Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

EBAU MURCIA 2017 a 2026



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM
WWW.MATEMATICASPAU.COM

Introducción

Aquí tienes los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad de Murcia desde el año 2017 al 2026. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas de educación secundaria.
Espero que todo lo que aquí aparece os sea útil para preparar el examen de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II en las pruebas Pau de 2027 y os ayude a conseguir buenos resultados.
En la web www.ebaumatematicas.com hay un banco de ejercicios de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II resueltos de años anteriores en Murcia y de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU2026 - **JULIO** 3
PAU2026 - **JUNIO** 19
PAU2025 - **JULIO** 37
PAU2025 - **JUNIO** 55
EBAU2024 - **JULIO** 72
EBAU2024 - **JUNIO** 85
EBAU2023 - **JULIO** 100
EBAU2023 - **JUNIO** 114
EBAU2022 - **JULIO** 129
EBAU2022 - **JUNIO** 141
EBAU2021 - **JULIO** 155
EBAU2021 - **JUNIO** 167
EBAU2020 - **SEPTIEMBRE** 180
EBAU2020 - **JULIO** 193
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. SEPTIEMBRE 2019 208
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. JUNIO 2019 223
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. SEPTIEMBRE 2018 236
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. JUNIO 2018 250
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. SEPTIEMBRE 2017 266
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. JUNIO 2017 280

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

307 - MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS

PAU2026 - **JULIO**

NOTA IMPORTANTE: Las dos primeras preguntas son obligatorias. En las preguntas tres y cuatro, debe seleccionar una opción (A o B) y contestar a todos los apartados. Cada cuestión tiene una puntuación de entre 2 y 3 puntos. Se permite una calculadora no gráfica ni programable.

PREGUNTA 1: (3 puntos)

De los 200 estudiantes de segundo de Bachillerato de un instituto de Molina de Segura, 75 practican taekwondo, 100 hapkido y 50 ambas artes marciales coreanas. Si se elige un alumno al azar, calcular la probabilidad de que:

a) Practique al menos algún arte marcial coreano. **[0,25 puntos]**
b) Practique únicamente hapkido. **[0,5 puntos]**
c) No practique ningún arte marcial coreano. **[0,5 puntos]**
d) Practique solo una de las dos artes marciales coreanas. **[0,5 puntos]**
e) Si el estudiante seleccionado no practica hapkido, calcule la probabilidad de que practique taekwondo. **[0,25 puntos]**

El salario bruto mensual (en euros) de los profesores de artes marciales se distribuye según una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 450 euros. Se preguntó a 81 profesores de artes marciales elegidos al azar y se estableció que el salario medio oscila entre 1383,5 euros y 1616,5 euros.

f) ¿Cuál ha sido el salario medio de los profesores de la muestra si el nivel de confianza que se ha utilizado en el intervalo anterior es del 98%? **[0,5 puntos]**
g) Si se quiere estimar el salario medio poblacional, con un error máximo de 74,5 euros y con un nivel de confianza del 90%, ¿cuál será el tamaño muestral necesario para determinarlo? **[0,5 puntos]**

PREGUNTA 2: (3 puntos)

Dada la función:

$$f(x) = x^3 \cdot (x-5)^2$$

Se pide:

a) Determinar el dominio de $f(x)$. **[0,25 puntos]**
b) Calcule la función derivada $f'(x)$ y determine los puntos críticos. **[0,75 puntos]**
c) Estudie la monotonía de $f(x)$, indicando los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **[1 p]**
d) Determine el valor o valores de x donde la función tiene un extremo relativo. Calcule el valor de la función en dichos puntos. **[0,5 puntos]**
e) Calcule $\int f(x)\,dx$. **[0,5 puntos]**

PREGUNTA 3: (2 puntos)

OPCIÓN A

Un fabricante importante de patinetes eléctricos en España produce dos modelos: el SmartGyro Rockway EVO y el SmartGyro Speedway. El fabricante obtiene 150 euros de beneficio por cada Rockway EVO y 120 euros por cada Speedway. El modelo Rockway EVO requiere 3 horas de ensamblaje y media hora de pintura, mientras que el modelo Speedway necesita 2 horas de ensamblaje

y una hora de pintura. El número máximo de horas de ensamblaje disponibles es de 24 al día y el de pintura, de 8. Además, deben fabricarse al menos 3 unidades del modelo Speedway al día. Se pide:

a) Si el fabricante quiere maximizar el beneficio diario, formule el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,75 puntos]**

b) Represente la región factible. **[0,5 puntos]**

c) Encuentre los vértices de esta región. **[0,25 puntos]**

d) ¿Cuántos patinetes de cada modelo debe producir el fabricante para maximizar el beneficio diario? Calcule el beneficio máximo diario posible. **[0,5 puntos]**

OPCIÓN B

Considere la función objetivo $f(x,y)=3x-2y$ y la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} y \le 7 \\ 3x-y \le 3 \\ x+y \ge 5 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

a) Represente la región factible. **[0,75 puntos]**

b) Encuentre los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**

c) Obtenga los puntos de la región factible donde la función objetivo alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores. **[0,75 puntos]**

PREGUNTA 4: (2 puntos)

OPCIÓN A

Para celebrar el cumpleaños de Bruno, Carmen quiere invitar a merendar a sus amigos en la Pizzería La Romana. Esta pizzería ofrece tres tipos de pizzas: de base fina, de base gruesa y de base rellena de queso. El precio de la pizza de base rellena de queso es 2 euros más que el de las otras dos juntas. Si encarga 6 pizzas de base gruesa se gasta lo mismo que encargando 4 pizzas de base rellena de queso. Y si pide 3 pizzas de base fina, 3 de base gruesa y 7 de base rellena de queso se gastará 204 euros.

a) Plantee el sistema de ecuaciones que le permita averiguar a Carmen cuánto cuesta cada tipo de pizza. **[1 punto]**

b) Resuelva razonadamente el sistema planteado. **[1 punto]**

OPCIÓN B

Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & 3 \\ 1 & 1 & 2-m \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

a) Estudie el rango de A dependiendo del valor de *m*. **[1 punto]**

b) Para $m=-1$, resuelva $AX=B^t$. **[1 punto]**

SOLUCIONES

PREGUNTA 1: (3 puntos)

De los 200 estudiantes de segundo de Bachillerato de un instituto de Molina de Segura, 75 practican taekwondo, 100 hapkido y 50 ambas artes marciales coreanas. Si se elige un alumno al azar, calcular la probabilidad de que:

a) Practique al menos algún arte marcial coreano. **[0,25 puntos]**

b) Practique únicamente hapkido. **[0,5 puntos]**

c) No practique ningún arte marcial coreano. **[0,5 puntos]**

d) Practique solo una de las dos artes marciales coreanas. **[0,5 puntos]**

e) Si el estudiante seleccionado no practica hapkido, calcule la probabilidad de que practique taekwondo. **[0,25 puntos]**

El salario bruto mensual (en euros) de los profesores de artes marciales se distribuye según una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 450 euros. Se preguntó a 81 profesores de artes marciales elegidos al azar y se estableció que el salario medio oscila entre 1383,5 euros y 1616,5 euros.

f) ¿Cuál ha sido el salario medio de los profesores de la muestra si el nivel de confianza que se ha utilizado en el intervalo anterior es del 98%? [0,5 puntos]

g) Si se quiere estimar el salario medio poblacional, con un error máximo de 74,5 euros y con un nivel de confianza del 90%, ¿cuál será el tamaño muestral necesario para determinarlo? **[0,5 puntos]**

a) Llamamos T al suceso "el estudiante practica taekwondo" y H a "el estudiante practica hapkido". Por la información proporcionada sabemos que:

$$P(T)=\frac{75}{200}=0.375,\ P(H)=\frac{100}{200}=0.5,\ P(T\cap H)=\frac{50}{200}=0.25\,.$$

Nos piden calcular $P(T\cup H)$.

$$P(T\cup H)=P(T)+P(H)-P(T\cap H)=0.375+0.5-0.25=\boxed{0.625}$$

b) Debemos calcular $P(\overline{T}\cap H)$.

$$P(\overline{T}\cap H)=P(H)-P(T\cap H)=0.5-0.25=\boxed{0.25}$$

c) Debemos calcular $P(\overline{T}\cap\overline{H})$.

$$P(\overline{T}\cap\overline{H})=P(\overline{T\cup H})=1-P(T\cup H)=1-0.625=\boxed{0.375}$$

d) Debemos calcular $P\left((\overline{T}\cap H)\cup(T\cap\overline{H})\right)$.

$$P\left((\overline{T}\cap H)\cup(T\cap\overline{H})\right)=P(\overline{T}\cap H)+P(T\cap\overline{H})=0.25+P(T)-P(T\cap H)=$$

$$=0.25+0.375-0.25=\boxed{0.375}$$

e) Debemos calcular $P(T/\overline{H})$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(T/\overline{H})=\frac{P(T\cap\overline{H})}{P(\overline{H})}=\frac{P(T)-P(T\cap H)}{1-P(H)}=\frac{0.375-0.25}{1-0.5}=\boxed{0.25}$$

OTRA FORMA DE H ACERLO
Realizamos una tabla de contingencia.

	Taekwondo	**No taekwondo**	
Hapkido	50		100
No hapkido			
	75		200

Completamos la tabla.

	Taekwondo	**No taekwondo**	
Hapkido	50	50	100
No hapkido	25	75	100
	75	125	200

Aplicamos la regla de Laplace para obtener las probabilidades pedidas.

a) De los 200 estudiantes hay 75 que no practican ninguna de las artes marciales, por lo que son 200 – 75 =125 los que practican alguna de estas artes. La probabilidad de que el joven seleccionado practique alguna de las artes marciales vale $\frac{125}{200}=0.625$.

b) De los 200 jóvenes hay 50 que practican hapkido y no taekwondo. La probabilidad de que el joven seleccionado solo practique hapkido vale $\frac{50}{200}=0.25$.

c) De los 200 jóvenes hay 75 que no practican ninguna de las artes marciales. La probabilidad de que el joven seleccionado no practique ningún arte marcial vale $\frac{75}{200}=0.375$.

d) De los 200 estudiantes hay 25 que practicas taekwondo y no hapkido y 50 que practican hapkido y no taekwondo. La probabilidad de que el estudiante elegido solo practique una de las artes marciales vale $\frac{25+75}{200}=0.375$.

e) De los 100 jóvenes que no practican hapkido hay 25 que practican taekwondo. La probabilidad de que el joven seleccionado que no practica hapkido practique taekwondo vale $\frac{25}{100}=0.25$.

Seguimos con el resto del ejercicio.

f) Consideramos X = "El salario bruto mensual (en euros) de los profesores de artes marciales". $X=N(\mu,450)$.

El intervalo de confianza es (1383.5, 1616.5) y la media muestral es el valor central del intervalo.

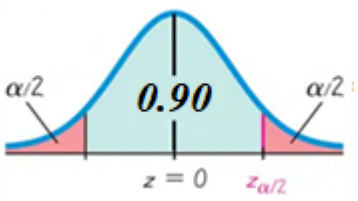
$$\bar{x}=\frac{1383.5+1616.5}{2}=1500\,euros$$

El salario medio de los profesores de la muestra es de 1500 euros.

g) Obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90%.

$$1-\alpha=0.90\Rightarrow\alpha=0.1\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.05\Rightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0.95\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N}(0,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{1.64+1.65}{2}=1.645$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120		
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517		
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910		
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293		
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664		
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019		
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357		
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673		
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967		
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238		
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485		
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708		
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907		
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082		
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236		
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370		
1.6					0.9495	0.9505
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599

Utilizamos la fórmula del error.

$$\left.\begin{matrix}Error=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\\ Error=74.5\\ \sigma=450\end{matrix}\right\}\Rightarrow74.5=1.645\cdot\frac{450}{\sqrt{n}}\Rightarrow74.5\sqrt{n}=740.25\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{740.25}{74.5}\Rightarrow n=\left(\frac{740.25}{74.5}\right)^2\simeq98.73$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 99 profesores.

PREGUNTA 2: (3 puntos)
Dada la función:

$$f(x)=x^3\cdot(x-5)^2$$

Se pide:
a) Determinar el dominio de $f(x)$. **[0,25 puntos]**
b) Calcule la función derivada $f'(x)$ y determine los puntos críticos. **[0,75 puntos]**
c) Estudie la monotonía de $f(x)$, indicando los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **[1 p]**
d) Determine el valor o valores de x donde la función tiene un extremo relativo. Calcule el valor de la función en dichos puntos. **[0,5 puntos]**
e) Calcule $\int f(x)\,dx$. **[0,5 puntos]**

a) La función es polinómica y su dominio son todos los números reales. El dominio es $\mathbb{R}$.

b) Obtenemos la expresión polinómica de la función y luego derivamos.

$$f(x)=x^3\cdot(x-5)^2=x^3\left(x^2+25-10x\right)=x^5-10x^4+25x^3$$

$$f'(x)=5x^4-40x^3+75x^2=5x^2\left(x^2-8x+15\right)$$

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos).

$$f'(x)=0\Rightarrow 5x^2\left(x^2-8x+15\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ x^2-8x+15=0\rightarrow x=\dfrac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 15}}{2}=\\ =\dfrac{8\pm 2}{2}=\begin{cases}\dfrac{8+2}{2}=\boxed{5=x}\\ \dfrac{8-2}{2}=\boxed{3=x}\end{cases}\end{cases}$$

Los tres puntos críticos son: $x=0$, $x=3$ y $x=5$.
Como $f(0)=0^3\cdot(0-5)^2=0$, $f(3)=3^3\cdot(3-5)^2=108$ y $f(5)=5^3\cdot(5-5)^2=0$ los puntos críticos tienen coordenadas (0, 0), (3, 108) y (5, 0).

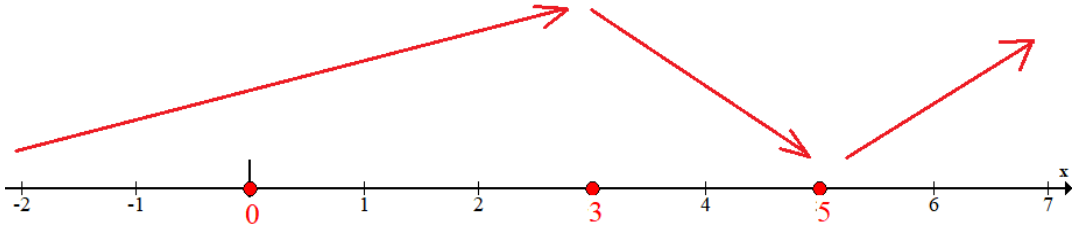
c) Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1)=5(-1)^4-40(-1)^3+75(-1)^2=5+40+75>0$. La función crece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,3)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=5\cdot 1^4-40\cdot 1^3+75\cdot 1^2=5-40+75=40>0$. La función crece en $(0,3)$.
- En el intervalo $(3,5)$ tomamos $x=4$ y la derivada vale $f'(4)=5\cdot 4^4-40\cdot 4^3+75\cdot 4^2=-80<0$. La función decrece en $(3,5)$.

- En el intervalo $(5,+\infty)$ tomamos $x=10$ y la derivada vale
  $f'(10)=5\cdot10^4-40\cdot10^3+75\cdot10^2=17500>0$. La función crece en $(5,+\infty)$.

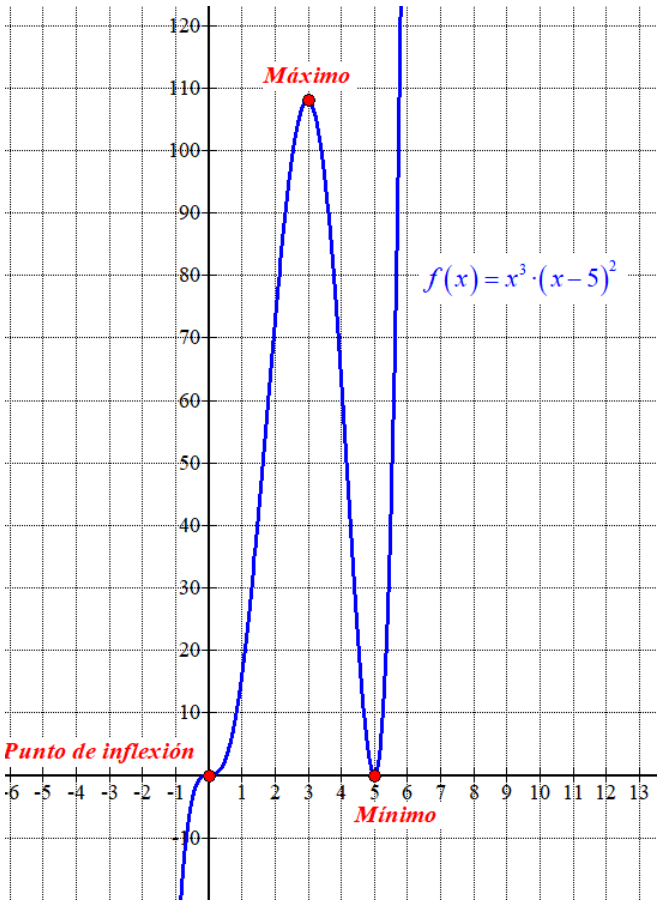
La función crece en $(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$ y decrece en $(3,5)$.

La función sigue el esquema siguiente.



d) Observando la evolución de la función podemos decir que tiene un máximo relativo en $x=3$ y un mínimo relativo en $x=5$.

El máximo relativo de la función es $f(3)=108$ y el mínimo relativo es $f(5)=0$.



e) Calculamos la integral.

$$\int f(x)dx=\int x^5-10x^4+25x^3dx=\frac{x^6}{6}-\frac{10x^5}{5}+\frac{25x^4}{4}=\boxed{\frac{x^6}{6}-2x^5+\frac{25x^4}{4}+C}$$

PREGUNTA 3: (2 puntos)
OPCIÓN A

Un fabricante importante de patinetes eléctricos en España produce dos modelos: el SmartGyro Rockway EVO y el SmartGyro Speedway. El fabricante obtiene 150 euros de beneficio por cada Rockway EVO y 120 euros por cada Speedway. El modelo Rockway EVO requiere 3 horas de ensamblaje y media hora de pintura, mientras que el modelo Speedway necesita 2 horas de ensamblaje y una hora de pintura. El número máximo de horas de ensamblaje disponibles es de 24 al día y el de pintura, de 8. Además, deben fabricarse al menos 3 unidades del modelo Speedway al día. Se pide:

a) Si el fabricante quiere maximizar el beneficio diario, formule el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,75 puntos]**

b) Represente la región factible. **[0,5 puntos]**

c) Encuentre los vértices de esta región. **[0,25 puntos]**

d) ¿Cuántos patinetes de cada modelo debe producir el fabricante para maximizar el beneficio diario? Calcule el beneficio máximo diario posible. **[0,5 puntos]**

a) Llamamos "x" al número de patinetes SmartGyro Rockway EVO e "y" al número de patinetes SmartGyro Speedway que se fabrican al día. Realizamos una tabla con los datos del problema

	Horas de ensamblaje	Horas de pintura	Beneficio
Nº patinetes Rockway (x)	$3x$	$0.5x$	$150x$
Nº patinetes Speedway (y)	$2y$	y	$120y$
TOTALES	$3x+2y$	$0.5x+y$	$150x+120y$

La función que queremos maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x,y)=150x+120y$.

Las restricciones son las siguientes.

El número máximo de horas de ensamblaje disponibles es de 24 al día y el de pintura, de 8 → $3x+2y\le 24;\ 0.5x+y\le 8$

Deben fabricarse al menos 3 unidades del modelo Speedway al día → $y\ge 3$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y\le 24 \\ 0.5x+y\le 8 \\ y\ge 3 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y\le 24 \\ x+2y\le 16 \\ y\ge 3 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x+2y=24$

x	$y=\frac{24-3x}{2}$
0	12
4	6
6	3
8	0

$x+2y=16$

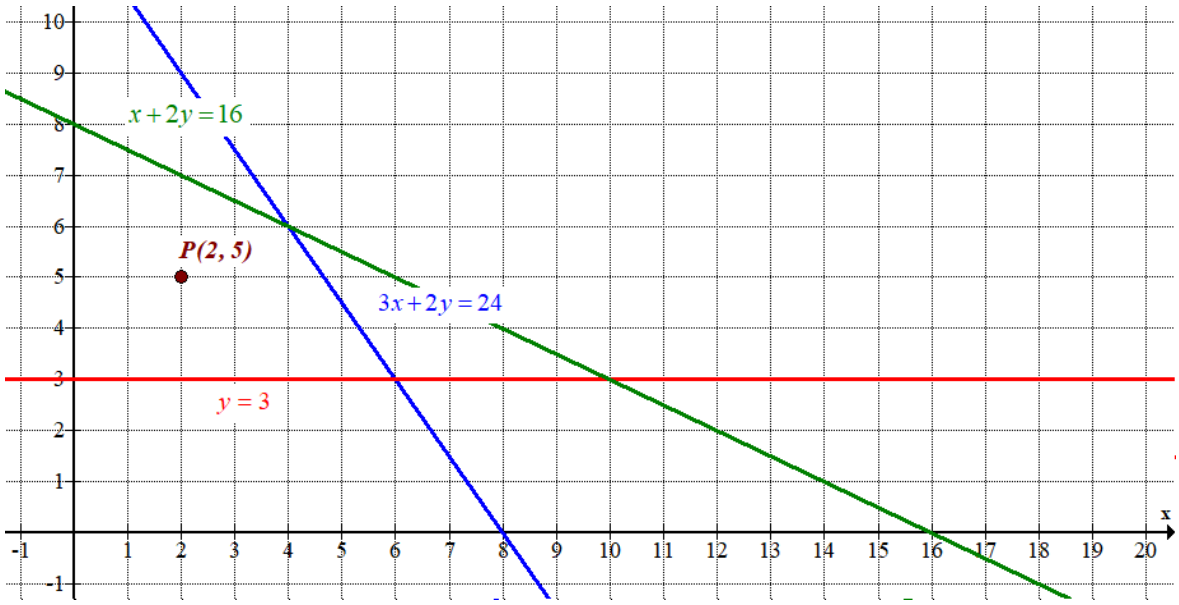
x	$y=\frac{16-x}{2}$
0	8
4	6
10	3
16	0

$y=3$

x	$y=3$
0	3
6	3
10	3

$x\ge 0;\ y\ge 0$

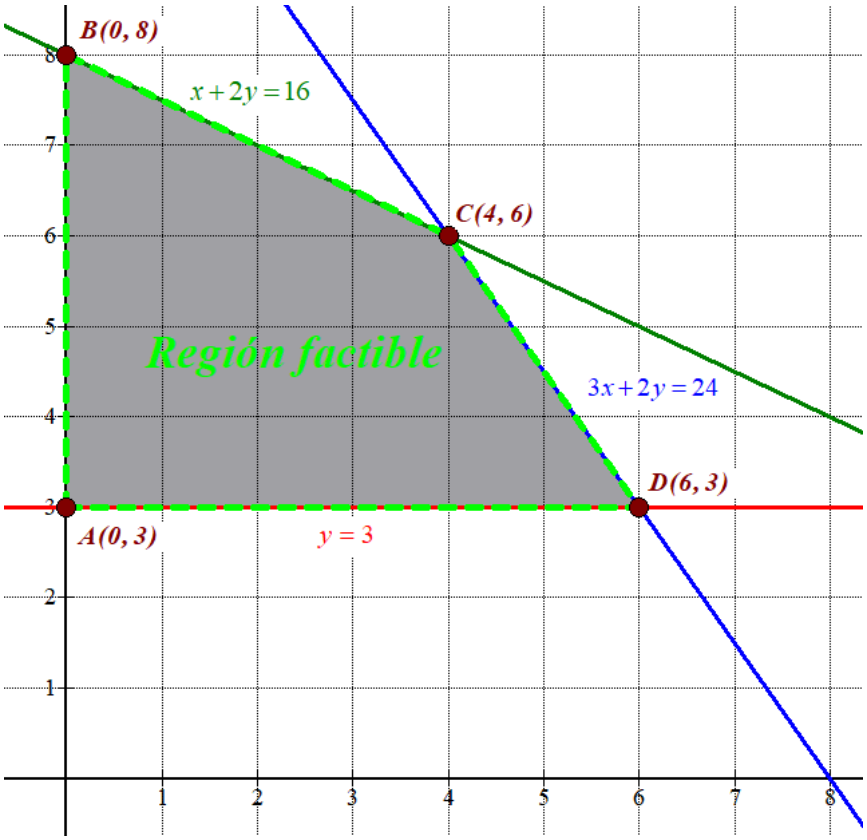
Primer cuadrante



La región factible está situada en el primer cuadrante por debajo de las rectas oblicuas azul y verde, y por encima de la recta horizontal roja. Comprobamos que el punto P(2, 5) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot 2+2\cdot 5\le 24 \\ 2+2\cdot 5\le 16 \\ 5\ge 3 \\ 2\ge 0;\ 5\ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



c) Las coordenadas de los vértices se pueden obtener del dibujo y de las tablas de valores que hemos elaborado. Los vértices de la región factible son A(0, 3), B(0, 8), C(4, 6) y D(6, 3).

d) Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 150x + 120y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

A(0, 3) → $B(0,3) = 150 \cdot 0 + 120 \cdot 3 = 360$

B(0, 8) → $B(0,8) = 150 \cdot 0 + 120 \cdot 8 = 960$

C(4, 6) → $B(4,6) = 150 \cdot 4 + 120 \cdot 6 = 1320$ *Máximo*

D(6, 3) → $B(6,3) = 150 \cdot 6 + 120 \cdot 3 = 1260$

El valor máximo es 1320 y se alcanza en el vértice C(4, 6).
El máximo beneficio que se puede conseguir es de 1320 euros fabricando 4 patinetes SmartGyro Rockway EVO y 6 patinetes SmartGyro Speedway.

