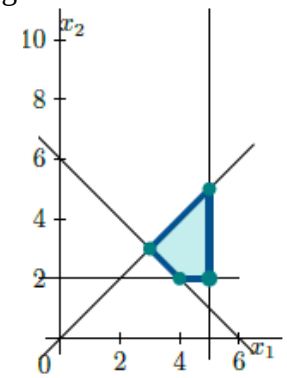
	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso **2026-2027** **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	MODELO 2027

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

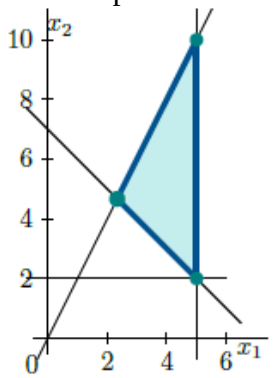
El examen consta de **4 preguntas**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección. **Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.**
CALIFICACIÓN: cada pregunta se valorará sobre 2,5 puntos.
DURACIÓN: 90 minutos.

PREGUNTA 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Esta pregunta no tiene opcionalidad.
El restaurante de un reconocido chef atrae la atención de sus clientes por el prestigio gastronómico de sus platos elaborados siempre con productos de primera calidad. Sin embargo, el mayor atractivo para la clientela es su salsa secreta. Por ello, la gestión eficiente de esta receta y su correcto uso en los platos que conforman su oferta gastronómica es de vital importancia.
La receta requiere el uso de dos ingredientes I_1 e I_2 cuyo nombre no puede desvelarse. Su mezcla será diluida posteriormente en un caldo previamente elaborado por el chef para obtener un litro de salsa. Para que la receta de la salsa secreta sea satisfactoria, es necesario que se usen a lo sumo 5 g del ingrediente I_1 y al menos 2 g del ingrediente I_2. La suma de las cantidades de ambos ingredientes debe ser al menos 6 g y la cantidad de ingrediente I_2 no puede exceder dos veces la cantidad del ingrediente I_1. Además, se sabe que los costes por cada gramo de los ingredientes I_1 e I_2 son respectivamente 20 y 30 céntimos de euro.

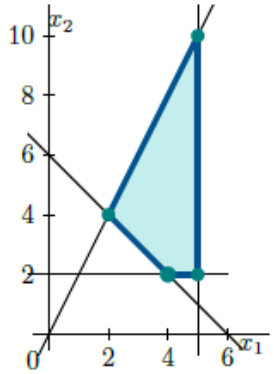
1.a) (0,5 puntos) Si x_1 y x_2 son las cantidades utilizadas de los ingredientes I_1 e I_2 respectivamente, indique cuál de las siguientes regiones representa el conjunto de valores que pueden tomar los ingredientes de acuerdo con el enunciado del problema.



Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3

1.b) (1 punto) Obtenga las cantidades de los ingredientes en la mezcla de tal modo que minimice su coste, manteniendo las propiedades de calidad de la misma. Indique el coste de un litro de salsa elaborada.
1.c) (1 punto) El chef ha preparado 10 litros de salsa secreta para elaborar 3 platos diferentes P_1, P_2 y P_3 para los comensales del servicio de cena de esta noche. Para evitar el desperdicio de salsa secreta, se debe consumir la totalidad de la salsa. Además, se sabe que el plato P_1 usa exactamente el doble de cantidad de salsa secreta que el plato P_2 y que los platos P_2 y P_3 usan conjuntamente 4 litros en su preparación. ¿Es posible realizar este reparto de salsa secreta entre los tres platos? En caso afirmativo, obtenga la cantidad de salsa secreta que necesitará cada plato.

PREGUNTA 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos opciones, o bien 2.1 o bien 2.2.
2.1 Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x-5}.$$

2.1.a) (1,5 puntos) Determine el dominio y las asíntotas de esta función.
2.1.b) (1 punto) Determine la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x_0=0$.

2.2 Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases} e^{3x}-x+a & x<0 \\ -x^3+2x^2 & x\geq 0 \end{cases}$$

2.2.a) (1,2 puntos) Determine el valor del parámetro real *a* para que la función *f(x)* sea continua.
2.2.b) (1,3 puntos) Determine el área del recinto acotado por la gráfica de *f(x)*, el eje de abscisas de modo que $x\geq 0$ y $f(x)\geq 0$.

PREGUNTA 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos opciones, o bien 3.1 o bien 3.2.

3.1 En un club de lectura de un municipio de Madrid se sabe que al 30% de los socios les gustan los libros de novela histórica, mientras que al 50% de los socios les gustan los libros de ciencia ficción. Además se sabe que la probabilidad de que a un socio le gusten los libros de novela histórica sabiendo que le gustan los libros de ciencia ficción es 0,2.

