PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PAU
CURSO 2025–2026

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	
Convocatoria:	**JULIO**

Pregunta 1 (2 puntos): OBLIGATORIA. Sentido estocástico

1. En un instituto se hace una encuesta a todos los alumnos de dos clases (50 estudiantes) y resulta que 39 de ellos no tienen ni hermanos ni hermanas.

a) **(1 punto)** A partir de esa muestra, calcula un intervalo de confianza al 98% para la proporción de estudiantes que son hijos únicos.

b) **(1 punto)** ¿Nos basta esa muestra para calcular la proporción de hijos únicos con un error menor de 0,05? Razona tu respuesta y si es negativa, calcula el tamaño que debería tener.

Pregunta 2 (3 puntos): OBLIGATORIA. Sentido de la medida

2. Una empresa de logística tiene una sección en cada una de las provincias de las Islas Canarias. Se han estudiado los beneficios de cada una de las secciones en los últimos 21 años y se ha encontrado que siguen las funciones siguientes, donde t se mide en años y el beneficio se expresa en millones de euros:

$B_1(t) = t^3 - 30t^2 + 225t + 150$ para la sección de Santa Cruz de Tenerife

$B_2(t) = -2t^2 + 38t + 150$ para la sección de Las Palmas.

a) **(1 punto)** Haciendo uso de la derivada, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios obtenidos por la delegación de Santa Cruz de Tenerife.

b) **(0.75 puntos)** ¿Cuándo se produjeron los beneficios mínimo y máximo absolutos de la delegación de Tenerife? ¿Cuáles fueron sus importes?

c) **(0.50 puntos)** ¿En qué periodo los beneficios de la provincia de Las Palmas superaron los 290 millones de euros?

d) **(0.75 puntos)** ¿En qué momento el beneficio fue el mismo en ambas provincias y cuál fue su valor?

Pregunta 3 (2 puntos): ELEGIR UNA OPCIÓN ENTRE 3.1 Y 3.2. Sentido estocástico

3.1. Estudios recientes indican que en Canarias el salario mensual de los jóvenes de entre 25 y 35 años sigue aproximadamente una distribución normal con una media de 1236€ y una desviación típica de 254€.

a) **(1 punto)** Se seleccionan aleatoriamente para una entrevista 121 jóvenes canarios de ese rango de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que su salario medio supere los 1300€? ¿Cuál es el número esperado de jóvenes en esa muestra cuyo salario supera los 1300€?

b) **(1 punto)** Solo se emancipan de su hogar familiar aquellos jóvenes que ganan al menos 1500€. Suponiendo que la desviación típica se mantiene igual, ¿cuánto debería subir el salario medio mensual para que al menos el 75% de los jóvenes ganen lo suficiente para emanciparse?

3.2. Un reciente informe nacional revela que 2 de cada 5 jóvenes se encuentran en riesgo de dependencia digital como consecuencia del excesivo tiempo dedicado a las redes sociales. Ello deriva en frecuentes problemas de sueño, aislamiento, dificultades en el estudio y cambios de humor. Con objeto de identificar a los jóvenes en riesgo de padecer este tipo de dependencia, un equipo de investigadores de las universidades canarias ha elaborado un cuestionario psicológico. Se sabe que entre quienes realmente presentan este riesgo, el cuestionario ofrece un resultado positivo en el 95% de los casos y un resultado ambiguo en un 3%. En cambio, entre quienes no presentan riesgo, el cuestionario arroja un resultado positivo en 1 de cada 10 casos, y un resultado negativo en el 85% de los casos.

a) **(0,5 puntos)** Construir el correspondiente árbol de probabilidades.

b) **(0,75 puntos)** Se ha pasado el cuestionario a un joven elegido aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que dé un resultado negativo?

c) **(0,75 puntos)** Si un joven ha dado positivo en el cuestionario, calcula la probabilidad de que presente realmente riesgo de dependencia digital.

Pregunta 4 (3 puntos): ELEGIR UNA OPCIÓN ENTRE 4.1 Y 4.2. Sentido numérico y algebraico

4.1 El Consejo Escolar de Canarias organiza una reunión de organizaciones estudiantiles en la que participan un total de 240 estudiantes elegidos entre los niveles de Primaria, ESO y el Bachillerato. El número de estudiantes de primaria es la quinta parte del resto y por cada 3 estudiantes de ESO hay 2 de Bachillerato.

a) **(1,5 puntos)** Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) **(1 punto)** ¿Cuántos estudiantes de cada nivel asisten a la reunión?

c) **(0,5 puntos)** Para trasladar al alumnado al encuentro se ha acordado con una empresa de guaguas la siguiente lista de precios: cada persona de la ESO paga una tarifa de 2.50 euros; los de Bachillerato pagan un 50% más que los de la ESO; y los de Primaria tienen un descuento del 20% sobre el precio que pagan los de la ESO. De los que van a la reunión sólo irán en guagua 25 estudiantes de primaria, 80 de la ESO y 50 estudiantes de Bachillerato. ¿Cuánto habrá que pagar en total?

