UCLM Universidad Castilla-La Mancha

Prueba de acceso a la Universidad
Curso 2026/2027
Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los **ejercicios 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Solo están permitidas **las calculadoras de tipo 1 y 2. Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos.**
Duración de la prueba: 90 minutos.

Ejercicio 1.- En una ciudad, el 40% de los desplazamientos laborales se hacen en transporte público, el 45% en transporte privado y el 15% restante, caminando. En estos tipos de desplazamientos, las mujeres suponen el 55% en el transporte público, el 40% en el privado y el 60% entre las personas que se desplazan caminando.

a) Calcula la probabilidad de que un desplazamiento laboral, elegido al azar, corresponda a una mujer. **(1 punto)**
b) Si dicho desplazamiento laboral es realizado por una mujer, calcule la probabilidad de que haya sido hecho caminando. **(1 punto)**
c) Si se seleccionan al azar dos desplazamientos laborales, calcule la probabilidad de que uno sea en transporte público y otro en transporte privado. **(0.5 puntos)**

Ejercicio 2.- Una determinada compañía de teatro presenta una obra en el Recinto Ferial de Albacete, dando sólo tres representaciones. Se sabe que el número de espectadores que asiste a la segunda representación se incrementó en un 12 % respecto a la primera, que en la tercera representación asistieron 336 espectadores menos que a la segunda y que el número de espectadores de la primera superó en 36 espectadores el de la tercera. Calcular el número de espectadores que asistieron a cada representación.

(Planteamiento: 1.5 puntos. Resolución: 1 punto)

Ejercicio 3.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} -x^2-3x+10 & si\ x\le k \\ x^2-4x+9 & si\ x>k \end{cases}$

a.1) ¿Para qué valores de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**
a.2) Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.5 puntos)**
a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. **(0.5 puntos)**
a.4) Determina el área encerrada entre las dos curvas que definen la función $f(x)$. **(0.5 puntos)**

Apartado b) El índice de popularidad de cierto gobernante era de 2.5 puntos cuando inició su mandato. A los 50 días alcanzó el máximo índice de popularidad con 7.2 puntos. Sabiendo que durante los primeros 100 días de su mandato dicho índice fue cambiando de acuerdo con la expresión $I(t)=At^2+Bt+C$ con $0\le t\le 100$,

b.1) Determina, de forma justificada, el valor de las constantes A, B y C. **(1.5 puntos)**

b.2) Halla todas las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, donde a, $b \in \mathbb{R}$, distinta de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

Ejercicio 4.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) El café mezcla se compone de la mezcla de otros dos, natural y tostado. Se tienen 500 kg de café natural y 500 kg de café tostado. En la mezcla, el doble de la cantidad de tostado debe ser menor o igual que el triple de la cantidad de natural. Para satisfacer la demanda, la producción debe ser mayor o igual a 600 kg de café. Sabiendo que cada kg de café natural cuesta 5 € el kg y cada kg de tostado cuesta 4 €,

a.1) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(1.5 puntos)**

a.2) Determina los kg de café tostado y natural que deben emplearse para hacer un café mezcla de coste mínimo que cumpla con los requisitos anteriores y obtén ese coste mínimo. **(1 punto)**

Apartado b) Una empresa envasa agua mineral en botellas de 1 litro. La cantidad de agua que la máquina embotelladora inyecta en cada botella sigue una distribución normal con una desviación típica de σ = 0.05 litros. Se toma una muestra aleatoria de 16 botellas y se observa que el contenido medio es de 0.98 litros. Con un nivel de confianza del 95%,

b.1) Obtén un intervalo de confianza para el contenido medio poblacional de una botella. **(1 punto)**

b.2) Explica, justificando la respuesta, cuál sería la amplitud del intervalo de confianza anterior si se aumenta la muestra a 64 botellas. **(0.75 puntos)**

b.3) Si se quiere que un contenido medio de 0.96 litros no esté contenido en el intervalo del primer apartado, justifique si se debe aumentar o disminuir el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONES

Ejercicio 1.- En una ciudad, el 40% de los desplazamientos laborales se hacen en transporte público, el 45% en transporte privado y el 15% restante, caminando. En estos tipos de desplazamientos, las mujeres suponen el 55% en el transporte público, el 40% en el privado y el 60% entre las personas que se desplazan caminando.

a) Calcula la probabilidad de que un desplazamiento laboral, elegido al azar, corresponda a una mujer. **(1 punto)**

b) Si dicho desplazamiento laboral es realizado por una mujer, calcule la probabilidad de que haya sido hecho caminando. **(1 punto)**

c) Si se seleccionan al azar dos desplazamientos laborales, calcule la probabilidad de que uno sea en transporte público y otro en transporte privado. **(0.5 puntos)**