.

PREGUNTA 3: (2 puntos)
OPCIÓN B

Considere la función objetivo $f(x,y)=3x-2y$ y la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} y \le 7 \\ 3x-y \le 3 \\ x+y \ge 5 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

a) Represente la región factible. **[0,75 puntos]**
b) Encuentre los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**
c) Obtenga los puntos de la región factible donde la función objetivo alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores. **[0,75 puntos]**

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$y=7$

x	$y=7$
0	7
1	7
2	7

$3x-y=3$

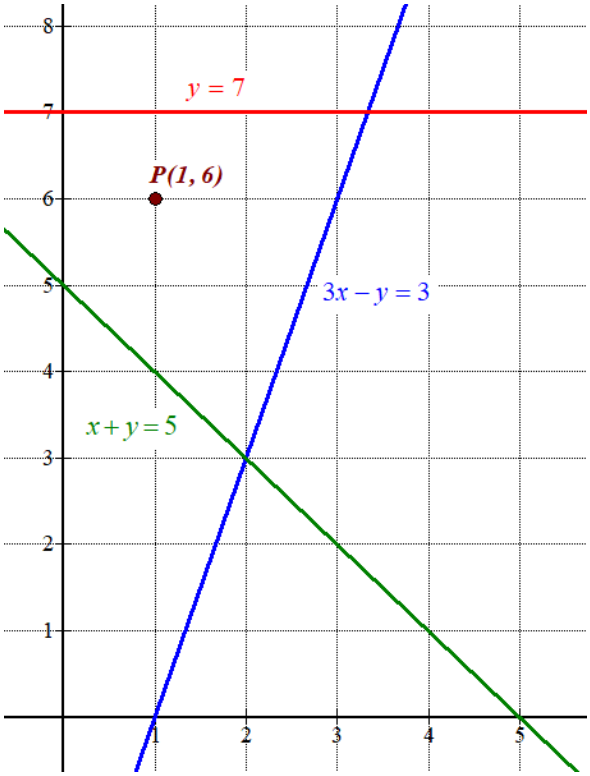
x	$y=3x-3$
0	–3
1	0
2	3

$x+y=5$

x	$y=5-x$
0	5
2	3
5	0

$x \ge 0;\ y \ge 0$

Primer cuadrante

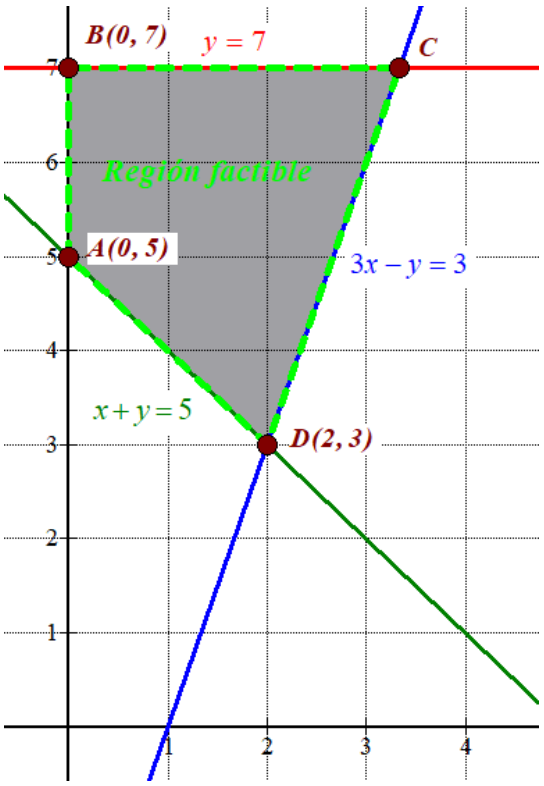


Las restricciones son $\begin{cases} y \le 7 \\ 3x - y \le 3 \\ x + y \ge 5 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \le 7 \\ 3x - 3 \le y \\ y \ge 5 - x \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$.

La región factible está situada en el primer cuadrante por encima de las rectas oblicuas azul y verde, y por debajo de la recta horizontal roja. Comprobamos que el punto P(1,6) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\begin{cases} 6 \le 7 \\ 3 \cdot 1 - 3 \le 6 \\ 1 + 6 \ge 5 \\ 1 \ge 0;\ 6 \ge 0 \end{cases}$$ ¡Se cumplen todas!

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



b) Las coordenadas de tres de los vértices se pueden obtener del dibujo y de la tabla de valores que hemos elaborado. Hallamos las coordenadas del vértice C.

$$\left.\begin{matrix} y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x - 7 = 3 \Rightarrow 3x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{3} \Rightarrow C\left(\frac{10}{3}, 7\right)$$

Los vértices de la región factible son A(0, 5), B(0, 7), $C\left(\frac{10}{3}, 7\right)$ y D(2, 3).

c) Valoramos la función $f(x, y) = 3x - 2y$ en cada uno de los vértices.

A(0, 5) → $f(0,5) = 3\cdot 0 - 2\cdot 5 = -10$

B(0, 7) → $f(0,7) = 3\cdot 0 - 2\cdot 7 = -14$ *Mínimo*

$C\left(\frac{10}{3}, 7\right)$ → $f\left(\frac{10}{3}, 7\right) = 3\cdot\frac{10}{3} - 2\cdot 7 = -4$

D(2, 3) → $f(2,3) = 3\cdot 2 - 2\cdot 3 = 0$ *Máximo*

El valor mínimo es –14 y se alcanza en B(0, 7). El valor máximo es 0 y se alcanza en el vértice D(2, 3).

PREGUNTA 4: (2 puntos)
OPCIÓN A

Para celebrar el cumpleaños de Bruno, Carmen quiere invitar a merendar a sus amigos en la Pizzería La Romana. Esta pizzería ofrece tres tipos de pizzas: de base fina, de base gruesa y de base rellena de queso. El precio de la pizza de base rellena de queso es 2 euros más que el de las otras dos juntas. Si encarga 6 pizzas de base gruesa se gasta lo mismo que encargando 4 pizzas de base rellena de queso. Y si pide 3 pizzas de base fina, 3 de base gruesa y 7 de base rellena de queso se gastará 204 euros.

a) Plantee el sistema de ecuaciones que le permita averiguar a Carmen cuánto cuesta cada tipo de pizza. **[1 punto]**

b) Resuelva razonadamente el sistema planteado. **[1 punto]**

a) Llamamos "x" al precio de una pizza de base fina, "y" al precio de una pizza de base gruesa y "z" al precio de una de base rellena de queso.

El precio de la pizza de base rellena de queso es 2 euros más que el de las otras dos juntas → $z = x + y + 2$.

Si encarga 6 pizzas de base gruesa se gasta lo mismo que encargando 4 pizzas de base rellena de queso → $6y = 4z$.

Si pide 3 pizzas de base fina, 3 de base gruesa y 7 de base rellena de queso se gastará 204 euros → $3x + 3y + 7z = 204$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+3y+7z=204 \\ z=x+y+2 \\ 6y=4z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+3y+7z=204 \\ z=x+y+2 \\ 3y=2z \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+3y+7z=204 \\ z=x+y+2 \\ 3y=2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+3y+7(x+y+2)=204 \\ 3y=2(x+y+2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+3y+7x+7y+14=204 \\ 3y=2x+2y+4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10x+10y=190 \\ y=2x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=19 \\ y=2x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow x+2x+4=19 \Rightarrow 3x=15 \Rightarrow \boxed{x=5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=2\cdot 5+4=14} \Rightarrow \boxed{z=5+14+2=21}$$

Una pizza de base fina cuesta 5 euros, una de base gruesa cuesta 14 euros y una de base rellena de queso cuesta 21 euros.

PREGUNTA 4: (2 puntos)
OPCIÓN B
Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & m & 3\\ 1 & 1 & 2-m\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & m\end{pmatrix}$$

a) Estudie el rango de A dependiendo del valor de *m*. **[1 punto]**
b) Para $m=-1$, resuelva $AX=B^t$. **[1 punto]**

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & m & 3\\ 1 & 1 & 2-m\end{vmatrix}=m(2-m)+3+2-2m-(2-m)-3=$$

$$=\cancel{2m}-m^2+5-\cancel{2m}-2+m-3=-m^2+m$$

$$|A|=0\Rightarrow -m^2+m=0\Rightarrow m(-m+1)=0\Rightarrow \begin{cases}\boxed{m=0}\\ -m+1=0\rightarrow \boxed{m=1}\end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes que se nos plantean.

Situación 1. $m\neq 0$ y $m\neq 1$
En este caso el determinante es distinto de cero y el rango de A es 3.

Situación 2. $m=0$
En este caso el determinante vale cero y el rango de A es menor de 3.
La matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Observamos que las filas primera y tercera son iguales. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 3ª su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-1=-1\neq 0$$

El rango de A es 2.

Situación 3. $m=1$
En este caso el determinante de A vale cero y el rango de A es menor de 3.
La matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Observamos que las columnas primera y segunda son iguales. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 1ª y la columna 1ª su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-3=-2\neq 0\,.$$

El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ el rango de A es 3 y si $m = 0$ o $m = 1$ el rango de A es 2.

b) Para $m = -1$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, su determinante es distinto de cero y tiene matriz inversa. La calculamos

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3+3+2+2-3-3 = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial: $AX = B^t \Rightarrow X = A^{-1}B^t$.
Terminamos de hallar la expresión de la matriz X.

$$X = A^{-1}B^t = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1-5 \\ 1+1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $m = -1$ la matriz X solución de la ecuación $AX = B^t$ es $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

307 - MATEMÁTICAS CCSS

PAU2026 - **JUNIO**

NOTA IMPORTANTE: Las dos primeras preguntas son obligatorias. En las preguntas tres y cuatro, debe seleccionar una opción (A o B) y contestar a todos los apartados. Cada cuestión tiene una puntuación de entre 2 y 3 puntos. Se permite una calculadora no gráfica ni programable.

PREGUNTA 1: (3 puntos)

Para celebrar el fin de la PAU, Lorena, Ana y Sofía planean un interrail por Italia. En Roma dudan entre dos rutas en tren: Roma Trastévere–La Giustiniana (ruta 1) y La Giustiniana–Bracciano (ruta 2). Para decidir qué ruta hacer consultan en www.interrail.eu los resultados de un estudio realizado a 2.000 jóvenes, de los cuales 800 eligieron la ruta 1, 1.400 la ruta 2 y 300 hicieron ambas rutas. Seleccionando al azar a uno de estos jóvenes:

a) Calcule la probabilidad de que el joven seleccionado haya realizado al menos una de las dos rutas. **[0,25 puntos]**

b) Calcule la probabilidad de que no haya hecho ninguna de las dos rutas. **[0,5 puntos]**

c) Calcule la probabilidad de que haya hecho únicamente la ruta 1. **[0,5 puntos]**

d) Si el joven seleccionado no realizó la ruta 1, calcule la probabilidad de que tampoco haya realizado la ruta 2. **[0,5 puntos]**

El gasto diario por joven en Roma sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica σ=27 euros. Tomando una muestra aleatoria de 81 jóvenes, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional (94,12, 105,88).

e) Calcule el nivel de confianza del intervalo y el valor de la media muestral. **[0,75 puntos]**

f) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 93,42%? **[0,5 puntos]**

PREGUNTA 2: (3 puntos)

Wiam podrá acceder a una importante cantidad de dinero si consigue desbloquear una caja fuerte con un PIN de cinco dígitos, resolviendo un reto de análisis matemático. Para ello, y dada la función

$$f(x)=\frac{2x^2+6}{x-1}$$

tiene que:

a) Calcular el dominio de $f(x)$. **[0,25 puntos]**

b) Estudiar la existencia de asíntotas. **[0,5 puntos]**

c) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. Identificar los extremos relativos utilizando el criterio de la primera derivada. **[0,75 puntos]**

d) Escribir la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$. **[0,5 puntos]**

Por último:

e) Hallar el área de la región limitada por la curva $y=x^2+2$ y las rectas $y=x$, $x = 0$ y $x = 1$. **[1 punto]**

PREGUNTA 3: (2 puntos)

OPCIÓN A

Una panadería artesana de Murcia proveerá el pan para The Champions Burger Murcia 2026. Produce dos tipos de panes: el pan Premium y el pan Clásico. Cada hornada de pan Premium genera un beneficio de 900 euros, y cada hornada de pan Clásico, de 700 euros. Una hornada de pan Premium requiere 1 hora de horno, mientras que el pan clásico requiere 2 horas. La panadería tiene disponibles un máximo de 8 horas de horno al día. Por otro lado, cada hornada de pan premium requiere 3 kg de masa madre, y cada hornada de pan clásico, 2 kg. La panadería dispone de un máximo de 12 kg de masa madre preparada diariamente.
Se pide:
a). Si la panadería quiere maximizar el beneficio diario, formule el problema identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**
b) Represente la región factible. **[0,5 puntos]**
c) Encuentre los vértices de esta región. **[0,25 puntos]**
d) ¿Cuántas hornadas de cada tipo de pan debe hacer la panadería para maximizar el beneficio diario? Calcule el beneficio máximo diario. **[0,5 puntos]**
e) Justifique razonadamente si la panadería puede hacer 4 hornadas de pan Premium y 2 hornadas de pan Clásico por día. **[0,25 puntos]**

OPCIÓN B
Resuelva el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Minimizar } f(x,y)=x+y \text{ sujeta a: } \begin{cases} 3x+2y\geq 12 \\ x+2y\geq 8 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

a) Represente la región factible. **[0,75 puntos]**
b) Encuentre los vértices de esta región. **[0,25 puntos]**
c) Dibuje la línea de nivel 0 y las líneas de nivel que pasan por los vértices de la región factible. **[0,5 puntos]**
d) Identifique el punto de la región factible donde la función objetivo alcanza el mínimo y el valor mínimo de dicha función. **[0,5 puntos]**

PREGUNTA 4: (2 puntos)
OPCIÓN A
Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 3 & k & -k \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Averigüe para qué valores de *k* la matriz A es regular. **[0,5 puntos]**
b) Para $k=1$, calcule A^{-1}. **[0,75 puntos]**
c) Para $k=1$, resuelva $AX-A=5\left(B\cdot C\right)^{t}$. **[0,75 puntos]**

OPCIÓN B
Haroun se ha propuesto seguir un plan de entrenamiento mensual que combine rutinas de tres influencers de fitness: Sergio Peinado, Patry Jordán y Coco Constans. En total, deben ser 18 rutinas al mes. Las rutinas de Sergio Peinado incluyen 4 ejercicios de cardio, las de Patry Jordán, 3, y las de Coco Constans, 2. Haroun ha decidido hacer exactamente 59 ejercicios de cardio en total. Además, quiere que el número de rutinas de Sergio Peinado sea el doble que el número de rutinas de Coco Constans.
a) Plantee un sistema de ecuaciones que nos permita saber cuántas rutinas de cada influencer de fitness debe incluir Juan en su plan de entrenamiento. **[1 punto]**
b) Resuelva razonadamente el sistema planteado. **[1 punto]**

SOLUCIONES

PREGUNTA 1: (3 puntos)
Para celebrar el fin de la PAU, Lorena, Ana y Sofía planean un interrail por Italia. En Roma dudan entre dos rutas en tren: Roma Trastévere–La Giustiniana (ruta 1) y La Giustiniana–Bracciano (ruta 2). Para decidir qué ruta hacer consultan en www.interrail.eu los resultados de un estudio realizado a 2.000 jóvenes, de los cuales 800 eligieron la ruta 1, 1.400 la ruta 2 y 300 hicieron ambas rutas. Seleccionando al azar a uno de estos jóvenes:
a) Calcule la probabilidad de que el joven seleccionado haya realizado al menos una de las dos rutas. **[0,25 puntos]**
b) Calcule la probabilidad de que no haya hecho ninguna de las dos rutas. **[0,5 puntos]**
c) Calcule la probabilidad de que haya hecho únicamente la ruta 1. **[0,5 puntos]**
d) Si el joven seleccionado no realizó la ruta 1, calcule la probabilidad de que tampoco haya realizado la ruta 2. **[0,5 puntos]**

El gasto diario por joven en Roma sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica σ = 27 euros. Tomando una muestra aleatoria de 81 jóvenes, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional (94,12, 105,88).
e) Calcule el nivel de confianza del intervalo y el valor de la media muestral. **[0,75 puntos]**
f) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 93,42%? **[0,5 puntos]**

a) Llamamos A al suceso "elegir ruta 1" y B a "elegir ruta 2". Por la información proporcionada sabemos que $P(A)=\frac{800}{2000}=\frac{2}{5}=0.4$, $P(B)=\frac{1400}{2000}=\frac{7}{10}=0.7$, $P(A\cap B)=\frac{300}{2000}=\frac{3}{20}=0.15$.
Nos piden calcular $P(A\cup B)$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.4+0.7-0.15=\boxed{0.95}$$

b) Debemos calcular $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.95=\boxed{0.05}$$

c) Debemos calcular $P(A\cap\overline{B})$.

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})\Rightarrow 0.4=0.15+P(A\cap\overline{B})\Rightarrow \boxed{P(A\cap\overline{B})=0.4-0.15=0.25}$$

d) Debemos calcular $P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{P(\overline{B}\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{B}\cap\overline{A})}{1-P(A)}=\frac{0.05}{1-0.4}=\boxed{\frac{1}{12}\simeq 0.08333}$.

OTRA FORMA DE H ACERLO

Realizamos una tabla de contingencia.

	Hace ruta 2	**No hace ruta 2**	
Hace ruta 1	300		800
No hace ruta 1			
	1400		2000

Completamos la tabla.

	Hace ruta 2	**No hace ruta 2**	
Hace ruta 1	300	500	800
No hace ruta 1	1100	100	1200
	1400	600	2000

Aplicamos la regla de Laplace para obtener las probabilidades pedidas.

a) De los 2000 jóvenes hay 100 que no han hecho ninguna de las dos rutas y 2000 – 100 = 1900 que hicieron alguna de las rutas. La probabilidad de que el joven seleccionado haya realizado al menos una de las dos rutas vale $\frac{1900}{2000}=0.95$.

b) De los 2000 jóvenes hay 100 que no hicieron ninguna ruta. La probabilidad de que el joven seleccionado no haya hecho ninguna de las dos rutas vale $\frac{100}{2000}=0.05$.

c) De los 2000 jóvenes hay 500 que han hecho la ruta 1 y no han hecho la ruta 2. La probabilidad de que el joven seleccionado haya hecho únicamente la ruta 1 vale $\frac{500}{2000}=0.25$.

d) De los 1200 jóvenes que no han hecho la ruta 1 hay 100 que tampoco hicieron la ruta 2. La probabilidad de que el joven seleccionado que no hizo la ruta 1 tampoco haya hecho la ruta 2 vale $\frac{100}{1200}=\frac{1}{12}\approx 0.8333$.

Seguimos con el resto del ejercicio.

e) Consideramos X = "El gasto diario por joven en Roma". $X=N(\mu,27)$.

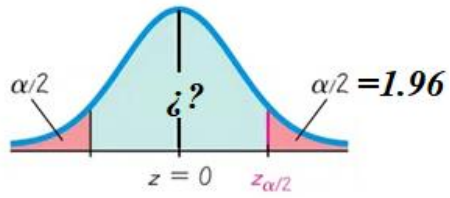
Tamaño de la muestra = n = 81. Como el intervalo de confianza es (94,12, 105,88) el error del intervalo es la mitad de su amplitud $Error=\frac{105.88-94.12}{2}=5.88$.

Aplicamos la fórmula del error para obtener el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$\left.\begin{array}{l} Error=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ Error=5.88 \\ n=81 \\ \sigma=27 \end{array}\right\}\Rightarrow 5.88=z_{\alpha/2}\cdot\frac{27}{\sqrt{81}}\Rightarrow 5.88=z_{\alpha/2}\cdot 3\Rightarrow \boxed{z_{\alpha/2}=\frac{5.88}{3}=1.96}$$

Obtenemos el valor del nivel de confianza $1-\alpha$.

$$z_{\alpha/2}=1.96\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N}(0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.975\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.025\Rightarrow\alpha=0.05\Rightarrow\boxed{1-\alpha=0.95}$$



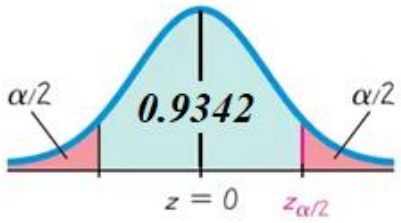
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750

El nivel de confianza es del 95 %.

f) Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 93.42%.

$$1-\alpha = 0.9342 \Rightarrow \alpha = 0.0658 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0329 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.9671 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N}(0,1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{z_{\alpha/2} = 1.84}$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0

El tamaño de la muestra es n = 100. Calculamos el error máximo admisible.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.84 \cdot \frac{27}{\sqrt{100}} = 1.84 \cdot 2.7 = \boxed{4.968}$$

El error máximo admisible es de 4.968 euros.

PREGUNTA 2: (3 puntos)
Wiam podrá acceder a una importante cantidad de dinero si consigue desbloquear una caja fuerte con un PIN de cinco dígitos, resolviendo un reto de análisis matemático. Para ello, y dada la función

$$f(x)=\frac{2x^2+6}{x-1}$$

tiene que:
a) Calcular el dominio de $f(x)$. **[0,25 puntos]**
b) Estudiar la existencia de asíntotas. **[0,5 puntos]**
c) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. Identificar los extremos relativos utilizando el criterio de la primera derivada. **[0,75 puntos]**
d) Escribir la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$. **[0,5 puntos]**
Por último:
e) Hallar el área de la región limitada por la curva $y=x^2+2$ y las rectas $y=x$, $x = 0$ y $x = 1$. **[1 punto]**

a) La función es racional y su dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{1\}$.

b) **Asíntotas verticales** $x=a$.
¿$x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+6}{x-1}=\frac{2\cdot 1^2+6}{1-1}=\frac{8}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{6}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2+\frac{6}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{2+0}{0-0}=\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2+6}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{6}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{2+\frac{6}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{2+0}{1-0}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+6}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6-2x^2+2x}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+6}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}+\frac{6}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{6}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{2+\frac{6}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{2+0}{1-0}=2$$

La recta $y=2x+2$ es asíntota oblicua de la función.

c) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos).

$$f(x)=\frac{2x^2+6}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x\cdot(x-1)-1\cdot(2x^2+6)}{(x-1)^2}=\frac{4x^2-4x-2x^2-6}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x-6}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x^2-4x-6}{(x-1)^2}=0\Rightarrow 2x^2-4x-6=0\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\frac{2\pm4}{2}=\begin{cases}\frac{2+4}{2}=\boxed{3=x}\\ \frac{2-4}{2}=\boxed{-1=x}\end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos: $x=-1$ y $x=3$. Estudiamos el signo antes, entre y después de estos valores y el valor excluido del dominio $x=1$.