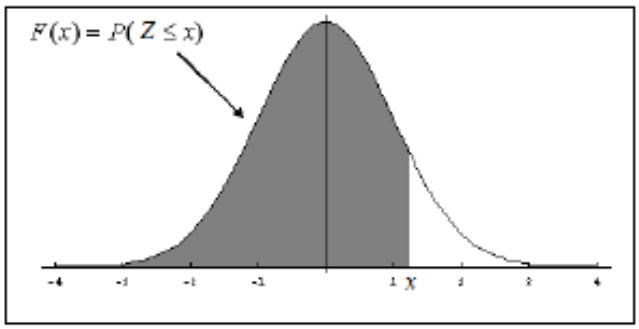
4.2. Una inmobiliaria quiere promover una pequeña urbanización destinada principalmente a compradores jóvenes. Para ello va a construir dos tipos de viviendas: de tipo A, más asequibles y de menor tamaño, y de tipo B, más caras y de mayor tamaño. La empresa cuenta con un presupuesto de 4.400.000€ para la obra. El coste de construcción de cada vivienda es de 100.000€ para las del tipo A y 200.000€ para las del tipo B. El solar disponible permite construir como máximo 36 viviendas y la normativa urbanística obliga a que las viviendas del tipo A sean al menos el doble que las del tipo B. La inmobiliaria ha comprometido ya la venta de 4 del tipo B. El beneficio una vez descontado el coste de construcción es de 20.000 € por cada vivienda del tipo A y 32.000€ por cada una del tipo B. Se desea determinar cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para que el beneficio sea máximo.

a) **(1 punto)** Plantear el problema de programación lineal correspondiente al enunciado.

b) **(1 punto)** Representar gráficamente la región factible.

c) **(0,5 puntos)** Determinar, razonadamente, el número de viviendas de cada tipo que debe construir la inmobiliaria para maximizar el beneficio. Calcular el beneficio máximo obtenido.

d) **(0,5 puntos**) Del presupuesto inicial de 4.400.000€ con que contaba la empresa, solo un 20% procedía de fondos propios y el resto se pensaba conseguir mediante un préstamo bancario. Sin embargo, justo antes de empezar la obra, se produce una recesión económica en el país, como consecuencia de la cual el banco comunica a la inmobiliaria que solo puede concederle un préstamo del 70% del presupuesto inicial; además el coste de fabricación por vivienda se incrementa en un 15%. Ante esta situación la inmobiliaria decide finalmente construir 24 viviendas tipo A y 5 tipo B. ¿Le alcanzará el presupuesto?



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

1. En un instituto se hace una encuesta a todos los alumnos de dos clases (50 estudiantes) y resulta que 39 de ellos no tienen ni hermanos ni hermanas.

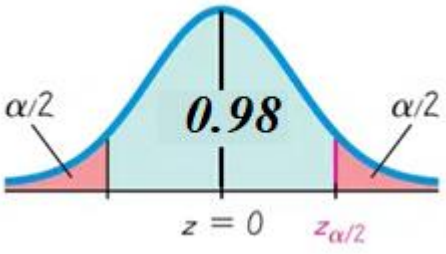
a) **(1 punto)** A partir de esa muestra, calcula un intervalo de confianza al 98% para la proporción de estudiantes que son hijos únicos.

b) **(1 punto)** ¿Nos basta esa muestra para calcular la proporción de hijos únicos con un error menor de 0,05? Razona tu respuesta y si es negativa, calcula el tamaño que debería tener.

a) El tamaño de la muestra es $n = 50$. La proporción muestral es $p = \frac{39}{50} = 0.78$.

Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para una confianza del 98%.

$$1-\alpha = 0.98 \to \alpha = 0.02 \to \frac{\alpha}{2} = 0.01 \to 1-\frac{\alpha}{2} = 0.99 \to z_{\alpha/2} = \frac{2.32+2.33}{2} = 2.325$$



	0	0,01	0,02	0,03
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}} = 2.325\cdot\sqrt{\frac{0.78\cdot 0.22}{50}} \simeq 0.1362$$

El intervalo de confianza al 98% para la proporción de estudiantes que son hijos únicos es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.78 - 0.1362,\ 0.78 + 0.1362\right) = \left(0.6438,\ 0.9162\right)$$

b) El error en la muestra del apartado a) es de 0.1362 mayor que 0.05. No nos sirve la muestra anterior. Determinamos el tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 0.05.

$$Error = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}} \Rightarrow 0.05 = 2.325\cdot\sqrt{\frac{0.78\cdot 0.22}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{2.325} = \sqrt{\frac{0.1716}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.05}{2.325}\right)^2 = \frac{0.1716}{n} \Rightarrow \boxed{n = \frac{0.1716}{\left(\frac{0.05}{2.325}\right)^2} \simeq 371.0421}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 372 estudiantes.