Supongamos que son 100 los desplazamientos laborales que se realizan en una ciudad.
Los datos porcentuales dados en el problema los traducimos a valores absolutos.
De los 100 desplazamientos laborales 40 se hacen en transporte público, 45 en transporte privado y los 15 restantes, caminando.
En estos tipos de desplazamientos, las mujeres suponen el 55% en el transporte público → $40 \cdot 0.55 = 22$ mujeres usan el transporte público.
Las mujeres suponen el 40% en el privado → $45 \cdot 0.40 = 18$ mujeres usan el transporte privado.
Las mujeres suponen el 60% entre las personas que se desplazan caminando → $15 \cdot 0.6 = 9$ mujeres se desplazan caminando.
Colocamos estos datos en una tabla.

	T. público	T. privado	Caminando	
Mujeres	22	18	9	
Hombres				
TOTALES	40	45	15	100

Completamos la tabla.

	T. público	T. privado	Caminando	
Mujeres	22	18	9	**49**
Hombres	**18**	**27**	**6**	**51**
TOTALES	40	45	15	100

a) De los 100 desplazamientos 49 los realizan mujeres. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que un desplazamiento laboral, elegido al azar, corresponda a una mujer vale $\frac{49}{100} = 0.49$.

b) Son 49 los desplazamientos que realizan mujeres y solo 9 son caminando. Aplicando la regla de Laplace si un desplazamiento laboral es realizado por una mujer, la probabilidad de que haya sido hecho caminando vale $\frac{9}{49} \simeq 0.1837$

c) Llamamos TPu a "usar el transporte público en un desplazamiento" y TPr a "usar el transporte privado en un desplazamiento. Consideramos los sucesos independientes. La probabilidad de que de dos desplazamientos elegidos al azar uno sea en transporte público y otro en transporte privado es:

$$P\left(\left(Tpu1\cap Tpr2\right)\cup\left(Tpr1\cap Tpu2\right)\right)=P\left(Tpu1\cap Tpr2\right)+P\left(Tpr1\cap Tpu2\right)=$$

$$=P\left(TPu1\right)P\left(T\,\mathrm{Pr}\,2\right)+P\left(T\,\mathrm{Pr}1\right)P\left(TPu2\right)=\frac{40}{100}\cdot\frac{45}{100}+\frac{45}{100}\cdot\frac{40}{100}=\boxed{0.36}$$

Si se seleccionan al azar dos desplazamientos laborales la probabilidad de que uno sea en transporte público y otro en transporte privado es de 0.36.

Ejercicio 2.- Una determinada compañía de teatro presenta una obra en el Recinto Ferial de Albacete, dando sólo tres representaciones. Se sabe que el número de espectadores que asiste a la segunda representación se incrementó en un 12 % respecto a la primera, que en la tercera representación asistieron 336 espectadores menos que a la segunda y que el número de espectadores de la primera superó en 36 espectadores el de la tercera. Calcular el número de espectadores que asistieron a cada representación.

(Planteamiento: 1.5 puntos. Resolución: 1 punto)

Llamamos "x", "y", "z" al número de espectadores que asistieron a la primera, segunda y tercera representación, respectivamente.
Obtenemos las ecuaciones asociadas a cada una de las informaciones proporcionadas.

"El número de espectadores que asiste a la segunda representación se incrementó en un 12% respecto a la primera" → $y = 1.12x$

"En la tercera representación asistieron 336 espectadores menos que a la segunda" → $z = y - 336$.

"El número de espectadores de la primera superó en 36 espectadores el de la tercera" → $x = 36 + z$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1.12x \\ z = y - 336 \\ x = 36 + z \end{array}\right\}.$$

Resolvemos el sistema planteado.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1.12x \\ z = y - 336 \\ x = 36 + z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z = 1.12x - 336 \\ x = z + 36 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1.12x - 336 + 36 \Rightarrow 300 = 0.12x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{300}{0.12} = 2500} \Rightarrow \boxed{y = 1.12 \cdot 2500 = 2800} \Rightarrow \boxed{z = 2800 - 336 = 2464}$$

Asistieron 2500 espectadores a la primera representación, 2800 a la segunda y 2464 a la tercera.

