ u^2}$$

El área de la región encerrada entre las dos funciones tiene un valor de 0.5 unidades cuadradas.


1
-1
2
$h(x)=-3x^2+e^{2x^3-1}$
$f(x)=-3x+e^{2x^3-1}$

5. Sean r_1 y r_2 las rectas definidas por $r_1: x-1=y=-z$ y por $r_2: x=y=z$, respectivamente.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que corta perpendicularmente las rectas r_1 y r_2. [1,75 puntos]

b) Calcule la distancia entre r_1 y r_2. [0,75 puntos]

Hallamos un punto y un vector director de cada recta. También sus ecuaciones paramétricas.

$$r_1: x-1=y=-z \Rightarrow r_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{-1} \Rightarrow r_1: \begin{cases} P_1(1,0,0)\in r_1 \\ \vec{u_1}=(1,1,-1) \end{cases} \Rightarrow r_1: \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=-\alpha \end{cases}$$

$$r_2: x=y=z \Rightarrow r_2: \frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1} \Rightarrow r_2: \begin{cases} Q_2(0,0,0)\in r_2 \\ \vec{v_2}=(1,1,1) \end{cases} \Rightarrow r_2: \begin{cases} x=\beta \\ y=\beta \\ z=\beta \end{cases}$$

Estudiamos la posición relativa de las rectas.
Como las coordenadas de sus vectores directores no son proporcionales las rectas ni son paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan.

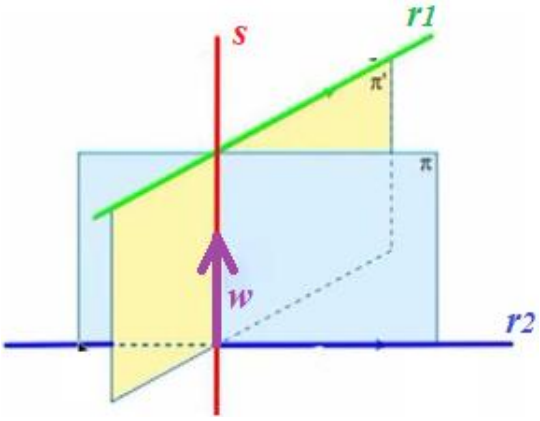
$$\left.\begin{matrix} \vec{u_1}=(1,1,-1) \\ \vec{v_2}=(1,1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{1}$$

Calculamos el valor del producto mixto $\left[\vec{u_1},\vec{v_2},\overrightarrow{P_1Q_2}\right]$.

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{P_1Q_2}=(0,0,0)-(1,0,0)=(-1,0,0) \\ \vec{u_1}=(1,1,-1) \\ \vec{v_2}=(1,1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\vec{u_1},\vec{v_2},\overrightarrow{P_1Q_2}\right]=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0-1-0-1-0-0=-2\neq 0$$

Al ser $\left[\vec{u_1},\vec{v_2},\overrightarrow{P_1Q_2}\right]\neq 0$ las rectas se cruzan.

a) Para hallar la recta *s* que corta perpendicularmente las rectas r_1 y r_2 seguimos el esquema del dibujo.



Hallamos el vector director $\vec{w}$ de la recta *s* como el producto vectorial de los vectores directores de las rectas r_1 y r_2.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u_1}=(1,1,-1)\\ \vec{v_2}=(1,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{w}=\vec{u_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=i-j+k-k-j+i=2i-2j=(2,-2,0)$$

Hallamos el plano π que contiene a la recta r_2 y tiene como otro vector director $\vec{w}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_2}=(1,1,1)\\ \vec{w}=(2,-2,0)\\ Q_2(0,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y & z\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow 2y-2z-2z+2x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+2y-4z=0\Rightarrow \boxed{\pi: x+y-2z=0}$$

Hallamos el plano π´ que contiene a la recta r_1 y tiene como otro vector director $\vec{w}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u_1}=(1,1,-1)\\ \vec{w}=(2,-2,0)\\ P_1(1,0,0)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow \pi':\begin{vmatrix} x-1 & y & z\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow -2y-2z-2z-2(x-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y-4z-2x+2=0\Rightarrow -2x-2y-4z+2=0\Rightarrow \boxed{\pi': x+y+2z-1=0}$$

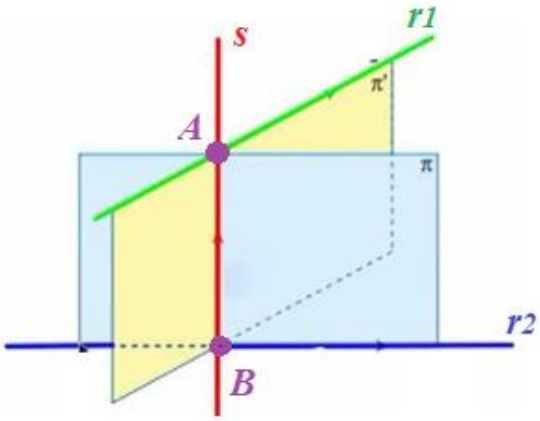
La recta *s* es la recta donde se cortan los dos planos obtenidos. Por tanto, tiene como ecuación implícita $s:\begin{cases}x+y-2z=0\\ x+y+2z-1=0\end{cases}$.

Hallamos su ecuación paramétrica.

$$s:\begin{cases}x+y-2z=0\\ x+y+2z-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-y+2z\\ x+y+2z-1=0\end{cases}\Rightarrow -y+2z+y+2z-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4z-1=0\Rightarrow 4z=1\Rightarrow z=\frac{1}{4}\Rightarrow x=-y+2\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-y\Rightarrow \boxed{s:\begin{cases}x=\frac{1}{2}-\lambda\\ y=\lambda\\ z=\frac{1}{4}\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

b) La distancia entre las rectas r_1 y r_2 es la distancia entre los puntos A y B del dibujo.



El punto A es el punto de corte de la recta r_1 y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+y-2z=0\\ r_1:\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=\alpha\\ z=-\alpha\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 1+\alpha+\alpha+2\alpha=0\Rightarrow 4\alpha=-1\Rightarrow\alpha=\frac{-1}{4}\Rightarrow \boxed{A\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{-1}{4}\right)}$$

El punto B es el punto de corte de la recta r_2 y el plano π´.

$$\left.\begin{array}{l} r_2:\begin{cases}x=\beta\\ y=\beta\\ z=\beta\end{cases}\\ \pi': x+y+2z-1=0\end{array}\right\}\Rightarrow \beta+\beta+2\beta-1=0\Rightarrow 4\beta=1\Rightarrow\beta=\frac{1}{4}\Rightarrow \boxed{B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)}$$

La distancia entre las rectas es la distancia entre los puntos A y B.

$$\left.\begin{array}{l}A\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{-1}{4}\right)\\ B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{-1}{4}\right)=\left(\frac{-2}{4},0,\frac{2}{4}\right)=\left(\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$$

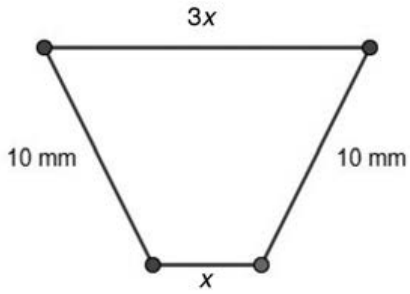
$$d\left(r_1,r_2\right)=d\left(A,B\right)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0.707\ unidades}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Con una fórmula.

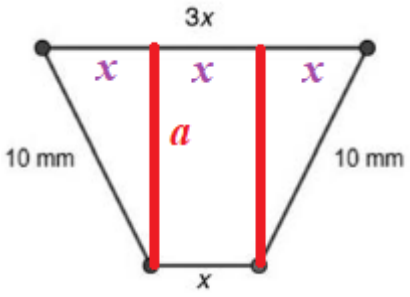
$$d\left(r_1,r_2\right)=\left|\frac{\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{P_1Q_2}\right]}{\left|\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{v_2}\right|}\right|=\left|\frac{\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{P_1Q_2}\right]}{\left|\overrightarrow{w}\right|}\right|=\left|\frac{-2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}}\right|=\frac{2}{\sqrt{8}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\ unidades}$$

6. Queremos construir una pieza metálica que tenga por sección un trapecio isósceles con la base superior tres veces más larga que la base inferior. Los otros lados del trapecio miden 10 mm, tal y como se puede observar en la siguiente figura:



a) Exprese la altura del trapecio en función de la longitud *x* de la base inferior. [0,5 puntos]
b) Calcule la longitud de la base inferior del trapecio de forma que el área de la pieza sea máxima y encuentre el valor de esa área máxima. . [2 puntos]

a) Dibujamos la situación planteada en busca de un triángulo que nos permita hallar la altura pedida.



Consideramos el triángulo rectángulo de catetos *x*, *a* y de hipotenusa 10 y utilizamos el teorema de Pitágoras → $x^2+a^2=10^2 \Rightarrow a^2=100-x^2 \Rightarrow \boxed{a(x)=\sqrt{100-x^2},\ siendo\ 0\le x\le 10}$

b) El área del trapecio es el producto de la media de las dos bases por la altura.

$$Área = A(x)=\frac{x+3x}{2}\cdot a(x)=2x\sqrt{100-x^2}=\sqrt{4x^2\left(100-x^2\right)}=\sqrt{400x^2-4x^4}$$

Buscamos el máximo de esta función. Usamos la derivada.

$$A(x)=\sqrt{400x^2-4x^4} \Rightarrow A'(x)=\frac{800x-16x^3}{2\sqrt{400x^2-4x^4}}$$

$$A'(x)=0 \Rightarrow \frac{800x-16x^3}{2\sqrt{400x^2-4x^4}}=0 \Rightarrow 800x-16x^3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x\left(50-x^2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases}\boxed{x=0}\\ 50-x^2=0 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{50}\simeq 7.07\,mm}\end{cases}$$

El valor *x = 0* no lo tenemos en cuenta pues el área sería 0. El valor negativo de $x=-\sqrt{50}$ tampoco lo tenemos en cuenta, pues no existe una longitud negativa.

Comprobamos si en $x=\sqrt{50}$ hay un máximo estudiando el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $\left(0,\sqrt{50}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

  $A'(1)=\dfrac{800\cdot 1-16\cdot 1^3}{2\sqrt{400\cdot 1^2-4\cdot 1^4}}=\dfrac{784}{+}>0$. La función crece en $\left(0,\sqrt{50}\right)$.

- En el intervalo $\left(\sqrt{50},10\right)$ tomamos $x = 8$ y la derivada vale

  $A'(8)=\dfrac{800\cdot 8-16\cdot 8^3}{2\sqrt{400\cdot 8^2-4\cdot 8^4}}=\dfrac{-1792}{+}<0$. La función decrece en $\left(\sqrt{50},10\right)$.

La función cambia de crecer a decrecer en $x=\sqrt{50}$, por lo que la función área tiene un máximo relativo en $x=\sqrt{50}$.
Calculamos el valor de esa área máxima del trapecio de base inferior $x=\sqrt{50}$.

$$Área = A\left(\sqrt{50}\right)=2\sqrt{50}\sqrt{100-\left(\sqrt{50}\right)^2}=2\sqrt{50}\sqrt{50}=\boxed{100\ mm^2}$$

Un trapecio de base inferior $x=\sqrt{50}\simeq 7.1\ mm$ tiene un área máxima con valor 100 mm^2.

PAU junio (serie 1) 2023

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2023

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 1

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Calcule los coeficientes *a*, *b*, *c* y *d* de la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ si sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de inflexión (1, 0) es $y=-3x+3$ y que la función tiene un extremo relativo en el punto de la gráfica de abscisa $x = 0$. [2,5 puntos]

2. Considere las dos matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule las matrices $A\cdot B$ y $B\cdot A$. [1,5 puntos]

b) Sean C y D dos matrices cuadradas del mismo orden que satisfacen $C\cdot D=C$ y $D\cdot C=D$. Compruebe que las dos matrices son idempotentes. [1 punto]

NOTA: Una matriz cuadrada se denomina *idempotente* si coincide con su cuadrado.

3. Sea $f'(x)=\begin{cases} x-1, & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{1}{x-1}, & si \quad x>2 \end{cases}$ la derivada de una función derivable *f(x)* que pasa por el punto A = (0, 3).

a) Calcule la función *f(x)*. [1,5 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función *f ´(x)* en el punto de abscisa $x = 3$. [1 punto]

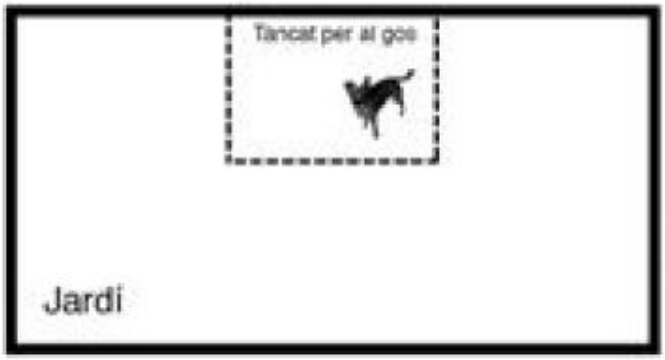
4. Sea el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real λ:

$$\begin{cases} x+2\lambda y+(2+\lambda)z=0 \\ (2+\lambda)x+y+2\lambda z=3 \\ 2\lambda x+(2+\lambda)y+z=-3 \end{cases}$$

a) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro λ. [1,25 puntos]

b) Para el caso $\lambda=-1$, resuelve el sistema, interprétalo geométricamente e identifica su solución. [1,25 puntos]

5. Nuria tiene un jardín rectangular y quiere hacer un cercado (rectangular o cuadrado) de 8 m^2 para su perro. Ha pensado en poner el cercado junto al muro del jardín, tal y como se muestra en la figura de la derecha, para ahorrarse así uno de los cuatro lados. El precio de la valla que desea utilizar es de 2,5 €/m.



a) ¿Qué dimensiones debe tener el cercado para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese coste mínimo? [1,75 puntos]

b) Si mantiene la forma rectangular o cuadrada del cercado y hace que uno de los vértices del jardín coincida con un vértice del cercado, ¿cuántos euros se puede ahorrar? Razone cómo pondría el cercado y justifique con cálculos matemáticos las dimensiones de su propuesta. [0,75 puntos]

6. Sean los planos π_1 y π_2, determinados por las ecuaciones $\pi_1: x+y=3$ y $\pi_2: x-z=-2$.

a) Encuentre la ecuación general ($Ax+By+Cz+D=0$) del plano π_3 que es perpendicular a π_1 y π_2, y que pasa por el punto P = (4, 1, 2). [0,75 puntos]

b) Sea *r* la recta de intersección de π_1 y π_2. Calcule la ecuación vectorial de la recta *r*. [0,75 puntos]

c) Calcule el punto Q de la recta *r* que está más cerca del punto P. [1 punto]

SOLUCIONES

1. Calcule los coeficientes *a*, *b*, *c* y *d* de la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ si sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de inflexión (1, 0) es $y=-3x+3$ y que la función tiene un extremo relativo en el punto de la gráfica de abscisa *x = 0*. [2,5 puntos]

La función tiene un extremo relativo en el punto de la gráfica de abscisa *x = 0* → *f ´ (0) = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3ax^2+2bx+c \\ f'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c \Rightarrow \boxed{c=0}$$

La función queda $f(x)=ax^3+bx^2+d$.

La función pasa por el punto (1, 0) → *f(1) = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx^2+d \\ f(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+d \Rightarrow \boxed{a+b+d=0}$$

La función tiene un punto de inflexión en *x = 1* → *f ´´ (1) = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f''(x)=6ax+2b \\ f''(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=6a\cdot 1+2b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a+2b=0 \Rightarrow 3a+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-3a}$$

Si sustituimos este valor en la primera ecuación obtenida.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+d=0 \\ b=-3a \end{array}\right\} \Rightarrow a-3a+d=0 \Rightarrow \boxed{d=2a}$$

La función queda $f(x)=ax^3-3ax^2+2a$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=ax^3-3ax^2+2a$ en el punto $(1,0)$ es $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

$$f(x)=ax^3-3ax^2+2a \Rightarrow f'(x)=3ax^2-6ax \Rightarrow f'(1)=3a-6a=-3a$$

$$\left.\begin{array}{l} y-f(1)=f'(1)(x-1) \\ f(1)=0 \\ f'(1)=-3a \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=-3a(x-1) \Rightarrow \boxed{y=-3ax+3a}$$

Como la tangente es $y=-3x+3$ tenemos que *–3a = –3* y que *3a = 3* por lo que *a = 1*.

Los valores buscados son *a = 1*, *b = –3*, *c = 0* y *d = 2*.

2. Considere las dos matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$$

a) Calcule las matrices $A\cdot B$ y $B\cdot A$. [1,5 puntos]

b) Sean C y D dos matrices cuadradas del mismo orden que satisfacen $C\cdot D=C$ y $D\cdot C=D$.
Compruebe que las dos matrices son idempotentes. [1 punto]

NOTA: Una matriz cuadrada se denomina *idempotente* si coincide con su cuadrado.

a)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+3-5&4+3-10&0+0-5\\-2-4+5&-2-4+10&0+0+5\\2+3-4&2+3-8&0+0-4\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\cdot B=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}=A}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-2+0&-6+8+0&-10+10+0\\-2+1+0&3-4+0&5-5+0\\2-2+1&-3+8-3&-5+10-4\end{pmatrix}$$

$$\boxed{B\cdot A=\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\1&2&1\end{pmatrix}=B}$$

b)

$$C^2=C\cdot C=\left\{C\cdot D=C\right\}=(C\cdot D)\cdot C=C\cdot D\cdot C=C\cdot(D\cdot C)=\left\{D\cdot C=D\right\}=C\cdot D=\left\{C\cdot D=C\right\}=C$$

$$D^2=D\cdot D=\left\{D\cdot C=D\right\}=(D\cdot C)\cdot D=D\cdot C\cdot D=D\cdot(C\cdot D)=\left\{C\cdot D=C\right\}=D\cdot C=\left\{D\cdot C=D\right\}=D$$

3. Sea $f'(x)=\begin{cases} x-1, & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{1}{x-1}, & si \quad x>2 \end{cases}$ la derivada de una función derivable *f(x)* que pasa por el punto A = (0, 3).

a) Calcule la función *f(x)*. [1,5 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función *f ´(x)* en el punto de abscisa *x = 3*. [1 punto]

a) Obtenemos la función integrando la función derivada.

$$x\le 2 \rightarrow f(x)=\int f'(x)dx=\int x-1dx=\frac{x^2}{2}-x+A$$

$$x>2 \rightarrow f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{1}{x-1}dx=\ln|x-1|+B$$

La función queda $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+A, & si \quad x\le 2 \\ \ln|x-1|+B, & si \quad x>2 \end{cases}$

Como la función pasa por el punto A(0, 3) → *f(0) = 3*.

$$\left.\begin{matrix} f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+A \\ f(0)=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3=\frac{0^2}{2}-0+A \Rightarrow A=3$$

La función queda $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+3, & si \quad x\le 2 \\ \ln|x-1|+B, & si \quad x>2 \end{cases}$

La función es derivable y por tanto debe ser continua en *x = 2* → $f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)$

$$\left.\begin{matrix} f(2)=\dfrac{4}{2}-2+3=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2}{2}-x+3=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\ln|x-1|+B=\ln|2-1|+B=B \\ f(2)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow B=3$$

La expresión de la función es $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+3, & si \quad x\le 2 \\ \ln|x-1|+3, & si \quad x>2 \end{cases}$.

b) En el punto de abscisa *x = 3* la función derivada es $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f'(x)=\frac{1}{x-1}$ en el punto de abscisa $x = 3$ es $y-f'(3)=f''(3)(x-3)$.

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}\Rightarrow f'(3)=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}\Rightarrow f''(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}\Rightarrow f''(3)=\frac{-1}{(3-1)^2}=-\frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3)=\frac{1}{2} \\ f''(3)=-\frac{1}{4} \\ y-f'(3)=f''(3)(x-3) \end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}(x-3)\Rightarrow y=\frac{-1}{4}x+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{4}x+\frac{5}{4}}$$

4. Sea el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real λ:

$$\begin{cases} x+2\lambda y+(2+\lambda)z=0 \\ (2+\lambda)x+y+2\lambda z=3 \\ 2\lambda x+(2+\lambda)y+z=-3 \end{cases}$$

a) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro λ. [1,25 puntos]

b) Para el caso $\lambda=-1$, resuelve el sistema, interprétalo geométricamente e identifica su solución. [1,25 puntos]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda & 3 \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 \end{vmatrix}=1+8\lambda^3+(2+\lambda)^3-2\lambda(2+\lambda)-2\lambda(2+\lambda)-2\lambda(2+\lambda)=$$

$$=1+8\lambda^3+(2+\lambda)^3-6\lambda(2+\lambda)=1+8\lambda^3+8+\lambda^3+3\cdot 4\lambda+3\cdot 2\lambda^2-12\lambda-6\lambda^2=$$

$$=1+8\lambda^3+8+\lambda^3+\cancel{12\lambda}+\cancel{6\lambda^2}-\cancel{12\lambda}-\cancel{6\lambda^2}=9\lambda^3+9$$

$$|A|=0\Rightarrow 9\lambda^3+9=0\Rightarrow \lambda^3+1=0\Rightarrow \lambda^3=-1\Rightarrow \boxed{\lambda=\sqrt[3]{-1}=-1}$$

Se nos plantean dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\lambda\neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\lambda=-1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Convertimos el sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} \text{Fila } 2^{\text{a}} & - & \text{Fila } 1^{\text{a}} & \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{a}} + 2\cdot\text{Fila } 1^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}-2 & 1 & 1 & -3\\ 2 & -4 & 2 & 0\end{array}\\ \hline \begin{array}{cccc}0 & -3 & 3 & -3\end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 3\\ 0 & -3 & 3 & -3\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{a}} + \text{Fila } 2^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 3 & -3 & 3\end{array}\\ \hline \begin{array}{cccc}0 & 0 & 0 & 0\end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc}\overbrace{1 & -2 & 1}^{A} & 0\\ 0 & 3 & -3 & 3\\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0\end{array}\right)$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

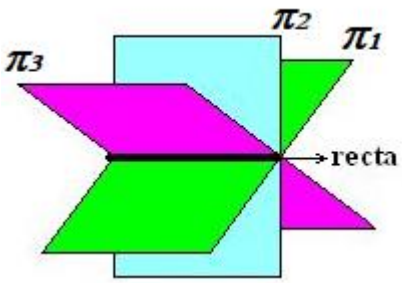
b) Para el caso $\lambda = -1$ el sistema tiene infinitas soluciones. Lo resolvemos utilizando el sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x-2y+z=0\\ 3y-3z=3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x-2y+z=0\\ y-z=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x-2y+z=0\\ \boxed{y=1+z}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2(1+z)+z=0 \Rightarrow x-2-2z+z=0 \Rightarrow \boxed{x=2+z} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=1+\lambda\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{cases}}$$

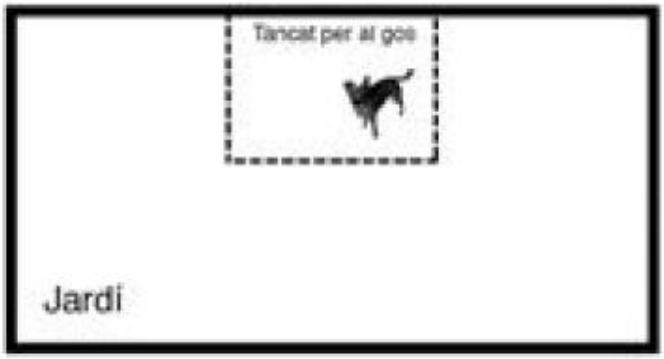
Las soluciones del sistema son los infinitos puntos de la recta donde coinciden los tres planos del sistema (cada una de las ecuaciones).

$$\begin{cases}\pi_1: x-2y+z=0\\ \pi_2: x+y-2z=3\\ \pi_3: -2x+y+z=-3\end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases}x=2+\lambda\\ y=1+\lambda\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{cases}$$



5. Nuria tiene un jardín rectangular y quiere hacer un cercado (rectangular o cuadrado) de 8 m^2 para su perro. Ha pensado en poner el cercado junto al muro del jardín, tal y como se muestra en la figura de la derecha, para ahorrarse así uno de los cuatro lados.

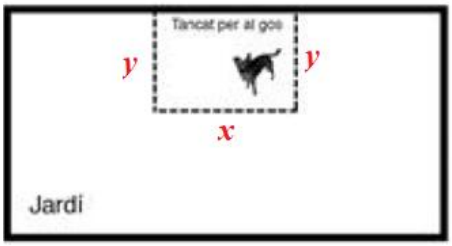
El precio de la valla que desea utilizar es de 2,5 €/m.



a) ¿Qué dimensiones debe tener el cercado para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese coste mínimo? [1,75 puntos]

b) Si mantiene la forma rectangular o cuadrada del cercado y hace que uno de los vértices del jardín coincida con un vértice del cercado, ¿cuántos euros se puede ahorrar? Razone cómo pondría el cercado y justifique con cálculos matemáticos las dimensiones de su propuesta. [0,75 puntos]

a) Llamamos x e y a los dos lados del rectángulo del cercado.



Sabemos que el área del cercado es 8 m^2.

$$xy = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{x}$$

Queremos minimizar el perímetro. Obtenemos su expresión en función de x.

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = x + 2y \\ y = \dfrac{8}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow P(x) = x + 2\frac{8}{x} = x + \frac{16}{x}$$

Hallamos los puntos críticos de esta función.

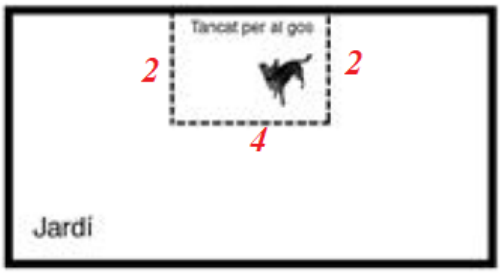
$$\left.\begin{array}{l} P(x) = x + \dfrac{16}{x} \Rightarrow P'(x) = 1 - \dfrac{16}{x^2} \\ P'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{16}{x^2} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \boxed{x = \pm 4}$$

Solo es posible el valor positivo $x = 4$. Sustituimos este valor en la derivada segunda.

$$P'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} = 1 - 16x^{-2} \Rightarrow P''(x) = 32x^{-3} = \frac{32}{x^3} \Rightarrow P''(4) = \frac{32}{4^3} > 0 \rightarrow x = 4 \text{ es mínimo}$$

Para $x = 4$ el perímetro del cercado es mínimo.

Las dimensiones del cercado con perímetro mínimo son $x = 4$ e $y = \dfrac{8}{4} = 2$



El coste de este cercado es de $2.5(4+2+2)=20\text{€}$.

b) En esta nueva situación nos ahorramos dos lados del cercado.

Sabemos que el área del cercado es 8 m^2.

$$xy=8 \Rightarrow y=\frac{8}{x}$$

Queremos minimizar el perímetro. Obtenemos su expresión en función de *x*.

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y)=x+y \\ y=\dfrac{8}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow P(x)=x+\frac{8}{x}=x+\frac{8}{x}$$

Hallamos los puntos críticos de esta función.

$$\left.\begin{array}{l} P(x)=x+\dfrac{8}{x} \Rightarrow P'(x)=1-\dfrac{8}{x^2} \\ P'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-\frac{8}{x^2}=0 \Rightarrow 1=\frac{8}{x^2} \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{8}}$$

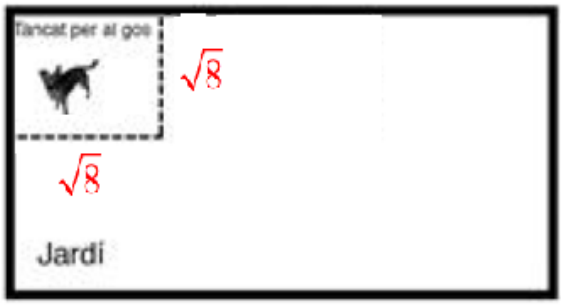
Solo es posible el valor positivo $x=\sqrt{8}$. Sustituimos este valor en la derivada segunda.

$$P'(x)=1-\frac{8}{x^2}=1-8x^{-2} \Rightarrow P''(x)=16x^{-3}=\frac{16}{x^3} \Rightarrow P''\left(\sqrt{8}\right)=\frac{16}{\left(\sqrt{8}\right)^3}>0 \rightarrow x=\sqrt{8} \text{ es mínimo}$$

Para $x=\sqrt{8}$ el perímetro del cercado es mínimo.

Las dimensiones del cercado con perímetro mínimo son $x=\sqrt{8}$ e $y=\dfrac{8}{\sqrt{8}}=\sqrt{8}$.

Un cuadrado de lado $\sqrt{8}\simeq 2.83$ *metros*.



El coste de este nuevo cercado es de $2.5\left(2\sqrt{8}\right)\simeq 14.14\text{€}$.

Nos ahorramos 20 – 14.14 = 5.86 €

6. Sean los planos π_1 y π_2, determinados por las ecuaciones $\pi_1 : x+y=3$ y $\pi_2 : x-z=-2$.

a) Encuentre la ecuación general ($Ax+By+Cz+D=0$) del plano π_3 que es perpendicular a π_1 y π_2, y que pasa por el punto P = (4, 1, 2). [0,75 puntos]

b) Sea *r* la recta de intersección de π_1 y π_2. Calcule la ecuación vectorial de la recta *r*. [0,75 puntos]

c) Calcule el punto Q de la recta *r* que está más cerca del punto P. [1 punto]

a) El plano π_3 que es perpendicular a π_1 y π_2 tiene como vectores directores los vectores normales de los planos π_1 y π_2.

$$\pi_1 : x+y=3 \Rightarrow \vec{n_1}=(1,1,0)$$

$$\pi_2 : x-z=-2 \Rightarrow \vec{n_2}=(1,0,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\vec{n_1}=(1,1,0)\\ \vec{v}=\vec{n_2}=(1,0,-1)\\ P(4,1,2)\in\pi\end{array}\right\} \Rightarrow \pi_3 : \begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

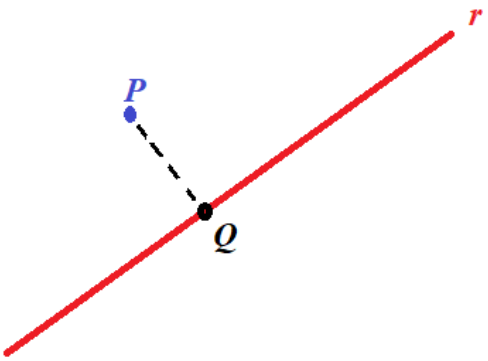
$$\Rightarrow -x+4+0+0-z+2+y-1=0 \Rightarrow \boxed{\pi_3 : -x+y-z+5=0}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : x+y=3\\ \pi_2 : x-z=-2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y=3\\ \boxed{x=-2+z}\end{array}\right\} \Rightarrow -2+z+y=3 \Rightarrow \boxed{y=5-z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r : \begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=5-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{r:\ (x,y,z)=(-2,5,0)+\lambda(1,-1,1)\ \ \lambda\in\mathbb{R}}$$

c) El punto Q de la recta *r* que está más cerca del punto P es la proyección ortogonal del punto P sobre la recta *r*.



Hallamos el plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto P y el punto Q buscado es la intersección de recta y plano.

El plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto P tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$r:\ (x,y,z)=(-2,5,0)+\lambda(1,-1,1)\Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(1,-1,1)$$

$$\pi:\begin{cases}\vec{n}=\overrightarrow{v_r}=(1,-1,1)\\ P(4,1,2)\in\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\pi: x-y+z+D=0\\ P(4,1,2)\in\pi\end{cases}\Rightarrow 4-1+2+D=0\Rightarrow D=-5\Rightarrow \pi: x-y+z-5=0$$

Hallamos el punto Q intersección de plano y recta.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x-y+z-5=0\\ r:\begin{cases}x=-2+\lambda\\ y=5-\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow -2+\lambda-5+\lambda+\lambda-5=0\Rightarrow 3\lambda=12\Rightarrow\lambda=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-2+4=2\\ y=5-4=1\\ z=4\end{cases}\Rightarrow\boxed{Q(2,1,4)}$$

PAU junio (serie 5) 2023

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2023

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 5

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Considere las funciones $f(x) = -x^2 + x + 6$ y $g(x) = -9x + 3x^2$.

a) Calcule el área de la región delimitada por las dos funciones.
[1,25 puntos]

b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $(-2, 0)$. Represente esta recta tangente y las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en unos mismos ejes de coordenadas.
[1,25 puntos]

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x - y + kz &= -1 \\ x + ky + z &= 3 \\ 2x + (k-1)y + 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

donde k es un parámetro real.

a) Discuta el sistema en función del valor de k.
[1,5 puntos]

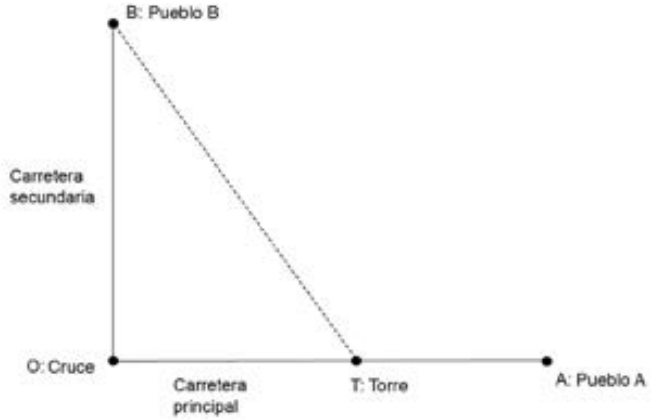
b) Resuelva el sistema para $k = 0$ y para $k = 1$.
[1 punto]

3. Considere las rectas en el espacio $r : x = -y = z + m$ y $s : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$, donde m es un parámetro real.

a) Estudie la posición relativa para los distintos valores del parámetro m.
[1,25 puntos]

b) Calcule m para que la distancia entre las rectas r y s sea de $\sqrt{2}$ unidades.
[1,25 puntos]

4. En una carretera principal se encuentra el pueblo *A*. A 12 km del pueblo *A*, hay un cruce *O* con una carretera secundaria que corta perpendicularmente la carretera principal. A 9 km del cruce, en la carretera secundaria, se encuentra el pueblo *B*. Se quiere construir una torre de comunicaciones *T* en un punto de la carretera principal situado entre el pueblo *A* y el cruce *O*. Esta torre debe estar conectada con cada uno de los dos pueblos en línea recta por cable. Se sabe que instalar el cable entre la torre *T* y el pueblo *B* tiene un precio de 250 €/km y, en cambio, instalar el cable entre la torre *T* y el pueblo *A* tiene un precio de 125 €/km. Determine a qué distancia del cruce *O* en la carretera principal hay que situar la torre *T* para que el precio del cableado sea mínimo y cuál será el valor de este precio mínimo. [2,5 puntos]



5. Considere la familia S de matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

[1,25 puntos]

b) Encuentre todas las matrices de la familia S, es decir, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, que verifiquen la igualdad $A^2 = I$, donde ***I*** es la matriz identidad de orden 2.

[1,25 puntos]

6. Sea la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + x + b}{x^2 + 1}$.

a) Calcule los valores de los parámetros *a* y *b* si se sabe que la gráfica de la función *f* tiene un extremo relativo en $x = -1$ y pasa por el punto $P = \left(-2, \dfrac{13}{5}\right)$.

[1,25 puntos]

b) Para el caso *a* = *b*, calcule y clasifique los extremos relativos de la función.

[1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Considere las funciones $f(x)=-x^2+x+6$ y $g(x)=-9x+3x^2$.

a) Calcule el área de la región delimitada por las dos funciones. [1,25 puntos]

b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función *f*(*x*) en el punto (–2, 0). Represente esta recta tangente y las funciones *f*(*x*) y *g*(*x*) en unos mismos ejes de coordenadas. [1,25 puntos]

a) Hallamos los puntos de corte de sus gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+x+6 \\ g(x)=-9x+3x^2 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2+x+6=-9x+3x^2 \Rightarrow 0=4x^2-10x-6 \Rightarrow 2x^2-5x-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4(2)(-3)}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 1}{4}=\begin{cases}\dfrac{5+7}{4}=\boxed{3=x} \\ \dfrac{5-7}{4}=\boxed{\dfrac{-1}{2}=x}\end{cases}$$

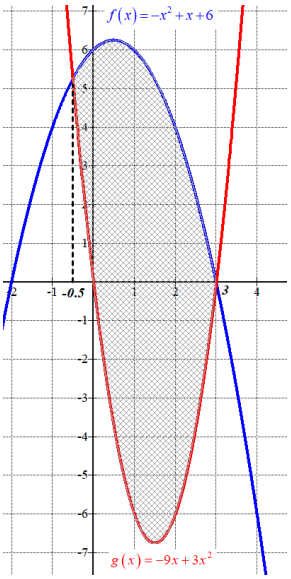
El área de la región delimitada por las dos funciones es el valor absoluto de la integral definida entre –0.5 y 3 de la diferencia de las dos funciones

$$\int_{-0.5}^{3} f(x)-g(x)\,dx=\int_{-0.5}^{3} -x^2+x+6-\left(-9x+3x^2\right)dx=\int_{-0.5}^{3} -4x^2+10x+6dx=$$

$$=\left[-4\frac{x^3}{3}+5x^2+6x\right]_{-0.5}^{3}=\left[-4\frac{3^3}{3}+5\cdot 3^2+6\cdot 3\right]-\left[-4\frac{(-0.5)^3}{3}+5(-0.5)^2+6(-0.5)\right]=$$

$$=-36+45+18-\frac{1}{6}-\frac{5}{4}+3=\frac{343}{12}\approx 28.58$$

El área de la región delimitada por las dos funciones tiene un valor aproximado de 28.58 unidades cuadradas.



b) Hallamos la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $(-2, 0)$.

$$f(x)=-x^2+x+6 \Rightarrow f'(x)=-2x+1 \Rightarrow f'(-2)=-2(-2)+1=5$$

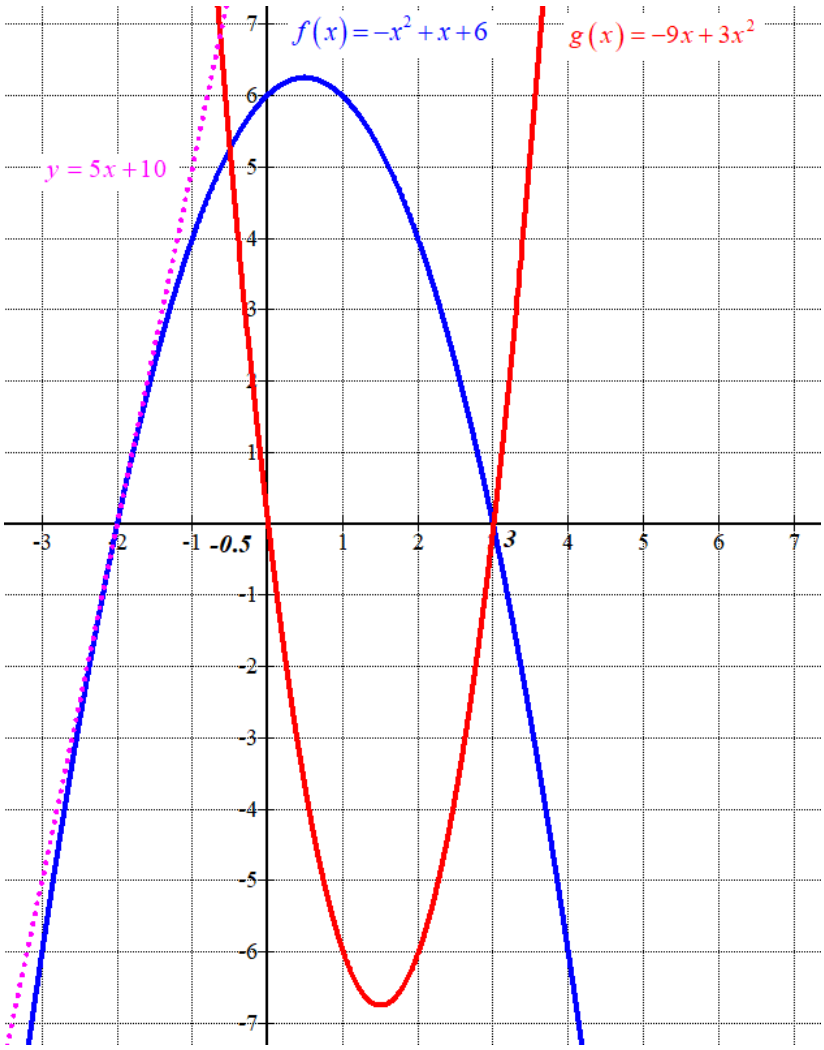
$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=0 \\ f'(-2)=5 \\ y-f(-2)=f'(-2)(x+2) \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=5(x+2) \Rightarrow \boxed{y=5x+10}$$

La recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $(-2, 0)$ tiene ecuación: $y=5x+10$.

x	$y=5x+10$
-2	0
-1	5

x	$f(x)=-x^2+x+6$
-2	0
0	6
1	6

x	$g(x)=-9x+3x^2$
0	0
1	-6
2	-6



2. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x-y+kz&=-1\\ x+ky+z&=3\\ 2x+(k-1)y+2z&=2 \end{aligned}\right\}$$

donde k es un parámetro real.

a) Discuta el sistema en función del valor de k. [1,5 puntos]

b) Resuelva el sistema para $k = 0$ y para $k = 1$. [1 punto]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 2 & k-1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & -1 \\ 1 & k & 1 & 3 \\ 2 & k-1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 2 & k-1 & 2 \end{vmatrix}=2k-2+k(k-1)-2k^2+2-(k-1)=$$

$$=\cancel{2k}-\cancel{2}+k^2-\cancel{k}-2k^2+\cancel{2}-\cancel{k}+1=-k^2+1$$

$$|A|=0\Rightarrow -k^2+1=0\Rightarrow k^2=1\Rightarrow \boxed{k=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Se nos plantean tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $k\neq -1$ y $k\neq 1$.

En este caso el determinante de A no es nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $k=-1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Convertimos el sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^{\text{a}} - \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 3 \\ \hline -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^{\text{a}} - 2\cdot\text{Fila } 1^{\text{a}} \\ 2 \quad -2 \quad 2 \quad 2 \\ \hline -2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 4 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{a}} - 2\cdot \text{Fila } 2^{\text{a}} \\ 0 \quad 0 \quad 4 \quad 4 \\ 0 \quad 0 \quad -4 \quad -8 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & -1 & -1}^{A} & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & -4 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. Si $k=1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Convertimos el sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{\text{a}} - \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{a}} - 2\cdot \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ 2 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \\ -2 \quad 2 \quad -2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{a}} - \text{Fila } 2^{\text{a}} \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & -1 & 1}^{A} & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $k \neq -1$ y $k \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k=-1$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $k=1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para el caso $k=0$ el sistema tiene una única solución. Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} x-y=-1 \\ x+z=3 \\ 2x-y+2z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+1=y \\ z=3-x \\ 2x-y+2z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{2x}-x-1+6-\cancel{2x}=2 \Rightarrow -x=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=3} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\boxed{y=3+1=4} \\ \boxed{z=3-3=0}\end{array}\right.$$

La solución del sistema es $x=3,\ y=4,\ z=0$.

Para el caso $k=1$ estamos en el caso 3 estudiado en el apartado anterior y tendrá infinitas soluciones. Resolvemos el sistema utilizando el sistema equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y+z=-1 \\ 2y \quad =4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y+z=-1 \\ \boxed{y=2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x-2+z=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2 \quad ,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

3. Considere las rectas en el espacio $r: x=-y=z+m$ y $s:\begin{cases}x+y=1\\x-z=0\end{cases}$, donde *m* es un parámetro real.

a) Estudie la posición relativa para los distintos valores del parámetro *m*. [1,25 puntos]

b) Calcule *m* para que la distancia entre las rectas *r* y *s* sea de $\sqrt{2}$ unidades. [1,25 puntos]

a) Obtenemos un punto, un vector director y las ecuaciones paramétricas de las rectas *r* y *s*.

$$r:\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z+m}{1}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(1,-1,1)\\P_r(0,0,-m)\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=\alpha\\y=-\alpha\\z=-m+\alpha\end{cases}$$

$$s:\begin{cases}x+y=1\\x-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1-x\\z=x\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}x=\lambda\\y=1-\lambda\\z=\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_s}=(1,-1,1)\\Q_s(0,1,0)\end{cases}$$

Como los vectores directores de las rectas son iguales $\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{v_s}=(1,-1,1)$ las rectas son coincidentes o paralelas.

Comprobamos cuando el punto $P_r(0,0,-m)$ pertenece a la recta *s*.

$$\left.\begin{array}{l}¿P_r(0,0,-m)\in s?\\s:\begin{cases}x+y=1\\x-z=0\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow ¿\begin{cases}0+0=1\\0+m=0\end{cases}?$$

No se cumple una de las ecuaciones de la recta *s* independientemente del valor de *m*.

Para cualquier valor de *m* el punto $P_r(0,0,-m)$ no pertenece a la recta *s*. Las rectas son paralelas para cualquier valor de *m*.

b) Hallamos la expresión de la distancia entre las dos rectas paralelas como la distancia de un punto cualquiera de la recta *r* a la recta *s*.

$$\left.\begin{array}{l}P_r(0,0,-m)\\Q_s(0,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{P_rQ_s}=(0,1,0)-(0,0,-m)=(0,1,m)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{P_rQ_s}=(0,1,m)\\\overrightarrow{v_s}=(1,-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{v_s}\times\overrightarrow{P_rQ_s}=\begin{vmatrix}i&j&k\\0&1&m\\1&-1&1\end{vmatrix}=i+mj-k+mi=(m+1)i+mj-k=(m+1,m,-1)$$

$$d(r,s)=d(P_r,s)=\frac{\left|\overrightarrow{v_s}\times\overrightarrow{P_rQ_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|}=\frac{\sqrt{(m+1)^2+m^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{m^2+1^2+2m+m^2+1}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2m^2+2m+2}}{\sqrt{3}}$$

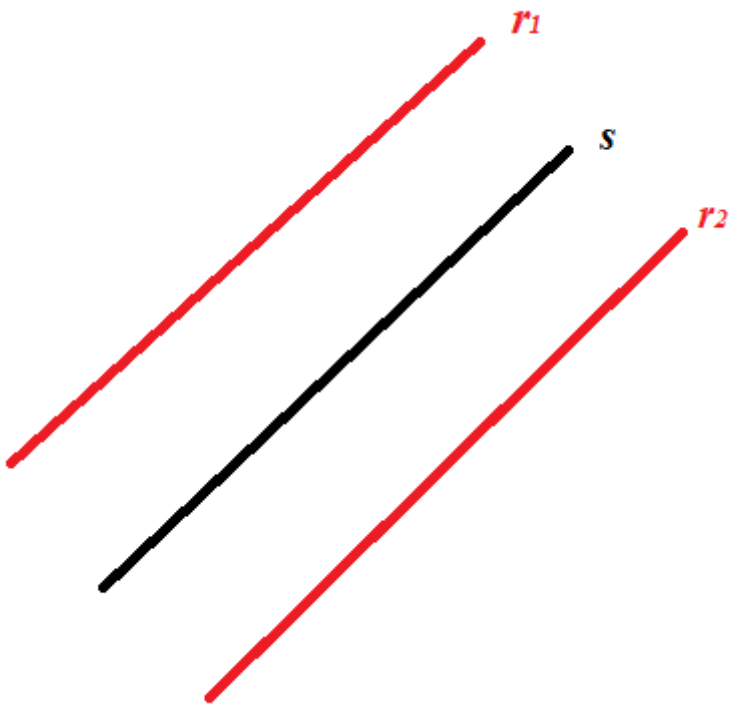
Igualamos esta distancia a $\sqrt{2}$ y despejamos m.

$$d(r,s)=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{2m^2+2m+2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2m^2+2m+2}=\sqrt{6}\Rightarrow$$

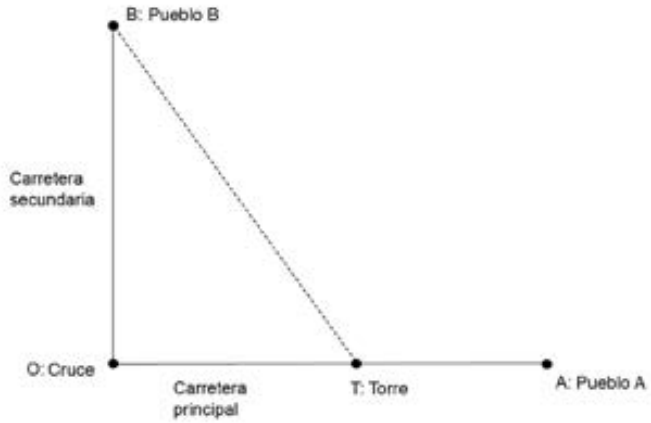
$$\Rightarrow 2m^2+2m+2=6\Rightarrow m^2+m+1=3\Rightarrow m^2+m-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{-1+3}{2}=\boxed{1=m}\\ \frac{-1-3}{2}=\boxed{-2=m}\end{cases}$$

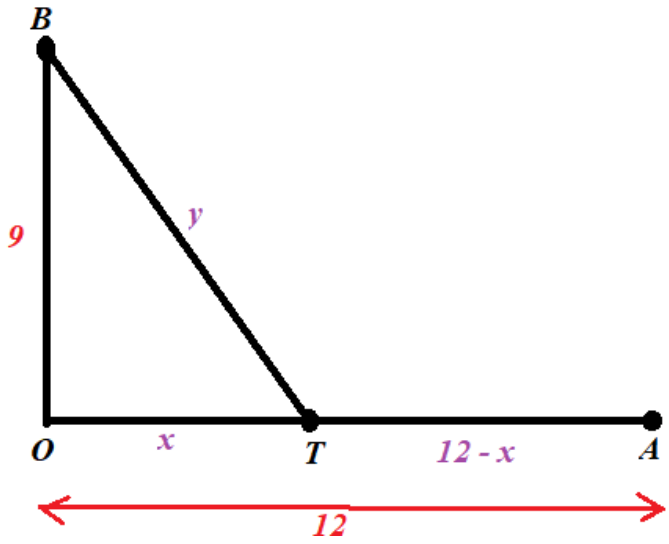
Existen dos valores de m para los que la distancia entre las rectas r y s es de $\sqrt{2}$ unidades: $m=1$ y $m=-2$.



4. En una carretera principal se encuentra el pueblo *A*. A 12 km del pueblo *A*, hay un cruce *O* con una carretera secundaria que corta perpendicularmente la carretera principal. A 9 km del cruce, en la carretera secundaria, se encuentra el pueblo *B*. Se quiere construir una torre de comunicaciones *T* en un punto de la carretera principal situado entre el pueblo *A* y el cruce *O*. Esta torre debe estar conectada con cada uno de los dos pueblos en línea recta por cable. Se sabe que instalar el cable entre la torre *T* y el pueblo *B* tiene un precio de 250 €/km y, en cambio, instalar el cable entre la torre *T* y el pueblo *A* tiene un precio de 125 €/km. Determine a qué distancia del cruce *O* en la carretera principal hay que situar la torre *T* para que el precio del cableado sea mínimo y cuál será el valor de este precio mínimo. [2,5 puntos]



Llamamos "x" a la distancia de T a O e "y" a la distancia de T a B. Ponemos los datos proporcionados en el dibujo siguiente.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos *x* y 9 tenemos:

$$y^2 = 9^2 + x^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 81}$$

El coste del cableado sería $f(x) = 125(12 - x) + 250y = 1500 - 125x + 250\sqrt{x^2 + 81}$. Siendo $0 \le x \le 12$.

Derivamos esta función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$f(x)=1500-125x+250\sqrt{x^2+81}\Rightarrow f'(x)=-125+250\frac{2x}{2\sqrt{x^2+81}}=-125+\frac{250x}{\sqrt{x^2+81}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow -125+\frac{250x}{\sqrt{x^2+81}}=0\Rightarrow \frac{250x}{\sqrt{x^2+81}}=125\Rightarrow 250x=125\sqrt{x^2+81}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=\sqrt{x^2+81}\Rightarrow 4x^2=x^2+81\Rightarrow 3x^2=81\Rightarrow x^2=\frac{81}{3}=27\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{27}\simeq 5.196}$$

Sustituimos $x=\sqrt{27}$ en la segunda derivada.

$$f'(x)=-125+\frac{250x}{\sqrt{x^2+81}}\Rightarrow f''(x)=\frac{250\sqrt{x^2+81}-250x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+81}}}{\left(\sqrt{x^2+81}\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=250\frac{\sqrt{x^2+81}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+81}}}{x^2+81}\Rightarrow\Rightarrow f''\left(\sqrt{27}\right)=250\frac{\sqrt{\left(\sqrt{27}\right)^2+81}-\frac{\left(\sqrt{27}\right)^2}{\sqrt{\left(\sqrt{27}\right)^2+81}}}{\left(\sqrt{27}\right)^2+81}=$$

$$=250\frac{\sqrt{27+81}-\frac{27}{\sqrt{27+81}}}{27+81}=\frac{\sqrt{108}-\frac{27}{\sqrt{108}}}{108}=\frac{\sqrt{3}}{24}>0$$

Como la segunda derivada es positiva la función coste tiene un mínimo para $x=\sqrt{27}$.
Para este valor el coste tiene un valor aproximado de
$f(x)=1500-125\cdot\sqrt{27}+250\sqrt{\left(\sqrt{27}\right)^2+81}\simeq 3448.56$ euros.

Para que el coste de la instalación sea mínimo debe colocarse la torre a $\sqrt{27}\simeq 5.2$ kilómetros del cruce, siendo este coste mínimo de 3448.56 euros.