3.1.a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que a un socio no le gusten los libros ni de novela histórica ni de ciencia ficción.
3.1.b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que a un socio le guste la novela histórica, sabiendo que no le gustan los libros de ciencia ficción.
3.1.c) (0,5 puntos) Justifique razonadamente si los sucesos de gustos de novela histórica y ciencia ficción son independientes y/o incompatibles.

3.2 En la plantilla de un equipo de balonmano de la liga Asobal se sabe que el 50% de los jugadores son nacionales, el 40% son comunitarios y el 10% restante extracomunitarios. Se sabe que la probabilidad de que un jugador sea elegido para jugar en su selección nacional es del 80% si el jugador es nacional, del 50% si el jugador es comunitario y del 40% si el jugador es extracomunitario.

3.2.a) (1,3 puntos) Determine la probabilidad de que un jugador del equipo de balonmano resulte seleccionado para jugar en su selección nacional.
3.2.b) (1,2 puntos) Determine la probabilidad de que, elegido un jugador que no va a ser convocado por su selección nacional, sea nacional.

PREGUNTA 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos opciones, o bien 4.1 o bien 4.2.

4.1 El número de horas que tarda un jugador en completar todas las fases de un determinado videojuego se comporta según una distribución normal cuya desviación típica es 20 horas.

4.1.a) (1 punto) Con un nivel de confianza del 97% se ha obtenido el intervalo de confianza (116,764; 120,236) para el tiempo medio en superar el juego para una determinada muestra. Determine el tiempo medio empleado por los jugadores de la muestra en completar el videojuego y el tamaño de la muestra utilizada.
4.1.b) (1,5 puntos) Obtenga el tamaño mínimo de una muestra para que el error del intervalo de confianza sea como mucho 5 horas asumiendo un nivel de confianza del 98,8%.

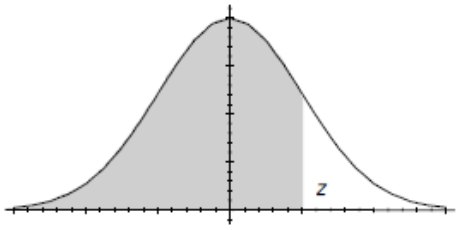
4.2 El 90% de los atletas que se inscriben en una maratón completan la totalidad de sus 42,195 km.

4.2.a) (1 punto) En la última maratón celebrada en Madrid, se tomó una muestra de 100 atletas de los cuales, 85 terminaron la maratón. Obtenga un intervalo de confianza al 98,4% de confianza para la proporción de atletas que terminan la carrera.
4.2.b) (1,5 puntos) Se sabe que en la próxima maratón de la temporada hay 400 atletas inscritos. Obtenga la probabilidad de que terminen la carrera a lo sumo 352 atletas.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

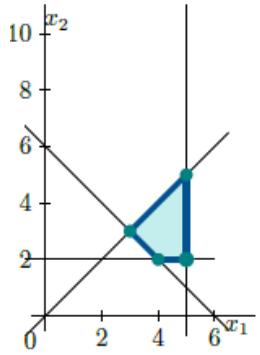
SOLUCIONES

PREGUNTA 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Esta pregunta no tiene opcionalidad.

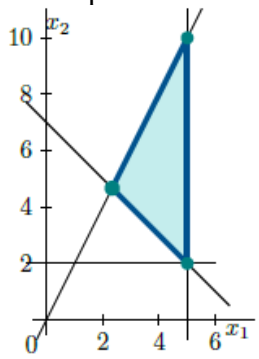
El restaurante de un reconocido chef atrae la atención de sus clientes por el prestigio gastronómico de sus platos elaborados siempre con productos de primera calidad. Sin embargo, el mayor atractivo para la clientela es su salsa secreta. Por ello, la gestión eficiente de esta receta y su correcto uso en los platos que conforman su oferta gastronómica es de vital importancia.

La receta requiere el uso de dos ingredientes I_1 e I_2 cuyo nombre no puede desvelarse. Su mezcla será diluida posteriormente en un caldo previamente elaborado por el chef para obtener un litro de salsa. Para que la receta de la salsa secreta sea satisfactoria, es necesario que se usen a lo sumo 5 g del ingrediente I_1 y al menos 2 g del ingrediente I_2. La suma de las cantidades de ambos ingredientes debe ser al menos 6 g y la cantidad de ingrediente I_2 no puede exceder dos veces la cantidad del ingrediente I_1. Además, se sabe que los costes por cada gramo de los ingredientes I_1 e I_2 son respectivamente 20 y 30 céntimos de euro.