Ejercicio 3.- Apartado a) Se considera la función $f(x)=\begin{cases}-x^2-3x+10 & si\ x\le k\\ x^2-4x+9 & si\ x>k\end{cases}$

a.1) ¿Para qué valores de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**

a.2) Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.5 puntos)**

a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. **(0.5 puntos)**

a.4) Determina el área encerrada entre las dos curvas que definen la función $f(x)$. **(0.5 puntos)**

a.1) Para que la función sea continua en $x=k$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(k)=-x^2-3x+10=-k^2-3k+10\\ \lim\limits_{x\to k^-} f(x)=\lim\limits_{x\to k^-} -x^2-3x+10=-k^2-3k+10\\ \lim\limits_{x\to k^+} f(x)=\lim\limits_{x\to k^+} x^2-4x+9=k^2-4k+9\\ \lim\limits_{x\to k^-} f(x)=\lim\limits_{x\to k^+} f(x)=f(k)\end{array}\right\}\Rightarrow k^2-4k+9=-k^2-3k+10\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k^2-k-1=0\Rightarrow k=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm 3}{4}=\begin{cases}\dfrac{1+3}{4}=\boxed{1=k}\\ \dfrac{1-3}{4}=\boxed{\dfrac{-1}{2}=k}\end{cases}$$

La función es continua para $k=1$ y $k=\dfrac{-1}{2}$.

a.2) Si $k = 1$ la función es continua y queda $f(x)=\begin{cases}-x^2-3x+10 & si\ x\le 1\\ x^2-4x+9 & si\ x>1\end{cases}$. Buscamos los puntos críticos de la función.

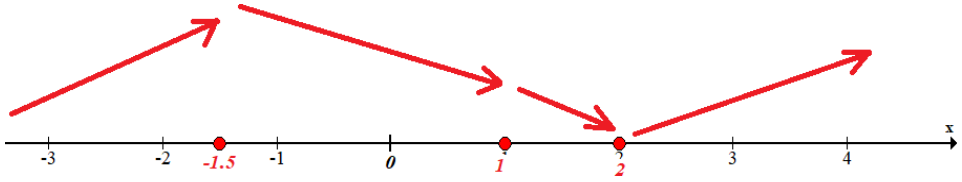
$$f(x)=\begin{cases}-x^2-3x+10 & si\ x\le 1\\ x^2-4x+9 & si\ x>1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-2x-3 & si\ x<1\\ 2x-4 & si\ x>1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}-2x-3=0\to 2x=-3\to x=\dfrac{-3}{2}=-1.5\in(-\infty,1)\\ 2x-4=0\to x=2\in(1,+\infty)\end{cases}\Rightarrow$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los puntos críticos y $x=1$.

- En el intervalo $(-\infty,-1.5)$ la derivada es $f'(x)=-2x-3$, tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=-2(-2)-3=1>0$. La función crece en $(-\infty,-1.5)$.
- En el intervalo $(-1.5,1)$ la derivada es $f'(x)=-2x-3$, tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=-2\cdot 0-3=-3<0$. La función decrece en $(-1.5,1)$.
- En el intervalo $(1,2)$ la derivada es $f'(x)=2x-4$, tomamos $x=1.5$ y la derivada vale $f'(1.5)=2\cdot 1.5-4=-1<0$. La función decrece en $(1,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ la derivada es $f'(x)=2x-4$, tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3)=2\cdot 3-4=2>0$. La función crece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en $x=-1.5$.
Como $f(-1.5)=-(-1.5)^2-3(-1.5)+10=-2.25+4.5+10=12.25$ el máximo relativo tiene coordenadas (–1.5, 12.25).
La función presenta un mínimo relativo en $x=2$. Como $f(2)=2^2-4\cdot 2+9=4-8+9=5$ el mínimo relativo tiene coordenadas (2, 5).

a.3) La función es continua y observando el esquema obtenido en el apartado anterior podemos afirmar que la función crece en $(-\infty,-1.5)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(-1.5,2)$.



a.4) Determinamos el área del recinto limitado por las funciones $g(x)=-x^2-3x+10$ y $h(x)=x^2-4x+9$. Hallamos los puntos de corte de las dos parábolas.

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=-x^2-3x+10 \\ h(x)=x^2-4x+9 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-4x+9=-x^2-3x+10 \Rightarrow 2x^2-x-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm 3}{4}=\begin{cases}\dfrac{1+3}{4}=\boxed{1=x} \\ \dfrac{1-3}{4}=\boxed{\dfrac{-1}{2}=x}\end{cases}$$

En el intervalo $\left(\frac{-1}{2},1\right)$ tomamos $x=0$ y se cumple que $g(0)=-0^2-3\cdot 0+10=10$ y $h(0)=0^2-4\cdot 0+9=9$. Como $g(0)=10>9=h(0)$ podemos afirmar que en el intervalo $\left(\frac{-1}{2},1\right)$ se cumple que $g(x)>f(x)$.