5. Considere la familia S de matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$. [1,25 puntos]

b) Encuentre todas las matrices de la familia S, es decir, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, que verifiquen la igualdad $A^2 = I$, donde ***I*** es la matriz identidad de orden 2. [1,25 puntos]

a) Hallamos la inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{4-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz resultado del producto $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4-3 & -2+6 \\ 6-2 & -3+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 \\ 4/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial $A^2 = I$.

$$A^2 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+ba \\ ab+ba & b^2+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ 2ab=0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \Rightarrow \\ b=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Si\ a=0 \rightarrow b^2=1 \Rightarrow b=\sqrt{1}=\pm 1 \\ \\ Si\ b=0 \rightarrow a^2=1 \rightarrow a=\sqrt{1}=\pm 1 \end{cases}$$

Las matrices que cumplen lo pedido son:

$$\left.\begin{matrix} a=0 \\ b=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} a=0 \\ b=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} a=1 \\ b=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} a=-1 \\ b=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Sea la función $f(x)=\dfrac{ax^2+x+b}{x^2+1}$.

a) Calcule los valores de los parámetros *a* y *b* si se sabe que la gráfica de la función *f* tiene un extremo relativo en $x=-1$ y pasa por el punto $P=\left(-2,\dfrac{13}{5}\right)$. [1,25 puntos]

b) Para el caso *a* = *b*, calcule y clasifique los extremos relativos de la función. [1,25 puntos]

a) Si la función *f* tiene un extremo relativo en $x=-1$ entonces su derivada se anula para este valor.

$$f(x)=\frac{ax^2+x+b}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2ax+1)(x^2+1)-2x(ax^2+x+b)}{(x^2+1)^2}\Bigg\}\Rightarrow$$
$$f'(-1)=0$$

$$\Rightarrow\frac{(2a(-1)+1)((-1)^2+1)-2(-1)(a(-1)^2-1+b)}{((-1)^2+1)^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{(-2a+1)2+2(a+b-1)}{4}=0\Rightarrow(-2a+1)2+2(a+b-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-2a+a+b-1=0\Rightarrow b-a=0\Rightarrow \boxed{b=a}$$

La función queda $f(x)=\dfrac{ax^2+x+a}{x^2+1}$. Como la gráfica pasa por el punto $P=\left(-2,\dfrac{13}{5}\right)$ se debe cumplir que $f(-2)=\dfrac{13}{5}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=\dfrac{13}{5} \\ f(x)=\dfrac{ax^2+x+a}{x^2+1}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{13}{5}=\frac{a(-2)^2-2+a}{(-2)^2+1}\Rightarrow\frac{13}{5}=\frac{4a-2+a}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13=5a-2\Rightarrow 15=5a\Rightarrow\boxed{a=3}$$

Los valores buscados son $a=b=3$.

b) Para el caso *a* = *b* la función queda $f(x)=\dfrac{ax^2+x+a}{x^2+1}$. Buscamos los valores que anulan su derivada.

$$f(x)=\frac{ax^2+x+a}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2ax+1)(x^2+1)-2x(ax^2+x+a)}{(x^2+1)^2}=$$

$$= \frac{\cancel{2ax^3} + \cancel{2ax} + x^2 + 1 - \cancel{2ax^3} - 2x^2 - \cancel{2ax}}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Rightarrow -x^2+1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos obtenidos: $x=-1$ y $x=1$.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{-(-2)^2+1}{\left((-2)^2+1\right)^2} = \frac{-3}{25} < 0$. La función decrece en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-0^2+1}{\left(0^2+1\right)^2} = 1 > 0$. La función crece en $(-1,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-2^2+1}{\left(2^2+1\right)^2} = \frac{-3}{25} < 0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función decrece en $(-\infty,-1)$ y crece en $(-1,1)$ por lo que la función tiene un mínimo relativo en $x=-1$.
La función crece en $(-1,1)$ y decrece en $(1,+\infty)$ por lo que la función tiene un máximo relativo en $x=1$.

PAU septiembre 2022

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2022

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 3

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.
Cada cuestión vale 2,5 puntos.
Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.
Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. El mástil que sostiene la lona de la carpa de un circo se sitúa perpendicularmente sobre el plano de un suelo cuya ecuación es π: $x - z = 6$. Se sabe que la cúpula de la carpa (el punto más elevado por el que pasa el mástil) está en el punto de coordenadas $P = (30, 1, 0)$.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que contiene el mástil. [1 punto]

b) Calcule las coordenadas del punto de contacto del mástil con el suelo, y la longitud del mástil**.** [1,5 puntos]

2. Considere la función $f(x) = \dfrac{9}{x^2 + x - 2}$.

a) Determine el dominio, las posibles asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. [1,25 puntos]

b) Calcula la ecuación general de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. Represente en un mismo gráfico la función $f(x)$ y la recta tangente [1,25 puntos]

3. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}$, que depende el parámetro a.

a) Calcule el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro a. [1,25 puntos]

b) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, resuelva la siguiente ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. [1,25 puntos]

4. ***a)*** Considere la función $f(x)=\begin{cases}\ln(x),\ si\ \ x\in(0,e)\\ ax+b,\ si\ \ x\in[e,4)\end{cases}$, donde *a* y *b* son números reales. Encuentre el valor de *a* y de *b* para que la función sea continua y derivable en el intervalo (0, 4). [1,25 puntos]

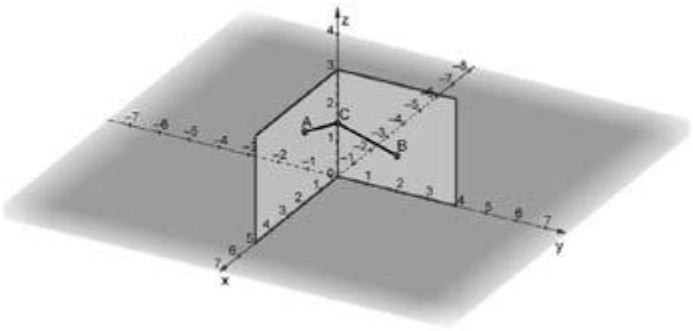
b) Calcule la función *g(x)* que satisface $g'(x)=\dfrac{x^3}{9x^4+1}$ y que pasa por el punto (0,–1). [1,25 puntos]

5. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a & 0\\ 2 & a+1 & a-1\\ 2a+1 & 0 & -a-3\end{pmatrix}$, en la que *a* es un parámetro real.

a) Calcule los valores del parámetro *a* para los cuales la matriz A es invertible. [1,25 puntos]

b) Para el caso *a = 3*, resuelva la ecuación $A\cdot X=B-3I$ en la que $B=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$. [1,25 puntos]

6. La siguiente imagen muestra dos paredes perpendiculares de una sala representadas en unos ejes de coordenadas, de modo que una pared está en el plano *y = 0* y la otra está en el plano *x = 0*.



En el punto A = (2, 0, 2) queremos colgar un altavoz que debe estar conectado a un equipo de sonido, el cual está situado en la otra pared, en el punto B = (0, 2, 1). La conexión entre A y B se hará mediante un cable que pase por el punto C = (0, 0, h), situado en la recta vertical de intersección de las dos paredes. Dado que la calidad del sonido depende, entre otros factores, de la longitud del cable que une los dos aparatos, se quiere realizar una instalación con el mínimo de cable posible.

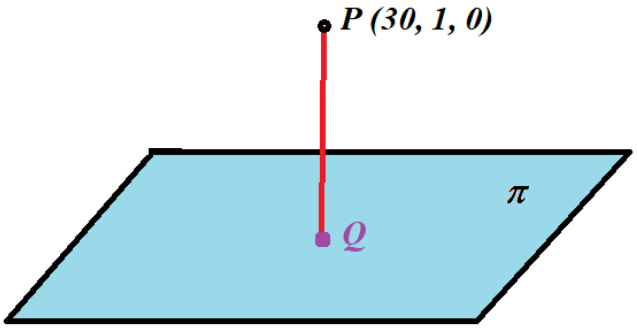
a) Compruebe que la longitud total del cable necesario, en función de la altura *h* por donde debe pasar el cable en el eje vertical OZ, viene dada por la expresión

$L(h)=\sqrt{h^2-4h+8}+\sqrt{h^2-2h+5}$ [0,75 puntos]

b) Calcule las coordenadas del punto C por donde debe pasar el cable para que la longitud del cable sea mínima. Calcule esta longitud mínima del cable. [1,75 puntos]

SOLUCIONES

1. El mástil que sostiene la lona de la carpa de un circo se sitúa perpendicularmente sobre el plano de un suelo cuya ecuación es π: $x - z = 6$. Se sabe que la cúpula de la carpa (el punto más elevado por el que pasa el mástil) está en el punto de coordenadas $P = (30, 1, 0)$.
a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que contiene el mástil. [1 punto]
b) Calcule las coordenadas del punto de contacto del mástil con el suelo, y la longitud del mástil**.** [1,5 puntos]



a) La recta r que contiene el mástil (de color rojo en el dibujo) tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x - z = 6 \Rightarrow \vec{n} = (1,0,-1)$$

$$r \equiv \begin{cases} \vec{v_r} = \vec{n} = (1,0,-1) \\ P(30,1,0) \in r \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 30 + \lambda \\ y = 1 + 0\lambda \\ z = 0 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x = 30 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

b) Debemos averiguar las coordenadas del punto Q del dibujo intersección de recta y plano.

$$r \equiv \left.\begin{cases} x = 30 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases}\right\} \Rightarrow 30 + \lambda + \lambda = 6 \Rightarrow 2\lambda = -24 \Rightarrow \lambda = -12 \Rightarrow \begin{cases} x = 30 - 12 = 18 \\ y = 1 \\ z = -(-12) = 12 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(18,1,12)}$$

La longitud del mástil es la distancia entre los puntos P y Q, es decir, el modulo del vector que los une.

$$\overrightarrow{PQ} = (18,1,12) - (30,1,0) = (-12,0,12)$$

$$dis\tan cia(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-12)^2 + 0^2 + 12^2} = \sqrt{288} = \boxed{12\sqrt{2} \simeq 16.97\, unidades}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

La longitud del mástil es la distancia del punto P al plano π.

$$\left.\begin{matrix} P(30,1,0) \\ \pi : x - z - 6 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(P,\pi) = \frac{|30 - 0 - 6|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{24}{\sqrt{2}} = \boxed{12\sqrt{2} \simeq 16.97\, unidades}$$

2. Considere la función $f(x)=\dfrac{9}{x^2+x-2}$.

a) Determine el dominio, las posibles asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. [1,25 puntos]

b) Calcula la ecuación general de la recta tangente a la función *f(x)* en el punto de abscisa *x = 4*. Represente en un mismo gráfico la función *f(x)* y la recta tangente [1,25 puntos]

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$f(x)=\frac{9}{x^2+x-2}\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+3}{2}=\boxed{1=x}\\ \dfrac{-1-3}{2}=\boxed{-2=x}\end{cases}$$

$$\boxed{\text{Dominio } f(x)=\mathbb{R}-\{-2,1\}}$$

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{9}{x^2+x-2}=\frac{9}{(-2)^2-2-2}=\frac{9}{0}=\infty$$

$x=-2$ es asíntota vertical

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{9}{x^2+x-2}=\frac{9}{1^2+1-2}=\frac{9}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{x^2+x-2}=\frac{9}{\infty}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No existe pues la función tiene asíntota horizontal.

Para estudiar la evolución de la función usamos la función derivada.

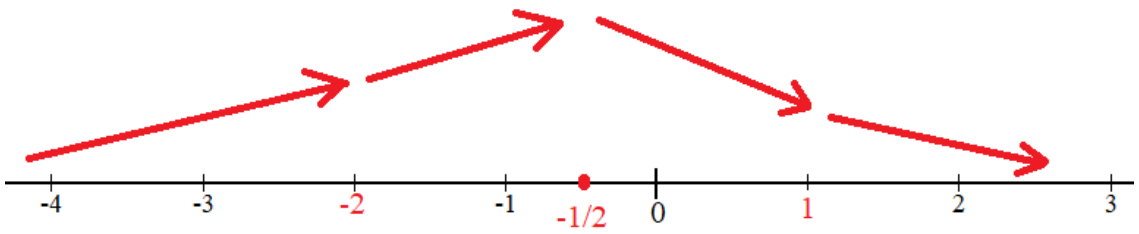
$$f\,'(x)=\frac{0-9(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}=\frac{-9(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$f\,'(x)=0\Rightarrow\frac{-9(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}=0\Rightarrow -9(2x+1)=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow\boxed{x=\frac{-1}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores: –2, –1/2 y 1.

- En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f\,'(-3)=\dfrac{-9(2(-3)+1)}{\left((-3)^2-3-2\right)^2}=\dfrac{45}{16}>0$. La función crece en $(-\infty,-2)$.
- En el intervalo $(-2,-1/2)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f\,'(-1)=\dfrac{-9(2(-1)+1)}{\left((-1)^2-1-2\right)^2}=\dfrac{9}{4}>0$. La función crece en $(-2,-1/2)$.
- En el intervalo $(-1/2,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f\,'(0)=\dfrac{-9(0+1)}{\left(0^2+0-2\right)^2}=\dfrac{-9}{4}<0$. La función decrece en $(-1/2,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f\,'(2)=\dfrac{-9(4+1)}{\left(2^2+2-2\right)^2}=\dfrac{-45}{16}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(-2,-1/2)$ y decrece en $(-1/2,1)\cup(1,+\infty)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = -1/2$. Como $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-2}=-4$ las coordenadas del máximo relativo son $\left(\dfrac{-1}{2},-4\right)$

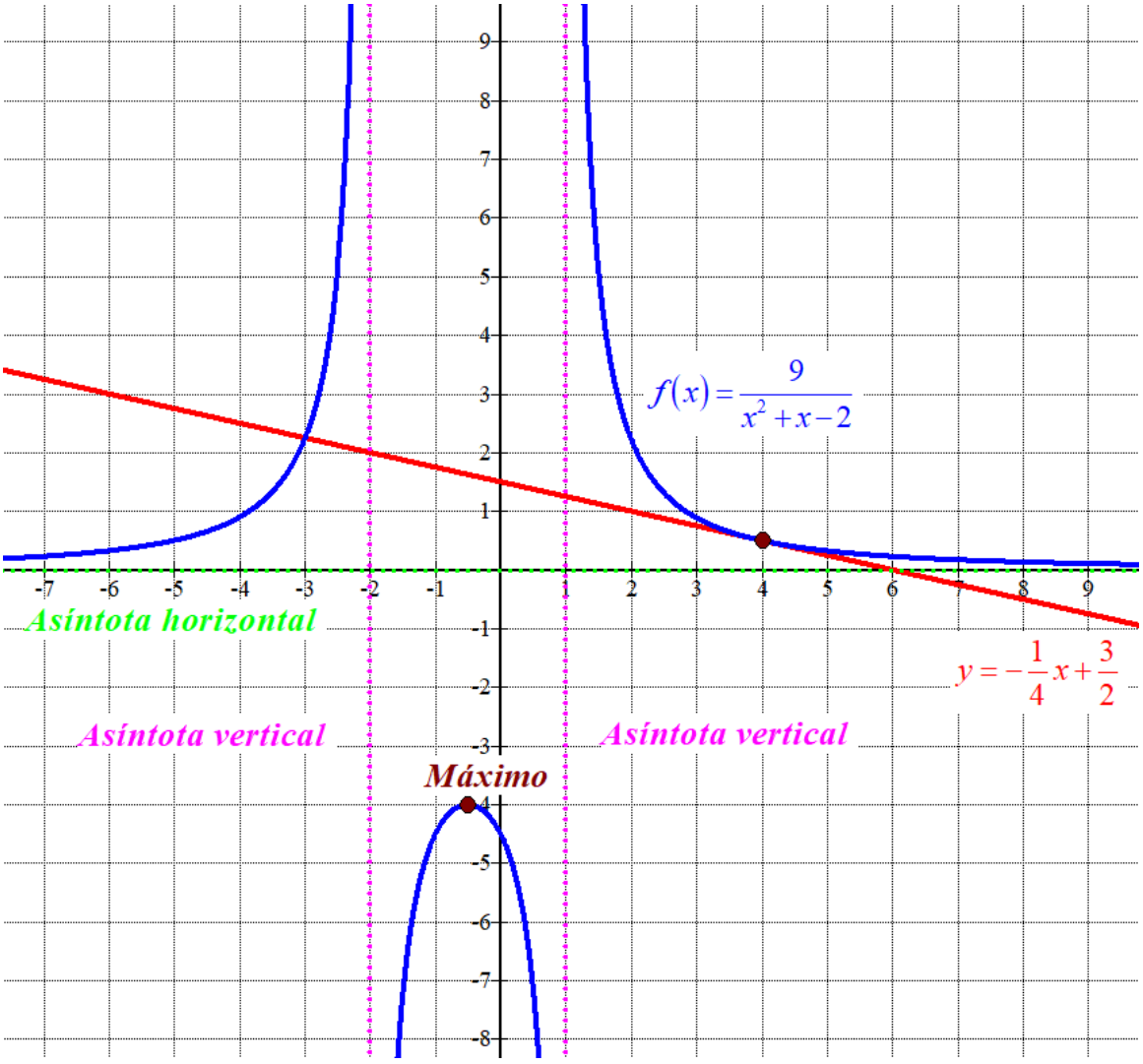
b) La recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$ tiene ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} f(4)=\dfrac{9}{4^2+4-2}=\dfrac{9}{18}=\dfrac{1}{2} \\ f\,'(4)=\dfrac{-9(8+1)}{\left(4^2+4-2\right)^2}=\dfrac{-1}{4} \\ y-f(4)=f\,'(4)(x-4) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}(x-4)\Rightarrow y=-\frac{1}{4}x+1+\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}}$$

Obtenemos una tabla de valores de la función y de la tangente y las representamos.

x	$f(x)=\dfrac{9}{x^2+x-2}$
–4	0.9
–3	2.25
–1	–4.5
–0.5	–4
0	–4.5
2	2.25
4	0.5

x	$y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$
0	3/2
4	1/2



3. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & a & 3\\ 2a & 5 & 3a\\ 7 & 4a & 9\end{pmatrix}$, que depende el parámetro a.

a) Calcule el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro a. [1,25 puntos]

b) Si $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, resuelva la siguiente ecuación matricial $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. [1,25 puntos]

a) El rango de la matriz A puede ser 3, 2 o 1.
Para que sea 3 su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & 3\\ 2a & 5 & 3a\\ 7 & 4a & 9\end{vmatrix}=45+21a^2+24a^2-105-18a^2-12a^2=15a^2-60$$

$$|A|=0\Rightarrow 15a^2-60=0\Rightarrow 15a^2=60\Rightarrow a^2=\frac{60}{15}=4\Rightarrow \boxed{a=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Si $a\neq -2$ y $a\neq 2$ el determinante es no nulo y el rango de A es 3.
Si $a=2$ o $a=-2$ el determinante es nulo y el rango de A es menor que 3. Estudiamos estos dos casos por separado.

Si $a=-2$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 5 & -6\\ 7 & -8 & 9\end{pmatrix}$. ¿El rango es 2?
Si quitamos la fila y columna 3ª el menor que nos queda tiene determinante no nulo →
$\begin{vmatrix}1 & -2\\ -4 & 5\end{vmatrix}=5-8=-3\neq 0$. El rango de A es 2.

Si $a=2$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$. ¿El rango es 2?
Si quitamos la fila y columna 3ª el menor que nos queda tiene determinante no nulo →
$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=5-8=-3\neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $a\neq -2$ y $a\neq 2$ el rango de A es 3 y si $a=-2$ o $a=2$ el rango de A es 2.

b) Pasamos la ecuación matricial a sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x+2y+3z=0\\ 4x+5y+6z=0\\ 7x+8y+9z=0\end{matrix}\right\}$$

Utilizando el método de Gauss convertimos el sistema en otro triangular equivalente más fácil de resolver.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=0 \\ 7x+8y+9z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - 4 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} 4x & +5y & +6z & =0 \\ -4x & -8y & -12z & =0 \\ \hline & -3y & -6z & =0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - 7 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} 7x & +8y & +9z & =0 \\ -7x & -14y & -21z & =0 \\ \hline & -6y & -12z & =0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ -3y-6z=0 \\ -6y-12z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - 2 \cdot \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} -6y & -12z & = & 0 \\ 6y & +12z & = & 0 \\ \hline 0 & = & 0 & \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ -3y-6z=0 \\ 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ y=-2z \end{array}\right\} \Rightarrow x-4z+3z=0 \Rightarrow x=z \Rightarrow$$

$$\textit{Solución}: \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=-2\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

La solución es $X = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R}$

4. *a)* Considere la función $f(x)=\begin{cases}\ln(x),\ si\ \ x\in(0,e)\\ ax+b,\ si\ \ x\in[e,4)\end{cases}$, donde *a* y *b* son números reales. Encuentre el valor de *a* y de *b* para que la función sea continua y derivable en el intervalo (0, 4). [1,25 puntos]

b) Calcule la función *g(x)* que satisface $g'(x)=\dfrac{x^3}{9x^4+1}$ y que pasa por el punto (0, –1). [1,25 puntos]

a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = e$ y para ello se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=\lim\limits_{x\to e^-}\ln(x)=\ln e=1\\ \lim\limits_{x\to e^+} f(x)=\lim\limits_{x\to e^+} ax+b=ae+b\\ f(e)=ae+b\\ \lim\limits_{x\to e^-} f(x)=\lim\limits_{x\to e^+} f(x)=f(e)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{1=ae+b}$$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{e\}$ y su función derivada es $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},\ si\ \ x\in(0,e)\\ a,\ si\ \ x\in(e,4)\end{cases}$.

Para que sea derivable debe serlo también en $x = e$ y para ello deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l}f'(e^-)=\lim\limits_{x\to e^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{e}\\ f'(e^+)=\lim\limits_{x\to e^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to e^-} a=a\\ f'(e^-)=f'(e^+)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\frac{1}{e}=a}$$

Sustituimos este valor de "a" en la ecuación obtenida inicialmente.

$$\left.\begin{array}{l}1=ae+b\\ a=\dfrac{1}{e}\end{array}\right\}\Rightarrow 1=\frac{1}{e}\cdot e+b\Rightarrow 1=1+b\Rightarrow \boxed{b=0}$$

Los valores buscados son $a=\dfrac{1}{e}$ y $b=0$.

b) Calculamos la integral de la derivada y obtenemos la función salvo un parámetro.

$$g(x)=\int g'(x)\,dx=\int\frac{x^3}{9x^4+1}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ 9x^4+1=t\to 36x^3dx=dt\to dx=\dfrac{dt}{36x^3}\end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{\cancel{x^3}}{t}\frac{dt}{36\cancel{x^3}}=\frac{1}{36}\int\frac{1}{t}dt=\frac{1}{36}\ln|t|=\left\{\begin{array}{l}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ t=9x^4+1\end{array}\right\}=\boxed{\frac{1}{36}\ln(9x^4+1)+K}$$

Como la función *g(x)* pasa por el punto (0, –1) se debe cumplir que *g(0) = –1*.

$$\left.\begin{array}{r} g(x)=\dfrac{1}{36}\ln\left(9x^4+1\right)+K \\ g(0)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1=\frac{1}{36}\ln\left(9\cdot 0^4+1\right)+K \Rightarrow -1=\frac{1}{36}\ln 1+K \Rightarrow \boxed{-1=K}$$

La función *g(x)* tiene la expresión $g(x)=\dfrac{1}{36}\ln\left(9x^4+1\right)-1$

5. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en la que *a* es un parámetro real.

a) Calcule los valores del parámetro *a* para los cuales la matriz A es invertible. [1,25 puntos]

b) Para el caso *a = 3*, resuelva la ecuación $A\cdot X = B-3I$ donde $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. [1,25 puntos]

a) La matriz A es invertible si su determinante es no nulo.
Calculamos el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{Saco factor común "a"} \\ \text{en la primera fila}\end{matrix}\right\}=a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix}=$$

$$=\{\text{Columna } 2^{\text{a}} - \text{ Columna } 1^{\text{a}}\}=a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a-1 & a-1 \\ 2a+1 & -2a-1 & -a-3 \end{vmatrix}=$$

$$=\{\text{Columna } 3^{\text{a}} - \text{ Columna } 2^{\text{a}}\}=a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a-1 & 0 \\ 2a+1 & 2a+1 & a-2 \end{vmatrix}=a\cdot 1\cdot(a-1)(a-2)=a(a-1)(a-2)$$

Comprobamos cuando se anula.

$$|A|=0\Rightarrow a(a-1)(a-2)=0\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ o \\ a=1 \\ o \\ a=2 \end{cases}$$

La matriz A es invertible si *a* es distinto de 0, 1 y 2.

b) Por lo visto en el apartado a) para el caso *a = 3* la matriz A es invertible.
La matriz queda $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. Calculamos su inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix}=-72+42+36=6\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3&2&7\\3&4&0\\0&2&-6\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}4&0\\2&-6\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&0\\0&-6\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&4\\0&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&7\\2&-6\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&7\\0&-6\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&2\\0&2\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}2&7\\4&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&7\\3&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&2\\3&4\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-24&18&6\\26&-18&-6\\-28&21&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3&1\\13/3&-3&-1\\-14/3&7/2&1\end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial $A\cdot X=B-3I$.

$$A\cdot X=B-3I\Rightarrow X=A^{-1}\cdot\left(B-3I\right)$$

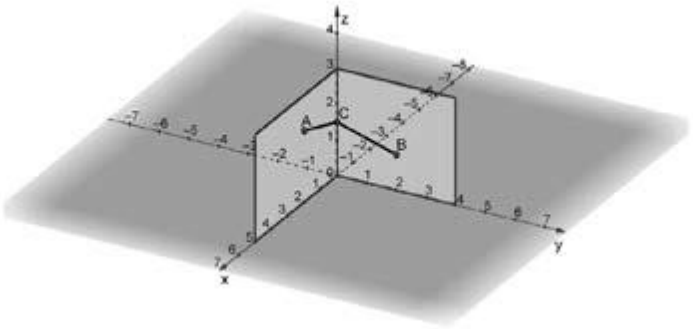
Sustituimos el valor de las matrices y obtenemos la expresión de X.

$$B-3I=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=Id_3$$

$$X=A^{-1}\cdot\left(B-3I\right)=\begin{pmatrix}-4&3&1\\13/3&-3&-1\\-14/3&7/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-4&3&1\\13/3&-3&-1\\-14/3&7/2&1\end{pmatrix}}$$

6. La siguiente imagen muestra dos paredes perpendiculares de una sala representadas en unos ejes de coordenadas, de modo que una pared está en el plano $y = 0$ y la otra está en el plano $x = 0$.



En el punto A = (2, 0, 2) se quiere fijar un altavoz que debe estar conectado a un equipo de sonido, el cual está situado en la otra pared, en el punto B = (0, 2, 1). La conexión entre A y B la realizaremos mediante un cable que pase por el punto C = (0, 0, h), situado en la recta vertical de intersección de las dos paredes. Dado que la calidad del sonido depende, entre otros factores, de la longitud del cable que une a los dos aparatos, se quiere realizar una instalación con el mínimo de cable posible.

a) Compruebe que la longitud total del cable necesario, en función de la altura *h* por donde debe pasar el cable en el eje vertical OZ, viene dada por la expresión $L(h)=\sqrt{h^2-4h+8}+\sqrt{h^2-2h+5}$ [0,75 puntos]

b) Calcula las coordenadas del punto C por donde debe pasar el cable para que la longitud del cable sea mínima. Calcule esta longitud mínima del cable. [1,75 puntos]

a) La longitud del cable que va del punto A al punto B, pasando por el punto C es la suma de las longitudes de A a C y de C a B. Las distancias entre dos puntos es el módulo del vector que los une.

$$\overrightarrow{AC}=(0,0,h)-(2,0,2)=(-2,0,h-2)\Rightarrow d(A,C)=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+0^2+(h-2)^2}\Rightarrow$$

$$d(A,C)=\sqrt{4+h^2+4-4h}=\sqrt{h^2-4h+8}$$

$$\overrightarrow{CB}=(0,2,1)-(0,0,h)=(0,2,1-h)\Rightarrow d(C,B)=\left|\overrightarrow{CB}\right|=\sqrt{0^2+2^2+(1-h)^2}\Rightarrow$$

$$d(C,B)=\sqrt{4+h^2+1-2h}=\sqrt{h^2-2h+5}$$

La longitud del cable es la suma de las dos distancias:

$$L(h)=d(A,C)+D(C,B)=\sqrt{h^2-4h+8}+\sqrt{h^2-2h+5}$$

b) Para hallar el mínimo de la longitud hallamos la derivada y la igualamos a cero.

$$L'(h)=\frac{2h-4}{2\sqrt{h^2-4h+8}}+\frac{2h-2}{2\sqrt{h^2-2h+5}}=\frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}}+\frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}}$$

$$L'(h)=0\Rightarrow\frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}}+\frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}}=-\frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}}=\frac{1-h}{\sqrt{h^2-2h+5}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(h-2)\sqrt{h^2-2h+5}=(1-h)\sqrt{h^2-4h+8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(h-2)^2\left(\sqrt{h^2-2h+5}\right)^2=(1-h)^2\left(\sqrt{h^2-4h+8}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(h-2)^2(h^2-2h+5)=(1-h)^2(h^2-4h+8)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(h^2+4-4h)(h^2-2h+5)=(1+h^2-2h)(h^2-4h+8)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^4-2h^3+5h^2+4h^2-8h+20-4h^3+8h^2-20h=h^2-4h+8+h^4-4h^3+8h^2-2h^3+8h^2-16h\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{h^4}-\cancel{6h^3}+\cancel{17h^2}-28h+20=\cancel{h^4}-\cancel{6h^3}+\cancel{17h^2}-20h+8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8h=-12\Rightarrow\boxed{h=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de h = 1.5.

- Antes de *h = 1.5* tomo *h = 1* y la derivada vale $L'(1)=\frac{1-2}{\sqrt{1^2-4+8}}+\frac{1-1}{\sqrt{1^2-2+5}}=\frac{-1}{\sqrt{5}}<0$.
  La función decrece antes de *h = 1.5*.
- Después de *h = 1.5* tomo *h = 2* y la derivada vale
  $L'(2)=\frac{2-2}{\sqrt{2^2-8+8}}+\frac{2-1}{\sqrt{2^2-4+5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}>0$. La función crece después de *h = 1.5*.

Por lo que la longitud del cable es mínima con *h = 1.5*, es decir, en el punto C(0,0,1.5).

Esa longitud mínima tiene un valor L(1.5) que calculamos:

$$L(1.5)=\sqrt{1.5^2-4\cdot1.5+8}+\sqrt{1.5^2-2\cdot1.5+5}=\sqrt{4.25}+\sqrt{4.25}=\boxed{2\sqrt{4.25}\simeq4.123}$$

La longitud mínima del cable se consigue pasando por C(0, 0, 1.5), siendo esta longitud mínima de 4.123 unidades de longitud.

PAU junio (serie 2) 2022

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2022

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 2

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Sea $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada de una función $f(x)$.

a) Si se sabe que $f(x)$ corta el eje de les abscisas en $x = 1$, calcule la expresión de la función $f(x)$. [0,75 puntos]

b) Calcule la abscisa del punto de inflexión de $f(x)$ y estudie la concavidad de la función. [0,75 puntos]

c) Se sabe que el área del recinto limitado por la curva $y = f''(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = a$, con $a > 2$, es $15u^2$. Calcule el valor de a. [1 punto]

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 2 \\ 2x + ay + z = a \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a. [1,5 puntos]

b) Resuelva, si es posible, el sistema para el caso $a = 2$. [1 punto]

3. Sea la recta r definida por la expresión siguiente:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}.$$

a) Determine la posición relativa de la recta r respecto del plano $\pi: x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si es paralela, calcule la distancia de r a π, y si es secante, calcule el punto de corte. [1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta s perpendicular al plano π y que corta la recta r en un punto P, la primera coordenada del cual es 5 veces más grande que la segunda. [1,25 puntos]

4. ***a)*** Encuentre una función polinómica $y = g(x)$ de grado 3 tal que corte el eje de ordenadas en el punto (0, 5), que la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal y que $g''(x) = 2x + 1$. [1 punto]

b) Compruebe que la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ tiene una raíz en $x = 2$ y que es estrictamente creciente en el intervalo (0, 4). Utilice esta información para calcular el área determinada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$. [1,5 puntos]

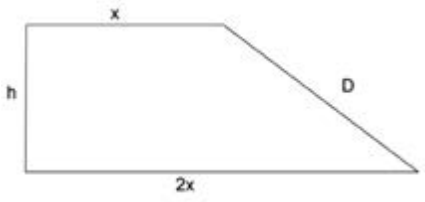
5. Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depende de los parámetros a, b y c.

a) Calcule las matrices ***X*** tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [1,5 puntos]

b) Determine los valores de a, b y c para que la matriz inversa de ***X*** sea $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

[1 punto]

6. En el patio de una escuela se quiere crear una área de juego de 30 m^2 para los más pequeños en forma de trapecio rectangular, de manera que la base mayor mida el doble que la base menor, como se indica en la figura, y que el lado oblicuo respecto a las bases (D) sea tan corto como sea posible.



a) Justifique que se verifican las relaciones siguientes: $h = \frac{20}{x}$ y $D(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}$ [1 punto]

b) Encuentre las dimensiones del trapecio para las que la longitud del lado D es mínima. [1,5 puntos]

SOLUCIONES

1. Sea $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada de una función $f(x)$.
a) Si se sabe que $f(x)$ corta el eje de les abscisas en $x = 1$, calcule la expresión de la función $f(x)$. [0,75 puntos]
b) Calcule la abscisa del punto de inflexión de $f(x)$ y estudie la concavidad de la función. [0,75 puntos]
c) Se sabe que el área del recinto limitado por la curva $y = f''(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = a$, con $a > 2$, es $15u^2$. Calcule el valor de a. [1 punto]

a) Obtenemos la función integrando la función derivada.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 3x^2 - 12x\,dx = x^3 - 6x^2 + K$$

Al cortar la función el eje de abscisas en $x = 1$ tenemos que $f(1) = 0$.

$$\left.\begin{matrix} f(x) = x^3 - 6x^2 + K \\ f(1) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 = 1^3 - 6\cdot 1^2 + K \Rightarrow K = 5 \Rightarrow \boxed{f(x) = x^3 - 6x^2 + 5}$$

La expresión de la función es $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$.

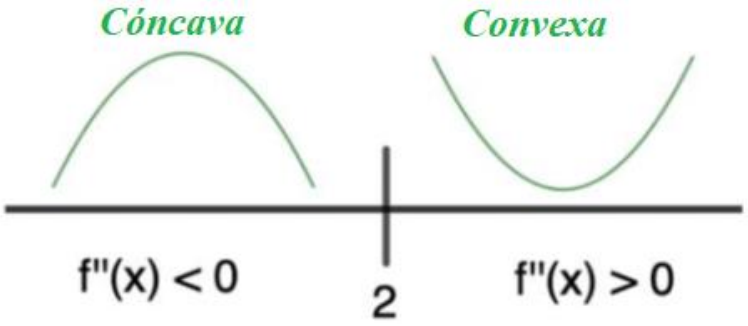
b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

El posible punto de inflexión está en $x = 2$. Comprobamos que existe un cambio de curvatura en dicho valor.

- En el intervalo $(-\infty, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = 0 - 12 = -12 < 0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada segunda vale $f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0$. La función es convexa (∪) en $(2, +\infty)$.



Resumiendo: La función es cóncava (∩) en $(-\infty, 2)$ y convexa (∪) en $(2, +\infty)$. Tiene un punto de inflexión en $x = 2$.

c) La curva tiene ecuación $f''(x)=6x-12$. Comprobamos donde corta el eje de abscisas.

$$\left.\begin{matrix} f''(x)=6x-12 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 6x-12=0 \Rightarrow x=2$$

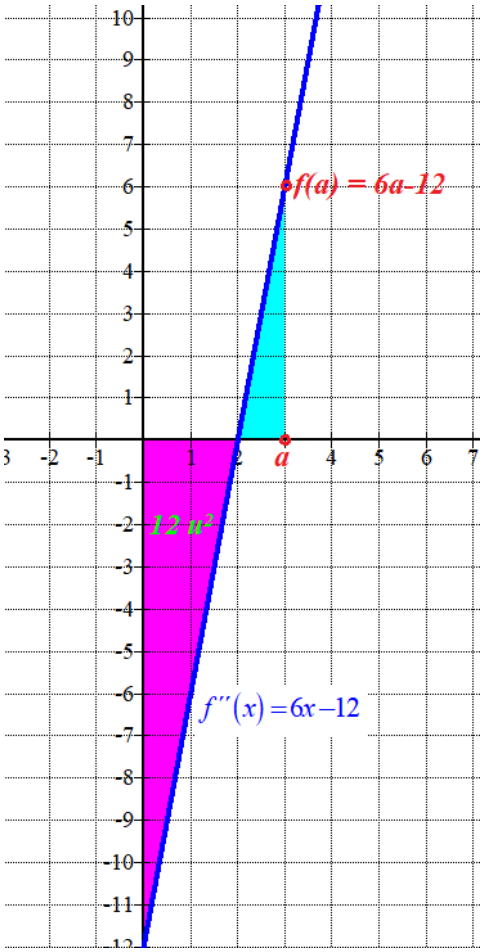
Como $a > 2$ entonces el área pedida se divide en dos partes que se calculan con dos integrales definidas entre 0 y a, y entre a y 2. O bien de forma gráfica pues al ser la función una recta las regiones son triángulos rectángulos.

La primera región es un triángulo de base = 2 y altura = 12.

Su área es $\frac{2\cdot 12}{2}=12u^2$.

Como debemos de conseguir una región de área 15 u^2 entonces nos falta un triángulo de área 3.

El triángulo que nos falta tiene de base "$a-2$" y de altura "$6a-12$", como el área debe ser 3 nos queda:



$$3=\frac{(a-2)(6a-12)}{2} \Rightarrow 6=6a^2-12a-12a+24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a^2-24a+18=0 \Rightarrow a^2-4a+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\boxed{3=a}\\ o\\ 1=a\end{cases}$$

El valor buscado es $a = 3$.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO.

Haciendo uso del cálculo integral.

$$15=\left|\int_0^2 6x-12dx\right|+\int_2^a 6x-12dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15=\left|\left[3x^2-12x\right]_0^2\right|+\left[3x^2-12x\right]_2^a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15=\left|3\cdot 2^2-12\cdot 2-0\right|+\left[3a^2-12a-\left[3\cdot 2^2-12\cdot 2\right]\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15=12+3a^2-12a+12 \Rightarrow 3a^2-12a+9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-4a+3=0 \Rightarrow a=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\boxed{3=a}\\ o\\ 1=a\end{cases}$$

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax+2y+3z=2 \\ 2x+ay+z=a \\ x+y+4z=1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a. [1,5 puntos]
b) Resuelva, si es posible, el sistema para al caso $a = 2$. [1 punto]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} a & 2 & 3 & 2 \\ 2 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=4a^2+2+6-3a-16-a=4a^2-4a-8$$

$$|A|=0 \Rightarrow 4a^2-4a-8=0 \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} \frac{1+3}{2}=2=a \\ \frac{1-3}{2}=-1=a \end{cases}$$

Se nos plantean tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $a = -1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Convertimos el sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} Fila\,2^a+2\cdot Fila\,1^a & & & \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 6 & 4 \\ \hline 0 & 3 & 7 & 3 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} Fila\,3^a+Fila\,1^a & & & \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 3 & 7 & 3 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a - Fila\,2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & -7 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \underset{A}{\longleftrightarrow} \\ \underset{A/B}{\longleftrightarrow} \end{array}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Convertimos el sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,2^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,1^a - 2\cdot Fila\,3^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -8 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\cdot Fila\,3^a - 5\cdot Fila\,2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \underset{A}{\longleftrightarrow} \\ \underset{A/B}{\longleftrightarrow} \end{array}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Resolvemos el sistema para *a = 2* utilizando el sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y+3z=2 \\ -2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+2y+3z=2 \\ \boxed{z=0} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+2y+0=2 \Rightarrow x+y=1 \Rightarrow \boxed{y=1-x}$$

Las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión: $x=t;\ y=1-t;\ z=0;\quad t\in\mathbb{R}$

3. Sea la recta *r* definida por la expresión siguiente:

$$r:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}.$$

a) Determine la posición relativa de la recta *r* respecto del plano $\pi: x-2y+4z-4=0$. Si es paralela, calcule la distancia de *r* a π, y si es secante, calcule el punto de corte. [1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta *s* perpendicular al plano π *y* que corta la recta *r* en un punto *P*, la primera coordenada del cual es 5 veces más grande que la segunda. [1,25 puntos]

a) Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano. De obtener una solución recta y plano son secantes y de no obtener solución serán paralelos.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases} \\ \pi: x-2y+4z-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2+\lambda-2(-1+3\lambda)+4(3+\lambda)-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+\lambda+2-6\lambda+12+4\lambda-4=0 \Rightarrow -\lambda+12=0 \Rightarrow \lambda=12 \Rightarrow \begin{cases} x=2+12=14 \\ y=-1+36=35 \\ z=3+12=15 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(14,35,15)}$$

Recta y plano son secantes y coinciden en el punto $P(14,35,15)$.

b) La recta *s* perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: x-2y+4z-4=0 \Rightarrow \vec{v_s}=(1,-2,4)$$

El punto *P(x, y, z)* de corte de las rectas *r* y *s* tiene la primera coordenada (x) igual a cinco veces la segunda coordenada (y).

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y,z)\in r \\ r:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases} \\ x=5y \end{array}\right\} \Rightarrow 2+\lambda=5(-1+3\lambda) \Rightarrow 2+\lambda=-5+15\lambda \Rightarrow 14\lambda=7 \Rightarrow \lambda=\frac{7}{14}=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2+0.5=2.5 \\ y=-1+1.5=0.5 \\ z=3+0.5=3.5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(2.5,0.5,3.5)}$$

Una vez hallado un vector director y un punto de la recta *s*, hallamos su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} P(2.5,0.5,3.5)\in s \\ \vec{v_s}=(1,-2,4) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s\equiv\begin{cases} x=2.5+\lambda \\ y=0.5-2\lambda \\ z=3.5+4\lambda \end{cases}}$$

4. *a)* Encuentre una función polinómica $y = g(x)$ de grado 3 tal que corte el eje de ordenadas en el punto (0, 5), que la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal y que $g''(x) = 2x + 1$. [1 punto]

b) Compruebe que la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ tiene una raíz en $x = 2$ y que es estrictamente creciente en el intervalo (0, 4). Utilice esta información para calcular el área determinada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$. [1,5 puntos]

a) La función tiene una expresión $y = g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Debemos determinar los valores de a, b, c y d con los datos proporcionados en el ejercicio.

La función pasa por (0, 5) → $5 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \Rightarrow \boxed{d = 5}$

La función queda $y = g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 5$.

La recta tangente a la función en $x = 1$ es horizontal significa que su pendiente es 0 y que por tanto la derivada se anula en $x = 1$ → $g'(1) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 5 \Rightarrow g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ g'(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{0 = 3a + 2b + c}$$

Se cumple que $g''(x) = 2x + 1$.

$$\left.\begin{array}{l} g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow g''(x) = 6ax + 2b \\ g''(x) = 2x + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 6ax + 2b = 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} 6a = 2 \rightarrow \boxed{a = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}} \\ 2b = 1 \rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la ecuación $0 = 3a + 2b + c$ y obtenemos el valor de c.

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 3a + 2b + c \\ a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 1 + 1 + c \Rightarrow \boxed{c = -2}$$

La función que buscamos es $y = g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$

b) Comprobamos que $f(2) = 0$.

$$f(2) = -2^3 + 6 \cdot 2^2 - 16 = 0$$

Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 12x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow -3x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ \boxed{x = 4} \end{cases}$$

Como los posibles cambios de signo de la derivada están situados en los extremos del intervalo (0, 4) la función derivada no cambia de signo en dicho intervalo. Averiguamos el signo dentro del intervalo. Tomamos $x = 2 \in (0,4)$ y la derivada vale $f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 = 12 > 0$.

La función derivada es siempre positiva en el intervalo (0, 4) y por tanto la función es estrictamente creciente en (0, 4).

Para calcular el área previamente averiguamos si la función corta el eje X.

Como $f(0) = -0^3 + 6 \cdot 0^2 - 16 = -16$ y $f(4) = -4^3 + 6 \cdot 4^2 - 16 = 16$, la función es estrictamente creciente y corta el eje de abscisas en $x = 2$ entonces no corta dicho eje en más puntos del intervalo (0, 4).

El área pedida se calcula como la suma de la integral definida entre 0 y 2 de la función y de la integral definida de la función entre 2 y 4.

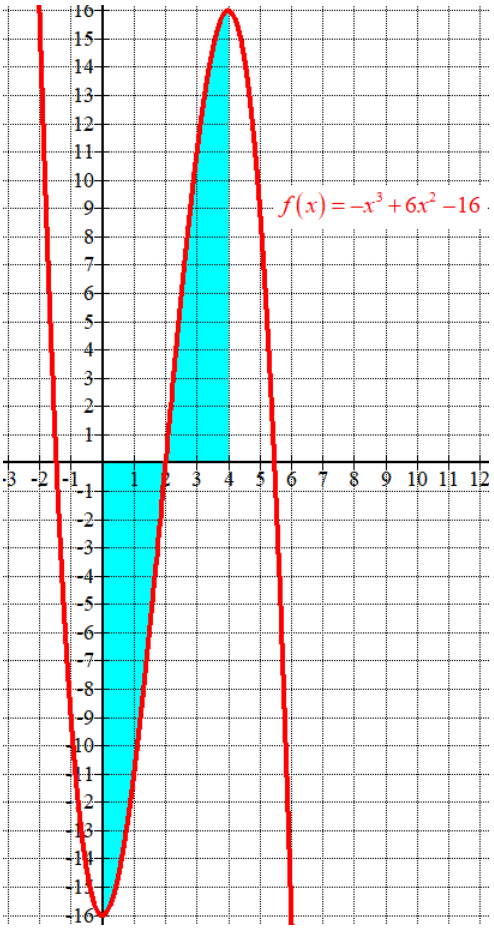
$$\int_0^2 -x^3 + 6x^2 - 16dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 16x \right]_0^2 = \left[-\frac{2^4}{4} + 2 \cdot 2^3 - 16 \cdot 2 \right] - \left[-\frac{0^4}{4} + 2 \cdot 0^3 - 16 \cdot 0 \right] =$$

$$= -4 + 16 - 32 = -20$$

$$\int_2^4 -x^3 + 6x^2 - 16dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 16x \right]_2^4 = \left[-\frac{4^4}{4} + 2 \cdot 4^3 - 16 \cdot 4 \right] - \left[-\frac{2^4}{4} + 2 \cdot 2^3 - 16 \cdot 2 \right] =$$

$$= -64 + 128 - 64 + 4 - 16 + 32 = 20$$

El área pedida es: $Área = |-20| + 20 = 40u^2$



5. Sea la matriz $X=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depende de los parámetros *a*, *b* y c.

a) Calcule las matrices ***X*** tales que $X^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [1,5 puntos]

b) Determine los valores de *a*, *b* y *c* para que la matriz inversa de ***X*** sea $X^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

[1 punto]

a)

$$X^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a^2=1 \\ a+b=0 \\ b^2=1 \\ b+c=0 \\ c^2=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=\sqrt{1}=\pm 1 \\ b=-a \\ b=\sqrt{1}=\pm 1\Rightarrow \\ c=-b \\ c=\sqrt{1}=\pm 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} Si\ a=1\rightarrow\begin{cases} b=-1 \\ c=1 \end{cases}\rightarrow\boxed{a=c=1;b=-1} \\ o \\ Si\ a=-1\rightarrow\begin{cases} b=1 \\ c=-1 \end{cases}\rightarrow\boxed{a=c=-1;\ b=1} \end{cases}\Rightarrow\boxed{X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ o\ X=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

b)

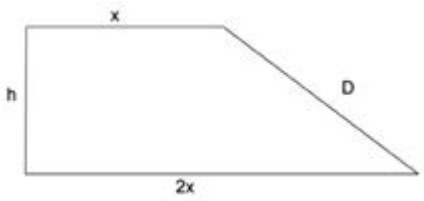
$$X^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow X\cdot X^{-1}=X\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{a}{2}+1 & -\frac{a}{2}+1 \\ 0 & b & b-1 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 1=\frac{a}{2}\rightarrow \boxed{a=2} \\ -\frac{a}{2}+1=0\rightarrow a=2 \\ \boxed{b=1} \\ b-1=0\rightarrow b=1 \\ 1=-c\rightarrow \boxed{c=-1} \end{cases}\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Los valores buscados son $a = 2$; $b = 1$ y $c = -1$.

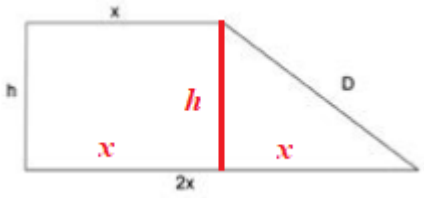
6. En el patio de una escuela se quiere crear un área de juego de 30 m^2 para los más pequeños en forma de trapecio rectangular, de manera que la base mayor mida el doble que la base menor, como se indica en la figura, y que el lado oblicuo respecto a las bases (D) sea tan corto como sea posible.



a) Justifique que se verifican las relaciones siguientes: $h=\dfrac{20}{x}$ y $D(x)=\sqrt{\dfrac{400}{x^2}+x^2}$ [1 punto]

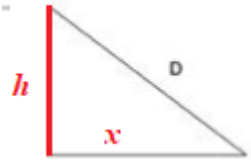
b) Encuentre las dimensiones del trapecio para las que la longitud del lado D es mínima. [1,5 puntos]

a) Dividimos el trapecio rectangular en un rectángulo y un triángulo rectángulo.



El área del trapecio rectangular es 30 y a su vez es la suma del área de un rectángulo y un triángulo rectángulo.

$$\left.\begin{array}{r} Área = x\cdot h+\dfrac{x\cdot h}{2}=\dfrac{3x\cdot h}{2} \\ Área = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3x\cdot h}{2}=30 \Rightarrow 3x\cdot h=60 \Rightarrow x\cdot h=\frac{60}{3}=20 \Rightarrow \boxed{h=\frac{20}{x}}$$



En el triángulo rectángulo aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$\left.\begin{array}{r} D^2=x^2+h^2 \\ h=\dfrac{20}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow D^2=x^2+\left(\frac{20}{x}\right)^2 \Rightarrow D^2=x^2+\frac{400}{x^2} \Rightarrow \boxed{D(x)=\sqrt{x^2+\frac{400}{x^2}}}$$

b) Derivamos la función D(x), la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$D(x)=\sqrt{\frac{400}{x^2}+x^2}=\sqrt{400x^{-2}+x^2} \Rightarrow D'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{400}{x^2}+x^2}}\left(-800x^{-3}+2x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D'(x)=\frac{2x-\dfrac{800}{x^3}}{2\sqrt{\dfrac{400}{x^2}+x^2}}=\frac{\dfrac{2x^4-800}{x^3}}{2\sqrt{\dfrac{400+x^4}{x^2}}}=\frac{\dfrac{2x^4-800}{x^3}}{2\dfrac{\sqrt{400+x^4}}{x}}=\frac{x\left(2x^4-800\right)}{2x^3\sqrt{400+x^4}}=\frac{x^4-400}{x^2\sqrt{400+x^4}}$$

$$D'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^4-400}{x^2\sqrt{400+x^4}}=0 \Rightarrow x^4-400=0 \Rightarrow x^4=400 \Rightarrow x=\sqrt[4]{400}=\sqrt[4]{20^2}=\sqrt{20}\simeq \pm 4.47$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = +\sqrt{20} \simeq 4.47$.

- En el intervalo $\left(0, \sqrt{20}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

  $D'(1) = \dfrac{1^4 - 400}{1^2\sqrt{400 + 1^4}} = \dfrac{-399}{\sqrt{401}} < 0$. La función decrece en $\left(0, \sqrt{20}\right)$.
- En el intervalo $\left(\sqrt{20}, +\infty\right)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale

  $D'(5) = \dfrac{5^4 - 400}{5^2\sqrt{400 + 5^4}} = \dfrac{225}{25\sqrt{1025}} > 0$. La función crece en $\left(\sqrt{20}, +\infty\right)$.

Por lo que la función *D(x)* presenta un mínimo en $x = +\sqrt{20} \simeq 4.47$.

Para $x = +\sqrt{20}$ tenemos que $D\left(\sqrt{20}\right) = \sqrt{\dfrac{400}{\left(\sqrt{20}\right)^2} + \left(\sqrt{20}\right)^2} = 2\sqrt{10} \simeq 6.325$ y

$h = \dfrac{20}{\sqrt{20}} = \sqrt{20} \simeq 4.47$

Las dimensiones del trapecio con longitud D mínima son: $x = +\sqrt{20} \simeq 4.47$ metros; $h = \sqrt{20} \simeq 4.47$ metros y $D = 2\sqrt{10} \simeq 6.325$ metros.

PAU junio (serie 5) 2022

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2022

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 5

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Sean las matrices $C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

a) Compruebe que $C^3=I_2$, donde I_2 es la matriz identidad de orden 2, y deduzca que la matriz C es invertible y que $C^{-1}=C^2$. Calcule C^{2022}. [1,5 puntos]

b) Resuelva la ecuación matricial $C\cdot X=A-2I_2$. [1 punto]

2. Considere la función $f(x)=x^3$ y sea *a* un número real estrictamente positivo.

a) Calcule la ecuación de la recta *t* tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa *x* = *a*. Encuentre el punto de corte de la recta *t* con el eje de abscisas (en función de *a*). [1,25 puntos]

b) Haga un esbozo de la gráfica de la función *f* y la recta *t*. Calcule el valor de *a* para que el área en el primer cuadrante limitada por la función *f*, la recta *t* y el eje de abscisas sea 108 u^2. [1,25 puntos]

3. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned}2x-y+3z&=0\\ my+(3-m)z&=-6\\ 2x-y+mz&=6\end{aligned}\right\}$$

donde *m* es un parámetro real.

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *m*. [1,25 puntos]

b) Resuelva el sistema, si es posible, cuando *m* = 0 y cuando *m* = 3. En cada caso, dé la posición relativa de los tres planos en $\mathbb{R}^3$. [1,25 puntos]

4. En $\mathbb{R}^2$, considere los triángulos rectángulos que tienen los vértices en los puntos $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$ y $B = (0, y)$, con $x > 0$ e $y > 0$, y en que la suma de los catetos es 10.

a) Exprese el área del triángulo *AOB* en función de *x*. ¿Para qué valor de *x* el área del triángulo *AOB* es lo más grande posible? ¿Qué valor tiene esta área máxima? [1,25 puntos]

b) Exprese la hipotenusa del triángulo *AOB* en función de *x*. ¿Para qué valor de *x* la hipotenusa del triángulo *AOB* es lo más pequeña posible? ¿Cuál es ese valor mínimo? [1,25 puntos]

5. Sean los puntos $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (–1, –1, 1)$ y $D = (1, 0, 1)$.

a) Compruebe que tres de estos puntos están alineados. Determine cuáles son los tres puntos y calcule la ecuación continua y la ecuación paramétrica de la recta que definen. [1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación general o cartesiana del plano que determinan los cuatro puntos. [1,25 puntos]

6. La columna de la izquierda de la siguiente tabla muestra el esquema de un programa informático que se ha elaborado para encontrar soluciones aproximadas de una ecuación $f(x) = 0$ en un intervalo (a, b), sabiendo que $f(a) \cdot f(b) < 0$. La columna de la derecha recoge un ejemplo de funcionamiento del programa donde puede verse cómo actuaría para encontrar una solución de la ecuación $x + ln(x) = 0$ entre los valores $a = 0{,}5$ y $b = 2$.

