

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2026-2027 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Modelo orientativo
--	--	-----------------------

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. Dos rectas r y s en un mismo plano π se cortan perpendicularmente en un punto C . La recta r está determinada por los puntos $P(1, 0, 2)$ y $Q(0, 2, 4)$ y la recta s está determinada por $A(0, 4, 2)$ y el punto C .

- (1 punto) Halle las ecuaciones del plano π y las coordenadas de C .
- (1 punto) Halle un punto R de la recta s tal que la distancia de R a Q sea igual a la distancia de P a Q .

Pregunta 2. Sea la función:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

a) (1 punto) Halle las asíntotas horizontales de $f(x)$.

b) (1 punto) Halle $\int_0^{\ln(3)} (f(x) + 1) dx$.

Pregunta 3. Para llegar a tiempo a primera hora al instituto, Ana debe coger a las ocho de la mañana una de las tres líneas, L1, L2 o L3, que parten de la estación de autobuses y tienen parada cerca del instituto. Las probabilidades de poder coger los autobuses a las ocho de la mañana en esta estación son de $2/3$ para L1, $4/5$ para L2 y $3/5$ para L3. Estos tres sucesos son independientes. Si Ana está a las 8 de la mañana en la estación de autobuses, se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que Ana llegue a tiempo a primera hora a su instituto.
- (1 punto) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:
 - Calcular la probabilidad de que no pueda coger la línea L2 sabiendo que solo puede coger una de las otras dos líneas.
 - Calcular la probabilidad de que pueda coger exactamente dos de las tres líneas.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 4.1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (a+2)x + y + z = a \\ x - ay + 3z = 0 \\ 3x + ay + z = 1 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a .
- (1 punto) Resolver el sistema para $a=1$.

Pregunta 4.2. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

donde a es un número real.

- a) (1 punto) Determine para qué valores de a la matriz A^{2026} es invertible.
- b) (1 punto) Para $a = 0$, pruebe que $A^3 = 2A$ y calcule la matriz A^9 .

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 5.1. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \in [0, 2] \\ ax^2 + bx & \text{si } x \in (2, 5) \\ -(x-5)^2 + 15 & \text{si } x \in [5, 7] \end{cases}.$$

- a) (1 punto) Halle los valores de a y b para los que la función $f(x)$ es continua en $[0, 7]$
- b) (1 punto) La longitud de la gráfica de una función $f(x)$ en un intervalo $[x_0, x_1]$ se

calcula con la integral $L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Utilice la fórmula dada para calcular la

longitud de la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[0, 2]$.

Pregunta 5.2. Sea $f(x) = \frac{-2x+1}{x-1}$.

- a) (1 punto) Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.
- b) (1 punto) Halle, si existen, los puntos de la gráfica de $f(x)$ cuya recta tangente tenga pendiente 1.

SOLUCIONES

Pregunta 1. Dos rectas r y s en un mismo plano π se cortan perpendicularmente en un punto C . La recta r está determinada por los puntos $P(1, 0, 2)$ y $Q(0, 2, 4)$ y la recta s está determinada por $A(0, 4, 2)$ y el punto C .

- a) (1 punto) Halle las ecuaciones del plano π y las coordenadas de C .
 b) (1 punto) Halle un punto R de la recta s tal que la distancia de R a Q sea igual a la distancia de P a Q .

a) Hallamos la ecuación del plano π . Este plano está definido por los puntos A , P y Q .

$$\left. \begin{array}{l} A(0, 4, 2) \in \pi \\ P(1, 0, 2) \in \pi \\ Q(0, 2, 4) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{PA} = (0, 4, 2) - (1, 0, 2) = (-1, 4, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (0, 2, 4) - (1, 0, 2) = (-1, 2, 2) \\ Q(0, 2, 4) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-4 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x + 0 - 2(z - 4) + 4(z - 4) + 2(y - 2) - 0 = 0 \Rightarrow 8x - 2z + 8 + 4z - 16 + 2y - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: 8x + 2y + 2z - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 4x + y + z - 6 = 0}$$

La ecuación del plano es $\pi: 4x + y + z - 6 = 0$.

Hallamos la ecuación de la recta r . Esta recta contiene los puntos P y Q .

