



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y
PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2026-2027**

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en una parte con tres ejercicios obligatorios y una parte con dos bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- d) Deberá resolver los tres ejercicios obligatorios y solamente un ejercicio de cada uno de los dos bloques con optatividad. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque optativo, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- e) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2 puntos. En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,2 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- f) Se permite el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas, ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. Se permite el uso de regla.

PARTE OBLIGATORIA. Resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 1. (2 puntos)

En un club deportivo, el 55% de los socios practica natación, el 65% practica tenis, y el 10% no practica ni natación ni tenis.

- a) [1 punto] Si el club tiene 1200 socios, ¿cuántos practicarían ambos deportes?
- b) [1 punto] Tomando al azar una persona de este club que practique natación, calcula la probabilidad de que no juegue al tenis.

EJERCICIO 2. (2 puntos)

Halla cada uno de los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ para los que, junto a los puntos

A(1, 2, 0), B(2, 0, 1) y C(0, 2, 1), formen un tetraedro de volumen $2/3$.

EJERCICIO 3. (2 puntos)

Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - e^{2x}}{\operatorname{sen}(x^2)} = 1$$

PARTE OPTATIVA**BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1.** Resuelve solo uno de los siguientes ejercicios:**EJERCICIO 4.1 (2 puntos)**

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) **[1,25 puntos]** Determina a y b para que $A^2 = 4I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
 b) **[0,75 puntos]** Para $a = -1$ y $b = 1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple $A^2 X = B^t$

EJERCICIO 4.2 (2 puntos)

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.

El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora.

¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve solo uno de los siguientes ejercicios:**EJERCICIO 5.1 (2 puntos)**

Considera la función $f : (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1 + \cos(x)}}$.

- a) **[1,5 puntos]** Calcula $\int_0^\pi f(x) dx$.
 b) **[0,5 puntos]** Estudia la simetría de la función f y deduce de ella el valor de $\int_{-\pi}^\pi f(x) dx$.

EJERCICIO 5.2 (2 puntos)

Sea $f : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 5 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)

SOLUCIONES

EJERCICIO 1. (2 puntos)

En un club deportivo, el 55% de los socios practica natación, el 65% practica tenis, y el 10% no practica ni natación ni tenis.

- a) **[1 punto]** Si el club tiene 1200 socios, ¿cuántos practicarían ambos deportes?
 b) **[1 punto]** Tomando al azar una persona de este club que practique natación, calcula la probabilidad de que no juegue al tenis.

a) Si el 55% de los 1200 socios practica natación entonces practican natación $1200 \cdot 0.55 = 660$ socios.

Si el 65% practica tenis entonces $1200 \cdot 0.65 = 780$ socios practican tenis.

Si el 10% no practica ni natación ni tenis entonces $1200 \cdot 0.10 = 120$ socios no practican ni natación ni tenis.

Colocamos todos estos datos en una tabla.

	Practican natación	No practican natación	TOTALES
Practican tenis			780
No practican tenis		120	
TOTALES	660		1200

Completamos la tabla.

	Practican natación	No practican natación	TOTALES
Practican tenis	360	420	780
No practican tenis	300	120	420
TOTALES	660	540	1200

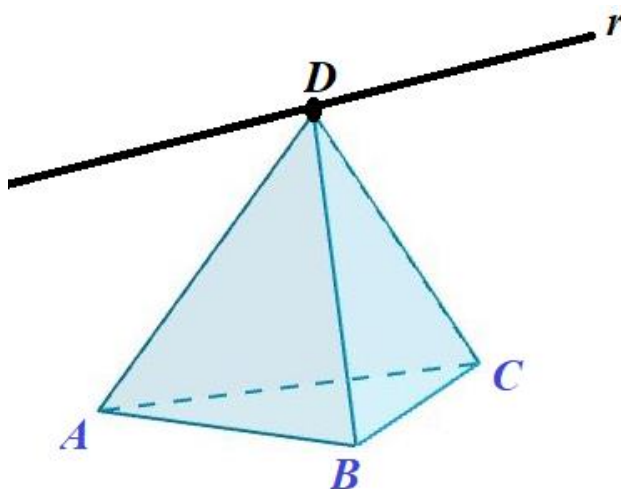
Observando los datos de la tabla sabemos hay 360 socios que practican ambos deportes.