Esquema del programa	*Ejemplo*
1. Escribir "Introduzca un valor *a*"	El usuario introduce *a = 0,5*
2. Escribir "Introduzca un valor *b*"	El usuario introduce *b = 2*
3. Escribir "Introduzca una función *f(x)*"	El usuario introduce *f(x) = x + ln(x)*
4. Calcular *c = (a + b)/2*	El programa calcula la media entre *a* y *b* y le asigna el nombre *c = (0,5 + 2)/2 = 1,25*
5. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces reasignar *b = c*; en caso contrario, reasignar *a = c*.	El programa comprueba que *f*(0,5) * *f*(1,25) = (0,5 + ln(0,5)) * (1,25 + ln(1,25)) < 0, por lo tanto, reasigna *b* = 1,25
6. Repetir los pasos 4 y 5 tantas veces como haga falta hasta que *f(a) – f(b) < 0,00000001*	El programa va repitiendo la comprobación anterior, cambiando cada vez los valores de *a* o de *b*: *a* *b* inicio 0,5 2 iteración 1 0,5 1,25 iteración 2 0,5 0,875 iteración 3 0,5 0,6875 iteración 4 0,5 0,59375 iteración 5 0,546875 0,59375 iteración 6 0,546875 0,5703125 iteración 7 0,55859375 0,5703125 […]
7. Cuando *f(a) – f(b) < 0,00000001*, escribir: «La solución de la ecuación es *c*» y parar el programa	Después de unas 30 iteraciones, el programa escribe: «La solución de la ecuación es 0,56714329»

a) Explique por qué este programa es capaz de encontrar una solución aproximada de la ecuación $x + ln(x) = 0$ entre los valores $a = 0{,}5$ y $b = 2$. [1,25 puntos]

b) Se quiere aplicar este programa para encontrar las tres raíces de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ con valores de *a* y *b* diferentes. Encuentre justificadamente entre qué valores *a* y *b*, para cada raíz, se debe aplicar el programa para encontrar aproximaciones de cada una de las tres raíces de la función. [1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Sean las matrices $C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

a) Compruebe que $C^3=I_2$, donde I_2 es la matriz identidad de orden 2, y deduzca que la matriz C es invertible y que $C^{-1}=C^2$. Calcule C^{2022}. [1,5 puntos]

b) Resuelva la ecuación matricial $C\cdot X=A-2I_2$. [1 punto]

a) Comprobamos que $C^3=I_2$.

$$C^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1 & -1+0\\ 1+0 & -1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$C^3=C^2\cdot C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1 & 0+0\\ -1+1 & 1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

Comprobamos que C es invertible viendo que su determinante es no nulo.

$$|C|=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0+1=1\neq 0$$

La matriz C es invertible. Calculamos C^{-1} y comprobamos que $C^{-1}=C^2$.

$$C^{-1}=\frac{Adj\left(C^t\right)}{|C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=C^2$$

Calculamos C^{2022}.

$$2022=674\cdot 3$$

$$C^3=I_2\Rightarrow C^6=\left(C^3\right)^2=\left(I_2\right)^2=I_2\Rightarrow C^9=\left(C^3\right)^3=\left(I_2\right)^3=I_2\Rightarrow .....$$

$$.....\Rightarrow C^{2022}=\left(C^3\right)^{674}=\left(I_2\right)^{674}=I_2$$

Se cumple que $C^{2022}=I_2$.

b) Despejamos X en la ecuación $C\cdot X=A-2I_2$.

$$C\cdot X=A-2I_2\Rightarrow X=C^{-1}\left(A-2I_2\right)$$

Sustituimos las matrices por su valor y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$A-2I_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

$$X=C^{-1}\left(A-2I_2\right)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-3 & 0+3\\ 0-3 & 0+3\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -3 & 3\end{pmatrix}}$$

2. Considere la función $f(x)=x^3$ y sea *a* un número real estrictamente positivo.

a) Calcule la ecuación de la recta *t* tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x = a$. Encuentre el punto de corte de la recta *t* con el eje de abscisas (en función de *a*). [1,25 puntos]

b) Haga un esbozo de la gráfica de la función *f* y la recta *t*. Calcule el valor de *a* para que el área en el primer cuadrante limitada por la función *f*, la recta *t* y el eje de abscisas sea 108 u^2. [1,25 puntos]

a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x = a$ tiene la expresión $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3 \rightarrow f(a)=a^3 \\ f(x)=x^3 \rightarrow f'(x)=3x^2 \rightarrow f'(a)=3a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y-a^3=3a^2(x-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=a^3+3a^2x-3a^3 \Rightarrow \boxed{y=3a^2x-2a^3}$$

Hallamos el punto de corte de la recta *t* con el eje de abscisas ($y = 0$).

$$\left.\begin{array}{l} y=3a^2x-2a^3 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a^2x-2a^3=0 \Rightarrow a^2(3x-2a)=0 \Rightarrow \{a\neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-2a=0 \Rightarrow 3x=2a \Rightarrow x=\frac{2a}{3} \Rightarrow \boxed{P\left(\frac{2a}{3},0\right)}$$

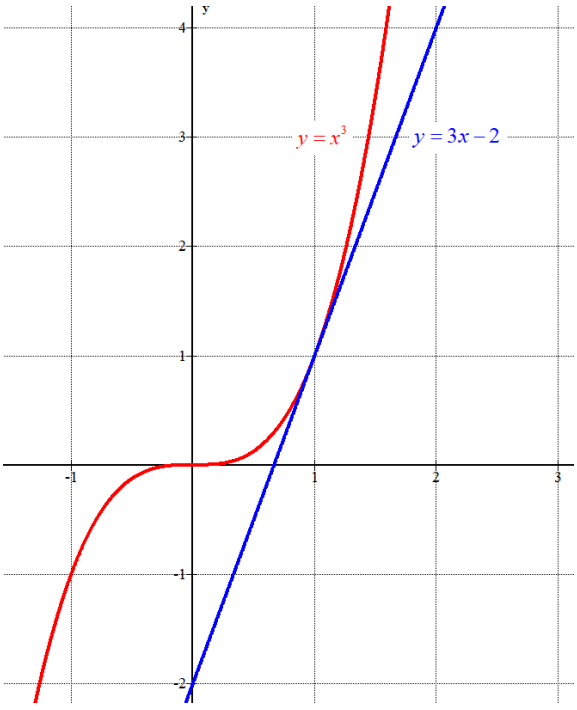
El punto de corte de la recta *t* con el eje de abscisas es $P\left(\frac{2a}{3},0\right)$.

b) Dibujamos la gráfica de la función y de la recta para $a = 1$.

x	$y=x^3$
−2	−8
−1	−1
0	0
1	1
2	8

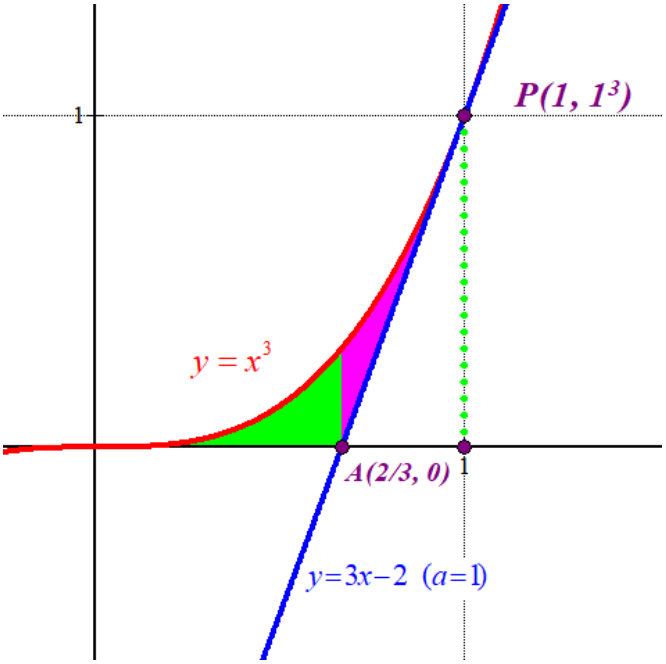
$$\left.\begin{array}{l} y=3a^2x-2a^3 \\ a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y=3x-2$$

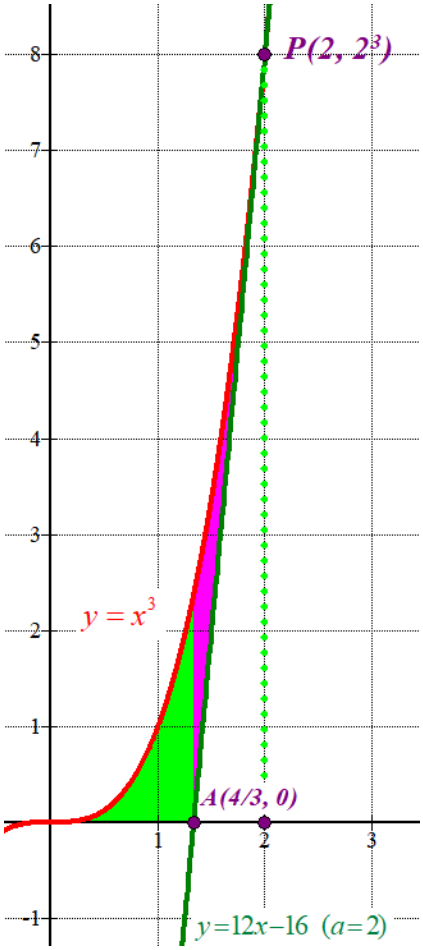
x	$y=3x-2$
0	−2
1	1
2	4



Nos piden hallar el valor de "a" para que el área del dibujo inferior valga 108 u^2.

Dibujamos el área para $a = 1$ y para $a = 2$.





Calculamos el valor del área para un valor de "a" cualquiera positivo como la suma del área bajo la curva $f(x)=x^3$ entre 0 y *2a/3* (pintado de verde) y el área entre la curva y la recta entre *2a/3* y *a* (pintado de rosa).

$$Área = \int_0^{2a/3} x^3 dx + \int_{2a/3}^{a} x^3 - \left(3a^2x - 2a^3\right) dx = \int_0^{2a/3} x^3 dx + \int_{2a/3}^{a} x^3 - 3a^2x + 2a^3 dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{2a/3} + \left[\frac{1}{4}x^4 - 3a^2\frac{1}{2}x^2 + 2a^3x\right]_{2a/3}^{a} = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{2a/3} + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}a^2\cdot x^2 + 2a^3x\right]_{2a/3}^{a} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2a}{3}\right)^4 - \frac{0^4}{4} + \left[\frac{1}{4}a^4 - \frac{3}{2}a^2a^2 + 2a^3\cdot a\right] - \left[\frac{1}{4}\left(\frac{2a}{3}\right)^4 - \frac{3}{2}a^2\left(\frac{2a}{3}\right)^2 + 2a^3\cdot\frac{2a}{3}\right] =$$

$$= \frac{16}{\cancel{324}}a^4 + \frac{1}{4}a^4 - \frac{3}{2}a^4 + 2a^4 - \frac{16}{\cancel{324}}a^4 + \frac{12}{18}a^4 - \frac{4}{3}a^4 = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 + \frac{12}{18} - \frac{4}{3}\right)a^4 = \boxed{\frac{1}{12}a^4}$$

Igualamos el valor del área a 108 y obtendremos el valor de "a" pedido.

$$\frac{1}{12}a^4 = 108 \Rightarrow a^4 = 1296 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[4]{1296} = 6}$$

El valor buscado es $a = 6$.

3. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=0 \\ my+(3-m)z=-6 \\ 2x-y+mz=6 \end{array}\right\}$$

donde m es un parámetro real.

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro m. [1,25 puntos]

b) Resuelva el sistema, si es posible, cuando $m = 0$ y cuando $m = 3$. En cada caso, dé la posición relativa de los tres planos en $\mathbb{R}^3$. [1,25 puntos]

a) Obtenemos un sistema triangular equivalente al dado aplicando el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=0 \\ my+(3-m)z=-6 \\ 2x-y+mz=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Ecuación\ 3^a - Ecuación\ 1^a \\ 2x-y+mz=6 \\ -2x+y-3z=0 \\ \hline (m-3)z=6 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=0 \\ my+(3-m)z=-6 \\ (m-3)z=6 \end{array}\right\}$$

Mirando los elementos de la diagonal principal nos planteamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $m \neq 0\, y\, m \neq 3$.

En este caso el sistema se puede resolver obteniendo una solución única (Sistema compatible determinado).

CASO 2. $m = 0$

El sistema queda $\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=0 \\ 3z=-6 \\ -3z=6 \end{array}\right\}$, intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=0 \\ 3z=-6 \\ -3z=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=0 \\ z=\dfrac{-6}{3}=-2 \\ z=\dfrac{6}{-3}=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-y-6=0 \Rightarrow y=2x-6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Solución: \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=2t-6 \\ z=-2 \end{array}\right.$$

El sistema tiene infinitas soluciones (Sistema compatible indeterminado)

CASO 3. $m = 3$

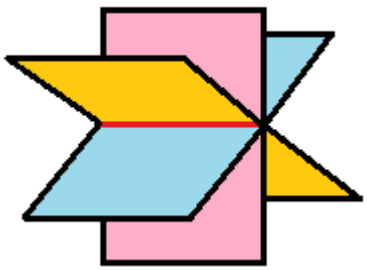
El sistema queda $\left.\begin{array}{rl} 2x-y+3z=0 \\ 3y \quad =-6 \\ 0=6 \end{array}\right\}$ ¡Imposible!.

El sistema no tiene solución (Sistema incompatible)

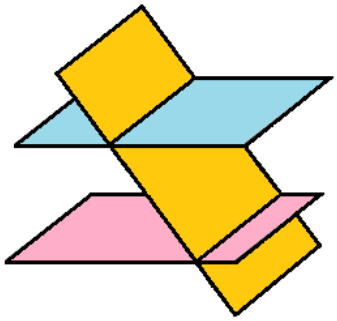
***Resumiendo*:** Si $m\neq 0\, y\, m\neq 3$ el sistema es compatible determinado, si $m=0$ el sistema es compatible indeterminado y si $m=3$ el sistema es incompatible.

b) Para $m=0$ las soluciones se han obtenido en el apartado a) : $x=t;\ y=2t-6;\ z=-2;\ t\in\mathbb{R}$.
Para $m=3$ el sistema no tiene solución.

Para $m=0$ los tres planos se cortan en una recta *r* cuya ecuación en paramétricas es la expresada por sus soluciones $r\equiv\begin{cases} x=t \\ y=2t-6 \\ z=-2 \end{cases}$.



Para $m=3$ los tres planos no coinciden en ningún punto.
Los tres planos tienen ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=0 \\ 3y=-6 \\ 2x-y+3z=6 \end{array}\right\}$. El plano primero y tercero son paralelos y son cortados por el plano segundo.

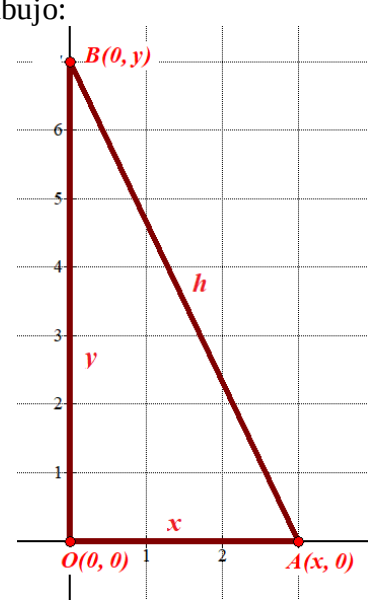


4. En $\mathbb{R}^2$, considere los triángulos rectángulos que tienen los vértices en los puntos $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$ y $B = (0, y)$, con $x > 0$ e $y > 0$, y en que la suma de los catetos es 10.

a) Exprese el área del triángulo *AOB* en función de *x*. ¿Para qué valor de *x* el área del triángulo *AOB* es lo más grande posible? ¿Qué valor tiene esta área máxima? [1,25 puntos]

b) Exprese la hipotenusa del triángulo *AOB* en función de *x*. ¿Para qué valor de *x* la hipotenusa del triángulo *AOB* es lo más pequeña posible? ¿Cuál es ese valor mínimo? [1,25 puntos]

La situación planteada es la del dibujo:



Tenemos que $x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$.

a) El área del triángulo AOB es la mitad del producto de la base (x) por la altura (y).

$$\left.\begin{array}{r} \text{Área } AOB = \dfrac{x \cdot y}{2} \\ y = 10 - x \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Área } AOB = f(x) = \frac{x \cdot (10 - x)}{2} = \frac{10x - x^2}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$$

Utilizamos la derivada para hallar el máximo de la función.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}2x + 5 = -x + 5$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

En $x = 5$ hay un punto crítico de la función. Sustituimos este valor en la derivada segunda para ver si es un máximo o un mínimo.

$$f'(x) = -x + 5 \Rightarrow f''(x) = -1 \Rightarrow f''(5) = -1 < 0$$

La función "área" presenta un máximo en $x = 5$.

Calculamos el área para $x = 5$ → $\text{Área } AOB = f(5) = -\frac{1}{2} \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 = \frac{25}{2} = 12.5u^2$

b) Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$h^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (10-x)^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2 = 2x^2 - 20x + 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$$

La expresión que nos da el valor de la hipotenusa en función de *x* es $h(x) = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$.

Hallamos los puntos críticos de la función "hipotenusa" usando la derivada.

$$h'(x) = \frac{4x - 20}{2\sqrt{2x^2 - 20x + 100}} = \frac{2x - 10}{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x - 10}{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}} = 0 \Rightarrow 2x - 10 = 0 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{2} = 5$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor para saber si es un mínimo o no.

- En $(0,5)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $h'(1) = \frac{2-10}{\sqrt{2-20+100}} = \frac{-8}{\sqrt{82}} < 0$. La función decrece en $(0,5)$.
- En $(5,+\infty)$ tomamos *x = 6* y la derivada vale $h'(6) = \frac{12-10}{\sqrt{2\cdot 6^2 - 120 + 100}} = \frac{2}{\sqrt{52}} > 0$. La función crece en $(5,+\infty)$.

La función "hipotenusa" presenta un mínimo en *x = 5*.
Para *x = 5* la hipotenusa toma un valor de $h(5) = \sqrt{2\cdot 5^2 - 20\cdot 5 + 100} = \sqrt{50} = \boxed{5\sqrt{2} \simeq 7.07\,u}$

5. Sean los puntos $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (–1, –1, 1)$ y $D = (1, 0, 1)$.
a) Compruebe que tres de estos puntos están alineados. Determine cuáles son los tres puntos y calcule la ecuación continua y la ecuación paramétrica de la recta que definen. [1,25 puntos]
b) Calcule la ecuación general o cartesiana del plano que determinan los cuatro puntos. [1,25 puntos]

a) Obtenemos las coordenadas de los vectores que unen cada par de puntos.

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,1) - (0,0,1) = (1,1,0)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-1,-1,1) - (0,0,1) = (-1,-1,0)$$
$$\overrightarrow{AD} = (1,0,1) - (0,0,1) = (1,0,0)$$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen coordenadas proporcionales por lo que están alineados los puntos A, B y C.
Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ no tienen coordenadas proporcionales por lo que el punto D no está alineado con los puntos A y B.

Hallamos la ecuación de la recta *r* que pasa por los puntos A, B y C y que tendrá como vector director el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1,1,0) \\ A(0,0,1) \in r\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}} \text{ Ecuación paramétrica}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1,1,0) \\ A(0,0,1) \in r\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}} \text{ Ecuación continua}$$

b) Como tres de estos puntos están alineados (A, B y C) y el cuarto (D) no lo está definen un único plano π. Basta tener en cuenta los puntos A, B y D.
Los vectores directores del plano pueden ser $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AD} = (1,0,0) \\ A(0,0,1) \in \pi\end{array}\right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: z-1=0} \text{ Ecuación general}$$

6. La columna de la izquierda de la siguiente tabla muestra el esquema de un programa informático que se ha elaborado para encontrar soluciones aproximadas de una ecuación $f(x) = 0$ en un intervalo (a, b), sabiendo que $f(a) \cdot f(b) < 0$. La columna de la derecha recoge un ejemplo de funcionamiento del programa donde puede verse cómo actuaría para encontrar una solución de la ecuación $x + ln(x) = 0$ entre los valores $a = 0{,}5$ y $b = 2$.

Esquema del programa	*Ejemplo*
1. Escribir "Introduzca un valor *a*"	El usuario introduce *a = 0,5*
2. Escribir "Introduzca un valor *b*"	El usuario introduce *b = 2*
3. Escribir "Introduzca una función *f(x)*"	El usuario introduce *f(x) = x + ln(x)*
4. Calcular *c = (a + b)/2*	El programa calcula la media entre *a* y *b* y le asigna el nombre *c = (0,5 + 2)/2 = 1,25*
5. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces reasignar *b = c*; en caso contrario, reasignar *a = c*.	El programa comprueba que *f*(0,5) * *f*(1,25) = (0,5 + ln(0,5)) * (1,25 + ln(1,25)) < 0, por lo tanto, reasigna *b* = 1,25
6. Repetir los pasos 4 y 5 tantas veces como haga falta hasta que *f(a) – f(b) < 0,00000001*	El programa va repitiendo la comprobación anterior, cambiando cada vez los valores de *a* o de *b*: *a* *b* inicio 0,5 2 iteración 1 0,5 1,25 iteración 2 0,5 0,875 iteración 3 0,5 0,6875 iteración 4 0,5 0,59375 iteración 5 0,546875 0,59375 iteración 6 0,546875 0,5703125 iteración 7 0,55859375 0,5703125 […]
7. Cuando *f(a) – f(b) < 0,00000001*, escribir: «La solución de la ecuación es *c*» y parar el programa	Después de unas 30 iteraciones, el programa escribe: «La solución de la ecuación es 0,56714329»

a) Explique por qué este programa es capaz de encontrar una solución aproximada de la ecuación $x + ln(x) = 0$ entre los valores $a = 0{,}5$ y $b = 2$. [1,25 puntos]

b) Se quiere aplicar este programa para encontrar las tres raíces de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ con valores de *a* y *b* diferentes. Encuentre justificadamente entre qué valores *a* y *b*, para cada raíz, se debe aplicar el programa para encontrar aproximaciones de cada una de las tres raíces de la función. [1,25 puntos]

a) Para que el programa pueda encontrar una solución a una ecuación *f(x) = 0* entre *a* y *b* es necesario que la función *f(x)* cumpla el teorema de Bolzano, es decir que la función sea continua en *[a, b]* y que *f(a)* y *f(b)* sean de distinto signo, es decir que *f(a)·f(b) < 0*. En este caso el teorema de Bolzano nos asegura la existencia de una raíz dentro del intervalo *(a, b)*.

En el ejemplo concreto en el que se ha aplicado el programa, podemos ver que la función $f(x) = x + ln(x)$ es continua en el intervalo [0.5, 2] ya que es la suma de dos funciones continuas en este intervalo, concretamente una función polinómica de primer grado y la función logarítmica que es continua en todo su dominio $Dom(ln(x)) = (0,+\infty)$.

Vemos también qué $f(0{,}5) \cdot f(2) = (0{,}5 + ln(0{,}5)) \cdot (2 + ln(2)) < 0$ lo que demuestra que existe una solución de la ecuación en [0,5, 2].

Lo que hace el programa es encontrar el punto medio *c* entre los valores *a* y *b*, y buscar en qué intervalo cambia de signo la función; si lo hace en el intervalo *[a, c]* lo que hace es tomar como nuevo valor de *b* el punto medio *c*, y de esta forma tenemos un nuevo intervalo *[a, b]* que vuelve a cumplir el teorema de Bolzano, puesto que la función cambia de signo y es continua en este nuevo intervalo. En caso de que el cambio de signo se produzca en el intervalo *[c, b]*, lo que se hace es tomar como nuevo valor en el punto medio *c*. En este caso también tiene un nuevo intervalo *[a, b]* que cumple el teorema de Bolzano. En uno y otro caso reducimos a la mitad la anchura del intervalo inicial. Repitiendo estos pasos varias veces conseguiremos acercar tanto como se quiera los valores de *a* y *b* obteniendo así una aproximación de la raíz que, por el teorema de Bolzano, está garantizada en ese intervalo.

b) Las funciones polinómicas son continuas, por tanto, sólo necesitamos encontrar entre qué valores se encuentran las raíces. Una posibilidad sería empezar a hacer una tabla de valores exhaustiva hasta encontrar algunos valores en los que la función cambia de signo y a partir de ahí contestar a la pregunta, pero la mejor forma de encontrar los valores entre los que hay solución, y estar seguro de que esta solución es única es hacer una tabla de comportamiento identificando sus extremos relativos, en este caso:

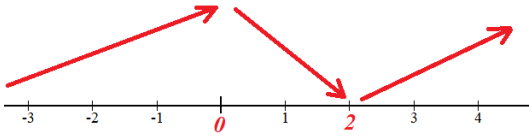
$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

de donde vemos que $x = 0$ y $x = 2$ son los puntos críticos de la función. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 3(-1)(-1-2) = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 3(1-2) = -3 < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 3 \cdot 3(3-2) = 9 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema:



También sabemos que $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 1 = 1 > 0$ y $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 = -3 < 0$.

Este comportamiento de la función nos indica que el polinomio tendrá una raíz entre 0 y 2, puesto que en este intervalo la función es continua y cambia de signo, y también habrá una solución antes de 0 y otra después de 2. Debido a que en estos tres intervalos la función es monótona (la derivada ya no cambia de signo) cuya raíz será única en cada uno de los intervalos. Ahora sólo es necesario encontrar un valor anterior a 0 y un posterior a 2 en los que la función cambie de signo.

Por ejemplo para $x = -1 \rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 1 = -3 < 0$. Como *f(0) = 1 > 0*, la función cambia de signo en el intervalo $[-1, 0]$

Para $x = 3 \rightarrow f(3) = 3^3 - 3(3)^2 + 1 = 1 > 0$. Como *f(2) = –3 < 0*, la función cambia de signo en el intervalo [2, 3].

Como conclusión, el programa podrá encontrar tres soluciones, una en cada uno de los intervalos $[-1, 0]$, [0, 2] y [2, 3].

PAU septiembre 2021

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 1

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real *k*:

$$\begin{cases} x + ky + z = 3 + k \\ kx + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *k*. [1,25 puntos]

b) Resuelva, si es posible, el sistema para el caso *k = 1*, y haga una interpretación geométrica. [1,25 puntos]

2. ***a)*** Dada la función $f(x) = \frac{4}{x}$, calcule la ecuación de la recta tangente a *y = f(x)* en el punto de abscisa $x = 1$. Encuentre también la ecuación de la recta normal a *y = f(x)* en ese mismo punto. [1,25 puntos]

b) Haga un esbozo de las gráficas de la curva *y = f(x)* y de la recta *4x + y = 8*, y calcule el área delimitada per estas dos gráficas, el eje de abscisas y la recta vertical *x = 3*. [1,25 puntos]

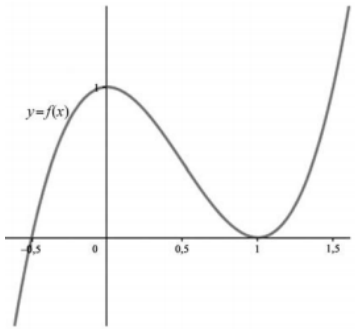
3. En $\mathbb{R}^3$ se dan los puntos A = (3, 1, 1), B = (0, 0, 1), C = (4, 1, 2) y D = (1, 1, t), donde *t* es un valor real.

a) ¿Para qué valor de *t* los cuatro puntos son coplanarios? [1 punto]

b) Encuentre el valor de *t* para que el tetraedro (irregular) que forman los cuatro puntos tenga un volumen de $5u^3$. [1,5 puntos]

Nota: El volumen de un tetraedro definido por los vectores v_1 , v_2 y v_3 es igual a un sexto del valor absoluto del determinante de la matriz formada por los tres vectores, $V = \frac{1}{6}\left|\det(v_1, v_2, v_3)\right|$

4. ***a)*** En la figura se muestra la gráfica de la función *f(x)*. Represente de manera esquemática la gráfica de la función derivada de *f(x)*. Explique el razonamiento que ha seguido. [1,25 puntos]



b) Calcule los valores de *a* y *b* para que la función $g(x)=ax^3+bx^2+1$ tenga un punto de inflexión en $x=\frac{1}{2}$ y su derivada en este punto sea $-\frac{3}{2}$. [1,25 puntos]

5. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en la que *a* es un parámetro real.

a) Encuentre para que valores de *a* la matriz A es invertible. [1 punto]

b) Compruebe que, para el caso *a = 3*, la matriz A es invertible y resuelva la ecuación matricial $AX=B-3I$, donde B es la matriz $B=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ [1,5 puntos]

6. Considere la función $f(x)=\frac{x^3}{x-2}$.

a) Estudie si tiene puntos críticos y, en caso de tenerlos, justifique de qué tipo son. Determine también cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. [1,5 puntos]

b) Compruebe que la ecuación *f(x) = 0* tiene una única solución en el intervalo (–2, 1). [1 punto]

SOLUCIONES

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real *k*:

$$\begin{cases} x+ky+z=3+k \\ kx+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *k*. [1,25 puntos]
b) Resuelva, si es posible, el sistema para el caso *k = 1*, y haga una interpretación geométrica. [1,25 puntos]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 3+k \\ k & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$.

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero, para estudiar su rango en función del parámetro *k*.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=1+k+3k-1-k^2-3=-k^2+4k-3$$

$$|A|=0 \Rightarrow -k^2+4k-3=0 \Rightarrow k=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-1)(-3)}}{-2}=\frac{-4\pm 2}{-2}=\begin{cases} \frac{-4+2}{-2}=1 \\ \frac{-4-2}{-2}=3 \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $k\neq 1$ *y* $k\neq 3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $k=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Dado lo sencillo del sistema analizamos el sistema resolviéndolo.
Vemos como queda el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

Intentamos resolverlo utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Ecuación } 1^a = \text{Ecuación } 2^a \\ \text{Quito ecuación } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=4-z \\ x+3y=5-z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4-z-y \\ x+3y=5-z \end{cases} \Rightarrow 4-z-y+3y=5-z \Rightarrow 2y=1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}} \Rightarrow x=4-z-\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=-z+\frac{7}{2}}$$

Las soluciones del sistema son $x=-t+\frac{7}{2};\ y=\frac{1}{2};\ z=t,$ siendo $t \in \mathbb{R}$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

CASO 3. $k=3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Dado lo sencillo del sistema analizamos el sistema resolviéndolo.

Vemos como queda el sistema:

$$\begin{cases} x+3y+z=6 \\ 3x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

Intentamos resolverlo con el método de Gauss.

$$\begin{cases} \boxed{x+3y+z=6} \\ 3x+y+z=4 \\ \boxed{x+3y+z=5} \end{cases} \rightarrow \text{¡Imposible!}$$

Es imposible resolver el sistema pues tiene dos ecuaciones con el primer miembro igual y el segundo miembro distinto.

El sistema es incompatible (Sin solución)

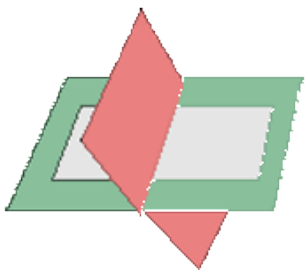
Resumiendo: El sistema es compatible determinado para $k \neq 1$ y $k \neq 3$. Es compatible indeterminado para $k = 1$. Es incompatible para $k = 3$.

b) Las soluciones del sistema para $k = 1$ se han obtenido en el apartado anterior y son

$x=-t+\frac{7}{2};\ y=\frac{1}{2};\ z=t,$ siendo $t \in \mathbb{R}$.

El sistema es $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$

La solución del sistema son los puntos de una recta que resulta de cortarse los planos de las ecuaciones 1ª y 2ª que son coincidentes con el plano de la ecuación 3ª.



2. a) Dada la función $f(x)=\frac{4}{x}$, calcule la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$. Encuentre también la ecuación de la recta normal a $y = f(x)$ en ese mismo punto. [1,25 puntos]

b) Haga un esbozo de las gráficas de la curva $y = f(x)$ y de la recta $4x + y = 8$, y calcule el área delimitada por estas dos gráficas, el eje de abscisas y la recta vertical $x = 3$. [1,25 puntos]

a) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$ tiene ecuación $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{4}{x}\to f'(x)=-\frac{4}{x^2}\to f'(1)=-\frac{4}{1^2}=-4 \\ f(1)=\frac{4}{1}=4 \\ y-f(1)=f'(1)(x-1) \end{array}\right\}\Rightarrow y-4=-4(x-1)\Rightarrow \boxed{y=-4x+8}$$

La ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x = 1$ tiene ecuación $y-f(1)=\frac{-1}{f'(1)}(x-1)$.

$$\left.\begin{array}{r} f'(1)=-4 \\ f(1)=4 \\ y-f(1)=\frac{-1}{f'(1)}(x-1) \end{array}\right\}\Rightarrow y-4=\frac{-1}{-4}(x-1)\Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{4}}$$

b) El dominio de la función $f(x)=\frac{4}{x}$ es $\mathbb{R}-\{0\}$. Su derivada es $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$, que es siempre negativa y por tanto la función siempre es decreciente.
Obtenemos los puntos de corte de curva y recta.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{4}{x} \\ 4x+y=8 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{4}{x} \\ y=8-4x \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{4}{x}=8-4x\Rightarrow 4=8x-4x^2\Rightarrow 4x^2-8x+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

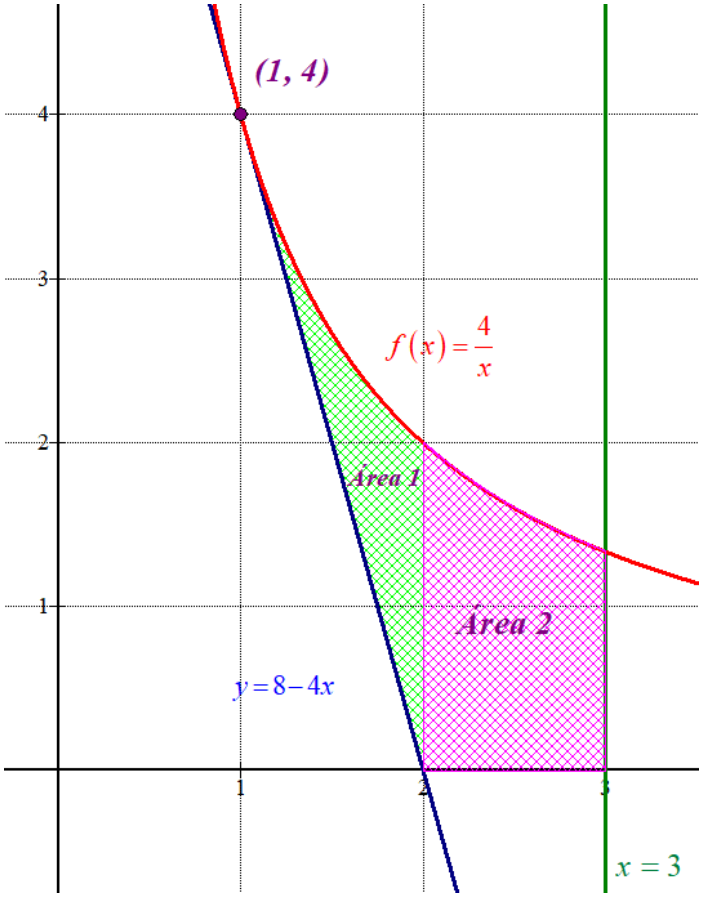
Curva y recta coinciden solo en el punto (1, 4)

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas de curva $f(x)=\frac{4}{x}$, la recta $4x + y = 8$, así como la recta vertical $x = 3$.

x	$f(x)=\frac{4}{x}$
1	4
2	2
3	4/3

x	$y=8-4x$
1	4
2	0
3	–4

$x=3$	y
3	0
3	1
3	2



El área de la zona pedida la hemos dividido en dos recintos, la parte coloreada de rosa es de algo más de 1.5 cuadraditos y el área de la zona verde es algo menos de 1 cuadradito. En total los dos recintos suman algo menos de 3 cuadraditos.

Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral.

$$Área\ 1=\int_1^2 \frac{4}{x}-(8-4x)\,dx=\int_1^2 \frac{4}{x}-8+4x dx=\left[4\ln x-8x+2x^2\right]_1^2=$$
$$=\left[4\ln 2-16+8\right]-\left[4\ln 1-8+2\right]=4\ln 2-2$$

$$Área\ 2=\int_2^3 \frac{4}{x}dx=\left[4\ln x\right]_2^3=4\ln 3-4\ln 2$$

$$Área\ total=Área\ 1+Área\ 2=4\ln 2-2+4\ln 3-4\ln 2=\boxed{4\ln 3-2\approx 2.394\,u^2}$$

3. En $\mathbb{R}^3$ se dan los puntos A = (3, 1, 1), B = (0, 0, 1), C = (4, 1, 2) y D = (1, 1, t), donde *t* es un valor real.
a) ¿Para qué valor de *t* los cuatro puntos son coplanarios? [1 punto]
b) Encuentre el valor de *t* para que el tetraedro (irregular) que forman los cuatro puntos tenga un volumen de $5u^3$. [1,5 puntos]
Nota: El volumen de un tetraedro definido por los vectores v_1 , v_2 y v_3 es igual a un sexto del valor absoluto del determinante de la matriz formada por los tres vectores, $V = \frac{1}{6}\left|\det\left(v_1, v_2, v_3\right)\right|$

a) Hallamos la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C. Luego hacemos que el punto D pertenezca al plano π.

$$\left.\begin{matrix} A(3,\ 1,\ 1) \\ B(0,\ 0,\ 1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (0,\ 0,\ 1) - (3,\ 1,\ 1) = (-3,-1,0)$$

$$\left.\begin{matrix} A(3,\ 1,\ 1) \\ C(4,\ 1,\ 2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (4,\ 1,\ 2) - (3,\ 1,\ 1) = (1,0,1)$$

$$\left.\begin{matrix} B(0,0,1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-3,-1,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1,0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + z - 1 + 3y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - 3y - z + 1 = 0}$$

Para que los cuatro puntos sean coplanarios el punto *D(1,1, t)* debe pertenecer al plano π.

$$\left.\begin{matrix} \pi : x - 3y - z + 1 = 0 \\ D(1,1,\ t) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 - 3 - t + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{t = -1}$$

b) Consideramos los vectores $\overrightarrow{AB} = (-3,-1,0)$, $\overrightarrow{AC} = (1,0,1)$ y $\overrightarrow{AD}$.
Hacemos que el volumen que obtenemos con la fórmula proporcionada por el ejercicio sea 5.

$$\left.\begin{matrix} A(3,\ 1,\ 1) \\ D(1,\ 1,\ t) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (1,\ 1,\ t) - (3,\ 1,\ 1) = (-2,0,t-1)$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left|2 + t - 1\right| = \frac{|t+1|}{6} \Rightarrow \frac{|t+1|}{6} = 5 \Rightarrow$$

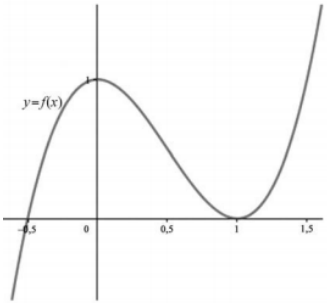
$$\left.\begin{matrix} \\ \\ Volumen = 5 \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow |t+1| = 30 \Rightarrow \begin{cases} t + 1 = 30 \rightarrow \boxed{t = 29} \\ t + 1 = -30 \rightarrow \boxed{t = -31} \end{cases}$$

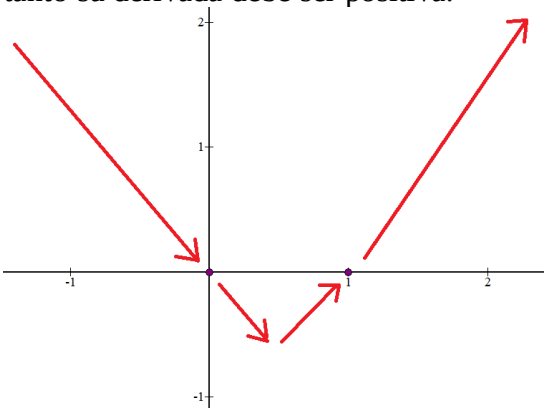
Hay dos soluciones posibles: *t = 29* o *t = –31*.

4. a) En la figura se muestra la gráfica de la función *f(x)*. Represente de manera esquemática la gráfica de la función derivada de *f(x)*. Explique el razonamiento que ha seguido. [1,25 puntos]

b) Calcule los valores de *a* y *b* para que la función $g(x)=ax^3+bx^2+1$ tenga un punto de inflexión en $x=\frac{1}{2}$ y su derivada en este punto sea $-\frac{3}{2}$. [1,25 puntos]



a) La función derivada se anula en el máximo y el mínimo de la función, es decir, *f ´(0) = 0* y *f ´(1) = 0* .
Antes de *x = 0* la función crece, por lo que su derivada es positiva, pero acercándose al valor 0. Entre *x = 0* y *x = 1* la función decrece, por lo que su derivada es negativa. Después de *x = 1* la función es creciente y por tanto su derivada debe ser positiva.



b) Si la función $g(x)=ax^3+bx^2+1$ tiene un punto de inflexión en $x=\frac{1}{2}$ entonces su derivada segunda se anula para dicho valor, *g´´ (1/2) = 0*.

$$\left.\begin{array}{r} g(x)=ax^3+bx^2+1 \Rightarrow g'(x)=3ax^2+2bx \Rightarrow g''(x)=6ax+2b \\ g''(1/2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6a\frac{1}{2}+2b=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a+2b=0 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{2}{3}b}$$

Como además la derivada en $x=\frac{1}{2}$ vale $-\frac{3}{2}$ tenemos que *g´(1/2) = –3/2*.

$$\left.\begin{array}{l} g'(x)=3ax^2+2bx \\ g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 3a\left(\frac{1}{2}\right)^2+2b\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3a}{4}+b=-\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{3a+4b=-6}$$

Unimos las dos condiciones en un sistema y determinamos el valor de *a* y *b*.

$$\left.\begin{array}{l} a=-\frac{2}{3}b \\ 3a+4b=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\left(-\frac{2}{3}b\right)+4b=-6 \Rightarrow -2b+4b=-6 \Rightarrow 2b=-6 \Rightarrow \boxed{b=-3} \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Los valores buscados son *a = 2* y *b = –3*.

5. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en la que a es un parámetro real.

a) Encuentre para que valores de a la matriz A es invertible. [1 punto]

b) Compruebe que, para el caso $a = 3$, la matriz A es invertible y resuelva la ecuación matricial $AX = B - 3I$, donde B es la matriz $B=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ [1,5 puntos]

a) La matriz es invertible si su determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix}=a(a+1)(-a-3)+a(a-1)(2a+1)-2a(-a-3)=$$

$$=a\left[(a+1)(-a-3)+(a-1)(2a+1)-2(-a-3)\right]=$$

$$=a\left[-a^2-3a-\cancel{a}-3+2a^2+\cancel{a}-\cancel{2a}-1+\cancel{2a}+6\right]=$$

$$=a\left[a^2-3a+2\right]$$

$$|A|=0\Rightarrow a\left[a^2-3a+2\right]=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{a=0}\\ a^2-3a+2=0\rightarrow a=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-8}}{2}=\dfrac{3\pm1}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+1}{2}=\boxed{2=a}\\ \dfrac{3-1}{2}=\boxed{1=a}\end{cases}\end{cases}$$

El determinante de A se anula para $a = 0$, $a = 1$ y $a = 2$.
La matriz A tiene inversa cuando el valor de a es distinto de 0, 1 y 2.

b) Por lo visto en el apartado a) para $a = 3$ la matriz A es invertible al ser un valor distinto de 0, 1 y 2.

Para $a = 3$ la matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Su determinante vale $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix}=-72+42+36=6\neq 0$

Determinamos su inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3&2&7\\3&4&0\\0&2&-6\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}4&0\\2&-6\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&0\\0&-6\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&4\\0&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&7\\2&-6\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&7\\0&-6\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&2\\0&2\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}2&7\\4&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&7\\3&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&2\\3&4\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-24&18&6\\26&-18&-6\\-28&21&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3&1\\13/3&-3&-1\\-14/3&7/2&1\end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX=B-3I\Rightarrow X=A^{-1}\left(B-3I\right)$$

Sustituimos el valor de la inversa de A, la matriz B y la matriz identidad.

$$X=A^{-1}\left(B-3I\right)$$

$$X=\begin{pmatrix}-4&3&1\\13/3&-3&-1\\-14/3&7/2&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}6&3&3\\2&5&2\\1&1&4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$

$$X=\begin{pmatrix}-4&3&1\\13/3&-3&-1\\-14/3&7/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3&3\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-12+6+1&-12+6+1&-12+6+1\\13-6-1&13-6-1&13-6-1\\-14+7+1&-14+7+1&-14+7+1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-5&-5&-5\\6&6&6\\-6&-6&-6\end{pmatrix}}$$

6. Considere la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x-2}$.

a) Estudie si tiene puntos críticos y, en caso de tenerlos, justifique de qué tipo son. Determine también cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. [1,5 puntos]

b) Compruebe que la ecuación *f(x) = 0* tiene una única solución en el intervalo (–2, 1). [1 punto]

a) Igualamos a cero su derivada.

$$f(x)=\frac{x^3}{x-2}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2}=\frac{3x^3-6x^2-x^3}{(x-2)^2}=\frac{2x^3-6x^2}{(x-2)^2}=\frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$$

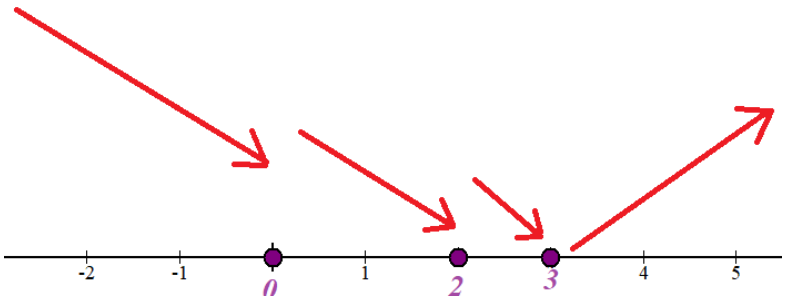
$$f\,'(x)=0\Rightarrow\frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ x-3=0\Rightarrow\boxed{x=3}\end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos: $x = 0$, $x = 3$.

Estudiamos la evolución del signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores. Añadimos el valor $x = 2$ en el que la función no existe y por tanto es discontinua.

- En $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f\,'(-1)=\dfrac{2(-1)^2(-1-3)}{(-1-2)^2}=\dfrac{-8}{9}<0$. La función es decreciente en $(-\infty,0)$.
- En $(0,2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f\,'(1)=\dfrac{2(1)^2(1-3)}{(1-2)^2}=\dfrac{-4}{1}<0$. La función es decreciente en $(0,2)$.
- En $(2,3)$ tomamos $x = 2.5$ y la derivada vale $f\,'(1)=\dfrac{2(2.5)^2(2.5-3)}{(2.5-2)^2}=\dfrac{-12.5}{0.25}<0$. La función es decreciente en $(2,3)$.
- En $(3,+\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f\,'(x)=\dfrac{2(5)^2(5-3)}{(5-2)^2}=\dfrac{100}{9}>0$. La función es creciente en $(3,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función es decreciente en $(-\infty,2)\cup(2,3)$ y creciente en $(3,+\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 3$.
Como $x = 0$ es punto crítico (derivada vale 0) y la función decrece en un entorno del punto, la función no puede presentar ni un máximo ni un mínimo luego la función presenta un punto de inflexión en $x = 0$.

b) La función $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$ es continua en el intervalo (–2, 1) ya que es cociente de polinomios y no se anula el denominador en dicho intervalo. Como $f(-2) = \frac{(-2)^3}{-2-2} = 2 > 0$ y $f(1) = \frac{1^3}{1-2} = -1 < 0$ la función toma valores de distinto signo a ambos extremos del intervalo, podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe un valor "c" del intervalo (–2, 1) donde se anula la función, es decir, $f(c) = 0$.
Como hemos visto en el apartado a) la función es decreciente en el intervalo (–2, 1), por lo que no puede haber otro valor en el intervalo donde se anule la función.

PAU junio (serie 2) 2021

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 2

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Considere la parábola $y = 4 - x^2$ y un valor $a > 0$.

a) Compruebe que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x = a$ es y calcule los puntos de corte de esta recta tangente con los ejes de coordenadas. [1,25 puntos]

b) Calcule el valor de $a > 0$ para que el área del triángulo determinado por esta recta tangente y los ejes de coordenadas sea mínima. [1,25 puntos]

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real p:

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2 z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro p. [1,25 puntos]

b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso $p = 2$. [1,25 puntos]

3. Considere el punto $P = (-1, 3, 1)$, el plano π: $x = y$ y la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$.

a) Encuentre las coordenadas del punto P' simétrico a P respecto del plano π. [1,25 puntos]

b) De todos los planos que contienen la recta r, encuentre la ecuación cartesiana del que es perpendicular al plano π. [1,25 puntos]

4. Sea la función $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ definida en el dominio $x > 0$, donde ln es el logaritmo neperiano.

a) Encuentre las coordenadas de un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a la curva sea horizontal y analice si la función tiene un extremo relativo en este punto. [1 punto]

b) Determine si la función $f(x)$ tiene alguna asíntota horizontal. [0,5 puntos]

c) Calcule el área de la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 1$ y $x = e$. Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función en el dominio $0 < x < 5$, donde quede representada el área que ha calculado. [1 punto]

5. ***a)*** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial $A^2X = A - 3I$, donde ***I*** es la matriz identidad. [1,25 puntos]

b) Una matriz cuadrada ***M*** satisface que $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$, donde ***I*** es la matriz identidad. Justifique que ***M*** es invertible y exprese la inversa de ***M*** en función de las matrices ***M*** e ***I***. [1,25 puntos]

6. Considere la función $f(x)=e^{x-1}-x-1$.

a) Estudie la continuidad, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. [1,25 puntos]

b) Demuestre que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones entre $x = -1$ y $x = 3$. [1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Considere la parábola $y = 4 - x^2$ y un valor $a > 0$.

a) Compruebe que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x = a$ es y calcule los puntos de corte de esta recta tangente con los ejes de coordenadas. [1,25 puntos]

b) Calcule el valor de $a > 0$ para que el área del triángulo determinado por esta recta tangente y los ejes de coordenadas sea mínima. [1,25 puntos]

a) La recta tangente a la gráfica de la parábola en $x = a$ tiene ecuación $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

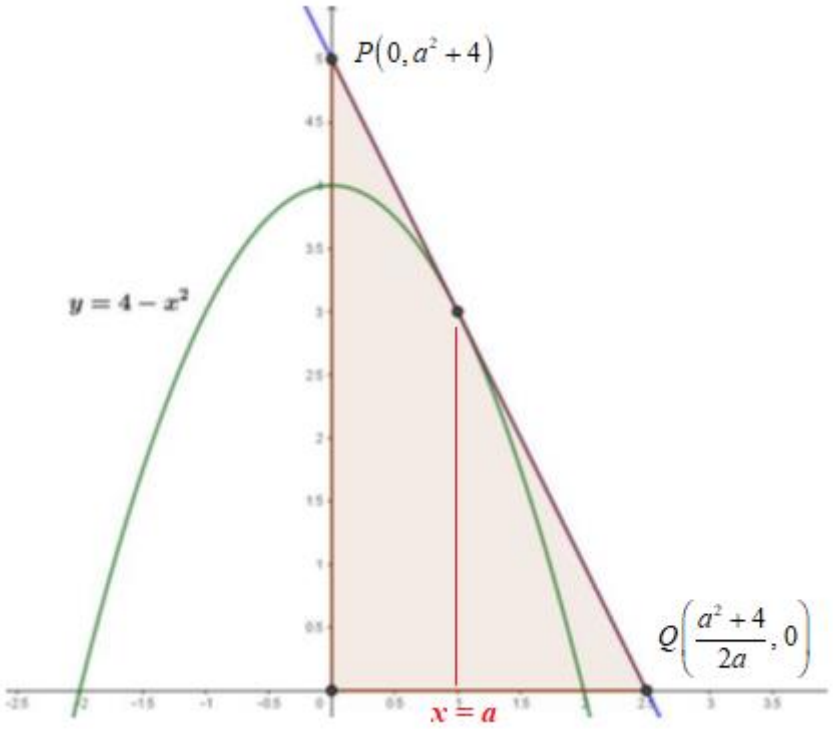
$$\left.\begin{array}{l} f(a) = 4 - a^2 \\ f(x) = 4 - x^2 \rightarrow f'(x) = -2x \rightarrow f'(a) = -2a \\ y - f(a) = f'(a)(x - a) \end{array}\right\} \Rightarrow y - (4 - a^2) = -2a(x - a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 4 + a^2 = -2ax + 2a^2 \Rightarrow y = -2ax + 2a^2 + 4 - a^2 \Rightarrow \boxed{y = -2ax + a^2 + 4}$$

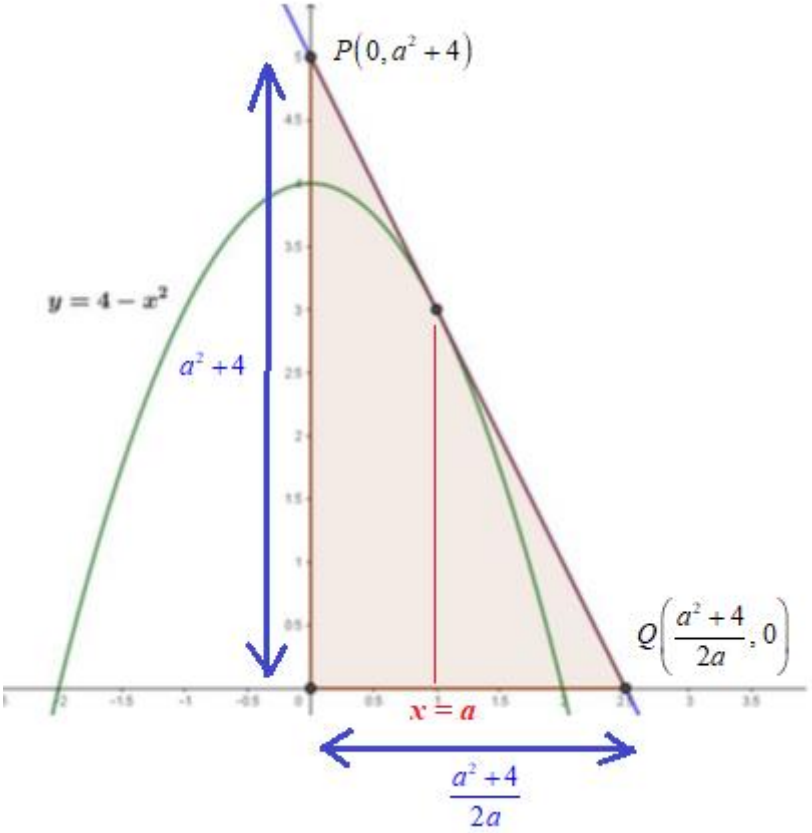
Hallamos los puntos de corte de la tangente con los ejes coordenados.

$$\left.\begin{array}{l} y = -2ax + a^2 + 4 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -0 + a^2 + 4 = a^2 + 4 \Rightarrow \boxed{P(0, a^2 + 4)}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -2ax + a^2 + 4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = -2ax + a^2 + 4 \Rightarrow 2ax = a^2 + 4 \Rightarrow x = \frac{a^2 + 4}{2a} \Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{a^2 + 4}{2a}, 0\right)}$$



b) Consideramos el triángulo determinado por los puntos de corte de la tangente con los ejes de coordenadas.