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 0, 2) \in r \\ Q(0, 2, 4) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 2) \\ Q(0, 2, 4) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 0 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

Hallamos la ecuación de la recta s . Sabemos que la recta s es perpendicular al vector director de la recta r y al vector normal del plano π . Un vector director de la recta es el producto vectorial del vector director de la recta r y un vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 2, 2) \\ \pi: 4x + y + z - 6 = 0 \rightarrow \vec{n} = (4, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i + 8j - k - 8k + j - 2i =$$

$$= 0i + 9j - 9k = (0, 9, -9) \Rightarrow \vec{u}_s = \frac{1}{9}(0, 9, -9) = (0, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (0, 1, -1) \\ A(0, 4, 2) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 + \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$$

Hallamos las coordenadas del punto C como la intersección de las rectas r y s .

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2 + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 + \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 2 - \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \\ 2 + 2\lambda = 4 + \alpha \\ 4 + 2\lambda = 2 - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -0 = 0 \\ y = 2 + 2 \cdot 0 = 2 \\ z = 4 + 2 \cdot 0 = 4 \end{cases} \Rightarrow C = Q(0, 2, 4)$$

Las rectas se cortan en el punto Q.

b) Un punto R de la recta s tiene coordenadas $R(0, 4 + \alpha, 2 - \alpha)$. Hallamos el valor de α para que se cumpla lo pedido.

$$\left. \begin{array}{l} R(0, 4 + \alpha, 2 - \alpha) \\ Q(0, 2, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{RQ} = (0, 2, 4) - (0, 4 + \alpha, 2 - \alpha) = (0, -2 - \alpha, 2 + \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(R, Q) = |\overrightarrow{RQ}| = \sqrt{0^2 + (-2 - \alpha)^2 + (2 + \alpha)^2} = \sqrt{2(2 + \alpha)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 0, 2) \\ Q(0, 2, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 2) \Rightarrow d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$d(R, Q) = d(P, Q) \Rightarrow \sqrt{2(2 + \alpha)^2} = 3 \Rightarrow 2(2 + \alpha)^2 = 9 \Rightarrow (2 + \alpha)^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 + \alpha = \sqrt{\frac{9}{2}} \rightarrow \alpha = \frac{3}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 \\ 2 + \alpha = -\sqrt{\frac{9}{2}} \rightarrow \alpha = \frac{-3}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{-3\sqrt{2}}{2} - 2 \end{cases}$$

Existen dos puntos R que cumplen las condiciones pedidas.

$$\text{Si } \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 \text{ entonces } R_1 \left(0, 4 + \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2, 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 \right) = \left(0, 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, 4 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right).$$

$$\text{Si } \alpha = \frac{-3\sqrt{2}}{2} - 2 \text{ entonces } R_2 \left(0, 4 + \frac{-3\sqrt{2}}{2} - 2, 2 - \frac{-3\sqrt{2}}{2} + 2 \right) = \left(0, 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}, 4 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right).$$

Pregunta 2. Sea la función:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

a) (1 punto) Halle las asíntotas horizontales de $f(x)$.

b) (1 punto) Halle $\int_0^{\ln(3)} (f(x) + 1) dx$.

a) Las asíntotas horizontales tienen la ecuación $y = b$.

Estudiamos la situación cuando x tiende a $+\infty$.

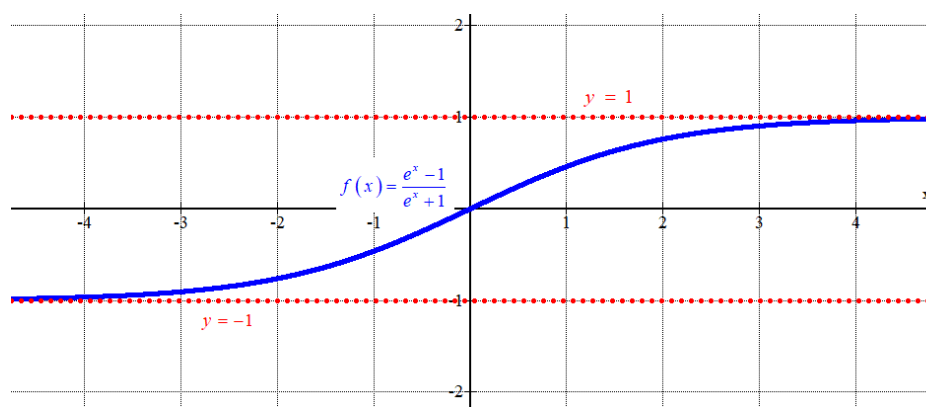
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^{+\infty} - 1}{e^{+\infty} + 1} = \frac{+\infty - 1}{+\infty + 1} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Estudiamos la situación cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^{-\infty} - 1}{e^{-\infty} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

