2º de bachillerato
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Bloque 3 - Estadística y probabilidad

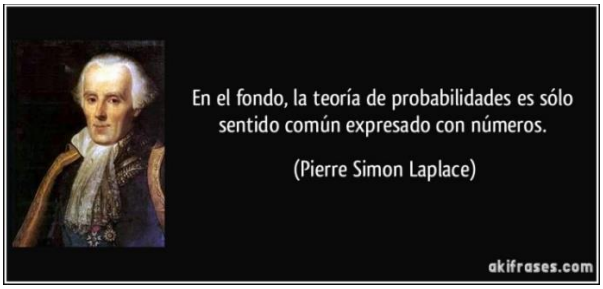
www.ebaumatematicas.com

TEMA 8. Probabilidad 2
1. Experimentos aleatorios. Espacio muestral. 2
2. Sucesos. Operaciones con sucesos. 4
3. Definición de Probabilidad. Propiedades. 9
3.1. Definición de Laplace 9
3.2. Propiedades 9
4. Regla de la suma 12
4.1. Sucesos incompatibles 12
4.2. Sucesos compatibles 12
5. Regla del producto. Probabilidad en experimentos compuestos. 14
6. Probabilidad condicionada 15
6.1. Probabilidad de sucesos independientes y dependientes 19
7. Teorema de la probabilidad total. Diagrama de árbol. 22
8. Tablas de contingencia. 27
9. Teorema de Bayes 29
Formulario de probabilidad 32

Ejercicios propuestos 34
TEMA 9. Estadística 40
1. Muestreo 40
2. Distribuciones de probabilidad 42
3. Distribución de probabilidad normal 42
3.1. Distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $N(0, 1)$ 43
3.2. Tabla normal estándar: $N(0, 1)$ 43
3.3. Cálculo del valor de Z a partir de su probabilidad asociada 44
3.4. Tipificación 45
4. Distribuciones de muestreo 45
5. Intervalos de de confianza para la media de la población 48
5.1. Error admitido 50
5.2. Tamaño muestral 51

Ejercicios propuestos 52
Probabilidad y estadística en PAU y EBAU de Murcia del año 2016 a 2025 58

TEMA 8. Probabilidad



La probabilidad, en su definición más básica, es una medida de la **certidumbre asociada a un suceso futuro**.

1. Experimentos aleatorios. Espacio muestral.

Si dejamos caer una piedra o la lanzamos, y conocemos las condiciones iniciales de altura, velocidad, etc., sabremos con seguridad dónde caerá, cuánto tiempo tardará, etc. Es una ***experiencia determinista***.
Si lanzamos un dado sobre una mesa, ignoramos qué cara quedará arriba. El resultado depende del azar. Es una ***experiencia aleatoria***.

Un **experimento aleatorio** es aquel que no podemos predecir el resultado, es decir, que depende de la suerte o del azar.
Cuando conocemos el resultado del experimento antes de realizarlo, decimos que se trata de un **experimento determinista**.

Ejemplo:

De los siguientes experimentos, indica los que son deterministas y los que son aleatorios:

a) Elegir un libro de la biblioteca con los ojos cerrados.
b) Medir la temperatura de agua destilada.
c) Lanzar una moneda al aire.
d) Marcar un número de teléfono.
e) Extraer una bola de una urna de bolas rojas.
f) Medir la longitud de una mesa.

Indica, además, dos ejemplos de experimento aleatorio y dos ejemplos de experimento determinista.

Solución: a), b) y f) son experimentos aleatorios. c), d) y e) son experimentos deterministas.

- *Experimento determinista: medir el peso de un litro de agua, calcular el área de un cuadrado de lado 2, etc.*
- *Experimento aleatorio: anotar la matricula del primer coche que pase por delante de ti, lanzar un dado y mirar que sale, extraer una carta de la baraja, etc.*

El **espacio muestral** de un experimento aleatorio está formado por todos los posibles resultados que podemos obtener al realizar el experimento, se denota ***E***.

Suceso es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Decimos que **un suceso se ha verificado**, si al realizar el experimento aleatorio correspondiente, el resultado es uno de los que contempla dicho suceso.
Por ejemplo, si al lanzar un dado sale 5, se ha verificado, entre otros, los sucesos {5}, {1,3,5}, {Sacar impar}, {Sacar más de 3}, E. Y no se ha verificado {Sacar par}

Demos nombre a algunos tipos de sucesos:

- Un ***suceso elemental*** *es aquel que solo contempla un posible resultado.*
- ***Suceso seguro o total, E****: un suceso que ocurre siempre. El espacio muestral también se designa como suceso seguro.*
- ***Suceso imposible o vacío, Ø:*** *un suceso que no ocurre nunca.*
- ***Un suceso compuesto*** *es el formado por dos o más sucesos elementales.*

Cualquier suceso se puede describir con una expresión en texto o bien detallando cada resultado que favorece que ocurra dicho suceso.

En el experimento "lanzar un dado y mirar que sale" un suceso posible es A = "salga número par", este mismo suceso lo podemos describir cómo A = "sacar múltiplo de 2" o A = "Sacar 2 o 4 o 6". Esta última descripción es más precisa y se suele escribir como A = {2, 4, 6}.

Ejemplo:

En el experimento aleatorio "*lanzamiento de dos dados y suma de los puntos obtenidos en las caras superiores de ambos*", describimos su espacio muestral o conjunto de posibles resultados y algunos de los posibles sucesos a estudiar en este experimento:

Espacio muestral: E = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Son **sucesos elementales**:

- Cada uno de los posibles resultados:
  {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {9}, {10}, {11}, {12}
- Obtener por ejemplo múltiplo de 7: {7}
- Obtener más de 11 puntos: {12}

Son **sucesos compuestos**:

- A = {Obtener múltiplo de 3} = {3, 6, 9, 12}
- B = {Obtener múltiplo de 2} = {2, 4, 6, 8, 10, 12}

Es un **suceso seguro**: E = {Obtener suma menor o igual a 12} = {Obtener suma entre 1 y 13} = …
Es un **suceso imposible**: $\varnothing$ = {Obtener suma 215} = {Obtener suma 1} = {Obtener suma mayor de 13} = …

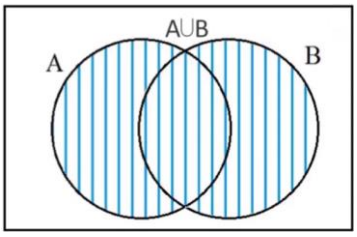
Para empezar, vamos a prestar atención a experiencias aleatorias sencillas como lanzar dados o monedas, extraer cartas de una baraja, sacar bolas de urnas,….

***Ejercicio*:**
Describe el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:
a) Sacar dos cartas de una baraja y mirar si es pareja o no.
b) Extracción de dos bolas de una urna que contiene cuatro bolas blancas y tres negras.

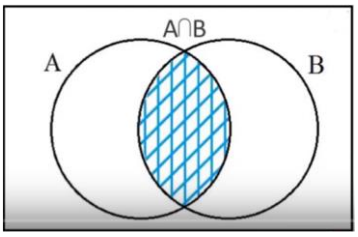
Solución.
a) E = {Pareja, No pareja}
b) E = {Dos bolas blancas, Dos bolas negras, Una bola negra y otra blanca}

2. Sucesos. Operaciones con sucesos.

Llamamos **unión** de dos sucesos A y B, y lo designamos $A \cup B$ (lo leemos como "A unión B") al suceso formado por todos los elementos de A y todos los de B.
El suceso $A \cup B$ ocurre cuando lo hacen A **o** B **o** ambos.



Llamamos **intersección** de dos sucesos A y B, y lo designamos $A \cap B$ (lo leemos como "A intersección B") al suceso formado por los elementos que pertenecen ***simultáneamente*** a A y a B.
El suceso $A \cap B$ ocurre cuando lo hacen **A y B a la vez**.



Dos sucesos A y B son **incompatibles** cuando $A \cap B = \varnothing$. Si $A \cap B \neq \varnothing$ se dicen **compatibles**.

Ejemplo:

En el experimento aleatorio "*lanzamiento de dos dados y suma de los puntos obtenidos en las caras superiores de ambos*", dados los sucesos **A = {1, 2, 3, 6}** y **B = {3, 4, 5, 6, 7}** la unión y la intersección son:

$$A \cup B = \{1,2,3,6\} \cup \{3,4,5,6,7\} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$A \cap B = \{1,2,3,6\} \cap \{3,4,5,6,7\} = \{3,6\}$$

Los sucesos A y B son compatibles, ya que tienen sucesos elementales en común. $A \cap B \neq \varnothing$.

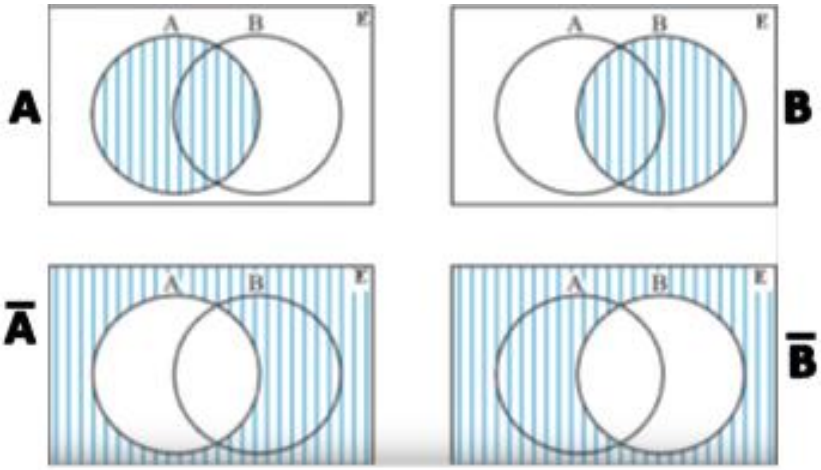
Dados los sucesos **C = "Sacar suma par" = {2, 4, 6, 8, 10, 12}** y **D = "Sacar suma impar" = {3, 5, 7, 9, 11}** la unión y la intersección son:

$$C \cup D = \text{"Sacar suma par o impar"} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$
$$C \cap D = \text{"Sacar suma par e impar"} = \varnothing$$

Los sucesos C y D son incompatibles, pues no tienen sucesos elementales en común. $A \cap B = \varnothing$.

El suceso **contrario o complementario** de un suceso *A* se escribe $\overline{A}$ o A^c. Entre ambos (*A* y A^C) se reparten los elementos del espacio muestral. Es decir, siempre ocurre uno u otro, pero nunca los dos simultáneamente.

El **contrario del contrario** coincide con el suceso de partida: $\overline{\overline{A}} = A$



Ejemplo:

En el experimento aleatorio "*lanzamiento de dos dados y suma de los puntos obtenidos en las caras superiores de ambos*", dados los sucesos **C = "Sacar suma par" = {2, 4, 6, 8, 10, 12}** y **D = "Sacar suma impar" = {3, 5, 7, 9, 11}** se cumple que $D^C = C$ y $C^C = D$. Es decir, el suceso contrario de "*Sacar suma par*" es " *Sacar suma impar*" y viceversa.

Leyes de Morgan

El **contrario de la unión** es la intersección de los contrarios (1ª ley de Morgan).

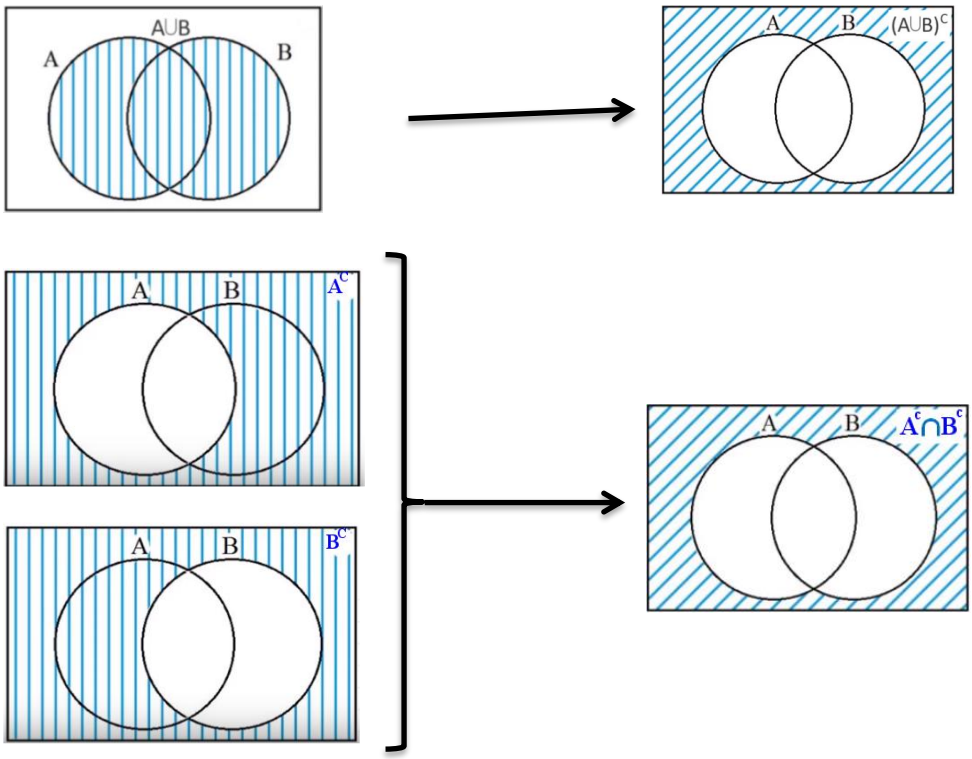
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

El **contrario de la intersección** es la unión de los contrarios (2ª ley de Morgan)..

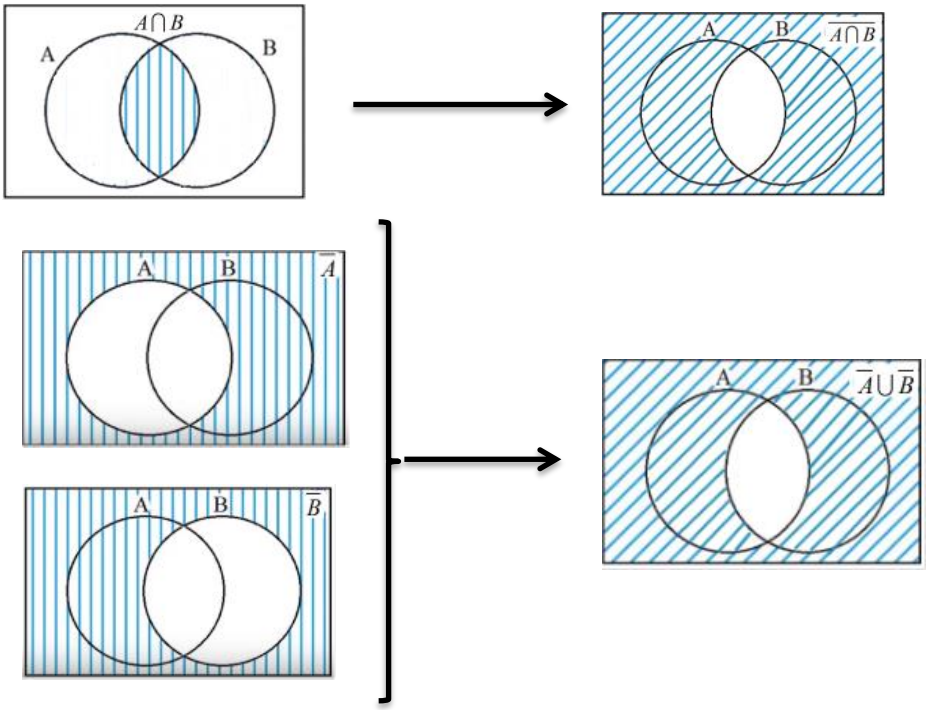
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

La demostración de estas leyes la tenemos en las siguientes representaciones gráficas.

1ª Ley de Morgan: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

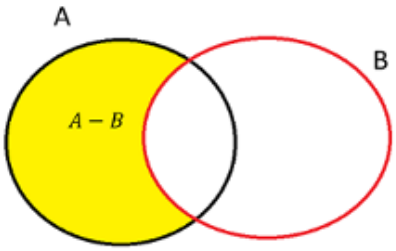


2ª Ley de Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



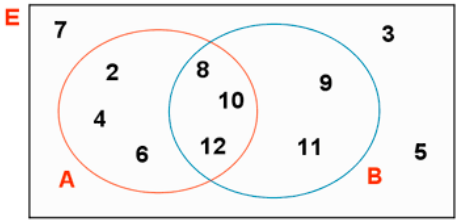
La **diferencia de sucesos**, *A – B*, está formado por los elementos de A que no pertenecen a B, es decir, la intersección del suceso A con el contrario del suceso B.

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

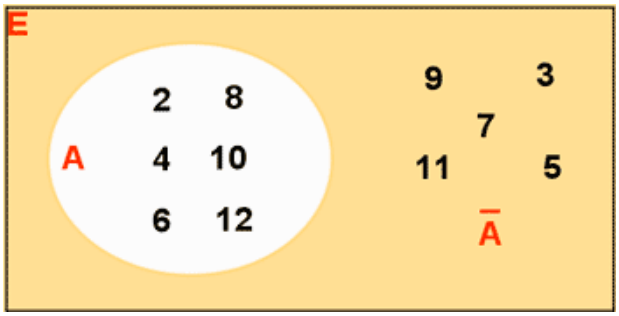


Ejemplos:

1. Sea E el espacio muestral del experimento consistente en "*lanzar dos dados y sumar las puntuaciones obtenidas en sus caras superiores*".
Sean los sucesos A = {ser par} y B = {ser mayor que 7}.
Podemos obtener:



- **Unión de sucesos**:
  A ∪ B = {obtener un número par o mayor que 7} = {2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12}
- **Intersección de sucesos**:
  A ∩ B = {obtener un número par mayor que 7} = {8, 10, 12}
- **Diferencia de sucesos**:
  A – B = {obtener un número par menor o igual que 7} = {2, 4, 6}
- **Suceso contrario**:
  $\overline{A}$ = {No obtener número par} = {obtener un número impar} = {3, 5, 7, 9, 11}
  $\overline{B}$ = {Ser menor o igual que 7} = {2, 3, 4, 5, 6, 7}



2. De una urna con 50 bolas numeradas de 1 a 50 se extrae una. Se consideran los sucesos:
A = {sacar un número múltiplo de 2}
B = {sacar un número múltiplo de 3}

C = {sacar un número múltiplo de 5}

Determina los elementos de los siguientes conjuntos:

a) $A \cup B$ = {sacar múltiplo de 2 o 3}

b) $A \cup C$ = {sacar múltiplo de 2 o 5}

c) $B \cup C$ = {sacar múltiplo de 3 o 5}

d) $A \cap B$ = {sacar múltiplo de 2 y 3} = {sacar múltiplo de 6}

e) $A \cap C$ = {sacar múltiplo de 2 y 5} = {sacar múltiplo de 10}

f) $B \cap C$ = {sacar múltiplo de 3 y 5} = {sacar múltiplo de 15}

g) $\overline{A} \cap B$ = {sacar número que no sea múltiplo de 2 y si de 3} = {sacar múltiplo de 3 e impar}

h) $B \cap \overline{C}$ = {sacar múltiplo de 3 y no de 5} = {sacar múltiplo de 3 que no acabe ni en 5 ni en 0}

i) $C \cap \overline{C} = \emptyset$

j) $B \cup \overline{B}$ = E

k) $\overline{A \cup B}$ = {sacar número que no sea múltiplo de 2 ni de 3}

l) $\overline{A \cap B}$ = {sacar número que no sea múltiplo de 6}

Ejercicios

1. Tenemos una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Realizamos el experimento, que consiste en sacar una bola de la urna, anotar el número y devolverla a la urna. Consideramos los siguientes sucesos: **A="salir un número primo"** y **B="salir un número cuadrado perfecto"**. Responde a las cuestiones siguientes:

a. Calcula los sucesos $A \cap B$ y $A \cup B$
b. Los sucesos *A* y *B*, ¿son compatibles o incompatibles?
c. Encuentra los sucesos contrarios de *A* y *B*.

2. Se lanza un dado de seis caras. Considera los sucesos:
A = "obtener un número mayor que 2" B = "obtener un número par"
C = "obtener un número primo"
Describe los sucesos elementales asociados a cada suceso y calcula los sucesos siguientes:
a. $\overline{A}$; $\overline{B}$; $\overline{C}$ b. $A \cap B$; $A \cup B$ c. $\overline{A \cup B}$; $\overline{A \cap B}$; $B \cap C$ d. $A \cup \overline{B}$; $B \cap \overline{C}$

3. En el experimento "Lanzar un dado con 6 caras" consideramos los sucesos A = "sacar par", B = "sacar impar", C = "sacar primo". Describe estos sucesos A, B y C, también los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$, $B \cap C$.

a. Describe los sucesos contrarios $\overline{A}, \overline{B}$ *y* $\overline{C}$
b. Calcula las probabilidades de todos los sucesos que aparecen en el ejercicio.

Solución: 1.a. $A \cap B = \{2,3,5,7\} \cap \{1,4,9\} = \emptyset$; $A \cup B = \{2,3,5,7\} \cup \{1,4,9\} = \{1,2,3,4,5,7,9\}$
1.b. Son incompatibles

1.c. $\overline{A}=$ No sacar número primo$=\{1,4,6,8,9\}$;

$\overline{B}=$ *No sacar cuadrado perfecto* $=\{2,3,5,6,7,8\}$

2. A = {3,4,5,6}; B = {2,4,6}; C = {2,3,5}

2.a. $\overline{A}=$ *Obtener número menor o igual que* 2 ; $\overline{B}=$ *Obtener número impar* ;

$\overline{C}=$ *Obtener nº no primo*

2.b. $A\cap B$ *=Sacar número par mayor que 2 = {4,6};* $A\cup B$ *= Sacar número par o mayor que 2 = {2,3,4,5,6}*

2.c. $\overline{A\cup B}$ *= {1};* $\overline{A\cap B}$ *={1,2,3,5};* $B\cap C$ *=Sacar primo y par={2}*

2.d. $A\cup\overline{B}$ *= Sacar mayor que 2 o impar = {1,3,4,5,6};* $B\cap\overline{C}$ *= Sacar par y no sea primo = {2,4,6}*$\cap$*{1,4,6} = {4,6}*

3. A={2,4,6}, B={1,3,5}, C={2,3,5}. $\overline{A}=\{\text{sacar impar}\}=B$, $\overline{B}=\{\text{sacar par}\}=A$,

$\overline{C}=\{\text{sacar no primo}\}=\{1,4,6\}$. $A\cup B=E$, $A\cap B=\varnothing$, $A\cup C=\{2,3,4,5,6\}$,

$A\cap C=\{2\}$, $B\cup C=\{1,2,3,5\}$ y $B\cap C=\{3,5\}$.