El área del triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

$$A(a) = \frac{\left(\frac{a^2+4}{2a}\right)\left(a^2+4\right)}{2} = \frac{\left(a^2+4\right)^2}{4a}$$

Derivamos esta función.

$$A(a) = \frac{\left(a^2+4\right)^2}{4a} \Rightarrow A'(a) = \frac{2\left(a^2+4\right)2a \cdot 4a - 4\left(a^2+4\right)^2}{\left(4a\right)^2} = \frac{16a^2\left(a^2+4\right) - 4\left(a^2+4\right)^2}{16a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(a) = \frac{4a^2\left(a^2+4\right) - \left(a^2+4\right)^2}{4a^2} = \frac{\left(a^2+4\right)\left[4a^2 - \left(a^2+4\right)\right]}{4a^2} = \frac{\left(a^2+4\right)\left[4a^2 - a^2 - 4\right]}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(a) = \frac{\left(a^2+4\right)\left[3a^2-4\right]}{4a^2}$$

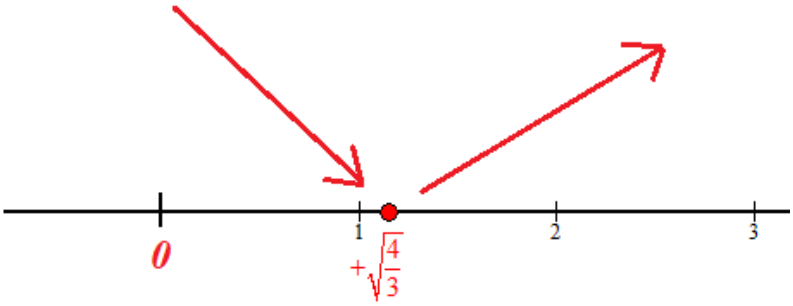
La igualamos a cero en busca de los extremos relativos

$$A'(a)=0 \Rightarrow \frac{\left(a^2+4\right)\left[3a^2-4\right]}{4a^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} a^2+4=0 \rightarrow a^2=-4 \rightarrow \text{¡No es posible!} \\ o \\ 3a^2-4=0 \rightarrow 3a^2=4 \rightarrow a^2=\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{a=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}} \end{cases}$$

Como la función se define para $a > 0$ estudiamos la variación del signo de la derivada entre $a=0$ y $a=+\sqrt{\frac{4}{3}}$ y después de este valor.

- En $\left(0,+\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ tomamos $a = 1$ y la derivada vale $A'(1)=\frac{(1+4)[3-4]}{4}=-\frac{5}{4}<0$. La función decrece en $\left(0,+\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$.
- En $\left(\sqrt{\frac{4}{3}},+\infty\right)$ tomamos $a = 2$ y la derivada vale $A'(2)=\frac{(4+4)[12-4]}{16}>0$. La función crece en $\left(\sqrt{\frac{4}{3}},+\infty\right)$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente:



La función área tiene un mínimo para $a=+\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real *p*:

$$\begin{cases} px+y+z=2 \\ 2x+py+p^2z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro *p*. [1,25 puntos]
b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso $p = 2$. [1,25 puntos]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero, para estudiar su rango en función del parámetro *p*.

$$|A|=\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=p^2+2p^2+2-2p-2-p^3=-p^3+3p^2-2p$$

$$|A|=0\Rightarrow -p^3+3p^2-2p=0\Rightarrow -p\left(p^2-3p+2\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} p=0 \\ p^2-3p+2=0\rightarrow p=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-8}}{2}=\dfrac{3\pm1}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+1}{2}=2=p \\ \dfrac{3-1}{2}=1=p\end{cases}\end{cases}$$

Nos planteamos cuatro situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $p\neq 0,\ p\neq 1\ y\ p\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $p=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Vemos como queda el sistema: $\begin{cases} y+z=2 \\ 2x=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$. Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} y+z=2 \\ 2x=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y+z=2 \\ \boxed{x=\dfrac{1}{2}=0.5} \\ 2x+y+z=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y+z=2 \\ 1+y+z=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y+z=2 \\ y+z=1 \end{cases}\rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema es incompatible (Sin solución)

CASO 3. $p=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Dado lo sencillo del sistema analizamos el sistema resolviéndolo.

Vemos como queda el sistema: $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$. Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ \boxed{2x+y+z=1} \\ 2x+y+z=2 \end{cases} \rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema es incompatible (Sin solución)

CASO 4. $p=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Dado lo sencillo del sistema analizamos el sistema resolviéndolo.

Vemos como queda el sistema: $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 2x+2y+4z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$. Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 2x+2y+4z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 1^{\text{a}} = \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \\ \text{Eliminamos la ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 2x+2y+4z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=2-2x-z \\ 2x+2y+4z=1 \end{cases} \Rightarrow 2x+2(2-2x-z)+4z=1 \Rightarrow 2x+4-4x-2z+4z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+2z+4=1 \Rightarrow x-z-2=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}+2+z \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}+z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=2-2\left(\frac{3}{2}+z\right)-z \Rightarrow y=2-3-2z-z \Rightarrow \boxed{y=-1-3z}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Las soluciones del sistema son $x=\frac{3}{2}+t;\ y=-1-3t;\ z=t;\quad t\in\mathbb{R}$

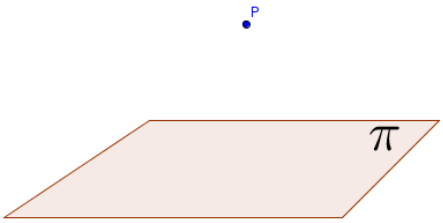
b) Las soluciones del sistema para $p = 2$ se han obtenido en el apartado anterior y son

$x=\frac{3}{2}+t;\ y=-1-3t;\ z=t;\quad t\in\mathbb{R}$

3. Considere el punto $P = (-1, 3, 1)$, el plano $\pi : x = y$ y la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = z - 2$.

a) Encuentre las coordenadas del punto P' simétrico a P respecto del plano π. [1,25 puntos]

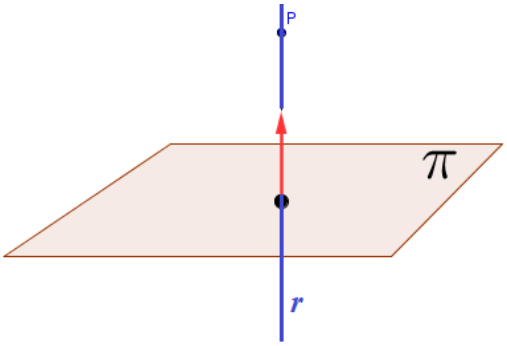
b) De todos los planos que contienen la recta r, encuentre la ecuación cartesiana del que es perpendicular al plano π. [1,25 puntos]



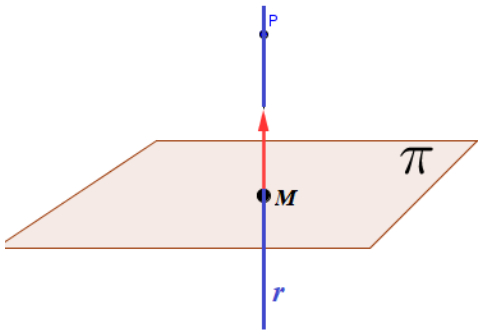
Para hallar el punto simétrico de P respecto del plano nos planteamos hallar primero la ecuación de la recta "r" perpendicular al plano π que pasa por P. Como la recta es perpendicular al plano tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x = y \Rightarrow \pi : x - y = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -1, 0)$$

$$r : \begin{cases} \vec{u} = \vec{n} = (1, -1, 0) \\ P(-1, 3, 1) \in r \end{cases} \Rightarrow \boxed{r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}}$$



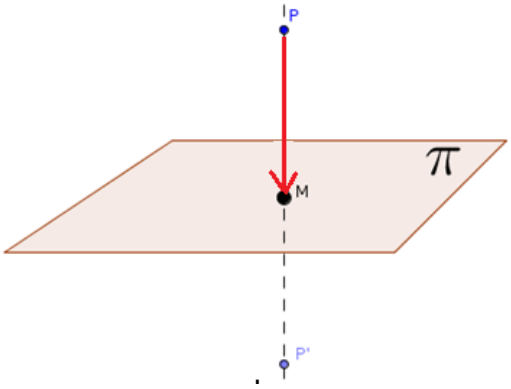
Hallamos el punto de corte M del plano y la recta.



$$\left.\begin{array}{l} r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \\ \pi : x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 + \lambda - (3 - \lambda) = 0 \Rightarrow -4 + 2\lambda = 0 \Rightarrow 4 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = 3 - 2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(1,1,1)}$$

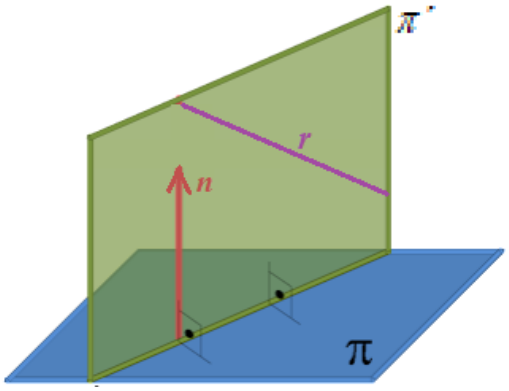
El punto P´ es el punto que surge de sumarle al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.



$$\overrightarrow{PM}=(1,1,1)-(-1,3,1)=(2,-2,0)\Rightarrow \boxed{P'=(1,1,1)+(2,-2,0)=(3,-1,1)}$$

El punto simétrico de P(–1,3,1) respecto del plano $\pi : x = y$ tiene coordenadas P´(3, –1,1)

b) Buscamos la ecuación de un plano π' que contiene a la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=z-2$ y es perpendicular al plano π: $x = y$. Dicho plano π' tiene como vectores directores el director de la recta r y el normal del plano π. Y contiene el punto P_r de la recta.



$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z-2\Rightarrow\begin{cases}\vec{v_r}=(2,3,1)\\ P_r(1,0,2)\end{cases}$$

$$\pi':\begin{cases}\vec{u}=\vec{v_r}=(2,3,1)\\ \vec{v}=\vec{n}=(1,-1,0)\Rightarrow\pi':\\ P_r(1,0,2)\in\pi'\end{cases}\begin{vmatrix}x-1 & y & z-2\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow y-2z+4-3z+6+x-1=0\Rightarrow$$

$$\boxed{\pi':x+y-5z+9=0}$$

El plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π tiene ecuación $\pi':x+y-5z+9=0$

4. Sea la función $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ definida en el dominio $x > 0$, donde ln es el logaritmo neperiano.

a) Encuentre las coordenadas de un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a la curva sea horizontal y analice si la función tiene un extremo relativo en este punto. [1 punto]

b) Determine si la función $f(x)$ tiene alguna asíntota horizontal. [0,5 puntos]

c) Calcule el área de la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 1$ y $x = e$. Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función en el dominio $0 < x < 5$, donde quede representada el área que ha calculado. [1 punto]

a) La recta tangente a la gráfica de la parábola en $x=a$ tiene ecuación $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

Para que la recta tangente sea horizontal debe tener pendiente 0, por lo que debe ser $f'(a)=0$.

Buscamos los puntos del dominio donde se anula la derivada.

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x}\rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot\ln(x)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-\ln(x)}{x^2}=0\Rightarrow 1-\ln(x)=0\Rightarrow\ln(x)=1\Rightarrow\boxed{x=e}$$

Como $f(e)=\dfrac{\ln(e)}{e}=\dfrac{1}{e}$ el punto pedido tiene coordenadas $\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$.

Para estudiar qué tipo de extremo relativo es analizamos el signo de la derivada antes y después de $x=e$.

- En $(0,e)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{1-\ln(1)}{1^2}=1>0$. La función crece en $(0,e)$
- En $(e,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=\dfrac{1-\ln(3)}{3^2}<0$. La función decrece en $(e,+\infty)$.

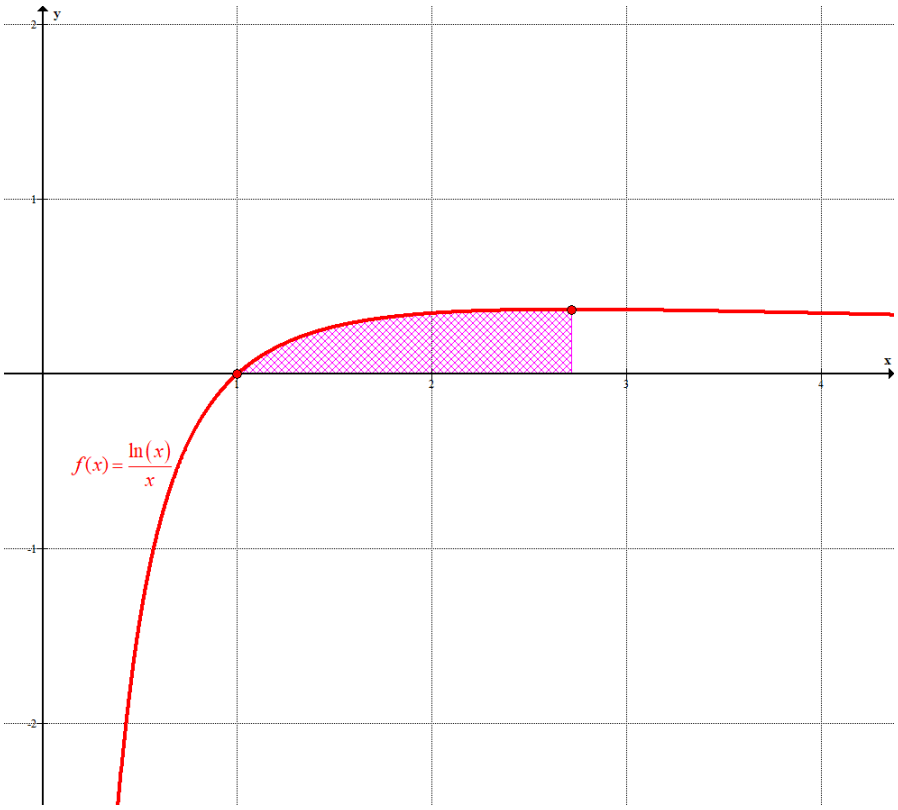
La función presenta un máximo relativo en $x = e$, pues en dicho valor cambia de crecer a decrecer.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}=In\det er\min ación\,(L'Hòpital)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

La asíntota horizontal tiene ecuación $y=0$.

c) Hacemos una tabla de valores en el intervalo *(1, e)*.

x	$f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$
1	0
2	$\dfrac{\ln 2}{2}=0.35$
e	$\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e}=0.37$



Como la función es positiva en el intervalo *(1, e)* el valor del área del recinto del dibujo se obtiene con la integral definida de la función $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ entre $x = 1$ y $x = e$.

$$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx=\ldots$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \ln(x)=t\rightarrow \dfrac{1}{x}dx=dt\\ dx=xdt\end{array}\right\}=\int \frac{t}{x}xdt=\int tdt=\frac{t^2}{2}=\frac{\left(\ln(x)\right)^2}{2}$$

$$\ldots=\left[\frac{\left(\ln(x)\right)^2}{2}\right]_1^e=\left[\frac{\left(\ln(e)\right)^2}{2}\right]-\left[\frac{\left(\ln(1)\right)^2}{2}\right]=\boxed{\frac{1}{2}u^2}$$

El área del recinto es 0.5 u^2.

5. ***a)*** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial $A^2X=A-3I$, donde ***I*** es la matriz identidad. [1,25 puntos]

b) Una matriz cuadrada ***M*** satisface que $M^3-3M^2+3M-I=0$, donde ***I*** es la matriz identidad. Justifique que ***M*** es invertible y exprese la inversa de ***M*** en función de las matrices ***M*** e ***I***. [1,25 puntos]

a) ¿La matriz $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ tiene inversa?

$|A|=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$. Su determinante es no nulo y la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Usamos la inversa de la matriz A para despejar X en la ecuación matricial $A^2X=A-3I$.

$$A^2X=A-3I\Rightarrow A^{-1}A^2X=A^{-1}A-3A^{-1}I\Rightarrow A^{-1}AAX=I-3A^{-1}\Rightarrow AX=I-3A^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}I-3A^{-1}A^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}-3A^{-1}A^{-1}\Rightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&3\\3&0&0\\0&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-3\\-3&0&1\\1&-3&0\end{pmatrix}.$$

b) $M^3-3M^2+3M-I=0\Rightarrow M^3-3M^2+3M=I\Rightarrow M\left(M^2-3M+3I\right)=I\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{M^{-1}=M^2-3M+3I}$$

Para que la matriz M tenga inversa debe tener determinante no nulo y esto se cumple.

$$M\left(M^2-3M+3I\right)=I \Rightarrow \left|M\left(M^2-3M+3I\right)\right|=|I| \Rightarrow |M|\left|M^2-3M+3I\right|=1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |M| \neq 0$, pues el producto de los determinantes es no nulo (1).

Y la matriz inversa de M es $M^{-1}=M^2-3M+3I$.

6. Considere la función $f(x)=e^{x-1}-x-1$.

a) Estudie la continuidad, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. [1,25 puntos]

b) Demuestre que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones entre $x = -1$ y $x = 3$. [1,25 puntos]

a) La función es continua por ser la suma de dos funciones continuas, la exponencial y una polinómica de primer grado.
Para analizar la monotonía estudiaremos el signo de la derivada.

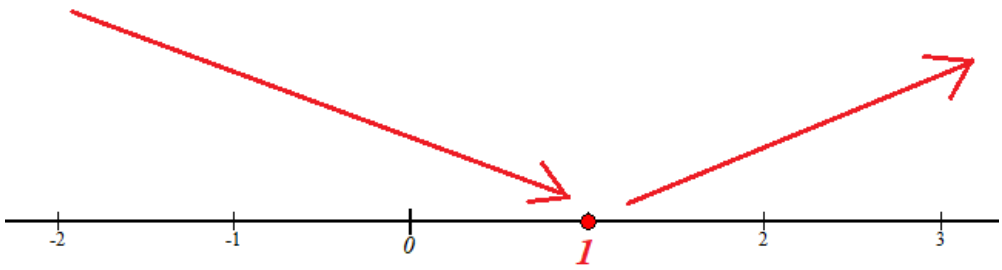
$$f(x)=e^{x-1}-x-1 \Rightarrow f\,'(x)=e^{x-1}-1$$

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow e^{x-1}-1=0 \Rightarrow e^{x-1}=1 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

En $x = 1$ existe un punto crítico de la función, analizamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En $(-\infty,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f\,'(0)=e^{0-1}-1\approx -0.6<0$. La función decrece en $(-\infty,1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f\,'(2)=e^{2-1}-1\approx 1.71>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,1)$ y crece en $(1,+\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 1$. Como $f(1)=e^{1-1}-1-1=-1$ el mínimo relativo tiene coordenadas (1, –1).

b) Utilizaremos el teorema de Bolzano.

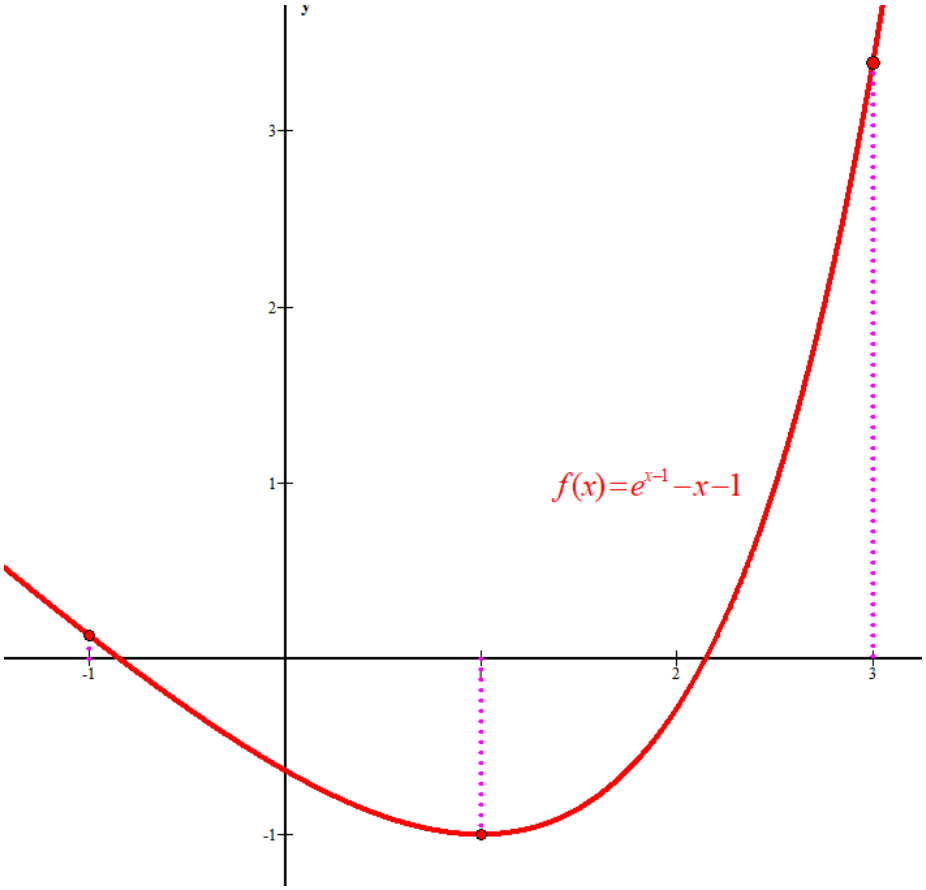
Como $f(-1)=e^{-1-1}-(-1)-1=e^{-2}>0$; $f(3)=e^{3-1}-3-1=e^{2}-4\approx 3.39>0$, ambos valores son positivos y no podemos aplicar el teorema de Bolzano en el intervalo (–1, 3).
Dividimos el intervalo en dos partes: (–1,1) y (1, 3).

En (–1, 1) tenemos que la función es continua en el intervalo [–1, 1] y toma valores de signo distinto en cada uno de los extremos: $f(-1)=e^{-2}>0$ y $f(1)=-1<0$ aplicando el teorema de Bolzano existe, al menos un valor $c\in(-1,1)$ donde $f(c) = 0$.
Además, como la función es decreciente en el intervalo (–1, 1) este valor "c" es único.

En (1, 3) tenemos que la función es continua en el intervalo [1, 3] y toma valores de signo distinto en cada uno de los extremos: $f(1) = -1 < 0$ y $f(3) = e^2 - 4 \approx 3.39 > 0$ aplicando el teorema de Bolzano existe, al menos un valor $d \in (1,3)$ donde $f(d) = 0$.
Además, como la función es creciente en el intervalo (1, 3) este valor "d" es único.

Reuniendo lo obtenido entre $x = -1$ y $x = 3$ la función tiene dos valores en los cuales $f(x) = 0$. Además, solo existen esos dos valores que anulan la función, debido a la monotonía de la función.

No lo pide el ejercicio, pero dibujamos la gráfica de la función para comprobar lo obtenido.



PAU junio (serie 5) 2021

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 5

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Razone que la matriz *B* es invertible y después calcule B^{-1}. [1,25 puntos]

b) Calcule la matriz *X* que satisface la igualdad $A+B\cdot X=C\cdot A$. [1,25 puntos]

2. Sean las funciones $f(x)=x^3-9x$ y $g(x)=7x$.

a) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*. [1,25 puntos]

b) Calcule el área de la región del semiplano $x\geq 0$ comprendida entre las gráficas de *f(x)* y *g(x)*. [1,25 puntos]

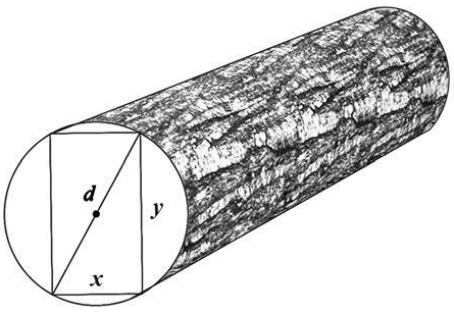
3. Considere los puntos del espacio tridimensional *A = (1, a, 1)*, *B = (a, 1, 2)*, *C = (1, 1, 1)* y *D = (0, 0, 0)*, donde *a* es un parámetro real.

a) Determine el valor del parámetro *a* para el que los puntos son diferentes y coplanarios (es decir, que existe un plano que los contiene). [1,25 puntos]

b) Para el valor *a = 2*, calcule el área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C*. [1,25 puntos]

NOTA: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores *v* y *w*, se puede utilizar la expresión $S=\frac{1}{2}\|v\times w\|$, donde $v\times w$ es el producto vectorial de los vectores *v* y *w*.

4. La resistencia a la rotura R de una viga de sección rectangular de base *x* y altura *y* es directamente proporcional al producto xy^2; por tanto, $R=kxy^2$, donde *k* es una constante positiva. Disponemos de un tronco de madera en forma de cilindro de diámetro *d* como el de la figura.



a) Compruebe que la resistencia R de la viga rectangular de base *x* que podemos construir con este

tronco viene dada por la expresión $R = kx\left(d^2 - x^2\right)$. [1.25 puntos]

b) Calcule las dimensiones de la viga rectangular de resistencia máxima que podemos construir a partir de este tronco y calcula esta resistencia máxima. [1.25 puntos]

5. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real *a*:

$$\begin{cases} x + 2y + az = 8 \\ 2x + y - az = 1 \\ 3x - 3az = 1 \end{cases}$$

a) Compruebe que, para cualquier valor del parámetro *a*, el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución. [1,25 puntos]

b) Interprete geométricamente el sistema de ecuaciones lineales. Haga un dibujo esquemático que represente la posición relativa de los tres planos. [1,25 puntos]

6. Resuelve las dos cuestiones siguientes:

a) Sea $f(x) = 2x^3 + mx^2 + nx + p$ una función que tiene dos extremos relativos en $x = -3$ y en $x = 1$ y que pasa por el punto (3, 4). Calcule los valores de *m*, *n* y *p*. [1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ en $x = -3$. [1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 7\end{pmatrix}$.

a) Razone que la matriz B es invertible y después calcule B^{-1}. [1,25 puntos]

b) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A+B\cdot X=C\cdot A$. [1,25 puntos]

a) La matriz B es invertible si su determinante es no nulo.

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-1=-1\neq 0$$

La matriz B es invertible. Calculamos su inversa.

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A+B\cdot X=C\cdot A\Rightarrow B\cdot X=C\cdot A-A\Rightarrow X=B^{-1}\left(C\cdot A-A\right)$$

Sustituimos el valor de las matrices y calculamos X.

$$C\cdot A-A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10-3 & 5+4\\ -21 & 28\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 8\\ -18 & 24\end{pmatrix}$$

$$X=B^{-1}\left(C\cdot A-A\right)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 8\\ -18 & 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18 & 24\\ 5+18 & 8-24\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-18 & 24\\ 23 & -16\end{pmatrix}}$$

2. Sean las funciones $f(x)=x^3-9x$ y $g(x)=7x$.

a) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*. [1,25 puntos]

b) Calcule el área de la región del semiplano $x\geq 0$ comprendida entre las gráficas de *f(x)* y *g(x)*. [1,25 puntos]

a) Calculamos la derivada, la igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función.

$$f'(x)=3x^2-9$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-9=0\Rightarrow x^2-3=0\Rightarrow x^2=3\Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{3}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2)=3(-2)^2-9=3>0$. La función crece en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$.
- En el intervalo $\left(-\sqrt{3},+\sqrt{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=3\cdot 0^2-9=-9<0$. La función decrece en $\left(-\sqrt{3},+\sqrt{3}\right)$.
- En el intervalo $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=3\cdot 2^2-9=3>0$. La función crece en $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$.

La función crece en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ y decrece en $\left(-\sqrt{3},+\sqrt{3}\right)$.

b) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-9x \\ g(x)=7x \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\}\Rightarrow x^3-9x=7x\Rightarrow x^3-16x=0\Rightarrow x\left(x^2-16\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ o \\ x^2-16=0\rightarrow x^2=16\rightarrow x=\sqrt{16}=\pm 4 \end{cases}$$

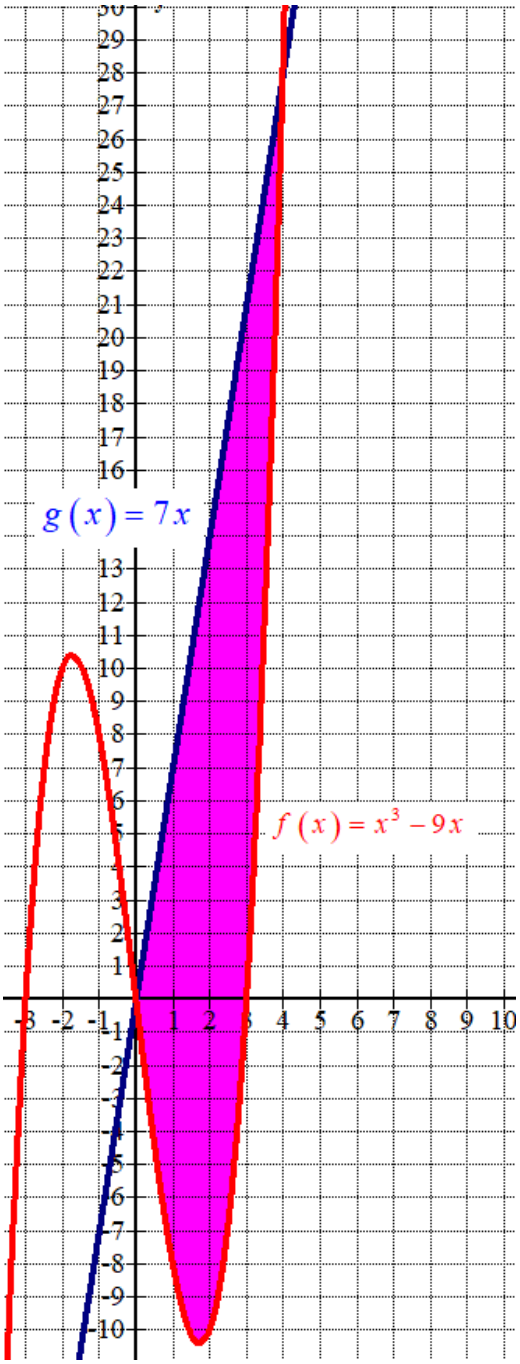
Como estamos situando la región en el semiplano $x\geq 0$, los puntos de corte son dos: $x = 0$ y $x=4$.

El área de la región pedida es el valor de la integral definida entre 0 y 4 de la diferencia entre las dos funciones. Como $\left.\begin{array}{l} f(1)=1^3-9=-8 \\ g(1)=7 \end{array}\right\}\Rightarrow f(1)<g(1)$ tomaremos *g(x) – f(x)*.

$$Área = \int_0^4 g(x) - f(x)\,dx = \int_0^4 7x - \left(x^3 - 9x\right)dx = \int_0^4 16x - x^3 dx =$$

$$= \left[8x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^4 = \left[8\cdot 4^2 - \frac{1}{4}\cdot 4^4\right] - \left[8\cdot 0^2 - \frac{1}{4}\cdot 0^4\right] = \boxed{64\ u^2}$$

No lo pide, pero dibujamos las gráficas de las dos funciones y la región que delimitan cuando $x \geq 0$ y comprobamos que la región que delimitan es tan grande como hemos obtenido.



3. Considere los puntos del espacio tridimensional *A = (1, a, 1)*, *B = (a, 1, 2)*, *C = (1, 1, 1)* y *D = (0, 0, 0)*, donde *a* es un parámetro real.

a) Determine el valor del parámetro *a* para el que los puntos son diferentes y coplanarios (es decir, que existe un plano que los contiene). [1,25 puntos]

b) Para el valor *a = 2*, calcule el área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C*. [1,25 puntos]

NOTA: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores *v* y *w*, se puede utilizar la expresión $S=\frac{1}{2}\|v\times w\|$, donde $v\times w$ es el producto vectorial de los vectores *v* y *w*.

a) Como los puntos tienen que ser distintos el punto $A=(1,a,1)$ no puede ser igual al $C=(1,1,1)$, por lo que a ≠ 1.

Hallamos el plano que contiene a los puntos *B*, *C* y *D*. Para ser coplanarios el punto *A* debe pertenecer a dicho plano.

Hallamos la ecuación del plano que contiene a los puntos *B*, *C* y *D*.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{DC}=(1,1,1)-(0,0,0)=(1,1,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{DB}=(a,1,2)-(0,0,0)=(a,1,2)\\ D(0,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 1 & 1\\ a & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+ay+z-az-2y-x=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv x+(a-2)y+(1-a)z=0}$$

Hacemos que el punto A pertenezca al plano π.

$$\left.\begin{array}{r}\pi\equiv x+(a-2)y+(1-a)z=0\\ A(1,a,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 1+(a-2)\cdot a+(1-a)\cdot 1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+a^2-2a+1-a=0\Rightarrow a^2-3a+2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=\boxed{2=a}\\ \frac{3-1}{2}=\boxed{1=a}\end{cases}$$

Como *a* no puede valer 1 pues los puntos A y D serían el mismo, el valor de "a" que buscamos es *a = 2*.

OTRA FORMA DE HACERLO

Para que sean coplanarios debe ser linealmente dependientes los vectores $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, y $\overrightarrow{DC}$.

El determinante de la matriz que forman las coordenadas de dichos vectores debe ser 0.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{DA}=(1,a,1)-(0,0,0)=(1,a,1)\\ \overrightarrow{DB}=(a,1,2)-(0,0,0)=(a,1,2)\\ \overrightarrow{DC}=(1,1,1)-(0,0,0)=(1,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 1+2a+a-1-a^2-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a^2+3a-2=0 \Rightarrow a^2-3a+2=0 \Rightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=\boxed{2=a}\\ \frac{3-1}{2}=\boxed{1=a}\end{cases}$$

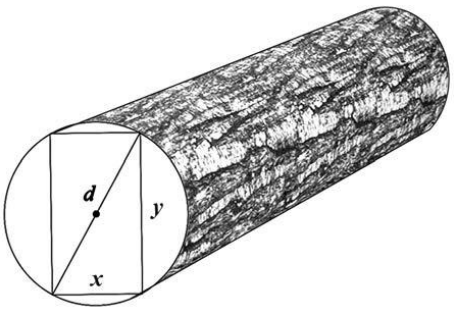
De estos dos valores obtenidos solo es válido $a = 2$, pues si $a = 1$ los puntos A y D son el mismo.

b) El área del triángulo de vértices A, B y C es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(2,1,2)-(1,2,1)=(1,-1,1)\\ \overrightarrow{AC}=(1,1,1)-(1,2,1)=(0,-1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=-k+i=i-k=(1,0,-1)$$

$$\text{Área } ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\,u^2}$$

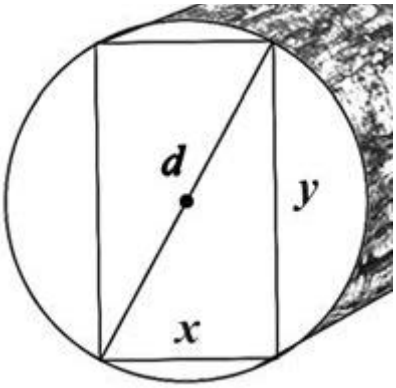
4. La resistencia a la rotura R de una viga de sección rectangular de base x y altura y es directamente proporcional al producto xy^2; por tanto, $R = kxy^2$, donde k es una constante positiva. Disponemos de un tronco de madera en forma de cilindro de diámetro d como el de la figura.



a) Compruebe que la resistencia R de la viga rectangular de base x que podemos construir con este tronco viene dada por la expresión $R = kx\left(d^2 - x^2\right)$. [1.25 puntos]

b) Calcule las dimensiones de la viga rectangular de resistencia máxima que podemos construir a partir de este tronco y calcula esta resistencia máxima. [1.25 puntos]

a) Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo del dibujo:



$$\left.\begin{array}{l} d^2 = x^2 + y^2 \to y^2 = d^2 - x^2 \\ R = kxy^2 \end{array}\right\} \Rightarrow R = kx\left(d^2 - x^2\right)$$

b) Derivamos la función e igualamos a cero su derivada en busca de los puntos críticos.

$$R = kx\left(d^2 - x^2\right) = kd^2x - kx^3 \Rightarrow R' = kd^2 - 3kx^2$$

$$R' = 0 \Rightarrow kd^2 - 3kx^2 = 0 \Rightarrow 3kx^2 = kd^2 \Rightarrow x^2 = \frac{kd^2}{3k} = \frac{d^2}{3} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{d^2}{3}} = \frac{d}{\sqrt{3}}}$$

Calculamos la segunda derivada y sustituimos el valor obtenido.

$$R' = kd^2 - 3kx^2 \Rightarrow R'' = -6kx \Rightarrow R''\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) = -6k\frac{d}{\sqrt{3}} < 0$$

El valor de la derivada segunda es negativo pues los valores de d y k son positivos. Por ello la resistencia es máxima en $x = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{3}$.

El valor de y es $y^2 = d^2 - \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2d^2}{3} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{2d^2}{3}} = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{6}}{3}$

Las dimensiones de la viga son $x=\frac{d\sqrt{3}}{3}$ e $y=\frac{d\sqrt{6}}{3}$.

La resistencia máxima es de:

$$\left.\begin{array}{r} R=kx\left(d^2-x^2\right) \\ x=\frac{d\sqrt{3}}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow R=k\frac{d\sqrt{3}}{3}\left(d^2-\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2\right)=k\frac{d\sqrt{3}}{3}\left(d^2-\frac{d^2}{3}\right)=k\frac{d\sqrt{3}}{3}\frac{2d^2}{3}$$

$$\boxed{R=kd^3\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

5. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real *a*:

$$\begin{cases} x+2y+az=8 \\ 2x+y-az=1 \\ 3x-3az=1 \end{cases}$$

a) Compruebe que, para cualquier valor del parámetro *a*, el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución. [1,25 puntos]

b) Interprete geométricamente el sistema de ecuaciones lineales. Haga un dibujo esquemático que represente la posición relativa de los tres planos. [1,25 puntos]

a) La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & 0 & -3a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3a & 1 \end{pmatrix}$

Comprobamos el rango de A:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & 0 & -3a \end{vmatrix}=-3a-6a-3a+12a=0$$

El rango de A es menor de 3.

Comprobamos si el rango de A/B es 3.
Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna tercera.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3a & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+6-24-4=-21\neq 0$$

El rango de la matriz ampliada A/B es 3 independientemente del valor de "a".

Conclusión: El rango de A es menor de 3 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible, sea cual sea el valor de "a".

b) El sistema planteado son tres planos que no coinciden en ningún punto.
Además, no hay ningún par de planos paralelos, dado que de los tres vectores normales (un vector normal en cada plano) no hay ningún par con coordenadas proporcionales.

$$\begin{cases} x+2y+az=8\rightarrow \vec{n}=(1,2,a) \\ 2x+y-az=1\rightarrow \vec{n'}=(2,1,-a) \\ 3x-3az=1\rightarrow \vec{n''}=(3,0,-3a) \end{cases}$$

6. Resuelve las dos cuestiones siguientes:

a) Sea $f(x)=2x^3+mx^2+nx+p$ una función que tiene dos extremos relativos en $x=-3$ y en $x=1$ y que pasa por el punto (3, 4). Calcule los valores de *m*, *n* y *p*. [1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ en $x=-3$. [1,25 puntos]

a) Si tiene dos extremos relativos en $x=-3$ y en $x=1$ debe cumplirse que $f'(-3)=0$ y $f'(1)=0$.

$$f(x)=2x^3+mx^2+nx+p \Rightarrow f'(x)=6x^2+2mx+n$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=6x^2+2mx+n \\ f'(-3)=0 \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6(-3)^2+2m(-3)+n=0 \\ 6\cdot 1^2+2m\cdot 1+n=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 54-6m+n=0 \\ 6+2m+n=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} n=6m-54 \\ 6+2m+n=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6+2m+6m-54=0 \Rightarrow 8m=48 \Rightarrow \boxed{m=6} \Rightarrow \boxed{n=36-54=-18}$$

La función queda $f(x)=2x^3+6x^2-18x+p$

Como la función pasa por el punto (3, 4) tenemos que:

$$f(3)=4=2\cdot 3^3+6\cdot 3^2-18\cdot 3+p \rightarrow 4=54+54-54+p \rightarrow \boxed{p=-50}$$

Los valores buscados son $m=6$, $n=-18$ y $p=-50$.

b) La ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x=-3$ tiene la expresión:

$$y-f(-3)=f'(-3)(x+3)$$

Calculamos $f(-3)$ y $f'(-3)$.

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow f(-3)=\frac{1+3}{1-3}=-2$$

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-1\cdot(1+x)-1\cdot(1-x)}{(1+x)^2}=\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=\frac{-2}{(1+x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(-3)=\frac{-2}{(1-3)^2}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

La recta tangente queda:

$$\left.\begin{array}{r} f(-3)=-2 \\ f'(-3)=\dfrac{-1}{2} \\ y-f(-3)=f'(-3)(x+3) \end{array}\right\} \Rightarrow y+2=\frac{-1}{2}(x+3) \Rightarrow y+2=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{2}x-\frac{7}{2}}$$

PAU septiembre 2020

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Sèrie 4

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Sean las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=a\cdot x^2$ donde a es un número real positivo.

***a*)** Encuentre, en función del parámetro a, los puntos de corte entre las dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y haga un esbozo de la región limitada por las dos gráficas. [1,25 puntos]

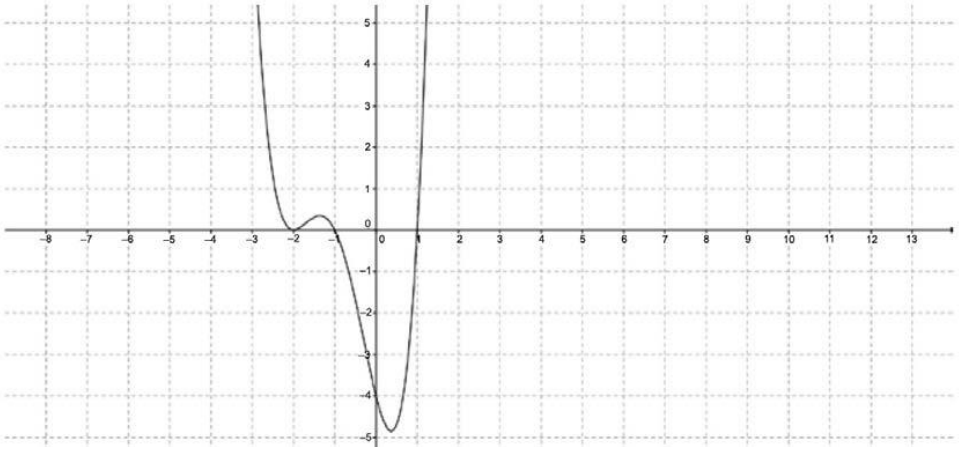
***b*)** Calcule el valor de a para que el área comprendida entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sea $\frac{27}{4}u^2$. [1,25 puntos]

2. Un avión es desplaza desde un punto $A=(0,3,1)$ hacia una plataforma plana de ecuación $\pi: x-2y+z=1$ siguiendo una recta r paralela al vector $\boldsymbol{v} = (1, -1, 0)$.

***a*)** Calcule las coordenadas del punto de contacto B del avión con el plano y la distancia recorrida. [1,25 puntos]

***b*)** Calcule la ecuación general del plano perpendicular a la plataforma y que contiene la recta r seguida por el avión desde el punto A. [1,25 puntos]

3. Sea $f(x)$ una función derivable cuya gráfica pasa por el punto (0, 1). La gráfica de su derivada, $f'(x)$, es la que se muestra en la figura.



a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de la gráfica de abscisa $x = 0$. [1,25 puntos]

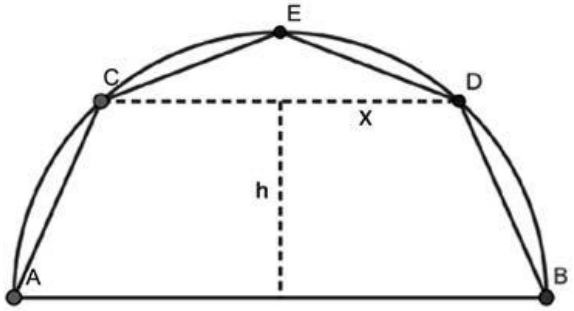
b) Encuentre las abscisas de los puntos singulares de la función $f(x)$ y clasifíquelos. [1,25 puntos]

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, en la que a es un parámetro real.

a) Estudie el rango de la matriz $\boldsymbol{A}$ para los distintos valores del parámetro a. [1,25 puntos]

b) Compruebe que para $a = 4$ la matriz $\boldsymbol{A}$ es invertible y que se verifica que $A^{-1} = A^2$. [1,25 puntos]

5. Una empresa está trabajando en el diseño de unas cápsulas de café. La empresa ha construido la sección transversal de las cápsulas inscribiéndola en una semicircunferencia de radio 1, trazando a continuación una cuerda CD paralela al diámetro AB e incorporando el punto E en el punto medio del arco CD. De esta manera queda trazado el pentágon0 $ACEDB$, tal como se muestra en la figura.



a) Exprese en función de x y h el área del pentágono $ACEDB$. [1,25 puntos]

b) ¿Cuál debe ser la distancia (indicada en la figura por h) a la que debe situarse la cuerda CD de AB para que el área del pentágono $ACEDB$ sea máxima? [1,25 puntos]

6. Sean las rectas r y s, expresadas por $\frac{x-3}{2} = y = z-1$ y $(\mu, -\mu, \mu)$, respectivamente.

a) Determine la posición relativa de las rectas. [1,25 puntos]

b) Calcule la distancia entre la recta r y la recta s. [1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Sean las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=a\cdot x^2$ donde a es un número real positivo.

a) Encuentre, en función del parámetro a, los puntos de corte entre las dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y haga un esbozo de la región limitada por las dos gráficas. [1,25 puntos]

b) Calcule el valor de a para que el área comprendida entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sea $\frac{27}{4}u^2$. [1,25 puntos]

a) Igualamos las expresiones de las dos funciones y resolvemos la ecuación.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^3=a\cdot x^2\Rightarrow x^3-a\cdot x^2=0\Rightarrow x^2(x-a)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x-a=0\Rightarrow x=a\end{cases}$$

$$x=0\rightarrow f(0)=0\rightarrow P(0,0)$$

$$x=a\rightarrow f(a)=a^3\rightarrow Q(a,a^3)$$

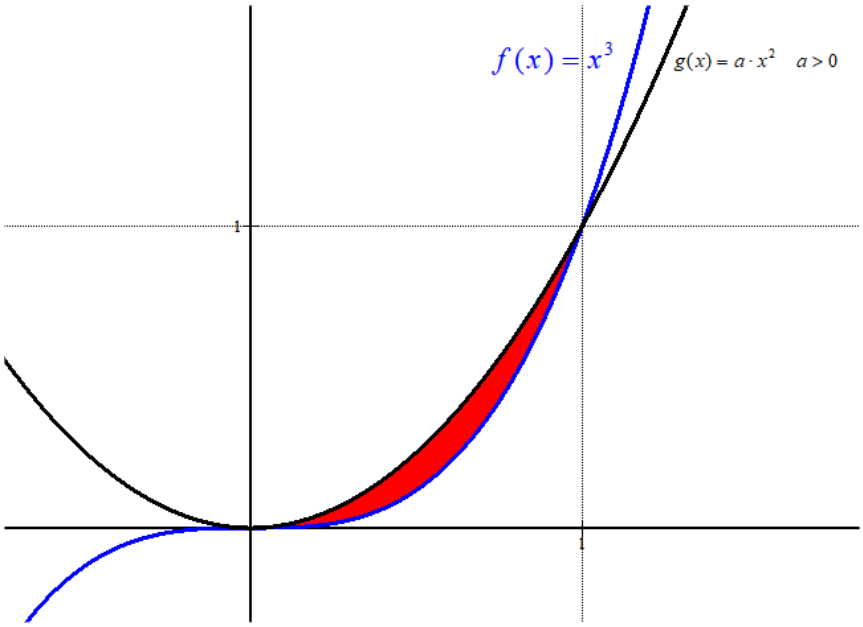
Los puntos de corte de ambas gráficas son $P(0, 0)$ y $Q(a, a^3)$.
Completamos una tabla de valores y dibujamos las dos gráficas.

$f(x)=x^3$

x	$y=x^3$
−2	−8
−1	−1
0	0
1	1
2	8

$g(x)=a\cdot x^2 \quad a>0$

x	$y=x^2\ (a=1)$
−2	4
−1	1
0	0
1	1



b) El área del recinto rojo es el valor de la integral definida entre 0 y a de $g(x) - f(x)$.

$$Área=\int_0^a ax^2-x^3dx=\left[\frac{ax^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^a=\left[\frac{a\cdot a^3}{3}-\frac{a^4}{4}\right]-\left[\frac{a\cdot 0^3}{3}-\frac{0^4}{4}\right]=\frac{a^4}{3}-\frac{a^4}{4}=\frac{4a^4-3a^4}{12}=\frac{a^4}{12}u^2$$

Como nos piden que el área valga $\frac{27}{4}u^2$, tenemos que $\frac{a^4}{12}=\frac{27}{4}\Rightarrow a^4=81\Rightarrow a=\sqrt[4]{81}=\pm 3$

Descartamos el valor negativo, ya que el enunciado dice que a es positivo.

El valor buscado de a es 3.

2. Un avión es desplaza desde un punto $A=(0,3,1)$ hacia una plataforma plana de ecuación $\pi: x-2y+z=1$ siguiendo una recta *r* paralela al vector ***v*** = (1, –1, 0).

a) Calcule las coordenadas del punto de contacto *B* del avión con el plano y la distancia recorrida. [1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación general del plano perpendicular a la plataforma y que contiene la recta *r* seguida por el avión desde el punto *A*. [1,25 puntos]

a) Hallamos la ecuación de la recta *r* con vector director ***v*** = (1, –1, 0) y que pasa por el punto A(0,3,1).

$$\left.\begin{array}{l} A(0,3,1)\in r \\ \overrightarrow{v_r}=(1,-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1 \end{cases}$$

El punto B será el punto de corte de la recta *r* y el plano $\pi: x-2y+z=1$. Hallamos ese punto resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1 \end{cases} \\ \pi: x-2y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda-2(3-\lambda)+1=1\Rightarrow \lambda-6+2\lambda+1=1\Rightarrow 3\lambda=6\Rightarrow \lambda=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=3-2=1\Rightarrow \boxed{B(2,1,1)} \\ z=1 \end{cases}$$

La distancia recorrida es la longitud del segmento $\overline{AB}$ que es el valor del módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}=(2,1,1)-(0,3,1)=(2,-2,0)$$

$$\text{Distancia}(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}=\boxed{\sqrt{8}=2{,}83\,u}$$

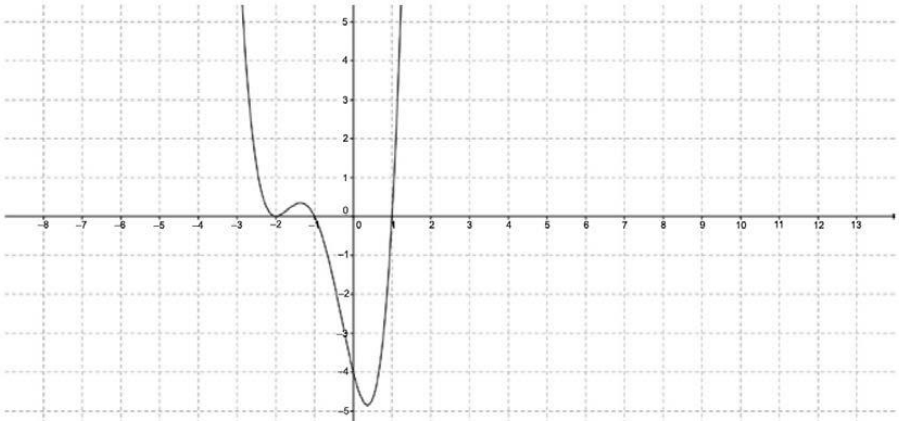
b) El plano π´ pedido tiene como vector director el vector normal al plano $\pi: x-2y+z=1$ que tiene coordenadas $\vec{n}=(1,-2,1)$ y el vector director de la recta *r* que tiene coordenadas $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,0)$.

Como contiene a la recta *r* entonces el punto *A(0, 3, 1)* pertenece al plano π´.

$$\left.\begin{array}{l} A(0,3,1)\in \pi' \\ \vec{u}=\vec{n}=(1,-2,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{v_r}=(1,-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-0 & y-3 & z-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-3-z+1+2z-2+x=0\Rightarrow \boxed{\pi': x+y+z-4=0}$$

3. Sea $f(x)$ una función derivable cuya gráfica pasa por el punto (0, 1). La gráfica de su derivada, $f'(x)$, es la que se muestra en la figura.



a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de la gráfica de abscisa $x = 0$. [1,25 puntos]

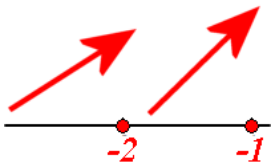
b) Encuentre las abscisas de los puntos singulares de la función $f(x)$ y clasifíquelos. [1,25 puntos]

a) Mirando la gráfica de $f'(x)$ vemos que $f'(0) = -4$ y nos dicen que la función $f(x)$ pasa por el punto (0, 1), por lo que $f(0) = 1$.
Aplicamos todo esto a la fórmula de la tangente en $x = 0$.

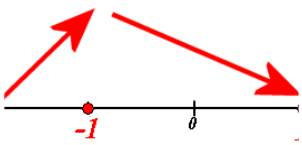
$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 1 = -4x \Rightarrow \boxed{y = -4x + 1}$$

b) Los puntos singulares son aquellos en los que se anula la derivada → $f'(x) = 0$
Son los puntos de la gráfica de $f'(x)$ que cortan el eje OX.
Observando la gráfica vemos que ocurre en $x = -2$, en $x = -1$ y en $x = 1$.
Estos son los puntos singulares de la función $f(x)$.

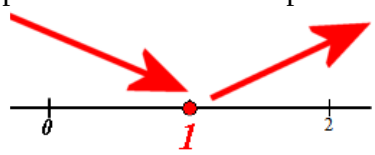
En el entorno de $x = -2$ la derivada es positiva antes de $x = -2$ y también después de –2, por lo que la función crece antes y después de –2. No puede ser ni un máximo ni mínimo relativo, por lo que la función presenta un punto de inflexión en $x = -2$.



En el entorno de $x = -1$ la derivada es positiva antes de –1 y negativa después de –1, por lo que la función crece antes y decrece después de –1. La función presenta un punto máximo en $x = -1$.



En el entorno de $x = 1$ la derivada es negativa antes de 1 y positiva después de 1, por lo que la función decrece antes y crece después de 1. La función presenta un punto mínimo en $x = 1$.



La función tiene un punto de inflexión en $x = -2$, un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

4. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, en la que a es un parámetro real.

a) Estudie el rango de la matriz ***A*** para los distintos valores del parámetro a. [1,25 puntos]

b) Compruebe que para $a = 4$ la matriz ***A*** es invertible y que se verifica que $A^{-1} = A^2$. [1,25 puntos]

a) La matriz A es de dimensión 3x3, por lo que su rango puede ser 3, 2 o 1.

¿El rango de A es 3?

Calculamos su determinante y comprobamos si es nulo o no.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-a^2+7a-3-12+a=-a^2+8a-15$$

$$|A|=0\Rightarrow -a^2+8a-15=0\Rightarrow a=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-60}}{-2}=\frac{-8\pm\sqrt{4}}{-2}=\begin{cases}\frac{-8+2}{-2}=3=a\\ \frac{-8-2}{-2}=5=a\end{cases}$$

Existen tres situaciones distintas que analizamos por separado.

Situación 1ª. $a\neq 3$ *y* $a\neq 5$.

En esta situación el determinante de la matriz A es no nulo y su rango es 3.

Situación 2ª. $a=3$.

En esta situación el determinante de la matriz A es nulo y su rango es menor que 3.

Para $a=3$ la matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

¿El rango de A es 2?

Se observa que la columna 1ª y 2ª son proporcionales, tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 1ª → $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=4+1=5\neq 0$.