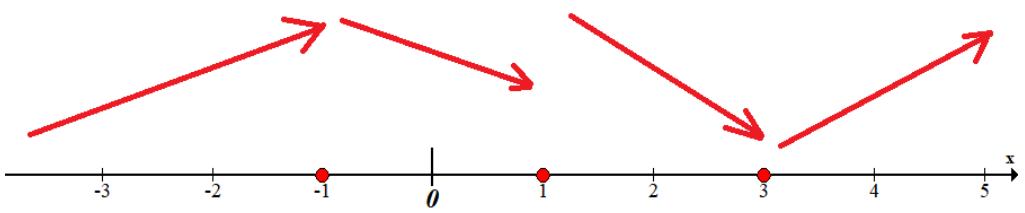
- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=\frac{2\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)-6}{(-2-1)^2}=\frac{10}{9}>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\frac{2\cdot0^2-4\cdot0-6}{(0-1)^2}=-6<0$.

  La función decrece en $(-1,1)$.
- En el intervalo $(1,3)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{2\cdot2^2-4\cdot2-6}{(2-1)^2}=-6<0$.

  La función decrece en $(1,3)$.
- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x=4$ y la derivada vale $f'(4)=\frac{2\cdot4^2-4\cdot4-6}{(4-1)^2}=\frac{10}{9}>0$.

  La función crece en $(3,+\infty)$.

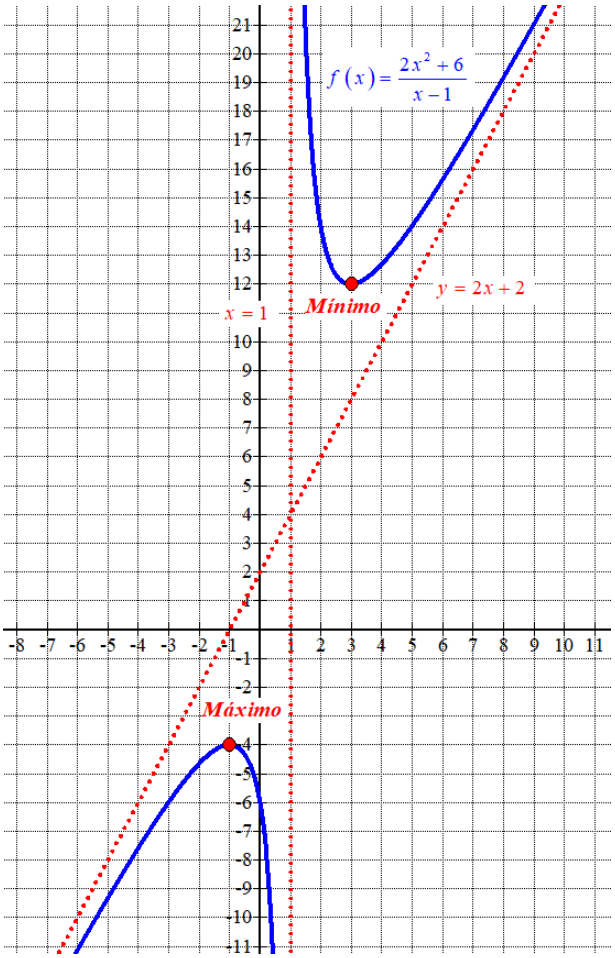
La función crece en $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ y decrece en $(-1,1)\cup(1,3)$.
La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x=-1$ y un mínimo relativo en $x=3$.

Como $f(-1)=\frac{2\cdot(-1)^2+6}{-1-1}=\frac{8}{-2}=-4$ el máximo relativo tiene coordenadas (–1, –4).

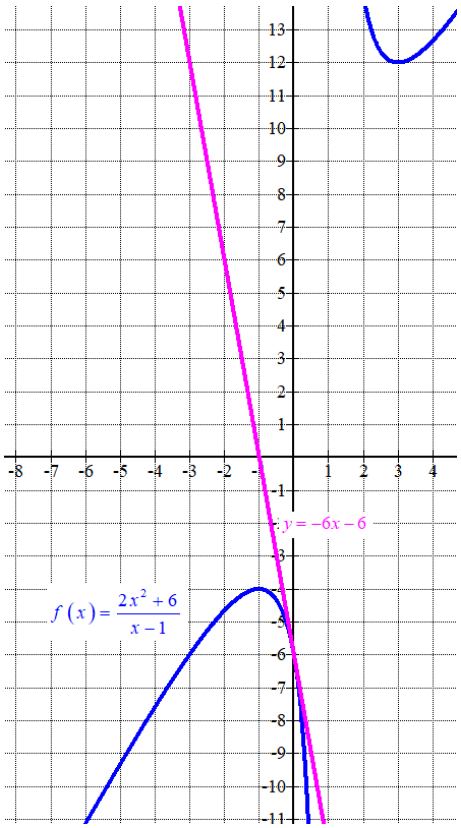
Como $f(3)=\dfrac{2\cdot 3^2+6}{3-1}=\dfrac{12}{2}=12$ el mínimo relativo tiene coordenadas (3, 12).



d) La recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tiene ecuación $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

$$\left.\begin{array}{l} y-f(0)=f'(0)(x-0) \\ f(0)=\dfrac{2\cdot 0^2+6}{0-1}=-6 \\ f'(0)=\dfrac{2\cdot 0^2-4\cdot 0-6}{(0-1)^2}=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow y-(-6)=-6x \Rightarrow \boxed{y=-6x-6}$$

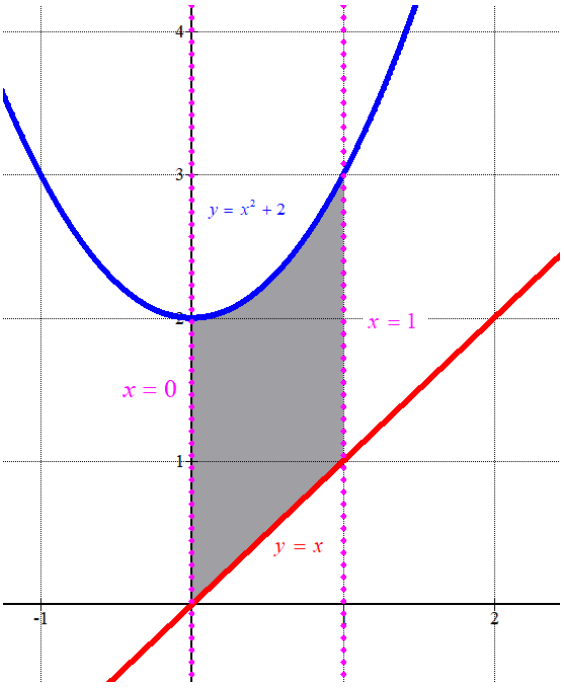
La recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tiene ecuación $y=-6x-6$.



e) Hallamos los puntos de corte entre la curva $y = x^2 + 2$ y la recta $y = x$.

$$\left.\begin{matrix} y = x^2 + 2 \\ y = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 + 2 = x \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \text{¡No existe!}$$

No hay puntos de corte y el área de la región limitada por la curva $y = x^2 + 2$ y las rectas $y = x$, $x = 0$ y $x = 1$ es el valor absoluto de la integral definida de 0 a 1 de la diferencia entre la curva $y = x^2 + 2$ y la recta $y = x$.



$$Área = \int_0^1 x^2 + 2 - x dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2}\right] - \left[\frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0 - \frac{0^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2} = \frac{2 + 12 - 3}{6} = \boxed{\frac{11}{6} \simeq 1.8333 u^2}$$

PREGUNTA 3: (2 puntos)
OPCIÓN A

Una panadería artesana de Murcia proveerá el pan para The Champions Burger Murcia 2026. Produce dos tipos de panes: el pan Premium y el pan Clásico. Cada hornada de pan Premium genera un beneficio de 900 euros, y cada hornada de pan Clásico, de 700 euros. Una hornada de pan Premium requiere 1 hora de horno, mientras que el pan clásico requiere 2 horas. La panadería tiene disponibles un máximo de 8 horas de horno al día. Por otro lado, cada hornada de pan premium requiere 3 kg de masa madre, y cada hornada de pan clásico, 2 kg. La panadería dispone de un máximo de 12 kg de masa madre preparada diariamente.

Se pide:

a). Si la panadería quiere maximizar el beneficio diario, formule el problema identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**

b) Represente la región factible. **[0,5 puntos]**

c) Encuentre los vértices de esta región. **[0,25 puntos]**

d) ¿Cuántas hornadas de cada tipo de pan debe hacer la panadería para maximizar el beneficio diario? Calcule el beneficio máximo diario. **[0,5 puntos]**

e) Justifique razonadamente si la panadería puede hacer 4 hornadas de pan Premium y 2 hornadas de pan Clásico por día. **[0,25 puntos]**

a) Llamamos "x" a las hornadas de pan Premium al día e "y" a las hornadas de pan Clásico. Realizamos una tabla con los datos del problema

	Horas de horno	Kg de masa madre	Beneficio
Nº hornadas Premium (x)	x	$3x$	$900x$
Nº hornadas Clásico (y)	$2y$	$2y$	$700y$
TOTALES	$x+2y$	$3x+2y$	$900x+700y$

La función que queremos maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x,y)=900x+700y$.

Las restricciones son las siguientes.

La panadería dispone de un máximo de 12 kg de masa madre preparada diariamente → $3x+2y\le 12$

La panadería tiene disponibles un máximo de 8 horas de horno al día → $x+2y\le 8$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y\le 8 \\ 3x+2y\le 12 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x+2y=12$

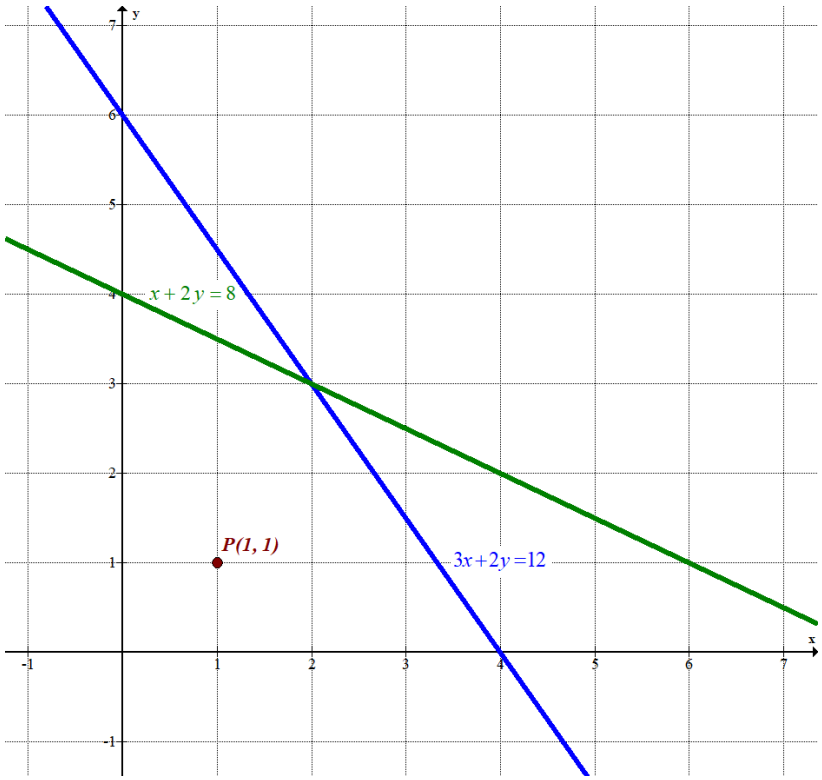
x	$y=\frac{12-3x}{2}$
0	6
2	3
4	0

$x+2y=8$

x	$y=\frac{8-x}{2}$
0	4
2	3
8	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

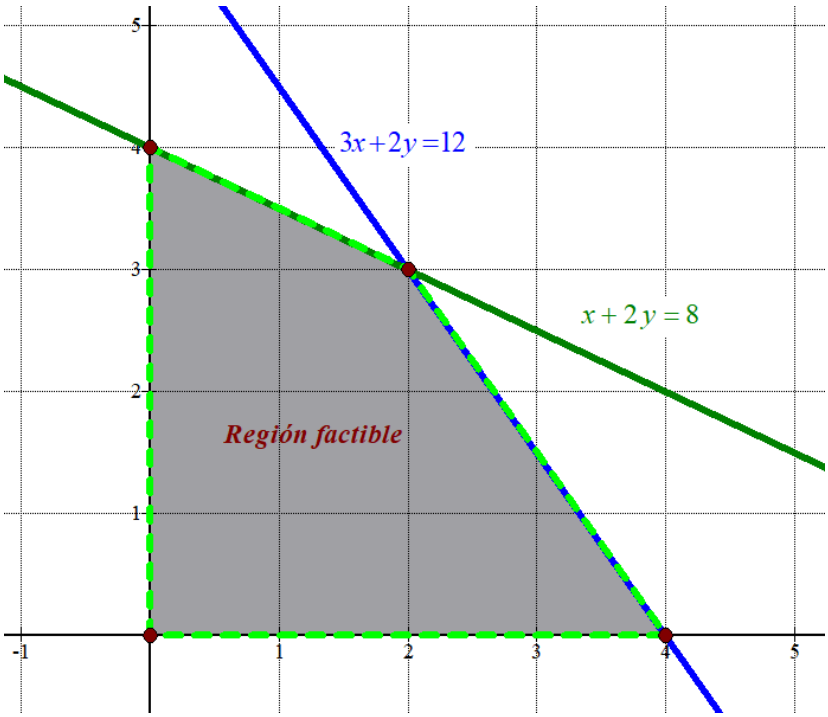
Primer cuadrante



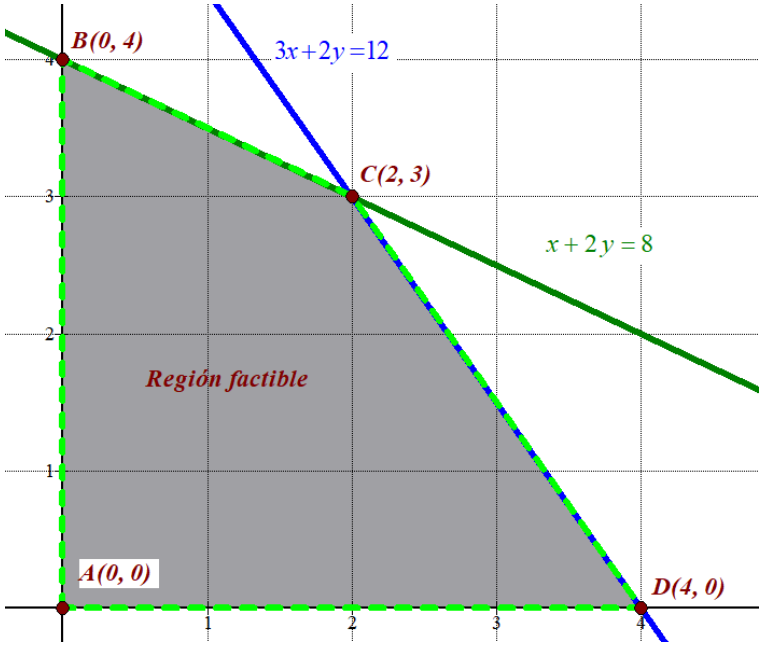
La región factible está situada en el primer cuadrante por debajo de las rectas oblicuas azul y verde. Comprobamos que el punto P(1, 1) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 1+2\cdot 1\le 8 \\ 3\cdot 1+2\cdot 1\le 12 \\ 1\ge 0;\ 1\ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



c) Las coordenadas de los vértices se pueden obtener del dibujo y de las tablas de valores que hemos elaborado. Los vértices de la región factible son A(0, 0), B(0, 4), C(2, 3) y D(4, 0).



d) Valoramos la función beneficio $B(x,y)=900x+700y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 4) → $B(0,4)=900\cdot 0+700\cdot 4=2800$

C(2, 3) → $B(2,3)=900\cdot 2+700\cdot 3=3900$ *Máximo*

D(4, 0) → $B(4,0)=900\cdot 4+700\cdot 0=3600$

El valor máximo es 3900 y se alcanza en el vértice C(2, 3).
El máximo beneficio que se puede conseguir es de 3900 euros con 2 hornadas de pan Premium y 3 de pan Clásico.

.

PREGUNTA 3: (2 puntos)
OPCIÓN B
Resuelva el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Minimizar } f(x,y)=x+y \text{ sujeta a: } \begin{cases} 3x+2y\geq 12 \\ x+2y\geq 8 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

a) Represente la región factible. **[0,75 puntos]**
b) Encuentre los vértices de esta región. **[0,25 puntos]**
c) Dibuje la línea de nivel 0 y las líneas de nivel que pasan por los vértices de la región factible. **[0,5 puntos]**
d) Identifique el punto de la región factible donde la función objetivo alcanza el mínimo y el valor mínimo de dicha función. **[0,5 puntos]**

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x+2y=12$

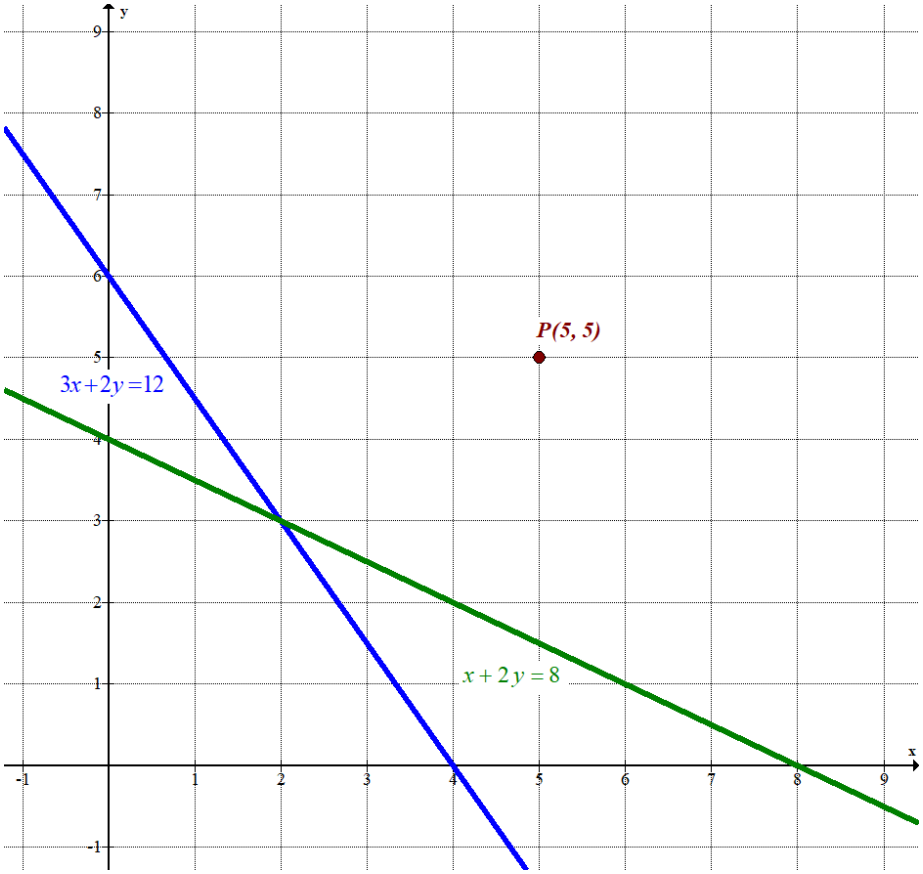
x	$y=\frac{12-3x}{2}$
0	6
2	3
4	0

$x+2y=8$

x	$y=\frac{8-x}{2}$
0	4
2	3
8	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

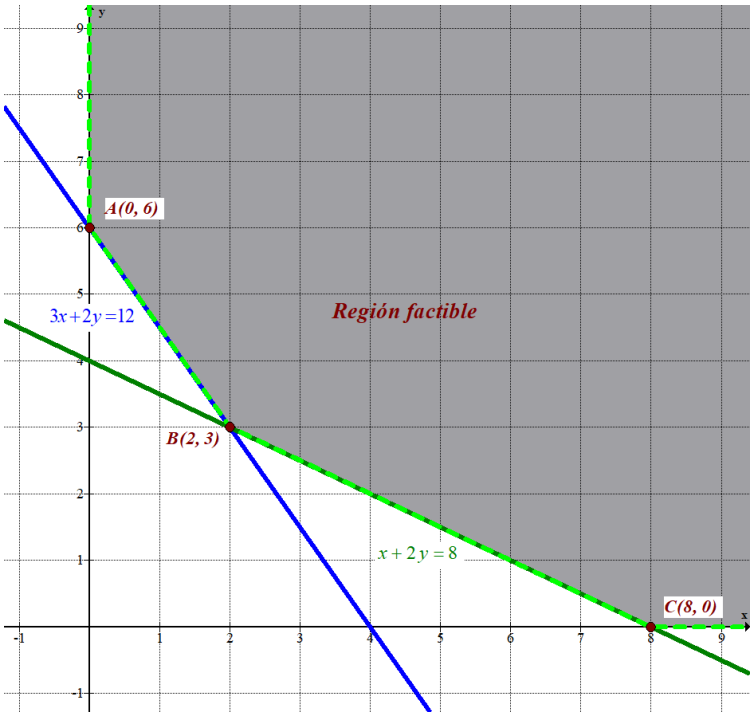
Primer cuadrante



La región factible está situada en el primer cuadrante por encima de las rectas oblicuas azul y verde. Comprobamos que el punto P(5,5) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 5+2\cdot 5\geq 8 \\ 3\cdot 5+2\cdot 5\geq 12 \\ 5\geq 0;\ 5\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



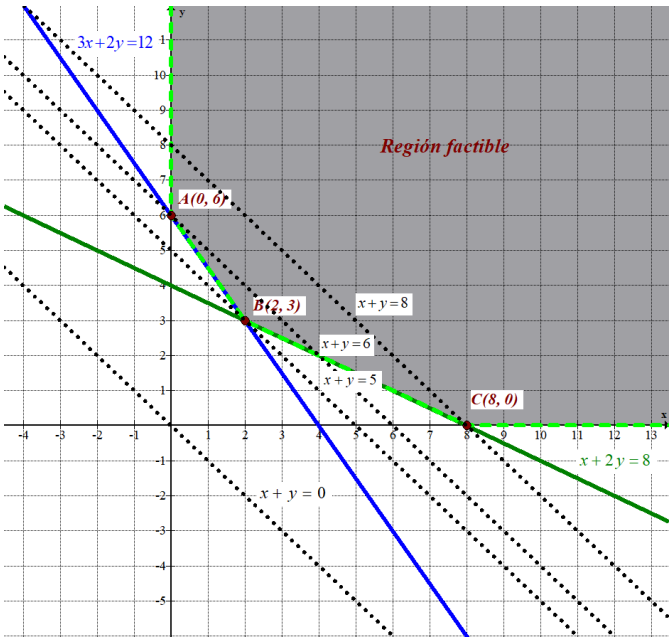
b) Las coordenadas de los vértices se pueden obtener del dibujo y de la tabla de valores que hemos elaborado. Los vértices de la región factible son A(0, 6), B(2, 3) y C(8, 0).

c) La recta de nivel 0 tiene ecuación $x+y=0$. Las que pasan por los vértices son:

A(0, 6) → $x+y=0+6=6$

B(2, 3) → $x+y=2+3=5$

C(8, 0) → $x+y=8+0=8$



d) Observando las tres rectas de nivel que pasan por los vértices el valor mínimo de la función es 5, pues la recta de nivel que pasa por el punto B(2, 3) es la más baja.
También podemos decidir el valor mínimo de la función y el punto donde se alcanza valorando la función $f(x,y)=x+y$ en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo. También valoramos la función en un punto lejano, por ejemplo D(100, 100).

A(0, 6) → $f(0,6)=0+6=6$

B(2, 3) → $f(2,3)=2+3=5$ *Mínimo*

C(8, 0) → $f(8,0)=8+0=8$

D(100, 100) → $f(100,100)=100+100=200$

El valor mínimo es 5 y se alcanza en el vértice B(2, 3).