3. Definición de Probabilidad. Propiedades.

3.1. Definición de Laplace

Si el espacio muestral de un experimento aleatorio está formado por ***n*** sucesos elementales $E=\{x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_n\}$ y todos ellos tienen la misma probabilidad de que ocurran en la realización del experimento (son **equiprobables**), entonces:

Probabilidad de que se verifique un suceso A=$P(A)=\dfrac{\text{Número de casos favorables al suceso A}}{\text{Número de casos posibles}}$

3.2. Propiedades

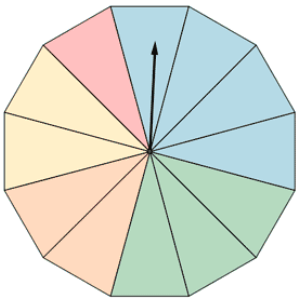
1. $P(\overline{A})=1-P(A)$
2. $P(\varnothing)=0$
3. $P(E)=1$
4. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

¡¡ IMPORTANTÍSIMO !!

$0\le P(A)\le 1$

Ejemplos:

1. Al girar una ruleta como la de la figura, ¿cuál es la probabilidad de cada color?



1 parte es roja, 4 azules, 3 verdes, 2 naranjas y 2 amarillas.

Al encontrarnos en una situación de equiprobabilidad, aplicamos la Regla de Laplace para poder calcular la probabilidad de cada color, teniendo en cuenta que la ruleta se encuentra dividida en 12 partes. Los sucesos elementales presentan la misma probabilidad.

$$P(A)=\frac{\text{Número de casos favorables al suceso A}}{\text{Número de casos posibles}}$$

$$P(rojo)=\frac{1}{12} \qquad P(azul)=\frac{4}{12} \qquad P(verde)=\frac{3}{12} \qquad P(naranja)=P(amarillo)=\frac{2}{12}$$

2. Si extraemos una bola al azar de una urna que contiene 3 bolas verdes, 5 bolas blancas y 2 bolas azules, calcula la probabilidad de los sucesos:
A = {obtener una bola verde}, B = {obtener una bola blanca} y C = {obtener una bola azul}.

Como en total hay 10 bolas, los casos posibles son 10 y los casos favorables para el suceso A son 3, 5 para B y 2 para C.

Por lo tanto:

$$P(A)=\frac{3}{10} \qquad P(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2} \qquad P(C)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

3. Si lanzamos un dado al aire, calcula la probabilidad de que ocurran los siguientes sucesos:
a) Sacar un 3.
b) Sacar un número par.
c) Sacar un número primo.
d) Sacar un número menos que 5.

Definimos en primer lugar el espacio muestral del experimento: E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

Aplicando la regla de Laplace, calculamos ahora las probabilidades de cada uno de los sucesos.

a) $P(A)=\frac{1}{6}$ b) $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ c) $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ d) $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

4. De la baraja de cartas española de 40 cartas se extrae una carta al azar. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:
a) Sacar el as de espadas.
b) Sacar un rey.
c) Sacar un oro.
d) Sacar una figura

e) Sacar una carta que no sea figura.
f) Sacar as o un 2.

Aplicando la regla de Laplace, calculamos las probabilidades de cada uno de los sucesos.

$P(As\ de\ espadas)=\frac{1}{40}$ $P(rey)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$ $P(Oro)=\frac{10}{40}$

$P(Figura)=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$ $P(No\ figura)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$ $P(As\ o\ 2)=\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$

5. En un sorteo de lotería observamos la cifra en que termina el "gordo".
a) ¿Cuál es el espacio muestral?
b) Describe los sucesos: *A* = "Menor que 5"; *B* = "Par".
c) Halla los sucesos $A\cup B$, $A\cap B$, A^c, B^c, $A^c\cap B^c$.

a) El espacio muestral es: E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

b) A = "MENOR QUE 5" = {0, 1, 2, 3, 4} B = "PAR" = {0, 2, 4, 6, 8}

c) $A\cup B$ = {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8} $A\cap B$ = {0, 2, 4}

A^c = {5, 6, 7, 8, 9} B^c = {1, 3, 5, 7, 9} $A^c\cap B^c$ = {5, 7, 9}

6. Escribimos cada una de las letras de la palabra PREMIO en una ficha y las ponemos en una bolsa. Extraemos una letra al azar.
a) Escribe los sucesos elementales de este experimento. ¿Tienen todos la misma probabilidad?
b) Escribe el suceso "obtener vocal" y calcula su probabilidad.

a) Los sucesos elementales son: {P}, {R }, {E }, {M }, {I }, {O}.
Todas tienen la misma probabilidad, porque todas aparecen una sola vez.

b) V = "obtener vocal" = {E, I, O} P(V) = 3/6 = 1/ 2 = 0,5

7. Lanzamos un dado rojo y otro verde. Anotamos el resultado. Por ejemplo, (3, 4) significa 3 en el rojo y 4 en el verde.
a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?
b) Describe los siguientes sucesos:
***A*: la suma de puntos es 6; *A* = {(5, 1), (4, 2), …}**
***B*: En uno de los dados ha salido 4; *B* = {(4, 1), …}**
***C*: En los dados salió el mismo resultado.**
c) Describe los sucesos $A\cup B$, $A\cap B$, $A\cap C$.
d) Calcula la probabilidad de los sucesos de los apartados b) y c).
e) Calcula la probabilidad de A^c, B^c y C^c.

a) Como tenemos dos dados, cada uno con 6 caras, tenemos 6 resultados en uno para cada uno de los 6 resultados del otro. Es decir, en total, 36 elementos en el espacio muestral.

b) A = {(5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)}
B = {(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)}
C = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

c) $A\cup B$ → En uno de los dados ha salido un 4 o la suma de los dos es 6.

$A \cap B$ → Habiendo salido un 4, la suma de los dos es 6, es decir, {(4, 2), (2, 4)}.
$A \cap C$ → Habiendo salido dos números iguales, la suma es 6, es decir, {(3, 3)}.

d) $P[A] = 5/36$ $P[B] = 11/36$ $P[C] = 6/36 = 1/6$
$P[A \cup B] = 14/36$ $P[A \cap B] = 2/36 = 1/18$ $P[A \cap C] = 1/36$

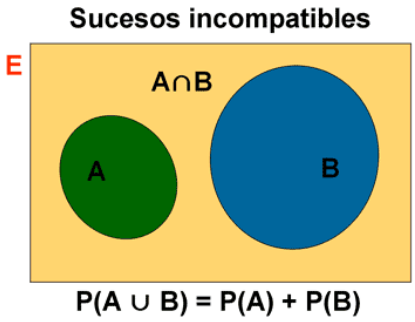
e) $P[A^c] = 1 - P[A] = 31/36$
$P[B^c] = 1 - P[B] = 25/36$
$P[C^c] = 1 - P[C] = 5/6$

4. Regla de la suma

4.1. Sucesos incompatibles

Si dos **sucesos** A y B de un experimento son **incompatibles**, la probabilidad de su unión es igual a la suma de la probabilidad de cada suceso:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



Ejemplo:

Una urna contiene 5 bolas rojas, 2 bolas azules y 3 bolas verdes. Se considera el experimento sacar una bola al azar. Sean los sucesos A = "Sacar bola roja", B = "Sacar bola azul" y C = "Sacar bola que no sea verde". Calcula la probabilidad de sacar una bola que no sea verde.

A y B son sucesos incompatibles. Además $A \cup B = C$
Aplicando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{5}{10} \quad P(B) = \frac{2}{10} \quad P(C) = \frac{7}{10}$$

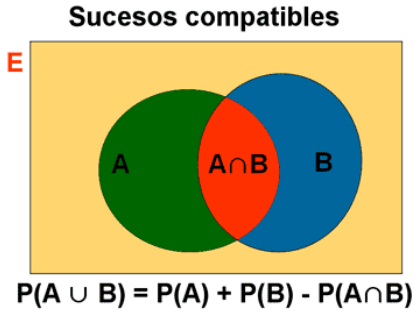
Se puede calcular la probabilidad de C, utilizando la fórmula anterior:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$$

4.2. Sucesos compatibles

Si dos **sucesos** A y B son **compatibles**, la probabilidad de su unión es igual a la suma de la probabilidad de cada suceso menos la probabilidad del suceso intersección de A y B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Ejemplo:

1. **Realizamos el experimento aleatorio de extraer una carta de una baraja española de 40 cartas y se definen los siguientes sucesos:**
   A = {obtener un rey}, B = {obtener una copa} y C = {obtener un rey o una copa}.
   ¿Cómo calcularías las probabilidades de esos sucesos?

   Aplicando la regla de Laplace:

$$P(A)=\frac{4}{40} \quad P(\mathrm{B})=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$$

   Para obtener la probabilidad de que salga rey o una carta de copas, tenemos 10 cartas de copas y los 3 reyes restantes (de oros, espadas y bastos) pues en las 10 cartas de copas ya está incluido el rey de copas

$$P(\mathrm{C})=\frac{13}{40}$$

   Sin embargo, si nos fijamos en el suceso C, obtener un rey o una copa, vemos que este suceso se puede identificar con la unión de los sucesos A y B, pero teniendo cuidado porque A y B tienen un elemento en común y son compatibles. Por tanto:

$$P(\mathrm{C})=P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P(A)}+\mathrm{P(B)}-\mathrm{P(A}\cap\mathrm{B)}=\frac{4}{40}+\frac{10}{40}-\frac{1}{40}=\frac{13}{40}$$

2. **Una bolsa contiene bolas numeradas del 1 al 20, de manera que todas tienen la misma probabilidad de ser escogidas.**
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una bola, el número no sea divisible por 3?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea divisible por 3 o por 5?
   c) ¿Y la probabilidad de que no sea divisible por 3 ni por 5?

   Consideramos los sucesos:

   A = {Ser divisible por 3} = {3, 6, 9, 12, 15, 18}
   B = {Ser divisible por 5} = {5, 10, 15, 20}
   A ∩ B = {Ser divisible por 3 y ser divisible por 5} = {15}

   Calculamos sus probabilidades:

$$P(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}=0'3\ ;\ P(B)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}=0'2;\ P(A\cap B)=\frac{1}{20}=0'05$$

   a) $\{\text{No ser divisible por 3}\}=\overline{A}$

$$P(\overline{A})=1-0'3=0'7$$

   b) $\{\text{Ser divisible por 3 o 5}\}=A\cup B$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0'3+0'2-0'05=0'45$$

c) $\{\text{No ser divisible por 3 ni por 5}\} = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

$$P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right) = 1 - 0'45 = 0'55$$

5. Regla del producto. Probabilidad en experimentos compuestos.

Un **Experimento aleatorio simple** es aquel en el que sólo se realiza una acción.
Por ejemplo: *"sacar una carta", "lanzar un dado", "elegir una bola de una urna"," apuntar el número de matrícula de un coche que pasa por la calle", etc...*

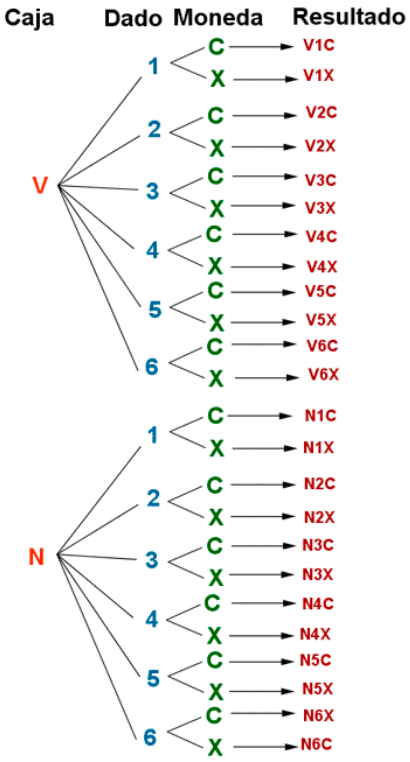
Un **experimento compuesto** está formado por dos o más experimentos aleatorios simples realizados de manera consecutiva.

La probabilidad de un suceso elemental en un experimento compuesto puede obtenerse **multiplicando** las probabilidades indicadas en las **ramas** del diagrama de árbol que llevan a realizarse el suceso.

Ejemplos:

1. **Realizamos el experimento de coger una bola de una caja que contiene una bola verde y otra naranja, luego se lanza un dado cúbico y, por último, una moneda.**
   a) **Realiza el diagrama de árbol del experimento.**
   b) **¿Cuántos resultados hay?**
   c) **Determina el espacio muestral**

a) Describamos el experimento con un diagrama de árbol:



b) Al coger una bola de una caja de dos se obtienen dos resultados distintos. Al lanzar el dado se obtienen 6 resultados distintos. Y al lanzar una moneda, 2 resultados distintos. Por tanto, el número de resultados posibles se obtiene utilizando el principio de multiplicación:

2 · 6 · 2 = 24 resultados posibles

c) **E** = {(V, 1, C) , (V, 1, X) , (V, 2, C) , (V, 2, X) , (V,3,C) , (V,3,X) , (V,4,C) , (V,4,X) , (V,5,C) , (V, 5, X) , (V, 6, C) , (V, 6, X) , (N, 1, C) , (N , 1, X) , (N, 2, C) , (N, 2, X) , (N, 3, C) , (N, 3, X) , (N, 4, C) , (N, 4, X) , (N, 5, C) , (N, 5, X) , (N,6,C) , (N, 6, X)}

2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener en el experimento anterior: una bola negra, un 5 y una cara (N, 5, C)?

- Aplicando la regla de Laplace, ya que todos los resultados son equiprobables, resulta:

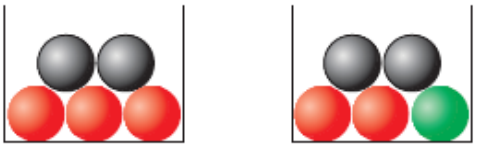
$$P\left(Obtener\ N5C\right)=\frac{n^{o}\ \text{casos favorables}}{\text{n}^{o}\ \text{casos posibles}}=\frac{1}{24}$$

- Apliquemos la regla del producto:

$$\left.\begin{array}{l} P(\text{Obtener bola negra})=\frac{1}{2} \\ P(\text{Obtener un 5})=\frac{1}{6} \\ P(\text{Obtener cara})=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(\text{Obtener N5C}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$$

Se comprueba que se obtiene el mismo resultado con los dos métodos.

3. Sacamos una bola de cada urna. Calcula:



a) La probabilidad de que ambas sean rojas.
b) La probabilidad de que ambas sean negras.

a) P(Roja y roja) $=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$

b) P(Negra y negra) $=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

6. Probabilidad condicionada

Sean *A* y *B* dos sucesos tal que *P(A)* ≠ 0, se llama ***probabilidad de B condicionada al suceso A***, ***P(B/A)***, a la probabilidad de que ocurra *B* sabiendo que ha sucedido *A* , es decir, probabilidad de *B* tomando como espacio muestral *A*.

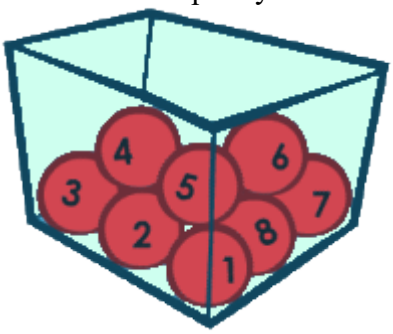
$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

De esta igualdad se deduce:

$$P(B\cap A)=P(A)\cdot P(B/A)$$

Nos pueden surgir dos tipos de situaciones donde usar la probabilidad condicionada.

- En experimentos simples la probabilidad condicionada reduce el espacio muestral. Por ejemplo:
  - En el experimento "sacar una bola de una urna con 8 bolas numeradas del 1 al 8", consideramos los sucesos A = "sacar par" y B = "sacar 4 o más".



a) Calcula la probabilidad de A.
b) Calcula la probabilidad de A, sabiendo que ha pasado B.

Solución:

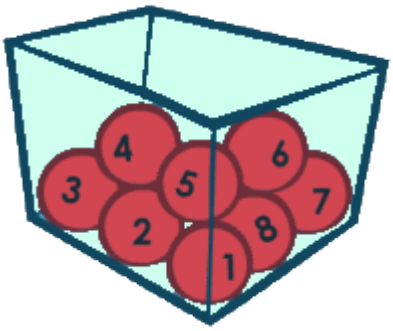
E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
A = "sacar par" = {2, 4, 6, 8} B = "sacar 4 o más" = {4, 5, 6, 7, 8}
Utilizando la regla de Laplace:

$$P(A)=\frac{\text{nº casos favorables (2, 4, 6, 8)}}{\text{nº casos posibles (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}=0,5=50\%$$

Como sabemos que ha sucedido B el espacio muestral ya no son los 8 resultados posibles, sino los 5 que contempla el suceso B. También cambia el número de casos favorables.

$$P(A/B)=\frac{\text{nº casos favorables (4, 6, 8)}}{\text{nº casos posibles (4, 5, 6, 7, 8)}}=\frac{3}{5}=0,6=60\%$$

- En experimentos compuestos lo que sucede en una acción puede condicionar la probabilidad de la siguiente acción.
  Por ejemplo:
  - En el experimento "sacar dos bolas de una urna con 8 bolas numeradas del 1 al 8", consideramos los sucesos A = "sacar una 1ª bola par" y B = "sacar una 2ª bola par". Calcular P(A) y P(B/A).



Solución:

Para calcular la probabilidad de A el experimento es sacar una bola de la urna, por lo que aplicamos la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

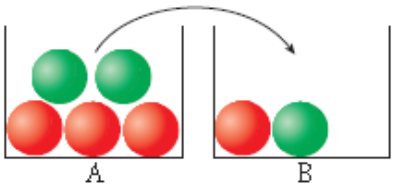
Sin embargo, para calcular la probabilidad de B condicionado a que ha sucedido A, debemos de considerar el experimento compuesto "sacar una 1ª bola, dejarla fuera y después sacar una 2ª bola"

P(B/A) =

$$= \frac{\text{nº casos favorables (he sacado una par, solo quedan 3 pares)}}{\text{nº casos posibles (solo 7 bolas)}} = \frac{3}{7} = 0,428 = 42,8\%$$

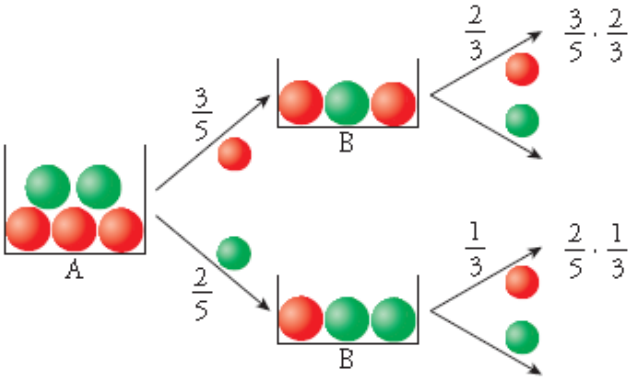
Ejemplos:

1. Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una de B. Calcula:



a) *P*(1ª roja y 2ª roja)
b) *P*[1ª roja y 2ª verde)

Para calcular esta probabilidad, ten en cuenta el diagrama de árbol.



a) *P*(1ª roja y 2ª roja) = *P*(1ª roja) · P(2ª roja / 1ª roja) = $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

b) P(1ª roja y 2ª verde) = P(1ª roja) · P(2ª verde / 1ª roja) = $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

2. En una clase de 25 alumnos, 14 son aficionados al fútbol, 9 al baloncesto y 5 a ambos deportes. Si se elige un alumno al azar, calcular la probabilidad de que:
a) Sea aficionado al fútbol, sabiendo que es aficionado al baloncesto.
b) Sea aficionado al fútbol, sabiendo que no es aficionado al baloncesto.
c) No practique ningún deporte.

En este experimento todos los sucesos elementales son equiprobables, puesto que todos los alumnos de la clase tienen la misma probabilidad de ser escogidos. Por tanto, podemos aplicar la regla de Laplace.

Consideramos los siguientes sucesos:

A = {Ser aficionado al fútbol} B = {Ser aficionado al baloncesto}

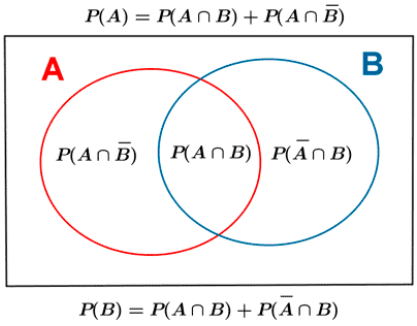
A ∩ B = {Ser aficionado a los dos deportes}

a) {Ser aficionado al fútbol condicionado a ser aficionado al baloncesto} = A/B

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{5/25}{9/25}=\frac{5}{9}$$

b) {Ser aficionado al fútbol, sabiendo que no es aficionado al baloncesto} = $A/\overline{B}$

$$P(A/\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\frac{14/25-5/25}{1-9/25}=\frac{9/25}{16/25}=\frac{9}{16}$$



c) Partiendo del esquema anterior, podemos calcular fácilmente cuántos alumnos practican fútbol, baloncesto o ambos.

Probabilidad de que un alumno sólo sea aficionado al fútbol:

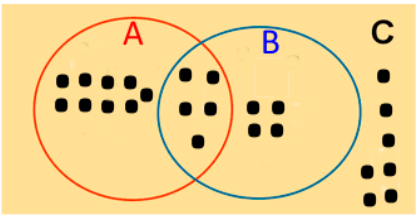
$$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=\frac{14}{25}-\frac{5}{25}=\frac{9}{25}$$

Probabilidad de que un alumno sólo sea aficionado al baloncesto:

$$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{9}{25}-\frac{5}{25}=\frac{4}{25}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que no sea aficionado a ningún deporte es:

$$P(C)=1-P(A\cap B)-P(A\cap\overline{B})-P(\overline{A}\cap B)=1-\frac{5}{25}-\frac{9}{25}-\frac{4}{25}=\frac{25}{25}-\frac{18}{25}=\frac{7}{25}$$



6.1. Probabilidad de sucesos independientes y dependientes

Sucesos independientes

Dos sucesos A y B son **independientes** entre sí cuando el hecho de que se verifique uno de ellos no influye en la probabilidad de que se verifique el otro.