El rango de A es 2.

Situación 3ª. $a=5$.

En esta situación el determinante de la matriz A es nulo y su rango es menor que 3.

Para $a=5$ la matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

¿El rango de A es 2?

Se observa que la fila 1ª es la suma de 2ª y 3ª, tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 1ª → $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=2+1=3\neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Para $a\neq 3$ *y* $a\neq 5$ el rango de A es 3, para $a=3$ o $a=5$ el rango de A es 2.

b) Para $a = 4$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4^2 + 32 - 15 = 1 \neq 0$$

El determinante es no nulo y por tanto tiene inversa.

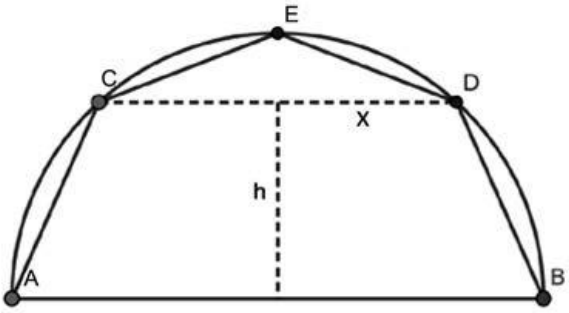
$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos también A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-12+0 & -12+9+0 & 0-3+0 \\ 16-12+1 & -12+9-1 & 0-3-1 \\ 4-4-1 & -3+3+1 & 0-1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se observan se obtiene el mismo resultado y se cumple que $A^{-1} = A^2$

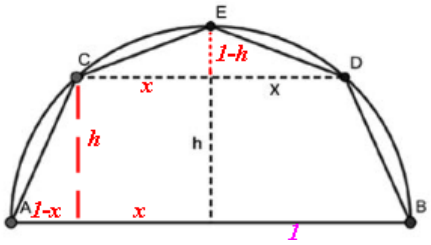
5. Una empresa está trabajando en el diseño de unas cápsulas de café. La empresa ha construido la sección transversal de las cápsulas inscribiéndola en una semicircunferencia de radio 1, trazando a continuación una cuerda *CD* paralela al diámetro *AB* e incorporando el punto *E* en el punto medio del arco *CD*. De esta manera queda trazado el pentágon0 *ACEDB*, tal como se muestra en la figura.

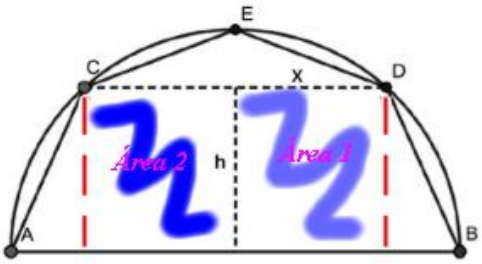


a) Exprese en función de *x* y *h* el área del pentágono *ACEDB*. [1,25 puntos]

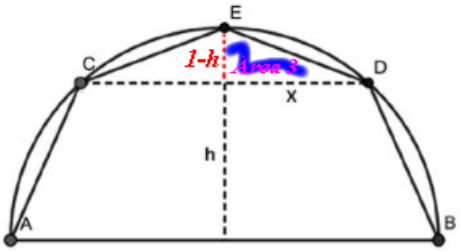
b) ¿Cuál debe ser la distancia (indicada en la figura por *h*) a la que debe situarse la cuerda *CD* de *AB* para que el área del pentágono *ACEDB* sea máxima? [1,25 puntos]

a) Añadimos al dibujo los datos necesarios para calcular el área del pentágono como la suma de áreas de cuadrados y triángulos.

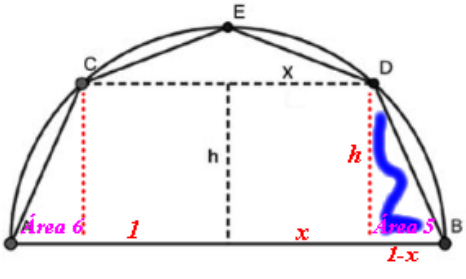




$Área\ 1 = Área\ 2 = h \cdot x$



$Área\ 3 = \dfrac{(1-h)x}{2}$. *Hay dos triángulos como este.*



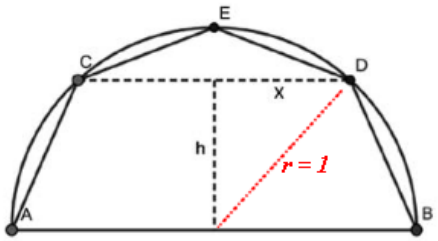
$Área\ 5 = \dfrac{(1-x)h}{2}$. *Hay dos triángulos como este.*

El área del pentágono es la suma del área de los dos rectángulos (área 1 y 2), el área de los 2 triángulos superiores (área 3 y 4) y el área de los dos triángulos laterales (área 5 y 6).

$$Área = 2hx + 2\frac{(1-h)x}{2} + 2\frac{(1-x)h}{2} = 2hx + (1-h)x + (1-x)h = 2hx + x - hx + h - hx$$

$$Área = h + x$$

b) Si dibujamos el radio que va al punto D tenemos un triángulo rectángulo de catetos "x" y "h" y de hipotenusa radio = 1.



Aplicamos el teorema de Pitágoras a este triángulo rectángulo y tenemos:

$x^2 + h^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 = 1 - h^2 \Rightarrow x = \sqrt{1-h^2}$

Sustituimos en la fórmula del área del pentágono.

$$\left.\begin{array}{l} A(h) = h + x \\ x = \sqrt{1-h^2} \end{array}\right\} \Rightarrow A(h) = h + \sqrt{1-h^2}$$

Derivamos e igualamos a cero en busca del máximo relativo.

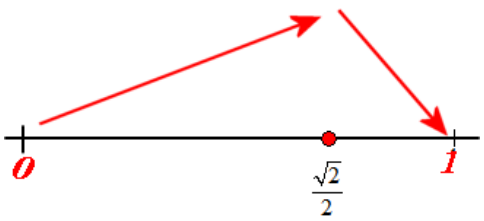
$$A'(h) = 1 + \frac{-2h}{2\sqrt{1-h^2}} = 1 - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$$

$$A'(h) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \Rightarrow h = \sqrt{1-h^2} \Rightarrow h^2 = 1 - h^2 \Rightarrow 2h^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.707$$

Como *h* puede variar de *h = 0* hasta *h = 1*. Estudiamos que pasa antes y después de $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- En $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tomamos *x = 0.5* y la derivada vale $A'(0.5) = 1 - \frac{0.5}{\sqrt{1-0.5^2}} = 0.42 > 0$. La función Área crece en $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- En $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ tomamos *x = 0.8* y la derivada vale $A'(0.8) = 1 - \frac{0.8}{\sqrt{1-0.8^2}} = -0.33 < 0$. La función Área decrece en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.



El área del pentágono es máxima para $h = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.707$.

6. Sean las rectas *r* y *s*, expresadas por $\frac{x-3}{2}=y=z-1$ y $(\mu,-\mu,\mu)$, respectivamente.

a) Determine la posición relativa de las rectas. [1,25 puntos]

b) Calcule la distancia entre la recta *r* y la recta *s*. [1,25 puntos]

a) Obtenemos los vectores directores y un punto de ambas rectas.

$$r:\frac{x-3}{2}=y=z-1\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(2,1,1)\\ P_r(3,0,1)\end{cases}$$

$$s:(\mu,-\mu,\mu)\Rightarrow s:\begin{cases}x=\mu\\ y=-\mu\\ z=\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_s}=(1,-1,1)\\ P_s(0,0,0)\end{cases}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes pues los vectores directores no son proporcionales.

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{v_r}=(2,1,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(1,-1,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{2}{1}\neq\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{1}$$

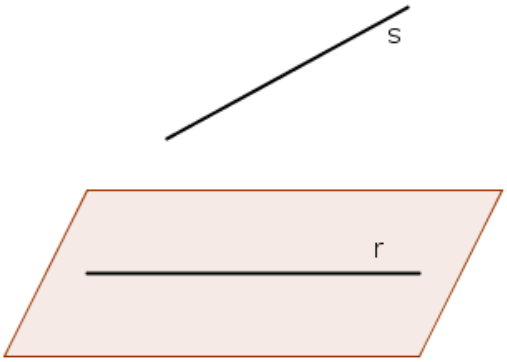
Las rectas se cortan o se cruzan.

Calculamos el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{v_s}=(1,-1,1)$, $\overrightarrow{v_r}=(2,1,1)$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$. Si ese producto mixto es cero las rectas se cortan, en caso contrario, se cruzan.

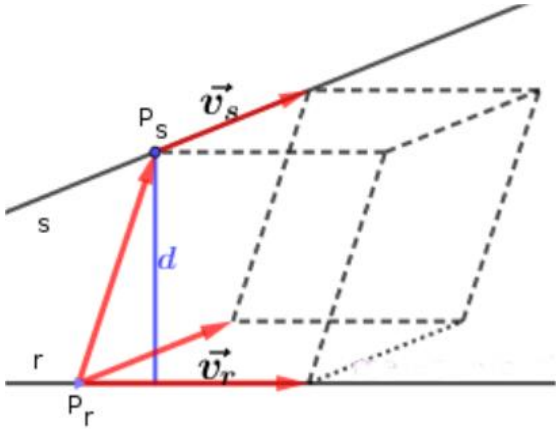
$$\overrightarrow{P_sP_r}=(3,0,1)-(0,0,0)=(3,0,1)$$

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{v_s}=(1,-1,1)\\ \overrightarrow{v_r}=(2,1,1)\\ \overrightarrow{P_sP_r}=(3,0,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{P_sP_r}\right]=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\3&0&1\end{vmatrix}=1-3+0-3+2+0=-3$$

Las rectas se cruzan.



b) Para calcular la distancia utilizamos la fórmula que es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores anteriores (volumen del paralelepípedo definido por ellos) dividido entre el módulo del producto vectorial de los vectores directores de las rectas utilizados en el producto mixto (área de la base del paralelepípedo).



$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_s=(1,-1,1)\\ \vec{v}_r=(2,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{v}_s\times\vec{v}_r=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-i+2j+k+2k-j-i=-2i+k+3k=(-2,1,3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_s=(1,-1,1)\\ \vec{v}_r=(2,1,1)\\ \overrightarrow{P_sP_r}=(3,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow d(r,s)=\frac{\left|\left[\vec{v}_s,\vec{v}_r,\overrightarrow{P_sP_r}\right]\right|}{\left|\vec{v}_s\times\vec{v}_r\right|}=\frac{3}{\sqrt{(-2)^2+1^2+3^2}}=\boxed{\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{14}}{14}=0.802\,u}$$

La distancia entre las rectas r y s es de $\frac{3\sqrt{14}}{14}$ unidades.

PAU julio (serie 1) 2020

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemátiques

Sèrie 1

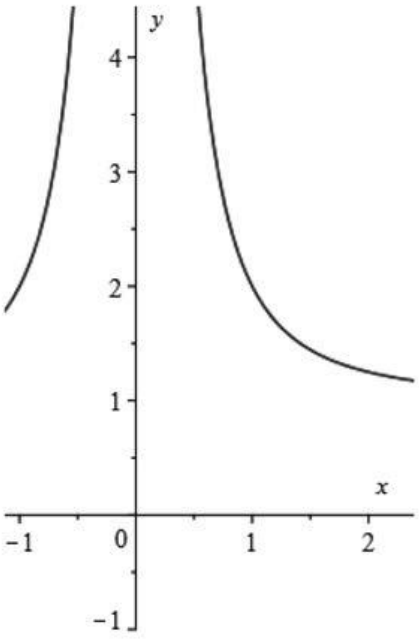
Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Trazamos la recta tangente a la función $f(x)=\frac{1}{x^2}+1$ por un punto $P=\left(a, f\left(a\right)\right)$ del primer cuadrante. Esta recta junto con los ejes de coordenadas forman un triángulo.



a) Compruebe que el área de este triángulo, en función de *a*, viene dada por la función

$$g(a)=\frac{\left(a^2+3\right)^2}{4a}$$

[1,25 puntos]

b) ¿En qué punto *P* el área del triángulo es mínima? Calcule este valor mínimo.
[1,25 puntos]

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real *k*:

$$\begin{cases} 5x+y+4z=19 \\ kx+2y+8z=28 \\ 5x+y-kz=23+k \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *k*.
[1,25 puntos]

b) Resuelva, si es posible, el sistema para el caso $k = 0$.
[1,25 puntos]

3. ***a)*** Calcule la ecuación general del plano π que pasa por el punto (8, 8, 8) y tiene como vectores directores $u=(1,2,-3)$ i $v=(-1,0,3)$.

[1,25 puntos]

b) Determine el valor del parámetro *a* para que el punto (1, –5, *a*) pertenezca al plano π y calcule la ecuación paramétrica de la recta que pasa por este punto y es perpendicular al plano π.

[1,25 puntos]

4. Considere la función $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x}$, donde a y *b* son dos parámetros reales. Calcule los valores de *a* y *b* de manera que la función *f*(*x*) tenga una asíntota oblicua de pendiente 1 y un mínimo en el punto de la gráfica de abscisa *x* = 2.

[2,5 puntos]

5. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -4\end{pmatrix}$.

a) Encuentre la matriz **X** que satisface la ecuación $AX=I-3X$, donde *I* **e**s la matriz identidad de orden 2.

[1,25 puntos]

b) Compruebe que la matriz **X** es invertible y calcule la matriz inversa.

[1,25 puntos]

6. Considere la función $f(x)=x^3$.

a) Calcule en qué punto del tercer cuadrante la recta tangente a *y* = *f(x)* es paralela a la recta $3x-y=4$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en este punto y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función y las dos rectas.

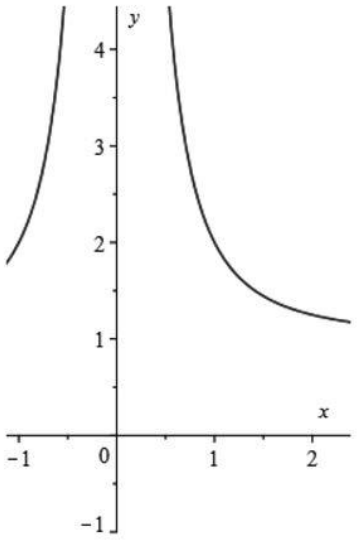
[1,25 puntos]

b) Calcule el área de la región delimitada por *y* = *f*(*x*) y la recta $y=3x+2$.

[1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Trazamos la recta tangente a la función $f(x)=\frac{1}{x^2}+1$ por un punto $P=\left(a, f\left(a\right)\right)$ del primer cuadrante. Esta recta junto con los ejes de coordenadas forman un triángulo.



a) Compruebe que el área de este triángulo, en función de *a*, viene dada por la función

$$g(a)=\frac{\left(a^2+3\right)^2}{4a}$$

[1,25 puntos]

b) ¿En qué punto *P* el área del triángulo es mínima? Calcule este valor mínimo. [1,25 puntos]

La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada.

$$f(x)=\frac{1}{x^2}+1=x^{-2}+1\Rightarrow f\,'(x)=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^3}$$

En un punto $P = (a, f(a))$ del primer cuadrante la ecuación de la recta tangente es:

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=\frac{1}{a^2}+1 \\ f\,'(a)=\frac{-2}{a^3} \end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{1}{a^2}-1=\frac{-2}{a^3}\left(x-a\right)\Rightarrow y=\frac{-2}{a^3}x+\frac{2a}{a^3}+\frac{1}{a^2}+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{-2}{a^3}x+\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a^2}+1\Rightarrow y=\frac{-2}{a^3}x+\frac{3}{a^2}+1$$

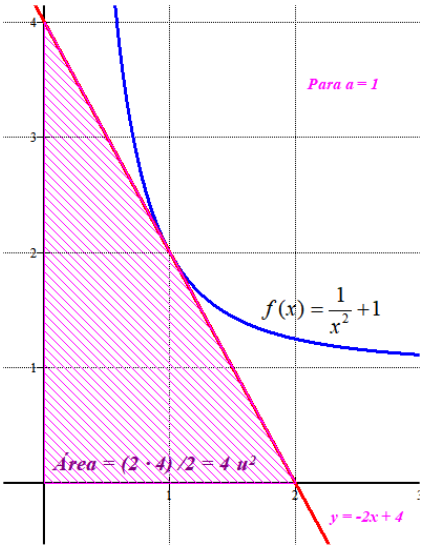
El triángulo que forma con los ejes de coordenadas tiene de vértices O(0, 0), A(0,y), B(x, 0) Averiguamos esas coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{-2}{a^3}x+\frac{3}{a^2}+1 \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{-2}{a^3}x+\frac{3}{a^2}+1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+3a+a^3=0\Rightarrow -2x=-a^3-3a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{a^3+3a}{2}$$

$$B\left(\frac{a^3+3a}{2},0\right)$$



$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{-2}{a^3}x+\frac{3}{a^2}+1 \\ x=0 \end{array}\right\}\Rightarrow y=\frac{3}{a^2}+1=\frac{3+a^2}{a^2}\Rightarrow A\left(0,\frac{3+a^2}{a^2}\right)$$

El área del triángulo es (Base · altura) / 2.

$$Área = \frac{\left(\frac{3+a^2}{a^2}\right)\left(\frac{a^3+3a}{2}\right)}{2} = \frac{a\left(\frac{3+a^2}{a^2}\right)\left(\frac{a^2+3}{2}\right)}{2} =$$

$$= \frac{\frac{\left(a^2+3\right)a\left(a^2+3\right)}{2a^2}}{2} = \frac{a\left(a^2+3\right)^2}{4a^2} = \frac{\left(a^2+3\right)^2}{4a} = g(a)$$

b) Para hallar el valor mínimo del área derivamos la función y la igualamos a cero.

$$g(a) = \frac{\left(a^2+3\right)^2}{4a} \Rightarrow g'(a) = \frac{2\left(a^2+3\right)2a(4a) - 4\left(a^2+3\right)^2}{(4a)^2} = \frac{\left(a^2+3\right)\left[4a(4a) - 4\left(a^2+3\right)\right]}{(4a)^2}$$

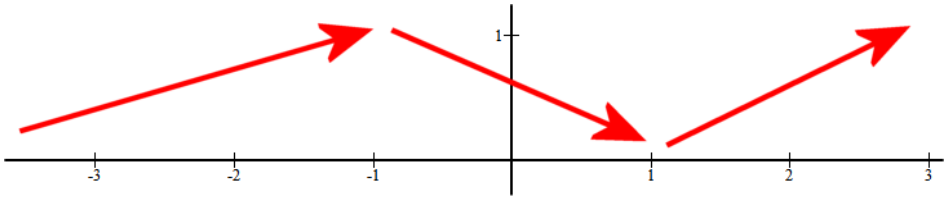
$$g'(a) = \frac{\left(a^2+3\right)\left[16a^2 - 4a^2 - 12\right]}{(4a)^2} = \frac{\left(a^2+3\right)\left[12a^2 - 12\right]}{(4a)^2}$$

$$g'(a) = 0 \Rightarrow \frac{\left(a^2+3\right)\left[12a^2-12\right]}{(4a)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2+3=0 \Rightarrow a = \sqrt{-3}\text{; No es posible.} \\ 12a^2-12=0 \Rightarrow a^2-1=0 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Veamos la monotonía de la función antes de –1, entre –1 y 1, después de 1.

- En $(-\infty,-1)$ tomamos $a=-2$ y la derivada vale
  $g'(-2) = \frac{\left((-2)^2+3\right)\left[12(-2)^2-12\right]}{\left(4(-2)\right)^2} = \frac{7\cdot 36}{64} > 0$. La función (el área) crece en $(-\infty,-1)$.
- En $(-1,1)$ tomamos $a=0$ y la derivada vale
  $g'(0.5) = \frac{\left(0.5^2+3\right)\left[12\cdot 0.25-12\right]}{(2)^2} = \frac{3.25\cdot(-9)}{4} < 0$. La función (el área) decrece en $(-1,1)$
- En $(1,+\infty)$ tomamos $a=2$ y la derivada vale $g'(2) = \frac{(4+3)[48-12]}{(8)^2} > 0$. La función (el área) crece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



El área es mínima en $a = 1$, siendo el valor del área $g(1) = \frac{\left(1^2+3\right)^2}{4} = \frac{16}{4} = 4\,u^2$.

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real *k*:

$$\begin{cases} 5x+y+4z=19 \\ kx+2y+8z=28 \\ 5x+y-kz=23+k \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *k*. [1,25 puntos]
b) Resuelva, si es posible, el sistema para el caso $k = 0$. [1,25 puntos]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ k & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -k \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ k & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -k \end{vmatrix}=-10k+40+4k-40+k^2-40=k^2-6k-40\,.$$

Igualamos a cero el determinante.

$$|A|=0 \Rightarrow k^2-6k-40=0 \Rightarrow k=\frac{6\pm\sqrt{36+160}}{2}=\frac{6\pm 14}{2}=\begin{cases} \frac{6+14}{2}=10=k \\ \frac{6-14}{2}=-4=k \end{cases}$$

Hay tres casos distintos a estudiar.

CASO 1. $k\neq 10$ *y* $k\neq -4$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. **El sistema es compatible determinado**.

CASO 2. $k=10$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
¿El rango de A es 2?

$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 10 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -10 \end{pmatrix}$ Las columnas 1ª y 2ª son proporcionales, por lo que consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna 1ª y la fila 1ª → $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -10 \end{vmatrix}=-20-8=-28\neq 0$.

El rango de A es 2.

Veamos el rango de $A/B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 10 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -10 & 33 \end{pmatrix}$ La columna 1ª y 2ª son proporcionales, consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª → $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 19 \\ 2 & 8 & 28 \\ 1 & -10 & 33 \end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 19 \\ 2 & 8 & 28 \\ 1 & -10 & 33 \end{vmatrix} = \cancel{244} + 112 - 380 - 152 - \cancel{244} + 280 = 392 - 532 = -140 \neq 0$

El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B. **El sistema es incompatible**.

CASO 3. $k = -4$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ La fila 1ª y la 3ª son iguales, la columna 2ª y la 3ª son proporcionales, por lo que consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 1ª y la columna 3ª → $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 10 = -14 \neq 0$. El rango de A es 2.

Veamos el rango de $A/B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ -4 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & 4 & 19 \end{pmatrix}$

La columna 2ª y 3ª son proporcionales, consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª → $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 19 \\ -4 & 2 & 28 \\ 5 & 1 & 19 \end{pmatrix}$ con determinante nulo, pues fila 1ª y 3ª son iguales.

El rango de A/B no es 3. El rango de A/B es 2.

Rango de A = Rango de A/B = 2 < Número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

b) Para $k = 0$ el sistema es compatible determinado pues pertenece al caso 1 estudiado.

Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ 2y + 8z = 28 \\ 5x + y = 23 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ 5x + y + 4z = 19 \\ -5x - y = -23 \\ \hline 4z = -4 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ 2y + 8z = 28 \\ 4z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ 2y + 8z = 28 \\ \boxed{z = -1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + y - 4 = 19 \\ 2y - 8 = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + y = 23 \\ 2y = 36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + y = 23 \\ \boxed{y = 18} \end{cases} \Rightarrow 5x + 18 = 23 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

La solución del sistema es $\boxed{x = 1; \quad y = 18; \quad z = -1}$.

3. *a*) Calcule la ecuación general del plano π que pasa por el punto (8, 8, 8) y tiene como vectores directores $u=(1,2,-3)$ i $v=(-1,0,3)$. [1,25 puntos]

b) Determine el valor del parámetro *a* para que el punto (1, –5, *a*) pertenezca al plano π y calcule la ecuación paramétrica de la recta que pasa por este punto y es perpendicular al plano π. [1,25 puntos]

a) Hallamos la ecuación del plano pedido.

$$\left.\begin{array}{l} P(8,8,8)\in\pi \\ u=(1,2,-3) \\ v=(-1,0,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi\equiv \begin{vmatrix} x-8 & y-8 & z-8 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(x-8)+3(y-8)+2(z-8)-3(y-8)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x-48+3y-24+2z-16-3y+24=0 \Rightarrow 6x+2z-64=0 \Rightarrow \boxed{\pi\equiv 3x+z-32=0}$$

b) El punto (1, –5, *a*) pertenezca al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} (1,\ -5,a)\in\pi \\ \pi\equiv 3x+z-32=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3+a-32=0 \Rightarrow \boxed{a=29}$$

La recta que es perpendicular al plano $\pi\equiv 3x+z-32=0$ tiene como vector director el normal del plano → $\vec{v}=\vec{n}=(3,0,1)$ y además pasa por (1, –5, 29) .

$$\left.\begin{array}{l} (1,-5,29)\in r \\ \vec{v}=\vec{n}=(3,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} r\equiv \begin{array}{l} x=1+3\lambda \\ y=-5 \\ z=29+\lambda \end{array} \end{array}\right\} \text{ Siendo } \lambda\in\mathbb{R}}$$

4. Considere la función $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x}$, donde a y *b* son dos parámetros reales. Calcule los valores de *a* y *b* de manera que la función *f*(*x*) tenga una asíntota oblicua de pendiente 1 y un mínimo en el punto de la gráfica de abscisa *x* = 2. [2,5 puntos]

Una asíntota oblicua de pendiente 1 significa que:

$$m=1=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+b}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{x^2}=a\Rightarrow \boxed{a=1}$$

Un mínimo en *x* = 2 significa que *f ´(2) = 0*.

$$f(x)=\frac{x^2+b}{x}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{2x\cdot x-\left(x^2+b\right)}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-b}{x^2}=\frac{x^2-b}{x^2}$$

$$f\,'(2)=0\Rightarrow\frac{2^2-b}{2^2}=0\Rightarrow 4-b=0\Rightarrow\boxed{b=4}$$

Además, debería ser *f ´´ (1) > 0*.

$$f\,'(x)=\frac{x^2-4}{x^2}\Rightarrow f\,''(x)=\frac{2x\cdot x^2-2x\left(x^2-4\right)}{x^4}\Rightarrow f\,''(1)=\frac{2-2\left(1^2-4\right)}{1^4}=8>0$$

Se cumple que *x* = 2 es un mínimo de la función.

Los valores buscados son *a = 1* y *b = 4*.

5. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -4\end{pmatrix}$.

a) Encuentre la matriz **X** que satisface la ecuación $AX=I-3X$, donde I **e**s la matriz identidad de orden 2. [1,25 puntos]

b) Compruebe que la matriz **X** es invertible y calcule la matriz inversa. [1,25 puntos]

a) Sea $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, lo sustituimos en la ecuación y resolvemos.

$$AX=I-3X\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ -3a-4c & -3b-4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 3\\ -9 & -12\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ -3a-4c & -3b-4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 9 & 13\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}a+c=-2\\ b+d=-3\\ -3a-4c=9\\ -3b-4d=13\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}a+c=-2\\ -3a-4c=9\\ b+d=-3\\ -3b-4d=13\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}a=-2-c\\ -3a-4c=9\\ b=-3-d\\ -3b-4d=13\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}-3(-2-c)-4c=9\\ -3(-3-d)-4d=13\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}6+3c-4c=9\\ 9+3d-4d=13\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}6-c=9\\ 9-d=13\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}\boxed{-3=c}\\ \boxed{-4=d}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\boxed{a=-2+3=1}\\ \boxed{b=-3+4=1}\end{matrix}\right\}$$

La matriz buscada es $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -4\end{pmatrix}$

b) Para que sea invertible su determinante debe ser no nulo.

$|X|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & -4\end{vmatrix}=-4+3=-1\neq 0$. La matriz X es invertible. Calculamos su inversa.

$$X^{-1}=\frac{Adj\left(X^t\right)}{|X|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -4\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$$

6. Considere la función $f(x)=x^3$.

a) Calcule en qué punto del tercer cuadrante la recta tangente a $y = f(x)$ es paralela a la recta $3x-y=4$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en este punto y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función y las dos rectas. [1,25 puntos]

b) Calcule el área de la región delimitada por $y = f(x)$ y la recta $y=3x+2$. [1,25 puntos]

a) La recta $3x-y=4$ tiene pendiente 3, pues despejando queda $y=3x-4$.

Si la tangente es paralela debe tener la misma pendiente y teniendo en cuenta que la pendiente de la recta tangente es la derivada en dicho punto, tenemos la igualdad:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3 \Rightarrow f\,'(x)=3x^2 \\ pendiente=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

Como el punto es del tercer cuadrante tiene la coordenada x e y negativas. Nos quedamos con la opción $x=-1$.

Hallamos $f(-1)$ → $f(-1)=(-1)^3=-1$

El punto es P(–1, –1).

La recta tangente es $y-(-1)=3(x-(-1)) \Rightarrow y+1=3x+3 \Rightarrow \boxed{y=3x+2}$

Como el dominio de la función es todo R, al ser una función polinómica, basta con hacer una tabla de valores para hacer ese dibujo aproximado de la gráfica.

$f(x)=x^3$

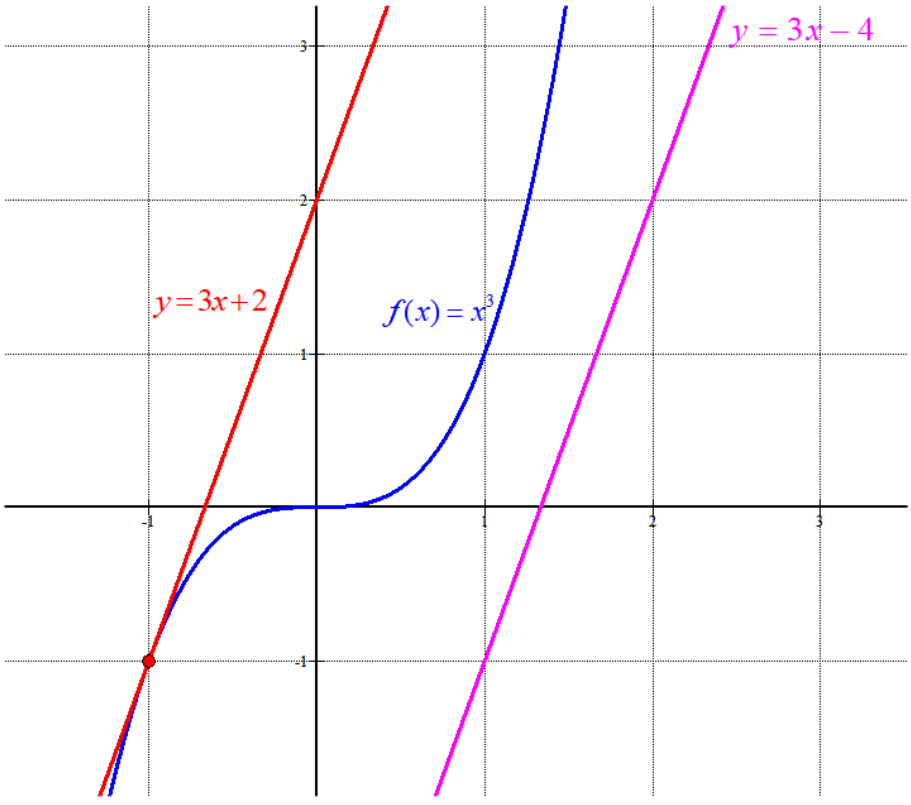
x	$y=x^3$
–2	–8
–1	–1
0	0
1	1
2	8

$3x-y=4$

x	$3x-4=y$
0	–4
2	2

$y=3x+2$

x	$y=3x+2$
–1	–1
0	2



b) Aunque se aprecia en el dibujo de la gráfica que se cortan en $x = -1$ y en $x = 2$, veamos donde se cortan la recta tangente y la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3 \\ y=3x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3=3x+2 \Rightarrow x^3-3x-2=0$$

Con el método de Ruffini.

$$x^3-3x-2=0$$

	1	0	−3	−2
−1		−1	1	2
	1	−1	−2	0

$\rightarrow \boxed{x=-1}$ es raíz de la ecuación

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} =\dfrac{1+3}{2}=\boxed{2=x} \\ =\dfrac{1-3}{2}=\boxed{-1=x} \end{cases}$$

Se cortan en $x=-1$ y en $x=2$.

El área pedida es la integral definida entre –1 y 2 de la recta menos la función.

$$Área=\int_{-1}^{2} 3x+2-x^3 dx=\left[3\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2}=$$

$$=\left[3\frac{2^2}{2}+4-\frac{2^4}{4}\right]-\left[3\frac{(-1)^2}{2}+2(-1)-\frac{(-1)^4}{4}\right]=$$

$$=6+4-4-\frac{3}{2}+2+\frac{1}{4}=8-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{32-6+1}{4}=\boxed{\frac{27}{4}=6,75\,u^2}$$

PAU julio (serie 3) 2020

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Sèrie 3

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

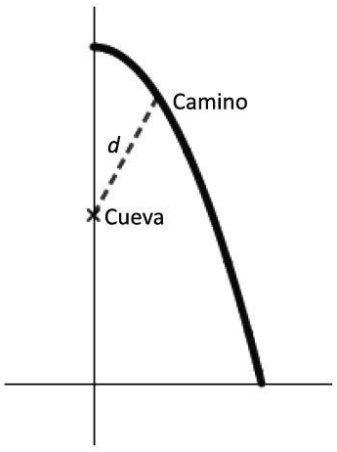
Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & a & 1\end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Determine el rango de la matriz $\boldsymbol{A}$ en función del parámetro a.
[1,25 puntos]

b) Compruebe que $\det\left(A^2+A\right)=0$
[1,25 puntos]

2. Se han encontrado unas pinturas rupestres en una cueva situada en una zona muy pedregosa. Existe un camino que bordea parcialmente la cueva formado por el arco de curva $y=4-x^2$ de extremos (0, 4) y (2, 0). La cueva está situada en el punto de coordenadas (0, 2), tal como se muestra en la figura, y quiere habilitarse un acceso rectilíneo d desde el camino a la cueva que sea lo más corto posible.



a) Identifique en la gráfica de la figura las coordenadas de la cueva y del punto del camino desde el cual quiere habilitarse el acceso. Compruebe que la función $f\left(x\right)=\sqrt{x^4-3x^2+4}$ calcula la distancia desde cada punto del camino a la cueva.
[1,25 puntos]

b) Calcule las coordenadas del punto del camino que se halla más próximo a la cueva y diga cuál será la longitud del acceso d.
[1,25 puntos]

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a.
[1,25 puntos]

b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.
[1,25 puntos]

4. Sea la función $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$, donde ln indica el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$.

a) Calcule las coordenadas del punto de la curva $y = f(x)$ en que la recta tangente a la curva en ese punto es horizontal. Estudie si este punto es un extremo relativo y clasifíquelo.
[1,25 puntos]

b) Calcule el área del recinto delimitado por la curva $y = f(x)$, las rectas verticales $x = 1$ y $x = e$ y el eje de abscisas.
[1,25 puntos]

5. Considere la recta r de ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ y la recta s que pasa por el punto $P = (2, -5, 1)$ y que tiene por vector director $(-1, 0, -1)$.

a) Estudie la posición relativa de las rectas r y s.
[1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación general del plano que es paralelo a la recta r y contiene la recta s.
[1,25 puntos]

6. Una empresa de cerámica quiere poner a la venta un azulejo cuadrado de 20 cm de lado pintado a dos colores, de manera que la superficie de cada color sea la misma y que si se ponen los azulejos uno al lado de otro se vea un dibujo continuo (figura 1).

Figura 1

Figura 2

Para ello, la empresa utiliza en cada azulejo la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ encuadrada entre los puntos de coordenadas (0, 0), (0, 2), (2, 0) y (2, 2), tal como se muestra en la figura 2, y usa como unidad de medida el decímetro.

a) Justifique que, efectivamente, esta función permite juntar los azulejos de manera continua y derivable.
[1,25 puntos]

b) Justifique que esta función divide el cuadrado citado en dos partes que tienen la misma superficie.
[1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & a & 1\end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Determine el rango de la matriz ***A*** en función del parámetro a. [1,25 puntos]

b) Compruebe que $\det\left(A^2+A\right)=0$. [1,25 puntos]

a) La matriz A es una matriz cuadrada de orden 3.

Para que su rango sea 3 su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & a & 1\end{vmatrix}=-1+0+2a-0-0-a=a-1$$

El determinante de A se anula para $a=1$. Analizamos dos situaciones distintas.

CASO 1. Si $a\neq 1$.

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3.

CASO 2. Si $a=1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la tercera fila y la tercera columna → $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1-0=-1\neq 0$.

El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $a\neq 1$ el rango de A es 3 y si $a=1$ el rango de A es 2.

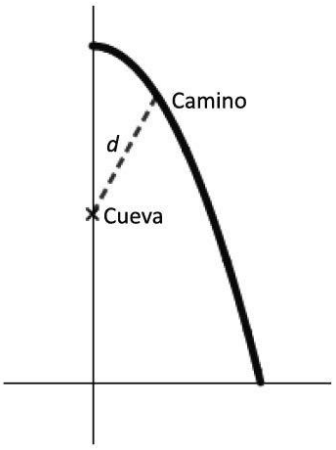
b) Calculamos la expresión de A^2+A.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & a & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0 & 0+0+2a & 2+0+2\\ 1-1+0 & 0+1+a & 2-1+1\\ 0+a+0 & 0-a+a & 0+a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2a & 4\\ 0 & 1+a & 2\\ a & 0 & 1+a\end{pmatrix}$$

$$A^2+A=\begin{pmatrix}1 & 2a & 4\\ 0 & 1+a & 2\\ a & 0 & 1+a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & a & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2a & 6\\ 1 & a & 3\\ a & a & 2+a\end{pmatrix}$$

En esta matriz la primera fila es el doble de la segunda fila por lo que su determinante es nulo: $\det\left(A^2+A\right)=0$.

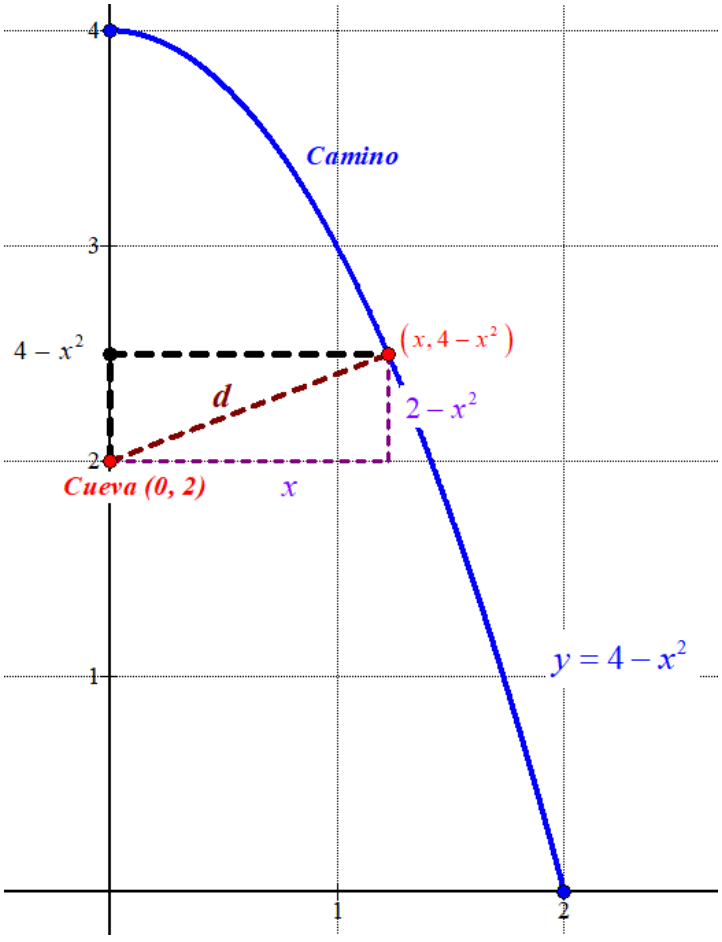
2. Se han encontrado unas pinturas rupestres en una cueva situada en una zona muy pedregosa. Existe un camino que bordea parcialmente la cueva formado por el arco de curva $y = 4 - x^2$ de extremos (0, 4) y (2, 0). La cueva está situada en el punto de coordenadas (0, 2), tal como se muestra en la figura, y quiere habilitarse un acceso rectilíneo *d* desde el camino a la cueva que sea lo más corto posible.



a) Identifique en la gráfica de la figura las coordenadas de la cueva y del punto del camino desde el cual quiere habilitarse el acceso. Compruebe que la función $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ calcula la distancia desde cada punto del camino a la cueva. [1,25 puntos]

b) Calcule las coordenadas del punto del camino que se halla más próximo a la cueva y diga cuál será la longitud del acceso *d*. [1,25 puntos]

a) Un punto cualquiera del camino pertenece a la gráfica de la función $y = 4 - x^2$ y tiene coordenadas $(x, 4 - x^2)$. Le añadimos al dibujo de partida un triángulo rectángulo de catetos *x* y $4 - x^2 - 2 = 2 - x^2$. La situación planteada es la del dibujo.



Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos *x* y $2 - x^2$ para poder determinar la expresión de la distancia *d* (hipotenusa) en función de *x*.

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \left(2 - x^2\right)^2} = \sqrt{x^2 + 4 + x^4 - 4x^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}, \text{ siendo } 0 \le x \le 2$$

b) Derivamos la función distancia y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$d(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}\Rightarrow d'(x)=\frac{4x^3-6x}{2\sqrt{x^4-3x^2+4}}=\frac{2x^3-3x}{\sqrt{x^4-3x^2-4x+8}}$$

$$d'(x)=0\Rightarrow\frac{2x^3-3x}{\sqrt{x^4-3x^2-4x+8}}=0\Rightarrow 2x^3-3x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(2x^2-3\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ 2x^2-3=0\rightarrow 2x^2=3\rightarrow x^2=\frac{3}{2}\rightarrow\boxed{x=\sqrt{\frac{3}{2}}}\end{cases}$$

Solo consideramos el valor positivo de la raíz, pues el valor negativo no tiene sentido en esta situación.
Nos surgen dos puntos críticos de la función distancia. El intervalo de definición de la función $[0,2]$ lo dividimos en dos partes y estudiamos el signo de la derivada de 0 a $\sqrt{\frac{3}{2}}$ y de $\sqrt{\frac{3}{2}}$ a 2.

- En el intervalo $\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale

  $d'(1)=\frac{2\cdot 1^3-3\cdot 1}{\sqrt{1^4-3\cdot 1^2-4\cdot 1+8}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}<0$. La función decrece en $\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

- En el intervalo $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},2\right]$ tomamos $x=2$ y la derivada vale

  $d'(2)=\frac{2\cdot 2^3-3\cdot 2}{\sqrt{2^4-3\cdot 2^2-4\cdot 2+8}}=5>0$. La función crece en $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},2\right]$.

La función decrece en $\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ y crece en $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},2\right]$. La función distancia tiene un mínimo en $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$. Para este valor $y=4-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

El camino rectilíneo más corto comienza en el punto del camino de coordenadas $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right)$.

Desde este punto la distancia a la cueva tiene un valor de

$$d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4-3\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+4}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+4}=\frac{\sqrt{7}}{2}\simeq 1.87$$

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax+y=a \\ x+ay+z=5 \\ x+2y+z=5 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a. [1,25 puntos]
b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$. [1,25 puntos]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=a^2+1+0-0-1-2a=a^2-2a=a(a-2).$$

Igualamos a cero el determinante.

$$|A|=0 \Rightarrow a(a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ a-2=0 \rightarrow \boxed{a=2} \end{cases}$$

Hay tres casos distintos a estudiar.

CASO 1. $a \neq 0$ *y* $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. La columna 1ª y 3ª son iguales, por lo que consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna 1ª y la fila 1ª → $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=0-2=-2\neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. La columna 1ª y 3ª son iguales, consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª → $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=5+0+0-0-0-5=0$. El rango de A/B no es 3, por lo que el rango de A/B es 2, como el de la matriz A.

Rango de A = 2 = Rango de A/B < 3= Nº incógnitas.
El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $a=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}$. La fila 2ª y la 3ª son iguales, por lo que consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 3ª → $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=4-1=3\neq 0$. El rango de A es 2.

Determinamos el rango de $A/B=\begin{pmatrix}2&1&0&2\\1&2&1&5\\1&2&1&5\end{pmatrix}$

La fila 2ª y 3ª son iguales, por lo que el rango de A/B no puede ser 3. El rango de A/B es 2 como el rango de la matriz A.
Rango de A = Rango de A/B = 2 < 3 = Número de incógnitas.
El sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo: Si $a\neq 0$ *y* $a\neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y si $a=0$ o $a=2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a=2$ el sistema es compatible indeterminado (caso 3). Lo resolvemos.

$$\begin{cases}2x+y=2\\x+2y+z=5\\x+2y+z=5\end{cases}\Rightarrow\{\text{Ecuación 2ª = Ecuación 3ª}\}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=2\\x+2y+z=5\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\boxed{y=2-2x}\\x+2y+z=5\end{cases}\Rightarrow x+2(2-2x)+z=5\Rightarrow x+4-4x+z=5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x+z=1\Rightarrow\boxed{z=1+3x}\Rightarrow\begin{cases}x=\lambda\\y=2-2\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\z=1+3\lambda\end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases}x=\lambda\\y=2-2\lambda\\z=1+3\lambda\end{cases}$, siendo λ cualquier número real.

4. Sea la función $f(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln(x)$, donde ln indica el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$.

a) Calcule las coordenadas del punto de la curva $y = f(x)$ en que la recta tangente a la curva en ese punto es horizontal. Estudie si este punto es un extremo relativo y clasifíquelo.
[1,25 puntos]

b) Calcule el área del recinto delimitado por la curva $y = f(x)$, las rectas verticales $x=1$ y $x=e$ y el eje de abscisas.
[1,25 puntos]

a) Si la recta tangente a la curva es horizontal significa que la pendiente es 0 y esto significa que la derivada de la función se anula → $f'(x)=0$.

$$f(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{x^2}\cdot\ln(x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{-\ln(x)}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-\ln(x)}{x^2}=0\Rightarrow 1-\ln(x)=0\Rightarrow\ln(x)=1\Rightarrow\boxed{x=e}$$

Para $x=e$ la recta tangente a la gráfica de la función es horizontal.

Como $f(e)=\frac{1}{e}\cdot\ln(e)=\frac{1}{e}$ el punto tiene coordenadas $\left(e,\frac{1}{e}\right)$.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=e$ para averiguar si es máximo o mínimo.

- Antes de $x=e$ consideramos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{1-\ln(2)}{2^2}=0.077>0$. La función crece antes de $x=e$.
- Después de $x=e$ consideramos $x=3$ y la derivada vale $f'(3)=\frac{1-\ln(3)}{3^2}=-0.011<0$. La función decrece después de $x=e$.

Como crece antes y decrece después la función tiene un máximo relativo en $x=e$.

b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln(x)=\frac{\ln(x)}{x} \\ Eje\,OX\rightarrow y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\ln(x)}{x}=0\Rightarrow\ln(x)=0\Rightarrow\boxed{x=1}$$

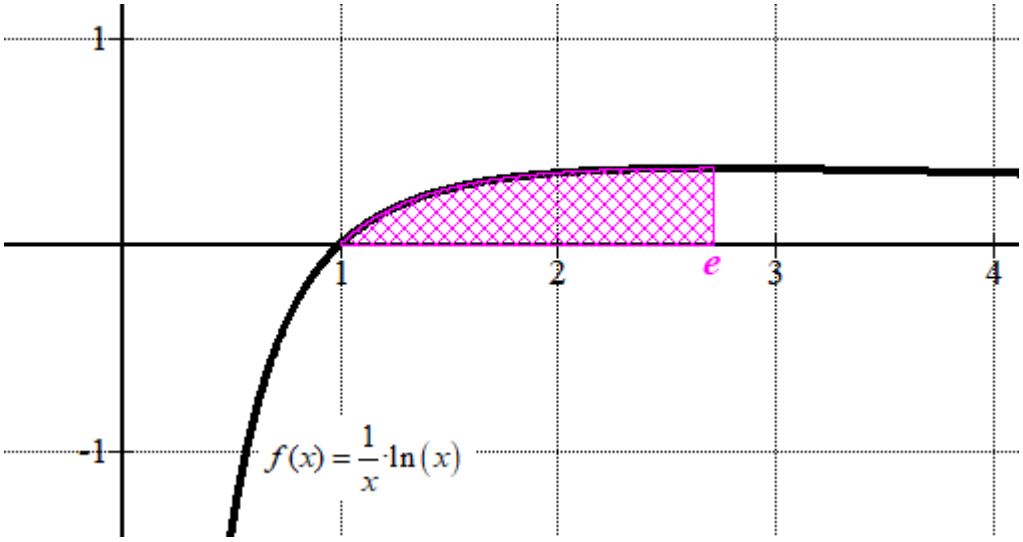
Como este valor está en el extremo del intervalo $[1,e]$ y la función es positiva el área que queremos calcular es el valor de la integral definida de la función entre 1 y e.

$$Área=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\frac{1}{x}\cdot\ln(x)\,dx=\ldots$$

$$\int\frac{1}{x}\cdot\ln(x)\,dx=\int\ln(x)\frac{1}{x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \ln(x)=t\rightarrow\frac{1}{x}dx=dt\end{array}\right\}=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}=\frac{\ln^2(x)}{2}+K$$

$$\ldots = \left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e = \frac{\ln^2(e)}{2} - \frac{\ln^2(1)}{2} = \frac{1}{2} - 0 = 0.5\ u^2$$

Hacemos un dibujo para comprobar la solución.



5. Considere la recta *r* de ecuación $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$ y la recta *s* que pasa por el punto $P=(2,-5,1)$ y que tiene por vector director $(-1,0,-1)$.

a) Estudie la posición relativa de las rectas *r* y *s*. [1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación general del plano que es paralelo a la recta *r* y contiene la recta *s*. [1,25 puntos]

a) Hallamos un vector director de la recta *r*.

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-0}{1}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}Q_r(1,3,0)\\ \vec{v_r}=(2,-2,1)\end{array}\right\}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(2,-2,1)\\ \vec{u_s}=(-1,0,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{2}{-1}\neq\frac{-2}{0}\neq\frac{1}{-1}$$

Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $\left[\vec{v_r},\vec{u_s},\overrightarrow{PQ_r}\right]$. Si es nulo las rectas se cortan (existe un plano que las contiene) y si es distinto de cero las rectas se cruzan (no existe plano que las contenga).

$$\left.\begin{array}{l}P(2,-5,1)\in s\\ Q_r(1,3,0)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{PQ_r}=(1,3,0)-(2,-5,1)=(-1,8,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ_r}=(-1,8,-1)\\ \vec{v_r}=(2,-2,1)\\ \vec{u_s}=(-1,0,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\vec{v_r},\vec{u_s},\overrightarrow{PQ_r}\right]=\begin{vmatrix}2&-2&1\\-1&0&-1\\-1&8&-1\end{vmatrix}=-2-2-8-0+2+16=6\neq 0$$

Al ser distinto de cero las rectas se cruzan.

b) El plano π que es paralelo a la recta *r* y contiene la recta *s* tiene como vectores directores los de ambas rectas y contiene el punto $P(2,-5,1)$ de la recta *s*.

$$\left.\begin{array}{l}P(2,-5,1)\in\pi\\ \vec{u}=\vec{u_s}=(-1,0,-1)\\ \vec{v}=\vec{v_r}=(2,-2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix}x-2&y+5&z-1\\-1&0&-1\\2&-2&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-2(y+5)+2(z-1)+y+5-2(x-2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-2y-10+2z-2+y+5-2x+4=0\Rightarrow\boxed{\pi:-2x-y+2z-3=0}$$

La ecuación general del plano que es paralelo a la recta *r* y contiene la recta *s* es $\pi:-2x-y+2z-3=0$.

6. Una empresa de cerámica quiere poner a la venta un azulejo cuadrado de 20 cm de lado pintado a dos colores, de manera que la superficie de cada color sea la misma y que si se ponen los azulejos uno al lado de otro se vea un dibujo continuo (figura 1).

Figura 1

Figura 2

Para ello, la empresa utiliza en cada azulejo la función $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ encuadrada entre los puntos de coordenadas (0, 0), (0, 2), (2, 0) y (2, 2), tal como se muestra en la figura 2, y usa como unidad de medida el decímetro.

a) Justifique que, efectivamente, esta función permite juntar los azulejos de manera continua y derivable. [1,25 puntos]

b) Justifique que esta función divide el cuadrado citado en dos partes que tienen la misma superficie. [1,25 puntos]

a) Sabemos que, al ser un polinomio, la función *f(x)* es continua en toda la recta real, y por tanto la continuidad gráfica de las juntas queda probada si se cumple que $f(0) = f(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^3-3\cdot 0^2+2\cdot 0+1=1 \\ f(2)=2^3-3\cdot 2^2+2\cdot 2+1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=f(2)=1$$

De forma análoga, *f(x)* es derivable en toda la recta real y la junta entre dos azulejos será derivable siempre que la pendiente a la que se llegue, $f'(2)$, sea la misma que la pendiente con la que salimos, $f'(0)$.

$$f(x)=x^3-3x^2+2x+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(2)=3\cdot 2^2-6\cdot 2+2=2 \\ f'(0)=3\cdot 0^2-6\cdot 0+2=2 \end{array}\right. \Rightarrow f'(2)=f'(0)=2$$

b) El azulejo tiene una superficie total de $2 \cdot 2 = 4$ decímetros cuadrados.
Calculamos el área de la parte inferior (sombreada) del azulejo.

$$\text{Área zona sombreada} = \int_0^2 x^3-3x^2+2x+1dx = \left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2+x\right]_0^2 =$$

$$= \left[\frac{2^4}{4}-2^3+2^2+2\right]-\left[\frac{0^4}{4}-0^3+0^2+0\right] = 2\,dm^2$$

El área de la zona inferior sombreada del azulejo es de 2 dm^2 y el área total del azulejo es de 4 dm^2, por lo que la parte superior (blanca) tiene un área de $4 - 2 = 2$ dm^2.
La función divide el cuadrado (4 dm^2) en dos partes que tienen la misma superficie (2 dm^2).

PAU septiembre 2019

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Convocatòria 2019

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 5

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Considera las rectas $y = x$ e $y = 2x$, y la parábola $y = x^2$.

a) Calcule los puntos de intersección entre las gráficas de las diferentes funciones y haga un esbozo de la región delimitada por las gráficas.
[1 punto]

b) Calcule el área de la región del apartado anterior.
[1 punto]

2. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Encuentre los valores del parámetro a para el que la matriz es invertible.
[1 punto]

b) Discuta la posición relativa de los planos $\pi_1 : x + (a-1)z = 0$, $\pi_2 : x + ay + z = 1$ y $\pi_3 : 4x + 3ay + z = 3$ en función de los valores del parámetro a.
[1 punto]

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$.
[1 punto]

b) Justifique que si el producto de dos matrices cuadradas no nulas tiene como resultado la matriz nula, entonces el determinante de alguna de las dos matrices ha de ser cero.
[1 punto]

4. Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en aquellos puntos en que la recta tangente es horizontal.
[1 punto]

b) Calcule las coordenadas del punto de la gráfica de la función $f(x)$ en que la pendiente de la recta tangente es máxima.