La recta $y = -1$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.



b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$f(x) + 1 = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + 1 = \frac{e^x - 1 + e^x + 1}{e^x + 1} = \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

$$\int (f(x) + 1) dx = \int \frac{2e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{2}{e^x + 1} e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ e^x = t \rightarrow e^x dx = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{2}{t + 1} dt = 2 \int \frac{1}{t + 1} dt = 2 \ln |t + 1| = \ln (t + 1)^2 = \ln (e^x + 1)^2 + K$$

Aplicamos lo obtenido al cálculo de la integral definida.

$$\int_0^{\ln(3)} (f(x) + 1) dx = \left[\ln (e^x + 1)^2 \right]_0^{\ln(3)} = \ln (e^{\ln(3)} + 1)^2 - \ln (e^0 + 1)^2 =$$

$$= \ln (3 + 1)^2 - \ln (1 + 1)^2 = \ln 16 - \ln 4 = \ln \frac{16}{4} = \boxed{\ln 4}$$

Pregunta 3. Para llegar a tiempo a primera hora al instituto, Ana debe coger a las ocho de la mañana una de las tres líneas, L1, L2 o L3, que parten de la estación de autobuses y tienen parada cerca del instituto. Las probabilidades de poder coger los autobuses a las ocho de la mañana en esta estación son de $2/3$ para L1, $4/5$ para L2 y $3/5$ para L3. Estos tres sucesos son independientes. Si Ana está a las 8 de la mañana en la estación de autobuses, se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que Ana llegue a tiempo a primera hora a su instituto.
 b) (1 punto) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:
 b1) Calcular la probabilidad de que no pueda coger la línea L2 sabiendo que solo puede coger una de las otras dos líneas.
 b2) Calcular la probabilidad de que pueda coger exactamente dos de las tres líneas.

- a) Llamamos A1, A2 y A3 a los sucesos coger el autobús de la línea L1, L2 o L3, respectivamente. Ana llega tarde si no puede coger ninguno de los tres autobuses. Hallamos la probabilidad de que llegue tarde.

$$P(\overline{A1} \cap \overline{A2} \cap \overline{A3}) = \{\text{Sucesos independientes}\} = P(\overline{A1})P(\overline{A2})P(\overline{A3}) =$$

$$= \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{75}$$

El suceso contrario a llegar tarde es llegar a tiempo.

$$P(\overline{\overline{A1} \cap \overline{A2} \cap \overline{A3}}) = 1 - P(\overline{A1} \cap \overline{A2} \cap \overline{A3}) = 1 - \frac{2}{75} = \boxed{\frac{73}{75}}$$

La probabilidad de que Ana llegue a tiempo a primera hora a su instituto vale $\frac{73}{75}$.

- b1) Debemos hallar $P(\overline{A2} / [(A1 \cap \overline{A3}) \cup (\overline{A1} \cap A3)])$. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\overline{A2} / [(A1 \cap \overline{A3}) \cup (\overline{A1} \cap A3)]) = \frac{P(\overline{A2} \cap [(A1 \cap \overline{A3}) \cup (\overline{A1} \cap A3)])}{P((A1 \cap \overline{A3}) \cup (\overline{A1} \cap A3))} =$$

$$= \frac{P((\overline{A2} \cap A1 \cap \overline{A3}) \cup (\overline{A2} \cap \overline{A1} \cap A3))}{P(A1 \cap \overline{A3}) + P(\overline{A1} \cap A3)} = \frac{P(\overline{A2} \cap A1 \cap \overline{A3}) + P(\overline{A2} \cap \overline{A1} \cap A3)}{P(A1)P(\overline{A3}) + P(\overline{A1})P(A3)} =$$

$$= \frac{P(\overline{A2})P(A1)P(\overline{A3}) + P(\overline{A2})P(\overline{A1})P(A3)}{P(A1)P(\overline{A3}) + P(\overline{A1})P(A3)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{\frac{7}{75}}{\frac{7}{15}} = \boxed{\frac{1}{5} = 0.2}$$

