UCLM Universidad Castilla-La Mancha

Prueba de acceso a la Universidad
Curso 2026/2027
Materia: Matemáticas II

INSTRUCCIONES: El estudiante **deberá resolver obligatoriamente las preguntas de la 1 a la 3**, y **elegir una opción de las dos propuestas en la pregunta 4 y 5**. Es decir, en las preguntas 4 y 5, contestará UNA sola de las opciones propuestas. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Las respuestas a los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando dichas respuestas. ya que **se valorará en estas y en los procedimientos desarrollados el rigor matemático. Su falta se podrá penalizar con hasta 1 punto en todo el examen**. Solo se permite el uso de **calculadores de tipo 1 y 2**, tal y como se indica en la información de las pruebas. Cada ejercicio completo puntuará 2 puntos. **Duración de la prueba: 90 minutos.**

PARTE A (preguntas 1, 2 y 3). Conteste TODAS las preguntas de esta parte

Pregunta 1.
Un equipo de investigación de la UCLM está creando una línea de trabajo para producir un motor, pero a veces este motor no funciona. El motor creado funciona correctamente en el 85% de los casos. Para evaluar la eficacia del proceso de creación del motor, se seleccionan 10 motores al azar. Halla la probabilidad de que:

a) **[0,5 puntos]** No haya ningún motor defectuoso.
b) **[0,5 puntos]** Sean 3 los motores defectuosos.
c) **[1 punto]** Al menos la mitad de los motores funcionen correctamente

Pregunta 2.
En un laboratorio de la UCLM se calienta una muestra metálica hasta 180ºC y, a continuación, se deja enfriar en una cámara a 20ºC. Un sensor digital registra cómo disminuye la temperatura y los investigadores concluyen que la evolución de la temperatura en función del tiempo se ajusta a un modelo exponencial $T(t)=20+160e^{-0.3t}$, donde $T(t)$ es la temperatura (en ºC), y t es el tiempo en horas desde que comienza el enfriamiento.

a) **[0,25 puntos]** Determina la temperatura de la muestra a las 2 horas.
b) **[1 punto]** Calcula cuánto tiempo tardará la muestra en alcanzar los 50ºC, expresándolo en horas.
c) **[0,75 puntos]** Determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función T(t), que representa la rapidez de enfriamiento de la muestra en $t=1$ hora.

Pregunta 3.
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+ay+3z=7 \\ x+2y+(a-1)z=a \end{cases}$$

a) **[1,5 puntos]** Discute el sistema según los valores del parámetro a, indicando el número de soluciones en cada caso.
b) **[0,5 puntos]** Sea M una matriz cuadrada de orden 4, tal que det M=12. Determina el rango de M^2.

PARTE B (preguntas 4 y 5)

Pregunta 4. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el plano $\pi \equiv 2x - y + 3z - 6 = 0$, la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{3}$, y el punto $P(2,1,-1)$.

a) **[1 punto]** Determina la posición relativa entre la recta r y el plano π, razonando la respuesta, y halla su punto de corte, en el caso de que lo tengan.

b) **[1 punto]** Halla, razonadamente, la distancia del punto $P(2,1,-1)$ a la recta r.

4.2.

a) **[1 punto]** Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(2,0,-1) y Q(3,2,0) en su forma general o implícita.

b) **[1 punto]** Dado el punto P del apartado anterior, P(2,0,-1), y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

encuentra razonadamente la ecuación general del plano que, pasando por dicho punto P, es paralelo a las rectas r y s.

Pregunta 5. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1. [2 puntos] Dada la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 2x^2 + 5x - 1 & si\ x < 1 \\ bx^2 - 3x + 4 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Calcula los parámetros a y b, de manera que la función f(x) sea continua y derivable en $x = 1$.

5.2.

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la integral siguiente: $\int (x \ln x)\, dx$

b) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{2x^3 - 3x^2 + x}$

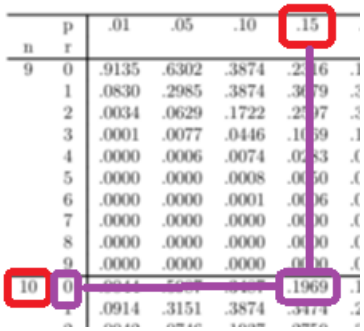
n	p r	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	1/3	.35	.40	.45	.49	.50
9	0	.9135	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0260	.0207	.0101	.0046	.0023	.0020
	1	.0830	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1171	.1004	.0605	.0339	.0202	.0176
	2	.0034	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2688	.2341	.2162	.1612	.1110	.0776	.0703
	3	.0001	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2731	.2716	.2508	.2119	.1739	.1641
	4	.0000	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2048	.2194	.2508	.2600	.2506	.2461
	5	.0000	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1024	.1181	.1672	.2128	.2408	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0341	.0424	.0743	.1160	.1542	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0073	.0098	.0212	.0407	.0635	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0009	.0013	.0035	.0083	.0153	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0003	.0008	.0016	.0020
10	0	.9044	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0173	.0135	.0060	.0025	.0012	.0010
	1	.0914	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0867	.0725	.0403	.0207	.0114	.0098
	2	.0042	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1951	.1757	.1209	.0763	.0495	.0439
	3	.0001	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2601	.2522	.2150	.1665	.1267	.1172
	4	.0000	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2276	.2377	.2508	.2384	.2130	.2051
	5	.0000	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1366	.1536	.2007	.2340	.2456	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0596	.0689	.1115	.1596	.1966	.2051
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0163	.0212	.0425	.0746	.1080	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0030	.0043	.0106	.0229	.0389	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0005	.0016	.0042	.0083	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0010

SOLUCIONES

Pregunta 1.
Un equipo de investigación de la UCLM está creando una línea de trabajo para producir un motor, pero a veces este motor no funciona. El motor creado funciona correctamente en el 85% de los casos. Para evaluar la eficacia del proceso de creación del motor, se seleccionan 10 motores al azar. Halla la probabilidad de que:
a) **[0,5 puntos]** No haya ningún motor defectuoso.
b) **[0,5 puntos]** Sean 3 los motores defectuosos.
c) **[1 punto]** Al menos la mitad de los motores funcionen correctamente

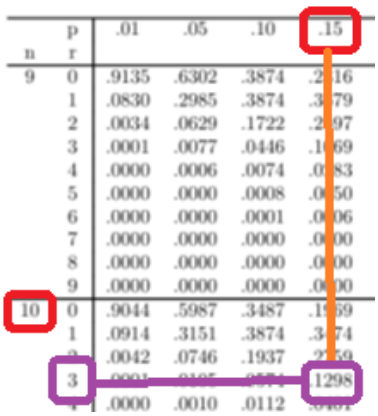
Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de motores defectuosos de un grupo de 10 motores. Esta variable es una binomial, siendo el número de repeticiones n = 10 y la probabilidad de que un motor esté defectuoso p = 1 – 0.85 = 0.15. $X = B(10, 0.15)$.

a) Debemos calcular $P(X=0)$. Mirando en la tabla vemos que $P(X=0)=0.1969$.



n	r	p = .01	.05	.10	.15
9	0	.9135	.6302	.3874	.2316
	1	.0830	.2985	.3874	.3679
	2	.0034	.0629	.1722	.2597
	3	.0001	.0077	.0446	.1069
	4	.0000	.0006	.0074	.0283
	5	.0000	.0000	.0008	.0050
	6	.0000	.0000	.0001	.0006
	7	.0000	.0000	.0000	.0000
	8	.0000	.0000	.0000	.0000
	9	.0000	.0000	.0000	.0000
10	0	.9044	.5987	.3487	.1969
	1	.0914	.3151	.3874	.3474

b) Debemos calcular $P(X=3)$. Mirando en la tabla vemos que $P(X=3)=0.1298$.



n	r	p = .01	.05	.10	.15
9	0	.9135	.6302	.3874	.2316
	1	.0830	.2985	.3874	.3679
	2	.0034	.0629	.1722	.2597
	3	.0001	.0077	.0446	.1069
	4	.0000	.0006	.0074	.0283
	5	.0000	.0000	.0008	.0050
	6	.0000	.0000	.0001	.0006
	7	.0000	.0000	.0000	.0000
	8	.0000	.0000	.0000	.0000
	9	.0000	.0000	.0000	.0000
10	0	.9044	.5987	.3487	.1969
	1	.0914	.3151	.3874	.3474
	2	.0042	.0746	.1937	.2759
	3	.0001	.0105	.0574	.1298
	4	.0000	.0010	.0112	.0401

c) Si al menos la mitad de los motores funcionen correctamente (5, 6, 7, 8, 9 o 10) entonces deben ser defectuosos 5 o menos motores (5, 4, 3, 2, 1 o 0). Debemos calcular $P(X \leq 5)$.
Mirando en la tabla vemos que:

$$P(X \leq 5) = P(X=5) + P(X=4) + P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) =$$

$$= 0.1969 + 0.3474 + 0.2759 + 0.1298 + 0.0401 + 0.0085 = \boxed{0.9986}$$

La probabilidad de que al menos la mitad de los motores funcionen correctamente vale 0.9986.