- b) Hay 660 socios que practican natación y de estos son 300 los que no juegan al tenis.

Aplicando la regla de Laplace si tomamos al azar una persona de este club que practique natación la probabilidad de que no juegue al tenis vale $\frac{300}{660} = \frac{5}{11} \approx 0.4545$.

EJERCICIO 2. (2 puntos)

Halla cada uno de los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ para los que, junto a los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(2, 0, 1)$ y $C(0, 2, 1)$, formen un tetraedro de volumen $2/3$.



Debemos hallar un punto D de la recta r tal que el volumen del tetraedro $ABCD$ sea $2/3$. Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta r .

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ z = y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0.5\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto D de la recta r tiene coordenadas $D(0.5\lambda, \lambda, \lambda)$.

Hallamos la expresión del volumen del tetraedro $ABCD$ en función del valor de λ .

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 0) \\ B(2, 0, 1) \\ C(0, 2, 1) \\ D(0.5\lambda, \lambda, \lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 0, 1) - (1, 2, 0) = (1, -2, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 2, 1) - (1, 2, 0) = (-1, 0, 1) \\ \overrightarrow{AD} = (0.5\lambda, \lambda, \lambda) - (1, 2, 0) = (0.5\lambda - 1, \lambda - 2, \lambda) \end{array} \right\}$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0.5\lambda - 1 & \lambda - 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0 - 2(0.5\lambda - 1) - (\lambda - 2) - 0 - 2\lambda - (\lambda - 2) =$$

$$= -\lambda + 2 - \lambda + 2 - 2\lambda - \lambda + 2 = -5\lambda + 6$$

$$\text{Volumen } ABCD = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]}{6} = \frac{|-5\lambda + 6|}{6}$$

Averiguamos el valor de λ para el que este volumen vale $2/3$.

$$\text{Volumen } ABCD = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{|-5\lambda + 6|}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |-5\lambda + 6| = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow \begin{cases} -5\lambda + 6 = 4 \rightarrow -5\lambda = -2 \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2}{5} = 0.4} \\ -5\lambda + 6 = -4 \rightarrow -5\lambda = -10 \rightarrow \boxed{\lambda = 2} \end{cases}$$

Para $\lambda = 2$ el punto D tiene coordenadas $D_1(0.5 \cdot 2, 2, 2) \rightarrow D_1(1, 2, 2)$.

Para $\lambda = 0.4$ el punto D tiene coordenadas $D_2(0.5 \cdot 0.4, 0.4, 0.4) \rightarrow D_2(0.2, 0.4, 0.4)$.

Existen dos puntos de la recta r que cumplen lo pedido: $D_1(1, 2, 2)$ y $D_2(0.2, 0.4, 0.4)$.

EJERCICIO 3. (2 puntos)

Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - e^{2x}}{\operatorname{sen}(x^2)} = 1$$

Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - e^{2x}}{\operatorname{sen}(x^2)} = \frac{a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + 1 - e^{2 \cdot 0}}{\operatorname{sen}(0^2)} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + b - 2e^{2x}}{2x \cos(x^2)} = \frac{2a \cdot 0 + b - 2e^{2 \cdot 0}}{2 \cdot 0 \cdot \cos(0^2)} =$$

$$= \frac{0 + b - 2}{0} = \frac{b - 2}{0} = \dots$$

Debe ser $b = 2$, pues en caso contrario el numerador de la fracción sería distinto de cero y el límite valdría infinito, y no podría valer 1 como se pide.

$$\dots = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a - 4e^{2x}}{2 \cos(x^2) + 2x \cdot 2x (-\operatorname{sen}(x^2))} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a - 4e^{2x}}{2 \cos(x^2) - 4x^2 \operatorname{sen}(x^2)} = \frac{2a - 4e^{2 \cdot 0}}{2 \cos(0^2) - 4 \cdot 0^2 \cdot \operatorname{sen}(0^2)} = \frac{2a - 4}{2} = \boxed{a - 2}$$

Para que este límite valga 1 debe ser $a = 3$.