P(B/A) = P(B) ó P(A/B) = P(A)

Una forma de comprobar si dos sucesos A y B son independientes es:

$$A \text{ y } B \text{ son independientes} \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Sucesos dependientes

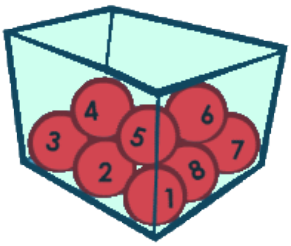
Dos **sucesos** son **dependientes** entre sí cuando el hecho de que se verifique uno de ellos influye en la probabilidad de que se verifique el otro.

Se cumple:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/\mathrm{A}) \text{ y también } P(A \cap B) = P(B) \cdot P(B/\mathrm{A})$$

Ejemplos:

1. **En el experimento "sacar una bola de una urna con 8 bolas numeradas del 1 al 8", consideramos los sucesos A = "sacar par" y B = "sacar 4 o más". ¿Son A y B independientes?**



Por lógica se intuye que no lo son, pues si uno de ellos se da por realizado la probabilidad del otro cambia.
Apliquemos la teoría:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{5}{8}$$

$$P(A \cap B) = P(\text{Sacar par mayor o igual que } 4) = \frac{\text{nº casos favorables } (4,6,8)}{\text{nº casos posibles } (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8)} = \frac{3}{8}$$

Evidentemente:

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = \dfrac{3}{8} = 0{,}375 \\ P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5}{8} = \dfrac{5}{16} = 0{,}3125 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Los sucesos son dependientes

2. **Tenemos una urna con 3 bolas rojas, 2 bolas verdes y 2 bolas azules. Vamos a extraer 2 bolas al azar. Calcula la probabilidad de sacar dos bolas rojas**.

El experimento "Extraer 2 bolas de una urna" vamos a contemplarlo como "extraer una primera bola y después una segunda bola".

Definimos los sucesos:

R_1 = {obtener una bola roja en la primera extracción}
R_2 = {obtener una bola roja en la segunda extracción}

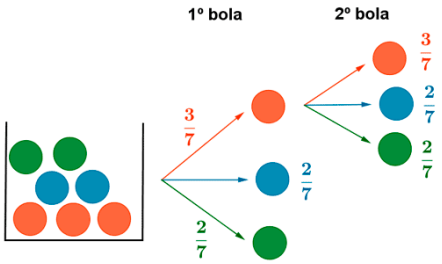
- Si la extracción es **con reemplazamiento**, los sucesos R_1 y R_2 son **independientes**. La probabilidad pedida es:

$$P\left(\text{Una bola roja en primera extracción}\right) = P(R_1) = \frac{N^o\, casos\ \ favorables}{N^o\, casos\ \ posibles} = \frac{3}{7}$$

Con reemplazamiento significa que se devuelve a la urna la bola extraída y volvemos a tener 7 bolas en la urna. La segunda extracción vuelve a tener la misma probabilidad que la primera.

$$P\left(\text{Una bola roja en segunda extracción}\right) = P(R_2) = P(R_1) = \frac{3}{7}$$

$$P\left(Sacar\ dos\ bolas\ rojas\right) = P\left(R_1, R_2\right) = P\left(R_1 \cap R_2\right) = P(R_1)\cdot P(R_2) = \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7} = \frac{9}{49}$$



Extracción con reemplazamiento

- Si la extracción es **sin reemplazamiento** los sucesos R_1 y R_2 son **dependientes**. La probabilidad pedida es:

$$P\left(\text{Una bola roja en primera extracción}\right) = P(R_1) = \frac{N^o\, casos\ \ favorables}{N^o\, casos\ \ posibles} = \frac{3}{7}$$

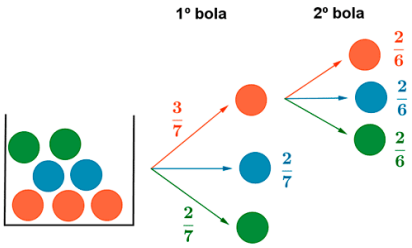
En la segunda extracción, al no haber reemplazamiento, la probabilidad de obtener la segunda roja depende de si se ha verificado o no el primer suceso (Sacar 1ª bola roja).

En este caso se dice que la probabilidad del suceso R_2 (obtener la segunda bola roja) está condicionada por el que se haya producido el suceso R_1 o no, y se escribe R_2/R_1

P(sacar una 2ª bola roja, sabiendo que hemos sacado una bola roja en la 1ª extracción) =

$$= \frac{N^o\, casos\ \ favorables\left(3-1\right)}{N^o\, casos\ \ posibles(7-1)} = \frac{2}{6}$$

$$P\left(Sacar\ dos\ bolas\ rojas\right) = P\left(R_1, R_2\right) = P\left(R_1 \cap R_2\right) = P(R_1)\cdot P(R_2\,/\,\mathrm{R}_1) = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$



Extracción sin reemplazamiento

3. En una urna hay 15 bolas numeradas del 1 al 15. Se extrae una, se anota su número y se deja encima de la mesa. Se extrae otra y se hace lo mismo.

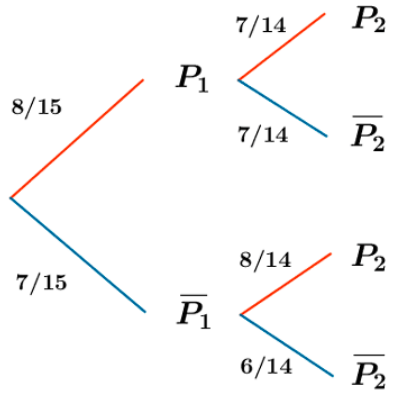
a) Determina el número de elementos del espacio muestral de este experimento.

b) Calcula la probabilidad de extraer dos bolas con numeración impar.

a) Como las extracciones son sin devolución, el número de elementos del espacio muestral es:
(nº de bolas que puedo extraer en la 1ª extracción) · (nº de bolas que puedo extraer en la 2ª extracción) =15 · 14 = **210**.

b) Sean los sucesos:
P_1 = {El primer número es impar}.
P_2 = {El segundo número es impar}.

Observando el diagrama de árbol se tiene que :



$$P((P_1 \cap P)_2 = \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} = \frac{56}{210} = \frac{4}{15}$$

4. De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace dos dianas de cada tres disparos, y el otro consigue tres dianas de cada cuatro disparos. Si los dos disparan simultáneamente, halle la probabilidad de que:

a) Ambos acierten. **b) Uno acierte y el otro no.**
c) Ninguno de los dos acierte. **d) Alguno acierte.**

Definimos los dos sucesos siguientes:
T_1 = {El primer tirador acierta} T_2 = {El segundo tirador acierta}

Estos dos sucesos son independientes, ya que lo que haga uno de los tiradores no influye en el otro. Aplicamos la probabilidad de la intersección de sucesos independientes:

a) $P(Ambos\ acierten) = P(T_1 \cap T_2) = P(T_1) \cdot P(T_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

b) $P(Uno\ acierte\ y\ otro\ no) =$
$= P$(Acierta el primero y falla el segundo o Falla el primero y acierta el segundo) =

$$= P(T_1 \cap \overline{T_2}) + P(\overline{T_1} \cap T_2) = P(T_1) \cdot P(\overline{T_2}) + P(\overline{T_1}) \cdot P(T_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$$

c) $P\left(Ninguno\ acierte\right)=P(\overline{T_1}\cap\overline{T_2})=P(\overline{T_1})\cdot P(\overline{T_2})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

d) $P\left(Alguno\ acierte\right)=1-P\left(Ninguno\ acierte\right)=1-P(\overline{T_1}\cap\overline{T_2})=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

5. Sean A y B dos sucesos de un experimento dado, tales que P (A) = 0,6; P (B) = 0,3 y P (A ∩ B) = 0,2.
Calcula P (A / B) y P (B / A).

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,2}{0,3}=\frac{2}{3}$$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0,2}{0,6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

7. Teorema de la probabilidad total. Diagrama de árbol.

Llamamos **sistema completo de sucesos** a una familia de sucesos $A_1, A_2,..., A_n$ que cumplen:

1. Son incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \emptyset$
2. La unión de todos ellos es el suceso seguro: $A_1\cup A_2\cup A_3\cup....\cup A_n=E$

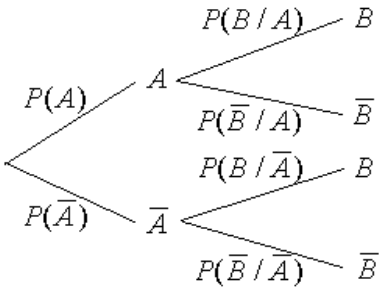
Teorema de la probabilidad total

Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la expresión:

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+....+P(A_n)\cdot P(B/A_n)$$

Para facilitar el uso de este teorema, se construyen diagramas de árbol que nos permiten organizar los distintos resultados posibles de un experimento compuesto y obtener las probabilidades de cada acción.

Cada rama nueva del diagrama es la realización de un nuevo experimento simple que lleva a completar el experimento compuesto.



En los diagramas de árbol, la probabilidad de que ocurra el segundo suceso, puede depender de cómo haya sido el primero. Cuando utilicemos este método, no es necesario, que utilicemos la nomenclatura matemática, pero no olvidéis que es el caso más sencillo y común de probabilidad condicionada.

Es muy fácil, aunque no lo parezca, fijaos en los siguientes ejemplos:

Ejemplos:

1. **Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar y sin reemplazamiento cuatro huevos. Calcula la probabilidad de extraer:**
   a) Los cuatro huevos en un buen estado.
   b) De entre los cuatro huevos, exactamente uno roto.

   Llamemos H = {Extraer huevo en buen estado}, así H_1, H_2, H_3 y H_4 será sacarlo en primer lugar, segundo, tercero o cuarto.

   a) $P\left(Sacar\ cuatro\ huevos\ buenos\right) = P(H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4) =$

   $$= P(H_1) \cdot P(H_2 / H_1) \cdot P(H_3 / H_1 \cap H_2) \cdot P(H_4 / H_1 \cap H_2 \cap H_3) =$$

   $$= \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{5040}{11880} = \frac{14}{33}$$

   b) El huevo roto lo podemos sacar en cualquiera de las 4 extracciones, así:

   $$P\left(\text{Sacar tres huevos buenos y uno malo}\right) =$$

   $$= P(\overline{H_1} \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4) + P(H_1 \cap \overline{H_2} \cap H_3 \cap H_4) +$$

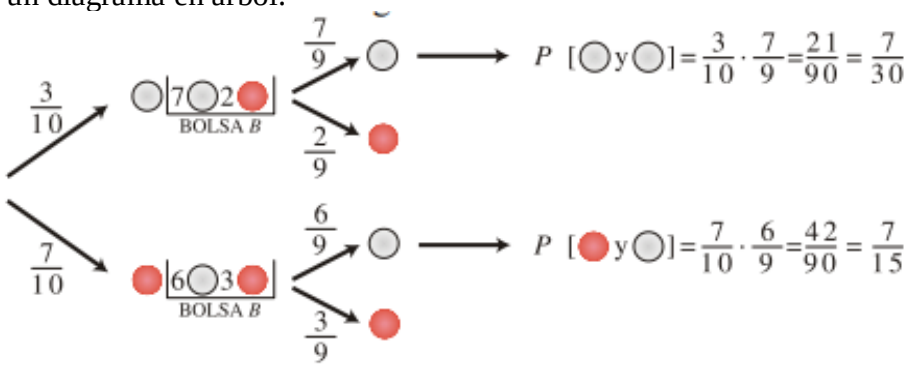
   $$+ P(H_1 \cap H_2 \cap \overline{H_3} \cap H_4) + P(H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap \overline{H_4}) =$$

   $$= \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{10}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} =$$

   $$= 4 \cdot \frac{1440}{11880} = \frac{5760}{11880} = \frac{16}{33}$$

2. **Tenemos dos bolsas, A y B. En la bolsa A hay 3 bolas blancas y 7 rojas. En la bolsa B hay 6 bolas blancas y 2 rojas. Sacamos una bola de A y la pasamos a B. Después extraemos una bola de B.**
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de B sea blanca?

   Hacemos un diagrama en árbol:



a) Esto solo ocurre en la rama o camino superior.

P(bola extraída de A es blanca y la bola extraída de B es blanca) = $\frac{7}{30} = 0'23$

b) Esto sucede de dos formas distintas y la probabilidad sería:

P(bola extraída de B es blanca) = $\frac{7}{30} + \frac{7}{15} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10} = 0'7$

3. Una multinacional elabora sus piezas en 3 factorías. El porcentaje de piezas defectuosas y el total de producción de cada factoría viene dado en la siguiente tabla:

	F_1	F_2	F_3
Producción	40%	35%	25%
Defectuosas	2%	3%	1%

Halla la probabilidad de que una pieza escogida al azar sea defectuosa.

Consideramos los sucesos:

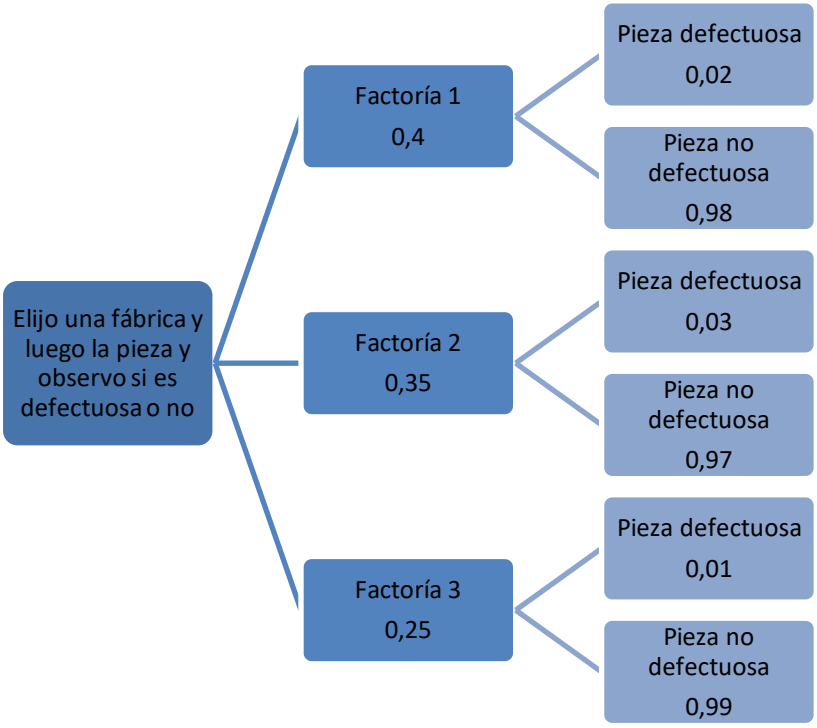
F_1 = {Elegir pieza fabricada en la factoría 1} F_2 = {Elegir pieza fabricada en la factoría 2}
F_3 = {Elegir pieza fabricada en la factoría 3} D = {Elegir pieza defectuosa}

Lo podemos calcular directamente si sabemos detallar en que consiste el suceso "La pieza es defectuosa" y las distintas maneras en que se puede producir esta situación.

$$P\left(Elegir\ pieza\ defectuosa\right) = P(F_1)\cdot P(D/F_1) + P(F_2)\cdot P(D/F_2) + P(F_3)\cdot P(D/F_3) =$$

$$= \frac{40}{100}\cdot\frac{2}{100} + \frac{35}{100}\cdot\frac{3}{100} + \frac{25}{100}\cdot\frac{1}{100} = 0,01875 = 1,8\,\%$$

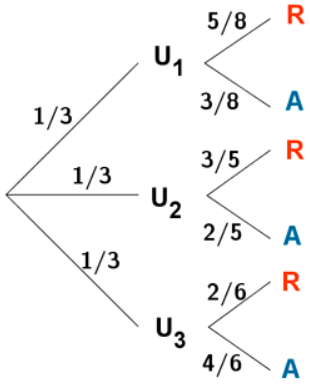
No hemos necesitado un diagrama de árbol para resolverlo, pero lo podemos usar.



$$P\left(Elegir\ pieza\ defectuosa\right) = 0,4\cdot 0,02 + 0,35\cdot 0,03 + 0,25\cdot 0,01 = 0,01875 = 1,8\,\%$$

4. Tenemos tres urnas distintas: U_1 con 5 bolas rojas y 3 azules, U_2 con 3 bolas rojas y 2 azules y U_3 con 2 bolas rojas y 4 azules. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja?

Sean los sucesos U1 = {Elegir urna 1}, U2 = {Elegir urna 2}, R = {Sacar bola roja} y A = {Sacar bola azul}.
Los experimentos "elegir urna" y "sacar una bola" son dependientes entre sí. En el diagrama de árbol podemos ver las distintas probabilidades de que ocurran **R** o **A** para cada una de las 3 urnas.



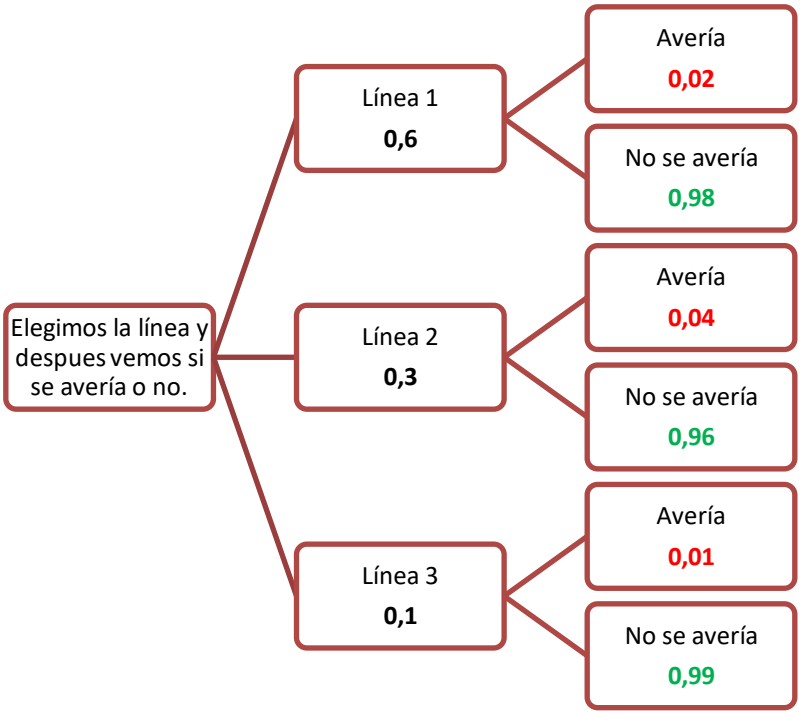
$$P(R) = P(U_1)\cdot P(R/U_1) + P(U_2)\cdot P(R/U_2) + P(U_3)\cdot P(R/U_3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6} = \frac{5}{24} + \frac{3}{15} + \frac{2}{18} = \frac{187}{360}$$

5. Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas de una ciudad, de forma que el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primera línea, el 30% cubre la segunda y el 10% cubre el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es del 2%, 4% y 1%, respectivamente, para cada línea. Determina la probabilidad de que, en un día, un autobús sufra una avería.

El suceso "sufrir una avería" (*Av*) puede producirse en las tres líneas, *(L_1, L_2, L_3)*. Según el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta las probabilidades del diagrama de árbol adjunto, tenemos:

$$P(Av) = P(L_1)\cdot P(Av/L_1) + P(L_2)\cdot P(Av/L_2) + P(L_3)\cdot P(Av/L_3)$$



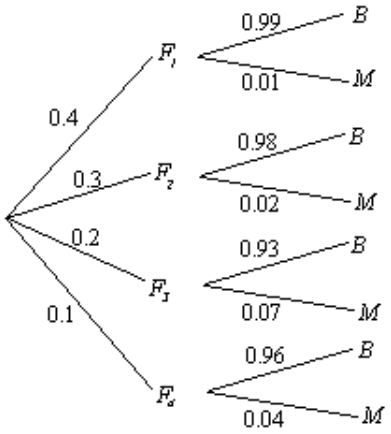
(El Sistema completo de sucesos aparece en las primeras ramas: L_1, L_2 y L_3)

También se puede expresar como

$$P(Av) = P(L_1 \cap Av) + P(L_2 \cap Av) + P(L_3 \cap Av) = 0,6 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,1 \cdot 0,01 = 0,025$$

6. Una empresa del ramo de la alimentación elabora sus productos en cuatro factorías: *F_1, F_2, F_3 y F_4*. El porcentaje de producción total que se fabrica en cada factoría es del 40%, 30%, 20% y 10%, respectivamente, y además el porcentaje de envasado incorrecto en cada factoría es del 1%, 2%, 7% y 4%. Tomamos un producto de la empresa al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre defectuosamente envasado?

Llamando M = "el producto está defectuosamente envasado", se tiene que este producto puede proceder de cada una de las cuatro factorías y, por tanto, según el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta las probabilidades del diagrama de árbol adjunto, tenemos:



$$P(M) = P(F_1) \cdot P(M / F_1) + P(F_2) \cdot P(M / F_2) + P(F_3) \cdot P(M / F_3) + P(F_4) \cdot P(M / F_4) =$$
$$= 0,4 \cdot 0,01 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.2 \cdot 0.07 + 0.1 \cdot 0.04 = 0,028$$

Ejercicios:

1) En una baraja de 40 cartas, ¿cuáles la probabilidad de sacar un as? ¿y de sacar una carta de oros?

2) Se lanzan dos dados equilibrados con seis caras marcadas con los números del 1 al 6. Se pide:
   a. Halla la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que los valores obtenidos difieran en una cantidad mayor de dos?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que salga igual número en los 2 dados (pareja)?

3) Si escogemos al azar dos números de teléfono y observamos la última cifra de cada uno, determina las probabilidades siguientes:
   1) Que las dos cifras sean iguales.
   2) Que su suma sea 11.
   3) Que su suma sea mayor que 7 y menor que 14.

Solución:

1. P(As)=1/10 P(Oros)=1/4

2. P(múltiplo de 3)=1/3 P(difieren más de 2)=1/3 P(pareja)=1/6

3. a. P(2 cifras iguales)=1/10

b. P(sumen 11)=P(sean 5+6 o 7+4 o 8+3 o 9+2)=8/100=2/25

c. P(suma sea 8, 9, 10, 11, 12 o 13) = 1 – P(suma sea 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 14, 15, 16, 17, 18) = 79/100

8. Tablas de contingencia.

En los problemas de probabilidad y en especial en los de probabilidad condicionada, a veces resulta interesante y práctico organizar la información en una tabla de contingencia.