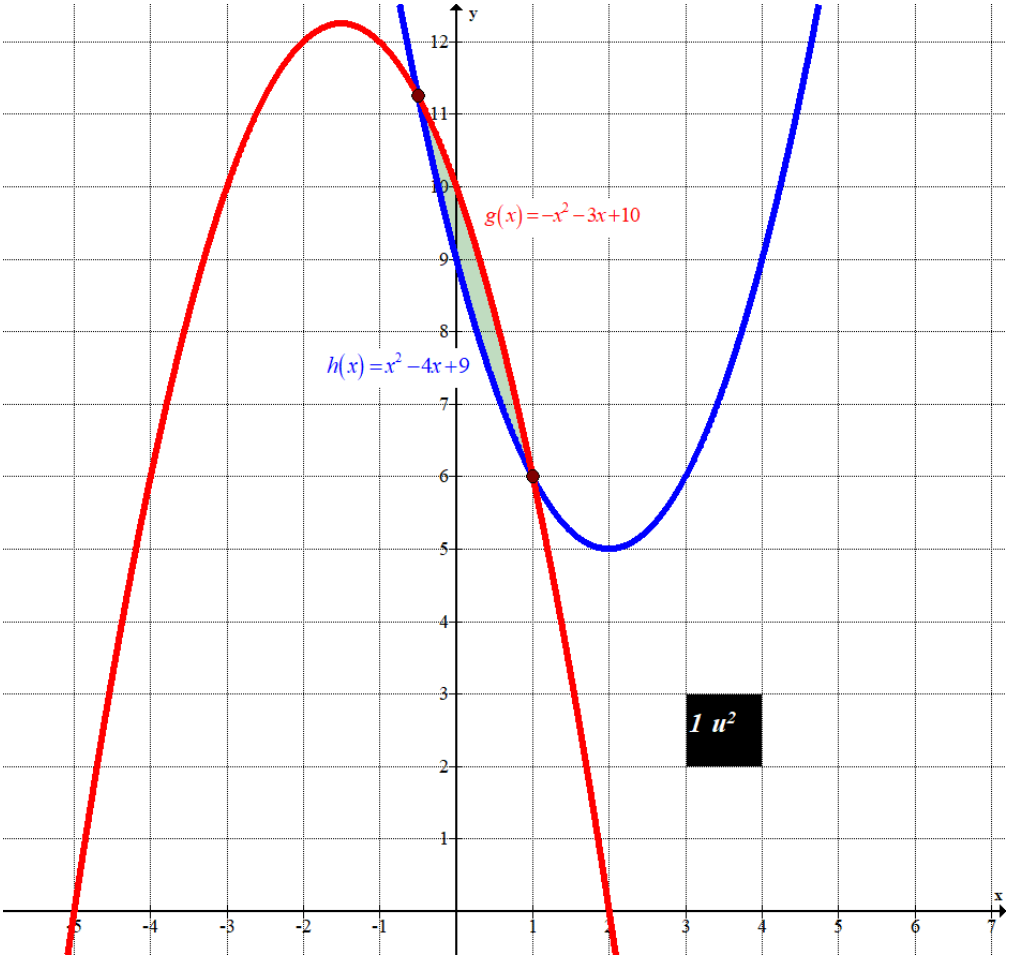
El área del recinto limitado por las funciones $g(x)$ y $h(x)$ es el valor de la integral definida de $\frac{-1}{2}$ a 1 de $g(x)-h(x)$.

$$Área=\int_{-0.5}^{1} g(x)-h(x)\,dx=\int_{-0.5}^{1} -x^2-3x+10-\left(x^2-4x+9\right)dx=\int_{-0.5}^{1} -2x^2+x+1dx=$$

$$=\left[\frac{-2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-0.5}^{1}=\left[\frac{-2\cdot 1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+1\right]-\left[\frac{-2(-0.5)^3}{3}+\frac{(-0.5)^2}{2}-0.5\right]=$$

$$=\frac{-2}{3}+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{12}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{9}{8}=1.125u^2}$$

El área del recinto limitado por las funciones $g(x)=-x^2-3x+10$ y $h(x)=x^2-4x+9$ tiene un valor de $\frac{9}{8}=1.125$ unidades cuadradas.



Ejercicio 3.- Apartado b) El índice de popularidad de cierto gobernante era de 2.5 puntos cuando inició su mandato. A los 50 días alcanzó el máximo índice de popularidad con 7.2 puntos. Sabiendo que durante los primeros 100 días de su mandato dicho índice fue cambiando de acuerdo con la expresión $I(t)=At^2+Bt+C$ con $0\le t\le 100$,

b.1) Determina, de forma justificada, el valor de las constantes A, B y C. **(1.5 puntos)**

b.2) Halla todas las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, distinta de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2-A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

b.1) Sabemos que $I(0)=2.5$.