Pregunta 2.
En un laboratorio de la UCLM se calienta una muestra metálica hasta 180ºC y, a continuación, se deja enfriar en una cámara a 20ºC. Un sensor digital registra cómo disminuye la temperatura y los investigadores concluyen que la evolución de la temperatura en función del tiempo se ajusta a un modelo exponencial $T(t)=20+160e^{-0.3t}$, donde $T(t)$ es la temperatura (en ºC), y t es el tiempo en horas desde que comienza el enfriamiento.
a) **[0,25 puntos]** Determina la temperatura de la muestra a las 2 horas.
b) **[1 punto]** Calcula cuánto tiempo tardará la muestra en alcanzar los 50ºC, expresándolo en horas.
c) **[0,75 puntos]** Determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función T(t), que representa la rapidez de enfriamiento de la muestra en $t=1$ hora.

a) Determinamos el valor de $T(2)$.

$$T(2)=20+160e^{-0.3\cdot 2}\simeq 107.81$$

La temperatura de la muestra a las 2 horas es de 107.81º C.

b) Averiguamos el valor de *t* para que $T(t)=50$.

$$T(t)=50\Rightarrow 20+160e^{-0.3t}=50\Rightarrow 160e^{-0.3t}=30\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-0.3t}=\frac{30}{160}=0.1875\Rightarrow \ln e^{-0.3t}=\ln(0.1875)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0.3t=\ln(0.1875)\Rightarrow \boxed{t=\frac{\ln(0.1875)}{-0.3}\simeq 5.58\,horas}$$

La muestra tardará 5.58 horas en alcanzar los 50ºC, aproximadamente 5 horas y 35 minutos.

c) Hallamos el valor de $T'(1)$.

$$T(t)=20+160e^{-0.3t}\Rightarrow T'(t)=(-0.3)\cdot 160e^{-0.3t}=-48e^{-0.3t}\Rightarrow T'(1)=-48e^{-0.3}\simeq -35.56$$

La rapidez de enfriamiento de la muestra en $t=1$ hora es de 35.56ºC por hora.

Pregunta 3.
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+ay+3z=7 \\ x+2y+(a-1)z=a \end{cases}$$

a) **[1,5 puntos]** Discute el sistema según los valores del parámetro a, indicando el número de soluciones en cada caso.
b) **[0,5 puntos]** Sea M una matriz cuadrada de orden 4, tal que det M=12. Determina el rango de M^2.

a) El sistema tiene la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 2 & a-1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & 3 & 7 \\ 1 & 2 & a-1 & a \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 2 & a-1 \end{vmatrix}=a(a-1)+3+4-a-2(a-1)-6=$$

$$=a^2-a+7-a-2a+2-6=a^2-4a+3$$

$$|A|=0\Rightarrow a^2-4a+3=0\Rightarrow a=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} \frac{4+2}{2}=\boxed{3=a} \\ \frac{4-2}{2}=\boxed{1=a} \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a\neq 1$ y $a\neq 3$
En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a=1$
En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Para este valor la matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\2&1&3&7\\1&2&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{a}}\ -\ \text{Fila } 1^{\text{a}}\\ 1\quad 2\quad 0\quad 1\\ \hline -1\quad -1\quad -1\quad -3\\ \hline 0\quad 1\quad -1\quad -2\end{array}\right.\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\Bigg\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{\text{a}}\ -2\cdot\text{Fila } 1^{\text{a}}\\ 2\quad 1\quad 3\quad 7\\ \hline -2\quad -2\quad -2\quad -6\\ \hline 0\quad -1\quad 1\quad 1\end{array}\right.\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}}\Bigg\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&-1&1&1\\0&1&-1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{a}}+\text{Fila } 2^{\text{a}}\\ 0\quad 1\quad -1\quad -2\\ \hline 0\quad -1\quad 1\quad 1\\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad -1\end{array}\right.\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\Bigg\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc}\overbrace{1&1&1}^{A}&3\\0&-1&1&1\\\underbrace{0&0&0}_{A}&-1\end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $a=3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Para este valor la matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\2&3&3&7\\1&2&2&3\end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\2&3&3&7\\1&2&2&3\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{a}}\ -\ \text{Fila } 1^{\text{a}}\\ 1\quad 2\quad 2\quad 3\\ \hline -1\quad -1\quad -1\quad -3\\ \hline 0\quad 1\quad 1\quad 0\end{array}\right.\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\Bigg\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{\text{a}}\ -2\cdot\text{Fila } 1^{\text{a}}\\ 2\quad 3\quad 3\quad 7\\ \hline -2\quad -2\quad -2\quad -6\\ \hline 0\quad 1\quad 1\quad 1\end{array}\right.\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}}\Bigg\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&1&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{a}}\ -\ \text{Fila } 2^{\text{a}}\\ 0\quad 1\quad 1\quad 0\\ \hline 0\quad -1\quad -1\quad -1\\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad -1\end{array}\right.\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}\Bigg\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc}\overbrace{1&1&1}^{A}&3\\0&1&1&1\\\underbrace{0&0&0}_{A}&-1\end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