2. Una empresa de logística tiene una sección en cada una de las provincias de las Islas Canarias. Se han estudiado los beneficios de cada una de las secciones en los últimos 21 años y se ha encontrado que siguen las funciones siguientes, donde t se mide en años y el beneficio se expresa en millones de euros:

$B_1(t)=t^3-30t^2+225t+150$ para la sección de Santa Cruz de Tenerife

$B_2(t)=-2t^2+38t+150$ para la sección de Las Palmas.

a) **(1 punto)** Haciendo uso de la derivada, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios obtenidos por la delegación de Santa Cruz de Tenerife.

b) **(0.75 puntos)** ¿Cuándo se produjeron los beneficios mínimo y máximo absolutos de la delegación de Tenerife? ¿Cuáles fueron sus importes?

c) **(0.50 puntos)** ¿En qué periodo los beneficios de la provincia de Las Palmas superaron los 290 millones de euros?

d) **(0.75 puntos)** ¿En qué momento el beneficio fue el mismo en ambas provincias y cuál fue su valor?

a) Hallamos la derivada y averiguamos cuando se anula.

$$B_1(t)=t^3-30t^2+225t+150 \Rightarrow B_1'(t)=3t^2-60t+225$$

$$B_1'(t)=0 \Rightarrow 3t^2-60t+225=0 \Rightarrow t^2-20t+75=0 \Rightarrow$$

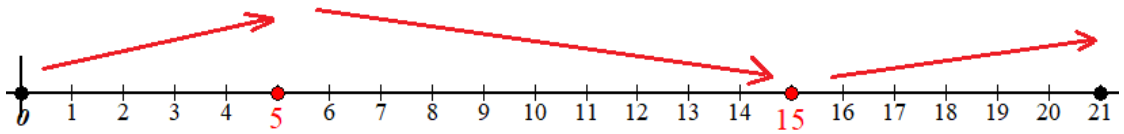
$$\Rightarrow t=\frac{20\pm\sqrt{(-20)^2-4\cdot 75}}{2}=\frac{20\pm 10}{2}=\begin{cases}\frac{20+10}{2}=\boxed{15=t}\\ \frac{20-10}{2}=\boxed{5=t}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $[0,5)$ tomamos $t=1$ y la derivada vale
  $B_1'(1)=3\cdot 1^2-60\cdot 1+225=168>0$. La función crece en $[0,5)$.
- En el intervalo $(5,15)$ tomamos $t=10$ y la derivada vale
  $B_1'(10)=3\cdot 10^2-60\cdot 10+225=-75<0$. La función decrece en $(5,15)$.
- En el intervalo $(15,21]$ tomamos $t=20$ y la derivada vale
  $B_1'(20)=3\cdot 20^2-60\cdot 20+225=225>0$. La función crece en $(15,21]$.

Los beneficios crecen en $[0,5)\cup(15,21]$ y decrecen en $(5,15)$.

b) Por lo estudiado en el apartado a) podemos decir que la función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en $t=5$ y un mínimo relativo en $t=15$.
Valoramos la función en estos años y en los extremos del intervalo de estudio $[0,21]$.

$$B_1(0)=0^3-30\cdot 0^2+225\cdot 0+150=150 \text{ } \textit{Mínimo}$$
$$B_1(5)=5^3-30\cdot 5^2+225\cdot 5+150=650$$
$$B_1(15)=15^3-30\cdot 15^2+225\cdot 15+150=150 \text{ } \textit{Mínimo}$$
$$B_1(21)=21^3-30\cdot 21^2+225\cdot 21+150=906 \text{ } \textit{Máximo}$$

El beneficio mínimo se consigue al inicio y en el año 15. Siendo este importe mínimo de 150 millones de euros.
El beneficio máximo se consigue en el año 21. Siendo este importe máximo de 906 millones de euros.

c) Averiguamos cuando el beneficio es de 290.

$$B_2(t)=290\Rightarrow -2t^2+38t+150=290\Rightarrow -2t^2+38t-140=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2-19t+70=0\Rightarrow t=\frac{19\pm\sqrt{(-19)^2-4\cdot 70}}{2}=\frac{19\pm 9}{2}=\begin{cases}\frac{19+9}{2}=\boxed{14=t}\\ \frac{19-9}{2}=\boxed{5=t}\end{cases}$$

Comprobamos cuando el beneficio supera los 290 millones.