$$\left.\begin{matrix} I(t)=At^2+Bt+C \\ I(0)=2.5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2.5=A\cdot 0^2+B\cdot 0+C \Rightarrow \boxed{C=2.5}$$

La función queda $I(t)=At^2+Bt+2.5$. También sabemos que $I(50)=7.2$.

$$\left.\begin{matrix} I(t)=At^2+Bt+2.5 \\ I(50)=7.2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7.2=A\cdot 50^2+B\cdot 50+2.5 \Rightarrow 4.7=2500A+50B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4.7}{50}=50A+B \Rightarrow \boxed{B=0.094-50A}$$

A los 50 días alcanzó el máximo índice de popularidad por lo que la derivada de la función se anula para $t=50 \rightarrow I'(50)=0$.

$$\left.\begin{matrix} I(t)=At^2+Bt+2.5 \Rightarrow I'(t)=2At+B \\ I'(50)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0=2A\cdot 50+B \Rightarrow \boxed{B=-100A}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix} B=0.094-50A \\ B=-100A \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0.094-50A=-100A \Rightarrow 50A=-0.094 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{-0.094}{50}=-0.00188} \Rightarrow \boxed{B=-100(-0.00188)=0.188}$$

Los valores buscados son $A=-0.00188$, $B=0.188$ y $C=2.5$.

b.2) Si se debe cumplir $A^2-A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces debe ser $A^2=A$.

$$A^2=\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+0 & a^2+ab \\ 0+0 & 0+b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & a^2+ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2=A\Rightarrow\begin{pmatrix} a^2 & a^2+ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix} a^2=a \\ a^2+ab=a \\ b^2=b \end{matrix}\right\}\Rightarrow\ldots$$

Nos dicen que la matriz A es distinta de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que los valores de a y b no pueden ser simultáneamente cero. Analizamos tres situaciones diferentes:

CASO 1. Si $a\neq 0$ y $b\neq 0$.

$$\left.\begin{matrix} a^2=a \\ a^2+a\cdot b=a \\ b^2=b \end{matrix}\right\}\begin{matrix} a^2-a=0 \\ \rightarrow a(a+b)=a \\ b^2-b=0 \end{matrix}\left.\begin{matrix} \\ \rightarrow \\ \\ \end{matrix}\right\}\begin{matrix} a(a-1)=0 \\ \rightarrow a(a+b)=a \\ b(b-1)=0 \end{matrix}\left.\begin{matrix} \\ \rightarrow \\ \\ \end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix} a\neq 0 \\ b\neq 0 \end{matrix}\right\}\rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} a-1=0 \\ \rightarrow a+b=1 \\ b-1=0 \end{matrix}\right\}\begin{matrix} a=1 \\ \rightarrow a+b=1 \\ b=1 \end{matrix}\left.\begin{matrix} \\ \rightarrow \\ \\ \end{matrix}\right\}\rightarrow 1+1=2\rightarrow \text{¡Imposible!}$$

CASO 2. Si $a=0$ y $b\neq 0$.

$$Si\ a=0\rightarrow\left.\begin{matrix} 0^2=0 \\ 0^2+0\cdot b=0 \\ b^2=b \end{matrix}\right\}\rightarrow b^2=b\rightarrow b^2-b=0\rightarrow b(b-1)=0\rightarrow$$

$$\rightarrow\{b\neq 0\}\rightarrow b=1\rightarrow\boxed{A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

CASO 3. Si $a\neq 0$ y $b=0$.

$$Si\ b=0\rightarrow\left.\begin{matrix} a^2=a \\ a^2+a\cdot 0=a \\ 0^2=0 \end{matrix}\right\}\rightarrow a^2=a\rightarrow a^2-a=0\rightarrow a(a-1)=0\rightarrow$$

$$\rightarrow\{a\neq 0\}\rightarrow a=1\rightarrow\boxed{A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Las dos soluciones del problema son $A_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.- Apartado a) El café mezcla se compone de la mezcla de otros dos, natural y tostado. Se tienen 500 kg de café natural y 500 kg de café tostado. En la mezcla, el doble de la cantidad de tostado debe ser menor o igual que el triple de la cantidad de natural. Para satisfacer la demanda, la producción debe ser mayor o igual a 600 kg de café. Sabiendo que cada kg de café natural cuesta 5 € el kg y cada kg de tostado cuesta 4 €,

a.1) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(1.5 puntos)**

a.2) Determina los kg de café tostado y natural que deben emplearse para hacer un café mezcla de coste mínimo que cumpla con los requisitos anteriores y obtén ese coste mínimo. **(1 punto)**

a.1) Llamamos "x" a los kilos de café natural utilizado en la mezcla e "y" a los kilos de café tostado utilizado en la mezcla.