[1 punto]

5. Sean *P*, *Q* y *R* los puntos de intersección del plano de ecuación $x + 4y + 2z = 4$ con los tres ejes de coordenadas *OX*, *OY* y *OZ*, respectivamente.

a) Calcule los puntos *P*, *Q y R*, y el perímetro del triángulo de vértices *P*, *Q y R*.
[1 punto]

b) Calcule el área del triángulo de vértices *P*, *Q y R*.
[1 punto]

NOTA: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores ***v*** y ***w*** puede utilizar la expresión $S = \frac{1}{2}\|v \times w\|$, donde $v \times w$ es el producto vectorial de los vectores ***v*** y ***w***.

6. Considere la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

a) Calcule el dominio de la función *f*, los puntos de corte de la gráfica de *f* con los ejes de coordenadas, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
[1 punto]

b) Calcule el área de la región del plano determinada por la gráfica de la función *f*, las rectas $x = 1$ y $x = e$, y el eje de abscisas.
[1 punto]

SOLUCIONES

1. Considere las rectas $y = x$ e $y = 2x$, y la parábola $y = x^2$.
a) Calcule los puntos de intersección entre les gráficas de las diferentes funciones y haga un esbozo de la región delimitada por las gráficas. [1 punto]
b) Calcule el área de la región del apartado anterior. [1 punto]

a) Resolvamos el sistema formado por cada par de funciones obteniendo dichos puntos de corte.

$$\left.\begin{matrix} y = x \\ y = 2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 2x \Rightarrow 0 = x \Rightarrow y = 0 \quad P(0,0)$$

$$\left.\begin{matrix} y = x^2 \\ y = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = 1 \end{cases} \quad P(0,0)\ y\ Q(1,1)$$

$$\left.\begin{matrix} y = x^2 \\ y = 2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 2 \rightarrow y = 4 \end{cases} \quad P(0,0)\ y\ R(2,4)$$

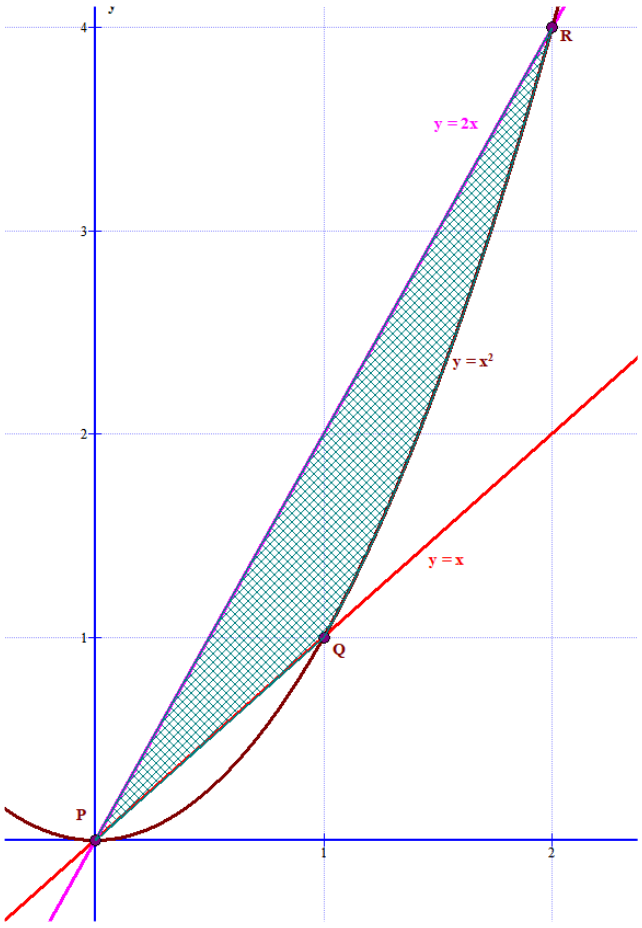
Los puntos son $P(0,0);\ Q(1,1)\ y\ R(2,4)$

Para dibujar las gráficas obtenemos una tabla para cada una de ellas:

x	$y = x$
0	0
1	1
2	2
–1	–1

x	$y = 2x$
0	0
1	2
2	4
–1	–2

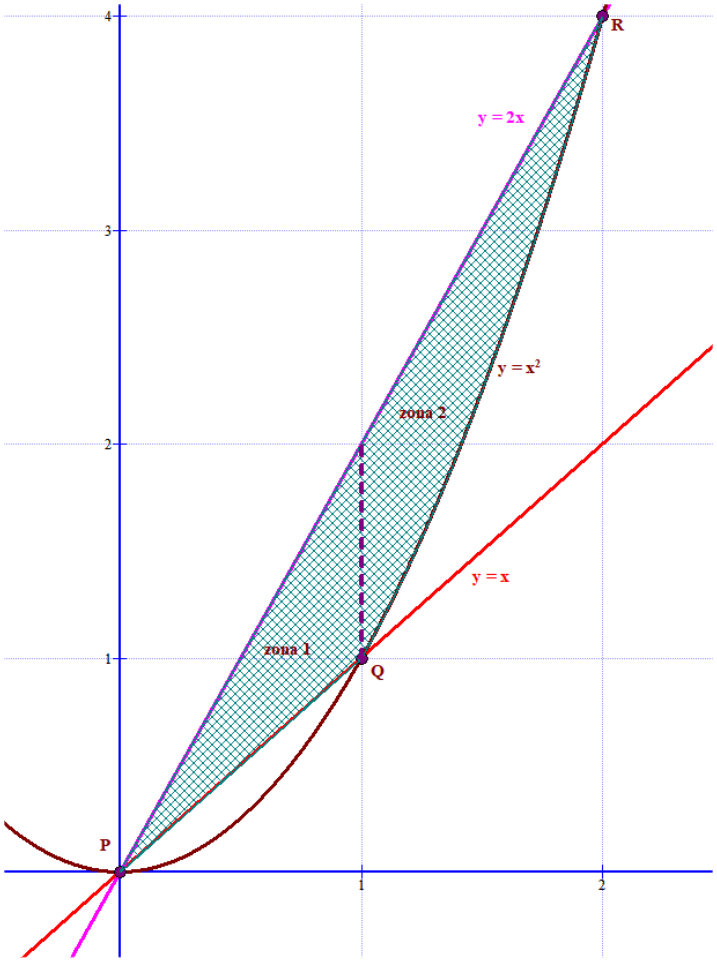
x	$y = x^2$
0	0
1	1
2	4
–1	1



b) Observando el dibujo el área debe ser aproximadamente 1 u^2.

Calculemos su valor exacto haciendo uso de integrales.

La dividimos en 2 partes:



Entre x = 0 y x = 1

$$área\ 1 = \int_0^1 2x - x dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{1^2}{2}\right] - \left[\frac{0^2}{2}\right] = \frac{1}{2}u^2$$

Entre x = 1 y x = 2

$$área\ 2 = \int_1^2 2x - x^2 dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left[2^2 - \frac{2^3}{3}\right] - \left[1^2 - \frac{1^3}{3}\right] = 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3}u^2$$

El área total es la suma de las dos: $\boxed{Área = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} = 1{,}17\ u^2}$

2. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & a-1\\ 1 & a & 1\\ 4 & 3a & 1\end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Encuentre los valores del parámetro a para el que la matriz es invertible. [1 punto]

b) Discuta la posición relativa de los planos $\pi_1: x+(a-1)z=0$, $\pi_2: x+ay+z=1$ y $\pi_3: 4x+3ay+z=3$ en función de los valores del parámetro a. [1 punto]

a) La matriz A es invertible si su determinante es no nulo. Averigüemos cuando ocurre esto.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & a-1\\ 1 & a & 1\\ 4 & 3a & 1\end{vmatrix}=a+3a^2-3a-4a^2+4a-3a=-a^2-a$$

$$|A|=0\Rightarrow -a^2-a=0\Rightarrow -a(a+1)=0\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ o\\ a=-1\end{cases}$$

A es invertible si el parámetro a es distinto de 0 y de –1.

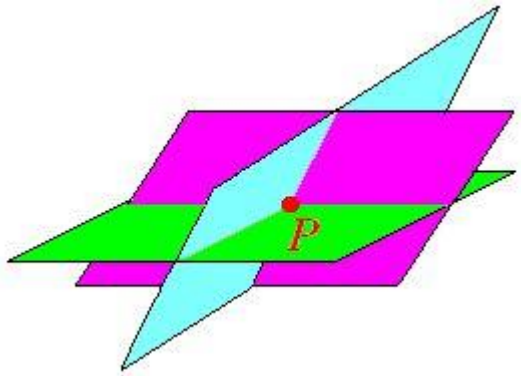
b) Para discutir la posición relativa de los planos nos planteamos el sistema formado por las 3 ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix}x+(a-1)z=0\\ x+ay+z=1\\ 4x+3ay+z=3\end{matrix}\right\}$$ con matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & a-1\\ 1 & a & 1\\ 4 & 3a & 1\end{pmatrix}$.

Hemos calculado su determinante y averiguado cuando se anula en el apartado anterior.
Se nos plantean tres posibilidades:

CASO 1. $a\neq 0$ *y* $a\neq -1$

En este caso el sistema tiene una única solución. Esta solución es el punto de corte de los 3 planos. Los 3 planos se cortan en un punto.

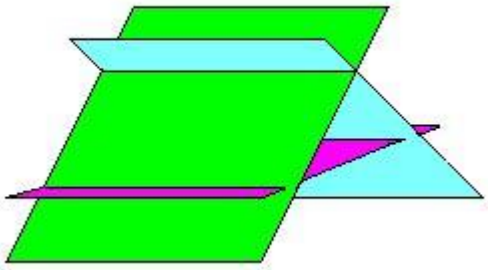


CASO 2. $a=0$

El sistema queda

$$\left.\begin{matrix}x-z=0\\ x+z=1\\ 4x+z=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x=z\\ x+z=1\\ 4x+z=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}z+z=1\\ 4z+z=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2z=1\\ 5z=3\end{matrix}\right\}$$

Este caso no tiene solución. Y observando los vectores normales, no son paralelos dos a dos los planos (no son proporcionales los vectores normales). Son planos que se cortan dos a dos.



CASO 3. $a=-1$

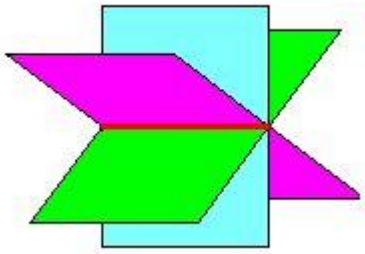
El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} x-2z=0 \\ x-y+z=1 \\ 4x-3y+z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2z \\ x-y+z=1 \\ 4x-3y+z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2z-y+z=1 \\ 8z-3y+z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y+3z=1 \\ -3y+9z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Las dos ecuaciones son iguales}\} \Rightarrow -y+3z=1 \Rightarrow y=3z-1$$

La solución es $\left.\begin{array}{l} x=2t \\ y=-1+3t \\ z=t \end{array}\right\}$

Este caso tiene infinitas soluciones, que forman una recta. Los planos se cortan en una recta.



3. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -6 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

a) Calcule $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$. [1 punto]

b) Justifique que si el producto de dos matrices cuadradas no nulas tiene como resultado la matriz nula, entonces el determinante de alguna de las dos matrices tiene que ser cero. [1 punto]

a) Determinamos la expresión de ambos productos.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2 & 2-2\\ -6+6 & -6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-6 & -1+3\\ 4-12 & -2+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -8 & 4\end{pmatrix}$$

b) Si $A\cdot B=0$ si tomamos determinantes

$$|A\cdot B|=|0|\Rightarrow |A|\cdot|B|=0\Rightarrow\begin{cases}|A|=0\\ o\\ |B|=0\end{cases}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que alguna de ellas, por ejemplo, A tiene determinante no nulo, entonces tiene inversa A^{-1}.

En la igualdad $A\cdot B=0$ podemos multiplicar por la matriz inversa A^{-1} obteniendo:

$A\cdot B=0\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot B=A^{-1}\cdot 0\Rightarrow I\cdot B=0\Rightarrow B=0$ y por lo tanto el determinante de B es nulo.

4. Considera la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en aquellos puntos en que la recta tangente es horizontal. [1 punto]

b) Calcule las coordenadas del punto de la gráfica de la función *f*(*x*) en que la pendiente de la recta tangente es máxima. [1 punto]

a) La ecuación de la recta tangente a *f(x)* en x = a es:

$$y-f(a)=f\,'(a)(x-a)$$

Siendo $f\,'(a)$ la pendiente de la recta tangente. Como nos piden que sea horizontal, la pendiente debe ser cero → $f\,'(a)=0$

Resolvamos esta situación:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$f\,'(x)=0\Rightarrow\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}=0\Rightarrow -2x=0\Rightarrow x=0$$

El valor de a es 0. Calculemos la ecuación de la recta tangente a *f(x)* en x = 0.

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\ f(0)=\dfrac{1}{1+0}=1\\ f\,'(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow y-1=0(x-0)\Rightarrow \boxed{y=1}$$

b) La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada. Para que esta derivada tenga un valor máximo, debe de ser su derivada nula, es decir, la derivada segunda de la función inicial debe ser cero.

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\Rightarrow f\,''(x)=\frac{-2\left(1+x^2\right)^2-(-2x)2\cdot 2x\left(1+x^2\right)}{\left(\left(1+x^2\right)^2\right)^2}$$

$$f\,''(x)=\frac{-2\left(1+x^2\right)^2+8x^2\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{\cancel{\left(1+x^2\right)}\left[-2\left(1+x^2\right)+8x^2\right]}{\left(1+x^2\right)^{\cancel{4}3}}$$

$$f\,''(x)=\frac{-2\left(1+x^2\right)+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{-2+6x^2}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Si igualamos a cero

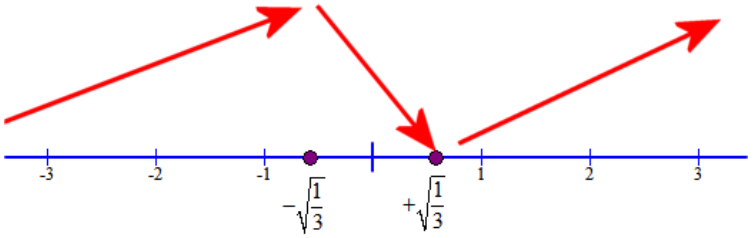
$$f\,''(x)=0\Rightarrow\frac{-2+6x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=0\Rightarrow -2+6x^2=0\Rightarrow 6x^2=2\Rightarrow x^2=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}}$$

Veamos cómo evoluciona la derivada valorando el signo de la derivada segunda.

- En $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ tomamos x = –1 la derivada segunda vale $f\,''(-1)=\dfrac{-2+6}{(1+1)^3}=\dfrac{4}{8}>0$. La derivada crece.

- En $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ tomamos x = 0 la derivada segunda vale $f''(0)=\frac{-2}{(1+0)^3}=-2<0$. La derivada decrece.
- En $\left(+\sqrt{\frac{1}{3}},+\infty\right)$ tomamos x = 1 la derivada segunda vale $f''(1)=\frac{-2+6}{(1+1)^3}=\frac{4}{8}>0$. La derivada crece.

La función sigue el esquema siguiente.



Por lo tanto, la derivada alcanza un valor máximo en $x=-\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Su imagen es $f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{1+\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$

El punto de la gráfica de la función donde la pendiente de la recta tangente es máxima es en el punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{3}{4}\right)$.

5. Sean *P*, *Q* y *R* los puntos de intersección del plano de ecuación $x+4y+2z=4$ con los tres ejes de coordenadas *OX*, *OY* y *OZ*, respectivamente.
a) Calcule los puntos *P*, *Q* y *R*, y el perímetro del triángulo de vértices *P*, *Q* y *R*. [1 punto]
b) Calcule el área del triángulo de vértices *P*, *Q* y *R*. [1 punto]
NOTA: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores ***v*** y ***w*** puede utilizar la expresión $S=\frac{1}{2}\|v\times w\|$, donde $v\times w$ es el producto vectorial de los vectores ***v*** y ***w***.

a) La ecuación del eje OX es $\left.\begin{matrix}y=0\\z=0\end{matrix}\right\}$, del eje OY es $\left.\begin{matrix}x=0\\z=0\end{matrix}\right\}$ y del eje OZ es $\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\}$

Planteamos los sistemas de ecuaciones y los resolvemos:

Corte con eje OX:

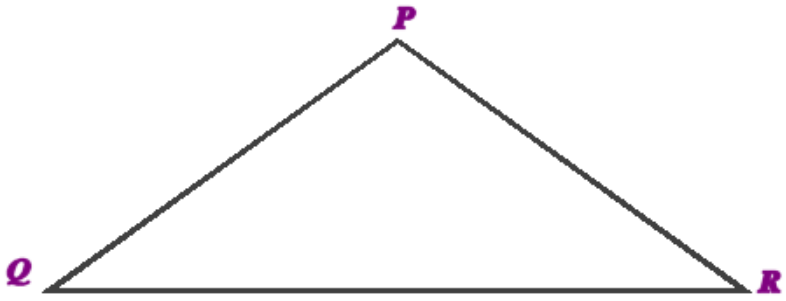
$$\left.\begin{matrix}y=0\\z=0\\x+4y+2z=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=4$$ El punto es P(4,0,0)

Corte con eje OY:

$$\left.\begin{matrix}x=0\\z=0\\x+4y+2z=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow 4y=4\Rightarrow y=1$$ El punto es Q(0,1,0)

Corte con eje OZ:

$$\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\\x+4y+2z=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2z=4\Rightarrow z=2$$ El punto es R(0,0,2)



El perímetro es el módulo del vector que une cada par de vértices.

$$\overrightarrow{PQ}=(0,1,0)-(4,0,0)=(-4,1,0)\Rightarrow\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{PR}=(0,0,2)-(4,0,0)=(-4,0,2)\Rightarrow\left\|\overrightarrow{PR}\right\|=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$$

$$\overrightarrow{QR}=(0,0,2)-(0,1,0)=(0,-1,2)\Rightarrow\left\|\overrightarrow{QR}\right\|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

El perímetro es $\sqrt{17}+\sqrt{20}+\sqrt{5}=\boxed{10,83\,u}$

b) Consideremos los vectores $\overrightarrow{PQ}=(-4,1,0)$ y $\overrightarrow{PR}=(-4,0,2)$.

El área del triángulo PQR es la mitad del módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

$$\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2i+4k+8j=2i+8j+4k=(2,8,4)$$

$$\left\|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}\right\|=\sqrt{4+64+16}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$$

Área del triángulo PQR $=\dfrac{\left\|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}\right\|}{2}=\dfrac{2\sqrt{21}}{2}=\boxed{\sqrt{21}\,u^2}$

6. Considera la función $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.

a) Calcule el dominio de la función *f*, los puntos de corte de la gráfica de *f* con los ejes de coordenadas, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*. [1 punto]

b) Calcule el área de la región del plano determinada por la gráfica de la función *f*, las rectas $x=1$ y $x=e$, y el eje de abscisas. [1 punto]

a) El dominio de la función son todos los reales excepto x = 0. Dominio $f(x)=\mathbb{R}-\{0\}$

Puntos de corte con los ejes.

Si x = 0 → No existe $f(0)=\dfrac{\ln(0)}{0}$

Si y = 0 → $\dfrac{\ln(x)}{x}=0\Rightarrow \ln x=0\Rightarrow x=e^0=1$

El único punto de corte de la gráfica y los ejes es P(1,0)

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Calculamos la derivada de $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$

$$f\,'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

La igualamos a cero.

$$f\,'(x)=0\Rightarrow\frac{1-\ln(x)}{x^2}=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e$$

Este es el único punto crítico de la función. Estudiemos como cambia el signo de la derivada antes y después del punto.

- En $(-\infty,e)$ tomamos x = 1 la derivada vale $f\,'(1)=\dfrac{1-\ln(1)}{1^2}=1>0$. La función crece.
- En $(e,+\infty)$ tomamos x = 5 la derivada vale $f\,'(5)=\dfrac{1-\ln(5)}{5^2}=-0,02<0$. La función decrece.

Resumiendo: la función crece en $(-\infty,e)$ y decrece en $(e,+\infty)$.

b) Hemos visto que la función solo corta al eje de abscisas en x = 1. Como el área está definida entre 1 y *e* no influye en el cálculo del área con el uso de integrales definidas.

$$\int\frac{\ln(x)}{x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \ln(x)=t\rightarrow\dfrac{1}{x}dx=dt\rightarrow dx=xdt\end{array}\right\}=\int\frac{t}{x}xdt=\int tdt=\frac{t^2}{2}=\frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$Área=\int_1^e\frac{\ln(x)}{x}dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\left[\frac{(\ln e)^2}{2}\right]-\left[\frac{(\ln 1)^2}{2}\right]=\boxed{\frac{1}{2}u^2}$$

PAU junio (serie 1) 2019

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Convocatòria 2019

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Las páginas de un libro deben tener cada una 600 cm^2 de superficie, con márgenes alrededor del texto de 2 cm en la parte inferior, 3 cm en la parte superior y 2 cm en cada lado. Calcule las dimensiones de la página que permiten la mayor superficie impresa posible.
[2 puntos]

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real *k*:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+2z=-1 \\ x+k^2y+3z=2k \\ 3x+7y+7z=k-3 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *k*.
[1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso de $k = -1$.
[1 punto]

3. Un dron se encuentra en el punto $P=(2,-3,1)$ y queremos dirigirlo en línea recta hasta el punto más próximo del plano de ecuación $\pi: 3x+4z+15=0$.

a) Calcule la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que debe seguir el dron. ¿Qué distancia tiene que recorrer hasta llegar al plano?
[1 punto]

b) Encuentre las coordenadas del punto del plano donde llegará el dron.
[1 punto]

4. Considere la función: $f(x)=\dfrac{2x^3-5x+4}{1-x}$

a) Calcule su dominio y estudie su continuidad. ¿Tiene alguna asíntota vertical?
[1 punto]

b) Observe que $f(-2)=\dfrac{-2}{3}$, $f(0)=4$ y $f(2)=-10$. Razone si, a partir de esta información, puede deducirse que el intervalo (–2,0) contiene un cero de la función. ¿Puede deducirse para el intervalo (0,2)? Encuentre un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de esta función.
[1 punto]

5. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcule para qué valores del parámetro a se cumple la igualdad $M^2 - M - 2I = 0$, donde I es la matriz identidad y 0 es la matriz nula, ambas de orden 2.
[1 punto]

b) Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre una expresión general para calcular la matriz inversa de la matriz M y, a continuación, calcule la inversa de M para el caso de $a = \sqrt{2}$
[1 punto]

6. Considere las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, y la recta $x = e$.

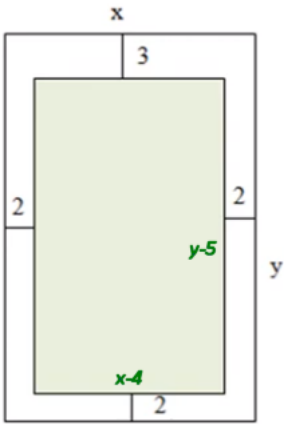
a) Haga un esbozo de la región delimitada por sus gráficas y el eje de abscisas. Calcule las coordenadas del punto de intersección de $y = f(x)$ con $y = g(x)$.
[1 punto]

b) Calcule el área de la región descrita en el apartado anterior.
[1 punto]

SOLUCIONES

1. Las páginas de un libro deben tener cada una 600 cm^2 de superficie, con márgenes alrededor del texto de 2 cm en la parte inferior, 3 cm en la parte superior y 2 cm en cada lado. Calcule las dimensiones de la página que permiten la mayor superficie impresa posible. [2 puntos]

Realicemos un dibujo descriptivo de la situación planteada.



La zona sombreada es la destinada a escribir. Es la que debemos maximizar.
Función objetivo: $f(x,y)=(x-4)(y-5)$.

Las condiciones son: $x\cdot y=600\Rightarrow y=\dfrac{600}{x}$

La función queda

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)=(x-4)(y-5) \\ y=\dfrac{600}{x} \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=(x-4)\left(\frac{600}{x}-5\right)=x\cdot\frac{600}{x}-5x-4\cdot\frac{600}{x}+20=$$

$$=600-5x-\frac{2400}{x}+20=620-5x-\frac{2400}{x}$$

Para maximizar esta función la derivamos e igualamos a cero para averiguar sus puntos críticos.

$$f(x)=620-5x-\frac{2400}{x}\Rightarrow f\,'(x)=-5+\frac{2400}{x^2}$$

$$f\,'(x)=0\Rightarrow -5+\frac{2400}{x^2}=0\Rightarrow -5x^2+2400=0$$

$$5x^2=2400\Rightarrow x^2=\frac{2400}{5}=480\Rightarrow x=\sqrt{480}=21,9...$$

Veamos el signo de la derivada antes y después de este valor 21,9.

- En $\left(0,\sqrt{480}\right)$ tomamos el valor 1 y la derivada vale $f\,'(1)=-5+\dfrac{2400}{1^2}=2395>0$. La función crece en este intervalo.
- En $\left(\sqrt{480},+\infty\right)$ tomamos el valor 30 y la derivada vale $f\,'(30)=-5+\dfrac{2400}{30^2}=-2,3<0$. La función decrece en este intervalo.

Como la función crece antes y decrece después la función presenta un máximo en $x=\sqrt{480}$.
Las dimensiones que maximizan la zona impresa son $x\simeq 21,9$ cm e $y\simeq 27,38$ cm.

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real *k*:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+2z=-1 \\ x+k^2y+3z=2k \\ 3x+7y+7z=k-3 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *k*. [1 punto]
b) Resuelva el sistema para el caso de $k = -1$. [1 punto]

a) La discusión del sistema parte del estudio del valor del determinante de la matriz de los coeficientes.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \text{ con determinante } |A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix}=7k^2+27+14-6k^2-21-21=k^2-1$$

Si igualamos a cero

$$|A|=0 \Rightarrow k^2-1=0 \Rightarrow k^2=1 \Rightarrow k=\sqrt{1}=\pm 1$$

Hay tres casos a considerar.

CASO 1. $k \neq -1$ *y* $k \neq 1$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $k = -1$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+2z=-1 \\ x+y+3z=-2 \\ 3x+7y+7z=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} & & & \\ x & +y & +3z & =-2 \\ -x & -3y & -2z & =1 \\ \hline & -2y & +z & =-1 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{rrrl} \text{Ecuación 3ª - 3 · Ecuación 1ª} & & & \\ 3x & +7y & +7z & =-4 \\ -3x & -9y & -6z & =3 \\ \hline & -2y & +z & =-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y+2z=-1 \\ -2y+z=-1 \\ -2y+z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª es igual a ecuación 3ª} \\ \text{Podemos eliminar la 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y+2z=-1 \\ -2y+z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z=-1-3y \\ \boxed{z=-1+2y} \end{array}\right\} \Rightarrow x+2(-1+2y)=-1-3y \Rightarrow x-2+4y=-1-3y \Rightarrow \boxed{x=1-7y}$$

El sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.
Las soluciones son $x=1-7t;\ y=t;\ z=-1+2t$, siendo $t \in \mathbb{R}$.

CASO 3. $k = 1$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+2z=-1 \\ x+y+3z=2 \\ 3x+7y+7z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} x & +y & +3z & =2 \\ -x & -3y & -2z & =1 \\ \hline & -2y & +z & =3 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} 3x & +7y & +7z & =-1 \\ -3x & -9y & -6z & =3 \\ \hline & -2y & +z & =2 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+2z=-1 \\ -2y+z=3 \\ -2y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrr} -2y & +z & =2 \\ 2y & -z & =-3 \\ \hline & 0 & =-1 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+2z=-1 \\ -2y+z=3 \\ 0=-1 \end{array}\right\}$$

Este sistema es incompatible.

b) Las soluciones se han obtenido en el apartado anterior y son $x=1-7t;\ y=t;\ z=-1+2t$, siendo $t \in \mathbb{R}$.

3. Un dron se encuentra en el punto $P=(2,-3,1)$ y queremos dirigirlo en línea recta hasta el punto más próximo del plano de ecuación $\pi: 3x+4z+15=0$.

a) Calcule la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que debe seguir el dron. ¿Qué distancia tiene que recorrer hasta llegar al plano? [1 punto]

b) Encuentre las coordenadas del punto del plano donde llegará el dron. [1 punto]

a) Se habla de proyectar ortogonalmente el punto P sobre el plano. La recta se obtiene a partir de su vector director (el vector normal del plano) y sabiendo que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=\vec{n}=(3,0,4)\\ \text{Pasa por } P(2,-3,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l}x=2+3t\\ r: y=-3\\ z=1+4t\end{array}\right\}}$$

La distancia del punto $P=(2,-3,1)$ al plano $\pi: 3x+4z+15=0$ se calcula con la fórmula:

$$\text{Distancia}(P,\pi)=\frac{|3\cdot 2+4\cdot 1+15|}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}}=\frac{25}{5}=\boxed{5\,u}$$

b) Hay que hallar el punto de corte de la recta hallada en el apartado anterior y el plano. Resolvamos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 3x+4z+15=0\\ \left.\begin{array}{l}x=2+3t\\ r: y=-3\\ z=1+4t\end{array}\right\}\end{array}\right\}\Rightarrow 3(2+3t)+4(1+4t)+15=0\Rightarrow 6+9t+4+16t+15=0$$

$$25t+25=0\Rightarrow t=\frac{-25}{25}=-1\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=2-3=-1\\ y=-3\\ z=1-4=-3\end{array}\right\}$$

Las coordenadas del punto pedido son P´(–1,–3,–3).

4. Considere la función: $f(x)=\dfrac{2x^3-5x+4}{1-x}$

a) Calcule su dominio y estudie su continuidad. ¿Tiene alguna asíntota vertical? [1 punto]

b) Observe que $f(-2)=\dfrac{-2}{3}$, $f(0)=4$ y $f(2)=-10$. Razone si, a partir de esta información, puede deducirse que el intervalo (–2,0) contiene un cero de la función. ¿Puede deducirse para el intervalo (0,2)? Encuentre un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de esta función. [1 punto]

a) El dominio de la función al ser una fracción es $\text{Dominio}=\mathbb{R}-\{1\}$.

La continuidad: es continua en todo el dominio.

La asíntota vertical es $x=1$ lo comprobamos calculando el límite

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-5x+4}{1-x}=\frac{2-5+4}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

b) $f(x)=\dfrac{2x^3-5x+4}{1-x}$ es continua en (–2,0) y la función cambia de signo de un extremo a otro del intervalo $f(-2)=\dfrac{-2}{3}<0$, $f(0)=4>0$, luego existe un valor $c\in(-2,0)$ donde $f(c)=0$.

$f(x)=\dfrac{2x^3-5x+4}{1-x}$ es continua en (0,2) y la función cambia de signo de un extremo a otro del intervalo $f(0)=4>0$ y $f(2)=-10<0$ luego existe un valor $c\in(0,2)$ donde $f(c)=0$.

El intervalo (–2,–1) cumple que $f(-2)=\dfrac{-2}{3}<0$ y $f(-1)=\dfrac{-2+5+4}{1+1}=\dfrac{7}{2}>0$ luego aplicando el teorema de Bolzano existe un valor $c\in(-2,-1)$ donde $f(c)=0$.

5. Sea la matriz $M=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcule para qué valores del parámetro a se cumple la igualdad $M^2-M-2I=0$, donde I es la matriz identidad y 0 es la matriz nula, ambas de orden 2. [1 punto]

b) Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre una expresión general para calcular la matriz inversa de la matriz M y, a continuación, calcule la inversa de M para el caso de $a=\sqrt{2}$. [1 punto]

a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$M^2-M-2I=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1+a^2 & a\\ a & a^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1+a^2-1-2 & a-a\\ a-a & a^2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a^2-2 & 0\\ 0 & a^2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow a^2-2=0\Rightarrow a^2=2\Rightarrow \boxed{a=\pm\sqrt{2}}$$

b) Sacamos factor común M en la igualdad.

$$M^2-M-2I=0\Rightarrow M^2-M=2I\Rightarrow M\left(M-I\right)=2I\Rightarrow M\left(\frac{M-I}{2}\right)=I$$

$$M^{-1}=\frac{1}{2}\left(M-I\right)$$

Si M cumple la ecuación $M^2-M-2I=0$ su inversa es $M^{-1}=\frac{1}{2}\left(M-I\right)$

Si $a=\sqrt{2}$ la inversa de M es $M^{-1}=\frac{1}{2}\left(M-I\right)$. Determinamos su expresión.

$$M^{-1}=\frac{1}{2}\left(M-I\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$$

6. Considere las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=\frac{1}{x}$, y la recta $x=e$.

a) Haga un esbozo de la región delimitada por sus gráficas y el eje de abscisas. Calcule las coordenadas del punto de intersección de $y=f(x)$ con $y=g(x)$. [1 punto]

b) Calcule el área de la región descrita en el apartado anterior. [1 punto]

a) Averiguamos los puntos de corte de las gráficas.

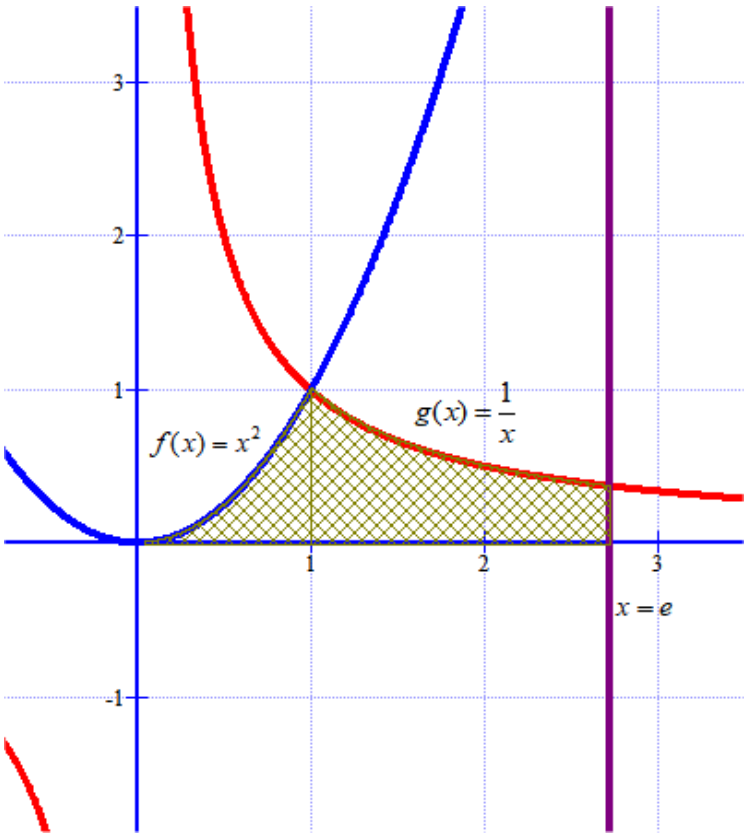
$$f(x)=g(x)\Rightarrow \frac{1}{x}=x^2\Rightarrow 1=x^3\Rightarrow x=\sqrt[3]{1}=1$$

Hacemos una tabla de valores para cada función y representamos sus gráficas y la región delimitada por sus gráficas y el eje de abscisas.

x	$y=\frac{1}{x}$
-1	-1
1	1
2	$0,5$
4	$0,25$
8	$0,125$

x	$y=x^2$
-1	1
0	0
1	1
2	4
4	16

y la región es



b) El área pedida es una integral definida de la función entre 0 y e.

$$Área=\int_0^1 x^2dx+\int_1^e \frac{1}{x}dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\ln x\right]_1^e=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}+\ln e-\ln 1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}\,u^2$$

PAU junio (serie 4) 2019

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat 2019

Matemáticas

Serie 4

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Quiere construirse un marco rectangular de madera que delimite un área de 2 m^2. Se sabe que el precio de la madera es de 7,5 €/m para los lados horizontales y de 12,5 €/m para los lados verticales. Determine las dimensiones que debe tener el rectángulo para que el coste total del marco sea el mínimo posible. ¿Cuál es este coste mínimo?
[2 puntos]

2. Sean la recta $r:\begin{cases} x=2 \\ y-z=1 \end{cases}$ y el plano $\pi: x-z=3$.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que es perpendicular al plano π y que lo corta en el mismo punto en el que lo corta la recta r.
[1 punto]

b) Encuentre los puntos de r que están a una distancia de $\sqrt{8}$ unidades del plano π.
[1 punto]

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax+7y+5z=0 \\ x+ay+z=3 \\ y+z=-2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro a.
[1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $a=2$.
[1 punto]

4. Considere la función *f(x)*, que depende de los parámetros reales *n* y *m* y está definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si\ x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{4}+n & si\ 0<x\le 2 \\ \dfrac{3x}{2}+m & si\ x>2 \end{cases}$$

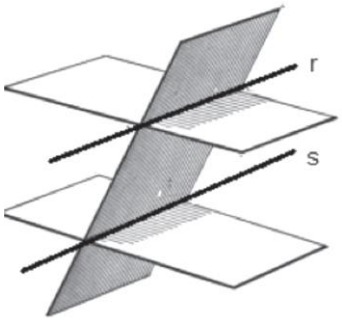
a) Calcule los valores de *n* y *m* para que la función sea continua en todo el conjunto de los números reales.
[1 punto]

b) Para el caso $n=-4$ y $m=-6$, calcule el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=4$.
[1 punto]

5. Considere los planos $\pi_1: 2x+ay+z=5$, $\pi_2: x+ay+z=1$ y $\pi_3: 2x+(a+1)y+(a+1)z=0$, donde *a* es un parámetro real.

a) Estudie para qué valores del parámetro *a* los tres planos se cortan en un punto.
[1 punto]

b) Compruebe que para el caso $a=1$ la interpretación geométrica del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos es la que se muestra en la siguiente imagen:
[1 punto]



6. Se sabe que una función $f(x)$ es continua y derivable en todos los números reales, que tiene como segunda derivada $f''(x)=6x$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es horizontal.

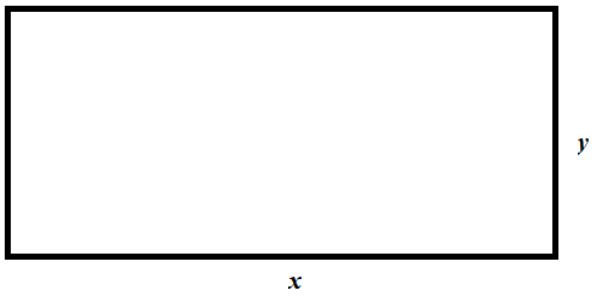
a) Determine la abscisa de los puntos de inflexión de la función *f* y los intervalos de concavidad y convexidad. Justifique que la función *f* tiene un mínimo relativo en $x=1$.
[1 punto]

b) Sabiendo, además, que la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es $y=5$, calcule la expresión de la función *f*.
[1 punto]

SOLUCIONES

1. Quiere construirse un marco rectangular de madera que delimite un área de 2 m^2. Se sabe que el precio de la madera es de 7,5 €/m para los lados horizontales y de 12,5 €/m para los lados verticales. Determine las dimensiones que debe tener el rectángulo para que el coste total del marco sea el mínimo posible. ¿Cuál es este coste mínimo? [2 puntos]

Llamamos *x* a la longitud la parte horizontal del marco rectangular e *y* a la longitud de la parte vertical.



El área del rectángulo es de 2 m^2, por lo que $x\cdot y=2$.

El coste total del marco es $C(x,y)=7.5\cdot 2x+12.5\cdot 2y=15x+25y$.

Como $x\cdot y=2$ entonces $y=\frac{2}{x}$. Sustituimos en la función coste y obtenemos una función dependiente solo de la variable *x*.

$$\left.\begin{array}{l} C(x,y)=15x+25y \\ y=\frac{2}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow C(x)=15x+25\frac{2}{x}=15x+\frac{50}{x}$$

Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$C(x)=15x+\frac{50}{x}\Rightarrow C'(x)=15-\frac{50}{x^2}$$

$$C'(x)=0\Rightarrow 15-\frac{50}{x^2}=0\Rightarrow 15=\frac{50}{x^2}\Rightarrow 15x^2=50\Rightarrow x^2=\frac{50}{15}=\frac{10}{3}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{10}{3}}\approx 1.826$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada para averiguar si el punto crítico obtenido es un máximo o un mínimo.

$$C'(x)=15-\frac{50}{x^2}=15-50x^{-2}\Rightarrow C''(x)=100x^{-3}=\frac{100}{x^3}\Rightarrow C''\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)=\frac{100}{\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^3}>0$$

Al ser la segunda derivada positiva la función coste tiene un mínimo relativo en $x=\sqrt{\frac{10}{3}}$.

Para este valor la longitud de la parte vertical es $y=\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{10}{3}}}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}\approx 1.095$ y el coste del marco es de

$C\left(\sqrt{\dfrac{10}{3}}\right)=15\sqrt{\dfrac{10}{3}}+\dfrac{50}{\sqrt{\dfrac{10}{3}}}=10\sqrt{30}\simeq 54.77$ euros.

Las dimensiones del marco rectangular de coste mínimo son $\sqrt{\dfrac{10}{3}}\approx 1.826$ metros en la parte horizontal y $\dfrac{\sqrt{30}}{5}\approx 1.095$ metros en la parte vertical, siendo este coste mínimo de un importe aproximado de 54.77 euros.

2. Sean la recta $r:\begin{cases}x=2\\y-z=1\end{cases}$ y el plano $\pi: x-z=3$.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que es perpendicular al plano π y que lo corta en el mismo punto en el que lo corta la recta *r*. [1 punto]

b) Encuentre los puntos de *r* que están a una distancia de $\sqrt{8}$ unidades del plano π. [1 punto]

a) Hallamos el punto P de corte de la recta *r* y el plano π.

$$\left.\begin{matrix}r:\begin{cases}x=2\\y-z=1\end{cases}\\ \pi: x-z=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\boxed{x=2}\\ y=1+z\\ x-3=z\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}y=1+z\\ \boxed{z=2-3=-1}\end{matrix}\right\}\Rightarrow y=1-1=0\Rightarrow P(2,0.-1)$$

La recta *s* perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano. Hallamos la ecuación de la recta *s* perpendicular al plano π y que lo corta en $P(2,0.-1)$.

$$\pi: x-z=3\Rightarrow \vec{n}=(1,0,-1)$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{v_s}=\vec{n}=(1,0,-1)\\ P(2,0.-1)\in s\end{matrix}\right\}\Rightarrow \boxed{s:\begin{cases}x=2+\alpha\\ y=0\\ z=-1-\alpha\end{cases};\ \alpha\in\mathbb{R}}$$

b) Hallamos las coordenadas de un punto cualquiera de la recta *r*.

$$r:\begin{cases}x=2\\y-z=1\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=2\\y=1+z\end{cases}\Rightarrow Q_r(2,1+z,z)$$

Hallamos la expresión de la distancia de un punto Q_r de la recta *r* al plano π.

$$\left.\begin{matrix}Q_r(2,1+z,z)\\ \pi: x-z-3=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow d(Q_r,\pi)=\frac{|2-z-3|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{|-1-z|}{\sqrt{2}}$$

Buscamos el valor de *z* para que esta distancia valga $\sqrt{8}$.

$$d(Q_r,\pi)=\sqrt{8}\Rightarrow\frac{|-1-z|}{\sqrt{2}}=\sqrt{8}\Rightarrow|-1-z|=\sqrt{16}=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-1-z=4\rightarrow -1-4=z\rightarrow z=-5\rightarrow Q_1(2,-4,-5)\\ -1-z=-4\rightarrow -1+4=z\rightarrow z=3\rightarrow Q_2(2,4,3)\end{cases}$$

Los dos puntos que cumplen lo pedido son $Q_1(2,-4,-5)$ y $Q_2(2,4,3)$.

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax+7y+5z=0 \\ x+ay+z=3 \\ y+z=-2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro a. [1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $a=2$. [1 punto]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} a & 7 & 5 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 7 & 5 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2+0+5-0-7-a=a^2-a-2.$$

Igualamos a cero el determinante.

$$|A|=0\Rightarrow a^2-a-2=0\Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=\boxed{2=a}\\ \frac{1-3}{2}=\boxed{-1=a}\end{cases}$$

Hay tres casos distintos a estudiar.

CASO 1. $a\neq -1$ *y* $a\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna 3ª y la fila 3ª → $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1-7=-6\neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª (columna 2ª + dos veces la columna 1ª) → $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-2+0+0-0+14+3=15\neq 0$. El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B.

El sistema es incompatible.

CASO 3. $a=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix}2&7&5\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 3ª → $\begin{pmatrix}2&7\\1&2\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}2&7\\1&2\end{vmatrix}=4-7=-3\neq 0$. El rango de A es 2.

Determinamos el rango de $A/B=\begin{pmatrix}2&7&5&0\\1&2&1&3\\0&1&1&-2\end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 2ª columna (suma de columna 1ª y 3ª): $\begin{pmatrix}2&7&0\\1&2&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}2&7&0\\1&2&3\\0&1&-2\end{vmatrix}=-8+0+0-0+14-6=0$. El rango de A/B no es 3 y debe ser 2 como el rango de la matriz A.

Rango de A = Rango de A/B = 2 < 3 = Número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo: Si $a\neq -1\ y\ a\neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $a=-1$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $a=2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a=2$ el sistema es compatible indeterminado (caso 3). Lo resolvemos.

$$\begin{cases}2x+7y+5z=0\\x+2y+z=3\\y+z=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+7y+5z=0\\x+2y+z=3\\z=-y-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+7y+5(-y-2)=0\\x+2y-y-2=3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x+2y-10=0\\x+y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+2y=10\\x+y=5\end{cases}\Rightarrow\{Ecuaciones\ iguales\}\Rightarrow x+y=5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=5-y\Rightarrow\begin{cases}x=5-\lambda\\y=\lambda\\z=-2-\lambda\end{cases};\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases}x=5-\lambda\\y=\lambda\\z=-2-\lambda\end{cases}$, siendo λ cualquier número real.

4. Considere la función *f(x)*, que depende de los parámetros reales *n* y *m* y está definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si\ x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{4}+n & si\ 0<x\le 2 \\ \dfrac{3x}{2}+m & si\ x>2 \end{cases}$$

a) Calcule los valores de *n* y *m* para que la función sea continua en todo el conjunto de los números reales. [1 punto]

b) Para el caso $n=-4$ y $m=-6$, calcule el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=4$. [1 punto]

a) La función debe ser continua en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=e^0=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{4}+n=\dfrac{0^2}{4}+n=n \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{n=1}$$

La función queda $f(x)=\begin{cases} e^x & si\ x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{4}+1 & si\ 0<x\le 2 \\ \dfrac{3x}{2}+m & si\ x>2 \end{cases}$.

La función debe ser continua en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\dfrac{2^2}{4}+1=2 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{4}+1=2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x}{2}+m=3+m \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \end{array}\right\}\Rightarrow 3+m=2\Rightarrow \boxed{m=-1}$$

Los valores de *n* y *m* que hacen que la función sea continua en todo el conjunto de los números reales son $m=-1$ y $n=1$.

b) Para el caso $n=-4$ y $m=-6$ la función queda $f(x)=\begin{cases} e^x & si\ x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{4}-4 & si\ 0<x\le 2 \\ \dfrac{3x}{2}-6 & si\ x>2 \end{cases}$.

En el intervalo [0, 4] la función cambia de definición por lo que el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=4$ la determinamos como la suma de dos integrales definidas: una entre 0 y 2 de la función y otra entre 2 y 4.
Averiguamos primero si la función corta el eje de abscisas en algún punto.

$$f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} e^x=0 \rightarrow \textit{No es posible} \\ \dfrac{x^2}{4}-4=0 \rightarrow \dfrac{x^2}{4}=4 \rightarrow x^2=16 \rightarrow x=4 \notin (0,2] \\ \dfrac{3x}{2}-6=0 \rightarrow \dfrac{3x}{2}=6 \rightarrow 3x=12 \rightarrow x=4 \end{cases}$$

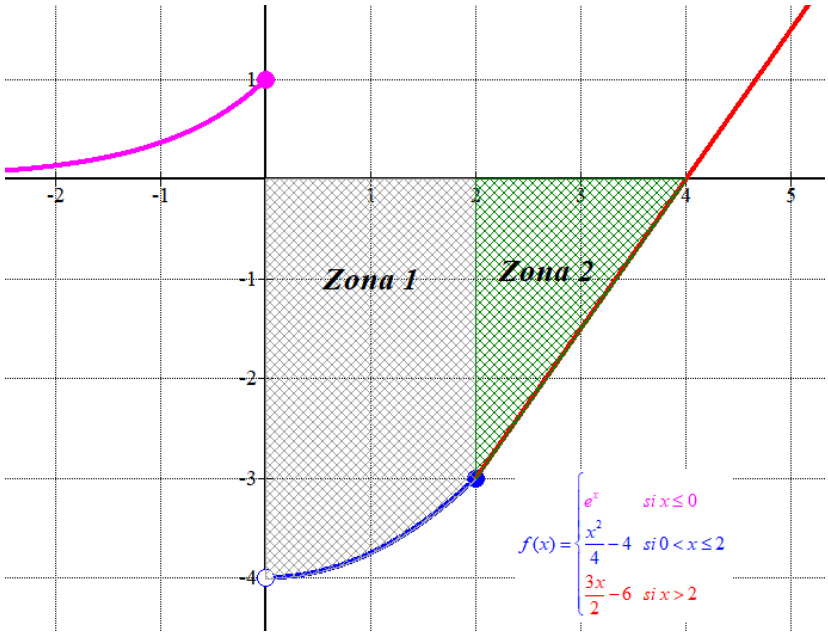
La función no corta el eje de abscisas en el intervalo (0, 4).
La función es negativa en el intervalo (0, 2], pues si tomamos $x=1$ tenemos que $f(1)=\dfrac{1^2}{4}-4=\dfrac{-15}{4}<0$.

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 \frac{x^2}{4}-4dx=\left[\frac{x^3}{12}-4x\right]_0^2=\left[\frac{2^3}{12}-4\cdot 2\right]-\left[\frac{0^3}{12}-4\cdot 0\right]=\frac{-22}{3}$$

El área de la región 1 tiene un valor de $\dfrac{22}{3}$ unidades cuadradas.
La función es negativa en el intervalo (2, 4], pues si tomamos $x=3$ tenemos que $f(3)=\dfrac{3\cdot 3}{2}-6=\dfrac{-3}{2}<0$.

$$\int_2^4 f(x)\,dx=\int_2^4 \frac{3x}{2}-6dx=\left[\frac{3x^2}{4}-6x\right]_2^4=\left[\frac{3\cdot 4^2}{4}-6\cdot 4\right]-\left[\frac{3\cdot 2^2}{4}-6\cdot 2\right]=-3$$

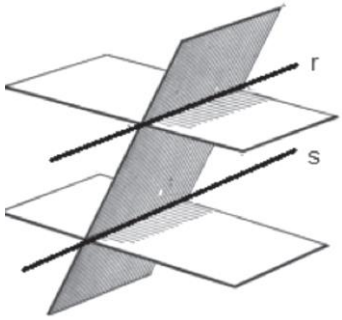
El área de la región 2 tiene un valor de 3 unidades cuadradas.
El área total es la suma de las dos áreas obtenidas: $\dfrac{22}{3}+3=\dfrac{31}{3}\simeq 10.333$ unidades cuadradas.



5. Considere los planos $\pi_1: 2x+ay+z=5$, $\pi_2: x+ay+z=1$ y $\pi_3: 2x+(a+1)y+(a+1)z=0$, donde a es un parámetro real.

a) Estudie para qué valores del parámetro a los tres planos se cortan en un punto. [1 punto]

b) Compruebe que para el caso $a=1$ la interpretación geométrica del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos es la que se muestra en la siguiente imagen: [1 punto]



a) Nos piden determinar cuando el sistema formado por sus ecuaciones tiene solución única. Para ello el rango de la matriz de coeficientes asociada al sistema y el de la matriz ampliada debe ser 3.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1: 2x+ay+z=5\\ \pi_2: x+ay+z=1\\ \pi_3: 2x+(a+1)y+(a+1)z=0\end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ 1 & a & 1\\ 2 & a+1 & a+1\end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$A/B=\begin{pmatrix}2 & a & 1 & 5\\ 1 & a & 1 & 1\\ 2 & a+1 & a+1 & 0\end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando el determinante de A es nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & a & 1\\ 1 & a & 1\\ 2 & a+1 & a+1\end{vmatrix}=2a(a+1)+\cancel{2a}+a+1-\cancel{2a}-a(a+1)-2(a+1)=$$

$$=2a^2+\cancel{2a}+\cancel{a}+1-a^2-\cancel{a}-\cancel{2a}-2=a^2-1$$

$$|A|=0\Rightarrow a^2-1=0\Rightarrow a^2=1\Rightarrow \boxed{a=\sqrt{1}=\pm 1}$$

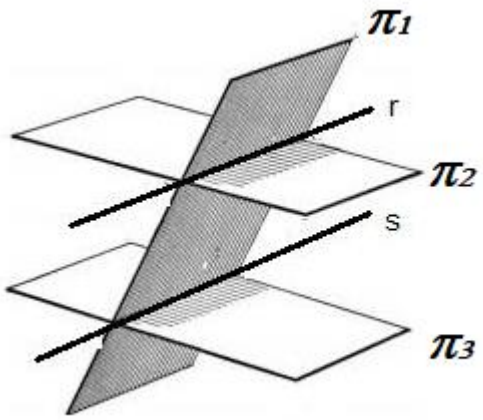
Para que el determinante no se anule y el rango de A sea 3 debe ser un valor de a distinto de –1 y de 1. En estos casos el rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado y su única solución son las coordenadas del punto de corte de los tres planos.

b) Para el caso $a=1$ los planos tienen ecuaciones: $\pi_1: 2x+y+z=5$, $\pi_2: x+y+z=1$ y $\pi_3: 2x+2y+2z=0\rightarrow \pi_3: x+y+z=0$.

Podemos observar que los planos $\pi_2 : x+y+z=1$ y $\pi_3 : x+y+z=0$ son paralelos pues tienen el mismo vector normal $\vec{n_2}=\vec{n_3}=(1,1,1)$ y no son coincidentes al no tener la misma ecuación. El tercer plano π_1 no es paralelo a ellos, pues tiene un vector normal no proporcional y por tanto es secante a ambos planos.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : 2x+y+z=5 \Rightarrow \vec{n_1}=(2,1,1)\\ \pi_3 : x+y+z=0 \Rightarrow \vec{n_3}=(1,1,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{1}\neq\frac{1}{1}=\frac{1}{1}$$

La situación entre los tres planos es la indicada en el dibujo.



La recta *r* del dibujo tiene ecuación $r:\left.\begin{array}{l}2x+y+z=5\\ x+y+z=1\end{array}\right\}$ y la recta *s* tiene ecuación $r:\left.\begin{array}{l}2x+y+z=5\\ x+y+z=0\end{array}\right\}$. Ambas rectas son paralelas pues tienen el mismo vector director $\vec{u_r}=\vec{v_s}=(2,1,1)\times(1,1,1)$.

6. Se sabe que una función *f*(*x*) es continua y derivable en todos los números reales, que tiene como segunda derivada $f''(x)=6x$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es horizontal.

a) Determine la abscisa de los puntos de inflexión de la función *f* y los intervalos de concavidad y convexidad. Justifique que la función *f* tiene un mínimo relativo en $x=1$. [1 punto]

b) Sabiendo, además, que la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es $y=5$, calcule la expresión de la función *f*. [1 punto]

a) Para obtener los posibles puntos de inflexión averiguamos cuando se anula la segunda derivada de la función.