- En el intervalo $[0,5)$ tomamos $t=1$ y los beneficios son
  $B_2(1)=-2\cdot 1^2+38\cdot 1+150=186$. El beneficio es menor de 290 millones en $[0,5)$.
- En el intervalo $(5,14)$ tomamos $t=10$ y los beneficios son
  $B_2(10)=-2\cdot 10^2+38\cdot 10+150=330$. El beneficio supera los 290 millones en $(5,14)$.
- En el intervalo $(14,21]$ tomamos $t=15$ y los beneficios son
  $B_2(15)=-2\cdot 15^2+38\cdot 15+150=270$. El beneficio es menor de 290 millones en $(14,21]$
  .

El beneficio en la empresa de Las Palmas supera los 290 millones de euros del año 5 al año 14.

d) Averiguamos cuando $B_1(t)=B_2(t)$.

$$B_1(t)=B_2(t)\Rightarrow t^3-30t^2+225t+150=-2t^2+38t+150\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^3-28t^2+187t=0\Rightarrow t\left(t^2-28t+187\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\boxed{t=0}\\ t^2-28t+187=0\rightarrow t=\frac{28\pm\sqrt{(-28)^2-4\cdot 187}}{2}=\frac{28\pm 6}{2}=\begin{cases}\frac{28+6}{2}=\boxed{17=t}\\ \frac{28-6}{2}=\boxed{11=t}\end{cases}\end{cases}$$

Los beneficios son los mismos en tres momentos:
Al inicio del estudio, con $t=0$ siendo los beneficios de 150 millones de euros.
En el año 11 siendo los beneficios $B_2(11)=-2\cdot 11^2+38\cdot 11+150=326$ millones de euros.
En el año 17 siendo los beneficios $B_2(17)=-2\cdot 17^2+38\cdot 17+150=218$ millones de euros.

3.1. Estudios recientes indican que en Canarias el salario mensual de los jóvenes de entre 25 y 35 años sigue aproximadamente una distribución normal con una media de 1236€ y una desviación típica de 254€.

a) **(1 punto)** Se seleccionan aleatoriamente para una entrevista 121 jóvenes canarios de ese rango de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que su salario medio supere los 1300€? ¿Cuál es el número esperado de jóvenes en esa muestra cuyo salario supera los 1300€?

b) **(1 punto)** Solo se emancipan de su hogar familiar aquellos jóvenes que ganan al menos 1500€. Suponiendo que la desviación típica se mantiene igual, ¿cuánto debería subir el salario medio mensual para que al menos el 75% de los jóvenes ganen lo suficiente para emanciparse?

a) Consideramos la variable aleatoria X = el salario mensual de los jóvenes de entre 25 y 35 años de Canarias. $X = N(1236,\ 254)$.

La distribución de las muestras de tamaño 121 sigue una distribución normal con la misma media 1236 € y con desviación típica $\sigma = \dfrac{254}{\sqrt{121}} = \dfrac{254}{11} \simeq 23.1$. $\overline{X_{121}} = N\left(1236, \dfrac{254}{11}\right)$.

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{121}} > 1300\right)$.

$$P\left(\overline{X_{121}} > 1300\right) = \left\{\begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{\overline{X_{121}} - 1236}{254/11} \end{matrix}\right\} == \left(Z > \frac{1300-1236}{254/11}\right) = P(Z > 2.77) =$$

$$= 1 - P(Z \le 2.77) = \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{matrix}\right\} = 1 - 0.9972 = \boxed{0.0028}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
),1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
),2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
),3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
),4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
),5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
),6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
),7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
),8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
),9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972

La probabilidad de que el salario medio de una muestra de 121 jóvenes supere los 1300€ vale 0.0028.

¿Cuál es el número esperado de jóvenes en esa muestra cuyo salario supera los 1300€?

Hallamos la probabilidad de que el salario mensual de un joven canario supere los 1300 euros.

$$P(X>1300)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-1236}{254}\end{matrix}\right\}==\left(Z>\frac{1300-1236}{254}\right)=P(Z>0.25)=$$

$$=1-P(Z\le 0.25)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}=1-0.5987=\boxed{0.4013}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368

Multiplicamos la probabilidad obtenida por el número de jóvenes de la muestra: 0.4013 · 121 = 48.55. Se espera que de una muestra de 121 jóvenes sean 49 los que superen el salario mensual de 1300 €.

b) X = el salario mensual de los jóvenes de entre 25 y 35 años de Canarias. $X=N(\mu,\,254)$.