La función objetivo es el coste del café mezcla obtenido y que viene expresado como $C(x,y)=5x+4y$. Deseamos minimizar dicho coste.

Obtenemos las inecuaciones asociadas al ejercicio.

"Se tienen 500 kg de café natural y 500 kg de café tostado" → $x\le 500;\ y\le 500$.

"En la mezcla, el doble de la cantidad de tostado debe ser menor o igual que el triple de la cantidad de natural" → $2y\le 3x$.

"La producción debe ser mayor o igual a 600 kg de café" → $x+y\ge 600$.

"Las cantidades deben ser positivas" → $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Reunimos estas restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\ge 600 \\ x\le 500;\ y\le 500 \\ 2y\le 3x \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\ge 600 \\ x\le 500 \\ y\le 500 \\ y\le \dfrac{3}{2}x \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$x+y=600$

x	$y=600-x$
0	600
240	360
500	100

$y=\frac{3}{2}x$

x	$y=\frac{3}{2}x$
0	0
240	360
300	450

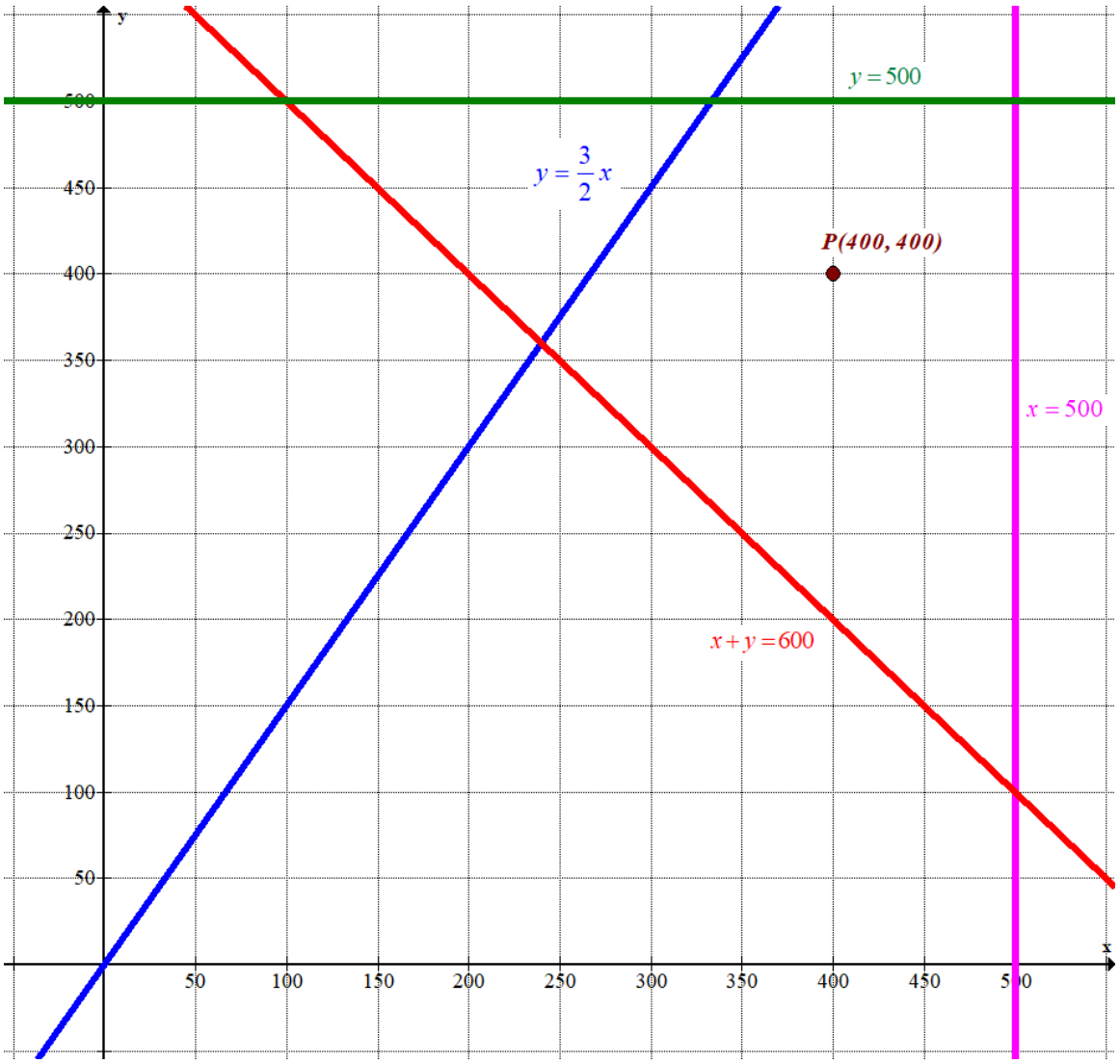
$y=500$

x	$y=500$
0	500
100	500
500	500

$x=500$

$x=500$	y
500	0
500	100
500	500

Primer cuadrante

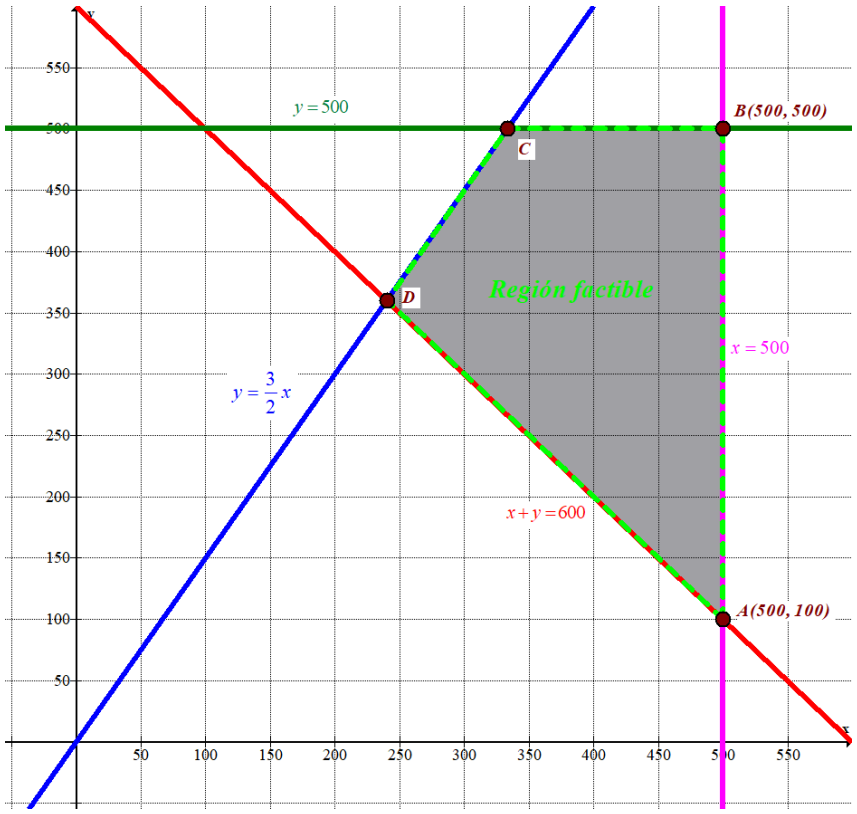


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\geq 600 \\ x\leq 500 \\ y\leq 500 \\ y\leq \frac{3}{2}x \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de la recta oblicua azul y la recta horizontal verde, por encima de la recta oblicua roja, y a la izquierda de la recta vertical rosa.