Siempre que utilicemos este método, tenemos que asignarle un significado a los sucesos A y B, así como sus contrarios e indicar las probabilidades del suceso correspondiente a cada celda.

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

<u>Ejemplos:</u>

1. **En 4º de secundaria hay 22 chicos y 18 chicas. Llevan gafas 8 chicos y 6 chicas. Elegido un alumno al azar, calcula la probabilidad de que sea chico y no lleve gafas.**

   En primer lugar, recogemos los datos de un problema en una tabla de doble entrada.

	Chico	Chica	Total
Con gafas	8	6	
Sin gafas			
Total	22	18	

   En segundo lugar completamos la tabla.

	Chico	Chica	Total
Con gafas	8	6	***14***
Sin gafas	***14***	***12***	***26***
Total	22	18	***40***

En último lugar, se extraen los datos necesarios de la tabla para calcular la probabilidad pedida.

$$P(\text{Chico sin gafas}) = \frac{\text{Numero de chicos sin gafas}}{\text{Número total de alumnos}} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$$

2. Se sortea un viaje a Roma entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas.
a) ¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?
b) Si del afortunado se sabe que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?

Se tienen dos variables, la primera el género (Hombres o Mujeres) y la segunda recoge el estado civil, en este caso, si el individuo es soltero o casado.

El problema nos pregunta por la probabilidad de que el ganador sea un hombre soltero. En principio no sabemos cuántos hombres solteros hay, no contamos con ese dato, por lo que nos ayudará realizar una tabla de contingencia.

Paso 1. Realizamos la tabla y la llenamos con los datos dados
De los datos explícitos que tenemos, nuestra tabla queda así:

	Hombres	Mujeres	Total
Casados/Casadas		45	80
Solteros/Solteras			
Total		65	120

Paso 2. Analizamos los datos
Aquí lo que sigue es manipular los datos que tenemos para poder obtener el resto. Este proceso se puede hacer de varias formas distintas.
Sabemos que 80 clientes son casados, y de esos 45 son mujeres por lo que35 tienen que ser hombres.
Si hay 65 mujeres y 45 son casadas entonces debe haber 20 solteras.
De los 120 clientes, 80 son casados por lo que 40 deben ser solteros.
Además de los 120 clientes, 65 son mujeres, entonces hay 55 hombres.
Hay 40 solteros, y 20 de ellos son mujeres, entonces los otros 20 son hombres

Paso 3. Completamos la tabla

	Hombres	Mujeres	Total
Casados/Casadas	**35**	45	80
Solteros/Solteras	**20**	**20**	**40**
Total	**55**	65	120

Paso 4. Obtenemos las probabilidades
De aquí, para responder a las preguntas se debe considerar la Ley de Laplace.
¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?

$$P(\text{Hombre soltero}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

Si del afortunado se sabe que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?

$$P(\text{Mujer / casado}) = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$$

3. (EBAU 2012 Andalucía). En un congreso de 200 jóvenes profesionales se pasa una encuesta para conocer los hábitos en cuanto a contratar viajes por internet. Se observa que 120 son hombres y que, de estos, 84 contratan los viajes por internet, mientras que 24 mujeres no emplean esa vía.

Elegido un congresista al azar, calcule la probabilidad de que:

a) No contrate sus viajes por internet.
b) Use internet para contratar los viajes, si la persona elegida es una mujer.
c) Sea hombre, sabiendo que contrata sus viajes por internet.

Planteamos la tabla de contingencia con los datos que se presentan en el enunciado del ejercicio:

	Usa internet	**No usa internet**	**TOTAL**
Hombres	84		120
Mujeres		24	
TOTAL			200

Completamos la tabla.

	Usa internet	**No usa internet**	**TOTAL**
Hombres	84	**36**	120
Mujeres	**56**	24	**80**
TOTAL	**140**	**60**	200

A partir de la tabla, determinamos las probabilidades pedidas:

a) Solo nos fijamos en la fila inferior.

$$P(\text{No contrate sus viajes por internet}) = \frac{60}{200} = \frac{3}{10} = 0,3$$

b) Solo utilizamos los datos de la fila de Mujeres.

$$P(\text{Use internet, sabiendo que es mujer}) = \frac{56}{80} = \frac{7}{10} = 0,7$$

c) Solo utilizamos los datos de la columna "Usa internet".

$$P(\text{Sea hombre, sabiendo que usa internet}) = \frac{84}{140} = \frac{3}{5} = 0,6$$

9. Teorema de Bayes

En el año 1763, dos años después de la muerte de *Thomas Bayes* (1702-1761), se publicó una memoria en la que aparece, por vez primera, la determinación de la probabilidad de las causas a partir de los efectos que han podido ser observados (*Probabilidades a posteriori*). El cálculo de dichas probabilidades recibe el nombre de **teorema de Bayes**.

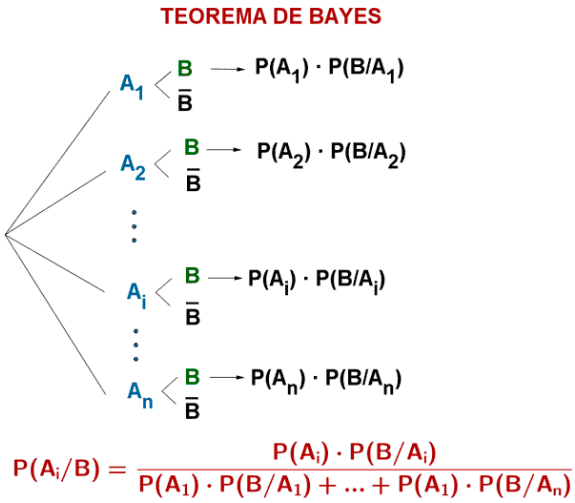
Si tenemos n sucesos, A_1, A_2, A_3, ..., A_n, tales que:

- Son incompatibles entre sí: $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$
- Su unión es el espacio muestral: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = E$

Sea un suceso B cualquiera asociado al experimento aleatorio del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, se cumple:

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+....+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$

Las probabilidades ***P (Ai)*** : **probabilidades a priori**.
Las probabilidades ***P (Ai /B)*** : **probabilidades a posteriori**.



Ejemplos:

1. **Una multinacional elabora sus piezas en 3 factorías. El porcentaje de piezas defectuosas y el total de producción de cada factoría viene expresado en la siguiente tabla:**

	F_1	F_2	F_3
Producción	40%	35%	25%
Defectuosas	2%	3%	1%

Se encuentra una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la factoría 3?

Consideramos los sucesos:

F_1 = {Elegir pieza fabricada en la factoría 1}
F_2 = {Elegir pieza fabricada en la factoría 2}
F_3 = {Elegir pieza fabricada en la factoría 3}
D = {Elegir pieza defectuosa}

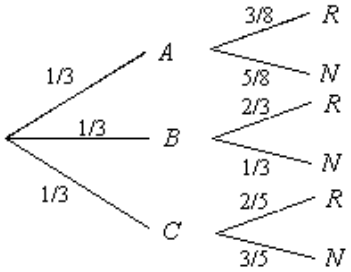
$$P(Elegir\ pieza\ defectuosa)=P(F_1)\cdot P(D/F_1)+P(F_2)\cdot P(D/F_2)+P(F_3)\cdot P(D/F_3)=$$
$$=\frac{40}{100}\cdot\frac{2}{100}+\frac{35}{100}\cdot\frac{3}{100}+\frac{25}{100}\cdot\frac{1}{100}=0,01875$$

$$P(F_3/D)=\frac{P(F_3\cap D)}{P(D)}=\frac{P(F_3)\cdot P(D/F_3)}{0,01875}=\frac{0,0025}{0,01875}=0,119$$

La probabilidad de que al encontrar una pieza defectuosa esta provenga de la factoría 3 es del 11,9 %.

2. Tenemos tres urnas: *A* con 3 bolas rojas y 5 negras, *B* con 2 bolas rojas y 1 negra y *C* con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna A?

Llamamos *R*= "sacar bola roja" y *N*= "sacar bola negra". En el diagrama de árbol adjunto pueden verse las distintas probabilidades de ocurrencia de los sucesos *R* o *N* para cada una de las tres urnas.



La probabilidad pedida es *P(A/R)*. Utilizando el teorema de Bayes, tenemos:

$$P(A/R)=\frac{P(A\cap R)}{P(R)}=\frac{P(A)\cdot P(R/A)}{P(A)\cdot P(R/A)+P(B)\cdot P(R/B)+P(C)\cdot P(R/C)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}=\frac{45}{173}=0,26=26\,\%$$

Ejercicios:

1. El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que de los no ingenieros y no economistas solamente el 20% ocupan un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?
   Sol: 15/37

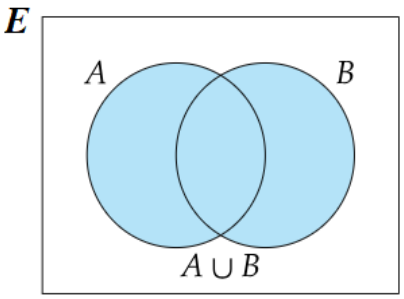
2. Supongamos que el 5% de la población padece la enfermedad de apendicitis (2% en estado agudo A y 3% en estado crónico C) y el 95% no la padece. Uno de los síntomas es dolor de estómago. Las probabilidades de tener dolor de estómago padeciendo el estado A, el estado C o no teniendo la enfermedad son del 90%, el 70% y el 10% respectivamente. Hallar la probabilidad de que una persona con dolor de estómago sufra realmente el estado A de apendicitis.
   Sol: 9/67

3. Una fábrica elabora rotuladores azules y rojos en la misma proporción. Por defectos en el proceso de fabricación, algunos rotuladores salen con la tinta de otro color. Sabemos que el porcentaje de rotuladores azules que llevan tinta azul es 82% y que el porcentaje de rotuladores rojos que llevan tinta roja es 92%.
   a. Calcular la probabilidad de que un rotulador tomado al azar tenga la tinta del color que le corresponde.
   b. Si sabemos que un rotulador tomado al azar es defectuoso, calcular la probabilidad de que escriba en color rojo.
   Sol: a) 0,87; b) 0,69

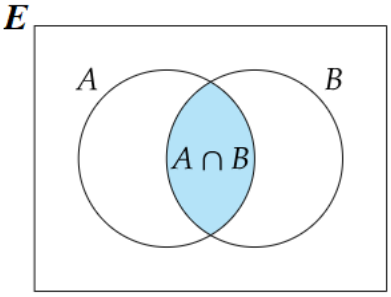
Formulario de probabilidad

Operaciones con sucesos

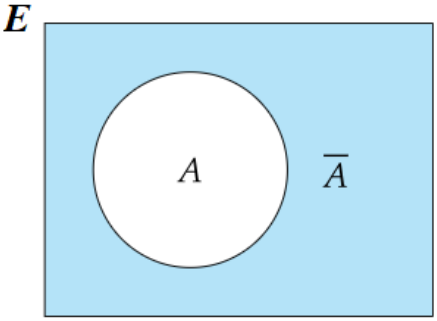
Unión



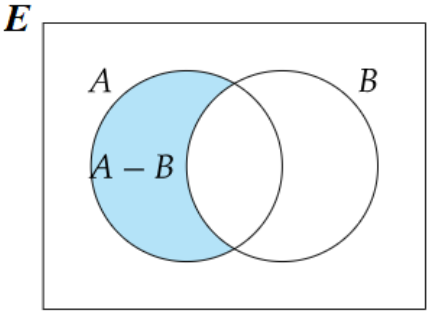
Intersección



Contrario



Diferencia de sucesos



Leyes de Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Regla de Laplace:

Para calcular probabilidades en experimentos con sucesos elementales **equiprobables:**

$$P(A) = \frac{\text{Nº de casos favorables a A}}{\text{Nº casos posibles}}$$

Probabilidad:

- $0 \le P(A) \le 1$
- $P(E) = 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\varnothing) = 0$
- si A y B son dos sucesos, se cumple:

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- si A y B son dos sucesos, se cumple:

  $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Probabilidad condicionada

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)};\quad P(A)\neq 0$$

Sucesos dependientes e independientes

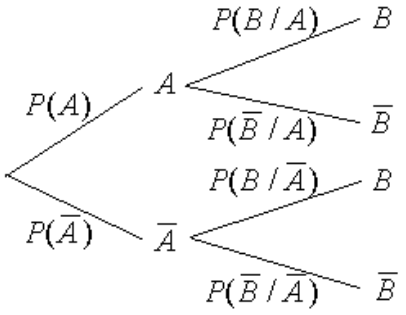
A y B son ***independientes*** cuando el que suceda uno de ellos no influye en que suceda el otro.
A y B son independientes si $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

A y **B** son ***incompatibles*** cuando no tienen nada en común ($A\cap B=\varnothing$). No pueden suceder A y B de forma simultánea.

Método 1 para resolver ejercicios de probabilidad. Tablas de contingencia.

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Método 2 para resolver ejercicios de probabilidad. Diagrama de árbol



Sistema completo de sucesos

Es una familia de sucesos A_1, A_2, ... , A_n de sucesos que cumplen:

- Son incompatibles dos a dos: $A_i\cap A_j=\varnothing$
- La unión de todos ellos es el suceso seguro: $A_1\cup A_2\cup A_3\cup ...\cup A_n=E$

Teorema de la probabilidad total

En un sistema completo de sucesos se cumple que:

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+....+P(A_n)\cdot P(B/A_n)$$

Teorema de Bayes (probabilidad a posteriori)

En un sistema completo de sucesos se cumple que:

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+....+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$

Ejercicios propuestos

Experimentos aleatorios. Probabilidad: regla de Laplace

1) Al lanzar dos monedas al aire, anotamos el número de caras obtenidas. Escribe el espacio muestral y completa la tabla:

TIPO DE SUCESO	SUCESO
Suceso Seguro	Obtener una cara o una cruz.
Suceso posible	
Suceso imposible	
Suceso muy probable	
Suceso poco probable	

2) Aplica la Ley de Laplace y calcula las siguientes probabilidades:
   a) En una bolsa hay 30 bolas, todas del mismo tamaño, de las cuales 15 son rojas, 10 son amarillas y 5 son verdes. ¿Cuál es la probabilidad de cada color al sacar una bola?
   b) En un avión viajan 35 pasajeros franceses, 15 españoles, 10 británicos y 50 italianos. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer pasajero que salga del avión no sea español?

3) En un cajón tengo 3 pares de calcetines: unos rojos, otros negros y otros marrones. Si saco dos calcetines sin mirar (de forma aleatoria), construye el diagrama de árbol asociado a este experimento y calcula las probabilidades siguientes:
   a) sacar dos calcetines rojos
   b) sacar dos calcetines negros
   c) sacar dos calcetines marrones
   d) sacar dos calcetines verdes
   e) Sacar dos calcetines del mismo color
   f) Sacar dos calcetines de distinto color.

4) En una clase de 20 alumnos, 14 aprueban matemáticas, 9 aprueban lengua y 5 aprueban las dos materias. Si se elige un alumno al azar, calcular la probabilidad de que:
   a) Apruebe matemáticas, sabiendo que ha aprobado lengua.
   b) Apruebe matemáticas, sabiendo que ha suspendido lengua.
   c) Haya suspendido todo.

5) En una bolsa hay diez bolas iguales numeradas del 0 al 9 cada una. Si se extraen dos bolas de forma consecutiva y se anotan sus números:
   a) Escribe todos los sucesos elementales que forman el suceso “la primera bola extraída ha sido un 5”.
   b) ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse colocando las bolas por orden de extracción?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea mayor que 59?
   d) ¿Y la probabilidad de que termine en 3?

6) En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas con tres cifras, numeradas del 000 al 999.

a) Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 5.
b) Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 55.
c) Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcula la probabilidad de que el número premiado hoy termine también en 5.

7) Se truca una moneda de forma que la probabilidad de salir cara es doble que la de salir cruz.
a) Si se tira al aire calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales.
b) Si se tira dos veces, ¿cuánto vale la probabilidad de obtener dos caras?
c) Si se tira tres veces, calcula la probabilidad de obtener dos cruces y una cara.

8) Pedro y Pablo idean el siguiente juego: cada uno lanza un dado, si la suma de los dados es mayor que 7, gana Pedro; si la diferencia de ambos es menor que 2, gana Pablo; y en cualquier otro caso hay empate. ¿Es un juego equitativo?

9) Un juego consiste en lanzar tres monedas al aire. Si salen 3 caras o 3 cruces el jugador gana 7 puntos; en caso contrario el jugador pierde 2 puntos.
a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la primera tirada?
b) ¿Cuál es la probabilidad de perder las dos primeras tiradas y ganar la tercera?
c) ¿Es un juego equitativo?

10) Al hacer tres lanzamientos de un dado y sumar sus resultados se alcanzó una puntuación total de 12.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento se obtuviera un 6?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que en alguno de los lanzamientos se obtuviera un 6?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en ninguno de los lanzamientos se obtuviera un 6?

11) Se hacen tres lanzamientos de un dado con las caras numeradas del 1 al 6. Si en el primer lanzamiento sale un 3, ¿qué es más probable, que la suma de las puntuaciones sea un número par o que tal suma sea impar?

12) Los estudiantes de 1º y 2º de Bachillerato de un centro escolar se distribuyen por curso y sexo como se indica en la tabla, aunque hay números desconocidos:

	Chicos	**Chicas**	Total
1º Bachillerato	**60**	*a*	**130**
2º Bachillerato	*b*	**65**	*c*
Total	**110**	*d*	**245**

a) Completa los números que faltan.
b) Se elige un estudiante al azar y se consideran los siguientes sucesos:
A = "sea una chica"; *B* = "sea de 1º"; *C* = "sea una chica de 2º"; *D* = "sea un chico de 1º"
F = "sea de 1º si se sabe que es un chico"; *G* = "sea un chico si se sabe que es de 1º"
Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

13) En un colectivo de 330 personas: 200 hablan inglés, 90 hablan francés y 70 no hablan ni inglés ni francés. Sabiendo que una persona del colectivo habla francés, halla la probabilidad de que también hable inglés.

14) En una empresa trabajan 3 mujeres por cada 2 hombres. Se sabe que el 20% de las mujeres y el 26% de los hombres necesitan gafas. Con esos datos construye una tabla de contingencia que distribuya a los trabajadores según su sexo y necesidad de gafas. A partir de los datos de esa tabla, si se elige un empleado al azar halla la probabilidad de los sucesos que se indican:

a) Que sea mujer.
b) Que sea una mujer y necesite gafas.
c) Que sea mujer si necesita gafas.
d) Que sea mujer o necesite gafas.

Probabilidad: propiedades

15) Se tienen dos sucesos aleatorios *A* y *B* y se conocen las probabilidades $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,6$ y $P(A \cup B) = 0,85$. Calcula:
a) $P(A \cap B)$
b) $P((A \cap B)^C)$
c) La probabilidad de que se cumpla solo uno de los dos sucesos.

16) Sean *A* y *B* dos sucesos independientes de un mismo experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,4$ y $P(B) = 0,5$. Calcula las siguientes probabilidades:
a) $P(A \cap B)$ b) $P(A \cup B)$ c) $P(A/B)$ d) $P(B/A)$

17) Sean *A* y *B* dos sucesos incompatibles de un mismo experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,4$ y $P(B) = 0,5$. Calcula las siguientes probabilidades:
a) $P(A \cap B)$ b) $P(A \cup B)$ c) $P(A/B)$ d) $P(B/A)$

18) Dado un espacio muestral E se consideran los sucesos A y B, cuyas probabilidades son $P(A) = 1/2$ *y* $P(B) = 2/3$.
a) ¿Pueden ser los sucesos A y B incompatibles? ¿Por qué?
b) Suponiendo que los sucesos A y B son independientes, calcula $P(A \cup B)$.
c) Suponiendo que $A \cup B = E$, calcula $P(A \cap B)$.

19) De los sucesos aleatorios independientes A y B se sabe que $P(A) = 0,3$ y que $P(B^C) = 0,25$. Calcula las siguientes probabilidades:
a) $P(A \cup B)$
b) $P(A^C \cap B^C)$
c) $P(A/B^C)$

20) Si A y B son dos sucesos independientes, de un cierto experimento aleatorio, tales que $P(A) = 1/3$ y $P(A \cup B) = 1/2$, halla $P(B)$ y $P(A \cap B/A)$.

21) Se tienen dos sucesos aleatorios *A* y *B* y se conocen las probabilidades: $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,2$ y $P(A \cup B) = 0,5$.
a) ¿Son los sucesos *A* y *B* incompatibles?
b) ¿Son sucesos independientes?

22) Sean *A* y *B* dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,4$; $P(A \cup B) = 0,5$; $P(B/A) = 0,5$. Calcula:
a) $P(A \cap B)$ b) $P(B)$ c) $P(A/B)$

23) Se consideran los sucesos *A*, *B* y *C* de un experimento aleatorio tales que: $P(A) = 0,09$; $P(B) = 0,07$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,97$. Además, los sucesos *A* y *C* son incompatibles.

a) Estudia si los sucesos *A* y *B* son independientes.
b) Calcula $P(A \cap B / C)$.

24) Sean *A* y *B* dos sucesos de un experimento aleatorio, de los que se conocen las probabilidades *P*(*A* = 0,65 y *P*(*B*)=0,30. Determina las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A \cap B$ y $A \cup B$ en cada uno de los siguientes supuestos:
a) Si *A* y *B* fuesen incompatibles.
b) Si *A* y *B* fuesen independientes.
c) Si *P*(*A*/*B*)=0,40.

25) Los resultados académicos de cierto grupo de Bachillerato muestran que la probabilidad de aprobar Matemáticas es 0,6 y la de aprobar Economía 0,7. Además, la probabilidad de aprobar las dos asignaturas es 0,45. Si en ese grupo se elige un alumno al azar, cuánto vale la probabilidad de que:
a) Apruebe alguna de las dos asignaturas.
b) Apruebe solamente una de las dos asignaturas.
c) No apruebe ninguna de las dos asignaturas.
d) ¿Es independiente aprobar Matemáticas de aprobar Economía?

26) Una alarma de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es 0,95 y de que se active el segundo es 0,90. Halla la probabilidad de que ante una emergencia:
a) Se active solo uno de los indicadores.
b) Se active al menos uno de los dos indicadores.