Los valores buscados son $a = 3$ y $b = 2$.

EJERCICIO 4.1 (2 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) [1,25 puntos] Determina a y b para que $A^2 = 4I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) [0,75 puntos] Para $a = -1$ y $b = 1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple $A^2 X = B^t$

a) Resolvemos la ecuación planteada.

$$\begin{aligned}
 A^2 = 4I &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + 3b & 3a + 3 \\ ab + b & 3b + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 + 3b = 4 \\ 3a + 3 = 0 \\ ab + b = 0 \\ 3b + 1 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 + 3b = 4 \\ 3a = -3 \\ ab + b = 0 \\ 3b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 + 3b = 4 \\ a = -1 \\ ab + b = 0 \\ b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (-1)^2 + 3 \cdot 1 = 4 \\ (-1) \cdot 1 + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 1 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = 1$.

b) Para $a = -1$ y $b = 1$ hemos visto que se cumple $A^2 = 4I$. Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A^2 X = B^t \Rightarrow 4IX = B^t \Rightarrow 4X = B^t \Rightarrow X = \frac{1}{4} B^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Existe la matriz X que cumple $A^2 X = B^t$ y tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 4.2 (2 puntos)

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.

El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora.

¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Llamamos x = número de botellas producidas por hora, y = número de garrafas, z = número de bidones.

“Se utiliza como materia prima 10000 gramos de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1000 gramos para cada bidón” $\rightarrow 50x + 100y + 1000z = 10000$

“Se debe producir el doble de botellas que de garrafas” $\rightarrow x = 2y$

“Se producen en total 52 productos cada hora” $\rightarrow x + y + z = 52$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} 50x + 100y + 1000z = 10000 \\ x = 2y \\ x + y + z = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + 20z = 200 \\ x = 2y \\ x + y + z = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2y + 20z = 200 \\ 2y + y + z = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + 20z = 200 \\ 3y + z = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 5z = 50 \\ 3y + z = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 50 - 5z \\ 3y + z = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(50 - 5z) + z = 52 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 150 - 15z + z = 52 \Rightarrow -14z = -98 \Rightarrow \boxed{z = \frac{98}{14} = 7} \Rightarrow \boxed{y = 50 - 35 = 15} \Rightarrow \boxed{x = 30}$$

Se producen cada hora 30 botellas, 15 garrafas y 7 bidones.

EJERCICIO 5.1 (2 puntos)

Considera la función $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}}$.

a) [1,5 puntos] Calcula $\int_0^\pi f(x) dx$.

b) [0,5 puntos] Estudia la simetría de la función f y deduce de ella el valor de $\int_{-\pi}^\pi f(x) dx$.

a) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = 1 + \cos(x) \rightarrow dt = -\operatorname{sen}(x) dx \\ dx = \frac{1}{-\operatorname{sen}(x)} dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{\cancel{\operatorname{sen}(x)}}{\sqrt{t}} \frac{1}{-\cancel{\operatorname{sen}(x)}} dt = -\int t^{-1/2} dt = -\frac{t^{1-1/2}}{1-1/2} = \frac{-t^{1/2}}{1/2} = -2\sqrt{t} = -2\sqrt{\cos(x)+1} + K$$

Aplicamos el resultado obtenido al cálculo de la integral definida pedida.