Queremos que $P(X>1500)=0.75$.

$$P(X>1500)=0.75\Rightarrow\{Tipificamos\}\Rightarrow P\left(Z>\frac{1500-\mu}{254}\right)=0.75\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{0.75>0.5\rightarrow\frac{1500-\mu}{254}<0\right\}\Rightarrow P\left(Z\le-\frac{1500-\mu}{254}\right)=0.75\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{\mu-1500}{254}\right)=0.75\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{\mu-1500}{254}=0.675\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mu-1500=0.675\cdot254\Rightarrow\boxed{\mu=1500+171.45=1671.45\ €}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517

Para que se cumpla lo pedido el sueldo medio mensual debe subir hasta 1671.45 euros.

3.2. Un reciente informe nacional revela que 2 de cada 5 jóvenes se encuentran en riesgo de dependencia digital como consecuencia del excesivo tiempo dedicado a las redes sociales. Ello deriva en frecuentes problemas de sueño, aislamiento, dificultades en el estudio y cambios de humor. Con objeto de identificar a los jóvenes en riesgo de padecer este tipo de dependencia, un equipo de investigadores de las universidades canarias ha elaborado un cuestionario psicológico. Se sabe que entre quienes realmente presentan este riesgo, el cuestionario ofrece un resultado positivo en el 95% de los casos y un resultado ambiguo en un 3%. En cambio, entre quienes no presentan riesgo, el cuestionario arroja un resultado positivo en 1 de cada 10 casos, y un resultado negativo en el 85% de los casos.

a) **(0,5 puntos)** Construir el correspondiente árbol de probabilidades.

b) **(0,75 puntos)** Se ha pasado el cuestionario a un joven elegido aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que dé un resultado negativo?

c) **(0,75 puntos)** Si un joven ha dado positivo en el cuestionario, calcula la probabilidad de que presente realmente riesgo de dependencia digital.

Llamamos R al suceso "el joven se encuentra en riesgo de dependencia digital", C+ a "el cuestionario da resultado positivo", Ca a "el cuestionario da un resultado ambiguo" y C– a "el cuestionario arroja un resultado negativo".

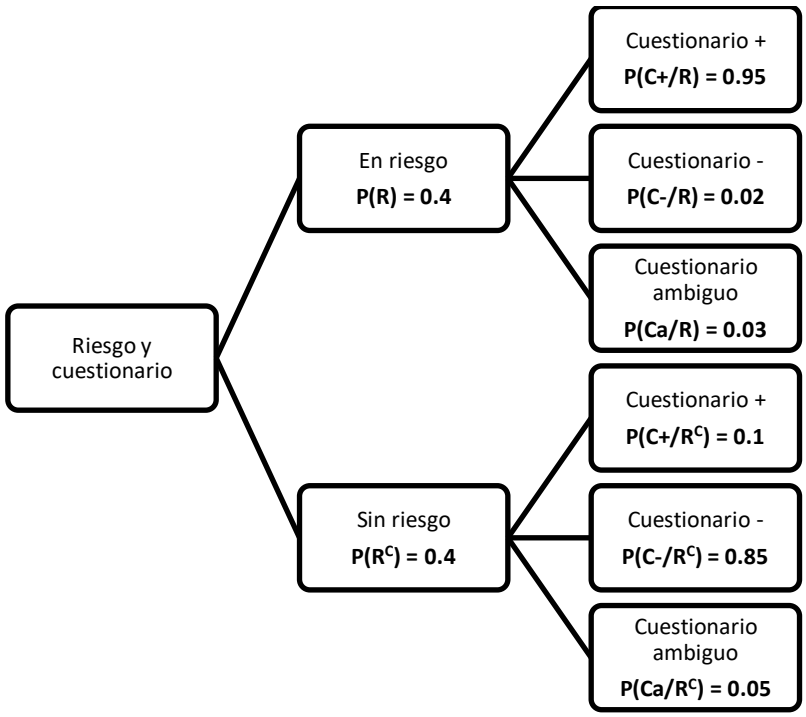
Las probabilidades que se desprenden de los datos del problema son:

$$P(R)=\frac{2}{5}=0.4;\ P(C+/R)=0.95;\ P(Ca/R)=0.03;\ P\left(C+/\overline{R}\right)=\frac{1}{10}=0.1;\ P\left(C-/\overline{R}\right)=0.85$$

Con estas probabilidades podemos deducir que:

$$P\left(\overline{R}\right)=1-0.4=0.6;\ P(C-/R)=1-0.03-0.95=0.02;\ P\left(Ca/\overline{R}\right)=1-0.1-0.85=0.05$$

a) Construimos un diagrama de árbol.