b) Utilizando las propiedades de los determinantes tenemos que $\left|M^2\right| = \left|M\right|^2 = 12^2 = 144$.

La matriz M^2 es cuadrada de orden 4 con determinante distinto de cero y su rango es 4.

4.1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el plano $\pi \equiv 2x - y + 3z - 6 = 0$, la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{3}$, y el punto $P(2,1,-1)$.

a) **[1 punto]** Determina la posición relativa entre la recta r y el plano π, razonando la respuesta, y halla su punto de corte, en el caso de que lo tengan.

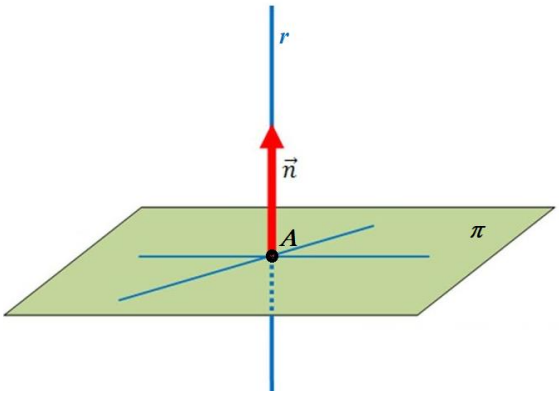
b) **[1 punto]** Halla, razonadamente, la distancia del punto $P(2,1,-1)$ a la recta r.

a) Hallamos un vector director de la recta y un vector normal del plano.

$$\pi \equiv 2x - y + 3z - 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2,-1,3)$$

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2,-1,3) \\ P_r(1,-2,0) \end{cases}$$

Comprobamos que $\vec{n} = \overrightarrow{v_r} = (2,-1,3)$. Por lo que la recta es perpendicular al plano y lo corta en un punto A.



Hallamos las coordenadas del punto de corte de recta y plano resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2,-1,3) \\ P_r(1,-2,0) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -2 - \alpha \\ z = 3\alpha \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -2 - \alpha \\ z = 3\alpha \end{cases} \\ \pi \equiv 2x - y + 3z - 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1+2\alpha) + 2 + \alpha + 9\alpha - 6 = 0 \Rightarrow$$

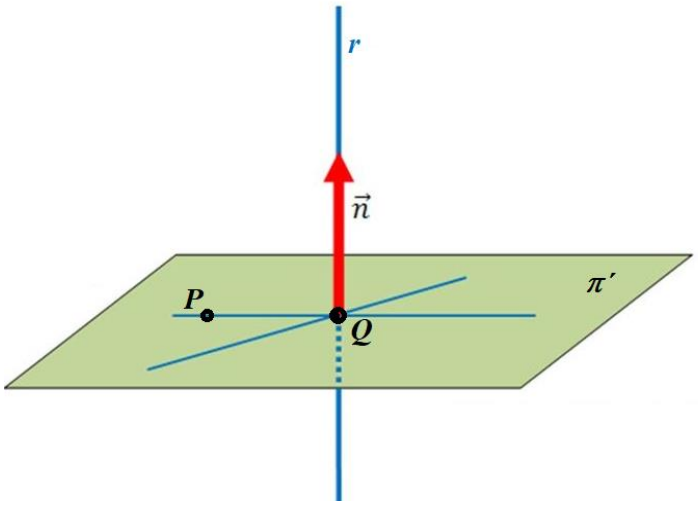
$$\Rightarrow 2 + 4\alpha + 2 + \alpha + 9\alpha - 6 = 0 \Rightarrow 14\alpha - 2 = 0 \Rightarrow 14\alpha = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\dfrac{1}{7} = \dfrac{9}{7} \\ y = -2 - \dfrac{1}{7} = \dfrac{-15}{7} \\ z = 3\dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A\left(\frac{9}{7}, \frac{-15}{7}, \frac{3}{7}\right)}$$