PREGUNTA 4: (2 puntos)
OPCIÓN A
Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & k & -k\\ 2 & -1 & -4\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

a) Averigüe para qué valores de *k* la matriz A es regular. **[0,5 puntos]**
b) Para $k=1$, calcule A^{-1}. **[0,75 puntos]**
c) Para $k=1$, resuelva $AX-A=5\left(B\cdot C\right)^{t}$. **[0,75 puntos]**

a) La matriz A es regular si su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & k & -k\\ 2 & -1 & -4\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}=6-\cancel{4k}-0-k+\cancel{4k}-0=6-k$$

$$|A|=0\Rightarrow 6-k=0\Rightarrow \boxed{k=6}$$

La matriz A es regular para cualquier valor de *k* distinto de 6.

b) Para $k=1$ la matriz A queda $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -4\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ y es invertible. Hallamos su matriz inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^{T}\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & -4 & -2\end{pmatrix}}{6-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -4 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & -4\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 2 & -4-1\\ -(-4+4) & -6+1 & -(-12+2)\\ 1 & 1 & -3-2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 2 & -5\\ 0 & -5 & 10\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/5 & 2/5 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 1/5 & 1/5 & -1\end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1}=\begin{pmatrix}2/5 & 2/5 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 1/5 & 1/5 & -1\end{pmatrix}$.

c) Para $k=1$ la matriz A queda $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -4\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ y es invertible**.** Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX-A=5\left(B\cdot C\right)^t \Rightarrow A\left(X-I\right)=5\left(B\cdot C\right)^t \Rightarrow X-I=A^{-1}\left(5\left(B\cdot C\right)^t\right)\Rightarrow \boxed{X=A^{-1}\left(5\left(B\cdot C\right)^t\right)+I}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+0 & 0+1 & 1-1\\ 0+0 & 0-2 & 0+2\\ 2+0 & 0+0 & -1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{2\ \cdot\ 2}\times 3\longrightarrow 3\times 3$$

$$\left(B\cdot C\right)^t=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow 5\left(B\cdot C\right)^t=\begin{pmatrix}-10 & 0 & 10\\ 5 & -10 & 0\\ 0 & 10 & -5\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\left(5\left(B\cdot C\right)^t\right)=\begin{pmatrix}2/5 & 2/5 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 1/5 & 1/5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10 & 0 & 10\\ 5 & -10 & 0\\ 0 & 10 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+2+0 & 0-4-10 & 4+0+5\\ 0-5+0 & 0+10+20 & 0+0-10\\ -2+1+0 & 0-2-10 & 2+0+5\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\left(5\left(B\cdot C\right)^t\right)=\begin{pmatrix}-2 & -14 & 9\\ -5 & 30 & -10\\ -1 & -12 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}\left(5\left(B\cdot C\right)^t\right)+I=\begin{pmatrix}-2 & -14 & 9\\ -5 & 30 & -10\\ -1 & -12 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -14 & 9\\ -5 & 31 & -10\\ -1 & -12 & 8\end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}-1 & -14 & 9\\ -5 & 31 & -10\\ -1 & -12 & 8\end{pmatrix}$.

PREGUNTA 4: (2 puntos)
OPCIÓN B

Haroun se ha propuesto seguir un plan de entrenamiento mensual que combine rutinas de tres influencers de fitness: Sergio Peinado, Patry Jordán y Coco Constans. En total, deben ser 18 rutinas al mes. Las rutinas de Sergio Peinado incluyen 4 ejercicios de cardio, las de Patry Jordán, 3, y las de Coco Constans, 2. Haroun ha decidido hacer exactamente 59 ejercicios de cardio en total. Además, quiere que el número de rutinas de Sergio Peinado sea el doble que el número de rutinas de Coco Constans.

a) Plantee un sistema de ecuaciones que nos permita saber cuántas rutinas de cada influencer de fitness debe incluir Juan en su plan de entrenamiento. **[1 punto]**

b) Resuelva razonadamente el sistema planteado. **[1 punto]**

a) Llamamos "x" al número de rutinas de Sergio Peinado que debe hacer Juan, "y" al número de rutinas de Patry Jordán y "z" al número de rutinas de Coco Constans.

Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada en el ejercicio.

En total, deben ser 18 rutinas al mes → $x+y+z=18$.

Las rutinas de Sergio Peinado incluyen 4 ejercicios de cardio, las de Patry Jordán, 3, y las de Coco Constans, 2. Haroun ha decidido hacer exactamente 59 ejercicios de cardio en total → $4x+3y+2z=59$.

Quiere que el número de rutinas de Sergio Peinado sea el doble que el número de rutinas de Coco Constans → $x=2z$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ 4x+3y+2z=59 \\ x=2x \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema de ecuaciones planteado.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ 4x+3y+2z=59 \\ x=2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2z+y+z=18 \\ 8z+3y+2z=59 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+3z=18 \\ 3y+10z=59 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=18-3z \\ 3y+10z=59 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(18-3z)+10z=59 \Rightarrow 54-9z+10z=59 \Rightarrow \boxed{z=5} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=2\cdot 5=10} \\ \boxed{y=18-3\cdot 5=3} \end{cases}$$

Juan debe hacer 10 rutinas de Sergio Peinado, 3 de Patry Jordán y 5 de Coco Constans.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

307 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

PAU2025 - **JULIO**

NOTA IMPORTANTE: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones. Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. En cada APARTADO se debe hacer sólo la CUESTIÓN 1 o la CUESTIÓN 2. La elección de CUESTIÓN 1 o CUESTIÓN 2 puede cambiar de un apartado a otro. Si se responden las 2 CUESTIONES de un apartado, solo se corregirá la primera CUESTIÓN contestada. Cada cuestión tiene una puntuación entre 2 y 3 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

APARTADO 1 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1: [2,5 puntos]

[0,5 puntos] Calcula el valor de *a* para que $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2a-1 & a \end{vmatrix} = 0$.

[2 puntos] Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde *a* es un número real desconocido:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = a \\ 3x + 2y - az = 4 \end{cases}$$

a) Discute el sistema de ecuaciones según los valores de *a*. **[1 punto]**
b) Resuelve el sistema para $a = 1$. **[1 punto]**

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El famoso tiktoker Peldanhos produce videos tanto para TikTok como para YouTube. Cada video de TikTok le genera 40 euros de ingresos, mientras que cada video de YouTube le genera 20 euros. Hay tres fases en el proceso de creación de videos: planificación, grabación y edición. La planificación de contenido para TikTok requiere 4 horas por video, mientras que para YouTube solo requiere 1 hora. Peldanhos dispone de 36 horas semanales para planificar contenido. Cada video de TikTok requiere 1 hora de grabación, mientras que cada video de YouTube requiere 2 horas. Peldanhos dispone de un máximo de 20 horas semanales para grabar. Finalmente, para la edición Peldanhos emplea 1 hora para cada uno de los dos tipos de videos y puede dedicar hasta 12 horas semanales a la edición. Se pide:

a) Si Peldanhos quiere maximizar el ingreso semanal, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**
b) Representa la región factible. **[0,75 puntos]**
c) Encuentra los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**
d) ¿Cuántos videos de cada plataforma debe producir semanalmente para maximizar sus ingresos? **[0,5 puntos]**
e) Calcula el ingreso máximo semanal posible. **[0,25 puntos]**

APARTADO 2 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1: [3 puntos] Dada la función:

$$f(x)=\frac{-9+x^2}{x^2-4}$$

a) Determina su dominio y los puntos de corte de la gráfica de *f(x)* con los ejes de coordenadas. **[0,5 puntos]**
b) Estudia sus asíntotas. **[0,5 puntos]**
c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de *f(x)*. **[1 punto]**
d) Halla y clasifica sus extremos relativos. **[0,25 puntos]**
e) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa $x=3$. **[0,75 puntos]**

CUESTIÓN 2: [3 puntos] El beneficio mensual en euros de la hamburguesería Jamburguer, que el verano pasado abrió sus puertas en un conocido centro comercial de Murcia, viene dado por:

$$B(x)=144x-0.1x^2-50000$$

donde *x* es el número de hamburguesas vendidas mensualmente.

a) Si actualmente Jamburguer vende 750 hamburguesas al mes, ¿obtendrá pérdidas o ganancias? **[0,5 puntos]**
b) Evalúa e interpreta la primera derivada de *B(x)* en $x=750$ ¿Qué recomendarías al propietario?. **[0,5 puntos]**
c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de *B(x)*. **[1 punto]**
d) Determina el número de hamburguesas que maximiza el beneficio mensual de esta hamburguesería. **[0,75 puntos]**
e) ¿Cuál es el beneficio máximo mensual? **[0,25 puntos]**

APARTADO 3 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:
[2 puntos] Realiza:

a) Calcula $\int\left(\frac{2}{x-1}+3\sqrt{x}\right)dx$. **[0,25 puntos]**
b) Calcula el área limitada por la función $f(x)=-x^2+4x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=4$. **[1,75 puntos]**

CUESTIÓN 2:
[2 puntos] Realiza:

a) Calcula $\int\left(\frac{1}{x}+3\sqrt{x}+\frac{1}{3}e^{3x}\right)dx$**. [0,25 puntos]**
b) Calcula el área limitada por la función $f(x)=4-x^2$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$. **[1,75 puntos]**

APARTADO 4 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:

[2,5 puntos] En una encuesta realizada por el Departamento de Orientación de un instituto a 100 estudiantes de segundo de bachillerato, se obtuvo que 30 de ellos quieren estudiar Veterinaria, 25 Economía, 20 Química, 15 Biología y 10 Matemáticas. De ellos, 10, 12, 13, 8 y 6 son mujeres respectivamente. Además, la orientadora del centro les ha informado que no es posible que se matriculen en más de un grado.

a) Si se elige a un estudiante al azar del grupo estudiado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **[0,25 puntos]**
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, sea hombre y estudie Veterinaria? **[0,25 puntos]**
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química o Veterinaria? **[0,25 puntos]**
d) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, no estudie ni Biología ni Matemáticas? **[0,5 puntos]**
e) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química, dado que se trata de una mujer? **[0,5 puntos]**
f) Si el estudiante seleccionado al azar es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Economía? **[0,75 puntos]**

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El número de horas semanales que los estudiantes de segundo de bachillerato de una pedanía de Murcia dedican a ver series en inglés en HBO Max sigue una distribución normal con media μ y desviación típica igual a 2 horas.

a) Si en una muestra de 100 estudiantes, el número medio de horas semanales que dedican a ver series en inglés en HBO Max han sido de 8 horas, calcula un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media de las horas semanales que dedican a esta actividad. **[1 punto]**
b) Determina el tamaño mínimo que debe tener una muestra de estudiantes para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0.5 horas con un nivel de confianza del 99%. **[0,75 puntos]**
c) Si $\mu = 8.2$ y se elige a un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dedique más de 9 horas semanales a ver series en inglés en HBO Max? **[0,75 puntos]**

SOLUCIONES

APARTADO 1 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1: [2,5 puntos]

[0,5 puntos] Calcula el valor de *a* para que $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2a-1 & a \end{vmatrix} = 0$.

[2 puntos] Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde *a* es un número real desconocido:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = a \\ 3x + 2y - az = 4 \end{cases}$$

a) Discute el sistema de ecuaciones según los valores de *a*. **[1 punto]**

b) Resuelve el sistema para $a = 1$. **[1 punto]**

1)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2a-1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1 = a}$$

Se cumple para $a = 1$.

2) a) Discutimos el sistema utilizando el método de Gauss y obtenemos un sistema triangular equivalente al inicial.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = a \\ 3x + 2y - az = 4 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \hline y - z = a - 2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \hline 5y - (a+3)z = 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = a - 2 \\ 5y - (a+3)z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - 5 \cdot \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ \hline (-a+2)z = -5a + 11 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = a - 2 \\ (-a+2)z = -5a + 11 \end{cases}$$

Este sistema triangular obtenido es compatible determinado cuando $-a + 2 \neq 0 \rightarrow a \neq 2$.

Si $a = 2$ el sistema equivalente queda $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$. Tenemos una igualdad imposible. El sistema es incompatible.

Resumiendo: Para $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado y para $a = 2$ el sistema es incompatible.

b) Para $a=1$ hemos visto en el apartado anterior que el sistema es compatible determinado. El sistema queda $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+2y-z=4 \end{cases}$ y su sistema triangular equivalente es $\begin{cases} x-y+z=1 \\ y-z=-1 \\ z=6 \end{cases}$.

Determinamos la solución del sistema partiendo del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ y-z=-1 \\ \boxed{z=6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+6=1 \\ y-6=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-5 \\ \boxed{y=5} \end{cases} \Rightarrow x-5=-5 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

La solución del sistema es $x=0, y=5, z=6$.

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El famoso tiktoker Peldanhos produce videos tanto para TikTok como para YouTube. Cada video de TikTok le genera 40 euros de ingresos, mientras que cada video de YouTube le genera 20 euros. Hay tres fases en el proceso de creación de videos: planificación, grabación y edición. La planificación de contenido para TikTok requiere 4 horas por video, mientras que para YouTube solo requiere 1 hora. Peldanhos dispone de 36 horas semanales para planificar contenido. Cada video de TikTok requiere 1 hora de grabación, mientras que cada video de YouTube requiere 2 horas. Peldanhos dispone de un máximo de 20 horas semanales para grabar. Finalmente, para la edición Peldanhos emplea 1 hora para cada uno de los dos tipos de videos y puede dedicar hasta 12 horas semanales a la edición. Se pide:

a) Si Peldanhos quiere maximizar el ingreso semanal, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**

b) Representa la región factible. **[0,75 puntos]**

c) Encuentra los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**

d) ¿Cuántos videos de cada plataforma debe producir semanalmente para maximizar sus ingresos? **[0,5 puntos]**

e) Calcula el ingreso máximo semanal posible. **[0,25 puntos]**

a) Llamamos x = número de videos de TikTok, y = número de videos de YouTube.
Realizamos una tabla para organizar toda la información proporcionada en el problema.

	Horas planificación	Horas grabación	Horas edición	Ingresos
TikTok (x)	4x	x	x	40x
YouTube (y)	y	2y	y	20y
TOTAL	$4x+y$	$x+2y$	$x+y$	$40x+20y$

La función objetivo son los ingresos semanales que deseamos maximizar: $I(x,y)=40x+20y$.

Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

Peldanhos dispone de 36 horas semanales para planificar contenido. → $4x+y\le 36$
Peldanhos dispone de un máximo de 20 horas semanales para grabar → $x+2y\le 20$
puede dedicar hasta 12 horas semanales a la edición → $x+y\le 12$
Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

La región factible es la zona del plano que contiene los puntos que cumplen el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+y\le 36 \\ x+2y\le 20 \\ x+y\le 12 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$4x+y=36$

x	$y=36-4x$
0	36
8	4
9	0

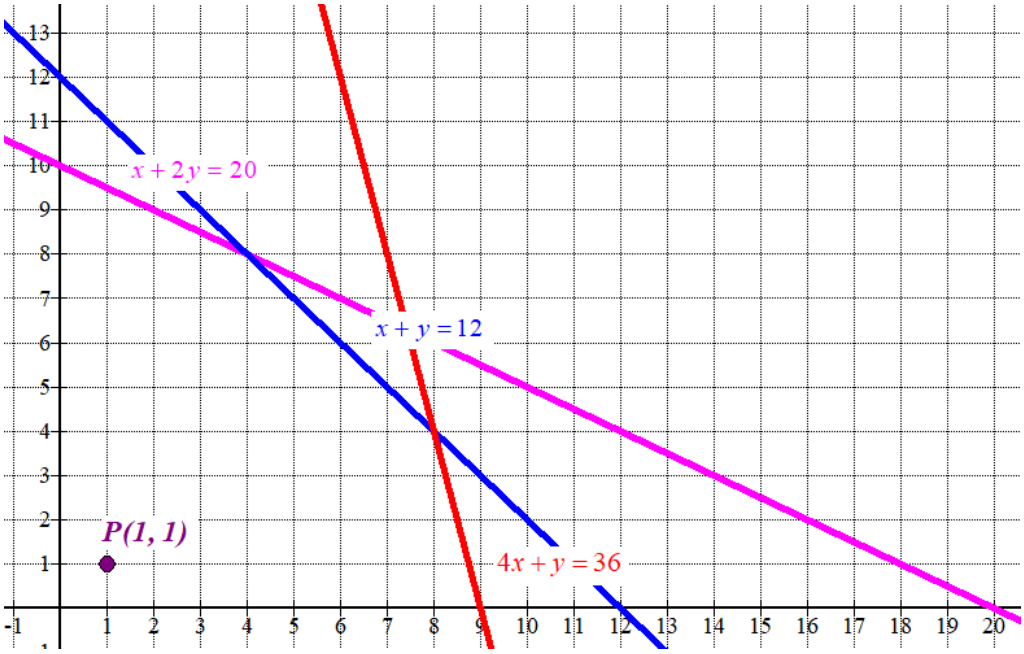
$x+2y=20$

x	$y=\frac{20-x}{2}$
0	10
4	8
20	0

$x+y=12$

x	$y=12-x$
0	12
4	8
8	4

$x\ge 0;\ y\ge 0$
Primer *cuadrante*

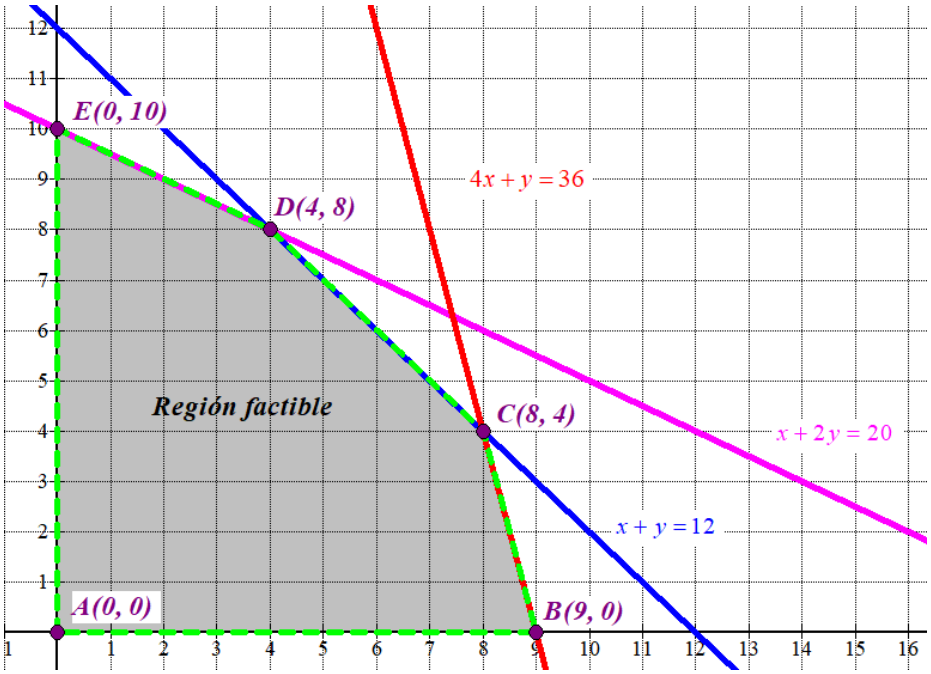


Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} 4x+y\le 36 \\ x+2y\le 20 \\ x+y\le 12 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante que está por debajo de las rectas rosa, azul y roja.

Comprobamos que el punto P(1, 1) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 4+1\le 36 \\ 1+2\le 20 \\ 1+1\le 12 \\ 1\ge 0;\ 1\ge 0 \end{array}\right\}$$ Se cumplen todas.

Coloreo de gris la región factible en el siguiente dibujo.



c) Las coordenadas de los vértices se aprecian en el dibujo y se pueden también comprobar en las tablas de valores. Los vértices son: A(0,0), B(9,0), C(8, 4), D(4, 8) y E(0, 10)

d) Valoramos la función objetivo $I(x, y) = 40x + 20y$ en cada uno de los vértices en busca del máximo valor.

A(0, 0) → $I(0,0) = 0$

B(9, 0) → $I(9,0) = 40 \cdot 9 + 20 \cdot 0 = 360$

C(8, 4) → $I(8,4) = 40 \cdot 8 + 20 \cdot 4 = 400$ *Máximo*

D(4, 8) → $I(4,8) = 40 \cdot 4 + 20 \cdot 8 = 320$

E(0, 10) → $I(0,10) = 40 \cdot 0 + 20 \cdot 10 = 200$

Los ingresos máximos se obtienen en el punto C(8, 4). Significa que se deben realizar semanalmente 8 videos de TikTok y 4 de YouTube para obtener los ingresos máximos.

e) Los ingresos máximos semanales que se puede conseguir son de 400 euros.

APARTADO 2 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1: [3 puntos] Dada la función:

$$f(x)=\frac{-9+x^2}{x^2-4}$$

a) Determina su dominio y los puntos de corte de la gráfica de *f(x)* con los ejes de coordenadas. **[0,5 puntos]**

b) Estudia sus asíntotas. **[0,5 puntos]**

c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de *f(x)*. **[1 punto]**

d) Halla y clasifica sus extremos relativos. **[0,25 puntos]**

e) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa $x=3$. **[0,75 puntos]**

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Dominio = $\mathbb{R}-\{-2,+2\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{-9+x^2}{x^2-4} \\ Eje\,OX\rightarrow y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{-9+x^2}{x^2-4}=0\Rightarrow -9+x^2=0\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3\Rightarrow \begin{cases} A(-3,0) \\ B(3,0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{-9+x^2}{x^2-4} \\ Eje\,OY\rightarrow x=0 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=\frac{-9+0^2}{0^2-4}=\frac{9}{4}\Rightarrow C\left(0,\frac{9}{4}\right)$$

Los puntos de corte con los ejes de coordenadas son A(–3, 0), B(3, 0) y $C\left(0,\frac{9}{4}\right)$.

b) **Asíntotas verticales.** $x=a$

¿ $x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{-9+x^2}{x^2-4}=\frac{-9+(-2)^2}{(-2)^2-4}=\frac{-5}{0}=\infty$$

$x=-2$ es asíntota vertical.

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{-9+x^2}{x^2-4}=\frac{-9+2^2}{2^2-4}=\frac{-5}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}\frac{-9+x^2}{x^2-4}=\lim_{x\to \infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

La recta $y=1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

c) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{-9+x^2}{x^2-4} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x\left(x^2-4\right)-2x\left(-9+x^2\right)}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{\cancel{2x^3}-8x+18x-\cancel{2x^3}}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{10x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

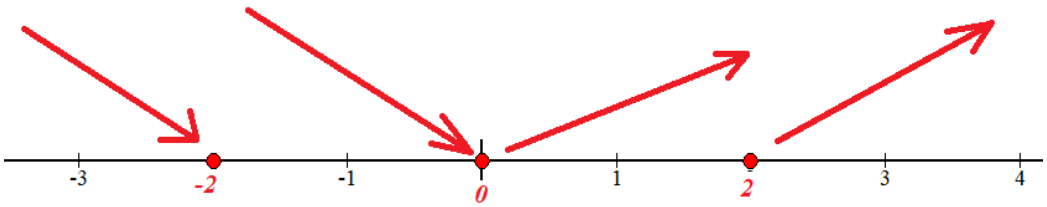
$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{10x}{\left(x^2-4\right)^2}=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de este valor y los valores excluidos del dominio.