27) Marta y Caty son jugadoras de baloncesto. Marta encesta 2 de cada 5 tiros; Caty, 3 de cada 7. Si ambas tiran a canasta una sola vez, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
a) Ambas han encestado.
b) Ninguna ha encestado.
c) Solo Marta ha encestado.
d) Al menos una ha encestado.

28) En un IES hay dos grupos que cursan Matemáticas II. En el primero el 55% de los estudiantes son hombres y en el segundo, son mujeres el 60%. Se elige al azar un estudiante de cada grupo.
a) Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
A = "Ambos son mujeres"; *B* = "Solo uno es mujer": *C* = "Los dos son hombres"
b) Razona si el suceso contrario del suceso *A* es el *B*, el *C*, el $B \cap C$, el $B \cup C$ o algún otro suceso y calcula su probabilidad.

29) En un proceso de fabricación se sabe que la probabilidad de que un producto sea defectuoso es 0,1. Si se selecciona una muestra aleatoria de 3 productos:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que solo el segundo sea defectuoso?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que, al menos, uno de los tres sea defectuoso?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente uno defectuoso?

Probabilidad condicionada y total: Bayes

30) De una muestra de 9 personas, 2 son de nivel socioeconómico bajo, 3 de nivel medio y 4 alto.

a) Si se eligen dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean de nivel socioeconómico bajo?
b) Si se eligen tres personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna sea de nivel alto?

31) Tenemos un cofre A con 2 monedas de oro y 3 de plata, un cofre B con 5 monedas de oro y 4 de plata y un tercer cofre C con 2 monedas de oro. Elegimos un cofre al azar y sacamos una moneda.
a) Calcula la probabilidad de que sea de oro.
b) Sabiendo que ha sido de plata, calcula la probabilidad de que haya sido extraída del cofre A.

32) A la Junta General de Accionistas de una empresa asisten 105 accionistas de los cuales 45 tienen menos de 40 años y 18 más de 60 años. Sometida a votación una propuesta, es rechazada por la tercera parte de los menores de 40 años, por la tercera parte de los que están entre 40 y 60 años y por 4 personas mayores de 60 años; los demás la aceptan.
a) Calcula la probabilidad de que, elegida una persona al azar, tenga menos de 40 años y haya aceptado la propuesta.
b) La prensa afirmó que la propuesta había sido aceptada por el 80% de los asistentes, ¿es correcta la afirmación?
c) Si una persona escogida al azar ha rechazado la propuesta, ¿qué probabilidad hay de que tenga más de 60 años?

33) Lena y Adrián son aficionados al tiro con arco. Lena da en el blanco con probabilidad 7/11 y Adrián con probabilidad 9/13. Si ambos sucesos son independientes, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
a) “Ambos dan en el blanco”.
b) “Sólo Lena da en el blanco”.
c) “Al menos uno da en el blanco”

34) Una urna tiene 25 bolas iguales, que son: 16 negras y 9 rojas. Una segunda urna tiene 30 bolas iguales, que son: 18 blancas y 12 azules. Se lanza un dado; si sale un 1 o un 2, entonces se sacan 2 bolas de la primera urna; si se obtiene 3, 4, 5 o 6, entonces se sacan 2 bolas de la segunda urna. Halla las probabilidades de los sucesos: A = se saca alguna bola negra; B = se saca alguna bola blanca.

35) Según la revista *Allmovil*, el 63% de los usuarios de móvil en España tiene un “Smartphone”. Entre los propietarios de este tipo de teléfono, el 77% lo emplea para su conexión habitual a internet. Sin embargo, entre los propietarios de otros tipos de teléfono móvil solo el 8% lo emplea para la conexión habitual a internet. Calcula la probabilidad de conectarse habitualmente a internet a través del teléfono móvil.

36) Sobre una mesa hay dos bolsas iguales opacas. Una de ellas contiene 2 bolas verdes y 3 rojas; la otra, 4 bolas verdes y 1 roja.
a) Si se elige una bolsa al azar y se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea roja?
b) Si se elige una bolsa al azar y se extraen dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de que las bolas sean de distinto color?

37) Una caja contiene 7 bolas blancas y 10 negras. Se extrae al azar una bola y se sustituye por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Calcula la probabilidad de que:

a) La segunda bola sea blanca.
b) La segunda bola sea del mismo color que la primera.

38) Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas *A* y *B*. La urna *A* contiene 3 bolas rojas y 1 negras; la urna *B* contiene 3 rojas y 2 negras. Se lanza el dado: si el número obtenido es par se extrae una bola de la urna *A*; en caso contrario se extrae una bola de la urna *B*.
a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?
b) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna *A*?

Soluciones

1. *Suceso posible = sacar 2 caras, suceso imposible = sacar 3 caras, suceso muy probable = sacar 1 cara, suceso poco probable = sacar 0 caras.*
2. *a) P(R) =1/2 P(A) = 1/3 P(V) = 1/6 b) P(No español) = 95/110*
3. *a)P(RR)=1/15. b) P(NN)=1/15. c) P(MM)=1/15. d) P(VV)=0. e) P(Mismo color)=1/5. f) P(Distinto color)= 4/5*
4.a) $P(M/L)=\frac{P(M\cap L)}{P(L)}=\frac{5/20}{9/20}=\frac{5}{9}$ ***b)*** $P(M/\overline{L})=\frac{P(M\cap\overline{L})}{P(\overline{L})}=\frac{P(M)-P(M\cap L)}{P(\overline{L})}=\frac{14/20-5/20}{11/20}=\frac{9}{11}$
c) $P\left(\overline{L}\cap\overline{M}\right)=P\left(\overline{L\cup M}\right)=1-P\left(L\cup M\right)=1-\left[P(L)+P(M)-P(L\cap M)\right]=1-\left[9/20+14/20-5/20\right]=1/10$
5. *a) {50}, {51}, {52}, {53}, {54}, {56}, {57}, {58, {59} b) 90. c) 2/5. d) 1/10.*
6. *a) 1/10. b) 1/100. c) 1/10.*
7. *a) 1/3; 2/3. b) 4/9. c) 2/9.*
8. *Favorable a Pablo.*
9. *a) 1/4. b) 9/64. c) Es ventajoso para el jugador.*
10. *a) 1/5. b) 3/5. c) 2/5.*
11. *Son equiprobables.*
12. *a) 135/245; 130/245; 65/245; 60/245; 60/110; 60/130.*
13. *Con tabla de contingencia se obtienes P(I/F) = 1/3*
14. *a) 0,6. b) 0,12. c) 60/112. d) 0,704.*
15. *a) 0,45. b) 0,55. c) 0,40.*
16. *a) 0,2. b) 0,7. c) 0,4. d) 0,5.*
17. *a) 0. b) 0,9. c) y d) 0*
18. *a) No b) 5/6 c) 1/6*
19. *a) 33/40 b) 7/40 c) 3/10*
20, *P(B) = 1/4 P(A∩B/A) =1/4*
21. *a) No. b) No.*
22. *a) 0,2. b) 0,3. c) 2/7.*
23. *a) No. b) 0.*
24. *a) 0,95; 0. b) 0,755; 0,195. c) 0,83; 0,12.*
25. *a) 0,85. b) 0,40. c) 0,15. d) No.*
26. *a) 0,14. b) 0,995.*
27. *a) 6/35. b) 12/35. c) 8/35. d) 23/35.*
28. *a) 0,27; 0,51; 0,22. b)* $B\cup C$ *; 0,73.*
29. *a) 0,081. b) 0,271. c) 0,243.*
30. *a) 1/36 b) 5/42*
31. *a) 88/135 b) 27/47*
32. *a) 2/7 b) Falso c) 4/33*
33. *a) 63/143 b) 28/143 c) 127/143*
34. *P(A) = 22/75 P(B) = 82/145*
35. *0,5147.*
36. *a) 2/5. b) 1/2.*
37. *a) 22/51. b) 22/51.*
38. *27/40. b) 5/9.*

TEMA 9. Estadística

1. Muestreo

El empleo de encuestas es uno de los métodos de investigación más empleado en la actualidad. Por medio de encuestas se puede conocer la opinión de la gente sobre cualquier asunto: preocupaciones sociales; hábitos de consumo; inclinaciones políticas; gustos deportivos… Por procedimientos similares se puede determinar la eficacia de un medicamento, la duración en condiciones saludables de un alimento, el tiempo medio dedicado al uso del teléfono móvil o la puntualidad de una compañía aérea ...
Para conocer esas opiniones y hechos se hace necesario seleccionar una parte de la población, lo más pequeña posible, pero representativa del total, en la que sea posible medir las características deseadas. El muestreo estadístico es el instrumento que la Matemática ha generado para tal fin.

Que la muestra de estudio sea lo más pequeña posible es una exigencia de tiempo y de costes; además, el aumento de datos no siempre acarrea una certeza considerablemente mayor. Más importante que los muchos datos es que estén bien elegidos: que sean representativos de la población que se desea estudiar. Por ejemplo, parece lógico que, si se desea estimar la altura media de los hombres de 20 años, no se pregunte por su estatura, exclusivamente, a los individuos que salen de presenciar un partido de baloncesto, pues, aunque no es necesario ser alto para que guste el baloncesto, es más probable que el baloncesto guste a los altos. Esta consideración pone de manifiesto la necesidad de estudiar cómo hay que seleccionar una muestra para que sea representativa. Parece que el azar debe jugar un papel importante en la elección.

Pero el azar comporta riesgo. ¿Qué seguridad se tiene de que los resultados obtenidos por azar sean fiables? ¿Cómo se mide esa seguridad? La “estadística inferencial” mide esa seguridad en términos de probabilidad, lo que lleva implícito cierta inseguridad; así, por ejemplo, cuando se afirma que la probabilidad de acierto es 0,95, se admite que la probabilidad de fallo es 0,05.

Términos usuales en un estudio estadístico

Población: conjunto de todos los individuos que son objeto del estudio.
Aunque se utilicen las palabras "población" e "individuo", no se refiere exclusivamente a personas; por ejemplo, la población puede estar formada por todos los árboles de un bosque, o por todos los coches de una determinada marca fabricados el último año. En todos los casos la población debe estar claramente definida y actualizada.

Muestra: parte de la población en la que miden las características estudiadas.
El número de individuos de la muestra se llama **tamaño**. El tamaño de la muestra debe decidirse antes de comenzar la encuesta. Los criterios para determinarlo dependerán de las características de la población y de la fiabilidad que se desee dar al resultado de la encuesta. Conviene aumentar el tamaño si la población es heterogénea y si se quiere mayor precisión en la estimación

Muestreo: proceso seguido para la extracción de una muestra.
El muestreo puede ser probabilístico o no. En el muestreo probabilístico la muestra se elige por métodos aleatorios; además, permite acotar el posible error y fijar la fiabilidad del trabajo.

Encuesta: proceso de obtener información de la muestra.

Métodos de muestreo

1.- Muestreo no probabilístico: no se usa el azar, sino el criterio del investigador.

2.- Muestreo probabilístico o aleatorio, los más frecuentes son:

2.1.- Muestreo aleatorio simple: se asigna un número a cada uno de los individuos de la población, y seguidamente se van eligiendo al azar los componentes de la muestra. La elección de un individuo no debe afectar a la del siguiente, por tanto debe reemplazarse el número, una vez extraído.

2.2.- Muestreo sistemático: se ordenan previamente los individuos de la población, después se elige uno al azar y a continuación, a intervalos constantes, se eligen todos los demás hasta completar la muestra.

Ejemplos:
a) Si en una universidad hay 20000 estudiantes y se desea encuestar a 200 de ellos:
1) Se observa que hay que entrevistar a 1 de cada 100.
2) Se ordenan todos los estudiantes de alguna manera (por orden alfabético; por número de expediente; por el número del carnet de estudiante …). Una vez ordenados se elige al azar uno de ellos entre los 100 primeros de la lista (o entre 100 consecutivos). Si, por ejemplo, ha resultado elegido el número 73, los siguientes encuestados serán los estudiantes correspondientes a los números 173, 273, 373 …

b) En los procesos de calidad de muchas empresas suele utilizarse alguna forma de muestreo sistemático. Así, es frecuente examinar un número determinado de elementos de cada lote producido. (En la industria esos procesos están normalizados: normas ISO y AENOR).

2.3.- Muestreo estratificado (proporcional): se divide la población total en clases homogéneas (estratos). La muestra se escoge aleatoriamente en número proporcional al de los componentes de cada estrato.

Ejemplo:
Si en la universidad que se está poniendo de ejemplo, los estudiantes pueden distribuirse, por estudios y sexos, como se indica en la siguiente tabla.

Población	Ciencias	Biosanitarios	CC. Sociales	Ingenierías	Total
Hombres	1900	1700	2700	3600	9900
Mujeres	2100	2000	2600	3400	10100
Total	4000	3700	5300	7000	20000

Si se quiere hacer un muestreo estratificado de tamaño 200, el número de individuos de cada estrato será el dado en esta otra tabla:

Población	Ciencias	Biosanitarios	CC. Sociales	Ingenierías	Total
Hombres	19	17	27	36	99
Mujeres	21	20	26	34	101
Total	40	37	53	70	200

Nota: Si se obtuviesen restos decimales habría que redondear.

Ejercicio: En un I.E.S. hay 120 alumnos en 2º de Bachillerato provenientes de 4 zonas o pueblos.

Zona A: 20 alumnos
Zona B: 32 alumnos
Zona C: 60 alumnos
Zona D: 8 alumnos

Hay que elegir una muestra de 20 alumnos para hacerles una serie de preguntas.
Utiliza los tres métodos de muestreo aleatorio para explicar cómo escoger la muestra.

2. Distribuciones de probabilidad

Una distribución de probabilidad es un modelo teórico que trata de explicar el comportamiento de un fenómeno real. Actúa como una función que asigna a cada suceso, cuantificado mediante una variable aleatoria, la probabilidad correspondiente.
La **variable aleatoria** asocia a cada suceso del espacio muestral un número real. Puede ser discreta o continua. Se llama **discreta** cuando solo puede tomar ciertos valores aislados. Es **continua** cuando puede tomar todos los valores de un intervalo.

→ Un caso particularmente importante de distribución discreta es la llamada **binomial**.
→ La distribución continua más utilizada es la **normal**.

Ejemplos:

a) El número de veces que hay que lanzar uno de esos dados hasta que salga el número 6 es una variable aleatoria discreta
b) El tiempo que una persona tiene que esperar al autobús es una variable continua.

Función de probabilidad Una distribución de probabilidad queda determinada a partir de su función de probabilidad (llamada función de densidad, en el caso de las distribuciones continuas), que asigna a cada uno de los valores de la variable aleatoria su probabilidad:

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

Función de distribución A partir de la distribución de probabilidad de la variable X se define la función de distribución, *F(x)*, de dicha variable como sigue:

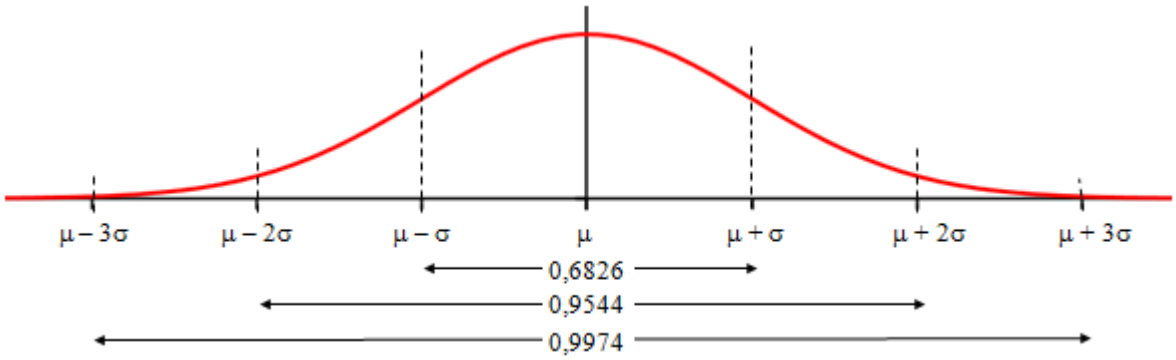
$F(x) = P(X \leq x)$ → *F(x)* acumula probabilidades.

3. Distribución de probabilidad normal

Es una distribución de probabilidad continua, asociada (teóricamente) a multitud de fenómenos naturales y cotidianos, que se caracterizan porque la mayoría de los resultados tienden a agruparse en torno a su media. (Altura de las personas; tamaño de los frutos de una planta; …)
Una variable con distribución normal queda definida por su media μ y por su desviación típica σ. Se denota como N(μ, σ).

La expresión de la función de densidad de la distribución normal es: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Su gráfica es la conocida "campana de Gauss".



Esta función cumple las siguientes propiedades:

- Está definida para todo número real, es decir, en el intervalo (–∞, +∞): la variable puede tomar cualquier valor; siendo $f(x) > 0$ para todo x.
- El área por debajo de la curva vale 1.
- Es simétrica respecto a su media μ.
- El eje de abscisas es una asíntota de la curva.
- Aunque la variable puede tomar cualquier valor entre –∞ y +∞, la probabilidad de que tome valores alejados de la media es prácticamente nula, pues se cumple que: el área delimitada por la curva y el eje *OX* entre μ – σ y μ + σ es 0,6826; entre μ – 2σ y μ + 2σ es de 0,9544; y entre μ – 3σ y μ + 3σ es de 0,9974. A los valores que están a una distancia superior a 3,5σ de μ se les asigna probabilidad 0.

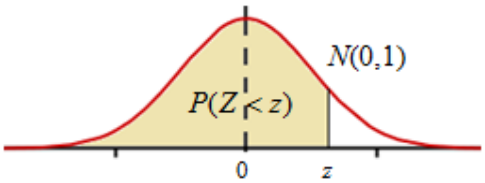
3.1. Distribución normal de media 0 y desviación típica 1: *N*(0, 1)

El comportamiento estadístico normal hace que puedan asignarse valores de probabilidad a cualquier suceso de la variable estudiada. Esto es, se puede saber (pues está tabulado) la probabilidad de que la variable tome valores pertenecientes a cualquier intervalo dado.

Lo que está tabulado es la función de distribución en el caso de la curva normal de media μ = 0 y desviación típica σ = 1, la normal *N*(0, 1).

La función de distribución *F(x)*, da la superficie del recinto limitado por la función de densidad, curva definida más arriba, y el eje *OX*, desde –∞ hasta un valor determinado *z*, esto es

$$P(Z < z) = F(z) = \text{Área bajo la curva entre } -\infty \text{ y } z.$$



Esta área da la probabilidad de que la variable *Z*, tome valores menores que *z*. (Cuando se trata de la *N*(0, 1), la variable aleatoria suele designarse por la letra *Z*).

3.2. Tabla normal estándar: *N*(0, 1)

En la tabla normal *N*(0, 1) se da la probabilidad de que la variable *Z* tome valores entre –∞ y +*z*: $P(Z < z)$; los demás valores se obtienen teniendo en cuenta la simetría de la curva y que el área por debajo de la curva vale 1. Así, a partir del valor $P(Z < z)$, pueden obtenerse los valores de $P(Z > z)$, $P(Z < -z)$, $P(Z > -z)$, $P(0 < Z < z)$ y $P(-Z < z < Z)$.
En esta tabla la cifra de las unidades y de las décimas se muestran en la columna de la izquierda, la de las centésimas en la fila superior.

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319

Ejemplos:

La probabilidad de que $Z < 1{,}26$, $P(Z < 1{,}26) = 0{,}8962$.
A partir de ese valor se deducen:

$P(Z > 1{,}26) = 1 - P(Z < 1{,}26) = 1 - 0{,}8962 = 0{,}1038$

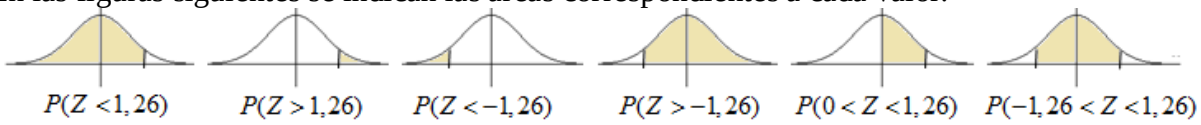
$P(Z < -1{,}26) = P(Z < 1{,}26) = 0{,}1038$

$P(Z > -1{,}26) = P(Z < 1{,}26) = 0{,}8962$

$P(0 < Z < 1{,}26) = P(Z < 1{,}26) - 0.5 = 0{,}3962$

$P(-1{,}26 < Z < 1{,}26) = 2 \cdot P(0 < Z < 1{,}26) = 2 \cdot 0{,}3962 = 0{,}7924$

En las figuras siguientes se indican las áreas correspondientes a cada valor.

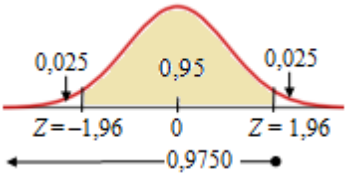


3.3. Cálculo del valor de *Z* a partir de su probabilidad asociada

La tabla normal se emplea también en sentido contrario, para hallar la abscisa (el valor de *Z*) correspondiente a una probabilidad determinada.
Esto es, igual que se sabe que $P(Z < 1) = 0{,}8413$, en sentido contrario la pregunta sería: ¿cuánto debe valer *z* para que $P(Z < z) = 0{,}8413$? La respuesta es evidente: el valor de *z* debe ser 1.

***Ejemplo*:**

Un caso que se presenta con frecuencia es encontrar el intervalo $(-z, z)$ que contiene el 95% de los datos de la variable estadística. Esto es, hallar el valor *z* tal que $P(-z < Z < z) = 0{,}95$.



Por el ejemplo anterior:

$$P(-z < Z < z) = 0{,}95 \rightarrow 2 \cdot P(Z < z) = 0.95 \rightarrow P(Z < z) = \frac{1+0.95}{2} = 0.975 \rightarrow z = 1.96$$

→ Si el valor de probabilidad no figura en la tabla se tomará el más cercano. También puede optarse por la interpolación.