- b2) Debemos hallar $P((A1 \cap A2 \cap \overline{A3}) \cup (A1 \cap \overline{A2} \cap A3) \cup (\overline{A1} \cap A2 \cap A3))$.

$$\begin{aligned}
& P\left(\left(A1 \cap A2 \cap \overline{A3}\right) \cup \left(A1 \cap \overline{A2} \cap A3\right) \cup \left(\overline{A1} \cap A2 \cap A3\right)\right) = \\
& = P\left(A1 \cap A2 \cap \overline{A3}\right) + P\left(A1 \cap \overline{A2} \cap A3\right) + P\left(\overline{A1} \cap A2 \cap A3\right) = \\
& = P(A1)P(A2)P(\overline{A3}) + P(A1)P(\overline{A2})P(A3) + P(\overline{A1})P(A2)P(A3) = \\
& = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{16}{75} + \frac{6}{75} + \frac{12}{75} = \boxed{\frac{34}{75}}
\end{aligned}$$

Pregunta 4.1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (a+2)x + y + z = a \\ x - ay + 3z = 0 \\ 3x + ay + z = 1 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a .

b) (1 punto) Resolver el sistema para $a=1$.

a) El sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 3 \\ 3 & a & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 & a \\ 1 & -a & 3 & 0 \\ 3 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 3 \\ 3 & a & 1 \end{vmatrix} = -a(a+2) + 9 + a + 3a - 1 - 3a(a+2) =$$

$$= -a^2 - 2a + 9 + 4a - 1 - 3a^2 - 6a = -4a^2 - 4a + 8 = -4(a^2 + a - 2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -4(a^2 + a - 2) = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \boxed{1=a} \\ \frac{-1-3}{2} = \boxed{-2=a} \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Para este valor la matriz

ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener una

matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -3 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad -3 \quad 9 \quad 0 \\ -3 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -4 \quad 8 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{3 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad -4 \quad 8 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \underbrace{}_A \end{array} \right)$$

El rango de A y el de A/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $a = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Para este valor la matriz

ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener una

matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 3 \quad -2 \quad 1 \quad 1 \\ -3 \quad -6 \quad -9 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -8 \quad -8 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & -8 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 8 \cdot \text{Fila } 1^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 8 \quad 8 \quad -16 \\ 0 \quad -8 \quad -8 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -15 \rightarrow \text{Nueva Fila } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -15}^{A/B} \\ 0 \quad -8 \quad -8 \quad 1 \\ \underbrace{3 \quad -2 \quad 1 \quad 1}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

- b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ utilizando el sistema triangular equivalente obtenido en el caso 2 del apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{3 & 1 & 1 & 1}^{A/B} \\ \hline 0 & -4 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \underbrace{0 & 0 & 0 & 0}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y + z = 1 \\ -4y + 8z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y + z = 1 \\ 1 + 8z = 4y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y + z = 1 \\ y = \frac{1+8z}{4} = \frac{1}{4} + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + \frac{1}{4} + 2z + z = 1 \Rightarrow 3x = 1 - \frac{1}{4} - 3z \Rightarrow 3x = \frac{3}{4} - 3z = 3\left(\frac{1}{4} - z\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} - z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{4} - \lambda \\ y = \frac{1}{4} + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Para $a=1$ las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = \frac{1}{4} - \lambda \\ y = \frac{1}{4} + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

Pregunta 4.2. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

donde a es un número real.

a) (1 punto) Determine para qué valores de a la matriz A^{2026} es invertible.

b) (1 punto) Para $a = 0$, pruebe que $A^3 = 2A$ y calcule la matriz A^9 .