b) Debemos calcular $P(C-)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C-)=P(R)P(C-/R)+P\left(\overline{R}\right)P\left(C-/\overline{R}\right)=0.4\cdot 0.02+0.6\cdot 0.85=\boxed{0.518}$$

La probabilidad de que un joven elegido al azar al pasar el cuestionario dé un resultado negativo vale 0.518.

c) Debemos calcular $P(R/C+)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R/C+)=\frac{P(R\cap C+)}{P(C+)}=\frac{P(R)P(C+/R)}{P(R)P(C+/R)+P(\overline{R})P(C+/\overline{R})}=$$

$$=\frac{0.4\cdot 0.95}{0.4\cdot 0.95+0.6\cdot 0.1}=\boxed{\frac{19}{22}\simeq 0.8636}$$

Si un joven ha dado positivo en el cuestionario, la probabilidad de que presente realmente riesgo de dependencia digital vale 0.8636.

4.1 El Consejo Escolar de Canarias organiza una reunión de organizaciones estudiantiles en la que participan un total de 240 estudiantes elegidos entre los niveles de Primaria, ESO y el Bachillerato. El número de estudiantes de primaria es la quinta parte del resto y por cada 3 estudiantes de ESO hay 2 de Bachillerato.

a) **(1,5 puntos)** Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) **(1 punto)** ¿Cuántos estudiantes de cada nivel asisten a la reunión?

c) **(0,5 puntos)** Para trasladar al alumnado al encuentro se ha acordado con una empresa de guaguas la siguiente lista de precios: cada persona de la ESO paga una tarifa de 2.50 euros; los de Bachillerato pagan un 50% más que los de la ESO; y los de Primaria tienen un descuento del 20% sobre el precio que pagan los de la ESO. De los que van a la reunión sólo irán en guagua 25 estudiantes de primaria, 80 de la ESO y 50 estudiantes de Bachillerato. ¿Cuánto habrá que pagar en total?

a) Llamamos "x" al número de estudiantes de Primaria, "y" al número de estudiantes de ESO y "z" al número de estudiantes de Bachillerato que acuden a la reunión.

Participan un total de 240 estudiantes → $x+y+z=240$

El número de estudiantes de primaria es la quinta parte del resto → $x=\dfrac{y+z}{5}$.

Por cada 3 estudiantes de ESO hay 2 de Bachillerato →

$$\left.\begin{array}{l} 3\ ESO \longrightarrow 2\ Bachillerato \\ y \longrightarrow z \end{array}\right\} \Rightarrow 3z=2y\ .$$

Reunimos estas ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=240 \\ x=\dfrac{y+z}{5} \\ 3z=2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=240 \\ 5x=y+z \\ 2y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=240 \\ 5x-y-z=0 \\ 2y-3z=0 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=240 \\ 5x-y-z=0 \\ 2y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=240 \\ 5x-z=y \\ 2y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+5x-z+z=240 \\ 2(5x-z)-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6x=240 \\ 10x-2z-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{x=\dfrac{240}{6}=40} \\ 10x-5z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 10\cdot 40-5z=0 \Rightarrow 5z=400 \Rightarrow \boxed{z=\frac{400}{5}=80} \Rightarrow \boxed{y=5\cdot 40-80=120}$$

En la reunión hay 40 estudiantes de primaria, 120 de ESO y 80 de bachillerato.

c) Cada alumno de ESO paga 2.50 y los 80 alumnos de ESO deben pagar 80 · 2.5 = 200 €.
Cada alumno de primaria paga el 80% de 2.5 €, es decir, 0.8 · 2.5 = 2 €. Los 25 alumnos de primaria deben pagar 25 · 2 = 50 €.
Cada alumno de bachillerato paga un 50% más que un alumno de ESO (2.5 €), es decir, paga 1.5 · 2.5 = 3.75 €. Los 50 alumnos de bachillerato que van al encuentro deben pagar 50 · 3.75 = 187.5.
El coste total del transporte es de 200 + 50 + 187.5 = 437.5 €.

4.2. Una inmobiliaria quiere promover una pequeña urbanización destinada principalmente a compradores jóvenes. Para ello va a construir dos tipos de viviendas: de tipo A, más asequibles y de menor tamaño, y de tipo B, más caras y de mayor tamaño. La empresa cuenta con un presupuesto de 4.400.000€ para la obra. El coste de construcción de cada vivienda es de 100.000€ para las del tipo A y 200.000€ para las del tipo B. El solar disponible permite construir como máximo 36 viviendas y la normativa urbanística obliga a que las viviendas del tipo A sean al menos el doble que las del tipo B. La inmobiliaria ha comprometido ya la venta de 4 del tipo B. El beneficio una vez descontado el coste de construcción es de 20.000 € por cada vivienda del tipo A y 32.000€ por cada una del tipo B. Se desea determinar cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para que el beneficio sea máximo.