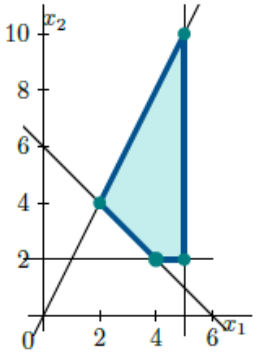
1.a) (0,5 puntos) Si x_1 y x_2 son las cantidades utilizadas de los ingredientes I_1 e I_2 respectivamente, indique cuál de las siguientes regiones representa el conjunto de valores que pueden tomar los ingredientes de acuerdo con el enunciado del problema.



Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3

1.b) (1 punto) Obtenga las cantidades de los ingredientes en la mezcla de tal modo que minimice su coste, manteniendo las propiedades de calidad de la misma. Indique el coste de un litro de salsa elaborada.

1.c) (1 punto) El chef ha preparado 10 litros de salsa secreta para elaborar 3 platos diferentes P_1, P_2 y P_3 para los comensales del servicio de cena de esta noche. Para evitar el desperdicio de salsa secreta, se debe consumir la totalidad de la salsa. Además, se sabe que el plato P_1 usa exactamente el doble de cantidad de salsa secreta que el plato P_2 y que los platos P_2 y P_3 usan conjuntamente 4 litros en su preparación. ¿Es posible realizar este reparto de salsa secreta entre los tres platos? En caso afirmativo, obtenga la cantidad de salsa secreta que necesitará cada plato.

1.a) Obtenemos las inecuaciones que definen la región factible.

Es necesario que se usen a lo sumo 5 g del ingrediente I_1 y al menos 2 g del ingrediente I_2 → $x_1 \le 5;\ x_2 \ge 2$.

La suma de las cantidades de ambos ingredientes debe ser al menos 6 g → $x_1 + x_2 \ge 6$.

La cantidad de ingrediente I_2 no puede exceder dos veces la cantidad del ingrediente I_1 → $x_2 \le 2x_1$.

Las cantidades deben ser positivas → $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$.

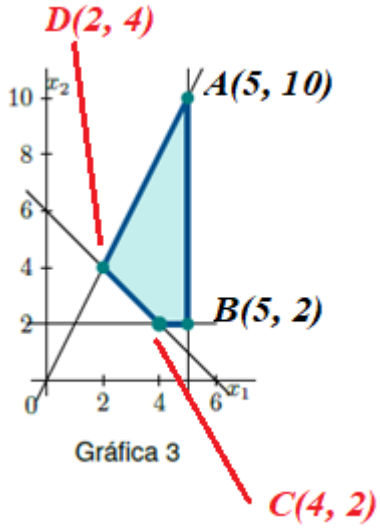
Reunimos las inecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \le 5;\ x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_2 \le 2x_1 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

Las rectas que delimitan la región factible son $\left.\begin{array}{l} x_1 = 5;\ x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 6 \\ x_2 = 2x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 5;\ x_2 = 2 \\ x_2 = 6 - x_1 \\ x_2 = 2x_1 \end{array}\right\}$

Las rectas $x_1 = 5;\ x_2 = 2$ son una recta horizontal y otra vertical que aparecen en las tres gráficas.
La recta $x_2 = 6 - x_1$ es una recta oblicua decreciente que pasa por los puntos (0, 6) y (6, 0). En la gráfica 2 no está dibujada esta recta. La gráfica 2 no es nuestra región factible.
La recta $x_2 = 2x_1$ es una recta oblicua creciente que pasa por los puntos (0, 0) y (5, 10). En la gráfica 1 no está dibujada esta recta. La gráfica 1 no es nuestra región factible.
Por eliminación la región factible es la dibujada en la gráfica 3.

1.b) Se sabe que los costes por cada gramo de los ingredientes I_1 e I_2 son respectivamente 20 y 30 céntimos de euro por lo que la función objetivo que deseamos minimizar es $f(x_1, x_2) = 20x_1 + 30x_2$.
Observando la gráfica 3 determinamos los vértices de la región factible:



Gráfica 3

Valoramos la función objetivo en cada vértice en busca del coste mínimo.
A(5, 10) → $f(5,10) = 20\cdot 5 + 30\cdot 10 = 400$
B(5, 2) → $f(5,2) = 20\cdot 5 + 30\cdot 2 = 160$
C(4, 2) → $f(4,2) = 20\cdot 4 + 30\cdot 2 = 140$ *Mínimo*
D(2, 4) → $f(2,4) = 20\cdot 2 + 30\cdot 4 = 160$
El coste mínimo es de 140 céntimos y se obtiene con 4 gramos de I_1 y 2 gramos de I_2.