El punto de corte de la recta r y el plano π tiene coordenadas $A\left(\frac{9}{7},\frac{-15}{7},\frac{3}{7}\right)$.

b) Para hallar la distancia del punto P a la recta r determinaremos la ecuación del plano π' perpendicular a la recta r que pasa por el punto P. Luego hallamos el punto Q de corte de recta y plano. La distancia del punto P a la recta r se obtiene como la distancia del punto P al punto Q.

Hallamos la ecuación del plano π' perpendicular a la recta r que pasa por el punto P.



$$\left.\begin{array}{l} P(2,1,-1)\in\pi' \\ \overrightarrow{n'}=\overrightarrow{v_r}=(2,-1,3) \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(2,1,-1)\in\pi' \\ \pi': 2x-y+3z+D=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot 2-1+3(-1)+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4-1-3+D=0\Rightarrow D=0\Rightarrow \boxed{\pi': 2x-y+3z=0}$$

El plano tiene ecuación $\pi': 2x-y+3z=0$.

Hallamos el punto Q de corte de recta r y el plano π'.

$$\left.\begin{array}{l} \pi': 2x-y+3z=0 \\ r\equiv\begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=-2-\alpha \\ z=3\alpha \end{cases} \end{array}\right\}\Rightarrow 2(1+2\alpha)+2+\alpha+9\alpha=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+4\alpha+2+\alpha+9\alpha=0\Rightarrow 14\alpha+4=0\Rightarrow 14\alpha=-4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{-4}{14}=\frac{-2}{7}\Rightarrow\begin{cases} x=1+2\dfrac{-2}{7}=\dfrac{3}{7} \\ y=-2-\dfrac{-2}{7}=\dfrac{-12}{7} \\ z=3\dfrac{-2}{7}=\dfrac{-6}{7} \end{cases}\Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{3}{7},\frac{-12}{7},\frac{-6}{7}\right)}$$

El punto Q tiene coordenadas $Q\left(\frac{3}{7},\frac{-12}{7},\frac{-6}{7}\right)$.

Determinamos la distancia del punto P a la recta r como el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left.\begin{array}{l} P(2,1,-1) \\ Q\left(\frac{3}{7},\frac{-12}{7},\frac{-6}{7}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{3}{7},\frac{-12}{7},\frac{-6}{7}\right) - (2,1,-1) = \left(\frac{-11}{7},\frac{-19}{7},\frac{1}{7}\right)$$

$$D(P,r) = d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\left(\frac{-11}{7}\right)^2 + \left(\frac{-19}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{483}}{7} \simeq 3.14 \, unidades$$

La distancia del punto $P(2,1,-1)$ a la recta r vale $\frac{\sqrt{483}}{7} \simeq 3.14$ unidades de longitud.

4.2.

a) **[1 punto]** Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(2,0,-1) y Q(3,2,0) en su forma general o implícita.

b) **[1 punto]** Dado el punto P del apartado anterior, P(2,0,-1), y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$$

encuentra razonadamente la ecuación general del plano que, pasando por dicho punto P, es paralelo a las rectas r y s.

a) Hallamos la ecuación de la recta t que pasa por los puntos P y Q.

$$\left.\begin{array}{l} P(2,0,-1) \in t \\ Q(3,2,0) \in t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(2,0,-1) \in t \\ \vec{v_t} = \overrightarrow{PQ} = (3,2,0) - (2,0,-1) = (1,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow t: \frac{x-2}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: x-2 = \frac{y}{2} = z+1 \Rightarrow t: \begin{cases} x-2 = \dfrac{y}{2} \\ \dfrac{y}{2} = z+1 \end{cases} \Rightarrow t: \begin{cases} 2x-4 = y \\ y = 2z+2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{t: \begin{cases} 2x-y-4=0 \\ y-2z-2=0 \end{cases}}$$

La ecuación implícita de la recta que pasa por P(2,0,-1) y Q(3,2,0) es $t: \begin{cases} 2x-y-4=0 \\ y-2z-2=0 \end{cases}$.

b) El plano π que buscamos tiene como vectores directores los vectores directores de las dos rectas y contiene el punto P.