a) **(1 punto)** Plantear el problema de programación lineal correspondiente al enunciado.

b) **(1 punto)** Representar gráficamente la región factible.

c) **(0,5 puntos)** Determinar, razonadamente, el número de viviendas de cada tipo que debe construir la inmobiliaria para maximizar el beneficio. Calcular el beneficio máximo obtenido.

d) **(0,5 puntos**) Del presupuesto inicial de 4.400.000€ con que contaba la empresa, solo un 20% procedía de fondos propios y el resto se pensaba conseguir mediante un préstamo bancario. Sin embargo, justo antes de empezar la obra, se produce una recesión económica en el país, como consecuencia de la cual el banco comunica a la inmobiliaria que solo puede concederle un préstamo del 70% del presupuesto inicial; además el coste de fabricación por vivienda se incrementa en un 15%. Ante esta situación la inmobiliaria decide finalmente construir 24 viviendas tipo A y 5 tipo B. ¿Le alcanzará el presupuesto?

a) Llamamos x = número de viviendas tipo A e y = número de viviendas tipo B.
Hacemos una tabla para organizar los datos.

	Coste	Beneficio
Nº viviendas A (x)	100000x	20000x
Nº viviendas B (y)	200000y	32000y
	$100000x+200000y$	$20000x+32000y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x,y)=20000x+32000y$ sometidos a las restricciones siguientes.

La empresa cuenta con un presupuesto de 4.400.000€ para la obra → $100000x+200000y\le 4400000$

El solar disponible permite construir como máximo 36 viviendas → $x+y\le 36$

La normativa urbanística obliga a que las viviendas del tipo A sean al menos el doble que las del tipo B → $x\ge 2y$.

La inmobiliaria ha comprometido ya la venta de 4 del tipo B → $y\ge 4$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}100000x+200000y\le 4400000\\ x+y\le 36\\ x\ge 2y\\ y\ge 4\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+2y\le 44\\ y\le 36-x\\ y\le \dfrac{x}{2}\\ y\ge 4\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y\le \dfrac{44-x}{2}\\ y\le 36-x\\ y\le \dfrac{x}{2}\\ y\ge 4\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$y = \frac{44 - x}{2}$

x	$y = \frac{44-x}{2}$
0	22
22	11
28	8
44	0

$y = 36 - x$

x	$y = 36 - x$
0	36
28	8
32	4
36	0

$y = \frac{x}{2}$

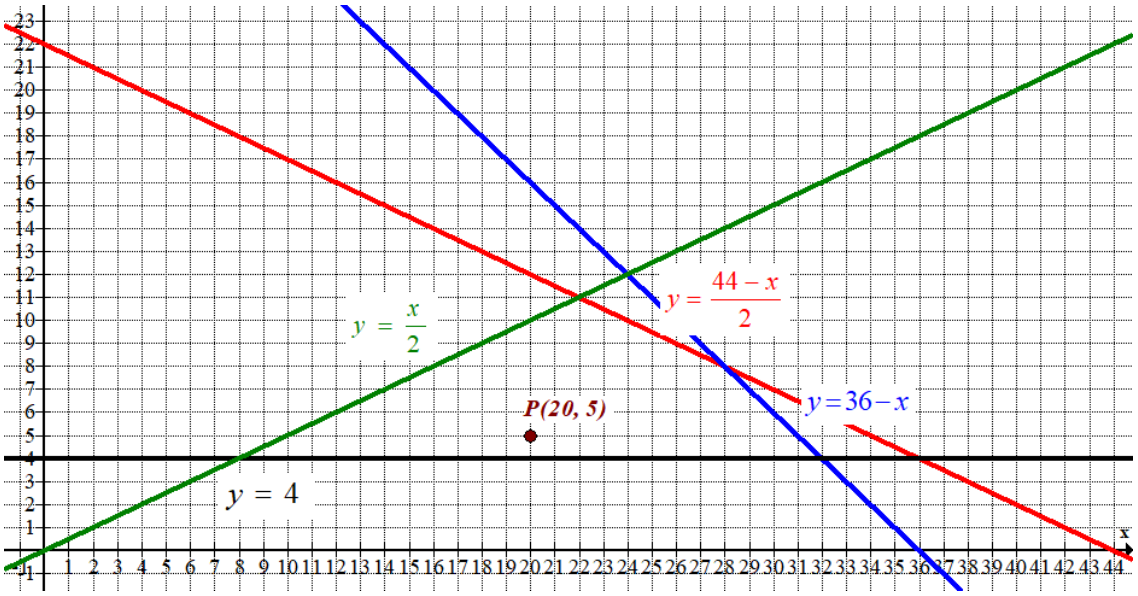
x	$y = \frac{x}{2}$
8	4
22	11
32	16
40	20