1.c) Planteamos el sistema de ecuaciones correspondiente al problema llamando "x" a la cantidad de salsa del plato P_1, "y" a la cantidad de salsa del plato P_2 y "z" a la cantidad de salsa del plato P_3.
Se debe consumir la totalidad de la salsa (10 litros) → $x + y + z = 10$.
El plato P_1 usa exactamente el doble de cantidad de salsa secreta que el plato P_2 → $x = 2y$
Los platos P_2 y P_3 usan conjuntamente 4 litros en su preparación → $y + z = 4$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo intentamos resolver.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ x=2y \\ y+z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ x=2y \\ z=4-y \end{array}\right\} \Rightarrow 2y+y+4-y=10 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=3} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=2\cdot 3=6} \\ \boxed{z=4-3=1} \end{cases}$$

Es posible cumplir todo lo pedido utilizando 6 litros de salsa en el plato P_1, 3 litros en el plato P_2 y 1 litro en el plato P_3.

2.1 Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x-5}.$$

2.1.a) (1,5 puntos) Determine el dominio y las asíntotas de esta función.

2.1.b) (1 punto) Determine la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x_0=0$.

2.1.a) La función es racional y su dominio son todos los números reales menos los que anulen el denominador. El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{5\}$.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=5$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}\frac{(x-1)^2}{x-5}=\frac{(5-1)^2}{5-5}=\frac{16}{0}=\infty$$

$x=5$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\right)^2}{\frac{x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=\frac{\left(1-\frac{1}{\infty}\right)^2}{\frac{1}{\infty}-\frac{5}{\infty}}=\frac{(1-0)^2}{0-0}=\frac{1}{0}=\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x-1)^2}{x-5}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{x(x-5)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{x^2-5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x}\right)^2}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{1-\frac{5}{x}}=\frac{\left(1-\frac{1}{\infty}\right)^2}{1-\frac{5}{\infty}}=\frac{(1-0)^2}{1-0}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{x-5}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2-x^2+5x}{x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-2x-\cancel{x^2}+5x}{x-5}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{5}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{1-\frac{5}{x}}=\frac{3+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{5}{\infty}}=\frac{3+0}{1-0}=3$$

La recta $y=x+3$ es asíntota oblicua de la función.

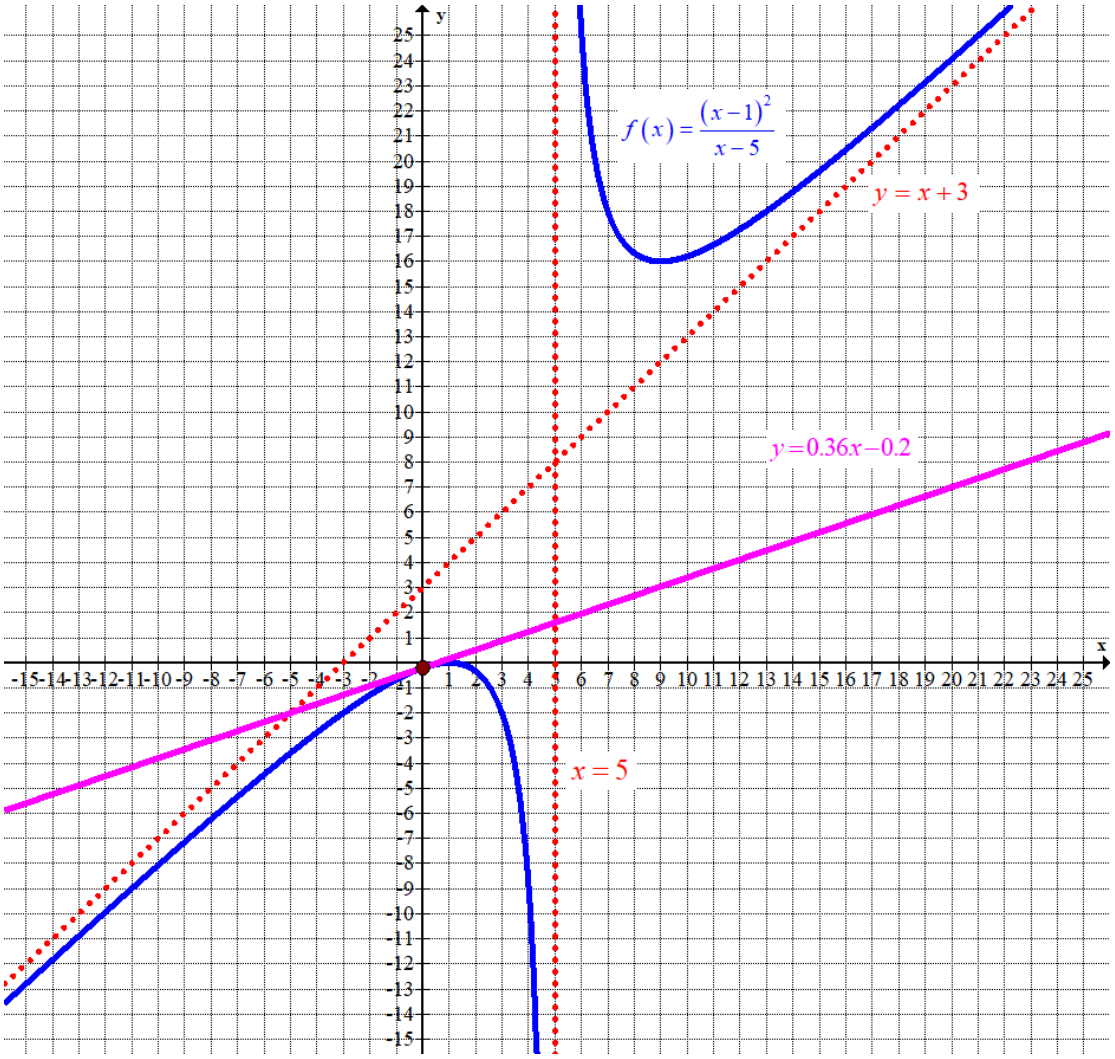
2.1.b) La ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x_0=0$ es $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x-5}\Rightarrow f'(x)=\frac{2(x-1)(x-5)-1\cdot(x-1)^2}{(x-5)^2}=$$