3.4. Tipificación

Las distribuciones normales con las que se trabaja en la práctica no son la estándar: la $N(0, 1)$. Son distribuciones con media μ (la que sea) y desviación típica σ: $N(\mu, \sigma)$.
Para calcular valores de probabilidad de una variable X, normal $N(\mu, \sigma)$, se hace el cambio de variable , siendo Z la $N(0, 1)$. $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$
Con esto, las diferencias de X respecto de su media μ se "tipifican.
Este cambio permite hallar valores de probabilidad para cualquier la variable $X = N(\mu, \sigma)$

***Ejemplos*:**

a) Si X es una variable normal $N(45, 7)$, calculamos la probabilidad de que X tome valores menores de 52, mayores de 52; o entre 52 y 59:

$$P(X<52)=P\left(Z<\frac{52-45}{7}\right)=P(Z<1)=0.8413$$

$$P(X>52)=1-P(X<52)=1-P\left(Z<\frac{52-45}{7}\right)=1-P(Z<1)=1-0.8413=0.1587$$

$$P(52<X<59)=P\left(\frac{52-45}{7}Z<\frac{59-45}{7}\right)=P(1<Z<2)=P(Z<1)-P(Z<2)=$$

$$=0.9772-0.8413=0.1359$$

b) En sentido inverso, también se puede encontrar el valor de X a partir de la probabilidad asociada. Esto es, para la misma $N(45, 7)$, si se desea conocer el valor de k tal que, por ejemplo, P(X < k) = 0.9772, se resuelve

$$P(X<k)=P\left(Z<\frac{k-45}{7}\right)=0.9772\Rightarrow\frac{k-45}{7}=2\Rightarrow\boxed{k=45+14=59}$$

Ejercicios:

1) Si Z es una N(0, 1), calcular las siguientes probabilidades:
   a) P(Z < 1)
   b) P(Z > 1´3)
   c) P(Z < –0´5)
   d) P(–0´5 < Z < 1´3)

2) Si X es una N(15, 3), calcular las siguientes probabilidades:
   a) p(X < 21)
   b) p(X < –7)
   c) p(X > 31)
   d) p(12 < X < 18)

4. Distribuciones de muestreo

Es evidente que los resultados obtenidos del estudio de una muestra no son del todo fiables, pero sí en buena medida. Los parámetros que se obtienen de una muestra (estimadores estadísticos) nos permitirán arriesgarnos a predecir una serie de resultados para toda la población. De estas predicciones y del riesgo que conllevan se ocupa la *Inferencia Estadística*.

Distribución de medias muestrales

En esta distribución los elementos no son cada uno de los individuos de la población, sino las medias de cada una de las posibles muestras.
Cuando una población tiene muchos elementos el número de sus muestras puede resultar enorme.
Así, por ejemplo, en una población de 120 individuos el número de muestras distintas de tamaño 30 que pueden extraerse sin repetir elementos, es $\binom{120}{30} = 1.697 \cdot 10^{28} \rightarrow$ un número de 29 cifras.
Y si los elementos pueden repetirse, que sería el caso del muestreo aleatorio simple, su número será aún mayor.

Ejercicio: Calcular el número de muestras de tamaño 21 que pueden elegirse en una población de 120 alumnos:

a) sin reemplazamiento
b) con reemplazamiento

Parámetros muestrales

Elegida una muestra, hallaremos en ella la media $\overline{X}$ y la desviación típica S. Lo que tendremos que estudiar será la representatividad de estos parámetros muestrales con los parámetros reales de la población, es decir: la media poblacional μ, y la desviación típica de la población σ .
Si en una población de *N* individuos tomamos todas las muestras posibles de tamaño *n*, se puede demostrar que la media de las medias muestrales coincide con la media poblacional, esto es $\overline{X} = \mu$
Sin embargo, no se cumple lo mismo para la desviación típica de las medias muestrales, sino que se verifica que $S = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, siendo *n* el tamaño de las muestras.

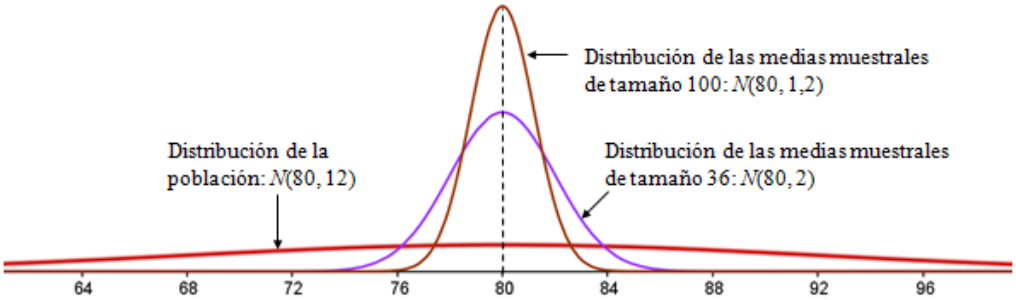
Teorema central del límite

- La distribución de las medias muestrales de tamaño n, extraídas de una población normal $N(\mu, \sigma)$, se ajustan a una normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.
- Si las medias muestrales provienen de una población no normal, pero el tamaño de las mismas es n ≥30, la distribución de las medias muestrales también se ajusta a una $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Ejemplos:

a) En una población $N(80, 12)$, la media de las medias muestrales de tamaño 36 se distribuye según la normal $N\left(80, \frac{12}{\sqrt{36}}\right) = N(80, 2)$

Asimismo, la media de las medias muestrales de tamaño 100 se distribuye según la normal $N\left(80, \frac{12}{\sqrt{100}}\right) = N(80, 1.2)$



Como puede verse en la figura, si el tamaño muestral aumenta la campana se estrecha. Esto genera mayor precisión en las estimaciones.

b) Supongamos que la altura de una determinada raza de ovejas se distribuye normalmente con media 80 cm y desviación típica 12 cm: $N(80, 12)$. Para esa raza de ovejas se pueden obtener los valores de probabilidad es los siguientes casos:
i) De que una oveja elegida al azar mida más de 83 cm de alta.
ii) De que la altura media de una muestra aleatoria de 36 ovejas supere los 83 cm.
iii) De que la altura media de una muestra de 100 ovejas supere los 83 cm.

→ Para dar respuesta a estas preguntas hay que proceder como sigue:
i) Los elementos individuales de la población se ajustan a la normal $N(80, 12)$, que se tipifica haciendo $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-80}{12}$.

$$P(X > 83) = P\left(Z > \frac{83-80}{12}\right) = P(Z > 0.25) = 1 - P(Z < 0.25) = 1 - 0.5987 = 0.4013$$

ii) Las muestras de tamaño 36 se distribuyen según la normal $N\left(80, \frac{12}{\sqrt{36}}\right) = N(80, 2)$ que se tipifica haciendo $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}-80}{2}$. Por tanto:

$$P\left(\overline{X} > 83\right) = P\left(Z > \frac{83-80}{2}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

iii) Las muestras de tamaño 100 se distribuyen según la normal $N\left(80, \frac{12}{\sqrt{100}}\right) = N(80, 1.2)$ que se tipifica haciendo $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}-80}{1.2}$. Por tanto:

$$P\left(\overline{X} > 83\right) = P\left(Z > \frac{83-80}{1.2}\right) = P\left(Z > 2.5\right) = 1 - P\left(Z < 2.5\right) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

Observaciones:

1. Observa que no sería extraño encontrar una oveja con altura superior a 83 cm, pero es muy improbable que la altura media de 100 ovejas, elegidas aleatoriamente, supere los 83 cm.

2. Si una muestra está bien realizada y tiene el tamaño suficiente, su media estará muy próxima a la media real de la población de partida. Este es el fundamento de la inferencia estadística, lo que da consistencia a sus resultados; aunque una muestra solo proporciona la seguridad puntual de su media o de su desviación típica.

3. Lo importante es que las medias muestrales tienen un comportamiento que se ajusta a una normal: se distribuyen normalmente.

4. La distribución de las medias muestrales es normal incluso en el caso de que estas procedan de poblaciones no normales, siempre que el tamaño de la muestra sea grande ($n \geq 30$).

5. El fundamento matemático de lo dicho forma parte del *teorema central del límite*.

Ejercicios:

1. En el último año, el peso de los recién nacidos en una maternidad se ha distribuido según una ley normal de parámetros μ = 3.100 gramos y σ = 150 gramos.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese más de 3.130 gramos?
   b) ¿Qué distribución seguirán las muestras de tamaño 100 de recién nacidos?
   c) ¿Cuál será la probabilidad de que la media de una muestra de tamaño 100 sea superior a 3.130 gramos?

2. En una oposición en la que participan miles de candidatos se hizo un examen tipo test. Las calificaciones se distribuyeron normalmente con media μ =72 puntos y desviación típica σ =10.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que un opositor elegido al azar obtenga más de 76 puntos?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 64 opositores obtenga un promedio superior a 76 puntos?

3. Supongamos que la estatura media de las alumnas de bachillerato es 165 cm, con desviación típica 8 cm.
   a) Halla los parámetros de las medias muestrales de tamaños n = 36 y n = 64
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 36 alumnas tenga una media superior a 167 cm.? ¿Y de que una muestra de 64 alumnas supere esa misma medida?
   c) ¿Tiene algo de extraño que una muestra de tamaño 36 tenga una media de 170 cm.?

5. Intervalos de de confianza para la media de la población

La media, $\overline{x}$, de los elementos de una muestra es una estimación puntual de la media, μ, de la población de partida. Esto significa que la media real está próxima a $\overline{x}$; pero: ¿cuánto de próxima?, y ¿qué seguridad se tiene de que sea así?

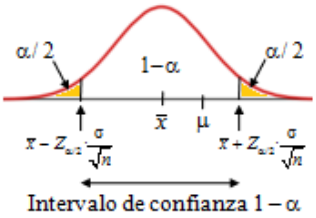
Por eso la estimación no se hace solo en términos puntuales, dando $\overline{x}$, si no definiendo un intervalo alrededor de la media muestral e indicando la probabilidad que se tiene de sea realmente así.

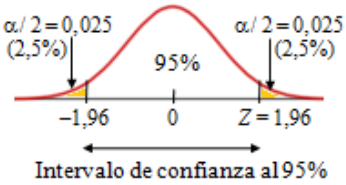
Ese intervalo se llama de **intervalo de confianza**. A la probabilidad de que tal estimación sea cierta se la llama **nivel de confianza**.

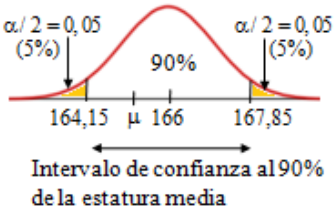
El intervalo de confianza de la media poblacional que se obtiene a partir de una muestra de media $\bar{x}$, es: $\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional, *n* el tamaño muestral y $z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal, N(0, 1), para un nivel de confianza de $1-\alpha$.

Por tanto: $P\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$

El nivel de confianza $1-\alpha$, da la probabilidad que hay de que la media poblacional, μ, pertenezca a ese intervalo; es frecuente darla en porcentajes. Son equivalentes las expresiones "**nivel de confianza** $1-\alpha$" y "**significación** α"; así, suele hablarse de obtener un intervalo con un **nivel de confianza del 95%** ($1-\alpha$ = 0,95) o para una significación α = 0,05. (Este valor de α indica la probabilidad que hay de errar en la estimación).







Para encontrar el valor de $z_{\alpha/2}$ realizaremos los siguientes pasos:

Nivel de confianza del 95 % → $1-\alpha$ = 0.95 → α = 0.05 → α/2 = 0.025 →1 – α/2 = 0.975 →

Buscamos en la tabla de la normal este valor de la probabilidad y $z_{\alpha/2}$ = 1.96

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	[illegible]	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	[illegible]	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693
1.9	0.9713	0.9713	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808

***Ejemplos*:**

a) Se sabe que la desviación típica de la estatura de las chicas de 18 años es 9 cm. Si se toma una muestra aleatoria de tamaño 64, en la que se obtiene una estatura media de $\bar{x}$ = 166, el intervalo de confianza para un nivel del 90 % de la estatura media de la población será:

$$\left(166-1.645\cdot\frac{9}{\sqrt{64}},166+1.645\cdot\frac{9}{\sqrt{64}}\right)=\left(166-1.85,166+1.85\right)=\left(164.15,167.85\right)$$

Esto significa que la media de estaturas para toda la población, μ, estará entre 164,15 cm y 167,85 cm, con una probabilidad de 0,90: $P(164{,}15 < \mu < 167{,}85) = 0{,}90$.

Puede suceder que la verdadera media sea mayor que 167,85 cm, pero la probabilidad de eso es escasa: $P(\mu > 167{,}85) = 0{,}05$ (→ $\alpha/2 = 0{,}05$).

También puede suceder que la verdadera media sea menor que 164,15 cm, pero con una probabilidad igualmente pequeña: $P(\mu < 164{,}15) = 0{,}05$ (→ $\alpha/2 = 0{,}05$).

Observación: Para una confianza del 90 % → $1 - \alpha = 0{,}90$ → $1 - \alpha/2 = 0{,}95$. Hay que buscar en la tabla normal ese valor, y si no aparece, pero está entre $Z = 1{,}64$ y $Z = 1{,}65$ se toma 1,645.

b) Vamos a hallar el intervalo de confianza para el peso medio de una muestra de 100 recién nacidos, con un nivel de confianza del 90 %, sabiendo que $\bar{x}$ = 3100 gramos y σ=150 gramos.

Solución: Si consultamos en la tabla de la N(0, 1), comprobaremos que $z_{\alpha/2}=1.645$, por lo tanto, el intervalo de probabilidad será el siguiente:

$$\left(3100-1.645\cdot\frac{150}{\sqrt{100}};3100+1.645\cdot\frac{150}{\sqrt{100}}\right)$$

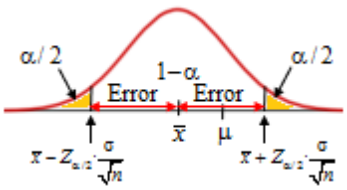
que simplificado, es el intervalo

(3075.325; 3124.675)

Esto significa que con una probabilidad del 90 % la media poblacional del peso de los recién nacidos va a tener un valor entre 3075.325 gramos y 3124.675 gramos.

5.1. Error admitido

Cuando decimos que la media poblacional $\mu\in\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ con un nivel de confianza $1-\alpha$, estamos admitiendo un error máximo de $z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.



A este número $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se le llama **error máximo admisible**.

El error depende de α, σ y *n*: aumenta al hacerlo la desviación típica y la confianza; disminuye cuando aumenta el tamaño muestral. Por tanto:
1) Para una confianza dada, si se quiere disminuir el error hay que aumentar el tamaño muestral.
2) Para un mismo tamaño muestral, a mayor nivel de confianza le corresponde un error mayor.

Ejemplo:
En el ejemplo anterior (σ = 9 cm, 1 − α = 0.90, n = 64 → $z_{\alpha/2} = 1.645$), el error máximo es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{9}{\sqrt{64}} = 1.85\, cm$$

Como la estimación puntual es $\bar{x}$ = 166 cm, podría afirmarse que μ está en el intervalo $(166 - 1.85, 166 + 1.85)$

- Si el tamaño muestral aumentase a *n* = 100, el error será menor:

$$E = 1.645 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}} = 1.48\, cm$$

- Manteniendo el tamaño muestral de n = 64, si aumentamos el nivel de confianza al 95 % el error es mayor: 1 − α = 0.95 → $z_{\alpha/2} = 1.96$, por lo que $E = 1.96 \cdot \frac{9}{\sqrt{64}} = 2.2\, cm$

5.2. Tamaño muestral

Si inicialmente se fija el error máximo admisible, puede calcularse el mínimo tamaño muestral necesario para tal propósito, pues basta con despejar de la fórmula $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Ejemplo:
a) Si en el ejemplo anterior se quiere estimar la media poblacional, μ, con un error máximo de 1,5 cm y con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál será el tamaño muestral necesario para determinarla?

Se desea que $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1.5$. Como $z_{\alpha/2} = 1.96$ y σ = 9 →

$$1.96 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} < 1.5 \Rightarrow 1.96 \cdot 9 < 1.5\sqrt{n} \Rightarrow \frac{1.96 \cdot 9}{1.5} < \sqrt{n} \Rightarrow \left(\frac{1.96 \cdot 9}{1.5}\right)^2 < n \Rightarrow \boxed{n > 138.3}$$

Por tanto, habrá que encuestar, al menos, a 139 personas de esa población.

b) Si en el mismo ejemplo se desea un error máximo de 1 cm, con un nivel de confianza del 80% ($1 - \alpha = 0.80$ → $z_{\alpha/2} = 1.28$), se tendría:

$$1.28 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} < 1 \Rightarrow 1.28 \cdot 9 < \sqrt{n} \Rightarrow (1.28 \cdot 9)^2 < n \Rightarrow \boxed{n > 132.7}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser *n* = 133.

Ejercicios propuestos

Muestreo

1. En una ciudad se quiere hacer una encuesta para conocer el porcentaje de ciudadanos que aprueban la gestión del ayuntamiento en cuestiones medioambientales (limpieza de calles, contaminación, cuidado de parques⋯). Se pretende que la muestra sea representativa por sexo y edad; para la edad se establecen tres estratos: 10 a 25 años (jóvenes), 25 a 60 años (adultos) y mayores de 60. El número de personas de cada grupo es: jóvenes, 3000; adultos, 8500; mayores de 60, 2500. Por sexo, la distribución es: 6800 hombres y 7200 mujeres, que se suponen proporcionales a cada grupo de edad.
Si el tamaño de la muestra es de 500 personas, determina, redondeando si es necesario, el tamaño muestral correspondiente a cada estrato.

2. Supongamos que en un centro escolar los alumnos y docentes se distribuyen de acuerdo con la tabla:

Alumnos	1 y 2º ESO	3º y 4º ESO	BACH	PROFES
Hombres	110	95	115	20
Mujeres	130	120	130	25

Si se quiere realizar una encuesta entre ellos de tamaño $n = 50$, por el método de muestreo estratificado por sexo y nivel de trabajo, ¿a cuántas personas de cada *clase* hay que preguntar?

3. Supongamos que en tu ciudad (o en tu comarca) hay 4 institutos o colegios (IES), cuyo alumnado se distribuye como sigue: IES 1 IES 2 IES 3 IES 4 Alumnos

	IES 1	IES 2	IES 3	IES 4
Alumnos	370	460	620	520
Alumnas	340	500	650	540

Si se quiere realizar un muestreo de tamaño 100, estratificado por sexo y centro escolar, ¿cuáles serían los tamaños muestrales correspondientes a cada IES y a cada estrato?

4. (Selectividad, Galicia 2016).
a) Se desea tomar una muestra estratificada de las personas mayores de edad de un municipio, cuyos estratos son los siguientes intervalos de edades, en años: de 18 a 30, de 31 a 45, de 45 a 60 y mayores de 60. En el primer intervalo hay 7500 personas, en el segundo 8400, en el tercero 5700 y en el cuarto 3000. Calcula el tamaño de la muestra total y su composición, sabiendo que el muestreo se hace con afijación proporcional y se han elegido 375 personas del primer estrato.
b) Dada la población {2, 4, 6}, construye todas las muestras posibles de tamaño 2, que puedan formar mediante muestreo aleatorio simple, y halla la varianza de las medias muestrales de todas las muestras.

Distribución Normal

5. Utilizando la tabla normal $N(0, 1)$ calcula:
a) $P(Z < 1{,}2)$ b) $P(Z < 1{,}27)$ c) $P(Z < -1{,}2)$ d) $P(Z < -1{,}27)$

6. Utilizando la tabla normal $N(0, 1)$, determina el valor de k que cumple:

a) $P(Z < k) = 0{,}9115$ b) $P(Z < k) = 0{,}9452$ c) $P(Z < k) = 0{,}95$

7. Para una distribución normal $N(50, 5)$, halla:
a) $P(X < 56)$ b) $P(X > 58)$ c) $P(X < 48)$ d) $P(48 < X < 56)$

8. Supongamos que la estatura media de las alumnas de bachillerato se distribuye normalmente con media $\mu = 166$ cm y desviación típica 9 cm. Si se elige una alumna al azar halla la probabilidad de que su estatura sea:
a) Superior a 175 cm. b) Inferior a 155 cm. c) Esté entre 155 cm y 175 cm.

9. Para una distribución normal $N(60, 5)$, determina el valor de k que cumple:
a) $P(X < k) = 0{,}90$ b) $P(X > k) = 0{,}95$

10. Supongamos que los chicos de 15 años de un determinado país tienen una estatura que se distribuye según una normal de media 168 cm y desviación típica 12 cm. Si se quieren seleccionar al 5% de los chicos más altos, ¿a partir de qué altura debe hacerse?

11. El diámetro de las ciruelas de una determina variedad se distribuye normalmente con media 4,5 cm y desviación típica 0,3 cm. Si se desea seleccionar, para su exportación, el 10% de las más grandes, ¿a partir de qué tamaño hay que cogerlas?

12. La edad de los habitantes de cierta ciudad se distribuye normalmente, con una media de 40 años. Se sabe además que el 2,28 % de los habitantes tiene más de 60 años.
a) ¿Cuál es la desviación típica?
b) ¿Cuál es el porcentaje de habitantes con menos de 35 años?

13. La duración de una determinada marca de lavadoras se ajusta a una normal de media 8,4 años y desviación típica 6 meses. El fabricante asegura que sus lavadoras duran más de 7 años, comprometiéndose a: "si una lavadora se estropea antes de 7 años le damos otra nueva". ¿Cuántas lavadoras nuevas tendrá que reponer por cada 10000 vendidas?

14. Los envases de cartón de una determinada marca de leche contienen 1 litro de media, siendo la desviación típica de 5 ml.
a) ¿Qué porcentaje de envases sobrepasan los 1005 ml?
b) Si el control de calidad rechaza los envases que contengan menos de 990 ml y más de 1010 ml, ¿qué porcentaje de envases habrá que rechazar?

15. Los ingresos anuales de los ejecutivos de una multinacional se distribuyen normalmente con media 45000 € y desviación típica de 3000 €. Si se elige un ejecutivo al azar se pide calcular las siguientes probabilidades:
a) De que sus ingresos anuales sean superiores a 50000 euros.
b) De que sus ingresos anuales estén comprendidos entre 42000 € y 46000 €.
c) De que sus ingresos anuales sean inferiores a 39000 euros.
d) Sabiendo que la probabilidad de que sus ingresos anuales sean superiores a una determinada cantidad es del 1 %, ¿cuál es esa cantidad?

Distribución de las medias muestrales:
Intervalo de confianza; Error; Tamaño muestral

16. (Selectividad, Baleares 2014). El cociente intelectual de unos universitarios se distribuye normalmente con una media de 100 y una desviación típica de 10.

a) Se elige una persona al azar. Busca la probabilidad de que su cociente intelectual se encuentre entre 98 y 103.
b) Se elige una muestra de veinticinco personas al azar. Busca la probabilidad de que la media de sus cocientes intelectuales se encuentre entre 98 y 103.