$y = 4$

x	$y = 4$
8	4
32	4
40	4

$x \geq 0;\ y \geq 0$

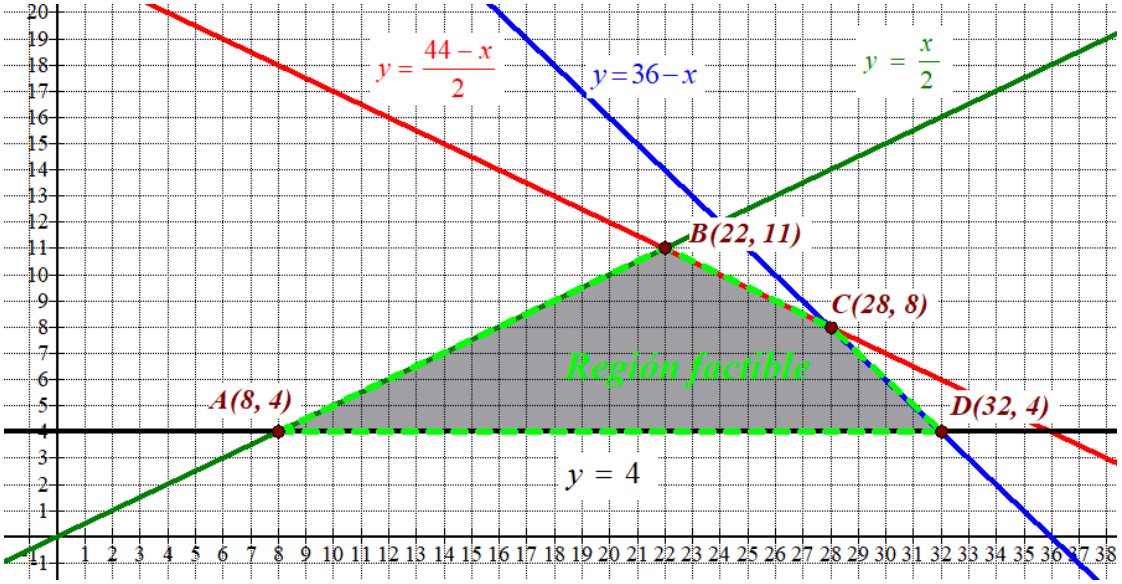
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} y \leq \frac{44-x}{2} \\ y \leq 36 - x \\ y \leq \frac{x}{2} \\ y \geq 4 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul, verde y roja, y por encima de la recta horizontal negra. Comprobamos que el punto P(20, 5) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$\left.\begin{array}{l} 5 \leq \frac{44-20}{2} \\ 5 \leq 36 - 20 \\ 5 \leq \frac{20}{2} \\ 5 \geq 4 \\ 20 \geq 0;\ 5 \geq 0 \end{array}\right\}$ ¡Se cumplen todas!

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



c) Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 20000x + 32000y$ en cada vértice en busca del máximo.

A(8, 4) → $B(8,4) = 20000 \cdot 8 + 32000 \cdot 4 = 288000$
B(22, 11) → $B(22,11) = 20000 \cdot 22 + 32000 \cdot 11 = 792000$
C(28, 8) → $B(28,8) = 20000 \cdot 28 + 32000 \cdot 8 = 816000$ *Máximo*
D(32, 4) → $B(32,4) = 20000 \cdot 32 + 32000 \cdot 4 = 768000$

El beneficio máximo es de 816 000 € y se consigue en el vértice C(28, 8), que significa que deben hacerse 28 viviendas del tipo A y 8 del tipo B para conseguir un beneficio máximo de 816000 euros.

c) La empresa disponía de sus propios fondos con 0.20 · 4400000 = 880000 € para la construcción de las viviendas. El banco le concede un préstamo de 0.7 · 4400000 = 3080000 €. En total la empresa dispone de 3080000 + 880000 =3960000 €.
El coste de las viviendas ha subido un 15%, por lo que la construcción de una vivienda del tipo A cuesta 1.15 · 100000 = 115000 € y una del tipo B pasa a costar su construcción 1.15 · 200000 = 230000 €.
La construcción de 24 viviendas del tipo A cuesta 24 · 115000 = 2760000 € y la construcción de 5 viviendas del tipo B cuesta 5 · 230000 = 1150000.
La construcción de 24 viviendas del tipo A y 5 del tipo B cuesta 2760000 + 1150000 = 3910000 €.
Como se dispone de 3960000 € le alcanza para la construcción de las viviendas, sobrando 50000 euros.