$$= \frac{2\left(x^2-5x-x+5\right)-\left(x^2+1-2x\right)}{\left(x-5\right)^2} = \frac{2x^2-10x-\cancel{2x}+10-x^2-1+\cancel{2x}}{\left(x-5\right)^2} = \frac{x^2-10x+9}{\left(x-5\right)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(0\right)=\dfrac{\left(0-1\right)^2}{0-5}=\dfrac{-1}{5} \\ f'\left(0\right)=\dfrac{0^2-10\cdot 0+9}{\left(0-5\right)^2}=\dfrac{9}{25} \\ y-f\left(0\right)=f'\left(0\right)\left(x-0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{-1}{5}=\frac{9}{25}x \Rightarrow y=0.36x-0.2$$

La recta tangente a la función $f\left(x\right)$ en $x_0=0$ tiene ecuación $y=0.36x-0.2$.



2.2 Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases} e^{3x}-x+a & x<0 \\ -x^3+2x^2 & x\geq 0 \end{cases}$$

2.2.a) (1,2 puntos) Determine el valor del parámetro real *a* para que la función *f(x)* sea continua.
2.2.b) (1,3 puntos) Determine el área del recinto acotado por la gráfica de *f(x)*, el eje de abscisas de modo que $x\geq 0$ y $f(x)\geq 0$.

2.2.a) La función es continua en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Para que la función sea continua en su dominio debe serlo en $x=0$. Para ello deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-0^3+2\cdot 0^2=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} -x^3+2x^2=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{3x}-x+a=e^{3\cdot 0}-0+a=1+a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow 1+a=0\Rightarrow \boxed{a=-1}$$

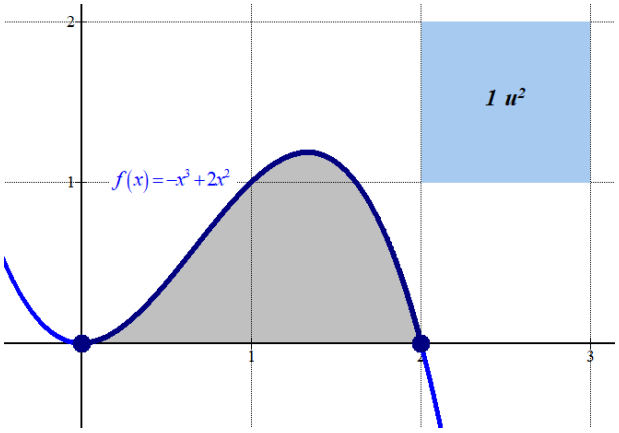
Para $a=-1$ la función es continua en $x=0$ y por tanto continua en todo su dominio.