- En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos $x=-3$ y la derivada vale $f'(-3)=\frac{10(-3)}{\left((-3)^2-4\right)^2}=\frac{-30}{25}<0$. La función decrece en $(-\infty,-2)$.
- En el intervalo $(-2,0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1)=\frac{10(-1)}{\left((-1)^2-4\right)^2}=\frac{-10}{9}<0$. La función decrece en $(-2,0)$.
- En el intervalo $(0,2)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=\frac{10}{\left(1^2-4\right)^2}=\frac{10}{9}>0$. La función crece en $(0,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3)=\frac{10\cdot 3}{\left(3^2-4\right)^2}=\frac{30}{25}>0$. La función crece en $(2,+\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y crece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$.

d) Con el estudio anterior sabemos que la función sigue el esquema siguiente:

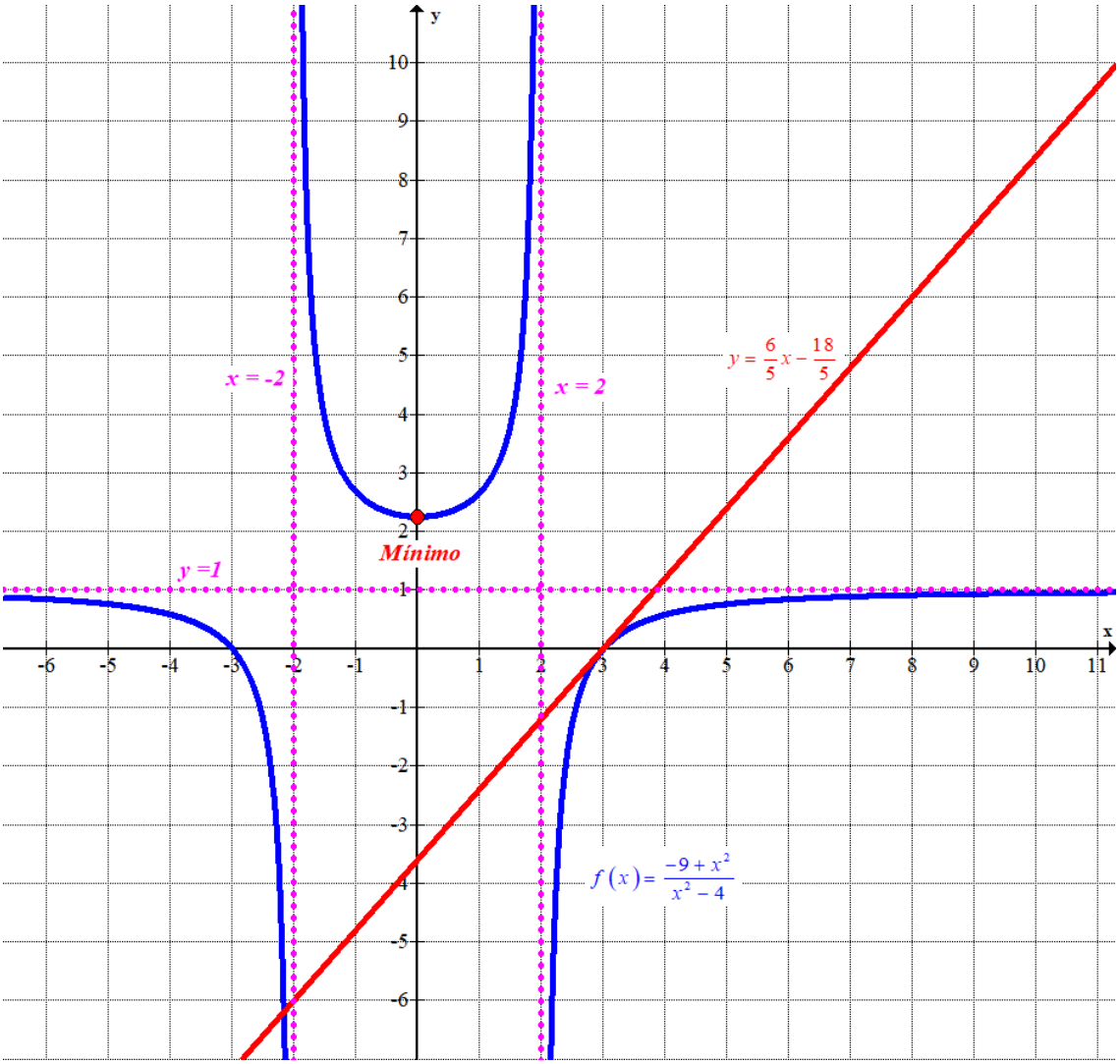


La función presenta un mínimo local en $x=0$.

Como $f(0)=\frac{-9+0^2}{0^2-4}=\frac{9}{4}$ el mínimo local tiene coordenadas $\left(0,\frac{9}{4}\right)$.

e) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa $x=3$ es $y-f(3)=f'(3)(x-3)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=\dfrac{-9+3^2}{3^2-4}=0 \\ f'(3)=\dfrac{10\cdot 3}{\left(3^2-4\right)^2}=\dfrac{6}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=\frac{6}{5}(x-3) \Rightarrow \boxed{y=\frac{6}{5}x-\frac{18}{5}}$$



CUESTIÓN 2: [3 puntos] El beneficio mensual en euros de la hamburguesería Jamburguer, que el verano pasado abrió sus puertas en un conocido centro comercial de Murcia, viene dado por:

$$B(x) = 144x - 0.1x^2 - 50000$$

donde *x* es el número de hamburguesas vendidas mensualmente.

a) Si actualmente Jamburguer vende 750 hamburguesas al mes, ¿obtendrá pérdidas o ganancias? **[0,5 puntos]**

b) Evalúa e interpreta la primera derivada de *B(x)* en $x = 750$ ¿Qué recomendarías al propietario? **[0,5 puntos]**

c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de *B(x)*. **[1 punto]**

d) Determina el número de hamburguesas que maximiza el beneficio mensual de esta hamburguesería. **[0,75 puntos]**

e) ¿Cuál es el beneficio máximo mensual? **[0,25 puntos]**

a) Calculamos los beneficios del mes con la venta de 750 hamburguesas.

$$B(750) = 144 \cdot 750 - 0.1 \cdot 750^2 - 50000 = 1750$$

Ese mes obtiene unas ganancias de 1750 euros.

b) La derivada de la función es $B'(x) = 144 - 0.2x$. La primera derivada de *B(x)* en $x = 750$ vale $B'(750) = 144 - 0.2 \cdot 750 = -6 < 0$. El signo negativo de la derivada indica que el beneficio mensual va decreciendo conforme aumentan el número de hamburguesas vendidas.
Recomendaría al propietario no vender más de 750 hamburguesas. Vendiendo más hamburguesas el beneficio disminuye.

c) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$B'(x) = 0 \Rightarrow 144 - 0.2x = 0 \Rightarrow 144 = 0.2x \Rightarrow \boxed{x = \frac{144}{0.2} = 720}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 720$.

- En el intervalo $(0, 720)$ consideramos $x = 100$ y la derivada vale $B'(100) = 144 - 0.2 \cdot 100 = 124 > 0$. La función crece en $(0, 720)$.
- En el intervalo $(720, +\infty)$ consideramos $x = 750$ y la derivada vale $B'(750) = -6 < 0$. La función decrece en $(720, +\infty)$.

El beneficio crece por debajo de 720 hamburguesas al mes y decrece por encima de 720 hamburguesas mensuales.

d) Por lo visto en el apartado anterior el beneficio crece antes de 720 y decrece a partir de 720. Se deduce que el número de hamburguesas que maximiza el beneficio es de 720.

e) Como $B(720) = 144 \cdot 720 - 0.1 \cdot 720^2 - 50000 = 1840$ podemos decir que el máximo beneficio que se puede conseguir es de 1840 euros.

APARTADO 3 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:

[2 puntos] Realiza:

a) Calcula $\int\left(\frac{2}{x-1}+3\sqrt{x}\right)dx$. **[0,25 puntos]**

b) Calcula el área limitada por la función $f(x)=-x^2+4x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=4$. **[1,75 puntos]**

a) Aplicamos las propiedades de la integración.

$$\int\left(\frac{2}{x-1}+3\sqrt{x}\right)dx=\int\frac{2}{x-1}dx+\int 3\sqrt{x}dx=2\int\frac{1}{x-1}dx+3\int x^{1/2}dx=$$

$$=2\ln|x-1|+3\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}=2\ln|x-1|+3\frac{x^{3/2}}{3/2}=\boxed{2\ln|x-1|+2\sqrt{x^3}+C}$$

b) Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX.

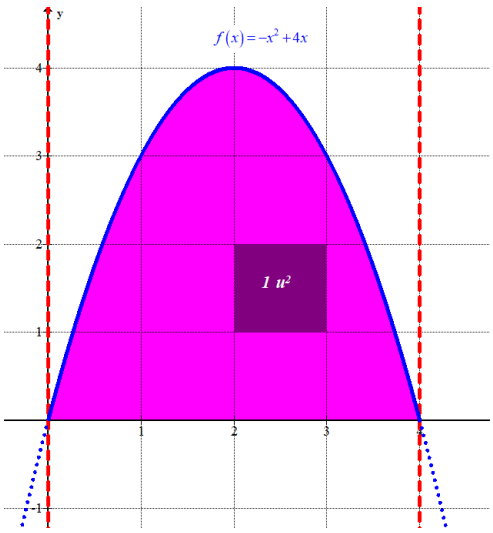
$$\left.\begin{array}{l}f(x)=-x^2+4x\\ Eje\,OX\rightarrow y=0\end{array}\right\}\Rightarrow -x^2+4x=0\Rightarrow -x(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ x-4=0\rightarrow\boxed{x=4}\end{cases}$$

Los dos puntos de corte están en los extremos de la región. Como $f(1)=-1^2+4=3>0$ la función es positiva en el intervalo (0, 4) y el área limitada por la función $f(x)=-x^2+4x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=4$ es el valor de la integral definida entre 0 y 4 de la función.

$$Área=\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4 -x^2+4xdx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^4=$$

$$=\left[-\frac{4^3}{3}+2\cdot 4^2\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+2\cdot 0^2\right]=-\frac{64}{3}+32=\boxed{\frac{32}{3}\simeq 10.667\,u^2}$$

El área tiene un valor de $\frac{32}{3}\simeq 10.667$ unidades cuadradas.



CUESTIÓN 2:
[2 puntos] Realiza:
a) Calcula $\int\left(\frac{1}{x}+3\sqrt{x}+\frac{1}{3}e^{3x}\right)dx$. **[0,25 puntos]**
b) Calcula el área limitada por la función $f(x)=4-x^2$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$. **[1,75 puntos]**

a) Aplicando las propiedades de la integración.

$$\int\left(\frac{1}{x}+3\sqrt{x}+\frac{1}{3}e^{3x}\right)dx=\int\frac{1}{x}dx+\int 3\sqrt{x}dx+\int\frac{1}{3}e^{3x}dx=\int\frac{1}{x}dx+3\int x^{1/2}dx+\frac{1}{3}\int e^{3x}dx=$$

$$=\ln|x|+3\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x}=\ln|x|+3\frac{x^{3/2}}{3/2}+\frac{1}{9}e^{3x}=\boxed{\ln|x|+2\sqrt{x^3}+\frac{1}{9}e^{3x}+C}$$

b) Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX.

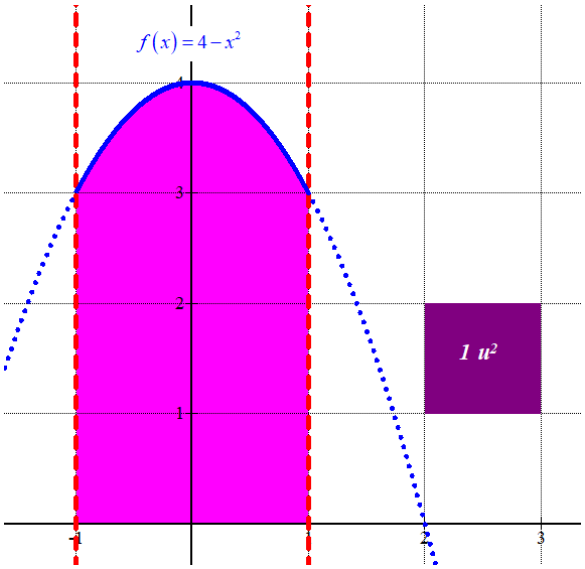
$$\left.\begin{array}{l}f(x)=4-x^2\\ Eje\,OX\rightarrow y=0\end{array}\right\}\Rightarrow 4-x^2=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow\boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Los dos puntos de corte están fuera del intervalo (–1,1). Como $f(0)=4-0^2=4>0$ la función es positiva en el intervalo (–1, 1) y el área limitada por la función $f(x)=4-x^2$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$ es el valor de la integral definida entre –1 y 1 de la función.

$$Área=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}4-x^2dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\left[4\cdot 1-\frac{1^3}{3}\right]-\left[4(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right]=$$

$$=4-\frac{1}{3}+4-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{22}{3}\simeq 7.333u^2}$$

El área tiene un valor de $\frac{22}{3}\simeq 7.333$ unidades cuadradas.



APARTADO 4 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:

[2,5 puntos] En una encuesta realizada por el Departamento de Orientación de un instituto a 100 estudiantes de segundo de bachillerato, se obtuvo que 30 de ellos quieren estudiar Veterinaria, 25 Economía, 20 Química, 15 Biología y 10 Matemáticas. De ellos, 10, 12, 13, 8 y 6 son mujeres respectivamente. Además, la orientadora del centro les ha informado que no es posible que se matriculen en más de un grado.

a) Si se elige a un estudiante al azar del grupo estudiado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **[0,25 puntos]**

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, sea hombre y estudie Veterinaria? **[0,25 puntos]**

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química o Veterinaria? **[0,25 puntos]**

d) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, no estudie ni Biología ni Matemáticas? **[0,5 puntos]**

e) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química, dado que se trata de una mujer? **[0,5 puntos]**

f) Si el estudiante seleccionado al azar es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Economía? **[0,75 puntos]**

Realizamos una tabla de contingencia para colocar de forma ordenada los datos proporcionados y obtener los datos que vienen implícitos en la información proporcionada.

	Veterinaria	Economía	Química	Biología	Matemáticas	TOTAL
Hombre						
Mujer	10	12	13	8	6	
TOTAL	30	25	20	15	10	100

Completamos la tabla.

	Veterinaria	Economía	Química	Biología	Matemáticas	TOTAL
Hombre	**20**	**13**	**7**	**7**	**4**	**51**
Mujer	10	12	13	8	6	49
TOTAL	30	25	20	15	10	100

Con toda esta información y aplicando la regla de Laplace respondemos a las preguntas planteadas.

a) De los 100 estudiantes hay 49 mujeres. La probabilidad de que el estudiante elegido al azar sea mujer vale $\frac{49}{100} = 0.49$.

b) De los 100 estudiantes hay 20 que son hombres que quieren estudiar veterinaria la probabilidad de que el estudiante elegido al azar sea hombre y estudie veterinaria vale $\frac{20}{100} = 0.2$.

c) De los 100 estudiantes hay 20 que estudian Química y 30 que estudian Veterinaria. La probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química o Veterinaria vale $\frac{20+30}{100} = 0.5$.

d) De los 100 estudiantes hay 15 que quieren estudiar Biología y 10 que quieren estudiar Matemáticas, por lo que hay 100 – 15 – 10 = 75 que no estudian ni Biología ni Matemáticas. La probabilidad de que el estudiante elegido al azar no estudie ni Biología ni Matemáticas vale $\frac{75}{100} = 0.75$.

e) De las 49 mujeres hay 13 que quieren estudiar Química. La probabilidad de que el estudiante elegido al azar estudie Química, sabiendo que es mujer vale $\frac{13}{49} \simeq 0.2653$.

f) De los 51 hombres hay 13 que quieren estudiar Economía. La probabilidad de que el estudiante elegido al azar estudie Economía, sabiendo que es hombre vale $\frac{13}{51} \simeq 0.255$.

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El número de horas semanales que los estudiantes de segundo de bachillerato de una pedanía de Murcia dedican a ver series en inglés en HBO Max sigue una distribución normal con media μ y desviación típica igual a 2 horas.

a) Si en una muestra de 100 estudiantes, el número medio de horas semanales que dedican a ver series en inglés en HBO Max han sido de 8 horas, calcula un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media de las horas semanales que dedican a esta actividad. **[1 punto]**

b) Determina el tamaño mínimo que debe tener una muestra de estudiantes para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0.5 horas con un nivel de confianza del 99%. **[0,75 puntos]**

c) Si $\mu = 8.2$ y se elige a un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dedique más de 9 horas semanales a ver series en inglés en HBO Max? **[0,75 puntos]**

a) Sea X la variable aleatoria que da el número de horas semanales que los estudiantes de segundo de bachillerato de una pedanía de Murcia dedican a ver series en inglés en HBO Max. Sabemos que sigue una distribución normal: N(**μ**, 2).

La muestra es de 100 estudiantes y la media muestral es 8 horas → $n = 100$, $\bar{x} = 8$.

Para un nivel de confianza del 95% calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750

El error del intervalo viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{100}} = 0.392 \text{ horas}$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(8 - 0.392,\ 8 + 0.392\right) = \left(7.608, 8.392\right)$$

b) Para un nivel de confianza del 99% calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239			
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	
	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961			

Igualamos el error del intervalo a 0.5 horas y despejamos *n*.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 2.575 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2 \cdot 2.575}{0.5} \Rightarrow n = \left(\frac{2 \cdot 2.575}{0.5} \right)^2 = 106.09$$

El tamaño de la muestra es un valor entero superior al obtenido. 107 es el tamaño mínimo que debe tener una muestra de estudiantes para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0.5 horas con un nivel de confianza del 99%.

c) Si $\mu = 8.2$ la distribución es $N(8.2,\ 2)$. Nos piden calcular $P(X > 9)$.

$$P(X > 9) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{9 - 8.2}{2} \right) = P(Z > 0.4) = 1 - P(Z \leq 0.4) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{matrix} \right\} = 1 - 0.6554 = \boxed{0.3446}$$

z	0.00	
0.0	0.5000	0
0.1	0.5398	0
0.2	0.5793	0
0.3	0.6179	0
0.4	0.6554	0

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

307 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

PAU2025 - **JUNIO**

NOTA IMPORTANTE: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones. Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. En cada APARTADO se debe hacer sólo la CUESTIÓN 1 o la CUESTIÓN 2. La elección de CUESTIÓN 1 o CUESTIÓN 2 puede cambiar de un apartado a otro. Si se responden las 2 CUESTIONES de un apartado, solo se corregirá la primera CUESTIÓN contestada. Cada cuestión tiene una puntuación entre 2 y 3 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

APARTADO 1 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1: [2,5 puntos]

[1,5 puntos] Dadas las matrices A, B y C:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\quad \text{y}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

a) Calcula C^2. **[0,25 puntos]**

b) Halla $A+B+C^2$. **[0,25 puntos]**

c) Encuentra $(A-B)^{-1}$. **[0,25 puntos]**

d) Resuelve la ecuación matricial $AX-BX=A+B+C^2$. **[0,75 puntos]**

[1 punto] Discute y resuelve, si es posible, el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases}3x+2y-z=3\\ x-y+2z=4\\ 2x+3y-z=3\end{cases}$$

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] Una empresa del sector informático produce dos tipos de ordenadores portátiles: notebooks y gaming. La empresa obtiene 400 euros de beneficio por cada notebook y 500 euros por cada gaming. El proceso de fabricación es complejo y tiene tres fases: (1) selección y fabricación de componentes; (2) ensamblaje y (3) control de calidad. Los notebooks necesitan 2, 1 y 1 horas en cada fase, respectivamente, mientras que los gaming necesitan 1, 4 y 2 horas. En cada fase hay un límite de 14, 16 y 10 horas diarias. Se pide:

a) Si la empresa quiere maximizar el beneficio diario, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**

b) Representa la región factible. **[0,75 puntos]**

c) Encuentra los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**

d) ¿Cuántos ordenadores portátiles de cada tipo hay que producir para maximizar los beneficios diarios? **[0,5 puntos]**

e) Calcula el beneficio máximo diario posible. **[0,25 puntos]**

APARTADO 2 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:
[3 puntos] Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2+3}{1-x}$$

a) Determina su dominio. **[0,5 puntos]**
b) Estudia sus asíntotas. **[0,75 puntos]**
c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **[1 punto]**
d) Calcula los máximos y mínimos locales. **[0,75 puntos]**

CUESTIÓN 2:
[3 puntos] El famoso rapero Myke Towers ofrecerá un concierto en Murcia el próximo 6 de junio en el Espacio Norte, que durará 5 horas. La asistencia al evento, medida en miles de personas, viene dada por la siguiente función:

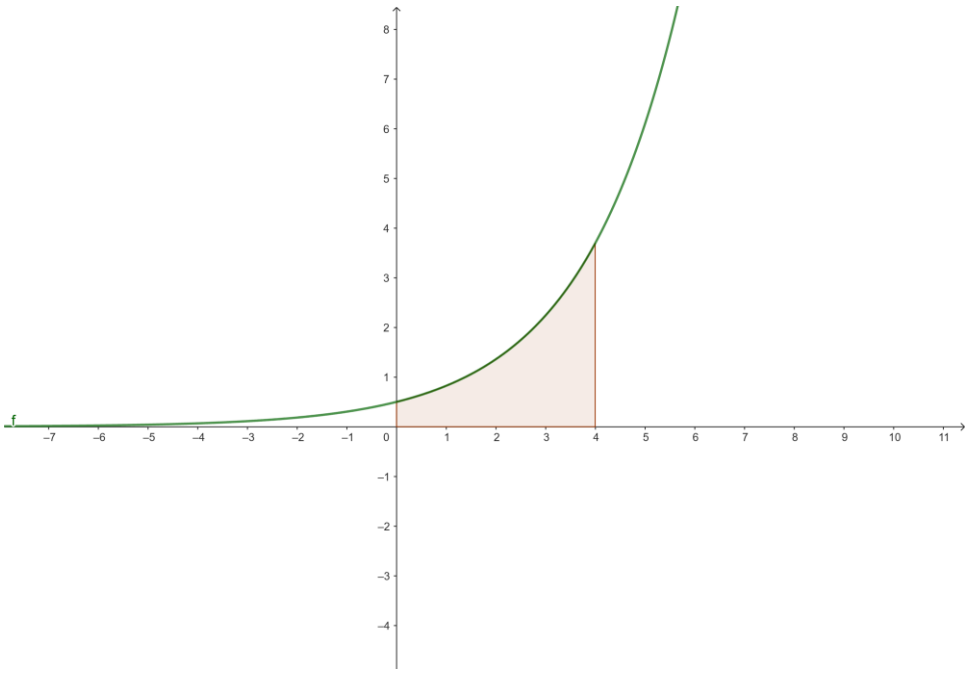
$$N(t)=\frac{20t}{(t+1)^2}$$

donde $0\le t\le 5$ y *N* es el número de miles de asistentes *t* horas después del comienzo. Se pide:
a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función *N(t)*. **[1 punto]**
b) Calcula en qué hora se produce el máximo número de asistentes y a cuánto ascienden. **[1,25 puntos]**
c) Evalúa e interpreta la derivada de la función *N(t)* en $t=2$. **[0,25 puntos]**
d) Halla cuántos asistentes hay una vez han transcurrido 3 horas desde el comienzo del concierto. **[0,5 puntos]**

APARTADO 3 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:
[2 puntos] Realiza:
a) Si $\int_0^2 f(x)dx=4$, ¿a qué es igual $\int_0^2\left[f(x)+3\right]dx$? **[0,25 puntos]**
b) Representa gráficamente el recinto del plano limitado por $f(x)=x^2$ y $g(x)=2x+3$. Calcula su área. **[1,75 puntos]**

CUESTIÓN 2:
[2 puntos] Realiza:
a) Calcula los valores de los límites de integración *a y b* de manera que se cumpla $\int_{-2}^{1} f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$**. [0,25 puntos]**
b) Dada la función $f(x)=\frac{1}{2}e^{x/2}$:
b.1) Escribe la integral que describe el área de la región sombreada. **[0,5 puntos]**
b.2) Calcula el área. **[1,25 puntos]**



APARTADO 4 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:

[2,5 puntos] Un grupo de investigadores de la Universidad de Murcia realizó una encuesta en la que se preguntó a 1000 personas adultas su opinión sobre establecer una edad legal para que los niños tengan teléfono móvil. Según los resultados, 560 personas, de las que 390 eran mujeres, opinaron a favor de esta medida. De las 440 personas que opinaron en contra, 280 eran hombres. Si se selecciona una persona al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de esta medida? **[0,25 puntos]**
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona encuestada sea mujer? **[0,75 puntos]**
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona sea mujer o esté a favor de esta medida? **[0,75 puntos]**
d) Si esa persona seleccionada al azar es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que esté a favor de esta medida? **[0,75 puntos]**

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El peso, en kg, de los jugadores de fútbol de la Liga Nacional juvenil de la Región de Murcia sigue una distribución normal con media μ y desviación típica igual a 12 kg.

a) Si en una muestra de 64 jugadores el peso medio ha sido de 70 kg, calcula un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media de los pesos de los jugadores de fútbol de la Ligan Nacional juvenil de la Región de Murcia. **[1 punto]**
b) Determina el tamaño mínimo que debe tener una muestra de jugadores para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 4 kg con un nivel de confianza del 98%. **[0,75 puntos]**
c) Si $\mu = 71$ y se elige a un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 75 kg? **[0,75 puntos]**

SOLUCIONES

APARTADO 1 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1: [2,5 puntos]
[1,5 puntos] Dadas las matrices A, B y C:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\ \text{y}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

a) Calcula C^2. **[0,25 puntos]**
b) Halla $A+B+C^2$. **[0,25 puntos]**
c) Encuentra $(A-B)^{-1}$. **[0,25 puntos]**
d) Resuelve la ecuación matricial $AX-BX=A+B+C^2$. **[0,75 puntos]**

[1 punto] Discute y resuelve, si es posible, el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases}3x+2y-z=3\\ x-y+2z=4\\ 2x+3y-z=3\end{cases}$$

a) Calculamos C^2.

$$C^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 2-2\\ 0+0 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Calculamos $A+B+C^2$.

$$A+B+C^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

c) Hallamos la expresión de la matriz A – B y comprobamos que su determinante es no nulo.

$$A-B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$|A-B|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1+2=1\neq 0$$

Como el determinante es no nulo existe la inversa de $A-B$. La calculamos.

$$(A-B)^{-1}=\frac{Adj(A-B)^T}{|A-B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

d) Despejamos X en la ecuación matricial y obtenemos su expresión.

$$AX-BX=A+B+C^2\Rightarrow(A-B)X=A+B+C^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=(A-B)^{-1}\left(A+B+C^2\right)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+0 & 1+2\\ -8+0 & 2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -8 & 4\end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -8 & 4\end{pmatrix}$.