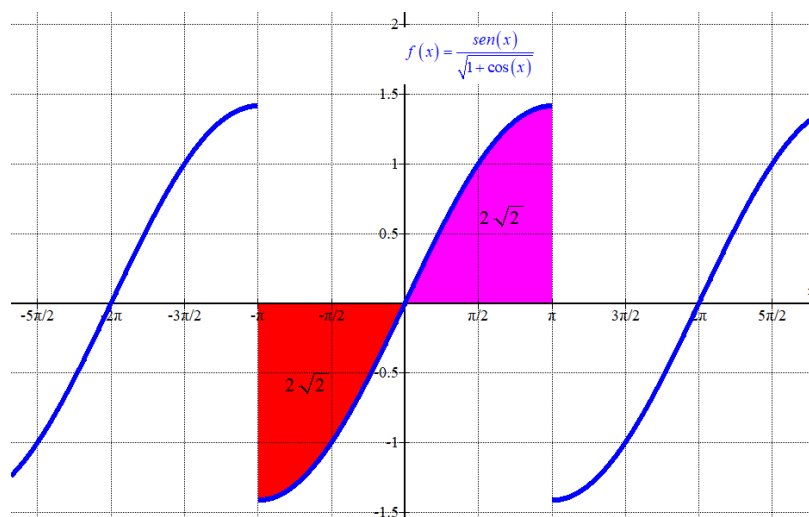
$$\int_0^\pi f(x) dx = \left[-2\sqrt{1+\cos(x)} \right]_0^\pi = -2\sqrt{1+\cos(\pi)} - \left(-2\sqrt{1+\cos(0)} \right) = -2\sqrt{1-1} + 2\sqrt{1+1} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

b) Comprobamos si $f(-x) = f(x)$ o $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\sqrt{1+\cos(-x)}} = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) \\ \cos(-x) = \cos(x) \end{array} \right\} = \frac{-\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}} = -f(x)$$

La función es impar por lo que $\int_{-\pi}^0 f(x) dx = -\int_0^\pi f(x) dx = -2\sqrt{2}$.

$$\int_{-\pi}^\pi f(x) dx = \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^\pi f(x) dx = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 0$$



EJERCICIO 5.2 (2 puntos)

Sea $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 5 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x + 5 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 5$$

La función es continua en $x = 2$.

Hallamos los puntos críticos de la función.

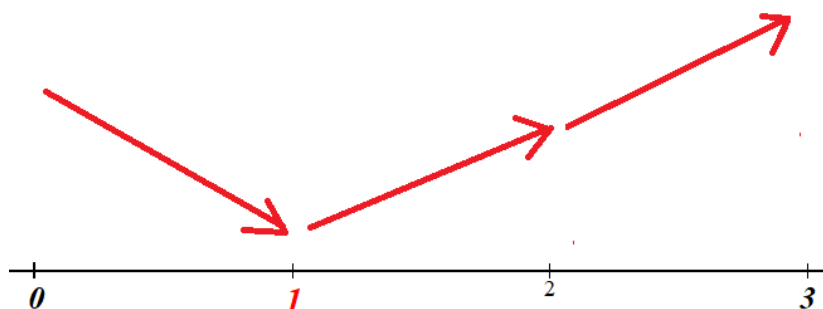
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 5 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2x & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \in [0, 2) \\ 2x = 0 \rightarrow x = 0 \notin (2, 3] \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después del punto crítico $x = 1$ y el punto donde la función cambia de definición $x = 2$.

- En el intervalo $[0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = 2 \cdot 0.5 - 2 = -1 < 0$. La función decrece en $[0, 1)$.
- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5) = 2 \cdot 1.5 - 2 = 1 > 0$. La función crece en $(1, 2)$.
- En el intervalo $(2, 3]$ tomamos $x = 2.5$ y la derivada vale $f'(2.5) = 2 \cdot 2.5 = 5 > 0$. La función crece en $(2, 3]$.

La función sigue el esquema siguiente.



Valoramos la función en 0, 1 y 3.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^2 - 2 \cdot 0 + 5 = 5 \\ f(1) &= 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4 \text{ *Mínimo*} \\ f(3) &= 3^2 + 1 = 10 \text{ *Máximo*} \end{aligned} \right\}$$

El mínimo absoluto de la función se alcanza en $x=1$ con un valor de $f(1)=4$.

El máximo absoluto de la función se alcanza en $x=3$ con un valor de $f(3)=10$.