2.2.b) Para $x\geq 0$ la función tiene la expresión $f(x)=-x^3+2x^2$. Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^3+2x^2 \\ Eje\,OX\rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^3+2x^2=0\Rightarrow -x^2(x-2)=0\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=2} \end{cases}$$

En el intervalo $(0,2)$ tomamos $x=1$ y la función vale $f(1)=-1^3+2\cdot 1^2=1>0$. La función es positiva en el intervalo $(0,2)$.
En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x=3$ y la función vale $f(3)=-3^3+2\cdot 3^2=-9<0$. La función es negativa en el intervalo $(2,+\infty)$.
El área del recinto acotado por la gráfica de *f(x)*, el eje de abscisas de modo que $x\geq 0$ y $f(x)\geq 0$ es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 2.

$$Área=\int_0^2 -x^3+2x^2dx=\left[\frac{-x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right]_0^2=\left[\frac{-2^4}{4}+\frac{2\cdot 2^3}{3}\right]-\left[\frac{-0^4}{4}+\frac{2\cdot 0^3}{3}\right]=-4+\frac{16}{3}=\frac{4}{3}\simeq 1.33u^2$$



3.1 En un club de lectura de un municipio de Madrid se sabe que al 30% de los socios les gustan los libros de novela histórica, mientras que al 50% de los socios les gustan los libros de ciencia ficción. Además se sabe que la probabilidad de que a un socio le gusten los libros de novela histórica sabiendo que le gustan los libros de ciencia ficción es 0,2.
3.1.a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que a un socio no le gusten los libros ni de novela histórica ni de ciencia ficción.
3.1.b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que a un socio le guste la novela histórica, sabiendo que no le gustan los libros de ciencia ficción.
3.1.c) (0,5 puntos) Justifique razonadamente si los sucesos de gustos de novela histórica y ciencia ficción son independientes y/o incompatibles.

3.1.a) Llamamos H al suceso "al socio le gustan los libros de novela histórica" y C a "al socio le gustan los libros de ciencia ficción".
Con los datos proporcionados sabemos que $P(H)=0.3$, $P(C)=0.5$ y $P(H/C)=0.2$.
Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\left.\begin{array}{l} P(H)=0.3 \\ P(C)=0.5 \\ P(H/C)=0.2 \\ P(H/C)=\dfrac{P(H\cap C)}{P(C)} \end{array}\right\} \Rightarrow 0.2=\frac{P(H\cap C)}{0.5} \Rightarrow \boxed{P(H\cap C)=0.2\cdot 0.5=0.1}$$

Nos piden calcular $P(\overline{H}\cap\overline{C})$. Aplicamos una de las leyes de Morgan.

$$P(\overline{H}\cap\overline{C})=P(\overline{H\cup C})=1-P(H\cup C)=1-\left[P(H)+P(C)-P(H\cap C)\right]=$$

$$=1-\left[0.3+0.5-0.1\right]=1-0.7=\boxed{0.3}$$

La probabilidad de que a un socio no le gusten los libros ni de novela histórica ni de ciencia ficción vale 0.3.

3.1.b) Debemos calcular $P(H/\overline{C})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(H/\overline{C})=\frac{P(H\cap\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(H)-P(H\cap C)}{1-P(C)}=\frac{0.3-0.1}{1-0.5}=\boxed{0.4}$$

La probabilidad de que a un socio le guste la novela histórica, sabiendo que no le gustan los libros de ciencia ficción vale 0.4.

3.1.c) Para que los sucesos de gustos de novela histórica y ciencia ficción sean independientes debe cumplirse la igualdad $P(H\cap C)=P(H)\cdot P(C)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(H\cap C)=0.1 \\ P(H)\cdot P(C)=0.3\cdot 0.5=0.15 \end{array}\right\} \Rightarrow P(H\cap C)=0.15\neq 0.1=P(H)\cdot P(C)$$

Los sucesos de gustos de novela histórica y ciencia ficción no son independientes.
Para que los sucesos de gustos de novela histórica y ciencia ficción sean incompatibles la intersección de los dos sucesos debe ser vacía y por tanto debe ser $P(H\cap C)=0$. Pero hemos visto que $P(H\cap C)=0.1\neq 0$. Los sucesos no son incompatibles.

3.2 En la plantilla de un equipo de balonmano de la liga Asobal se sabe que el 50% de los jugadores son nacionales, el 40% son comunitarios y el 10% restante extracomunitarios. Se sabe que la probabilidad de que un jugador sea elegido para jugar en su selección nacional es del 80% si el jugador es nacional, del 50% si el jugador es comunitario y del 40% si el jugador es extracomunitario.

3.2.a) (1,3 puntos) Determine la probabilidad de que un jugador del equipo de balonmano resulte seleccionado para jugar en su selección nacional.

3.2.b) (1,2 puntos) Determine la probabilidad de que, elegido un jugador que no va a ser convocado por su selección nacional, sea nacional.