a) La matriz A^{2026} es invertible si su determinante es distinto de cero. Por las propiedades de los determinantes tenemos que $|A^{2026}| = |A|^{2026}$. El determinante de A^{2026} es distinto de cero cuando sea distinto de cero el determinante de la matriz A . Averiguemos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 0 + 0 - 0 - a - a = a^3 - 2a = a(a^2 - 2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a(a^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 2 = 0 \rightarrow a^2 = 2 \rightarrow a = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

La matriz A^{2026} es invertible para cualquier valor de a distinto de 0 , $-\sqrt{2}$ y $+\sqrt{2}$.

b) Para $a = 0$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallamos la expresión de A^3

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1+1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1+1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tenemos que } 2A = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Se cumple la igualdad } A^3 = 2A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la matriz A^9 .

$$A^9 = A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 = 2A \cdot 2A \cdot 2A = 8A^3 = 8 \cdot 2A = 16A = 16 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 \\ 16 & 0 & 16 \\ 0 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 5.1. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x \in [0, 2] \\ ax^2+bx & \text{si } x \in (2, 5) \\ -(x-5)^2+15 & \text{si } x \in [5, 7] \end{cases}$$

a) (1 punto) Halle los valores de a y b para los que la función $f(x)$ es continua en $[0, 7]$

b) (1 punto) La longitud de la gráfica de una función $f(x)$ en un intervalo $[x_0, x_1]$ se calcula con la integral $L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$. Utilice la fórmula dada para calcular la longitud de la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[0, 2]$.

a) Para que la función sea continua deben coincidir el valor de la función con los límites laterales. La función debe ser continua en $x=2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 2 \cdot 2 + 2 = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x + 2 = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} ax^2 + bx = a \cdot 2^2 + 2b = 4a + 2b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a + 2b = 6 \Rightarrow 2a + b = 3 \Rightarrow \boxed{b = 3 - 2a}$$

La función debe ser continua en $x=5$.

$$\left. \begin{aligned} f(5) &= -(5-5)^2 + 15 = 15 \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^-} ax^2 + bx = 25a + 5b \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^+} -(x-5)^2 + 15 = 15 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = f(5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 25a + 5b = 15 \Rightarrow 5a + b = 3 \Rightarrow \boxed{b = 3 - 5a}$$

Reunimos las dos igualdades obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} b &= 3 - 2a \\ b &= 3 - 5a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 - 2a = 3 - 5a \Rightarrow 3a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0} \Rightarrow \boxed{b = 3 - 2 \cdot 0 = 3}$$

Los valores buscados son $a=0$ y $b=3$.

b) La longitud de la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[0, 2]$ es el valor de la integral

$$L = \int_0^2 \sqrt{1+(f'(x))^2} dx. \text{ En el intervalo } [0, 2] \text{ la función tiene la expresión } f(x) = 2x + 2.$$

Su derivada es $f'(x) = 2$. Calculamos la longitud pedida.

$$L = \int_0^2 \sqrt{1+2^2} dx = \int_0^2 \sqrt{5} dx = \left[\sqrt{5}x \right]_0^2 = \sqrt{5} \cdot 2 - \sqrt{5} \cdot 0 = \boxed{2\sqrt{5}}$$

Pregunta 5.2. Sea $f(x) = \frac{-2x+1}{x-1}$.

- a) (1 punto) Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.
 b) (1 punto) Halle, si existen, los puntos de la gráfica de $f(x)$ cuya recta tangente tenga pendiente 1.

- a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$. Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{-2x+1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2 \cdot (x-1) - (-2x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2x+2+2x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Esta expresión de la derivada siempre es positiva. La función es creciente en todo su dominio $\mathbb{R} - \{1\}$.

- b) Para que la recta tangente tenga pendiente 1 la derivada de la función debe ser igual a 1.

$$f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} = 1 \Rightarrow 1 = (x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \rightarrow \boxed{x=2} \\ x-1=-1 \rightarrow \boxed{x=0} \end{cases}$$

Como $f(2) = \frac{-2 \cdot 2 + 1}{2-1} = -3$ y $f(0) = \frac{-2 \cdot 0 + 1}{0-1} = -1$ los puntos que cumplen lo pedido son $(0, -1)$ y $(2, -3)$.