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \Rightarrow \boxed{\vec{v_r} = (-1,2,0)}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ x+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ x=-1-z \end{cases} \Rightarrow -1-z-y+2z+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3+z=y \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{u_s} = (-1,1,1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \vec{v_r} = (-1,2,0) \\ \vec{u} = \vec{u_s} = (-1,1,1) \\ P(2,0,-1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x-2)+0-z-1+2(z+1)+y+0=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-4-z-1+2z+2+y=0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x+y+z-3=0}$$

El plano que, pasando por el punto P, es paralelo a las rectas r y s tiene ecuación general $\pi: 2x+y+z-3=0$.

5.1. [2 puntos] Dada la función siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} ax^3-2x^2+5x-1 & si\ x<1 \\ bx^2-3x+4 & si\ x\geq 1 \end{cases}$$

Calcula los parámetros a y b, de manera que la función f(x) sea continua y derivable en $x=1$.

Para que la función sea continua en $x=1$ el valor de la función debe coincidir con el valor de los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=b\cdot 1^2-3\cdot 1+4=1+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} bx^2-3x+4=1+b \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} ax^3-2x^2+5x-1=a\cdot 1^3-2\cdot 1^2+5\cdot 1-1=2+a \\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow 2+a=1+b \Rightarrow \boxed{a=b-1}$$

La función queda $f(x)=\begin{cases} (b-1)x^3-2x^2+5x-1\ si\ x<1 \\ bx^2-3x+4 & si\ x\geq 1 \end{cases}$.

Para que la función sea derivable en $x=1$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$f(x)=\begin{cases} (b-1)x^3-2x^2+5x-1\ si\ x<1 \\ bx^2-3x+4 & si\ x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 3(b-1)x^2-4x+5 & si\ x<1 \\ 2bx-3 & si\ x>1 \end{cases}$$

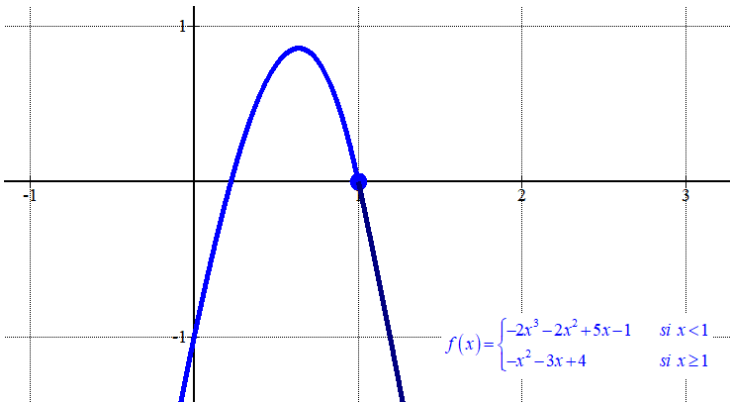
$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 3(b-1)x^2-4x+5=3(b-1)\cdot 1^2-4\cdot 1+5=1+3b-3=3b-2 \\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2bx-3=2b\cdot 1-3=2b-3 \\ f'(1^-)=f'(1^+) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3b-2=2b-3 \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

Para $b=-1$ tenemos que $a=-1-1=-2$

La función es continua y derivable en 0 para $a=-2$ y $b=-1$.

La función queda $f(x)=\begin{cases} -2x^3-2x^2+5x-1 & si\ x<1 \\ -x^2-3x+4 & si\ x\geq 1 \end{cases}$.



5.2.

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la integral siguiente: $\int (x \ln x)\, dx$

b) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{2x^3-3x^2+x}$

a) Calculamos la integral usando el método de integración por partes.

$$\int (x\ln x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \to du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = xdx \to v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4} + K}$$

b) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{2x^3-3x^2+x} = \frac{1^3-4\cdot 1^2+5-2}{2\cdot 1^3-3\cdot 1^2+1} = \frac{0}{0} = \ldots$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline 1 & & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow x^3-4x^2+5x-2 = (x-1)(x^2-3x+2)$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -3 & 1 \\ \hline 1 & & 2 & -1 \\ \hline & 2 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow 2x^3-3x^2+x = x(2x^2-3x+1) = x(x-1)(2x-1)$$

$$\ldots = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2-3x+2)}{x\cancel{(x-1)}(2x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x(2x-1)} = \frac{1^2-3+2}{1\cdot(2-1)} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$