3.2.a) Se definen los sucesos N: "Jugador nacional", C: "Jugador comunitario", F: "Jugador extracomunitario" y S: "Jugador escogido para jugar en su selección nacional".
Por los datos proporcionados conocemos las probabilidades:

$$P(N)=0.5;\ P(C)=0.4;\ P(F)=0.1;\ P(S/N)=0.8;\ P(S/C)=0.5 \text{ y } P(S/F)=0.4$$

Nos piden determinar $P(S)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(S)=P(N)P(S/N)+P(C)P(S/C)+P(F)P(S/F)=$$

$$=0.5\cdot 0.8+0.4\cdot 0.5+0.1\cdot 0.4=0.64$$

La probabilidad de que un jugador del equipo de balonmano resulte seleccionado para jugar en su selección nacional vale 0.64.

3.2.b) Debemos calcular $P\left(N/\overline{S}\right)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(N/\overline{S}\right)=\frac{P\left(N\cap\overline{S}\right)}{P\left(\overline{S}\right)}=\frac{P(N)P\left(\overline{S}/N\right)}{1-P(S)}=\frac{P(N)\left[1-P(S/N)\right]}{1-P(S)}=$$

$$=\frac{0.5\left[1-0.8\right]}{1-0.64}=\boxed{\frac{5}{18}\simeq 0.2778}$$

La probabilidad de que, elegido un jugador que no va a ser convocado por su selección nacional, sea nacional vale $\frac{5}{18}\simeq 0.2778$.

4.1 El número de horas que tarda un jugador en completar todas las fases de un determinado videojuego se comporta según una distribución normal cuya desviación típica es 20 horas.
4.1.a) (1 punto) Con un nivel de confianza del 97% se ha obtenido el intervalo de confianza (116,764; 120,236) para el tiempo medio en superar el juego para una determinada muestra. Determine el tiempo medio empleado por los jugadores de la muestra en completar el videojuego y el tamaño de la muestra utilizada.
4.1.b) (1,5 puntos) Obtenga el tamaño mínimo de una muestra para que el error del intervalo de confianza sea como mucho 5 horas asumiendo un nivel de confianza del 98,8%.

4.1.a) Consideramos la variable aleatoria X = El número de horas que tarda un jugador en completar todas las fases de un determinado videojuego. $X = N(\mu, 20)$

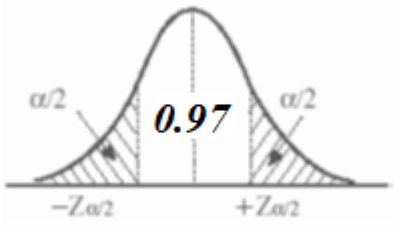
La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{116.764 + 120.236}{2} = 118.5$$

El tiempo medio empleado por los jugadores de la muestra en completar el videojuego es de 118 horas y media.
El error del intervalo de confianza es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{120.236 - 116.764}{2} = 1.736$$

Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 97%.



$$1-\alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

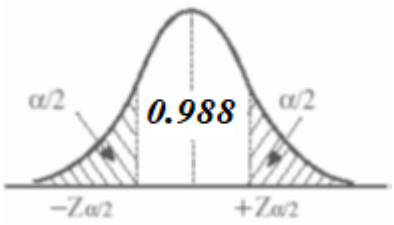
z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850

Utilizamos la fórmula del error y despejamos *n*.

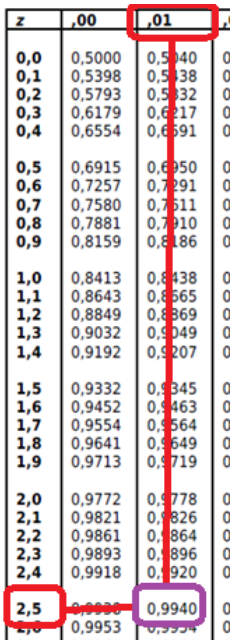
$$Error = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.736 = 2.17\frac{20}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{43.4}{1.736} \Rightarrow \boxed{n = \left(\frac{43.4}{1.736}\right)^2 = 625}$$

El tamaño de la muestra es de 625 jugadores.

4.1.b) Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 98.8%.



$$1-\alpha = 0.988 \Rightarrow \alpha = 0.012 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.006 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.994 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.51$$



z	,00	,01	
0,0	0,5000	0,5040	0
0,1	0,5398	0,5438	0
0,2	0,5793	0,5832	0
0,3	0,6179	0,6217	0
0,4	0,6554	0,6591	0
0,5	0,6915	0,6950	0
0,6	0,7257	0,7291	0
0,7	0,7580	0,7611	0
0,8	0,7881	0,7910	0
0,9	0,8159	0,8186	0
1,0	0,8413	0,8438	0
1,1	0,8643	0,8665	0
1,2	0,8849	0,8869	0
1,3	0,9032	0,9049	0
1,4	0,9192	0,9207	0
1,5	0,9332	0,9345	0
1,6	0,9452	0,9463	0
1,7	0,9554	0,9564	0
1,8	0,9641	0,9649	0
1,9	0,9713	0,9719	0
2,0	0,9772	0,9778	0
2,1	0,9821	0,9826	0
2,2	0,9861	0,9864	0
2,3	0,9893	0,9896	0
2,4	0,9918	0,9920	0
2,5	[illegible]	0,9940	0
[illegible]	0,9953	[illegible]	0

El error máximo que se quiere cometer es 5 horas. Utilizamos la fórmula del error y despejamos *n*.