Discutimos el sistema utilizando el método de Gauss y obtenemos un sistema triangular equivalente al inicial.

$$\begin{cases}3x+2y-z=3\\ x-y+2z=4\\ 2x+3y-z=3\end{cases}\Rightarrow\{\text{Ecuación } 2^{\text{a}} \leftrightarrow \text{ Ecuación } 1^{\text{a}}\}\Rightarrow\begin{cases}x-y+2z=4\\ 3x+2y-z=3\\ 2x+3y-z=3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación } 2^{\text{a}}-3\cdot\text{Ecuación } 1^{\text{a}}\\ \begin{array}{rrrr}3x & +2y & -z & =3\\ -3x & +3y & -6z & =-12\end{array}\\ \hline \begin{array}{rrrr}\multicolumn{4}{r}{5y\quad -7z\quad =-9\rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}}}\end{array}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación } 3^{\text{a}}-2\cdot\text{Ecuación } 1^{\text{a}}\\ \begin{array}{rrrr}2x & +3y & -z & =3\\ -2x & +2y & -4z & =-8\end{array}\\ \hline \begin{array}{rrrr}\multicolumn{4}{r}{5y\quad -5z\quad =-5\rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}}}\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x-y+2z=4\\ 5y-7z=-9\\ 5y-5z=-5\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación } 3^{\text{a}}-\text{Ecuación } 2^{\text{a}}\\ \begin{array}{rrrr}5y & -5z & = & -5\\ -5y & +7z & = & 9\end{array}\\ \hline \begin{array}{rrrr}\multicolumn{4}{r}{2z\quad =\quad 4\rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}}}\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x-y+2z=4\\ 5y-7z=-9\\ 2z=4\end{cases}$$

Este sistema triangular obtenido es compatible determinado. Determinamos la solución del sistema.

$$\begin{cases}x-y+2z=4\\ 5y-7z=-9\\ 2z=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y+2z=4\\ 5y-7z=-9\\ \boxed{z=\frac{4}{2}=2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y+2\cdot 2=4\\ 5y-7\cdot 2=-9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y=0\\ 5y=5\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-y=0\\ \boxed{y=\frac{5}{5}=1}\end{cases}\Rightarrow x-1=0\Rightarrow\boxed{x=1}$$

La solución del sistema es $x=1, y=1, z=2$.

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] Una empresa del sector informático produce dos tipos de ordenadores portátiles: notebooks y gaming. La empresa obtiene 400 euros de beneficio por cada notebook y 500 euros por cada gaming. El proceso de fabricación es complejo y tiene tres fases: (1) selección y fabricación de componentes; (2) ensamblaje y (3) control de calidad. Los notebooks necesitan 2, 1 y 1 horas en cada fase, respectivamente, mientras que los gaming necesitan 1, 4 y 2 horas. En cada fase hay un límite de 14, 16 y 10 horas diarias. Se pide:

a) Si la empresa quiere maximizar el beneficio diario, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**

b) Representa la región factible. **[0,75 puntos]**

c) Encuentra los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**

d) ¿Cuántos ordenadores portátiles de cada tipo hay que producir para maximizar los beneficios diarios? **[0,5 puntos]**

e) Calcula el beneficio máximo diario posible. **[0,25 puntos]**

a) Llamamos x = número de notebooks que se producen, y = número de gaming.
Realizamos una tabla para organizar toda la información proporcionada en el problema.

	Horas fase 1	Horas fase 2	Horas fase 3	Beneficio
Notebooks (x)	2x	x	x	400x
Gaming (y)	y	4y	2y	500y
TOTAL	$2x+y$	$x+4y$	$x+2y$	$400x+500y$

La función objetivo es el beneficio diario que deseamos maximizar: $B(x,y)=400x+500y$.

Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

En cada fase hay un límite de 14, 16 y 10 horas diarias. →
$2x+y\le 14;\ x+4y\le 16;\ x+2y\le 10$

Las cantidades deben ser enteras y positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

La región factible es la zona del plano que contiene los puntos que cumplen el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y\le 14 \\ x+4y\le 16 \\ x+2y\le 10 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+y=14$

x	$y=14-2x$
0	14
6	2
7	0

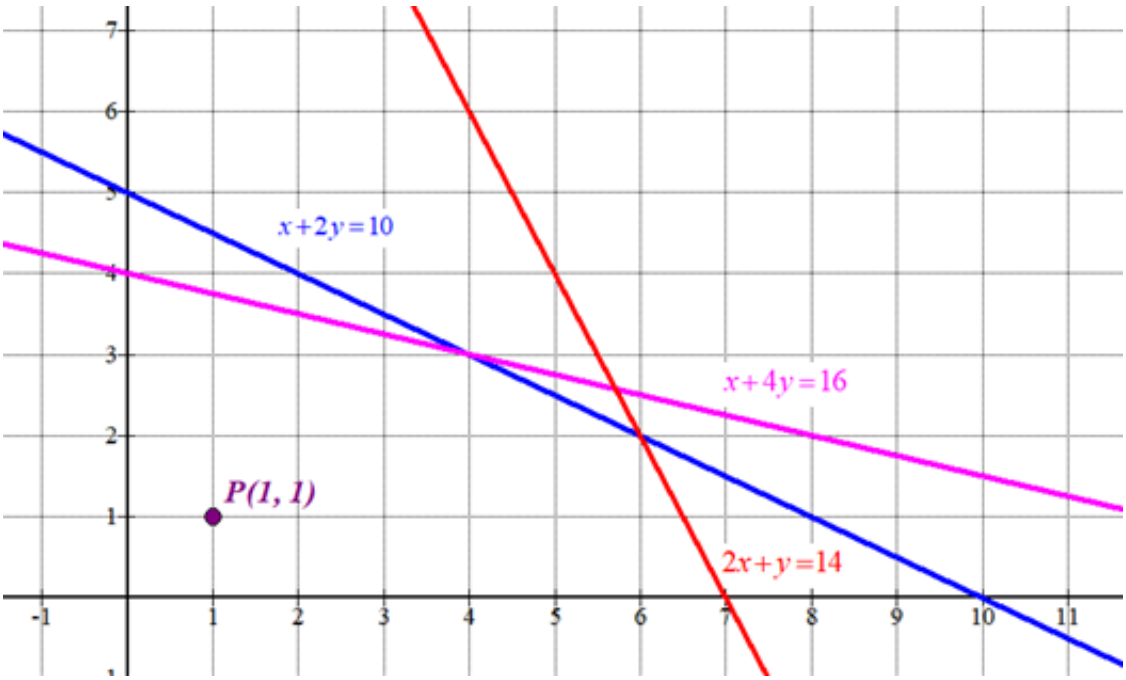
$x+4y=16$

x	$y=\frac{16-x}{4}$
0	4
4	3
16	0

$x+2y=10$

x	$y=\frac{10-x}{2}$
0	5
4	3
6	2
10	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$
Primer cuadrante

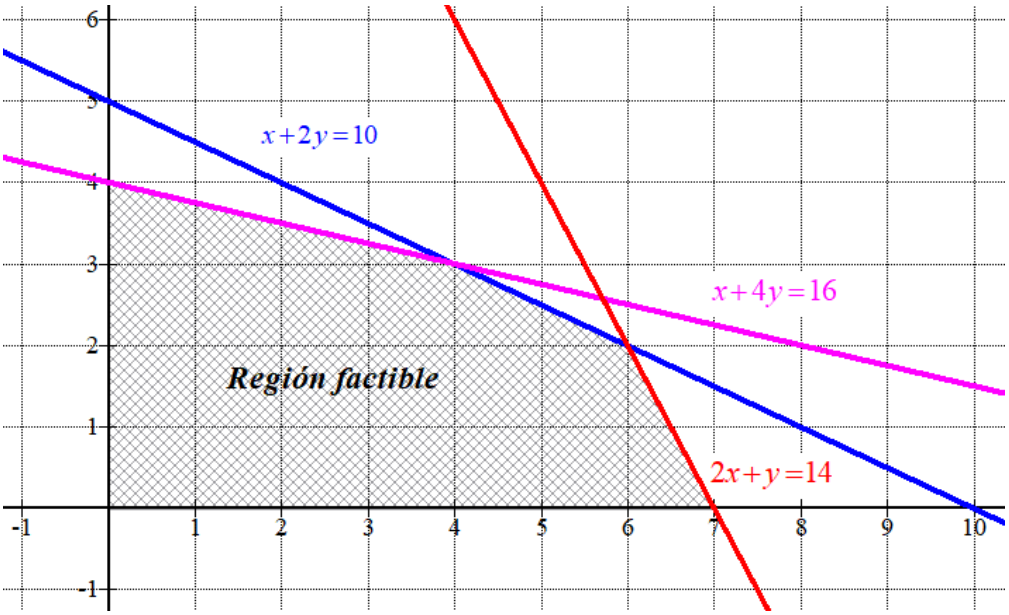


Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} 2x+y\le 14 \\ x+4y\le 16 \\ x+2y\le 10 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante que está por debajo de las rectas oblicuas (rosa, azul y roja).

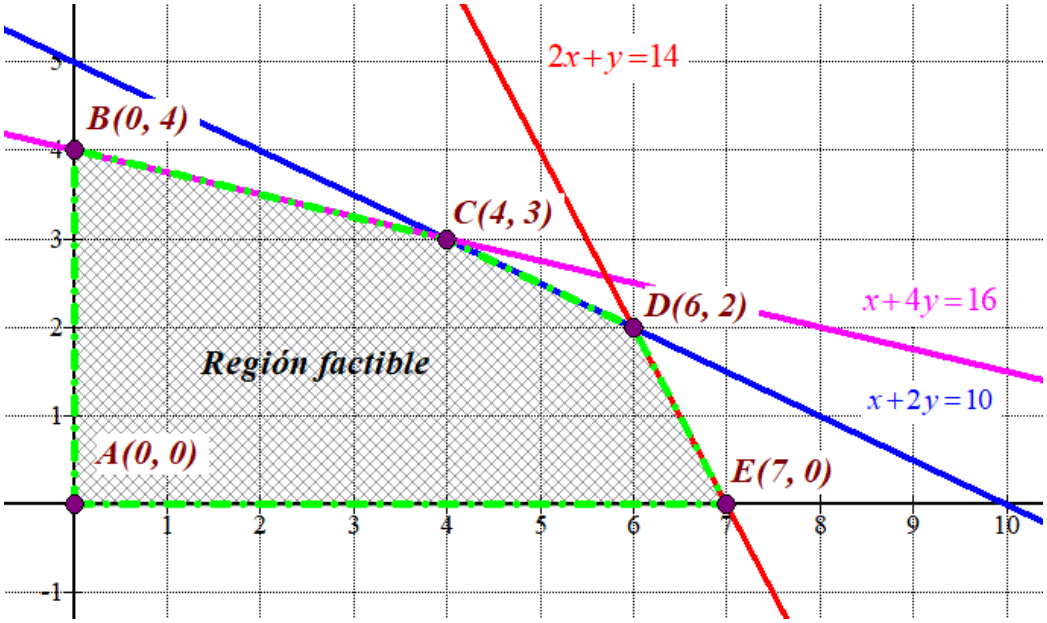
Comprobamos que el punto P(1, 1) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$\left.\begin{array}{l} 2+1\le 14 \\ 1+4\le 16 \\ 1+2\le 10 \\ 1\ge 0;\ 1\ge 0 \end{array}\right\}$ Se cumplen todas y la región factible es la indicada.

Coloreo de gris la región factible en el siguiente dibujo.



c) Las coordenadas de los vértices se aprecian en el dibujo y se pueden también comprobar en las tablas de valores. Los vértices son: A(0,0), B(0,4), C(4, 3), D(6, 2) y E(7, 0)



d) Valoramos la función objetivo $B(x,y)=400x+500y$ en cada uno de los vértices en busca del máximo valor.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 4) → $B(0,4)=400\cdot 0+500\cdot 4=2000€$

C(4, 3) → $B(4,3)=400\cdot 4+500\cdot 3=3100€$

D(6, 2) → $B(6,2)=400\cdot 6+500\cdot 2=3400€$ *Máximo*

E(7, 0) → $B(7,0)=400\cdot 7+500\cdot 0=2800€$

El beneficio máximo se obtiene en el punto D(6, 2). Significa que se deben fabricar diariamente 6 notebooks y 2 gaming para obtener los beneficios máximos.

e) El beneficio máximo diario que se puede conseguir es de 3400 euros.

APARTADO 2 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:

[3 puntos] Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2+3}{1-x}$$

a) Determina su dominio. **[0,5 puntos]**
b) Estudia sus asíntotas. **[0,75 puntos]**
c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **[1 punto]**
d) Calcula los máximos y mínimos locales. **[0,75 puntos]**

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.
Dominio = $\mathbb{R}-\{1\}$.

b) **Asíntotas verticales.** $x=a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3}{1-x}=\frac{1^2+3}{1-1}=\frac{4}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to\infty}-x=\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+3}{1-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{-x^2}=-1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{1-x}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+3+x-\cancel{x^2}}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+x}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{-x}=-1$$

La función tiene a la recta $y=-x-1$ como asíntota oblicua.

c) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{x^2+3}{1-x}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x(1-x)-(-1)\left(x^2+3\right)}{(1-x)^2}=\frac{2x-2x^2+x^2+3}{(1-x)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}=0\Rightarrow -x^2+2x+3=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(-1)3}}{2(-1)}=$$

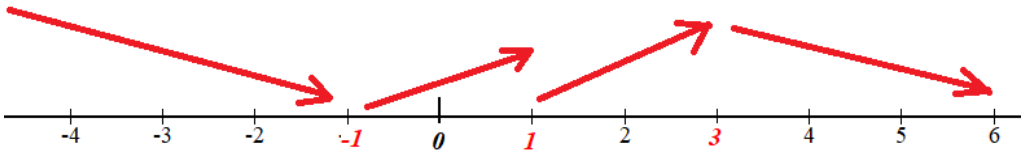
$$=\frac{-2\pm 4}{-2}=\begin{cases}\frac{-2+4}{-2}=\boxed{-1=x}\\ \frac{-2-4}{-2}=\boxed{3=x}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores y el valor excluido del dominio $x=1$.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=\dfrac{-(-2)^2+2(-2)+3}{(1-(-2))^2}=\dfrac{-5}{9}<0$. La función decrece en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{-0^2+2\cdot 0+3}{(1-0)^2}=3>0$. La función crece en $(-1,1)$.
- En el intervalo $(1,3)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{-2^2+2\cdot 2+3}{(1-2)^2}=3>0$. La función crece en $(1,3)$.
- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x=4$ y la derivada vale $f'(4)=\dfrac{-4^2+2\cdot 4+3}{(1-4)^2}=\dfrac{-5}{9}<0$. La función decrece en $(3,+\infty)$.

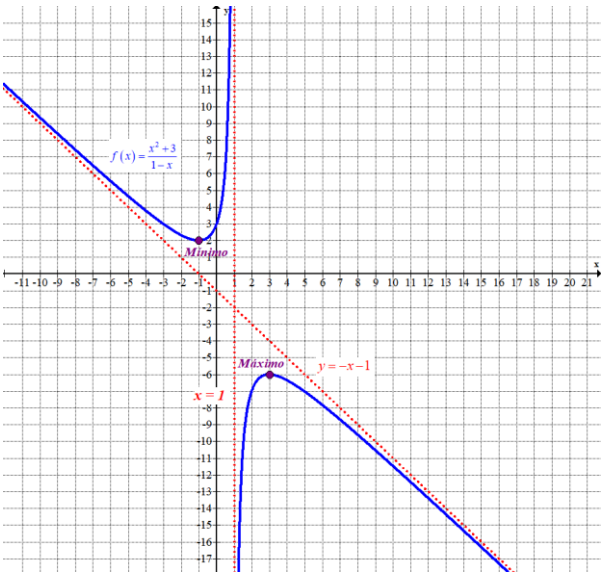
Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ y crece en $(-1,1)\cup(1,3)$.

d) Con el estudio anterior sabemos que la función sigue el esquema siguiente:



La función presenta un mínimo local en $x=-1$ y un máximo local en $x=3$.

Como $f(-1)=\dfrac{(-1)^2+3}{1-(-1)}=2$ y $f(3)=\dfrac{3^2+3}{1-3}=-6$ el mínimo local tiene coordenadas (–1, 2) y el máximo local tiene coordenadas (3, –6).



CUESTIÓN 2:

[3 puntos] El famoso rapero Myke Towers ofrecerá un concierto en Murcia el próximo 6 de junio en el Espacio Norte, que durará 5 horas. La asistencia al evento, medida en miles de personas, viene dada por la siguiente función:

$$N(t)=\frac{20t}{(t+1)^2}$$

donde $0\le t\le 5$ y N es el número de miles de asistentes t horas después del comienzo. Se pide:

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $N(t)$. **[1 punto]**

b) Calcula en qué hora se produce el máximo número de asistentes y a cuánto ascienden. **[1,25 puntos]**

c) Evalúa e interpreta la derivada de la función $N(t)$ en $t=2$. **[0,25 puntos]**

d) Halla cuántos asistentes hay una vez han transcurrido 3 horas desde el comienzo del concierto. **[0,5 puntos]**

a) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$N(t)=\frac{20t}{(t+1)^2}\Rightarrow N'(t)=\frac{20(t+1)^{\cancel{2}}-2\cancel{(t+1)}\,20t}{(t+1)^{\cancel{4}3}}=\frac{20(t+1)-40t}{(t+1)^3}=\frac{20-20t}{(t+1)^3}$$

$$N'(t)=0\Rightarrow\frac{20-20t}{(t+1)^3}=0\Rightarrow 20-20t=0\Rightarrow\boxed{t=1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de la primera hora de concierto.

- En el intervalo $(0,1)$ consideramos $t=0.5$ y la derivada vale $N'(0.5)=\frac{20-20\cdot 0.5}{(0.5+1)^3}=\frac{80}{27}>0$. La función crece en $(0,1)$.
- En el intervalo $(1,5)$ consideramos $t=2$ y la derivada vale $N'(2)=\frac{20-20\cdot 2}{(2+1)^3}=\frac{-20}{27}<0$. La función decrece en $(1,5)$.

Resumiendo: Durante la primera hora de concierto crece el número de asistentes al concierto y de la primera a la quinta hora del concierto disminuye el número de asistentes.

b) Por lo visto en el apartado anterior se deduce que el máximo número de asistentes se produce al cabo de 1 hora de concierto. Como $N(1)=\frac{20\cdot 1}{(1+1)^2}=5$ podemos decir que el número máximo de asistentes al concierto se produce al cabo de 1 hora siendo 5000 los asistentes en ese momento.

c) $N'(2)=\frac{20-20\cdot 2}{(2+1)^3}=\frac{-20}{27}=-0.74<0$. Este resultado nos indica que el número de asistentes disminuye cuando han pasado 2 horas de concierto. Aproximadamente disminuyen 740 personas en torno a las 2 horas (entre la hora y media y las 2 horas y media se van 740 personas, aproximadamente.

d) Como $N(3)=\frac{20\cdot 3}{(3+1)^2}=\frac{60}{16}=3.750$ podemos decir que al cabo de 3 horas hay 3750 asistentes en el concierto.

APARTADO 3 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:

[2 puntos] Realiza:

a) Si $\int_0^2 f(x)dx = 4$, ¿a qué es igual $\int_0^2 [f(x)+3]dx$? **[0,25 puntos]**

b) Representa gráficamente el recinto del plano limitado por $f(x)=x^2$ y $g(x)=2x+3$. Calcula su área. **[1,75 puntos]**

a) Aplicamos las propiedades de la integración.

$$\int_0^2 [f(x)+3]dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 3dx = 4 + [3x]_0^2 = 4 + (3\cdot 2 - 3\cdot 0) = 4+6 = 10$$

b) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

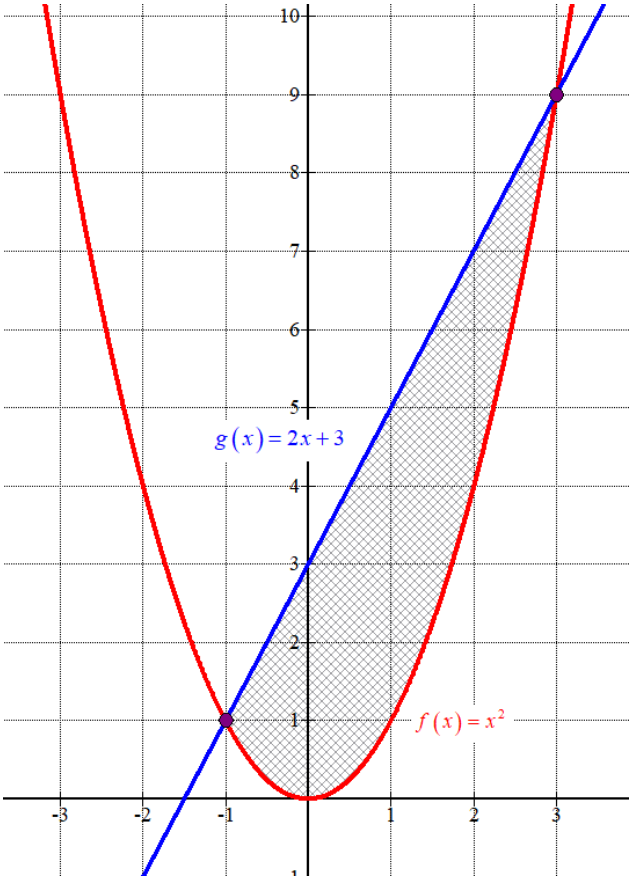
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2 \\ g(x)=2x+3 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = 2x+3 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-3)}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{2-4}{2} = \boxed{-1=x} \end{cases}$$

La región del plano de la cual queremos hallar su área está comprendida entre –1 y 3. Hacemos una tabla de valores y representamos la parábola y la recta dadas.

x	$f(x)=x^2$
–1	1
0	0
3	9

x	$g(x)=2x+3$
–1	1
0	3
3	9



El área es el valor de la integral definida entre –1 y 3 de $g(x)-f(x)$.

$$\text{Área}=\int_{-1}^{3} g(x)-f(x)\,dx=\int_{-1}^{3} 2x+3-x^2\,dx=\left[x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3}=$$

$$=\left[3^2+3\cdot 3-\frac{3^3}{3}\right]-\left[(-1)^2+3(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right]=9+9-9-\left(1-3+\frac{1}{3}\right)=\boxed{\frac{32}{3}\simeq 10.667\ u^2}$$

CUESTIÓN 2:

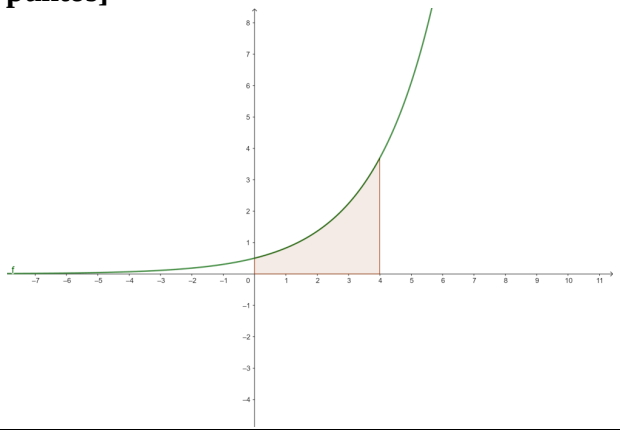
[2 puntos] Realiza:

a) Calcula los valores de los límites de integración a y b de manera que se cumpla $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{5} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$. **[0,25 puntos]**

b) Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$:

b.1) Escribe la integral que describe el área de la región sombreada. **[0,5 puntos]**

b.2) Calcula el área. **[1,25 puntos]**



a) Aplicando las propiedades de la integración.