17. (Selectividad, Canarias 2016). En un invernadero que se dedica a la producción de tomates, se ha comprobado que el peso de los tomates sigue una distribución normal con media 100 g y desviación típica 10 g. A la hora de comercializarlos se toman para la clase *A* los comprendidos entre 80 y 120 g. Hallar la probabilidad de que:
a) Elegido un tomate al azar, corresponda a la clase *A*.
b) Elegidos una docena de tomates al azar, su peso medio sea superior a 105 g.

18. A pesar de acudir con "cita previa", el tiempo de espera de los pacientes de una clínica dental sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 10 minutos. A partir de una muestra aleatoria de 144 pacientes, se obtuvo una media de espera es de 20 minutos.
a) Calcula los intervalos de confianza del 90 %, 95 % y 99 % para la media del tiempo de espera de la población.
b) Explica la relación entre la amplitud de los intervalos y el nivel de confianza.

19. A lo largo de las diferentes pruebas de Selectividad se ha observado que la distribución de las calificaciones en el examen de Matemáticas sigue una ley normal de media 5,7 puntos y desviación típica 1,8.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la nota de un estudiante elegido al azar sea superior a 6,3?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 49 alumnos tenga una media superior a 6,5 puntos?

20. En el último año de Selectividad (2016), en una universidad se tomó una muestra aleatoria de tamaño 49, obteniéndose una nota media en el examen de Matemáticas de 5,5 puntos. Admitiendo que la desviación típica sigue siendo de 1,8 puntos, se pide:
a) Un intervalo de confianza al 90 % para la nota media de la población.
b) Si para esa misma confianza se quiere un error máximo de 0,5 puntos, ¿cuál debe ser el tamaño de la muestra?

21. Se sabe que el número de horas que duermen los habitantes de una ciudad se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica de 0,64 horas. Si se toma una muestra aleatoria de tamaño 16 y se pregunta por el número de horas que dedican a dormir se obtienen los siguientes datos:

6,5	8,5	6,5	8,5	7,5	7,0	5,5	7,5
7,5	6,5	7,0	7,0	6,5	8,0	7,5	6,0

a) Calcula la media muestral del número de horas que se duermen.
b) Halla el intervalo de confianza para la media de la población con una confianza del 95%
c) Si el que el intervalo de confianza para la media es (6,7, 7,48) horas, ¿con qué nivel de confianza se da?

22. (Selectividad Castilla la Mancha, 2016). Se estudió el cociente intelectual de 10 estudiantes de 2ª de Bachillerato elegidos aleatoriamente de un determinado centro escolar, siendo estos valores:

80, 96, 87, 104, 105, 99, 112, 89, 90, 100.

Sabiendo que el cociente intelectual se distribuye según una normal con desviación típica 15, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza al nivel del 95 % para la media del cociente intelectual de los estudiantes de 2º de Bachillerato de dicho centro escolar.
b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza.

23. El peso de los paquetes de espagueti de una determinada marca, sigue una distribución normal con desviación típica 20 gramos. Se seleccionan al azar 50 paquetes de esos espaguetis y se observa que tienen un peso medio de 745 gramos.
Halla el intervalo de confianza para el peso medio de los paquetes de espaguetis de esa marca con un nivel de confianza del 97 %.

24. Se realiza una encuesta a 100 trabajadores menores de 25 años, sobre su sueldo mensual, obteniéndose una media de 900 € con una desviación típica de 120 €.
a) ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media de ingresos de los trabajadores de ese sector, con un nivel de confianza del 92 %?
b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra necesario para estimar la media de ingresos mensuales con un error menor de 20 € y con una confianza del 94 %?

25. El gasto familiar medio en material escolar (por hijo) sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 50$ €. A partir de una muestra de 100 personas se ha obtenido un gasto medio de 325 euros.
a) Halla un intervalo de confianza al 95 % para el gasto medio por hijo.
b) ¿Qué tamaño deberá tener la muestra para obtener un intervalo de confianza al 99 % con una amplitud igual a la anterior?

26. (Selectividad, La Rioja 2012). La valoración de las instituciones por parte de los ciudadanos se mide en unas unidades ficticias que denominaremos "u". Se sabe que, en el caso de los españoles, dicha valoración sigue una normal con desviación típica 25 u.
a) Se elige una muestra de 100 españoles, dando una media de 180 u. Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional de la valoración de las instituciones, con una probabilidad del 90 %.
b) Si se conoce que la media poblacional es 182 u, calcula la probabilidad de que una muestra de tamaño 100 tenga media inferior a 180 u.

27. En la lotería navideña, una muestra aleatoria de 10 personas mayores de edad, jugaron las siguientes cantidades (en euros):

74, 72, 65, 75, 80, 81, 82, 84, 87, 90

Sabiendo que el gasto por persona, en la lotería navideña, sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 20$ €, halla un intervalo de confianza para el gasto medio de la población con un nivel de confianza del 95,44 %.

28. La edad de los atletas participantes en la última olimpiada seguía una distribución normal con desviación típica de 5 años. Una muestra aleatoria de 150 atletas dio como resultado una media de edad de 25,4 años.
a) Halla el intervalo de confianza del 94 % para la media de edad de todos los atletas olímpicos.
b) ¿Cuál fue el tamaño mínimo de una la muestra si se exigió estimar la media con un nivel de confianza del 92 % y con un error máximo de 0,5 años?

29. (Selectividad, Andalucía 2013). El tiempo que los españoles dedican a ver la televisión los domingos es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media desconocida y

desviación típica 75 minutos. Elegida una muestra aleatoria de españoles se ha obtenido, para la media de esa distribución, el intervalo de confianza (188,18, 208,82), con un nivel del 99 %.

a) Calcula la media muestral y el tamaño de la muestra.
b) Calcula el error máximo permitido si se hubiese utilizado una muestra de tamaño 500 y un nivel de confianza del 96 %.

30. (Selectividad, Cantabria 2014).

a) El tiempo diario que los estudiantes de bachillerato de Cantabria dedican al estudio en las dos semanas previas al inicio de los exámenes de Selectividad de la convocatoria de junio, sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 15 minutos. Para estimar el tiempo medio se elige una muestra de 300 alumnos. ¿Con qué nivel de confianza debe realizarse la estimación si el error cometido es de 1,88 minutos?
b) Con vistas a la convocatoria de septiembre del mismo año se realiza un análisis similar. El tiempo diario que los estudiantes destinan al estudio las dos semanas anteriores al inicio de los exámenes, sigue una distribución normal con desviación típica 11 minutos. Con una muestra aleatoria de 150 alumnos se ha obtenido un tiempo medio de 173 minutos. Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio de estudio.

Otros problemas

31. Una variable aleatoria se distribuye normalmente con desviación típica conocida σ. Halla el valor de σ sabiendo que a partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 100, se ha obtenido una media de 25 y se dice que (24,02, 25,98) es el intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de significación 0,05.

32. (Selectividad, Madrid 2012). Se supone que el gasto que hacen los individuos de una determinada población en regalos de Navidad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 45 euros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza (251,6, 271,2) para μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcula la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64 para estimar μ. Calcula el error máximo cometido por esa estimación con un nivel de confianza del 90 %.

33. (Selectividad, Castilla La Mancha 2014). En un aeropuerto, el tiempo de espera de un viajero frente a la cinta transportadora hasta que sale su maleta sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 3$ minutos. Se tomó una muestra aleatoria de 50 viajeros, y se observó que el tiempo medio de espera era de 17 minutos.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera de la maleta en ese aeropuerto con un nivel de confianza del 95 %.
b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 16$ con un nivel de confianza del 95%? ¿Cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza sin variar el nivel de confianza? Razona tus respuestas.

34. (De un examen MIR). Se desea conocer la media de la colesterolemia basal de una población, con una seguridad del 95 % y una precisión de ± 4 mg/dl (error), y se tiene información por un estudio piloto o revisión bibliográfica de que la varianza es de 300 mg/dl. ¿Cuál debe ser el tamaño muestral?

35. El perímetro torácico de los individuos adultos (hombres) en una población se distribuye normalmente con desviación típica $\sigma = 6$ cm. Si a partir de una muestra de tamaño *n* se afirma que el intervalo de confianza al 88 % es (87, 91), ¿cuál fue el tamaño de la muestra estudiada?

36. (Selectividad, Canarias 2016). Un estudio sobre los kilogramos de residuos no minerales que genera cada español al año, ha dado, para una muestra de 100 personas, el intervalo de confianza [1470,6; 1529,4]. Si la desviación típica es de 150 kilogramos, suponiendo que la generación de residuos sigue una distribución normal:

a) ¿Cuál es la media muestral?
b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?
c) ¿Cuál sería el correspondiente intervalo con la misma información muestral, pero con un nivel de confianza igual a 0,9?

Soluciones

1. Hombres: 52; 148; 43. Mujeres: 55; 156; 46.
2. Hombres: 7; 6; 8. Mujeres: 9; 8; 9.
3. Alumnos: 9; 11; 16; 13. Alumnas: 9; 13; 16; 13,
4. a) 1230: 375 + 420 + 285 + 150.
b) {2, 2}; {2, 4}; {2, 6}; {4, 2}; {4, 4}; {4,6}; {6, 2}; {6, 4} y {6, 6}; Varianza = 4/3
5. a) 0,8849. b) 0,8980. c) 0,1151. d) 0,1020.
6. a) 1,35. b) 1,6. c) 1,645.
7. a) 0,8849. b) 0,0548. c) 0,3446. d) 0,5403.
8. a) 0,1587. b) 0,1112. c) 0,7301.
9. a) 66,4. b) 51,775.
10. 187,74 cm.
11. 4,884 cm.
12. a) 10. b) 30,85 %.
13. 26.
14. a) 15,87% b) 4,56%
15. a) 0,0475. b) 0,4706. c) 0,0228. d) 51990 €.
16. a) 0,1972. b) 0,7745.
17. a) 0,9544. b) 0,0418.
18. a) (18,63, 21,37); (18,37, 21,63); (17,85, 22,15).
19. a) 0,3707. b) 0,0009.
20. a) (5,077, 5,923). b) 36 personas.
21. a) 7,09 h. b) (6,78, 7,4). c) 98,54%.
22. a) (86,9, 105,5). b) Aumentar *n*.
23. (738,86, 751,14).
24. a) (879, 921). b) $n = 128$.
25. a) (315,2, 334,8). b) 173.
26. a) (175,9, 184,1). b) 0,2119.
27. (66,35, 91,65)
28. a) (24,63, 26,17). b) 307 atletas.
29. a) 198,5; 350. b) $\pm$6,88.
30. a) 97%. b) (171,37, 174,63).
31. $\sigma = 5$.
32. a) $\bar{x} = 261{,}6$; $n = 100$. b) 10.28.
33. a) (16,17, 17,83). b) Es muy improbable. Aumentando *n*.
34. 73 personas.
35. 22 hombres.
36. a) $\bar{x} = 1500$ kg. b) 95%. c) (1475,3, 1524,7).

Probabilidad y estadística en PAU y EBAU de Murcia

Estas son las preguntas correspondientes al bloque de Probabilidad y Estadística que han aparecido en las pruebas EBAU o PAU de los últimos años en Murcia. Si se desea ver la resolución detallada de los ejercicios puedes ir al archivo correspondiente a la PAU o EBAU de ese año en la web www.ebaumatematicas.com.

Julio 2026

PREGUNTA 1: (3 puntos)
De los 200 estudiantes de segundo de Bachillerato de un instituto de Molina de Segura, 75 practican taekwondo, 100 hapkido y 50 ambas artes marciales coreanas. Si se elige un alumno al azar, calcular la probabilidad de que:
a) Practique al menos algún arte marcial coreano. **[0,25 puntos]**
b) Practique únicamente hapkido. **[0,5 puntos]**
c) No practique ningún arte marcial coreano. **[0,5 puntos]**
d) Practique solo una de las dos artes marciales coreanas. **[0,5 puntos]**
e) Si el estudiante seleccionado no practica hapkido, calcule la probabilidad de que practique taekwondo. **[0,25 puntos]**
El salario bruto mensual (en euros) de los profesores de artes marciales se distribuye según una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 450 euros. Se preguntó a 81 profesores de artes marciales elegidos al azar y se estableció que el salario medio oscila entre 1383,5 euros y 1616,5 euros.
f) ¿Cuál ha sido el salario medio de los profesores de la muestra si el nivel de confianza que se ha utilizado en el intervalo anterior es del 98%? [0,5 puntos]
g) Si se quiere estimar el salario medio poblacional, con un error máximo de 74,5 euros y con un nivel de confianza del 90%, ¿cuál será el tamaño muestral necesario para determinarlo? **[0,5 puntos]**

Solución: a) 0.625 b) 0.25 c) 0.375 d) 0.375 e) 0.25 f) 1500 € g) 99 profesores.

Junio 2026

PREGUNTA 1: (3 puntos)
Para celebrar el fin de la PAU, Lorena, Ana y Sofía planean un interrail por Italia. En Roma dudan entre dos rutas en tren: Roma Trastévere–La Giustiniana (ruta 1) y La Giustiniana–Bracciano (ruta 2). Para decidir qué ruta hacer consultan en www.interrail.eu los resultados de un estudio realizado a 2.000 jóvenes, de los cuales 800 eligieron la ruta 1, 1.400 la ruta 2 y 300 hicieron ambas rutas. Seleccionando al azar a uno de estos jóvenes:
a) Calcule la probabilidad de que el joven seleccionado haya realizado al menos una de las dos rutas. **[0,25 puntos]**
b) Calcule la probabilidad de que no haya hecho ninguna de las dos rutas. **[0,5 puntos]**
c) Calcule la probabilidad de que haya hecho únicamente la ruta 1. **[0,5 puntos]**
d) Si el joven seleccionado no realizó la ruta 1, calcule la probabilidad de que tampoco haya realizado la ruta 2. **[0,5 puntos]**

El gasto diario por joven en Roma sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 27$ euros. Tomando una muestra aleatoria de 81 jóvenes, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional (94,12, 105,88).
e) Calcule el nivel de confianza del intervalo y el valor de la media muestral. **[0,75 puntos]**

f) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 93,42%? **[0,5 puntos]**

Solución: a) 0.95 b) 0.05 c) 0.25 d) 0.0833 e) La media es de 100 € y el nivel de confianza es el 95%. f) 4.968 euros.

Julio 2025

APARTADO 4 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:
[2,5 puntos] En una encuesta realizada por el Departamento de Orientación de un instituto a 100 estudiantes de segundo de bachillerato, se obtuvo que 30 de ellos quieren estudiar Veterinaria, 25 Economía, 20 Química, 15 Biología y 10 Matemáticas. De ellos, 10, 12, 13, 8 y 6 son mujeres respectivamente. Además, la orientadora del centro les ha informado que no es posible que se matriculen en más de un grado.

a) Si se elige a un estudiante al azar del grupo estudiado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **[0,25 puntos]**
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, sea hombre y estudie Veterinaria? **[0,25 puntos]**
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química o Veterinaria? **[0,25 puntos]**
d) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, no estudie ni Biología ni Matemáticas? **[0,5 puntos]**
e) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química, dado que se trata de una mujer? **[0,5 puntos]**
f) Si el estudiante seleccionado al azar es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Economía? **[0,75 puntos]**

Solución: a) 0.49 b) 0.2 c) 0.5 d) 0.75 e) 13/49 f) 13/51.

CUESTIÓN 2:
[2,5 puntos] El número de horas semanales que los estudiantes de segundo de bachillerato de una pedanía de Murcia dedican a ver series en inglés en HBO Max sigue una distribución normal con media μ y desviación típica igual a 2 horas.

a) Si en una muestra de 100 estudiantes, el número medio de horas semanales que dedican a ver series en inglés en HBO Max han sido de 8 horas, calcula un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media de las horas semanales que dedican a esta actividad. **[1 punto]**
b) Determina el tamaño mínimo que debe tener una muestra de estudiantes para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0.5 horas con un nivel de confianza del 99%. **[0,75 puntos]**
c) Si $\mu = 8.2$ y se elige a un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dedique más de 9 horas semanales a ver series en inglés en HBO Max? **[0,75 puntos]**

Solución: a) $(7.608, 8.392)$ *b)* 107 estudiantes *c) 0.3446.*

Junio 2025

APARTADO 4 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:
[2,5 puntos] Un grupo de investigadores de la Universidad de Murcia realizó una encuesta en la que se preguntó a 1000 personas adultas su opinión sobre establecer una edad legal para que los niños tengan teléfono móvil. Según los resultados, 560 personas, de las que 390 eran mujeres, opinaron a favor de esta medida. De las 440 personas que opinaron en contra, 280 eran hombres. Si se selecciona una persona al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de esta medida? **[0,25 puntos]**
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona encuestada sea mujer? **[0,75 puntos]**
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona sea mujer o esté a favor de esta medida? **[0,75 puntos]**
d) Si esa persona seleccionada al azar es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que esté a favor de esta medida? **[0,75 puntos]**

Solución: a) 0.56 b) 0.55 c) 0.72 d) 17/45.

CUESTIÓN 2:
[2,5 puntos] El peso, en kg, de los jugadores de fútbol de la Liga Nacional juvenil de la Región de Murcia sigue una distribución normal con media μ y desviación típica igual a 12 kg.

a) Si en una muestra de 64 jugadores el peso medio ha sido de 70 kg, calcula un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media de los pesos de los jugadores de fútbol de la Ligan Nacional juvenil de la Región de Murcia. **[1 punto]**
b) Determina el tamaño mínimo que debe tener una muestra de jugadores para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 4 kg con un nivel de confianza del 98%. **[0,75 puntos]**
c) Si $\mu = 71$ y se elige a un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 75 kg? **[0,75 puntos]**

Solución: a) La media de los pesos con un nivel de confianza del 95 % se sitúa entre 67.06 y 72.94 kilos. *b) 49 jugadores c) 0.3707.*

Julio 2024

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)
a) Al 45% de los socios de un club le gusta jugar a las cartas, al 40% jugar al domino y al 23% jugar a las cartas y al domino. Si elegimos al azar a un socio de este club, calcula las siguientes probabilidades:
   i. Que juegue a las cartas o al domino. (0,5 puntos)
   ii. Que no juegue ni a las cartas ni al domino. (0,5 puntos)
   iii. Que juegue a las cartas, sabiendo que juega al domino. (0,5 puntos)

b) La altura de los estudiantes de una clase se distribuye según una distribución normal de media desconocida μ y una desviación típica de 4 cm. Se toma una muestra aleatoria de 16 estudiantes de la clase obteniendo una estatura media de 172 cm. Hallar un intervalo de confianza para la estatura media con un nivel de confianza del 99%. (1 punto).

Solución: a.i) 0.62 *a.ii) 0.38* *a.iii) 0.575* *b)* $(169.425, 174.575)$

Junio 2024

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) En un edificio hay dos ascensores A y B. El 45% de los inquilinos del edificio usa el primero (A) y los restantes el segundo (B). El porcentaje de averías del ascensor A es del 5%, mientras que el segundo se avería un 8% de las veces que se utiliza. Cada vez que un ascensor sufre una avería, éste se para y no funciona.

i. Calcular la probabilidad de que un ascensor, elegido al azar, se averíe. (0,75 puntos)

ii. Si un inquilino queda atrapado un cierto día en el ascensor, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en el segundo? (0,75 puntos).

b) La duración de los contratos temporales sigue una distribución normal de media desconocida y una desviación típica de 3 meses. Una muestra aleatoria de 100 contratos temporales ha dado una duración media de 10 meses. Obtener un intervalo de confianza al 94% para la duración media de los contratos temporales. (1 punto).

Solución: a.i) 0.0665 a.ii) $\frac{88}{133} \simeq 0.6617$ *b)* $(9.436, 10.564)$

Julio 2023

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A) = 0,3$, $P(B/A) = 0,6$ *y* $P(A/B) = 0,3$:

i. Calcular $P(A \cap B)$. (0,5 puntos)

ii. Calcular $P(B)$. ¿Son los sucesos A y B independientes?, razone su respuesta (0,5 puntos)

iii. Calcular $P(A \cup \overline{B})$ (0,5 puntos)

b) Las calificaciones de la asignatura de matemáticas de la población de una región española, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y varianza de 1.69 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 324 estudiantes de la región obteniendo una calificación media de 5,84 puntos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99%. (1 punto)

Solución: a.i) $P(A \cap B) = 0.18$ *a.ii)* $P(B) = 0.6$. *Los sucesos son independientes.*

a.iii) $P(A \cup \overline{B}) = 0.58$ *b) El intervalo de confianza para la media de la calificación en matemáticas es* $(5.654,\ 6.026)$.

Junio 2023

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) La Dirección General de Tráfico ha realizado un estudio estadístico en la Región de Murcia sobre el uso del casco de protección por parte de los usuarios de patinetes eléctricos. El estudio estima que el 60 % de los usuarios de estos patinetes son hombres y, de estos, el 30 % usa el casco; mientras que, entre las mujeres que usan este medio para desplazarse, son el 40 % las que usan casco de protección. Si elegimos un usuario de patinete eléctrico al azar.

i. Calcule la probabilidad de que use casco de protección. (0,5 puntos)

ii. Sabiendo que el usuario de patinete eléctrico usa casco de protección, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

b) El gasto medio por cliente, en euros, en la lotería de las pasadas Navidades se distribuye según una variable Normal de media desconocida y desviación típica igual de 10 euros. Se elige una muestra aleatoria de 225 clientes, resultando que han tenido un gasto medio de 65 euros.

Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio de la lotería de Navidad de 2022 con un nivel de confianza del 97% (1 punto)

Solución: a.i) 0.34 a.ii) 8/17 = 0.4706 b) El intervalo de confianza para la media de la población es $(63.5533, 66.4467)$

Julio 2022

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Sean A y B dos sucesos independientes, tales que $P(A)=0,3$ *y* $P(A\cap B)=0,12$:

i. Calcular P(B). (0,5 puntos)

ii. Calcular $P(A\cup B)$. (0,5 puntos)

iii. Calcular $P(\overline{A}\cap\overline{B})$. (0,5 puntos)

b) En una estación del AVE, el tiempo que tarda un viajero para acceder al tren desde que llega al control de equipajes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 2 minutos. Se tomó una muestra aleatoria de 50 viajeros, y se observó que el tiempo medio de espera era de 16 minutos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera de la maleta en ese aeropuerto con un nivel de confianza del 90 %. (1,5 puntos)

Solución: a.i) P(B) = 0.4 a.ii) $P(A\cup B)$ *= 0.58 a.iii)* $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ *= 0.42*

b) La media del tiempo de espera se sitúa entre 15.536 y 16.464 minutos

Junio 2022

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) En el departamento informático de unos grandes almacenes se encuentran a la venta ordenadores de distintas marcas comerciales. Hay 100 ordenadores de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un ordenador esté obsoleto es 0.01 para la marca A; 0.02 para la marca B y 0.03 para la marca C. Un comprador elige un ordenador al azar.

i. Calcule la probabilidad de que el ordenador esté obsoleto. (0,5 puntos)

ii. Sabiendo que el ordenador elegido es obsoleto, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A? (1 punto)

b) El salario mensual de los hogares de un municipio se distribuye según una variable Normal con desviación típica igual a 160 euros. Seleccionados 40 hogares al azar, han tenido un salario medio mensual de 1100 euros. Calcule un intervalo de confianza para el salario medio mensual de los hogares de ese municipio con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

Solución: a.i) 0.017 a.ii) 5/17 b) La media del salario mensual con un nivel de confianza del 95 % se sitúa entre 1050.4 € y 1149.6 €.

Julio 2021 (no entraba estadística)

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Se dispone de tres cajas con bolas de distintos colores. La primera contiene 10 bolas: 4 azules y 6 blancas. En la segunda caja hay una única bola azul y 5 blancas. En la tercera caja tenemos 3 bolas azules y 5 blancas. Cogemos una bola al azar de cualquiera de las cajas:

a) Calcule la probabilidad de que la bola cogida sea azul. (1 punto)

b) Si la bola elegida es blanca, calcule la probabilidad de que estuviera en la primera caja. (1,5 puntos)

Solución: a) 113/360 = 0.314 b) 72/247 = 0.29

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos) Dados dos sucesos de un experimento aleatorio A y B tales que $P(\overline{A}) = 0,45$, $P(B) = 0,35$ y $P(A \cup B) = 0,7$. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(A)$. (0,5 puntos)

b) $P(A \cap B)$. (1 punto)

c) $P(B / A)$. (0,5 puntos)

d) $P(\overline{A} / \overline{B})$. (0,5 puntos)

Solución: a) 0.55 b) 0.2 c) 0.366 d) 0.46

Junio 2021 (no entraba estadística)

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) En un viaje de estudios el 52 % de los jóvenes son hombres. De ellos el 35 % son rubios, así como el 40 % de las mujeres. Si elegimos a un estudiante al azar:

a) Calcule la probabilidad de que sea rubio. (1 punto)

b) Sabiendo que NO es rubio, ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1,5 puntos)

Solución: a) 0.374 b) 144/313 = 0.46

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos) Alex y Fran son dos amigos que practican asiduamente en las pistas el baloncesto. La probabilidad de que Alex enceste un tiro libre es del 65 % y de que lo haga Fran es del 48 %. Dado que los dos sucesos son independientes, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos al lanzar un tiro libre:

a) Ambos encesten un tiro libre. (1 punto)

b) Solo Alex encesta la pelota. (1 punto)

c) Al menos uno de ellos encesta la pelota. (0,5 puntos)

Solución: a) 0.312 b) 0.338 c) 0.818

Septiembre 2020

CUESTIÓN 7. Entre los alumnos ERASMUS que han llegado este curso a la Universidad de Murcia el 75% hablan inglés, el 50% hablan francés y un 5% no hablan ninguno de estos dos idiomas. Elegido un alumno al azar:

a) Calcule la probabilidad de que hable inglés o francés. (0,5 puntos)

b) Calcule la probabilidad de que hable inglés y francés. (0,5 puntos)

c) Calcule la probabilidad de que, hablando inglés, no hable francés. (1 punto)

Solución: a) 0.95 b) 0.3 c) 0.6

CUESTIÓN 8. En una empresa multinacional el 60% de las reuniones se realizan a través de videoconferencia. El 40% de los empleados que asisten a estas videoconferencias son de países de la Unión Europea, mientras que en las reuniones presenciales solo el 20% son trabajadores que no pertenecen a la Unión Europea. Si elegimos un trabajador al azar:

a) Calcule la probabilidad de que pertenezca a la Unión Europea (1 punto)

b) Sabiendo que el trabajador es de la Unión Europea, ¿Cuál es la probabilidad de que haya asistido a la reunión por videoconferencia (1 punto)

Solución: a) 0.56 b) 0.4286

CUESTIÓN 9. (2 puntos) El precio medio de los aspiradores de una gran superficie se distribuye según una distribución normal de desviación típica 100 €. Se toma una muestra aleatoria de 9 aspiradoras de distintas marcas obteniendo un precio medio de 178.89 €. Determine un intervalo de confianza al 99% para el precio medio.
Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 99% el error cometido de estimación del precio no supere los 50 €.

Solución: El intervalo de confianza es (93.05, 264.73). La muestra debe ser de al menos 27 aspiradores

CUESTIÓN 10. (2 puntos) Se sabe que el peso de los tarros de cacao de un supermercado es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 1,8 gramos. Se toma una muestra aleatoria de 9 tarros y se obtiene un peso medio de 89 gramos. Obtenga un intervalo de confianza, al 95% para la media de esta población.
¿Cuál será el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido de estimación del peso no supere 1 gramo, a un nivel de confianza del 95%?

Solución: El intervalo de confianza es (87.824, 90.176). La muestra debe ser al menos de 13 tarros de cacao.

Julio 2020

CUESTIÓN 7. En una ferretería se encuentran mezclados 100 tornillos de color azul, 60 de color blanco y 40 de color rojo. La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es de 0.01 si es azul, 0.02 si es blanco y de 0.03 si es rojo. Un comprador elige un tornillo al azar.

a) Calcule la probabilidad de que el tornillo sea defectuoso. (1 punto)
b) Sabiendo que el tornillo es defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanco? (1 punto)

Solución: a) 0.017 b) 0.353

CUESTIÓN 8. (2 puntos) Dado dos sucesos independientes *A* y *B* se conoce que $P(A)=0,3$ y que $P(\overline{B})=0,4$. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(A\cup B)$ (0.75 puntos)
b) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ (0.5 puntos)
c) $P(A/\overline{B})$ (0.75 puntos)

Solución: a) 0.72 b) 0.28 c) 0.3

CUESTIÓN 9. Se ha estimado que el consumo medio de gasolina de los automóviles de un concesionario se distribuye según una distribución normal con una desviación típica de 0,5 litros. Se han probado 10 automóviles, elegidos aleatoriamente, de este concesionario por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares, obteniendo un consumo medio de 6,5 litros por cada 100 km.

a) Determine un intervalo de confianza, al 95% de confianza, para la media del gasto de gasolina de estos vehículos. (1.25 puntos)
b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 95%, el error cometido del consumo de gasolina sea inferior a 0,2. (0,75 puntos)

Solución: a) (6.19, 6.81) b) La muestra debe ser al menos de 25 automóviles

CUESTIÓN 10. En un laboratorio farmacéutico se analiza el PH de una solución y se supone que este sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,02. Con un ensayo de 6 mediciones de la misma solución se obtuvo un PH de 7,91.

a) Determine un intervalo de confianza al 95% para la media de todas las determinaciones de PH de la misma solución obtenida por el mismo método. (1,25 puntos).
b) Con el mismo nivel de confianza anterior. ¿cuál será el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea inferior a 0,01? (0,75 puntos)

Solución: a) (7.894, 7.926) *b) La muestra debe ser de al menos 16 mediciones.*

Septiembre 2019

CUESTIÓN A4. En un taller mecánico el 70% de los coches que se reparan son del modelo A y el resto de un modelo B. Después de 6 meses, el 95% de los coches del modelo A no vuelven al taller mientras que del modelo B solo no vuelven el 80%. Si elegimos un coche al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva al taller antes de 6 meses? **(0,75 puntos)**
b) Si se observa que antes de los seis meses vuelve al taller, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B? **(0,75 puntos)**

*Solución**:** a) 0,095* *b) 0,6313*

CUESTIÓN A5. Se sabe que la estatura de los individuos de Murcia es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 6 cm. Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos y da una media de 176 cm. Obtenga un intervalo de confianza, con un 99% de confianza, para la media de la estatura de la población. **(1,5 puntos)**

Solución: El intervalo de confianza es (174.97, 177.03)

CUESTIÓN B4. En un hospital de la región de Murcia se está probando una nueva terapia para dejar de fumar. De los pacientes que entran en este ensayo el 45% prueba la terapia y el resto no. Después de un año el 70% de los que siguieron la terapia y el 40% de los que no la siguieron han dejado de fumar. Se elige al azar a un paciente fumador de este hospital:

a) Calcule la probabilidad de que después de un año haya dejado de fumar. **(0,75 puntos)**
b) Si transcurrido un año el paciente sigue fumando, calcule la probabilidad de que haya seguido la nueva terapia. **(0,75 puntos)**

*Solución**:** a) 0,535 b) 0,2903*

CUESTIÓN B5. En un estudio realizado por una empresa se ha obtenido que el intervalo de confianza de una variable, a un nivel de confianza del 95%, es: (6,824 9,176). Hallar la media y el tamaño de la muestra para obtener dicho intervalo conociendo que la varianza de la distribución es de 9. Explique cada uno de los pasos realizados. **(2 puntos)**

*Solución**:** El tamaño de la muestra es 25 y la media es 8.*

Junio 2019

CUESTIÓN A4. En el coro universitario el 65% de sus componentes son mujeres. El 30% de las mujeres y el 25% de los hombres son bilingües. Si elegimos al azar a un componente del coro:

a) ¿Cuál es la probabilidad que sea bilingüe? **(0,75 puntos)**
b) Sabiendo que es bilingüe, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **(0,75 puntos)**

*Solución**:** a) 0,2825 b) 0,69*

CUESTIÓN A5. El tiempo, en años, de renovación de un ordenador portátil se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica de 0,9 años. Si tomamos al azar a 900 usuarios, se obtiene una media muestral de 3,5 años. Hallar el intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de renovación de un ordenador portátil. **(1,5 puntos)**

Solución: El intervalo de confianza es (3.4412, 3.5588)

CUESTIÓN B4. Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0,3$, $P(B)=0,2$ y $P(A/B)=0,5$. Calcular $P(A\cap B)$ y $P(A\cup B)$. **(1,5 puntos)**

Solución: $P(A\cap B)=0,1$ y $P(A\cup B)=0,4$

CUESTIÓN B5. El tiempo en minutos de conexión a Internet de los estudiantes de un centro de secundaria, sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Para poder estimar la media del tiempo de conexión, se construye un intervalo de confianza con un error menor o igual a 5 minutos, con un nivel de confianza del 95%. Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar. **(1,5 puntos)**

Solución: El tamaño mínimo es de 16 estudiantes.

Septiembre 2018

CUESTIÓN A4. Sabiendo que $P(A\cup B)=0,95$, $P(A\cap B)=0,35$ y $P(A/B)=0,5$. Hallar $P(A)$, $P(B)$ *y* $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$ (2 puntos)

Solución: $P(A)=0'6$, $P(B)=0'7$ *y* $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)=0'166$

CUESTIÓN A5. En una muestra aleatoria de 100 individuos se ha obtenido para el peso una media de 60 kg. Se sabe que el peso en la población de la que procede la muestra sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 kg.

a) Obtener un intervalo de confianza al 92% para el peso medio de la población. (1,25 puntos)
b) ¿Qué error máximo se comete en la estimación anterior? (0,25 puntos)

Solución: a) El intervalo de confianza es (56.5, 63.5)b) El error máximo que se puede cometer es de 3.5 kg

CUESTIÓN B4. En un grupo hay 12 mujeres y 8 hombres. Se eligen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, tres personas.

a) Hallar la probabilidad de que las tres personas sean mujeres. (0,5 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres personas no sean del mismo sexo? (0,75 puntos)
c) Hallar la probabilidad de que salgan, al menos, dos hombres. (0,75 puntos)

Solución: a) 0,19 b) 0,75 c) 0,34

CUESTIÓN B5. En una muestra aleatoria de tamaño 150 de individuos de una población se ha obtenido que 32 utilizan el tranvía. Hallar un intervalo de confianza al 99% para la proporción de individuos de la población que utilizan el tranvía. (1,5 puntos)

Solución: (0.124, 0.2958)

Junio 2018

CUESTIÓN A4. El examen de una asignatura consta de tres pruebas. La primera prueba es superada por el 80% de los alumnos que la realizan. Esta prueba es eliminatoria, por lo que si no se supera no se pueden realizar las otras, y se suspende la asignatura. La segunda prueba tiene dos convocatorias en las que puede superarse, la ordinaria y la extraordinaria (para alumnos que no la hayan aprobado en la ordinaria). Superan esta prueba el 35% de los alumnos en la convocatoria ordinaria y el 50% de los alumnos que se presentan a la extraordinaria. La tercera prueba solo pueden realizarla los alumnos que tienen las otras dos pruebas superadas, y la supera el 75% de los alumnos presentados.

a) Calcular la probabilidad de superar las dos primeras pruebas. (1,5 puntos)
b) Si el requisito para aprobar la asignatura es que se superen las tres pruebas, hallar la probabilidad de aprobar la asignatura. (0,5 puntos)

Solución: *a) 0.66 b) 0.495*

CUESTIÓN A5. **(PROPORCIONES)** En una muestra aleatoria de tamaño 200 de árboles de una población se ha obtenido que 45 tienen una plaga. Hallar el intervalo de confianza al 90% para la proporción de árboles que tienen la plaga. (1,5 puntos)

Solución: (0.176, 0.274)

CUESTIÓN B4. La probabilidad de que un autobús llegue con retraso a una parada es 0,2. Si pasa cuatro veces a lo largo del día por la parada, calcular la probabilidad de que:

a) No llegue con retraso ninguna de las veces.
b) Llegue con retraso al menos una vez.
c) Al menos tres veces llegue con retraso.
d) Llegue con retraso exactamente dos veces consecutivas. (2 puntos)

Solución: a) 0.41 b) 0.59 c)0.82 d) 0.077

CUESTIÓN B5. La altura para una determinada población sigue una distribución normal con una desviación típica conocida σ. Para hallar un intervalo de confianza para la media de la población se ha tomado una muestra aleatoria simple de 100 individuos, obteniéndose una altura media de 145 cm. Si el intervalo de confianza con un nivel de significación 0'05 construido a partir de los datos anteriores es (135,2, 154,8), hallar el valor de σ. (1,5 puntos)

Solución: σ = 50

Septiembre 2017

CUESTIÓN A4. Para que un producto cosmético tenga un informe favorable de una agencia de sanidad debe superar tres pruebas de evaluación de garantía sanitaria. Las pruebas son independientes y todos los productos se someten a las tres pruebas. Se sabe, por otras ocasiones, que la probabilidad de superar la primera prueba es 0,8, la de superar la segunda es 0,75 y la de superar la tercera 0,85. Hallar:

a) La probabilidad de que un producto tenga el informe favorable. (1 punto)
b) La probabilidad de que un producto no tenga el informe favorable por fallar solamente en una prueba. (1 punto)

Solución: *a) 0.51* *b) 0,3875*

CUESTIÓN A5. El consumo de carne por persona en un año para una población es una variable aleatoria con distribución normal con desviación típica igual a 2 kg. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 individuos y se obtienen los siguientes consumos anuales por persona (en kg):

24; 20; 12; 10; 30; 27; 35; 30; 25; 39.

Determinar el intervalo de confianza al 90% para el consumo medio de carne por persona al año para la población. (1,5 puntos)

Solución: El intervalo de confianza al 90% para el consumo medio de carne por persona al año para la población es de $(24'16\,,\,26,24)$

CUESTIÓN B4. En un grupo el 60% de los alumnos aprueba la asignatura A y el 30% aprueba la asignatura B. Se sabe, además, que el 10% de los alumnos que aprueba la asignatura B aprueba también la asignatura A. Hallar el porcentaje de alumnos del grupo que aprueba alguna de las dos asignaturas. (2 puntos)

Solución: El porcentaje de alumnos del grupo que aprueba alguna de las dos asignaturas = 3 + 27 + 57 = 87%

CUESTIÓN B5. La estatura de los individuos de una población es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 0,4 m. Para estimar la media se toma una muestra aleatoria de tamaño n y se encuentra un valor medio de la estatura igual a 1,6 m. Si el intervalo de confianza al 95% construido a partir de esos datos es (1,5216, 1,6784), calcula el valor de *n*. (1,5 puntos)

Solución: El tamaño de la muestra aleatoria es de 100 elementos

Junio 2017

CUESTIÓN A4. Una urna contiene tres bolas numeradas del 1 al 3. Se extraen sucesivamente las tres bolas.

a) Calcular la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean impares. (1 punto)
b) Determinar si los siguientes sucesos son independientes: S_1:"sale número par antes de alguno de los impares" y S_2:"los dos números impares salen consecutivamente". (1 punto)

Solución: a) $P(2\ \textit{últimas bolas impares}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0'33$. *b) Los sucesos S_1 y S_2 son dependientes*

CUESTIÓN A5. (PROPORCIONES) En una muestra aleatoria de 175 individuos de una población se ha obtenido que 30 tienen más de 65 años. Hallar un intervalo de confianza al 90% para la proporción de mayores de 65 años de la población. (1,5 puntos)

Solución: Entre un 12 % y un 22 %

CUESTIÓN B4. En una población se ha determinado que cada 100 consumidores de agua mineral, 30 consumen la marca A, 25 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30% de consumidores de A, el 20% de consumidores de B y el 40% de consumidores de C son mujeres. Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población y resulta ser mujer, hallar la probabilidad de que consuma la marca A. (1,75 puntos)

Solución: $P(\textit{consumir la marca A sabiendo que es mujer}) = 9/32 = 0'28$

CUESTIÓN B5. La duración de un tipo de bombillas sigue una distribución normal con desviación típica de 120 horas. Para estimar la duración media se quiere calcular un intervalo de confianza al 99%. Determinar el tamaño mínimo que debe tener la muestra utilizada para que el error cometido en la estimación sea menor de 25 horas. (1,25 puntos)

Solución: 153 bombillas

Septiembre 2016

CUESTIÓN A4. Se sabe que el 28% de una población padece algún tipo de alergia. El 45% de los individuos de la población que sufren alergia son mujeres. Además, de la parte de la población que no padece alergia, el 35% son mujeres.

a) Calcular la probabilidad de que al elegir al azar un individuo de la población sea mujer. (1 punto)

b) Se ha elegido un individuo al azar y es mujer; calcular la probabilidad de que no padezca alergia. (1 punto)

Solución: a) 0.378 b) 0.66

CUESTIÓN A5. (PROPORCIONES) Para estimar la proporción de individuos de una población que utilizan el comercio electrónico se ha realizado una encuesta a una muestra aleatoria de 200 individuos, de los cuales 90 han respondido que utilizan el comercio electrónico. Con estos datos, hallar un intervalo de confianza del 95% para la proporción de individuos de la población que utilizan el comercio electrónico. (1,5 puntos)

Solución: (0.3811, 0.5189)

CUESTIÓN B4. En una urna hay bolas numeradas del 1 al 3, hay 30 bolas con el número 1, 60 con el número 2 y 90 con el número 3. Se realiza el experimento de sacar dos bolas consecutivamente sin reemplazamiento.

a) Hallar la probabilidad de que en las dos salga 1. (0,5 puntos)

b) Hallar la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea par. (1 punto)

Solución: a) $P(Sacar\ 1\ y\ 1) = 0,027$ *b)* $P(Suma\ par) = 0,55$

CUESTIÓN B5. (CONTRASTE DE HIPÓTESIS) Según un informe sobre calidad de infraestructuras turísticas, la puntuación media de los alojamientos turísticos de un país es, como mínimo, de 7,8, con una desviación típica de 0,7. Para comprobar esta información, se toma una muestra aleatoria de 150 alojamientos, para los que se obtiene una puntuación media de 7,5. Si la puntuación es una variable normal:

a) Plantear un contraste para determinar si se puede aceptar la afirmación del informe. Dar la expresión de la región de aceptación. (1 punto)

b) Con un nivel de significación del 4%, ¿se puede aceptar lo que dice el informe? (1 punto)

Solución: a) Se acepta b) Se rechaza

Junio 2016

CUESTIÓN A4. En una universidad el 65% de sus miembros son estudiantes, el 25% profesores y el 10% personal de administración y servicios. Son mujeres el 60% de los estudiantes, el 47% de los profesores y el 52% del personal de administración y servicio. Si elegimos al azar un miembro integrante de esta universidad:

a. Determinar la probabilidad de que sea mujer. (1 punto)

b. Sabiendo que la persona seleccionada ha resultado ser un hombre, hallar la probabilidad de que sea estudiante. (1 punto)

Solución: a. *0'5595* *b. P(Estudiante/Hombre)=0,59*

CUESTIÓN A5. En una población el tiempo de desplazamiento de los trabajadores al lugar de trabajo sigue una distribución normal con desviación típica de 15 minutos.

Tras realizar una muestra aleatoria de 60 trabajadores se ha encontrado que el tiempo medio de desplazamiento es de 45 minutos. Halla el intervalo de confianza al 90% para el tiempo medio de desplazamiento al lugar de trabajo de los individuos de la población. (1'5 puntos)

Solución: (41.81, 48.18)

CUESTIÓN B4. Cierto día, la probabilidad de que llueva en la ciudad A es 0'3, la de que no llueva en la ciudad B es 0'6 y la de que llueva, al menos, en una de las dos ciudades es 0'5.

a. Calcular la probabilidad de no llueva en ninguna de las dos ciudades (0'5 puntos)
b. Calcular la probabilidad de que llueva en las dos. ¿Son independientes los sucesos "llueve en la ciudad A" y "llueve en la ciudad B"?

*Solución**:** a. 0,5 b. A y B no son independientes.*

CUESTIÓN B5. (CONTRASTE DE HIPÓTESIS) Según un estudio, el porcentaje de adultos de la Unión Europea que hablan una lengua extranjera es del 64%. En una muestra aleatoria tomada en España de 250 adultos se ha obtenido que 128 hablan una lengua extranjera. A partir de estos datos, plantear un contraste para determinar si se puede aceptar que el porcentaje de adultos que hablan una lengua extranjera en España es igual al de la Unión Europea frente a la alternativa de que es menor, como parecen indicar los datos. ¿A qué conclusión se llega para un nivel de significación de 0'01? (2 puntos)

Solución: En España, con un nivel de significación de 0'01, disminuye la proporción de personas que hablan una lengua extranjera.

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$P(Z \leq z) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998