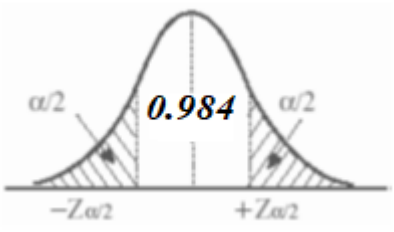
$$Error = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5 = 2.51\frac{20}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{50.2}{5} \Rightarrow \boxed{n = \left(\frac{50.2}{5}\right)^2 = 100.8016}$$

Por lo tanto, el tamaño mínimo de la muestra necesario es de 101 jugadores.

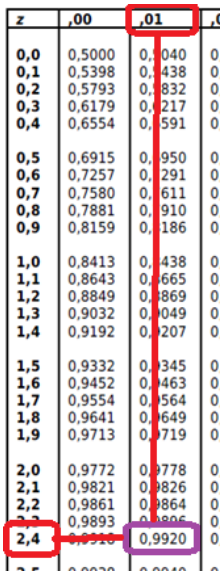
4.2 El 90% de los atletas que se inscriben en una maratón completan la totalidad de sus 42,195 km.
4.2.a) (1 punto) En la última maratón celebrada en Madrid, se tomó una muestra de 100 atletas de los cuales, 85 terminaron la maratón. Obtenga un intervalo de confianza al 98,4% de confianza para la proporción de atletas que terminan la carrera.
4.2.b) (1,5 puntos) Se sabe que en la próxima maratón de la temporada hay 400 atletas inscritos. Obtenga la probabilidad de que terminen la carrera a lo sumo 352 atletas.

4.2.a) El tamaño de la muestra es n = 100. La proporción muestral de personas que completan el total del recorrido del maratón es $p = \frac{85}{100} = 0.85$.

Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 98.4%.



$$1-\alpha = 0.984 \Rightarrow \alpha = 0.016 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.008 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.992 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.41$$



z	,00	,01	,0
0,0	0,5000	0,5040	0
0,1	0,5398	0,5438	0
0,2	0,5793	0,5832	0
0,3	0,6179	0,6217	0
0,4	0,6554	0,6591	0
0,5	0,6915	0,6950	0
0,6	0,7257	0,7291	0
0,7	0,7580	0,7611	0
0,8	0,7881	0,7910	0
0,9	0,8159	0,8186	0
1,0	0,8413	0,8438	0
1,1	0,8643	0,8665	0
1,2	0,8849	0,8869	0
1,3	0,9032	0,9049	0
1,4	0,9192	0,9207	0
1,5	0,9332	0,9345	0
1,6	0,9452	0,9463	0
1,7	0,9554	0,9564	0
1,8	0,9641	0,9649	0
1,9	0,9713	0,9719	0
2,0	0,9772	0,9778	0
2,1	0,9821	0,9826	0
2,2	0,9861	0,9864	0
	0,9893		0
2,4		0,9920	0

Obtenemos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 2.41\sqrt{\frac{0.85(1-0.85)}{100}} \simeq 0.0861$$

El intervalo de confianza para la proporción de atletas que terminan la carrera es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.85 - 0.0861,\ 0.85 + 0.0861\right) = \left(0.7639,\ 0.9361\right)$$

4.2.b) Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de atletas que acaban la maratón de un grupo de 400. Esta variable es una binomial siendo el número de repeticiones n = 400 y la probabilidad de éxito p = 0.9. $X = B(400, 0.9)$.

El número de repeticiones es muy alto y aproximamos la binomial X a una normal Y con media $np = 400 \cdot 0.9 = 360$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0.9 \cdot 0.1} = 6$. $Y = N(360, 6)$. Esta aproximación es buena pues $np = 360 > 5$ y $nq = 400 \cdot 0.1 = 40 > 5$.

Nos piden calcular $P(X \leq 352)$.

$$P(X \leq 352) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 352.5) = \left\{\begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{Y - 360}{6} \end{matrix}\right\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{352.5 - 360}{6}\right) = P(Z \leq -1.25) = P(Z \geq 1.25) = 1 - P(Z \leq 1.25) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{matrix}\right\} = 1 - 0.8944 = \boxed{0.1056}$$

La probabilidad de que terminen la carrera a lo sumo 352 atletas es de 0.1056.