$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes y después de $x=0$.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x=-1$ y la segunda derivada vale $f''(-1)=6(-1)=-6<0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos $x=1$ y la segunda derivada vale $f''(1)=6\cdot 1=6>0$. La función es convexa (∪) en $(0,+\infty)$.

La función es cóncava (∩) en $(-\infty,0)$ y convexa (∪) en $(0,+\infty)$. La función tiene un punto de inflexión en $x=0$.

Si la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es horizontal significa que su pendiente es 0 y por tanto la derivada se anula para este valor → $f'(1)=0$. Este sería un extremo relativo de la función. Como $f''(1)=6\cdot 1=6>0$ la función tiene un mínimo relativo en $x=1$.

b) Si la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es $y=5$ entonces la función pasa por el punto (1, 5).
La derivada de la función es la integral de la segunda derivada.

$$f'(x)=\int f''(x)\,dx=\int 6x\,dx=3x^2+K$$

Sabemos que $f'(1)=0$, por lo que $f'(1)=3\cdot 1^2+K=0 \Rightarrow k=-3$.
La derivada queda $f'(x)=3x^2-3$.
La función es la integral de la derivada.

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 3x^2-3\,dx=x^3-3x+C$$

Sabemos que $f(1)=5$, por lo que $f(1)=1^3-3\cdot 1+C=5 \Rightarrow C=5+3-1=7$.

La función tiene la expresión $f(x)=x^3-3x+7$.

PAU septiembre 2018

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Convocatòria 2018

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 3

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Considere la función polinómica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$.

a) Calcule los valores de los parámetros *a*, *b* y *c*, sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = x + 3$.
[1 punto]

b) Para los valores $a = 2$, $b = 1$ y $c = 3$, calcule las abscisas de los extremos relativos de la función y clasifíquelos.
[1 punto]

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real *a*.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro *a*.
[1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $a = 1$.
[1 punto]

3. Considere el plano que tiene como vectores directores $u = (-1, 3, 2)$ y $v = (2, 1, 0)$ y que pasa por el punto $A = (1, 0, 3)$.

a) Calcule la ecuación de la recta que es perpendicular al plano y pasa por el punto *A*.
[1 punto]

b) Calcule la distancia del punto $P = (1, 5, 0)$ al plano.
[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

4. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, en la que α es un parámetro real.

a) Existe algún valor $\alpha \in \mathbb{R}$ de tal que A no tenga inversa para este valor?
[1 punto]

b) Calcule la matriz inversa de A^2 para $\alpha = 0$.
[1 punto]

5. Considere los puntos del espacio tridimensional $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 5, 0)$ y $C = (1, 0, 0)$ y la recta $r : x = y - 1 = \frac{z}{2}$.

a) Encuentre el punto de intersección de la recta *r* con el plano que pasa por los puntos *A*, *B* y *C*.
[1 punto]

b) Encuentre los puntos *P* de la recta *r* para los cuales el tetraedro de vértices *P*, *A*, *B* y *C* tiene un volumen de $2u^3$.
[1 punto]
NOTA: El volumen de un tetraedro de vértices *P*, *Q*, *R* y *S* puede calcularse con la expresión $\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}\right)\right|$.

6. Sean las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3 - x^2$.

a) Esboce las gráficas de las parábolas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en un mismo sistema de ejes cartesianos y encuentre los puntos de corte con el eje de abscisas, los vértices y los puntos de corte entre las dos gráficas.
[1 punto]

b) Calcule el área de la región del semiplano $y \geq 0$ comprendida entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.
[1 punto]

SOLUCIONES

1. Considere la función polinómica $f(x)=x^3-ax^2+bx+c$.

a) Calcule los valores de los parámetros *a*, *b* y *c*, sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = x + 3$. [1 punto]

b) Para los valores $a = 2$, $b = 1$ y $c = 3$, calcule las abscisas de los extremos relativos de la función y clasifíquelos. [1 punto]

a) Si función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ significa que $f'(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-2ax+b \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3\cdot 1^2-2a\cdot 1+b \Rightarrow \boxed{3-2a+b=0}$$

Si la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = x + 3$ significa que la función y la recta tienen la misma pendiente y coinciden en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-ax^2+bx+c \\ y=x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=0+3 \Rightarrow 0^3-a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=3 \Rightarrow \boxed{c=3}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-2ax+b \rightarrow f'(0)=b \\ y=1\cdot x+3 \rightarrow \textit{pendiente}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0)=b=1 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

Juntando todo lo obtenido obtenemos el valor de *a*.

$$\left.\begin{array}{l} 3-2a+b=0 \\ b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3-2a+1=0 \Rightarrow 4=2a \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Los valores que cumplen lo pedido son $a = 2$, $b = 1$ y $c = 3$.

b) Para los valores $a = 2$, $b = 1$ y $c = 3$ la función queda $f(x)=x^3-2x^2+x+3$.

Hallamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=3x^2-4x+1 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3}=\frac{4\pm 2}{6}=\begin{cases} \frac{4+2}{6}=\boxed{1=x} \\ \frac{4-2}{6}=\boxed{\frac{1}{3}=x} \end{cases}$$

Clasificamos los puntos críticos usando el signo de la segunda derivada.

$$f'(x)=3x^2-4x+1 \Rightarrow f''(x)=6x-4 \Rightarrow \begin{cases} f''(1)=6(1)-4=2>0 \rightarrow \textit{Mínimo} \\ f''\left(\frac{1}{3}\right)=6\left(\frac{1}{3}\right)-4=-2<0 \rightarrow \textit{Máximo} \end{cases}$$

La función presenta un máximo relativo en $x=\frac{1}{3}$ y un mínimo relativo en $x=1$.

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real *a*.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+ay=2a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro *a*. [1 punto]
b) Resuelva el sistema para el caso *a = 1*. [1 punto]

a) El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2a \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix}=0-2+a-(2+0-a)=-4+2a$$

$$|A|=0 \Rightarrow -4+2a=0 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Estudiamos por separado las dos situaciones distintas que se nos plantean.

CASO 1. $a \neq 2$

En este caso el determinante de la matriz A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = 2$

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene rango 2 pues tiene un menor de orden 2 con determinante no nulo, consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna primeras → $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0$.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna (igual que la segunda columna) → $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=-4+2+0+6-4-0=0$. Al ser nulo el determinante de este menor el rango de la matriz ampliada no es 3. El rango de A/B es 2.

Rango de la matriz ampliada igual al rango de la matriz de coeficientes (2) menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a = 1$ el sistema queda $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ y=2-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2-2x+z=3 \\ x+2-2x-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+z=1 \\ -x-z=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=1+x \\ -x-z=-1 \end{cases} \Rightarrow -x-1-x=-1 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=1+0=1} \\ \boxed{y=2-2\cdot 0=2} \end{cases}$$

La solución del sistema para $a = 1$ es $x = 0, y = 2, z = 1$.

3. Considere el plano que tiene como vectores directores u = (–1, 3, 2) y v = (2, 1, 0) y que pasa por el punto A = (1, 0, 3).

a) Calcule la ecuación de la recta que es perpendicular al plano y pasa por el punto A. [1 punto]

b) Calcule la distancia del punto P = (1, 5, 0) al plano. [1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

a) Hallamos la ecuación del plano π que tiene como vectores directores $\vec{u} = (-1,3,2)$ y $\vec{v} = (2,1,0)$ y que pasa por el punto A (1, 0, 3).

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u} = (-1,3,2)\\ \vec{v} = (2,1,0)\\ A(1,0,3)\end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4y - (z-3) - 6(z-3) - 2(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y - z + 3 - 6z + 18 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : -2x + 4y - 7z + 23 = 0}$$

La recta r perpendicular al plano $\pi : -2x + 4y - 7z + 23 = 0$ tiene como vector director el vector normal del plano $\vec{v_r} = \vec{n} = (-2,4,-7)$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r} = \vec{n} = (-2,4,-7)\\ A(1,0,3) \in r\end{array}\right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 3 - 7\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Usamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi : -2x + 4y - 7z + 23 = 0\\ P(1,5,0)\end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi) = \frac{|-2\cdot 1 + 4\cdot 5 - 7\cdot 0 + 23|}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-7)^2}} = \frac{41}{\sqrt{63}}$$

La distancia del punto P al plano tiene un valor de $\dfrac{41}{\sqrt{63}} \simeq 4.94$ unidades.

4. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & \alpha\\ \alpha & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, en la que α es un parámetro real.

a) Existe algún valor $\alpha\in\mathbb{R}$ de tal que A no tenga inversa para este valor? [1 punto]

b) Calcule la matriz inversa de A^2 para $\alpha=0$. [1 punto]

a) Para que la matriz no tenga inversa su determinante debe ser nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & \alpha\\ \alpha & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=0+0-\alpha^2-0-0-1=-\alpha^2-1$$

$$|A|=0\Rightarrow -\alpha^2-1=0\Rightarrow \alpha^2=-1\Rightarrow \alpha=\sqrt{-1}=No\,existe$$

El determinante de la matriz A nunca se anula y por tanto, no existe ningún valor de α para el cual la matriz A no tenga inversa.

b) Para $\alpha=0$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Determinamos la expresión de la matriz A^2.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0 & 0+0-0 & 0+0+0\\ 0+0-2 & 0+0+1 & 0+0-1\\ 2-0+2 & 0+0-1 & 0+1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de A^2.

$$\left(A^2\right)^{-1}=\frac{Adj\left(A^2\right)^T}{\left|A^2\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

5. Considere los puntos del espacio tridimensional $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 5, 0)$ y $C = (1, 0, 0)$ y la recta $r : x = y - 1 = \frac{z}{2}$.

a) Encuentre el punto de intersección de la recta r con el plano que pasa por los puntos A, B y C. [1 punto]

b) Encuentre los puntos P de la recta r para los cuales el tetraedro de vértices P, A, B y C tiene un volumen de $2u^3$. [1 punto]

NOTA: El volumen de un tetraedro de vértices P, Q, R y S puede calcularse con la expresión $\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}\right)\right|$.

a) Hallamos la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{matrix} A(1,1,0) \\ B(3,5,0) \\ C(1,0,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3,5,0) - (1,1,0) = (2,4,0) \\ \overrightarrow{AC} = (1,0,0) - (1,1,0) = (0,-1,0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2,4,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,-1,0) \\ C(1,0,0) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : z = 0}$$

Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r.

$$r : \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{2} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,2) \\ P_r(0,1,0) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto de intersección de recta y plano resolviendo el sistema formado por sus respectivas ecuaciones.

$$\left.\begin{matrix} \pi : z = 0 \\ r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 0 = 1 \\ z = 2 \cdot 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P_r(0,1,0)}$$

El punto de corte de recta y plano es el punto $P_r(0,1,0)$.

b) Un punto de la recta r tiene coordenadas $(\lambda, 1+\lambda, 2\lambda)$.

Utilizamos la fórmula del volumen del tetraedro para los puntos P, A, B y C.

$$\left.\begin{matrix} A(1,1,0) \\ B(3,5,0) \\ C(1,0,0) \\ P(\lambda, 1+\lambda, 2\lambda) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3,5,0) - (1,1,0) = (2,4,0) \\ \overrightarrow{AC} = (1,0,0) - (1,1,0) = (0,-1,0) \\ \overrightarrow{AP} = (\lambda, 1+\lambda, 2\lambda) - (1,1,0) = (\lambda - 1, \lambda, 2\lambda) \end{cases}$$

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}\right)=\begin{vmatrix}2 & 4 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ \lambda-1 & \lambda & 2\lambda\end{vmatrix}=-4\lambda$$

$$Volumen\,PABC=\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}\right)\right|=\frac{1}{6}\left|-4\lambda\right|=\frac{4|\lambda|}{6}=\frac{2|\lambda|}{3}$$

Obtenemos los valores del parámetro λ para los cuales este volumen vale 2 unidades cúbicas.

$$Volumen\,PABC=2\Rightarrow\frac{2|\lambda|}{3}=2\Rightarrow|\lambda|=3\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-3\\ \lambda=3\end{cases}$$

Para $\lambda=-3$ el punto buscado es $P_1\left(-3,1-3,2\left(-3\right)\right)=\left(-3,-2,-6\right)$.

Para $\lambda=3$ el punto buscado es $P_2\left(3,1+3,2\cdot3\right)=\left(3,4,6\right)$.

6. Sean las funciones $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=3-x^2$.

a) Esboce las gráficas de las parábolas $y=f(x)$ e $y=g(x)$ en un mismo sistema de ejes cartesianos y encuentre los puntos de corte con el eje de abscisas, los vértices y los puntos de corte entre las dos gráficas. [1 punto]

b) Calcule el área de la región del semiplano $y \geq 0$ comprendida entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. [1 punto]

a) Las gráficas de las dos funciones son dos parábolas. Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-1 \\ g(x)=3-x^2 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-1=3-x^2 \Rightarrow 2x^2=4 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{2}}$$

Hallamos los puntos de corte con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-1 \\ Eje\ abscisas \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1 \Rightarrow A(-1,0) \text{ y } B(1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=3-x^2 \\ Eje\ abscisas \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3-x^2=0 \Rightarrow 3=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow C\left(-\sqrt{3},0\right) \text{ y } D\left(\sqrt{3},0\right)$$

Hallamos los vértices de las parábolas usando la derivada.

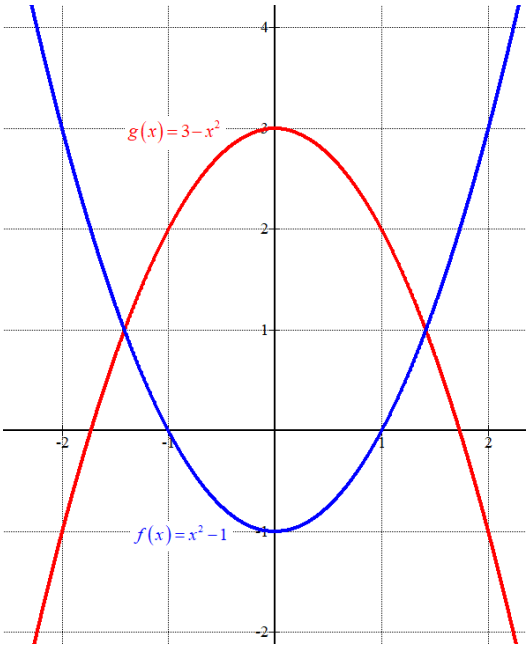
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-1 \Rightarrow f'(x)=2x \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow V_f(0,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=3-x^2 \Rightarrow g'(x)=-2x \\ g'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow V_g(0,3)$$

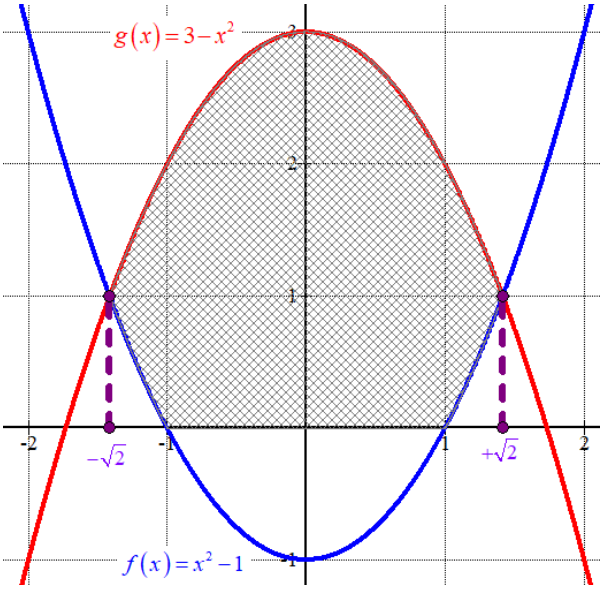
Obtenemos una tabla de valores y dibujamos ambas gráficas.

x	$f(x)=x^2-1$
−2	3
−1	0
0	−1
1	0
2	3

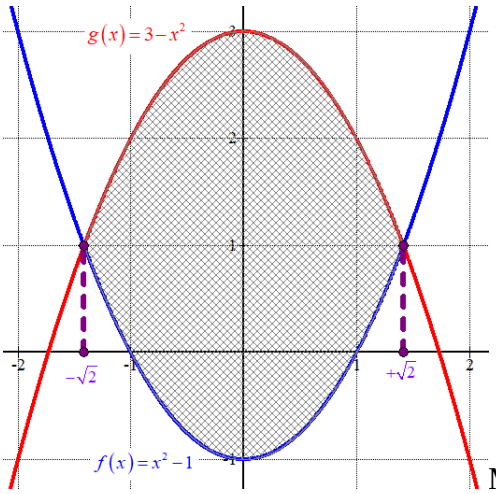
x	$g(x)=3-x^2$
−2	−1
−1	2
0	3
1	2
2	−1



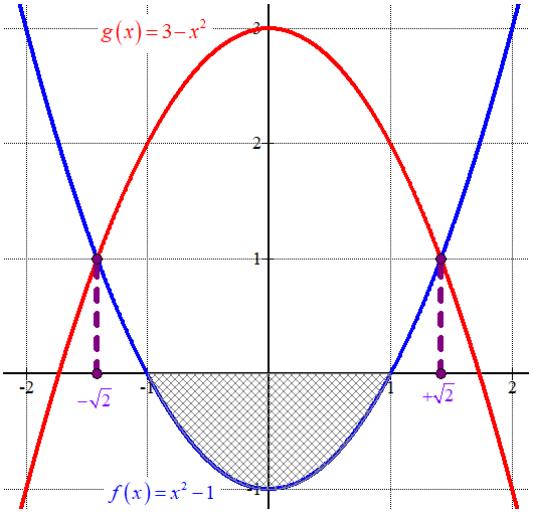
b) Nos piden calcular el área de la zona coloreada del dibujo.



Calculamos el área hallando el área de la región del plano limitada por ambas gráficas menos el área de la región limitada entre el eje de abscisas y la gráfica de la función $f(x)=x^2-1$.



MENOS



$$\text{Área grande}=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} g(x)-f(x)\,dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 3-x^2-\left(x^2-1\right)dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4-2x^2dx=\left[4x-\frac{2}{3}x^3\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=$$

$$=\left[4\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{2}^3\right]-\left[4\left(-\sqrt{2}\right)-\frac{2}{3}\left(-\sqrt{2}\right)^3\right]=4\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}+4\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Área pequeña}=\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\right|=\left|\int_{-1}^{1} x^2-1dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}\right|=\left|\left[\frac{1}{3}-1\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}-(-1)\right]\right|=\left|\frac{-4}{3}\right|=\frac{4}{3}$$

El área de la región del semiplano $y\geq 0$ comprendida entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tiene un valor de $\frac{16\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{3}\simeq 6.21$ unidades cuadradas.

PAU junio (serie 1) 2018

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Convocatòria 2018

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Sean las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $M \cdot N$ y compruebe que la matriz resultante no es invertible.
[1 punto]

b) Encuentre los valores de *t* para los cuales la matriz $N \cdot M$ es invertible.
[1 punto]

2. Sea *r* la recta que pasa por los puntos A = (0, 1, 1) y B = (1, 1, –1)

a) Encuentre la ecuación paramétrica de la recta *r*.
[1 punto]

b) Calcule todos los puntos de la recta *r* que están a la misma distancia de los planos $\pi_1 : x + y = -2$ y $\pi_2 : x - z = 1$.
[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3. Sea la función $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica y que es paralela a la recta de ecuación $x + 3y = 0$.
[1 punto]

b) Calcule, si existen, los puntos de la gráfica en los que la función presenta un máximo o mínimo relativo o un punto de inflexión.
[1 punto]

4. Considere los puntos P = (3, –2, 1), Q = (5, 0, 3), R = (1, 2, 3) y la recta $r: \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2y+3z-5=0 \end{cases}$.

a) Determine la ecuación general (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por P y Q y es paralelo a la recta r.
[1 punto]

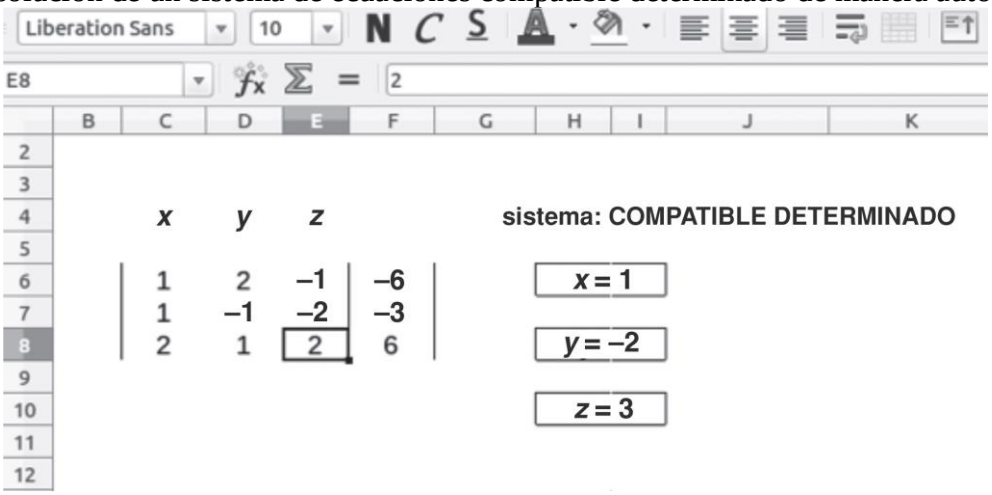
b) Dados el plano $x+2y+m\cdot z=7$ y el plano que pasa por P, Q y R, encuentre m para que sean paralelos y no coincidentes.
[1 punto]

5. Sea la función $f(x)=\sqrt{x}+x-2$.

a) Compruebe que la función $f(x)$ cumple el enunciado del teorema de Bolzano en el intervalo [0, 2] y que, por lo tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo (0, 2). Compruebe que $x = 1$ es una solución de la ecuación $f(x) = 0$ y razone, teniendo en cuenta el signo de $f'(x)$, que la solución es única.
[1 punto]

b) A partir del resultado final del apartado anterior, encuentre el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.
[1 punto]

6. Unos estudiantes de bachillerato han programado una hoja de cálculo como la de la siguiente figura que da la solución de un sistema de ecuaciones compatible determinado de manera automática:



a) Escriba el sistema y compruebe que los valores propuestos como solución son correctos.
[1 punto]

b) ¿Qué valor debería ponerse en lugar del 2 que está enmarcado en la imagen, correspondiente a la celda E8 (a_{33} de la matriz de coeficientes), para que el sistema fuera incompatible?
[1 punto]

SOLUCIONES

1. Sean las matrices $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ t & 2\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}-1 & t & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

a) Calcule $M\cdot N$ y compruebe que la matriz resultante no es invertible. [1 punto]

b) Encuentre los valores de *t* para los cuales la matriz $N\cdot M$ es invertible. [1 punto]

a) Determinamos la expresión de la matriz $M\cdot N$.

$$M\cdot N=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ t & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & t & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2 & t+0 & 2-2\\ 0-1 & 0+0 & 0+1\\ -t+2 & t^2+0 & 2t-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 2-t & t^2 & 2t-2\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{2\ \cdot\ 2}\times 3\longrightarrow 3\times 3$$

Calculamos el valor de su determinante.

$$|M\cdot N|=\begin{vmatrix}1 & t & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 2-t & t^2 & 2t-2\end{vmatrix}=0+t(2-t)+0-0+t(2t-2)-t^2=2t-t^2+2t^2-2t-t^2=0$$

Al tener un valor nulo el determinante la matriz $M\cdot N$ no tiene inversa.

b) Determinamos la expresión de la matriz $N\cdot M$.

$$N\cdot M=\begin{pmatrix}-1 & t & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ t & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+0+2t & -2-t+4\\ 1+0-t & 2-0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t-1 & 2-t\\ 1-t & 0\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3\ \cdot\ 3}\times 2\longrightarrow 2\times 2$$

Calculamos el valor de su determinante.

$$|N\cdot M|=\begin{vmatrix}2t-1 & 2-t\\ 1-t & 0\end{vmatrix}=-(2-t)(1-t)$$

Este determinante se anula para $t=2$ y $t=1$.
La matriz $N\cdot M$ es invertible para cualquier valor de *t* distinto de 1 y de 2.

2. Sea *r* la recta que pasa por los puntos A = (0, 1, 1) y B = (1, 1, –1)
a) Encuentre la ecuación paramétrica de la recta *r*. [1 punto]
b) Calcule todos los puntos de la recta *r* que están a la misma distancia de los planos $\pi_1 : x+y=-2$ y $\pi_2 : x-z=1$. [1 punto]
NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

a) Hallamos la ecuación de la recta.

$$\left.\begin{matrix} A(0,1,1)\in r \\ B(1,1,-1)\in r \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}=(1,1,-1)-(0,1,1)=(1,0,-2) \left.\begin{matrix} \\ A(0,1,1)\in r \end{matrix}\right\} \Rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=1-2\lambda \end{cases} ;\lambda\in\mathbb{R}$$

La ecuación paramétrica de la recta *r* tiene la expresión: $r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=1-2\lambda \end{cases} ;\lambda\in\mathbb{R}$.

b) Un punto P perteneciente a la recta tiene las coordenadas $P(\lambda,1,1-2\lambda)$.
Calculamos la expresión de la distancia del punto P a cada uno de los planos e igualamos dichas expresiones.

$$\left.\begin{matrix} P(\lambda,1,1-2\lambda) \\ \pi_1 : x+y+2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(P,\pi_1)=\frac{|\lambda+1+2|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{|\lambda+3|}{\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{matrix} P(\lambda,1,1-2\lambda) \\ \pi_2 : x-z-1=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(P,\pi_2)=\frac{|\lambda-1+2\lambda-1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{|3\lambda-2|}{\sqrt{2}}$$

$$d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2)\Rightarrow \frac{|\lambda+3|}{\sqrt{2}}=\frac{|3\lambda-2|}{\sqrt{2}}\Rightarrow |\lambda+3|=|3\lambda-2|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda+3=3\lambda-2\rightarrow 5=2\lambda\rightarrow \boxed{\lambda=\frac{5}{2}} \\ \lambda+3=-(3\lambda-2)\rightarrow \lambda+3=-3\lambda+2\rightarrow 4\lambda=-1\rightarrow \boxed{\lambda=\frac{-1}{4}} \end{cases}$$

Tenemos dos puntos que cumplen lo pedido.
Para $\lambda=\frac{5}{2}$ el punto es $P_1\left(\frac{5}{2},1,-4\right)$.

Para $\lambda=\frac{-1}{4}$ el punto es $P_2\left(\frac{-1}{4},1,\frac{3}{2}\right)$.

3. Sea la función $f(x)=x^3-x^2$.

a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica y que es paralela a la recta de ecuación $x+3y=0$. [1 punto]

b) Calcule, si existen, los puntos de la gráfica en los que la función presenta un máximo o mínimo relativo o un punto de inflexión. [1 punto]

a) Si la recta tangente a la gráfica en $x=a$ es paralela a la recta de ecuación $x+3y=0$ entonces tiene la misma pendiente que la recta $x+3y=0\rightarrow 3y=-x\rightarrow y=\frac{-1}{3}x$, siendo su pendiente $\frac{-1}{3}$.

La derivada de la función en $x=a$ debe valer $\frac{-1}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-x^2\Rightarrow f'(x)=3x^2-2x \\ f'(a)=\frac{-1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{-1}{3}=3a^2-2a\Rightarrow -1=9a^2-6a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9a^2-6a+1=0\Rightarrow a=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 9\cdot 1}}{2\cdot 9}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

La recta tangente a la gráfica que cumple lo pedido es tangente en $x=\frac{1}{3}$.

Hallamos la ecuación de esta recta tangente.

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{-2}{27} \\ f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{-1}{3} \\ y-f\left(\frac{1}{3}\right)=f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow y+\frac{2}{27}=\frac{-1}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow y+\frac{2}{27}=\frac{-1}{3}x+\frac{1}{9}\Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{3}x+\frac{1}{27}}$$

La recta buscada tiene ecuación $y=\frac{-1}{3}x+\frac{1}{27}$.

b) Hallamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-2x \\ f'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow 3x^2-2x=0\Rightarrow x(3x-2)=0\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x=0} \\ 3x-2=0\rightarrow 3x=2\rightarrow \boxed{x=\frac{2}{3}}\end{array}\right.$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en cada uno de los puntos críticos.

$$f'(x)=3x^2-2x\Rightarrow f''(x)=6x-2\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f''(0)=-2<0\rightarrow \textit{Máximo} \\ f''\left(\frac{2}{3}\right)=6\left(\frac{2}{3}\right)-2=2>0\rightarrow \textit{Mínimo}\end{array}\right.$$

La función tiene un máximo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x=\frac{2}{3}$.

Como $f(0)=0^3-0^2=0$ el máximo relativo tiene coordenadas $A(0,0)$.

Como $f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{-4}{27}$ el máximo relativo tiene coordenadas $B\left(\frac{2}{3},\frac{-4}{27}\right)$.

Buscamos los posibles puntos de inflexión averiguando cuando se anula la segunda derivada.

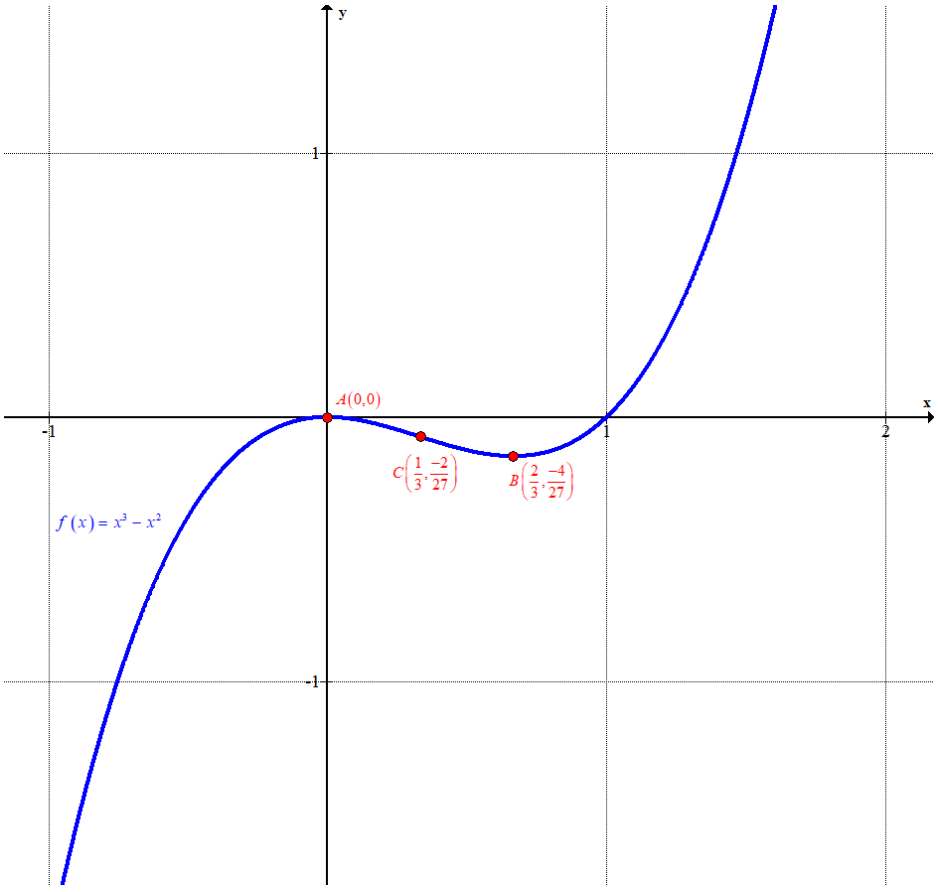
$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=6x-2 \\ f''(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x-2=0 \Rightarrow 6x=2 \Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}}$$

Comprobamos que la derivada tercera no se anula para $x=\frac{1}{3}$.

$$f''(x)=6x-2 \Rightarrow f'''(x)=6 \Rightarrow f'''\left(\frac{1}{3}\right)=6\neq 0$$

La función presenta un punto de inflexión en $x=\frac{1}{3}$.

Como $f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{-2}{27}$ el máximo relativo tiene coordenadas $C\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{27}\right)$.



4. Considere los puntos P = (3, –2, 1), Q = (5, 0, 3), R = (1, 2, 3) y la recta $r:\begin{cases}x+y+1=0\\2y+3z-5=0\end{cases}$.

a) Determine la ecuación general (es decir, que tiene la forma *Ax* + *By* + *Cz* = *D*) del plano que pasa por *P* y *Q* y es paralelo a la recta *r*. [1 punto]

b) Dados el plano $x+2y+m\cdot z=7$ y el plano que pasa por *P*, *Q* y *R*, encuentre *m* para que sean paralelos y no coincidentes. [1 punto]

a) Si el plano es paralelo a la recta el vector director de la recta es un vector director del plano. Otro vector director del plano es $\overrightarrow{PQ}$.

Hallamos un vector director de la recta como el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen.

$$r:\begin{cases}x+y+1=0\to\vec{n}=(1,1,0)\\2y+3z-5=0\to\vec{n'}=(0,2,3)\end{cases}\Rightarrow\vec{v_r}=\vec{n}\times\vec{n'}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&1&0\\0&2&3\end{vmatrix}=3i+2k-3j=(3,-3,2)$$

Hallamos la ecuación del plano pedido-

$$\left.\begin{aligned}&\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(5,0,3)-(3,-2,1)=(2,2,2)\\&\vec{v}=\vec{v_r}=(3,-3,2)\\&Q(5,0,3)\in\pi\end{aligned}\right\}\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix}x-5&y&z-3\\2&2&2\\3&-3&2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-5)+6y-6(z-3)-6(z-3)-4y+6(x-5)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-20+6y-6z+18-6z+18-4y+6x-30=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x+2y-12z-14=0\Rightarrow\boxed{\pi:5x+y-6z-7=0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi:5x+y-6z-7=0$.

b) Hallamos la ecuación del plano que contiene a los puntos P, Q y R.

$$\left.\begin{aligned}&\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(5,0,3)-(3,-2,1)=(2,2,2)\\&\vec{v}=\overrightarrow{PR}=(1,2,3)-(3,-2,1)=(-2,4,2)\\&Q(5,0,3)\in\pi\end{aligned}\right\}\Rightarrow\pi':\begin{vmatrix}x-5&y&z-3\\2&2&2\\-2&4&2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-20-4y+8z-24+4z-12-4y-8x+40=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x-8y+12z-16=0\Rightarrow\boxed{\pi':x+2y-3z+4=0}$$

Para que sean paralelos los planos $x+2y+m\cdot z=7$ y $\pi':x+2y-3z=-4$ deben tener vectores normales que indiquen la misma dirección, es decir, con coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+m\cdot z=7\rightarrow \vec{n}=(1,2,m) \\ \pi': x+2y-3z+4=0\rightarrow \vec{n'}=(1,2,-3) \\ \vec{n}\,||\,\vec{n'} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{m}{-3}\Rightarrow \boxed{m=-3}$$

Para $m=-3$ los planos son paralelos o coincidentes.
Para este valor los planos son $x+2y-3z=7$ y $\pi': x+2y-3z=-4$. Se observa que no son coincidentes y por tanto son paralelos.

5. Sea la función $f(x)=\sqrt{x}+x-2$.

a) Compruebe que la función *f*(*x*) cumple el enunciado del teorema de Bolzano en el intervalo $[0,\ 2]$ y que, por lo tanto, la ecuación *f*(*x*) = 0 tiene alguna solución en el intervalo (0, 2). Compruebe que *x* = 1 es una solución de la ecuación *f*(*x*) = 0 y razone, teniendo en cuenta el signo de *f* ′(*x*), que la solución es única. [1 punto]

b) A partir del resultado final del apartado anterior, encuentre el área limitada por la gráfica de la función *f*(*x*), el eje de abscisas y las rectas *x* = 0 y *x* = 1. [1 punto]

a) La función $f(x)=\sqrt{x}+x-2$ es continua en el intervalo $[0,\ 2]$ pues $x\geq 0$ y por tanto existe la raíz cuadrada.

Tenemos que $f(0)=\sqrt{0}+0-2=-2<0$ y $f(2)=\sqrt{2}+2-2=\sqrt{2}>0$. La función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[0,\ 2]$.

Se cumplen los requisitos del teorema de Bolzano y podemos aplicarlo a la función $f(x)=\sqrt{x}+x-2$ en el intervalo $[0,\ 2]$ y afirmar que existe $c\in(0,2)$ tal que $f(c)=0$.

Comprobamos que $f(1)=0$.

$$f(1)=\sqrt{1}+1-2=1+1-2=0$$

Calculamos la derivada de la función.

$$f(x)=\sqrt{x}+x-2\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+1$$

En el intervalo $[0,\ 2]$ la derivada siempre es positiva, por lo que la función es creciente en dicho intervalo. Como $f(0)=-2<0$, $f(1)=0$ y $f(2)=\sqrt{2}>0$ no puede existir en el intervalo otra solución de la ecuación *f*(*x*) = 0.

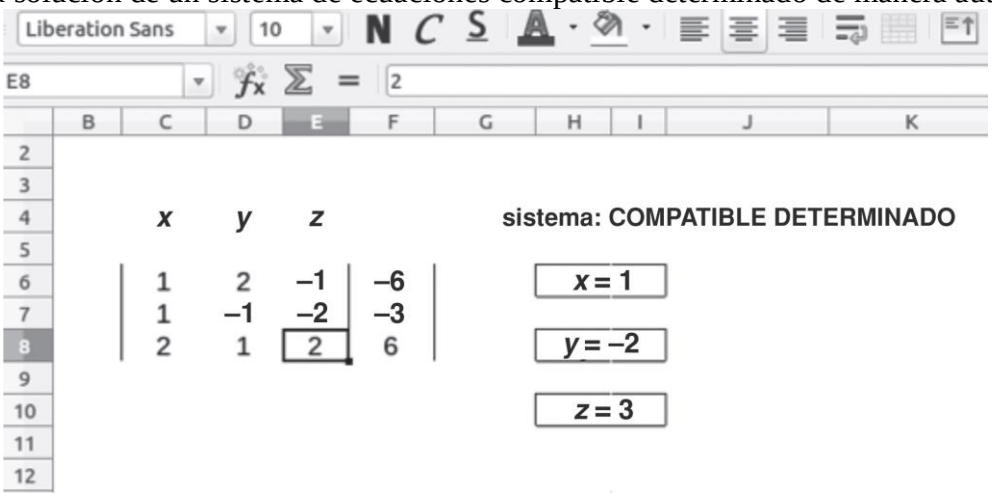
b) Como la función solo corta el eje de abscisas en $x=1$ y toma valores negativos entre 0 y 1 el área limitada por la gráfica de la función *f*(*x*), el eje de abscisas y las rectas *x* = 0 y *x* = 1 es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y 1.

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \sqrt{x}+x-2\,dx=\int_0^1 x^{1/2}+x-2\,dx=\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{1^{3/2}}{3/2}+\frac{1^2}{2}-2\cdot 1\right]-\left[\frac{0^{3/2}}{3/2}+\frac{0^2}{2}-2\cdot 0\right]=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-2=\boxed{\frac{-5}{6}\simeq -0.833}$$

El área limitada por la gráfica de la función *f*(*x*), el eje de abscisas y las rectas *x* = 0 y *x* = 1 tiene un valor de $\frac{5}{6}\simeq 0.833$ unidades cuadradas.

6. Unos estudiantes de bachillerato han programado una hoja de cálculo como la de la siguiente figura que da la solución de un sistema de ecuaciones compatible determinado de manera automática:



a) Escriba el sistema y compruebe que los valores propuestos como solución son correctos. [1 punto]

b) ¿Qué valor debería ponerse en lugar del 2 que está enmarcado en la imagen, correspondiente a la celda E8 (a_{33} de la matriz de coeficientes), para que el sistema fuera incompatible? [1 punto]

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones con matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -6\\ 1 & -1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & 2 & 6\end{pmatrix}$.

$$A/B=\left.\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -6\\ 1 & -1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & 2 & 6\end{pmatrix}\right\Rightarrow\left.\begin{matrix}x+2y-z=-6\\ x-y-2z=-3\\ 2x+y+2z=6\end{matrix}\right\}$$

Comprobamos que la solución del sistema es $x=1, y=-2,\ z=3$ sustituyendo estos valores en el sistema y viendo que se cumplen las tres igualdades.

$$\left.\begin{matrix}x+2y-z=-6\\ x-y-2z=-3\\ 2x+y+2z=6\\ x=1, y=-2,\ z=3\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}1+2(-2)-3=-6\\ 1-(-2)-2\cdot 3=-3\\ 2\cdot 1-2+2\cdot 3=6\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}1-4-3=-6\\ 1+2-6=-3\\ 2-2+6=6\end{matrix}\right\}$$

Se cumplen las tres igualdades y la solución del sistema es correcta.

b) Cambiamos el valor 2 por un parámetro *m*.

$$A/B=\left.\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -6\\ 1 & -1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & m & 6\end{pmatrix}\right\Rightarrow\left.\begin{matrix}x+2y-z=-6\\ x-y-2z=-3\\ 2x+y+mz=6\end{matrix}\right\}$$

Para ser incompatible debe ser nulo el determinante de la matriz de coeficientes

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -2\\ 2 & 1 & m\end{pmatrix}$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -2\\ 2 & 1 & m\end{vmatrix}=-m-8-1-2-2m+2=-3m-9$$

$$|A|=0\Rightarrow -3m-9=0\Rightarrow 3m=-9\Rightarrow \boxed{m=\frac{-9}{3}=-3}$$

Para $m=-3$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Su rango es 2 pues podemos considerar el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna y fila terceras.

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1-2=-3\neq 0$$

Como tiene un valor no nulo el rango de A es 2.

Para $m=-3$ determinamos el rango de la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -6\\ 1 & -1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & -3 & 6\end{pmatrix}$.

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la tercera columna.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -6\\ 1 & -1 & -3\\ 2 & 1 & 6\end{vmatrix}=-6-12-6-12-12+3=-45\neq 0$$

Como el determinante del menor de orden 3 de la matriz A/B es no nulo su rango es 3.
El rango de la matriz de coeficientes A es 2 distinto del rango de la matriz ampliada A/B, por lo que el sistema es incompatible para $m=-3$.
Se debería cambiar el 2 por –3 para conseguir un sistema incompatible.

PAU junio (serie 5) 2018

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Convocatòria 2018

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 5

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 6x+3y+2z=5 \\ 3x+4y+6z=3 \\ x+3y+2z=m \end{cases}$, para $m \in \mathbb{R}$.

a) Explique razonadamente que para cualquier valor del parámetro *m* el sistema tiene una única solución.
[1 punto]

b) Resuelva el sistema y encuentre la expresión general del punto solución.
[1 punto]

2. Sean el plano de ecuación $\pi : x+y-z=0$ y el punto $P=(2,3,2)$.

a) Calcule el punto simétrico del punto *P* respecto del plano π.
[1 punto]

b) Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) de los dos planos paralelos a π que están a una distancia $\sqrt{3}$ del punto *P*.
[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3. Sea la función $f(x) = a \cdot e^{-x^2+bx}$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

a) Calcule los valores de *a* y de *b* para los cuales la función tiene un extremo relativo en el punto (1, e).
[1 punto]

b) Para el caso $a=3$ y $b=5$, calcule la asíntota horizontal de la función *f* cuando *x* tiende a $+\infty$.
[1 punto]

4. Se sabe que una función *f*(*x*) está definida para todos los números reales y que es derivable dos veces. Se sabe también que tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=2$, que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f*(*x*) en este punto es $y=-124x+249$ y que $f(-3)=-4$.

a) Calcule $f''(2)$, $f'(2)$ y $f(2)$.

[1 punto]

b) Calcule $\int_{-3}^{2} f'(x)\,dx$.

[1 punto]

5. Sean las rectas $r_1: x-1=\dfrac{y-2}{-1}=z-5$ y $r_2:(x,y,z)=(2-3\lambda,-1+\lambda,2)$.

a) Encuentre la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma *Ax* + *By* + *Cz* = *D*) del plano que contiene la recta r_1 y es paralelo a la recta r_2.

[1 punto]

b) Indique qué condición debe cumplirse para que exista un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2. Con las rectas r_1 y r_2 del enunciado, compruebe si existe un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2.

[1 punto]

6. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Si $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 3, calcule para qué valores de *k* la matriz $A+kI$ tiene inversa. Encuentre, si existe, la matriz inversa de $A-2I$.

[1 punto]

b) Calcule la matriz X que satisface la ecuación $X\cdot A+A^T=2\cdot X$, donde A^T es la matriz transpuesta de la matriz A.

[1 punto]

SOLUCIONES

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 6x+3y+2z=5 \\ 3x+4y+6z=3 \\ x+3y+2z=m \end{cases}$, para $m \in \mathbb{R}$.

a) Explique razonadamente que para cualquier valor del parámetro *m* el sistema tiene una única solución. [1 punto]

b) Resuelva el sistema y encuentre la expresión general del punto solución. [1 punto]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & m \end{pmatrix}$.

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=48+18+\cancel{18}-8-\cancel{18}-108=-50\neq 0$$

Como el determinante de A es no nulo el rango de la matriz A es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución) para cualquier valor del parámetro *m*.

b) Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & m \end{pmatrix}\Rightarrow\{Fila\,3^a\leftrightarrow Fila\,1^a\}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & m \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3^a-6\cdot Fila\,1^a & & & \\ 6 & 3 & 2 & 5 \\ -6 & -18 & -12 & -6m \\ \hline 0 & -15 & -10 & 5-6m\rightarrow Nueva\ Fila\,3^a \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,2^a-3\cdot Fila\,1^a & & & \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ -3 & -9 & -6 & -3m \\ \hline 0 & -5 & 0 & 3-3m\rightarrow Nueva\ Fila\,2^a \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & m \\ 0 & -5 & 0 & 3-3m \\ 0 & -15 & -10 & 5-6m \end{pmatrix}\Rightarrow\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3^a-3\cdot Fila\,2^a & & & \\ 0 & -15 & -10 & 5-6m \\ 0 & 15 & 0 & -9+9m \\ \hline 0 & 0 & -10 & -4+3m\rightarrow Nueva\ Fila\,3^a \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & m \\ 0 & -5 & 0 & 3-3m \\ 0 & 0 & -10 & -4+3m \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+2z=m \\ -5y=3-3m \\ -10z=-4+3m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+2z=m \\ \boxed{y=\dfrac{3-3m}{-5}=\dfrac{3m-3}{5}} \\ \boxed{z=\dfrac{-4+3m}{-10}=\dfrac{4-3m}{10}} \end{array}\right\} \Rightarrow x+3\frac{3m-3}{5}+2\frac{4-3m}{10}=m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+\frac{9m-9}{5}+\frac{8-6m}{10}=m \Rightarrow 10x+2\left(9m-9\right)+8-6m=10m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x+18m-18+8-6m=10m \Rightarrow 10x=-2m+10 \Rightarrow \boxed{x=\frac{10-2m}{10}=\frac{5-m}{5}}$$

El punto solución del sistema es $\left(\dfrac{5-m}{5},\dfrac{3m-3}{5},\dfrac{4-3m}{10}\right)$.

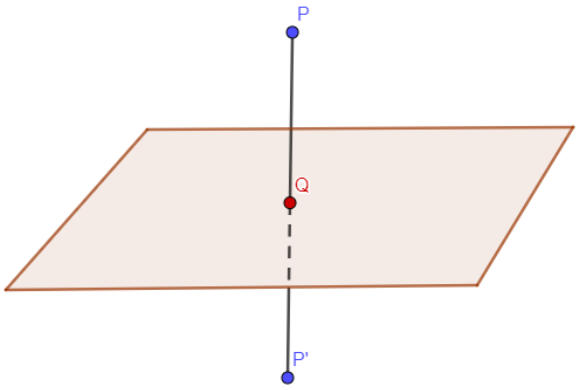
2. Sean el plano de ecuación $\pi: x+y-z=0$ y el punto $P=(2,3,2)$.

a) Calcule el punto simétrico del punto *P* respecto del plano π. [1 punto]

b) Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) de los dos planos paralelos a π que están a una distancia $\sqrt{3}$ del punto *P*. [1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

a) Debemos hallar las coordenadas del punto P´ del dibujo.



Hallamos la ecuación de la recta *r* perpendicular al plano que pasa por el punto P. Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: x+y-z=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=\vec{n}=(1,1,-1)\\ P=(2,3,2)\in r\end{array}\right\} \Rightarrow r:\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=2-\lambda\end{cases};\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Hallamos las coordenadas del punto Q intersección de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=2-\lambda\end{cases}\\ \pi: x+y-z=0\end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{2}+\lambda+3+\lambda-\cancel{2}+\lambda=0 \Rightarrow 3\lambda=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow \begin{cases}x=2-1=1\\ y=3-1=2\\ z=2+1=3\end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(1,2,3)}$$

Hallamos las coordenadas del punto P´ como el resultado de sumarle al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (1,2,3) - (2,3,2) = (-1,-1,1)$$

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = (1,2,3) + (-1,-1,1) = (0,1,4)$$

El punto simétrico del punto P respecto del plano π tiene coordenadas $P'(0,1,4)$.

b) Un plano paralelo a $\pi: x + y - z = 0$ tiene ecuación $\pi': x + y - z + D = 0$.

Hallamos la expresión de la distancia del punto P al plano π´.

$$\left.\begin{array}{l} \pi': x + y - z + D = 0 \\ P(2,3,2) \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi') = \frac{|2+3-2+D|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|D+3|}{\sqrt{3}}$$

Hacemos que la distancia del punto P al plano π´ sea $\sqrt{3}$.

$$d(P,\pi') = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{|D+3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow |D+3| = 3 \Rightarrow \begin{cases} D+3=3 \rightarrow \boxed{D=0} \\ D+3=-3 \rightarrow \boxed{D=-6} \end{cases}$$

Si $D = 0$ el plano tiene ecuación $\pi: x + y - z = 0$

Si $D = -6$ el plano tiene ecuación $\pi': x + y - z - 6 = 0$.

3. Sea la función $f(x)=a\cdot e^{-x^2+bx}$, con $a\neq 0$ y $b\neq 0$.

a) Calcule los valores de *a* y de *b* para los cuales la función tiene un extremo relativo en el punto (1, e). [1 punto]

b) Para el caso $a=3$ y $b=5$, calcule la asíntota horizontal de la función *f* cuando *x* tiende a $+\infty$. [1 punto]

a) Si la función tiene un extremo relativo en el punto (1, e) se cumplen dos cosas: la función pasa por el punto (1, e), es decir, $f(1)=e$ y la derivada se anula para $x=1$, es decir, $f'(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=e \\ f(x)=a\cdot e^{-x^2+bx} \end{array}\right\} \Rightarrow e=a\cdot e^{-1^2+b} \Rightarrow e=a\cdot e^{b-1} \Rightarrow \frac{e}{e^{b-1}}=a \Rightarrow a=e^{1-b+1} \Rightarrow \boxed{a=e^{2-b}}$$

La función queda $f(x)=e^{2-b}\cdot e^{-x^2+bx}=e^{-x^2+bx-b+2}$.

$$f(x)=e^{-x^2+bx-b+2} \Rightarrow f'(x)=e^{-x^2+bx-b+2}(-2x+b) \left.\begin{array}{r} \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=e^{-1^2+b-b+2}(-2+b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=e\cdot(-2+b) \Rightarrow -2+b=0 \Rightarrow \boxed{b=2}$$

Para $b=2$ tenemos que $a=e^{2-2}=e^0=1$.
Los valores buscados son $a=1$ y $b=2$.

b) Para el caso $a=3$ y $b=5$ la función queda $f(x)=3\cdot e^{-x^2+5x}$.
Calculamos el límite de la función cuando *x* tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 3\cdot e^{-x^2+5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{e^{x^2-5x}}=\frac{3}{e^{+\infty}}=\frac{3}{+\infty}=0$$

La asíntota horizontal de la función tiene ecuación $y=0$.

4. Se sabe que una función *f*(*x*) está definida para todos los números reales y que es derivable dos veces. Se sabe también que tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=2$, que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f*(*x*) en este punto es $y=-124x+249$ y que $f(-3)=-4$.

a) Calcule $f''(2)$, $f'(2)$ y $f(2)$. [1 punto]

b) Calcule $\int_{-3}^{2} f'(x)\,dx$. [1 punto]

a) Si tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=2$ la derivada segunda se anula para este valor → $f''(2)=0$.

Si la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f*(*x*) en $x=2$ es $y=-124x+249$ entonces la pendiente de la recta tangente es –124 que es el valor de la derivada en $x=2$ → $f'(2)=-124$.

Al ser la recta $y=-124x+249$ tangente a la función en $x=2$ el valor de la función coincide con el valor de la recta para este valor → $f(2)=-124\cdot 2+249=1$.

b) $\int_{-3}^{2} f'(x)\,dx=\left[f(x)\right]_{-3}^{2}=f(2)-f(-3)=1-(-4)=5$.

5. Sean las rectas $r_1 : x-1=\dfrac{y-2}{-1}=z-5$ y $r_2 : (x,y,z)=(2-3\lambda,-1+\lambda,2)$.

a) Encuentre la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma *Ax + By + Cz = D*) del plano que contiene la recta r_1 y es paralelo a la recta r_2. [1 punto]

b) Indique qué condición debe cumplirse para que exista un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2. Con las rectas r_1 y r_2 del enunciado, compruebe si existe un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2. [1 punto]

a) El plano π que contiene la recta r_1 y es paralelo a la recta r_2 tiene como vectores directores los vectores directores de las dos rectas y contiene el punto $P_1(1,2,5)$ de la recta r_1.

$$r_1 : \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-5}{1}\Rightarrow\begin{cases}\vec{v_1}=(1,-1,1)\\ P_1(1,2,5)\end{cases}$$

$$r_2 : (x,y,z)=(2-3\lambda,-1+\lambda,2)\Rightarrow r_2 :\begin{cases}x=2-3\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u_2}=(-3,1,0)\\ Q_2(2,-1,2)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=\vec{v_1}=(1,-1,1)\\ \vec{u}=\vec{u_2}=(-3,1,0)\\ P_1(1,2,5)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi :\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z-5\\ 1 & -1 & 1\\ -3 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

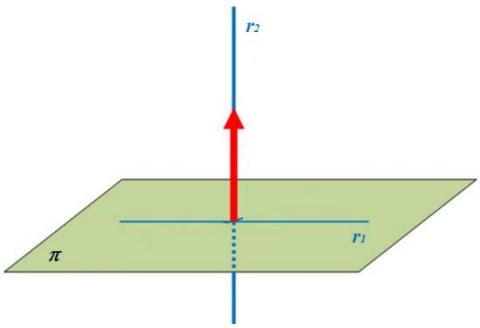
$$\Rightarrow -3(y-2)+z-5-3(z-5)-x+1=0\Rightarrow -3y+6+z-5-3z+15-x+1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-3y-2z+17=0\Rightarrow \boxed{\pi : x+3y+2z-17=0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi : x+3y+2z-17=0$.

b) Para que exista un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2 los vectores directores de las rectas deben ser perpendiculares.

Estudiamos si el ángulo que forman nuestras rectas es de 90º, es decir, si su producto escalar vale cero.



$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_1}=(1,-1,1)\\ \vec{u_2}=(-3,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{v_1}\cdot\vec{u_2}=(1,-1,1)(-3,1,0)=$$

$$=-3-1+0=-4\neq 0$$

Los vectores directores no forman un ángulo de 90º y no existe el plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2.

6. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Si $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 3, calcule para qué valores de *k* la matriz $A+kI$ tiene inversa. Encuentre, si existe, la matriz inversa de $A-2I$. [1 punto]

b) Calcule la matriz X que satisface la ecuación $X\cdot A+A^T=2\cdot X$, donde A^T es la matriz transpuesta de la matriz A. [1 punto]

a) Obtenemos la expresión de la matriz $A+kI$.

$$A+kI=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+k & 0 & 1\\ 0 & -1+k & 0\\ 1 & 1 & 1+k\end{pmatrix}$$

Para que esta matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula este determinante.

$$|A+kI|=\begin{vmatrix}-1+k & 0 & 1\\ 0 & -1+k & 0\\ 1 & 1 & 1+k\end{vmatrix}=(-1+k)(-1+k)(1+k)-(-1+k)=$$

$$=(-1+k)\left[(-1+k)(1+k)-1\right]=(-1+k)\left[-1+k^2-1\right]=(-1+k)\left(k^2-2\right)$$

$$|A+kI|=0\Rightarrow(-1+k)\left(k^2-2\right)=0\Rightarrow\begin{cases}-1+k=0\rightarrow\boxed{k=1}\\ k^2-2=0\rightarrow k^2=2\rightarrow\boxed{k=\pm\sqrt{2}}\end{cases}$$

La matriz $A+kI$ tiene inversa si *k* es distinto de 1, de $-\sqrt{2}$ y de $+\sqrt{2}$.

Para $k=-2$ la matriz $A-2I$ tiene inversa. La calculamos.

$$A-2I=\begin{pmatrix}-1-2 & 0 & 1\\ 0 & -1-2 & 0\\ 1 & 1 & 1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$|A-2I|=\begin{vmatrix}-3 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-9+3=-6\neq 0$$

$$(A-2I)^{-1}=\frac{Adj\left((A-2I)^T\right)}{|A-2I|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-3&0&1\\0&-3&1\\1&0&-1\end{pmatrix}}{-6}=$$

$$=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-3&1\\0&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&-3\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\0&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}-3&1\\1&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-3&0\\1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&1\\-3&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-3&1\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}-3&0\\0&-3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}3&1&3\\0&2&0\\3&3&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2&-1/6&-1/2\\0&-1/3&0\\-1/2&-1/2&-3/2\end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$X\cdot A+A^T=2\cdot X\Rightarrow XA-2X=-A^T\Rightarrow X\left(A-2I\right)=-A^T\Rightarrow X=-A^T\left(A-2I\right)^{-1}$$

Determinamos la expresión de X.

$$X=-A^T\left(A-2I\right)^{-1}=-\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}3&1&3\\0&2&0\\3&3&9\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&3\\0&2&0\\3&3&9\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3+3&-1+3&-3+9\\3&-2+3&9\\3+3&1+3&3+9\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&2&6\\3&1&9\\6&4&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/3&1\\1/2&1/6&3/2\\1&2/3&2\end{pmatrix}$$

PAU septiembre 2017

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Convocatòria 2017

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 2

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Considere el plano $\pi : x + y + z = 1$ y la recta *r* que pasa por los puntos $P = (0,0,6)$ y $Q = (1,2,3)$.

a) Estudie la posición relativa de la recta *r* y el plano π.
[1 punto]

b) Calcule la distancia entre la recta *r* y el plano π.
[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que satisfacen la igualdad $A^2 - \dfrac{1}{2} A \cdot B = I$, donde *I* es la matriz identidad de orden 3.
[1 punto]

b) Haciendo uso de la anterior igualdad, encuentre la matriz inversa de A: A^{-1}.
[1 punto]

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro real *a*.
[1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.
[1 punto]

4. Dadas las funciones *f(x)*, *f ´(x)*, *g(x)* y *g ´(x)* se conocen los siguientes valores:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	2	1
1	0	–6

x	$g(x)$	$g'(x)$
0	1	1
1	3	3

a) De la función *f(x)* se sabe también que la pendiente de la recta tangente a un punto de abscisa *x* es $4x^3-9x^2-2x+1$. Encuentre *f(x)*.
[1 punto]

b) Calcule $(g\circ f)'(1)$.
[1 punto]

5. En $\mathbb{R}^3$, sean la recta $r:\begin{cases}x-z=2\\2y+z=4\end{cases}$ y el punto $P=(0,1,-1)$.

a) Calcule la ecuación general (es decir, la que tiene la forma *Ax* + *By* + *Cz* = *D*) del plano π perpendicular a la recta *r* y que pasa por el punto *P*.
[1 punto]

b) Calcule el punto simétrico del punto *P* respecto del plano *x* + *y* + *z* = –3.
[1 punto]

6. Sea la función $f(x)=\dfrac{senx}{\cos^2 x}$.

a) Calcule una primitiva de la función *f(x)*.
[1 punto]

b) Calcule el área limitada por la función *f(x)* y el eje de abscisas entre las abscisas $x=0$ y $x=\dfrac{\pi}{4}$
[1 punto]

SOLUCIONES

1. Considere el plano $\pi: x+y+z=1$ y la recta *r* que pasa por los puntos $P=(0,0,6)$ y $Q=(1,2,3)$

a) Estudie la posición relativa de la recta *r* y el plano π. [1 punto]

b) Calcule la distancia entre la recta *r* y el plano π. [1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación *Ax* + *By* + *Cz* + *D* = 0 con la expresión $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

a) Hallamos un vector director y la ecuación de la recta.

$$\left.\begin{matrix} P(0,0,6)\in r \\ Q(1,2,3)\in r \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} P(0,0,6)\in r \\ \vec{v_r}=\overrightarrow{PQ}=(1,2,3)-(0,0,6)=(1,2,-3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda \\ z=6-3\lambda \end{cases} ;\lambda\in\mathbb{R}$$

Realizamos el producto escalar del vector director de la recta y el normal del plano.

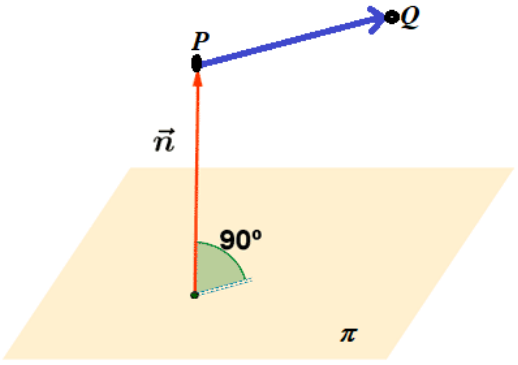
$$\left.\begin{matrix} \pi: x+y+z=1 \rightarrow \vec{n}=(1,1,1) \\ \vec{v_r}=(1,2,-3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{v_r}=(1,1,1)(1,2,-3)=1+2-3=0$$

Al ser el producto escalar nulo los vectores son perpendiculares, por lo que recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Comprobamos si el punto $P=(0,0,6)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left.\begin{matrix} \pi: x+y+z=1 \\ ¿P=(0,0,6)\in\pi? \end{matrix}\right\} \Rightarrow ¿0+0+6=1? \Rightarrow ¡No\,es\,cierto!$$

Como el punto P no pertenece al plano podemos afirmar que recta y plano son paralelos.



b) Como recta y plano son paralelos la distancia de la recta al plano es la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

$$\left.\begin{matrix} \pi: x+y+z-1=0 \\ P=(0,0,6)\in r \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|0+0+6-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{3}}\simeq 2.887\,u$$

La distancia de la recta *r* al plano π tiene un valor de $\dfrac{5}{\sqrt{3}}\simeq 2.887$ unidades.

2. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ -1 & -4 & 3\\ 0 & -4 & 4\end{pmatrix}$.

a) Compruebe que satisfacen la igualdad $A^2-\frac{1}{2}A\cdot B=I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. [1 punto]

b) Haciendo uso de la anterior igualdad, encuentre la matriz inversa de A: A^{-1}. [1 punto]

a) Realizamos los cálculos indicados en la expresión $A^2-\frac{1}{2}A\cdot B=I$.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+1 & 1-2-1 & 1+1+1\\ 0+0+1 & 0+4-1 & 0-2+1\\ 1+0+1 & 1+2-1 & 1-1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ -1 & -4 & 3\\ 0 & -4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1+0 & 4-4-4 & -1+3+4\\ 0+2+0 & 0+8-4 & 0-6+4\\ 3+1+0 & 4+4-4 & -1-3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\ 2 & 4 & -2\\ 4 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^2-\frac{1}{2}A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\ 2 & 4 & -2\\ 4 & 4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

b) Sacamos A como factor común de la igualdad.

$$A^2-\frac{1}{2}A\cdot B=I\Rightarrow A\left(A-\frac{1}{2}B\right)=I$$

La matriz inversa de A es $A-\frac{1}{2}B$.

Hallamos la expresión de la matriz inversa.

$$A^{-1}=A-\frac{1}{2}B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ -1 & -4 & 3\\ 0 & -4 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1-3/2 & 1-2 & 1+1/2\\ 1/2 & -2+2 & 1-3/2\\ 1 & -1+2 & 1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & -1 & 3/2\\ 1/2 & 0 & -1/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+ay=2a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro real a. [1 punto]
b) Resuelva el sistema para el caso $a=2$. [1 punto]

a) La matriz de coeficientes del sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2a \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix}=0-2+a-2-0+a=2a-4$$

$$|A|=0 \Rightarrow 2a-4=0 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Analizamos los dos casos distintos que se nos plantean.

CASO 1. $a\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de la matriz ampliada también es3, al igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la primera columna → $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna (igual que la segunda columna) → $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=-4+2+0+6-4-0=0$. Como este determinante es nulo el rango de A/B es

menor de 3, por lo que es 2, igual que el rango de A, pero menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a=2$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ x+y=2 \rightarrow y=2-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2-x+z=3 \\ x+2-x-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3-2=1 \\ 2-1=z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\lambda \\ y=2-\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}}$$

Para $a=2$ las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión $x=\lambda;\ y=2-\lambda;\ z=1$, siendo $\lambda\in\mathbb{R}$.

4. Dadas las funciones *f(x)*, *f ´(x)*, *g(x)* y *g ´(x)* se conocen los siguientes valores:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	2	1
1	0	–6

x	$g(x)$	$g'(x)$
0	1	1
1	3	3

a) De la función *f(x)* se sabe también que la pendiente de la recta tangente a un punto de abscisa *x* es $4x^3-9x^2-2x+1$. Encuentre *f(x)*. [1 punto]

b) Calcule $(g\circ f)'(1)$. [1 punto]

a) Si la pendiente de la recta tangente a un punto de abscisa *x* es $4x^3-9x^2-2x+1$ se cumple que la derivada de la función es $f'(x)=4x^3-9x^2-2x+1$. Hallamos la función calculando la primitiva de la derivada.

$$f'(x)=4x^3-9x^2-2x+1 \Rightarrow f(x)=\int 4x^3-9x^2-2x+1dx=x^4-3x^3-x^2+x+K$$

Determinamos el valor de *K*. Usando los valores de la tabla

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	2	1
1	0	–6

sabemos que $f(0)=2$ y $f(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^4-\frac{9}{3}x^3-x^2+x+K \\ f(0)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2=0^4-3\cdot 0^3-0^2+0+K \Rightarrow \boxed{K=2}$$

La función tiene la expresión $f(x)=x^4-3x^3-x^2+x+2$.

Esta función cumple también que $f(1)=0$.

$$f(x)=x^4-3x^3-x^2+x+2 \Rightarrow f(1)=1^4-3\cdot 1^3-1^2+1+2=1-3-1+1+2=0$$

b) Usamos que $(g\circ f)'(1)=g'(f(1))\cdot f'(1)$ y los datos proporcionados en las tablas del enunciado.

$$\left.\begin{array}{l} (g\circ f)'(1)=g'(f(1))\cdot f'(1) \\ Tabla \rightarrow f'(1)=-6 \\ Tabla \rightarrow f(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (g\circ f)'(1)=g'(0)\cdot(-6)=\left\{\begin{array}{l} Tabla \\ g'(0)=1 \end{array}\right\}=1\cdot(-6)=-6$$

Hemos comprobado que $(g\circ f)'(1)=-6$.

5. En $\mathbb{R}^3$, sean la recta $r:\begin{cases}x-z=2\\2y+z=4\end{cases}$ y el punto $P=(0,1,-1)$.

a) Calcule la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax+By+Cz=D$) del plano π perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P. [1 punto]

b) Calcule el punto simétrico del punto P respecto del plano $x + y + z = -3$. [1 punto]

a) Si el plano es perpendicular a la recta el vector director de la recta es un vector normal del plano. Hallamos un vector director de la recta.

$$r:\begin{cases}x-z=2\\2y+z=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2+z\\2y=4-z\rightarrow y=\frac{4}{2}-\frac{1}{2}z\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=2+\lambda\\y=2-\frac{1}{2}\lambda\\z=\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_r(2,2,0)\\\vec{v_r}=\left(1,\frac{-1}{2},1\right)\end{cases}$$

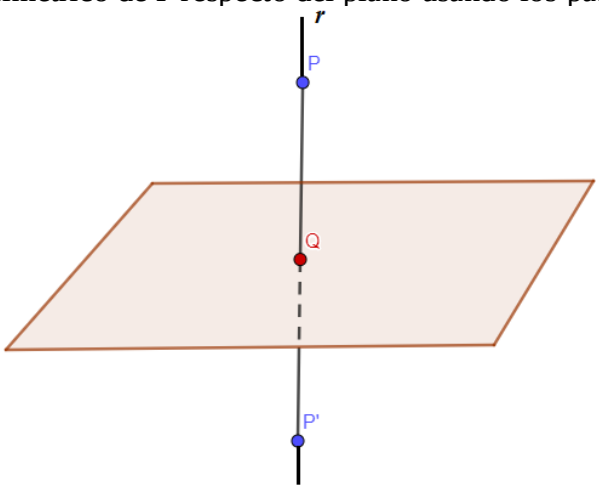
Hallamos la ecuación del plano que pasa por $P=(0,1,-1)$ y con vector normal $\vec{v_r}=\left(1,\frac{-1}{2},1\right)$.

$$\left.\begin{matrix}P=(0,1,-1)\in\pi\\\vec{n}=\vec{v_r}=\left(1,\frac{-1}{2},1\right)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}P=(0,1,-1)\in\pi\\\pi:x-\frac{1}{2}y+z+D=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow 0-\frac{1}{2}\cdot 1-1+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}+D=0\Rightarrow D=\frac{3}{2}\Rightarrow\pi:x-\frac{1}{2}y+z+\frac{3}{2}=0\Rightarrow\boxed{\pi:2x-y+2z+3=0}$$

La ecuación del plano buscado es $\pi:2x-y+2z+3=0$.

b) Obtenemos el punto P´ simétrico de P respecto del plano usando los pasos indicados en el dibujo.



Hallamos la recta r perpendicular al plano $x+y+z=-3$ que pasa por el punto P. Sabemos que el vector normal del plano es un vector director de la recta.

$$x+y+z=-3 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(0,1,-1)\in r \\ \overrightarrow{v_r}=\vec{n}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow r:\begin{cases} x=\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=-1+\alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto Q intersección de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=-1+\alpha \end{cases} \\ x+y+z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+1+\alpha-1+\alpha=-3 \Rightarrow 3\alpha=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{-3}{3}=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1-1=0 \\ z=-1-1=-2 \end{cases} \Rightarrow Q(-1,0,-2)$$

El punto P´ se obtiene sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left.\begin{array}{l} Q(-1,0,-2) \\ P(0,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(-1,0,-2)-(0,1,-1)=(-1,-1,-1)$$

$$P'=Q+\overrightarrow{PQ}=(-1,0,-2)+(-1,-1,-1)=(-2,-1,-3)$$

El punto P ´ simétrico del punto *P* respecto del plano $x + y + z = -3$ tiene coordenadas $P'(-2,-1,-3)$.

6. Sea la función $f(x)=\dfrac{senx}{\cos^2 x}$.

a) Calcule una primitiva de la función *f(x)*. [1 punto]

b) Calcule el área limitada por la función *f(x)* y el eje de abscisas entre las abscisas $x=0$ y $x=\dfrac{\pi}{4}$. [1 punto]

a) Calculamos la primitiva de la función usando un cambio de variable.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{senx}{\cos^2 x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \cos x=t\rightarrow -senxdx=dt\rightarrow\\ \rightarrow dx=\dfrac{dt}{-senx}\end{array}\right\}=\int \frac{\cancel{senx}}{t^2}\cdot\frac{dt}{-\cancel{senx}}=$$

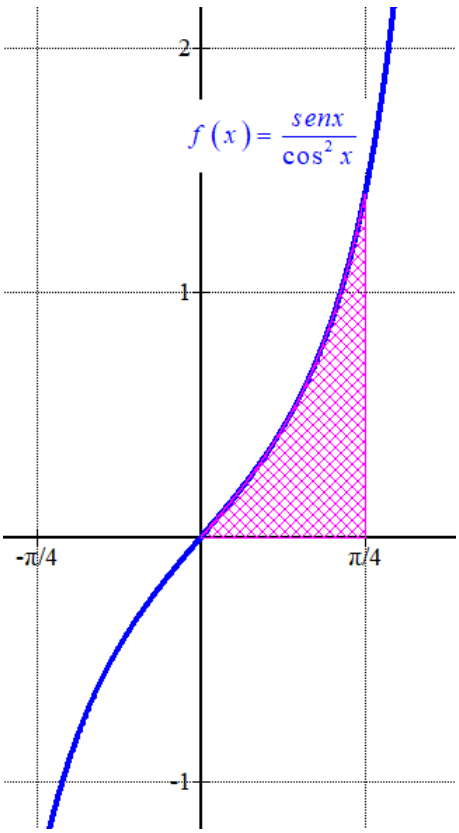
$$=-\int \frac{1}{t^2}\cdot dt=-\int t^{-2}\cdot dt=-\frac{t^{-1}}{-1}=t^{-1}=\frac{1}{t}=\frac{1}{\cos x}+K$$

b) Buscamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=\dfrac{senx}{\cos^2 x}\\ Eje\,OX\rightarrow y=0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{senx}{\cos^2 x}=0\Rightarrow senx=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\ x=\pi\\ x=2\pi\\ ....\end{array}\right.$$

La gráfica de la función no corta el eje de abscisas entre $x=0$ y $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Como en el intervalo pedido la función es positiva el área limitada por la función *f(x)* y el eje de abscisas entre las abscisas $x=0$ y $x=\dfrac{\pi}{4}$ es el valor de la integral definida entre $x=0$ y $x=\dfrac{\pi}{4}$ de la función.



$$Área=\int_0^{\pi/4} f(x)dx=\int_0^{\pi/4}\frac{senx}{\cos^2 x}dx=\left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\pi/4}=$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{1}{1}=\frac{2}{\sqrt{2}}-1=-1+\sqrt{2}\simeq 0.41u^2$$

El área limitada por la función *f(x)* y el eje de abscisas entre las abscisas $x=0$ y $x=\dfrac{\pi}{4}$ tiene un valor de $-1+\sqrt{2}\simeq 0.41$ unidades cuadradas.

PAU junio (serie 1) 2017

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Convocatòria 2017

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

a) Estudie para qué valores del parámetro λ el sistema es incompatible.
[1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $\lambda = 1$.
[1 punto]

2. Considere los planos $\pi_1 : 5x - y - 7z = 1$ y $\pi_2 : 2x + 3y + z = 5$.

a) Determine la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos π_1 y π_2.
[1 punto]

b) Calcule el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.
[1 punto]

3. Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - k}$, donde k es un parámetro real distinto de 0. Para los distintos valores del parámetro k:

a) Calcule el dominio y las asíntotas de la función.
[1 punto]

b) Calcule los puntos con un máximo o un mínimo relativo.
[1 punto]

4. Se sabe que el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución:

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + az = 1 \\ y + z = a \end{cases}.$$

a) Compruebe que $a \neq 0$.
[1 punto]

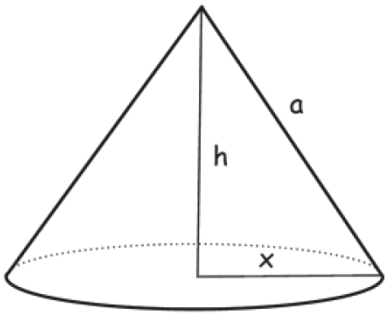
b) Encuentre la solución del sistema en función del parámetro *a*.
[1 punto]

5. Considere las matrices cuadradas de orden 2 de la forma $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{pmatrix}$, con *x* e *y* números reales.

a) Compruebe que la matriz M es siempre invertible, independientemente de los valores de *x* y de *y*.
[1 punto]

b) Para $x = 1$ e $y = -1$, calcule M^{-1}.
[1 punto]

6. Considere un cono de 120 cm^3 de volumen que tiene una altura *h*, un radio de la base *x* y una arista *a*, como el de la siguiente figura:



a) Compruebe que $a^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$.
[1 punto]

b) Calcule la altura del cono que tiene la arista de longitud mínima.
[1 punto]

NOTA: Recuerde que el volumen del cono es un tercio del volumen del cilindro recto que tiene la misma base y la misma altura que el cono.

SOLUCIONES

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

a) Estudie para qué valores del parámetro λ el sistema es incompatible. [1 punto]
b) Resuelva el sistema para el caso $\lambda = 1$. [1 punto]

a) El sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda & 30 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{vmatrix} = 5\lambda^2 + 2\lambda + 0 + 2\lambda - 0 + \lambda = 5\lambda^2 + 5\lambda$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 5\lambda^2 + 5\lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda = 0} \\ \lambda + 1 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = -1} \end{cases}$$

Estudiamos los tres casos diferentes que se nos plantean.

CASO 1. $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$.

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3. El rango de A y el rango de la matriz A/B es 3, igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $\lambda = 0$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna primeras → $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 10\\ 0 & -1 & 0 & 30\end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna (nula) → $\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 10\\ -1 & 0 & 30\end{vmatrix}=30+10+0-0+30-0=70\neq 0$.

El rango de A/B es 3.

El rango de A es 2 distinto del rango de A/B (3). El sistema es incompatible.

CASO 3. $\lambda=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & -1 & -5\end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna primeras → $\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -5\end{vmatrix}=-5+1=-4\neq 0$. Su rango es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 10\\ -2 & -1 & -5 & 30\end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna → $\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 10\\ -1 & -5 & 30\end{vmatrix}=30+10+0-0+30+50=120\neq 0$. El rango de A/B es 3.

El rango de A es 2 distinto del rango de A/B (3). El sistema es incompatible.

El sistema es incompatible para $\lambda=0$ o $\lambda=-1$.

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = 1$. Sabemos que es compatible determinado.

$$\begin{cases}x+y-z=0\\ y+z=10\\ 2x-y+5z=30\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y-z=0\\ y=10-z\\ 2x-y+5z=30\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+10-z-z=0\\ 2x-10+z+5z=30\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2z-10\\ 2x+6z=40\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(2z-10)+6z=40\Rightarrow 4z-20+6z=40\Rightarrow 10z=60\Rightarrow \boxed{z=\frac{60}{10}=6}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=2\cdot 6-10=2}\\ \boxed{y=10-6=4}\end{cases}$$

La solución del sistema es $x=2,\ y=4,\ z=6$.

2. Considere los planos $\pi_1 : 5x - y - 7z = 1$ y $\pi_2 : 2x + 3y + z = 5$.

a) Determine la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos π_1 y π_2. [1 punto]

b) Calcule el ángulo que forman los planos π_1 y π_2. [1 punto]

a) Si el plano π_3 es perpendicular a los planos π_1 y π_2 su vector normal es el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : 5x - y - 7z = 1 \to \vec{n_1} = (5,-1,-7) \\ \pi_2 : 2x + 3y + z = 5 \to \vec{n_2} = (2,3,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n_3} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -i - 14j + 15k + 2k - 5j + 21i = 20i - 19j + 17k = (20,-19,17)$$

El plano que buscamos pasa por el origen de coordenadas y tiene como vector normal el vector $\vec{n_3} = (20,-19,17)$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n_3} = (20,-19,17) \\ (0,0,0) \in \pi_3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\pi_3 : 20x - 19y + 17z + D = 0 \\ (0,0,0) \in \pi_3\end{array}\right\} \Rightarrow 20 \cdot 0 - 19 \cdot 0 + 17 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_3 : 20x - 19y + 17z = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi_3 : 20x - 19y + 17z = 0$.

b) El ángulo formado por los planos es el ángulo formado por sus vectores normales.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n_1} = (5,-1,-7) \\ \vec{n_2} = (2,3,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\vec{n_1}, \vec{n_2}\right) = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|} = \frac{(5,-1,-7)(2,3,1)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-7)^2}\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{10 - 3 - 7}{\sqrt{75}\sqrt{14}} = \frac{0}{\sqrt{75}\sqrt{14}} = 0 \Rightarrow \text{ángulo}\left(\vec{n_1}, \vec{n_2}\right) = \cos^{-1}(0) = 90^o$$

Los planos π_1 y π_2 forman un ángulo de 90º. Son planos perpendiculares.

3. Sea la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-k}$, donde *k* es un parámetro real distinto de 0. Para los distintos valores del parámetro *k*:

a) Calcule el dominio y las asíntotas de la función. [1 punto]

b) Calcule los puntos con un máximo o un mínimo relativo. [1 punto]

a) El dominio de una función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-k=0 \Rightarrow x^2=k \Rightarrow \begin{cases} k<0 \rightarrow x=\sqrt{k}=\text{Im } posible \rightarrow Do\min io=\mathbb{R} \\ k>0 \rightarrow x=\pm\sqrt{k} \rightarrow Do\min io=\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{k},+\sqrt{k}\right\} \end{cases}$$

Si k < 0 el dominio de la función es $Do\min io=\mathbb{R}$.

Si k > 0 el dominio de la función es $Do\min io=\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{k},+\sqrt{k}\right\}$

Determinamos las asíntotas de la función.

Asíntotas verticales.

Si k < 0 la función no tiene asíntotas verticales. Si k > 0 la función tiene dos asíntotas verticales: $x=-\sqrt{k}$ y $x=+\sqrt{k}$.

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-k}=\frac{1}{\infty}=0$$

Para cualquier valor de *k* la función tiene una asíntota horizontal: $y=0$.

Asíntota oblicua.

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

b) Obtenemos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$f(x)=\frac{1}{x^2-k} \Rightarrow f'(x)=\frac{0\cdot\left(x^2-k\right)-1\cdot 2x}{\left(x^2-k\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2-k\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2x}{\left(x^2-k\right)^2}=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

La función tiene un punto crítico en $x=0$. Sustituimos este valor en la segunda derivada para averiguar si es máximo, mínimo o punto de inflexión.

$$f'(x)=\frac{-2x}{\left(x^2-k\right)^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{-2\left(x^2-k\right)^2-(-2x)\cdot 2\left(x^2-k\right)2x}{\left(x^2-k\right)^4}=\frac{-2\left(x^2-k\right)+8x^2}{\left(x^2-k\right)^3}$$

$$f''(x)=\frac{-2x^2+2k+8x^2}{\left(x^2-k\right)^3}=\frac{6x^2+2k}{\left(x^2-k\right)^3} \Rightarrow f''(0)=\frac{6\cdot 0^2+2k}{\left(0^2-k\right)^3}=\frac{2k}{-k^3}=\frac{-2}{k^2}<0$$

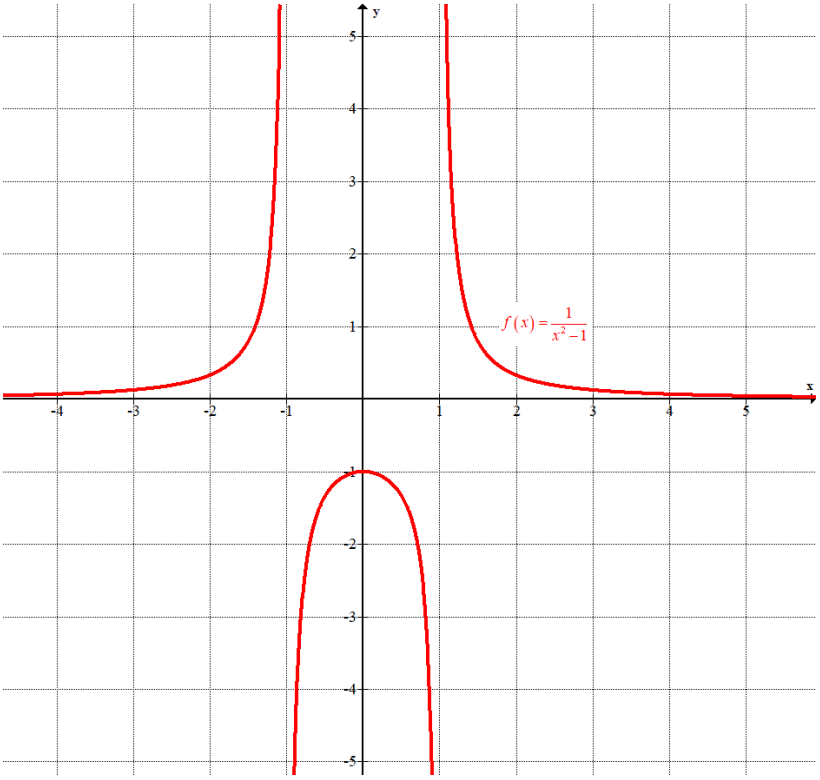
Al ser la segunda derivada negativa la función presenta un máximo relativo en $x=0$, independientemente del valor de *k*.

Como $f(0)=\dfrac{1}{0^2-k}=\dfrac{-1}{k}$ el máximo relativo tiene coordenadas $\left(0,\dfrac{-1}{k}\right)$.

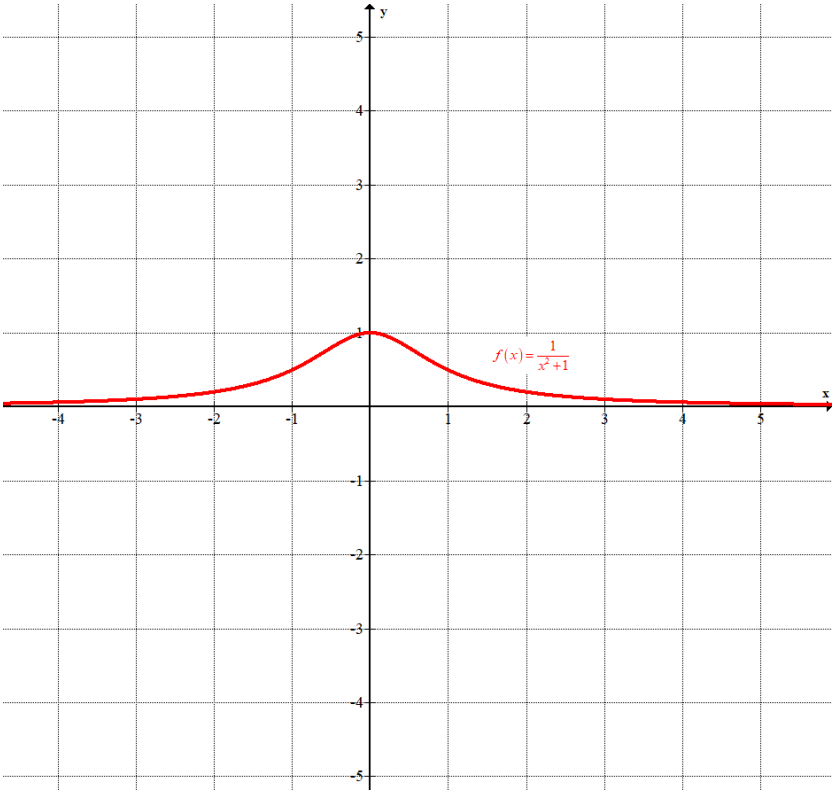
La función no tiene mínimos relativos.

No lo pide, pero representamos la gráfica para *k = 1* y para *k = –1*.

Para k = 1.



Para k = –1.



4. Se sabe que el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución:

$$\begin{cases} x+ay=1 \\ x+az=1 \\ y+z=a \end{cases}.$$

a) Compruebe que $a\neq 0$. [1 punto]
b) Encuentre la solución del sistema en función del parámetro *a*. [1 punto]

a) Si el sistema tiene una única solución el determinante de la matriz de coeficientes debe ser no nulo para que su rango sea 3.

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinamos la expresión de su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0+0+0-0-a-a=-2a$$

Para que su determinante sea no nulo debe ser $a\neq 0$.
Con $a\neq 0$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

b) Si $a\neq 0$ el sistema tiene una única solución. Determinamos la solución usando el método de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{0+a^3+0-0-a-a}{-2a}=\frac{a^3-2a}{-2a}=\frac{a\left(a^2-2\right)}{-2a}=\frac{2-a^2}{2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1+0+0-0-1-a^2}{-2a}=\frac{-a^2}{-2a}=\frac{a}{2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{0+0+1-0-a^2-1}{-2a}=\frac{-a^2}{-2a}=\frac{a}{2}$$

La solución del sistema si $a \neq 0$ es $x = \frac{2-a^2}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, $z = \frac{a}{2}$.

Si $a = 0$ el sistema queda $\begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -z \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$.

Para $a = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones: $x = 1$, $y = -\alpha$, $z = \alpha$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Considere las matrices cuadradas de orden 2 de la forma $M=\begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{pmatrix}$, con x e y números reales.

a) Compruebe que la matriz M es siempre invertible, independientemente de los valores de x y de y. [1 punto]

b) Para $x = 1$ e $y = -1$, calcule M^{-1}. [1 punto]

a) Calculamos el determinante de la matriz M.

$$|M|=\begin{vmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{vmatrix}=x^2+y^2+1$$

$$\left.\begin{matrix} x^2\geq 0 \\ y^2\geq 0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow x^2+y^2\geq 0\Rightarrow x^2+y^2+1\geq 1$$

Esta expresión del determinante nunca se anula pues cada cuadrado es positivo o cero pero al sumarle 1 siempre dará un resultado mayor o igual que 1. Por tanto, existe la inversa de M para cualquier valor de x e y.

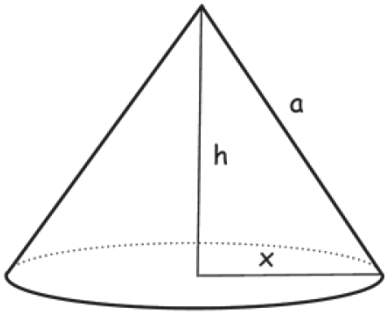
b) Para $x = 1$ e $y = -1$ la matriz queda $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ (-1)^2+1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos la inversa de la matriz M.

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1+2=3\neq 0$$

$$M^{-1}=\frac{Adj\left(M^T\right)}{|M|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

6. Considere un cono de 120 cm^3 de volumen que tiene una altura *h*, un radio de la base *x* y una arista *a*, como el de la siguiente figura:



a) Compruebe que $a^2 = \frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h} + h^2$. [1 punto]

b) Calcule la altura del cono que tiene la arista de longitud mínima. [1 punto]

NOTA: Recuerde que el volumen del cono es un tercio del volumen del cilindro recto que tiene la misma base y la misma altura que el cono.

a) Considerando el triángulo de hipotenusa "a" y catetos "x" y "h" aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = x^2 + h^2$$

El volumen de un cilindro es el área de la base (círculo de radio "x") por la altura (h) → $Volumen\,cilindro = \pi x^2 \cdot h$

Como el volumen del cono tiene un valor de 120 cm^3 aplicamos la fórmula del volumen.

$$\left.\begin{array}{r} Volumen\,cono = \dfrac{Volumen\,cilindro}{3} = \dfrac{\pi x^2 h}{3} \\ Volumen\,cono = 120 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\pi x^2 h}{3} = 120 \Rightarrow x^2 = \frac{120\cdot 3}{\pi\cdot h} = \frac{360}{\pi\cdot h}$$

Sustituimos en la primera expresión.

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = x^2 + h^2 \\ x^2 = \dfrac{360}{\pi\cdot h} \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = \frac{360}{\pi\cdot h} + h^2$$

b) Debemos hacer máxima la arista (a). Despejamos en la expresión obtenida.

$$a^2 = \frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h} + h^2 \Rightarrow a(h) = \sqrt{\frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h} + h^2}$$

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$a(h) = \sqrt{\frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h} + h^2} \Rightarrow a'(h) = \frac{\frac{360}{\pi}\cdot\frac{-1}{h^2} + 2h}{2\sqrt{\frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h} + h^2}}$$

$$a'(h)=0\Rightarrow\frac{\frac{360}{\pi}\cdot\frac{-1}{h^2}+2h}{2\sqrt{\frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h}+h^2}}=0\Rightarrow\frac{-360}{\pi h^2}+2h=0\Rightarrow\frac{-360+2\pi h^3}{\pi h^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -360+2\pi h^3=0\Rightarrow 2\pi h^3=360\Rightarrow h^3=\frac{360}{2\pi}\Rightarrow\boxed{h=\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}\simeq 3.855}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor $h=\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}\simeq 3.855$.

- En el intervalo $(0,3.855)$ tomamos $h=1$ y la derivada vale
  $a'(1)=\frac{\frac{360}{\pi}\cdot\frac{-1}{1^2}+2}{2\sqrt{\frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{1}+1^2}}=\frac{\frac{-360}{\pi}+2}{2\sqrt{\frac{360}{\pi}+1}}\simeq -5<0$. La función decrece en $(0,3.855)$.
- A partir de $h=\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}\simeq 3.855$ consideramos $h=4$ y la derivada vale
  $a'(4)=\frac{\frac{360}{\pi}\cdot\frac{-1}{4^2}+8}{2\sqrt{\frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{4}+4^2}}=\frac{\frac{-360}{16\pi}+8}{2\sqrt{\frac{90}{\pi}+16}}\simeq 0.06>0$. La función crece a partir de
  $h=\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}\simeq 3.855$.

Como la función decrece antes y crece después podemos afirmar que para una altura del cono de $h=\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}\simeq 3.855$ hay un mínimo de la longitud de la arista.

PAU junio (serie 5) 2017

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat Convocatòria 2017

Matemáticas

Serie 5

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Sean las rectas de $\mathbb{R}^3$ $r:\begin{cases}2x-y=1\\ y-2z=0\end{cases}$ y $s: x+1=\dfrac{y-2}{2}=z-1$.

a) Compruebe que son paralelas.
[1 punto]

b) Calcule la ecuación vectorial del plano que las contiene.
[1 punto]

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases}x-y+z=0\\ 2x+kz=1\\ x+(k+1)y+z=k^2-4\end{cases}$$

en el que *k* es un parámetro real.

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de *k*.
[1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $k=-2$.
[1 punto]

3. Responda a las siguientes cuestiones:

a) Compruebe que la recta tangente a la curva $y=x^2$ en el punto de abscisa $x=2$ es la recta $y=4x-4$ y calcule los puntos de intersección de esta recta con los ejes de coordenadas.
[1 punto]

b) Calcule el área limitada por la curva del apartado anterior, la recta tangente en $x=2$ y el eje de abscisas.
[1 punto]

4. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcule las potencias A^2, A^3 y A^6.
[1 punto]

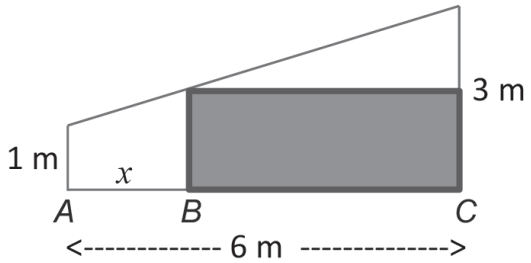
b) Calcule la inversa de la matriz A^5.
[1 punto]

5. Sea $M=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales.

a) Discuta el sistema según los valores del parámetro *a*, e interprete el resultado geométricamente.
[1 punto]

b) Para $a=1$ encuentre la forma paramétrica del plano solución y dé un punto y dos vectores directores de este plano.
[1 punto]

6. El croquis de debajo representa la pared de un desván con el techo inclinado, en la que se quiere construir un armario rectangular como el de la zona sombreada.



a) Exprese el área del rectángulo en función de la longitud *x* del segmento *AB*.
[1 punto]

b) Determine las dimensiones del rectángulo si se quiere que tenga una superficie máxima y calcule esta superficie máxima.
[1 punto]

SOLUCIONES

1. Sean las rectas de $\mathbb{R}^3$ $r:\begin{cases}2x-y=1\\y-2z=0\end{cases}$ y $s: x+1=\dfrac{y-2}{2}=z-1$.

a) Compruebe que son paralelas. [1 punto]
b) Calcule la ecuación vectorial del plano que las contiene. [1 punto]

a) Obtenemos un vector director y un punto de cada recta.

$$r:\begin{cases}2x-y=1\to 2x=1+y\to x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}y\\ y-2z=0\to -2z=-y\to z=\dfrac{1}{2}y\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\lambda\\ y=\lambda\\ z=\dfrac{1}{2}\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u_r}=\left(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{1}{2}\right)\to\vec{v_r}=(1,2,1)\\ P_r\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)\end{cases}$$

$$s:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u_s}=(1,2,1)\\ Q_s(-1,2,1)\end{cases}$$

Podemos observar que los vectores directores de ambas rectas son iguales: $\vec{u_s}=\vec{v_r}=(1,2,1)$, por lo que las rectas son paralelas o coincidentes.
Comprobamos si el punto $Q_s(-1,2,1)$ de la recta s pertenece a la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l}¿Q_s(-1,2,1)\in r?\\ r:\begin{cases}2x-y=1\\ y-2z=0\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow ¿\begin{cases}2(-1)-2=1\\ 2-2\cdot 1=0\end{cases}?\Rightarrow ¿\begin{cases}-2-2=1\to ¡No!\\ 2-2=0\to ¡Si!\end{cases}?$$

No se cumplen las ecuaciones que define la recta *r* y el punto Q_s no pertenece a la recta *r*. Las rectas *r* y *s* son paralelas.

b) El plano π que contiene las dos rectas tiene como uno de sus vectores directores el vector director de las rectas $\vec{u_s}=\vec{v_r}=(1,2,1)$, el otro vector director del plano es el vector $\overrightarrow{P_rQ_s}$. Además, este plano contiene el punto $Q_s(-1,2,1)$ perteneciente a la recta *s*.

$$\left.\begin{array}{l}Q_s(-1,2,1)\\ P_r\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{P_rQ_s}=(-1,2,1)-\left(\frac{1}{2},0,0\right)=\left(\frac{-3}{2},2,1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\vec{v_r}=(1,2,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{P_rQ_s}=\left(\dfrac{-3}{2},2,1\right)\\ Q_s(-1,2,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\pi:(x,y,z)=(-1,2,1)+\alpha(1,2,1)+\beta\left(\frac{-3}{2},2,1\right)$$

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+kz=1 \\ x+(k+1)y+z=k^2-4 \end{cases}$$

en el que k es un parámetro real.

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de k. [1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $k=-2$. [1 punto]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & k \\ 1 & k+1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & k^2-4 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula la derivada de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & k \\ 1 & k+1 & 1 \end{vmatrix}=0-k+2(k+1)-0+2-k(k+1)=-k+2k+2+2-k^2-k=-k^2+4$$

$$|A|=0\Rightarrow -k^2+4=0\Rightarrow k^2=4\Rightarrow \boxed{k=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Estudiamos las tres situaciones distintas que se nos plantean.

CASO 1. $k\neq 2$ y $k\neq -2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k=2$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna terceras → $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0+2=2\neq 0$. El rango de la matriz A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 3ª columna y calculamos su determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0-1+0-0-0-3=-4\neq 0.$$

Al ser el determinante del menor de orden 3 no nulo el rango de la matriz ampliada es 3.

Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango A/B. El sistema es incompatible.

CASO 3. $k=-2$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna terceras → $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0+2=2\neq 0$. El rango de la matriz A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 3ª columna y calculamos su determinante

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0-1+0-0-0+1=0.$$

El rango de la matriz ampliada A/B no es 3. El rango de la matriz ampliada es 2 como el rango de la matriz A.

Rango de A = 2 = Rango A/B < 3 = Número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $k\neq 2$ y $k\neq -2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k=2$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $k=-2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para el caso $k=-2$ hemos visto que el sistema es compatible indeterminado. Determinamos la expresión de sus infinitas soluciones.

Para este valor el sistema queda $\begin{cases}x-y+z=0\\ 2x-2z=1\\ x-y+z=0\end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases}x-y+z=0\\ 2x-2z=1\\ x-y+z=0\end{cases}\Rightarrow\{\text{Ecuación 1ª = Ecuación 3ª}\}\Rightarrow\begin{cases}x-y+z=0\\ 2x-2z=1\rightarrow 2x=1+2z\rightarrow x=\dfrac{1+2z}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1+2z}{2}-y+z=0\Rightarrow 1+2z-2y+2z=0\Rightarrow 4z+1=2y\Rightarrow y=\frac{1+4z}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1+2\lambda}{2}\\ y=\dfrac{1+4\lambda}{2}\\ z=\lambda\end{cases}$$

Las soluciones del sistema son: $x=\dfrac{1+2\lambda}{2}; y=\dfrac{1+4\lambda}{2}; z=\lambda$, siendo λ un número real cualquiera.

3. Responda a las siguientes cuestiones:

a) Compruebe que la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ es la recta $y = 4x - 4$ y calcule los puntos de intersección de esta recta con los ejes de coordenadas. [1 punto]

b) Calcule el área limitada por la curva del apartado anterior, la recta tangente en $x = 2$ y el eje de abscisas. [1 punto]

a) Hallamos la recta tangente a la función $y = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \to y' = 2x \to y'(2) = 4 \\ y(2) = 2^2 = 4 \\ y - f(2) = f'(2)(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 4 = 4(x-2) \Rightarrow y - 4 = 4x - 8 \Rightarrow \boxed{y = 4x - 4}$$

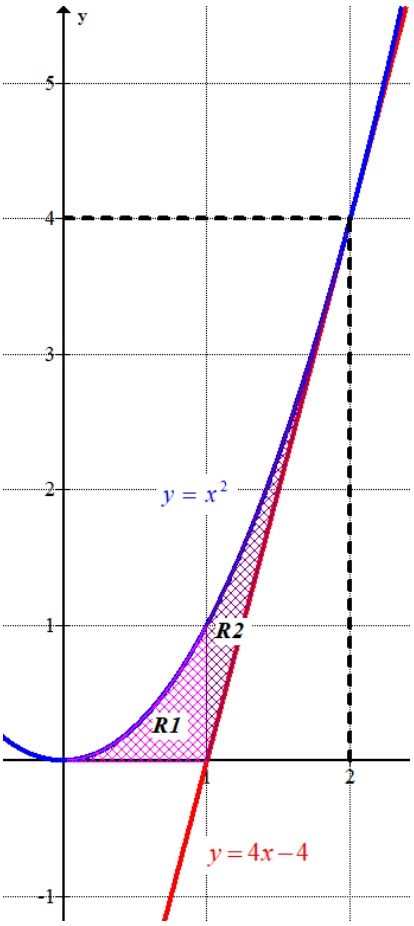
Hallamos los puntos de intersección de esta recta tangente con los ejes de coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x - 4 \\ Eje\,OX \to y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 4x - 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x - 4 \\ Eje\,O \to x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 4 \cdot 0 - 4 = -4 \Rightarrow B(0,-4)$$

Los puntos de intersección son A(1, 0) y B(0, –4).

b) Dibujamos la región de la cual queremos hallar el área.



Hallamos el área de la región 1 limitada por el eje de abscisas, la gráfica de la función y la recta vertical $x=1$.

$$\text{Área Región 1} = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3}u^2}$$

Hallamos el área de la región 2 limitada por la recta vertical $x=1$, la recta $y=4x-4$ y la gráfica de la función.

$$\text{Área Región 2} = \int_1^2 x^2 - (4x-4)\,dx = \int_1^2 x^2 - 4x + 4 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{2^3}{3} - 2\cdot 2^2 + 4\cdot 2\right] - \left[\frac{1^3}{3} - 2\cdot 1^2 + 4\cdot 1\right] = \frac{8}{3} - 8 + 8 - \frac{1}{3} + 2 - 4 = \boxed{\frac{1}{3}u^2}$$

El área total es la suma de estas dos áreas: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}u^2$.

4. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calcule las potencias A^2, A^3 y A^6. [1 punto]

b) Calcule la inversa de la matriz A^5. [1 punto]

a) Determinamos la expresión de las potencias.

$$A^2 = A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=-Id_3$$

$$A^6 = A^3\cdot A^3=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=Id_3$$

b) Como sabemos que $A^6 = Id \Rightarrow A^5\cdot A = Id$. Podemos decir que la inversa de la matriz A^5 es la matriz A.

5. Sea $M=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales.

a) Discuta el sistema según los valores del parámetro a, e interprete el resultado geométricamente. [1 punto]

b) Para $a=1$ encuentre la forma paramétrica del plano solución y dé un punto y dos vectores directores de este plano. [1 punto]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} Fila\,3-Fila\,2 \\ Fila\,1-Fila\,2 \end{Bmatrix}=\begin{vmatrix} a-1 & 1-a & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{vmatrix}=\{Columna\,2+Columna\,1\}=$$

$$=\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{vmatrix}=\{Columna\,2+Columna\,3\}=\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$$

$$|A|=0\Rightarrow(a+2)(a-1)^2=0\Rightarrow\begin{cases} a+2=0\rightarrow \boxed{a=-2} \\ a-1=0\rightarrow \boxed{a=1} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a\neq 1$ y $a\neq -2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a=-2$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ su determinante vale $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4-1=3\neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $M=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna $\rightarrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=4-2+4-1+8-4=9\neq 0$. El rango de la matriz ampliada es 3.

Rango A = 2 ≠ 3 = Rango M. El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $a=1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Las tres filas son iguales. El rango de A es 1.

La matriz ampliada queda $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Las tres filas son iguales. El rango de la matriz ampliada es 1.

Rango A = 1 = Rango M. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Resumiendo: Si $a\neq 1$ y $a\neq -2$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y los tres planos definidos por las tres ecuaciones del sistema se cortan en un único punto del espacio tridimensional. Si $a=-2$ el sistema es incompatible (no tiene solución) y los tres planos no coinciden en ningún punto. Si $a=1$ el sistema es compatible indeterminado, los tres planos son el mismo, pues las tres ecuaciones son iguales.

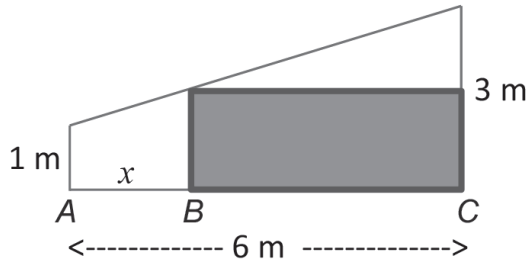
b) Para $a=1$ el sistema lo forman tres ecuaciones iguales. Lo resolvemos.

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{matrix}x+y+z=1\\ x+y+z=1\\ x+y+z=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow x+y+z=1\Rightarrow x=1-y-z\Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \pi:\begin{cases}x=1-\alpha-\beta\\ y=\alpha\\ z=\beta\end{cases};\ \alpha,\beta\notin\mathbb{R}}$$

Este plano solución $\pi:\begin{cases}x=1-\alpha-\beta\\ y=\alpha\\ z=\beta\end{cases};\ \alpha,\beta\notin\mathbb{R}$ tiene como vectores directores: $\vec{u}=(-1,1,0)$ y $\vec{v}=(-1,0,1)$. Un punto de este plano es $P(1,0,0)$.

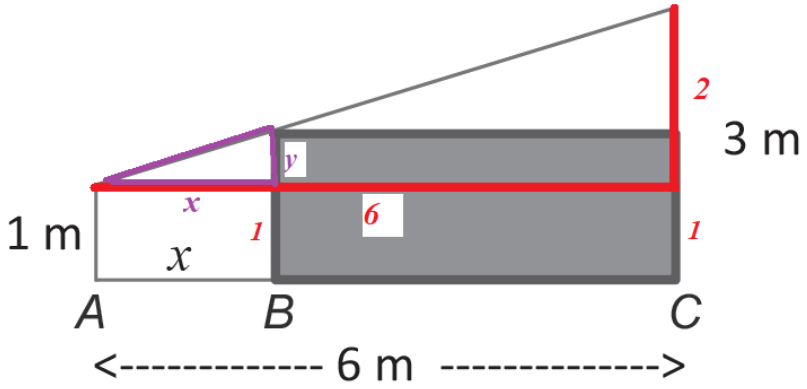
6. El croquis de debajo representa la pared de un desván con el techo inclinado, en la que se quiere construir un armario rectangular como el de la zona sombreada.



a) Exprese el área del rectángulo en función de la longitud *x* del segmento *AB*. [1 punto]

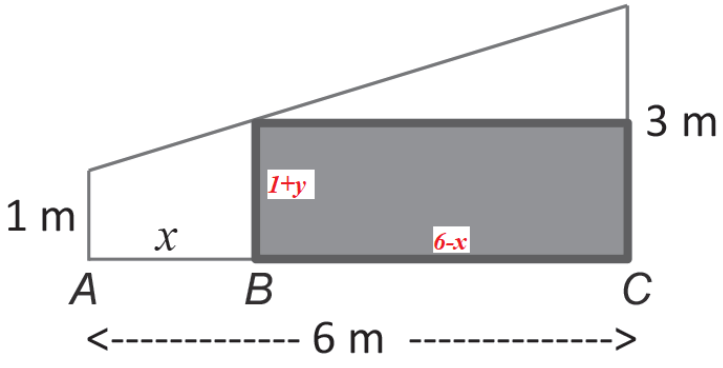
b) Determine las dimensiones del rectángulo si se quiere que tenga una superficie máxima y calcule esta superficie máxima. [1 punto]

a) Completamos el dibujo para obtener dos triángulos rectángulos semejantes.



Por semejanza de los triángulos rectángulos de catetos 2, 6 y el de catetos x, y, tenemos:

$$\frac{2}{6}=\frac{y}{x}\Rightarrow 2x=6y\Rightarrow x=3y\Rightarrow \boxed{y=\frac{x}{3}}$$



Por lo que el rectángulo tendrá $6-x$ de base y $1+y=1+\frac{x}{3}$ de altura, por lo que su área será:

$$A(x)=(6-x)\left(1+\frac{x}{3}\right)=6+\frac{6x}{3}-x-\frac{x^2}{3}=-\frac{x^2}{3}+x+6$$

El área del rectángulo en función de la longitud *x* tiene la expresión $A(x)=-\frac{x^2}{3}+x+6$.

b) Derivamos la función y buscamos cuando se anula la derivada.

$$A(x) = -\frac{x^2}{3} + x + 6 \Rightarrow A'(x) = -\frac{2x}{3} + 1$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{2x}{3} + 1 = 0 \Rightarrow -2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2} = 1.5}$$

Sustituimos este valor en la derivada segunda.

$$A'(x) = -\frac{2x}{3} + 1 \Rightarrow A''(x) = -\frac{2}{3} \Rightarrow A''(1.5) = -\frac{2}{3} < 0$$

Al ser negativa la segunda derivada la función área presenta un máximo relativo en $x = 1.5$.

Para $x = 1.5$ el área tiene un valor de $A(1.5) = -\frac{1.5^2}{3} + 1.5 + 6 = \frac{27}{4} = 6.75 m^2$.

El rectángulo de área máxima se consigue con $x = 1.5$ metros siendo esta área máxima de 6.75 metros cuadrados.

Las dimensiones del rectángulo son 6 – 1.5 = 4.5 metros de base y $1 + \frac{1.5}{3} = 1.5$ metros de altura.