Comprobamos si el punto P(400, 400) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 400+400\geq 600 \\ 400\leq 500 \\ 400\leq 500 \\ 400\leq \frac{3}{2}\cdot 400 \\ 400\geq 0;\ 400\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 800\geq 600 \\ 400\leq 500 \\ 400\leq 500 \\ 400\leq 600 \\ 400\geq 0;\ 400\geq 0 \end{array}\right\}$$ ¡Se cumplen todas!

Coloreamos de gris la región factible en el dibujo siguiente.



Determinamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \rightarrow \left.\begin{matrix} y = 500 \\ y = \frac{3}{2}x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 500 = \frac{3}{2}x \Rightarrow x = \frac{500 \cdot 2}{3} = \frac{1000}{3} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{1000}{3}, 500\right)}$$

$$D \rightarrow \left.\begin{matrix} x + y = 600 \\ y = \frac{3}{2}x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + \frac{3}{2}x = 600 \Rightarrow 2x + 3x = 1200 \Rightarrow 5x = 1200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1200}{5} = 240 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \cdot 240 = 360 \Rightarrow \boxed{D(240, 360)}$$

a.2) Valoramos la función coste $C(x, y) = 5x + 4y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor mínimo.

A(500, 100) → $C(500, 100) = 5 \cdot 500 + 4 \cdot 100 = 2900$

B(500, 500) → $C(500, 500) = 5 \cdot 500 + 4 \cdot 500 = 4500$

$C\left(\frac{1000}{3}, 500\right) \rightarrow C\left(\frac{1000}{3}, 500\right) = 5 \cdot \frac{1000}{3} + 4 \cdot 500 = \frac{11000}{3} \simeq 36666.6$

D(240, 360) → $C(240, 360) = 5 \cdot 240 + 4 \cdot 360 = 2640$ *Mínimo*

El mínimo valor es 2640 y se consigue en el vértice D(240, 360).
El mínimo coste que se puede conseguir es de 2640 euros con la utilización de 240 kilos de café natural y 360 kilos de café tostado.

Ejercicio 4.- Apartado b) Una empresa envasa agua mineral en botellas de 1 litro. La cantidad de agua que la máquina embotelladora inyecta en cada botella sigue una distribución normal con una desviación típica de σ = 0.05 litros. Se toma una muestra aleatoria de 16 botellas y se observa que el contenido medio es de 0.98 litros. Con un nivel de confianza del 95%,

b.1) Obtén un intervalo de confianza para el contenido medio poblacional de una botella. **(1 punto)**

b.2) Explica, justificando la respuesta, cuál sería la amplitud del intervalo de confianza anterior si se aumenta la muestra a 64 botellas. **(0.75 puntos)**

b.3) Si se quiere que un contenido medio de 0.96 litros no esté contenido en el intervalo del primer apartado, justifique si se debe aumentar o disminuir el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**

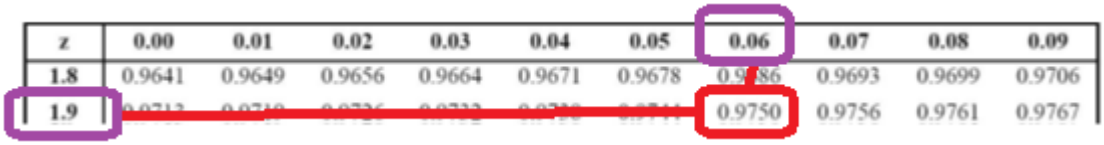
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

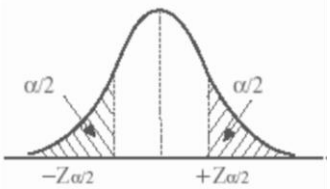
b.1) Sea X = La cantidad de agua, en litros, que la máquina embotelladora inyecta en cada botella. X = N(**μ**, 0.05).

Tamaño de la muestra n = 16. La media muestral es $\bar{x} = 0.98$ litros.

Con un nivel de confianza del 95 % determinamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$





Calculamos el error máximo admisible.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.05}{\sqrt{16}} = 0.0245 \text{ litros}$$

El intervalo de confianza para la media de la cantidad de agua que la máquina embotelladora inyecta en cada botella es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(0.98 - 0.0245,\ 0.98 + 0.0245\right) = \left(0.9555,\ 1.0045\right)$$

b.2) Con un tamaño de la muestra n = 64 botellas calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.05}{\sqrt{64}} = 0.01225 \text{ litros}$$

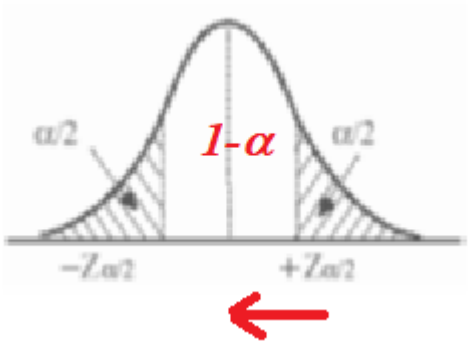
La amplitud del intervalo de confianza para este tamaño de la muestra es 2 · 0.01225 = 0.0245 litros. La amplitud del intervalo se reduce a la mitad.

b.3) Para que 0.96 no pertenezca al intervalo de confianza el error máximo debe ser menor de 0.98 – 0.96 = 0.02.

El error viene dado por la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{0.05}{\sqrt{16}} = 0.015 \cdot z_{\alpha/2}$.

Para que el error sea más pequeño debe ser más pequeño el valor de $z_{\alpha/2}$. Y para conseguirlo debemos disminuir el valor del nivel de confianza $1-\alpha$.

Conclusión: Se debe disminuir el nivel de confianza para conseguir que la media de 0,96 litros no pertenezca al intervalo de confianza que obtengamos.



Lo comprobamos tomando un nivel de confianza del 80.3 %.

Tamaño de la muestra n = 16. La media muestral es $\bar{x} = 0.98$ litros.

Con un nivel de confianza del 80.3 % obtenemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.803 \rightarrow \alpha = 0.197 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0985 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.9015 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.29$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.29 \cdot \frac{0.05}{\sqrt{16}} = 0.016125 \text{ litros}$$

El intervalo de confianza para la cantidad de agua que la máquina embotelladora inyecta en cada botella es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(0.98 - 0.016125, 0.98 + 0.016125\right) = \left(0.963875, 0.996125\right)$$

La media de 0.96 litros ya no pertenece al intervalo de confianza obtenido con un nivel de confianza del 80.3% (menor que 95%).