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{5} f(x)\,dx = \int_{-2}^{5} f(x)\,dx$$

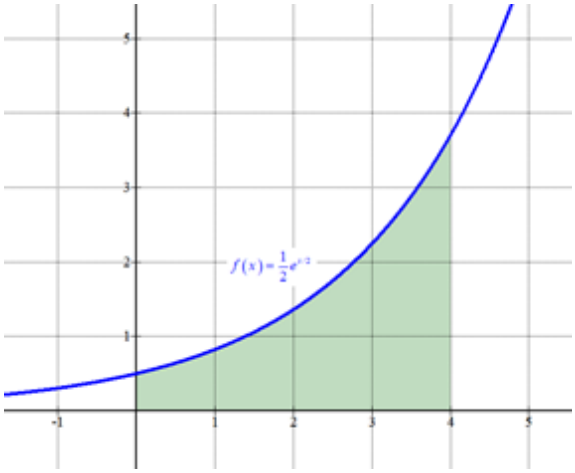
Por lo que $a = -2$ y $b = 5$.

b.1) Por lo que se observa en el dibujo es la región del plano limitada por la gráfica de la función y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 4$, por lo que el valor del área se obtiene con la integral definida de la función entre esos dos valores: $\int_{0}^{4} f(x)\,dx = \int_{0}^{4} \frac{1}{2}e^{x/2}dx$.

b.2) Calculamos el valor del área determinando el valor de la integral definida.

$$Área = \int_{0}^{4} \frac{1}{2}e^{x/2}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{4} e^{x/2}dx = \frac{1}{2}\left[2e^{x/2}\right]_{0}^{4} = \frac{1}{2}\left[2e^{4/2} - 2e^{0/2}\right] = \frac{1}{2}\left[2e^{2} - 2\right] = \boxed{e^{2} - 1 \simeq 6.39\ u^{2}}$$

Si contamos los cuadraditos que están coloreados en el siguiente dibujo y sabiendo que cada uno tiene un área de 1 unidad cuadrada comprobamos la bondad de la solución obtenida.



APARTADO 4 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:

[2,5 puntos] Un grupo de investigadores de la Universidad de Murcia realizó una encuesta en la que se preguntó a 1000 personas adultas su opinión sobre establecer una edad legal para que los niños tengan teléfono móvil. Según los resultados, 560 personas, de las que 390 eran mujeres, opinaron a favor de esta medida. De las 440 personas que opinaron en contra, 280 eran hombres. Si se selecciona una persona al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de esta medida? **[0,25 puntos]**

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona encuestada sea mujer? **[0,75 puntos]**

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona sea mujer o esté a favor de esta medida? **[0,75 puntos]**

d) Si esa persona seleccionada al azar es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que esté a favor de esta medida? **[0,75 puntos]**

Realizamos una tabla de contingencia para colocar de forma ordenada los datos proporcionados y obtener los datos que vienen implícitos en la información proporcionada.

	Mujer	Hombre	
A favor	**390**		**560**
En contra		**280**	**440**
			1000

Completamos la tabla.

	Mujer	Hombre	
A favor	**390**	**170**	**560**
En contra	**160**	**280**	**440**
	550	**450**	**560**

Con toda esta información y aplicando la regla de Laplace respondemos a las preguntas planteadas.

a) De las 1000 personas encuestadas hay 560 a favor la probabilidad de que la persona elegida al azar esté a favor de esta medida vale $\frac{560}{1000}=0.56$.

b) De las 1000 personas encuestadas hay 550 mujeres la probabilidad de que la persona elegida al azar sea mujer vale $\frac{550}{1000}=0.55$.

c) De las 1000 personas encuestadas hay 550 mujeres y 170 hombres que están a favor de la medida, por lo que la probabilidad de que la persona elegida al azar sea mujer o esté a favor de esta medida vale $\frac{550+170}{1000}=0.72$.

d) De los 450 hombres encuestados hay 170 a favor, por lo que la probabilidad de que al elegir un hombre al azar esté a favor de esta medida vale $\frac{170}{450}=\frac{17}{45}\simeq 0.3778$.

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El peso, en kg, de los jugadores de fútbol de la Liga Nacional juvenil de la Región de Murcia sigue una distribución normal con media μ y desviación típica igual a 12 kg.

a) Si en una muestra de 64 jugadores el peso medio ha sido de 70 kg, calcula un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media de los pesos de los jugadores de fútbol de la Ligan Nacional juvenil de la Región de Murcia. **[1 punto]**

b) Determina el tamaño mínimo que debe tener una muestra de jugadores para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 4 kg con un nivel de confianza del 98%. **[0,75 puntos]**

c) Si $\mu = 71$ y se elige a un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 75 kg? **[0,75 puntos]**

a) Sea X la variable aleatoria que da el peso, en kg, de los jugadores de fútbol de la Liga Nacional juvenil de la Región de Murcia. Sabemos que sigue una distribución normal: N(**μ**, 12).

La muestra es de 64 jugadores y la media muestral es 70 kilos → $n = 64$, $\bar{x} = 70$ kg

Para un nivel de confianza del 95% calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750

El error del intervalo viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{12}{\sqrt{64}} = 2.94$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(70 - 2.94,\ 70 + 2.94\right) = \left(67.06,\ 72.94\right)$$

La media de los pesos con un nivel de confianza del 95 % se sitúa entre 67.06 y 72.94 kilos.

b) Para un nivel de confianza del 98% calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901

Igualamos el error del intervalo a 4 kg y despejamos *n*.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 4 = 2.325 \cdot \frac{12}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{12 \cdot 2.325}{4} \Rightarrow n = \left(\frac{12 \cdot 2.325}{4}\right)^2 \simeq 48.65$$

El tamaño de la muestra es un valor entero superior al obtenido. 49 es el tamaño mínimo que debe tener una muestra de jugadores para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 4 kg con un nivel de confianza del 98%.

c) Si $\mu = 71$ la distribución es N(71, 12). Nos piden calcular $P(X > 75)$.

$$P(X > 75) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{75 - 71}{12}\right) = P(Z > 0.333) = 1 - P(Z \leq 0.33) =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.6293 = \boxed{0.3707}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

307 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

EBAU2024 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones:

a) El producto $A\cdot B$. (0,5 puntos)

b) La inversa C^{-1}. (0,5 puntos)

c) La diferencia $D-A\cdot B$. (0,5 puntos)

d) Resuelve la ecuación matricial: $A\cdot B+C\cdot X=D$; es decir calcula la matriz X. (1 punto)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}x+2y\le 10\\ x+y\ge 2\\ 0\le x\le 8\\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x,y)=2x+y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) El número de espectadores, en miles de personas, en unas competiciones de atletismo durante las 5 primeras horas de realización de estas pruebas, viene dada por la función $P(x)=x^3-6x^2+9x+4$, donde x representa el número de horas, $1\le x\le 5$. Determine:

a) ¿En qué intervalo aumenta el número de espectadores a la competición? (1 punto)

b) ¿Cuándo hay un mayor número de espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)

c) ¿En qué hora hay menos espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ \ x<1 \\ \dfrac{ax+b}{x} & si\ \ 1\le x\le 2 \\ \sqrt{x^3+1} & si\ \ x>2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros *a* y *b* para que la función sea continua en todo su dominio. (1.5 puntos)
b) Determine la derivada $f'(x)$ para $x>2$. (1 punto)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$ en el punto *x = 1*. (1,25 puntos)
b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$, el eje de abscisa y la recta $x=1$. (1,25 puntos)

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Calcular el área de la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=x+2$ y representar gráficamente esta región.

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Al 45% de los socios de un club le gusta jugar a las cartas, al 40% jugar al domino y al 23% jugar a las cartas y al domino. Si elegimos al azar a un socio de este club, calcula las siguientes probabilidades:
   i. Que juegue a las cartas o al domino. (0,5 puntos)
   ii. Que no juegue ni a las cartas ni al domino. (0,5 puntos)
   iii. Que juegue a las cartas, sabiendo que juega al domino. (0,5 puntos)

b) La altura de los estudiantes de una clase se distribuye según una distribución normal de media desconocida μ y una desviación típica de 4 cm. Se toma una muestra aleatoria de 16 estudiantes de la clase obteniendo una estatura media de 172 cm. Hallar un intervalo de confianza para la estatura media con un nivel de confianza del 99%. (1 punto).

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones:

a) El producto $A\cdot B$. (0,5 puntos)

b) La inversa C^{-1}. (0,5 puntos)

c) La diferencia $D-A\cdot B$. (0,5 puntos)

d) Resuelve la ecuación matricial: $A\cdot B+C\cdot X=D$; es decir calcula la matriz X. (1 punto)

a) Realizamos el producto indicado.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2+0 & -1+0+0\\ 2+0+0 & -1+0-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & -7\end{pmatrix}$$

b) Comprobamos que existe la inversa de C y la calculamos.

$$|C|=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=10-9=1\neq 0$$

$$C^{-1}=\frac{Adj\left(C^{t}\right)}{|C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$$

c) Calculamos la diferencia.

$$D-A\cdot B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 8\end{pmatrix}$$

d) Despejamos X de la ecuación matricial y determinamos su expresión.

$$A\cdot B+C\cdot X=D\Rightarrow C\cdot X=D-A\cdot B\Rightarrow X=C^{-1}\left(D-A\cdot B\right)$$

$$X=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3 & 6-24\\ -3+5 & -9+40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -18\\ 2 & 31\end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial $A\cdot B+C\cdot X=D$ es $X=\begin{pmatrix}-1 & -18\\ 2 & 31\end{pmatrix}$.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y\le 10 \\ x+y\ge 2 \\ 0\le x\le 8 \\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x,y)=2x+y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

a) Es un problema de programación lineal.

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+2y=10$

x	$y=\dfrac{10-x}{2}$
0	5
8	1
10	0

$x+y=2$

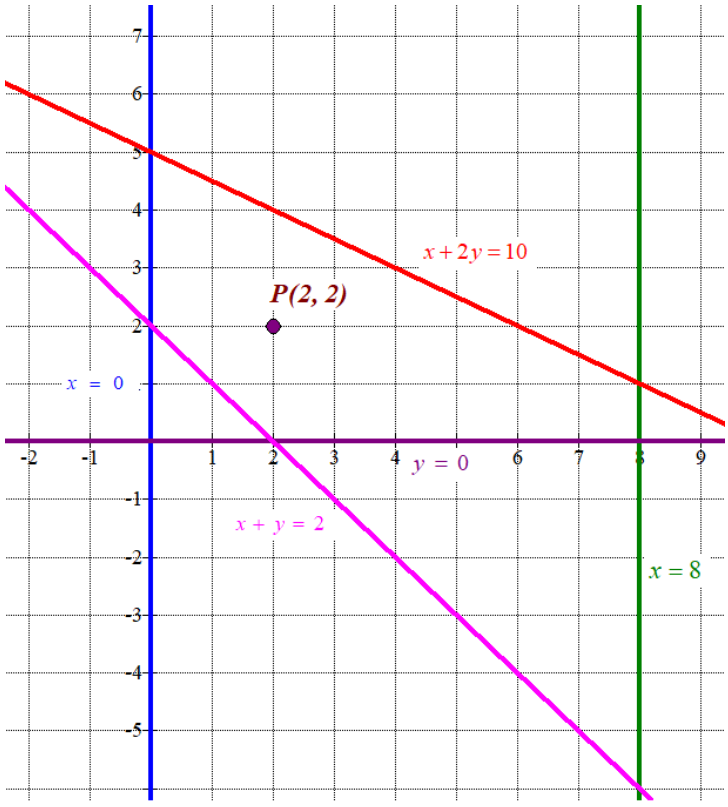
x	$y=2-x$
0	2
2	0
4	−2

$x=0$ *Eje Y*

$x=8$

$x=8$	y
8	0
8	1
8	2

$y=0$ *Eje X*

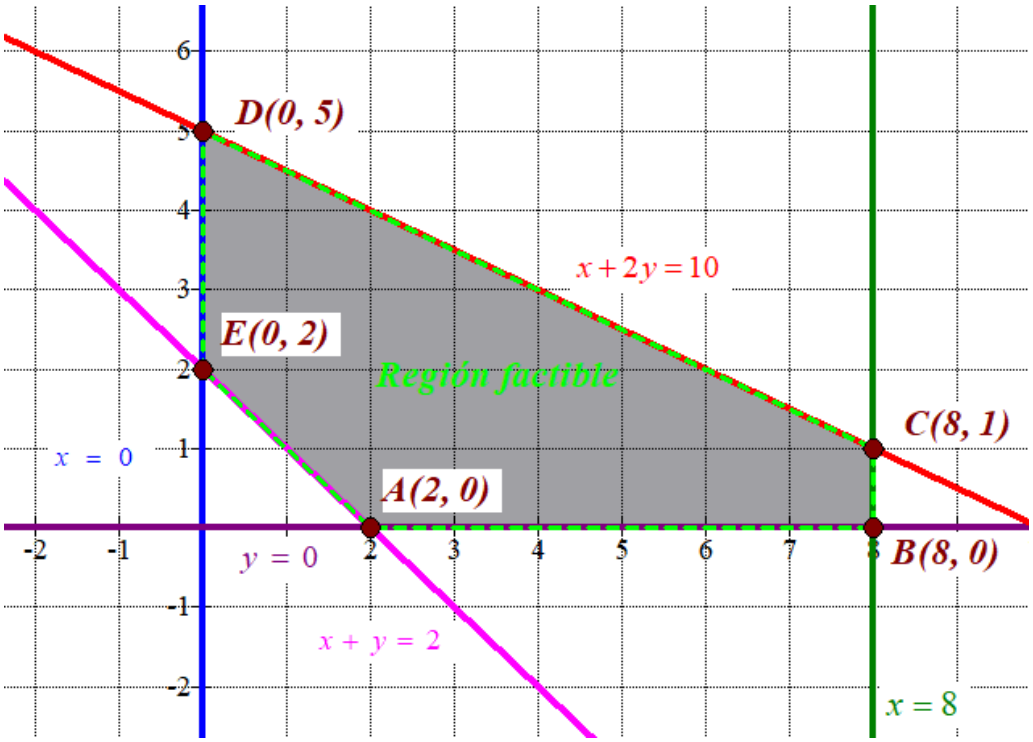


Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} x+2y\le 10 \\ x+y\ge 2 \\ 0\le x\le 8 \\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante que está a la izquierda de la recta vertical verde, por debajo de la recta **roja** y por encima de las rectas rosa y violeta.

Comprobamos que el punto P(2, 2) perteneciente a dicha región del plano cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2+2\cdot 2\le 10 \\ 2+2\ge 2 \\ 0\le 2\le 8 \\ 2\ge 0 \end{array}\right\}$$ Se cumplen todas y la región factible es la indicada.

Coloreo de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Las coordenadas de los vértices son: A(2,0), B(8,0), C(8, 1), D(0, 5) y E(0, 2)

b) Valoramos la función $f(x,y)=2x+y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo y mínimo.

A(2, 0) → $f(2,0)=2\cdot 2+0=4$

B(8, 0) → $f(8,0)=2\cdot 8+0=16$

C(8, 1) → $f(8,1)=2\cdot 8+1=17$ ¡*Máximo*!

D(0, 5) → $f(0,5)=2\cdot 0+5=5$

E(0, 2) → $f(0,2)=2\cdot 0+2=2$ ¡Minimo!

El valor mínimo de la función es 2 y se obtiene en el punto E(0, 2).
El valor máximo de la función es 17 y se obtiene en el punto C(8, 1).

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) El número de espectadores, en miles de personas, en unas competiciones de atletismo durante las 5 primeras horas de realización de estas pruebas, viene dada por la función $P(x)=x^3-6x^2+9x+4$, donde x representa el número de horas, $1\le x\le 5$. Determine:

a) ¿En qué intervalo aumenta el número de espectadores a la competición? (1 punto)
b) ¿Cuándo hay un mayor número de espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)
c) ¿En qué hora hay menos espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)

a) Buscamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$P(x)=x^3-6x^2+9x+4 \Rightarrow P'(x)=3x^2-12x+9$$

$$P'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12x+9=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(3)}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=3=x\\ \frac{4-2}{2}=1=x\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 3$.

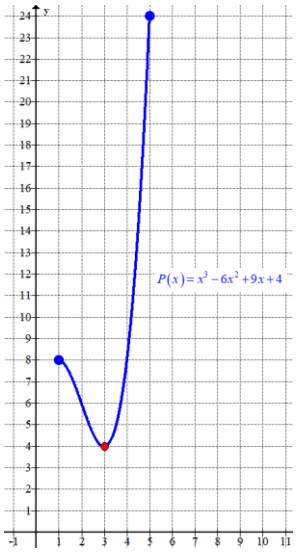
- En el intervalo $[1,3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $P'(2)=3\cdot 2^2-12\cdot 2+9=-3<0$. La función decrece en $[1,3)$.
- En el intervalo $(3,5]$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $P'(4)=3\cdot 4^2-12\cdot 4+9=9>0$. La función crece en $(3,5]$.

El número de espectadores aumenta de la hora 3 hasta la hora 5.

b) Valoramos el número de espectadores en los extremos del intervalo [1, 5] y en el punto crítico $x=3$.

$$\left.\begin{aligned}P(1)&=1^3-6\cdot 1^2+9\cdot 1+4=8\\ P(3)&=3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3+4=4\\ P(5)&=5^3-6\cdot 5^2+9\cdot 5+4=24\end{aligned}\right\}$$

El mayor número de espectadores se produce en la quinta hora con 24000 espectadores.
El menor número de espectadores se produce en la tercera hora con 4000 espectadores.



CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ \ x<1 \\ \dfrac{ax+b}{x} & si\ \ 1\le x\le 2 \\ \sqrt{x^3+1} & si\ \ x>2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros *a* y *b* para que la función sea continua en todo su dominio. (1.5 puntos)

b) Determine la derivada $f'(x)$ para $x>2$. (1 punto)

a) Para que sea continua en *x = 1* deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2+1=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{ax+b}{x}=a+b \\ f(1)=\dfrac{a+b}{1}=a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a+b=2}$$

Para que sea continua en *x = 2* deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{ax+b}{x}=\dfrac{2a+b}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x^3+1}=3 \\ f(2)=\dfrac{2a+b}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2a+b}{2}=3\Rightarrow \boxed{2a+b=6}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=2 \\ 2a+b=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=2-a \\ 2a+b=6 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a+2-a=6\Rightarrow \boxed{a=4}\Rightarrow \boxed{b=2-4=-2}$$

La función es continua para $a=4$ y $b=-2$.

b) Para $x>2$ la función es $f(x)=\sqrt{x^3+1}$. Hallamos la expresión de su derivada.

$$f(x)=\sqrt{x^3+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

a) Averiguamos cuando se anula el denominador de la función.

$$x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1}{x^2-4} \\ Eje\ Y\rightarrow x=0 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=\frac{1}{0-4}=\frac{-1}{4}\Rightarrow A\left(0,\frac{-1}{4}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1}{x^2-4} \\ Eje\ X\rightarrow y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{x^2-4}=0\Rightarrow 1=0\Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El único punto de corte con los ejes es el punto $A\left(0,\dfrac{-1}{4}\right)$.

b) **Asíntota vertical.** $x=a$.

¿ $x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(-2)^2-4}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=-2$ es asíntota vertical

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{2^2-4}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1-\frac{4}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

c) Obtenemos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f(x)=\frac{1}{x^2-4}\Rightarrow f'(x)=\frac{0\cdot\left(x^2-4\right)-2x(1)}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-2x}{\left(x^2-4\right)^2}=0\Rightarrow -2x=0\Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 0$ y los valores excluidos del dominio: $x = -2$, $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomo $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3)=\dfrac{-2(-3)}{\left((-3)^2-4\right)^2}=\dfrac{6}{25}>0$.

  La función crece en $(-\infty,-2)$.

- En el intervalo $(-2,0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{-2(-1)}{\left((-1)^2-4\right)^2}=\dfrac{2}{9}>0$. La

  función crece en $(-2,0)$.

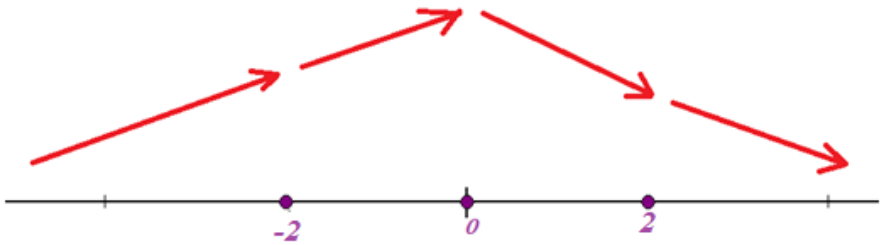
- En el intervalo $(0,2)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{-2(1)}{\left(1^2-4\right)^2}=\dfrac{-2}{9}<0$. La función

  decrece en $(0,2)$.

- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomo $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=\dfrac{-2(3)}{\left(3^2-4\right)^2}=\dfrac{-6}{25}<0$. La

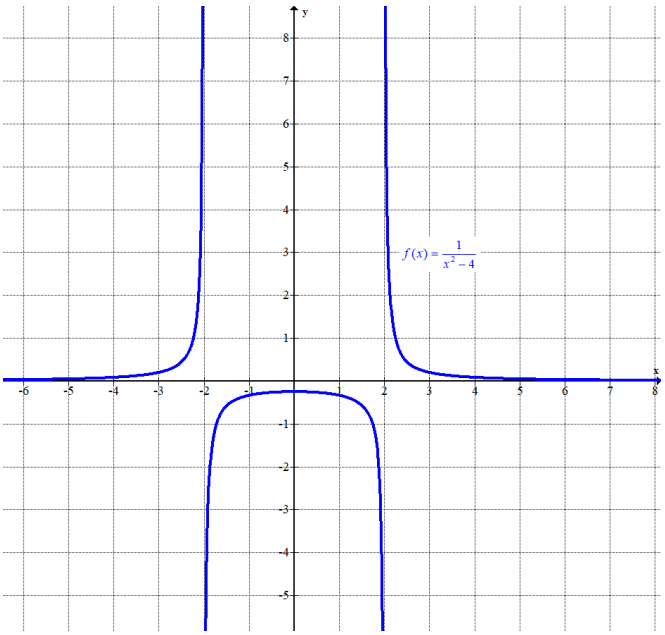
  función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y decrece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$.

d) Observando el esquema superior podemos afirmar que la función presenta un máximo relativo en $x = 0$. No tiene mínimos relativos.



CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$ en el punto $x = 1$. (1,25 puntos)

b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$, el eje de abscisa y la recta $x=1$. (1,25 puntos)

a) La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+2}\Rightarrow f(1)=\frac{2\cdot 1}{1^2+2}=\frac{2}{3}$$

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2\left(x^2+2\right)-2x(2x)}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{2x^2+4-4x^2}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{4-2x^2}{\left(x^2+2\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1)=\frac{4-2\cdot 1^2}{\left(1^2+2\right)^2}=\frac{2}{9}$$

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-\frac{2}{3}=\frac{2}{9}(x-1)\Rightarrow y=\frac{2}{9}x-\frac{2}{9}+\frac{2}{3}\Rightarrow \boxed{y=\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}}$$

La recta tangente en $x = 1$ tiene la ecuación $y=\dfrac{2}{9}x+\dfrac{4}{9}$.

b) Averiguamos donde corta el eje de abscisas la gráfica de la función.

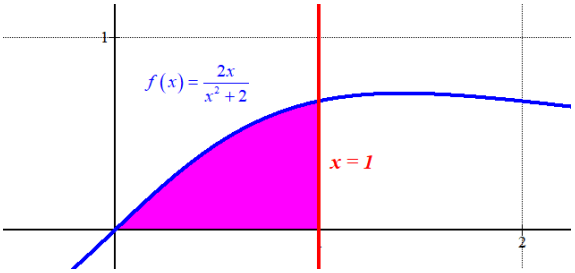
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{2x}{x^2+2} \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2x}{x^2+2}=0\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$$

La función corta el eje de abscisas en $x = 0$.

El área de la región es el valor de la integral definida entre $x = 0$ y $x = 1$ de $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$.

$$Área=\int_0^1 \frac{2x}{x^2+2}dx=\left[\ln\left(x^2+2\right)\right]_0^1=\ln\left(1^2+2\right)-\ln\left(0^2+2\right)=\ln(3)-\ln 2\simeq \boxed{0.405u^2}$$

Hacemos la representación de la región para comprobar la bondad de la solución.



CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Calcular el área de la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=x+2$ y representar gráficamente esta región.

Buscamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

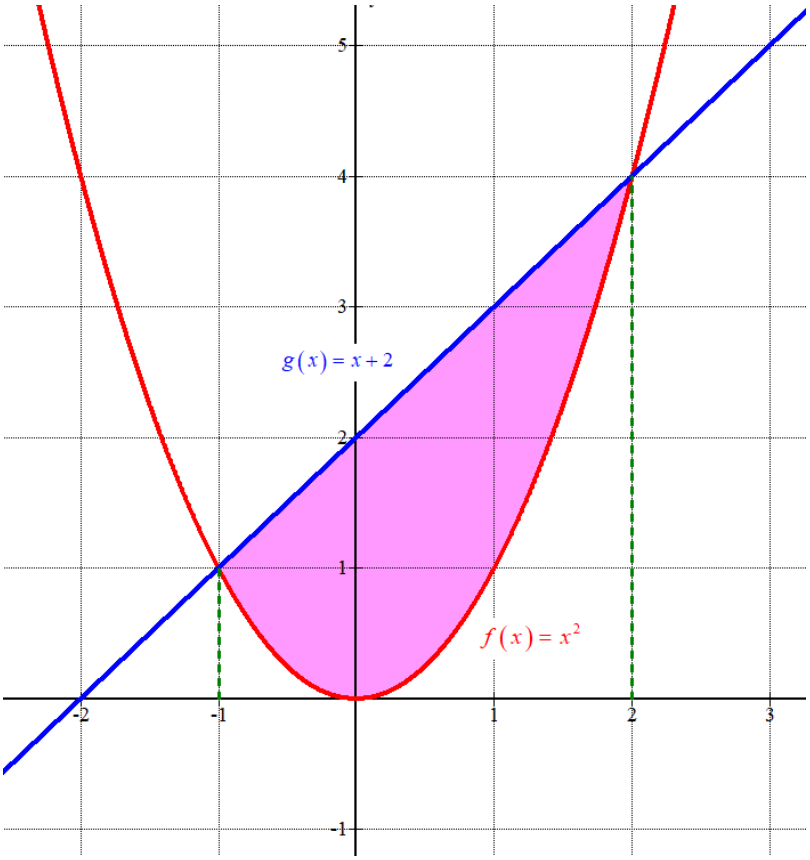
$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2=x+2\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2=x\\ \frac{1-3}{2}=-1=x\end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para cada función y representamos el recinto del cual queremos hallar el área.

x	$y=x^2$
-1	1
0	0 *Vértice*
1	1
2	4

x	$g(x)=x+2$
-1	1
0	2
1	3
2	4



La función *g(x)* toma valores superiores a los de *f(x)* en el intervalo del recinto del cual queremos hallar el área, el valor del área es el de la integral definida entre $x=-1$ y $x=2$ de $g(x)-f(x)$.

$$Área=\int_{-1}^{2} g(x)-f(x)\,dx=\int_{-1}^{2} x+2-x^2\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=$$

$$=\left[\frac{2^2}{2}+4-\frac{2^3}{3}\right]-\left[\frac{(-1)^2}{2}+2(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right]=2+4-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}=\boxed{4.5u^2}$$

El área del recinto tiene un valor de 4.5 unidades cuadradas.

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)
a) Al 45% de los socios de un club le gusta jugar a las cartas, al 40% jugar al domino y al 23% jugar a las cartas y al domino. Si elegimos al azar a un socio de este club, calcula las siguientes probabilidades:
i. Que juegue a las cartas o al domino. (0,5 puntos)
ii. Que no juegue ni a las cartas ni al domino. (0,5 puntos)
iii. Que juegue a las cartas, sabiendo que juega al domino. (0,5 puntos)

b) La altura de los estudiantes de una clase se distribuye según una distribución normal de media desconocida μ y una desviación típica de 4 cm. Se toma una muestra aleatoria de 16 estudiantes de la clase obteniendo una estatura media de 172 cm. Hallar un intervalo de confianza para la estatura media con un nivel de confianza del 99%. (1 punto).

b) Llamamos C al suceso "al socio le gusta jugar a las cartas" y D al suceso "al socio le gusta jugar al domino".
Realizamos una tabla de contingencia con los datos proporcionados en el problema.

	Juega al domino (D)	No juega al domino ($\overline{D}$)	
Juega a las cartas (C)	23		45
No juega a las cartas ($\overline{C}$)			
	40		100

Completamos la tabla.

	Juega al domino (D)	No juega al domino ($\overline{D}$)	
Juega a las cartas (C)	23	**22**	45
No juega a las cartas ($\overline{C}$)	**17**	**38**	**55**
	40	**60**	100

i. Nos piden calcular $P(C \cup D)$. Hay un 23 % de socios que juegan a las cartas y al domino, un 22 % que solo juega a las cartas y un 17 % que solo juega al domino. Utilizamos la regla de Laplace para obtener la probabilidad pedida.

$$P(C \cup D) = \frac{23+22+17}{100} = \boxed{0.62}$$

La probabilidad de que un socio elegido al azar juegue a las cartas o al domino es de 0.62.

ii. Nos piden calcular $P(\overline{C} \cap \overline{D})$. Hay un 38 % de los socios que no juega ni a las cartas ni al domino. La probabilidad de que un socio elegido al azar no juegue a las cartas ni al domino es de 0.38.

iii. Nos piden calcular $P(C/D)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.23}{0.40} = \boxed{0.575}$$

La probabilidad de que un socio elegido al azar juegue a las cartas, sabiendo que juega al domino es de 0.575.

c) Sea X la variable aleatoria que da la altura de los estudiantes de una clase en centímetros. Sabemos que sigue una N(**μ**, 4).

La muestra es de tamaño n = 16 estudiantes y la media muestral es $\bar{x}$ = 172 centímetros.

Para un nivel de confianza del 99% calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0

El error del intervalo viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{4}{\sqrt{16}} = 2.575$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(172 - 2.575, 172 + 2.575\right) = \left(169.425, 174.575\right)$$

La estatura media de un grupo de 16 estudiantes con un nivel de confianza del 99 % se sitúa entre 169.425 cm y 174.575 cm.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

307 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

EBAU2024 - **JUNIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+ay+4z=2 \\ ax+2y+6z=0 \\ 4x+2ay+10z=a \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 0. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa agrícola almacena contenedores de cereales y piensos compuestos. Para poder atender la demanda de todos sus animales, hay que tener almacenado un mínimo de 10 contenedores de cereales y 20 de pienso compuesto. El número de contenedores de cereales no debe ser superior al de piensos y se sabe que la capacidad del almacén es de 200 contenedores. Por cuestiones comerciales, es preciso mantener en el inventario, al menos, 60 contenedores. El gasto de almacenaje de un contenedor de cereales es de 2€ y el de pienso compuesto de 3€.

a) ¿Cuántos contenedores de cada clase hay que almacenar para que el gasto de almacenaje sea mínimo? (2 puntos)
b) ¿Cuál es este gasto mínimo? (0,5 puntos)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q)=q^2-18q+14$ donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, está relacionado con las unidades producidas según la ecuación de demanda $p=10-q$, se desea conocer:

a) La función de beneficio de esta empresa. (0,5 puntos).
b) El nivel de producción que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1 punto)
c) El precio de venta óptimo. (0,5 puntos)
d) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} 3x-3 & si\ \ 0<x<3 \\ ax^2-6x+3a & si\ \ x\geq 3 \end{cases}$

a) Hallar el valor de *a* para que la función sea continua en *x = 3* (1 punto)
b) Para este valor de *a* y para $x\geq 3$, calcular la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $x=3$ (1,5 puntos)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x)=x^2+4$ y la recta $g(x)=x+4$. Calcular su área.

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$:

a) Calcular $\int f(x)\,dx$. (1 punto)
b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función *f(x)* y las rectas $x=0$ y $x=1$ (1,5 puntos)

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) En un edificio hay dos ascensores A y B. El 45% de los inquilinos del edificio usa el primero (A) y los restantes el segundo (B). El porcentaje de averías del ascensor A es del 5%, mientras que el segundo se avería un 8% de las veces que se utiliza. Cada vez que un ascensor sufre una avería, éste se para y no funciona.
   i. Calcular la probabilidad de que un ascensor, elegido al azar, se averíe. (0,75 puntos)
   ii. Si un inquilino queda atrapado un cierto día en el ascensor, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en el segundo? (0,75 puntos).
b) La duración de los contratos temporales sigue una distribución normal de media desconocida y una desviación típica de 3 meses. Una muestra aleatoria de 100 contratos temporales ha dado una duración media de 10 meses. Obtener un intervalo de confianza al 94% para la duración media de los contratos temporales. (1 punto).

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+ay+4z=2 \\ ax+2y+6z=0 \\ 4x+2ay+10z=a \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 0. (0,5 puntos)

La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 2 & a & 4 \\ a & 2 & 6 \\ 4 & 2a & 10 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$A/B=\begin{pmatrix} 2 & a & 4 & 2 \\ a & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 2a & 10 & a \end{pmatrix}$.

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} 2 & a & 4 \\ a & 2 & 6 \\ 4 & 2a & 10 \end{vmatrix}=40+\cancel{24a}+8a^2-32-10a^2-\cancel{24a}=-2a^2+8$.

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0\Rightarrow -2a^2+8=0\Rightarrow a^2-4=0\Rightarrow a^2=4\Rightarrow \boxed{a=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a\neq -2 \quad y \quad a\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=-2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & -4 & 10 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,2^{a}+Fila\,1^{a} & & & \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 10 & 2\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3^{a}-2\cdot Fila\,1^{a} & & & \\ 4 & -4 & 10 & -2 \\ -4 & 4 & -8 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -6\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,2^{a}-5\cdot Fila\,3^{a} \\ 0\quad 0\quad 10\quad 2 \\ 0\quad 0\quad -10\quad 30 \\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad 32\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array}\right\}\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{2 & -2 & 4 & 2}^{A/B} \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 32 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución)

CASO 3. $a=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B=\left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 10 & 2 \end{array}\right)\Rightarrow \left.\begin{array}{l} Fila\,2^{a}-Fila\,1^{a} \\ 2\quad 2\quad 6\quad 0 \\ -2\quad -2\quad -4\quad -2 \\ \hline 0\quad 0\quad 2\quad -2\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,3^{a}-2\cdot Fila\,1^{a} \\ 4\quad 4\quad 10\quad 2 \\ -4\quad -4\quad -8\quad -4 \\ \hline 0\quad 0\quad 2\quad -2\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array}\right\}\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} Fila\,3^{a}-Fila\,2^{a} \\ 0\quad 0\quad 2\quad -2 \\ 0\quad 0\quad -2\quad 2 \\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad 0\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array}\right\}\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{2 & 2 & 4}^{A/B} & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a\neq -2$ y $a\neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución). Para $a=-2$ es incompatible (sin solución). Para $a=2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Lo resolvemos para *a = 0*. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1)

$$\left.\begin{array}{l} 2x\quad +4z=2 \\ \quad 2y+6z=0 \\ 4x\quad +10z=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\quad +2z=1 \\ \quad y+3z=0 \\ 2x\quad +5z=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1-2z \\ \quad y+3z=0 \\ 2x\quad +5z=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+3z=0 \\ 2(1-2z)+5z=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+3z=0 \\ 2-4z+5z=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+3z=0 \\ 2+z=0\rightarrow \boxed{z=-2} \end{array}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y+3(-2)=0\Rightarrow \boxed{y=6} \\ \boxed{x=1-2(-2)=5} \end{array}\right.$$

La solución es *x = 5; y = 6; z = –2*.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa agrícola almacena contenedores de cereales y piensos compuestos. Para poder atender la demanda de todos sus animales, hay que tener almacenado un mínimo de 10 contenedores de cereales y 20 de pienso compuesto. El número de contenedores de cereales no debe ser superior al de piensos y se sabe que la capacidad del almacén es de 200 contenedores. Por cuestiones comerciales, es preciso mantener en el inventario, al menos, 60 contenedores. El gasto de almacenaje de un contenedor de cereales es de 2€ y el de pienso compuesto de 3€.

a) ¿Cuántos contenedores de cada clase hay que almacenar para que el gasto de almacenaje sea mínimo? (2 puntos)

b) ¿Cuál es este gasto mínimo? (0,5 puntos)

a) Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = número de contenedores de cereales, y = número de contenedores de piensos compuestos.
Deseamos minimizar el coste de almacenaje $C(x,y)=2x+3y$.

Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

"*Hay que tener almacenado un mínimo de 10 contenedores de cereales y 20 de pienso compuesto"* → $x\geq 10;\ y\geq 20$

"*El número de contenedores de cereales no debe ser superior al de piensos*" → $x\leq y$

"*La capacidad del almacén es de 200 contenedores*" → $x+y\leq 200$

"*Es preciso mantener en el inventario, al menos, 60 contenedores*" → $x+y\geq 60$

La región factible es la zona del plano que contiene los puntos que cumplen el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 10;\ y\geq 20 \\ x\leq y \\ x+y\leq 200 \\ x+y\geq 60 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x=10$

$x=10$	y
10	0
10	50
10	190

$y=20$

x	$y=20$
0	20
10	20
20	20

$y=x$

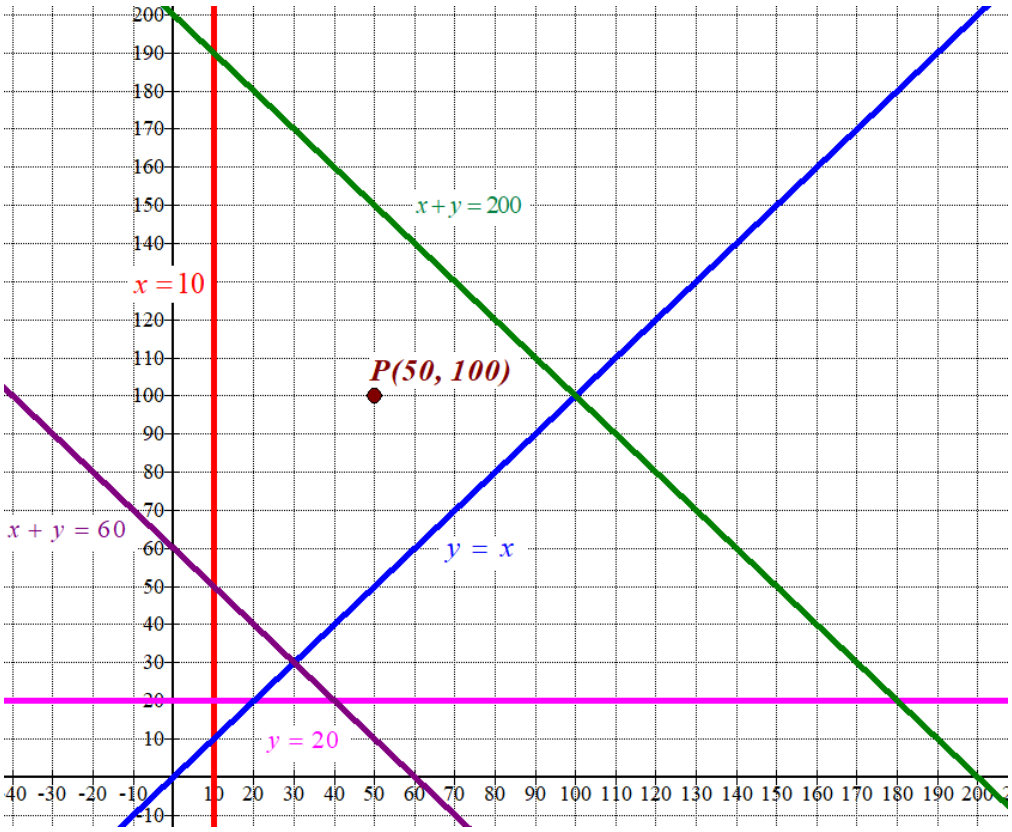
x	$y=x$
0	0
30	30
100	100

$x+y=200$

x	$y=200-x$
0	200
10	190
100	100

$x+y=60$

x	$y=60-x$
0	60
10	50
30	30



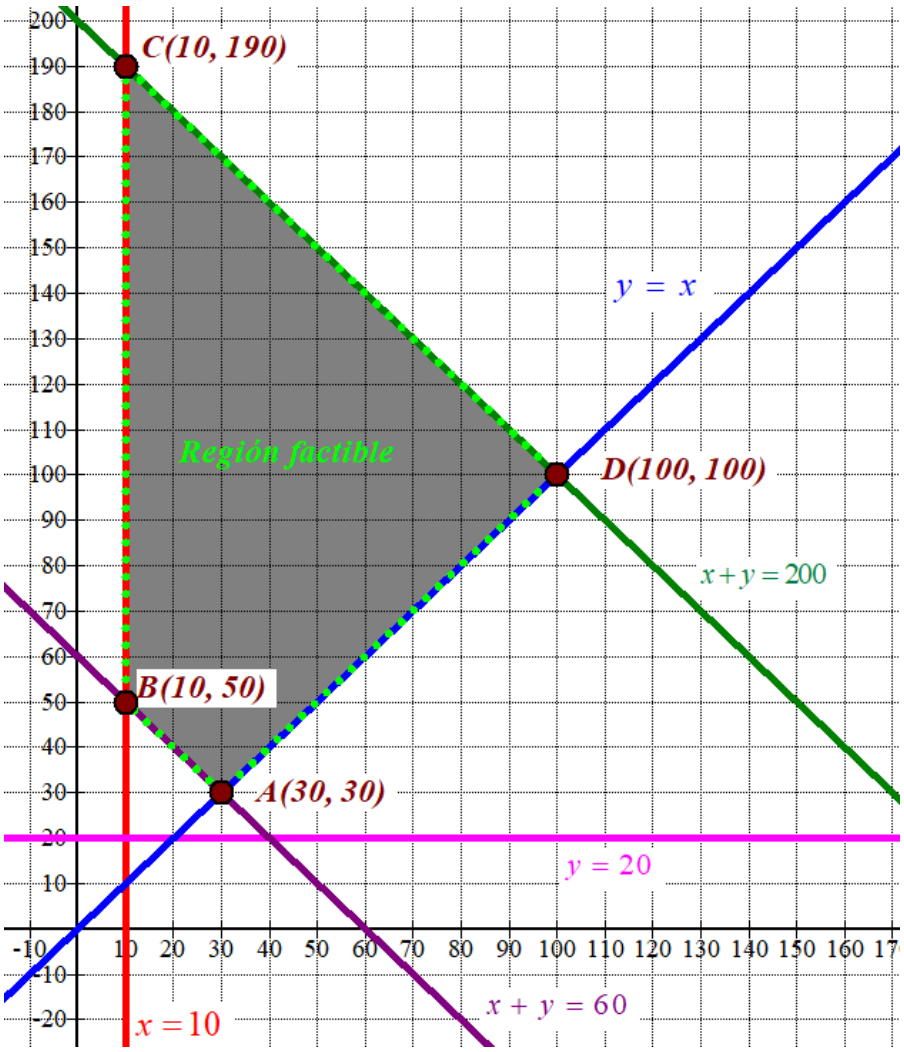
Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} x \geq 10;\ y \geq 20 \\ x \leq y \\ x + y \leq 200 \\ x + y \geq 60 \end{array}\right\}$

Entonces la región factible es la zona del primer cuadrante que está a la derecha de la recta vertical roja, por debajo de la recta **verde** y por encima de las rectas azul y violeta.

Comprobamos que el punto P(50, 100) perteneciente a dicha región del plano cumple todas las restricciones.

$\left.\begin{array}{l} 50 \geq 10;\ 100 \geq 20 \\ 50 \leq 100 \\ 50 + 100 \leq 200 \\ 50 + 100 \geq 60 \end{array}\right\}$ Se cumplen todas y la región factible es la indicada.

Coloreo de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Las coordenadas de los vértices son: A(30,30), B(10,50), C(10, 190) y D(100, 100)

Valoramos la función coste $C(x,y)=2x+3y$ en cada uno de los vértices en busca del mínimo valor.

A(30, 30) → $C(30,30)=2\cdot 30+3\cdot 30=150€$ ¡Mínimo!

B(10, 50) → $C(10,50)=2\cdot 10+3\cdot 50=170€$

C(10, 190) → $C(10,190)=2\cdot 10+3\cdot 190=400€$

D(100, 100) → $C(100,100)=2\cdot 100+3\cdot 100=500€$

El coste mínimo se obtiene en el punto A(30, 30). Significa almacenar 30 contenedores de cada tipo.

b) El mínimo coste es de 150 euros.

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q)=q^2-18q+14$ donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, está relacionado con las unidades producidas según la ecuación de demanda $p=10-q$, se desea conocer:

a) La función de beneficio de esta empresa. (0,5 puntos).
b) El nivel de producción que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1 punto)
c) El precio de venta óptimo. (0,5 puntos)
d) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

a) La función Beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes.
Como q representa las unidades producidas y su precio de venta es de $p=10-q$ euros por unidad tenemos que los ingresos son $I(q)=q(10-q)=10q-q^2$.

$$B(q)=I(q)-C(q)=10q-q^2-\left(q^2-18q+14\right)=10q-q^2-q^2+18q-14=-2q^2+28q-14$$

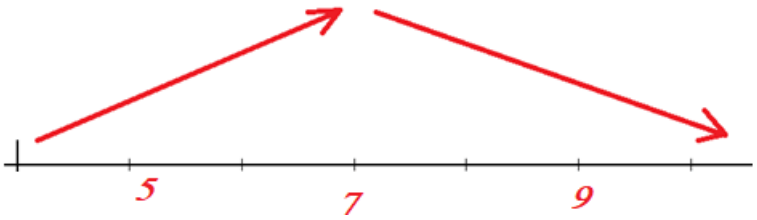
b) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los candidatos a máximos.

$$B(q)=-2q^2+28q-14 \Rightarrow B'(q)=-4q+28$$

$$B'(q)=0 \Rightarrow -4q+28=0 \Rightarrow -4q=-28 \Rightarrow q=\frac{-28}{-4}=7$$

Comprobamos la evolución de la función antes y después de $q = 7$.

En el intervalo (0, 7) tomamos $q = 1$ y su derivada vale $B'(1)=-4\cdot1+28=24>0$. La función beneficio crece en el intervalo (0, 7).
En el intervalo (7, +∞) tomamos $q = 8$ y su derivada vale $B'(8)=-4\cdot8+28=-4<0$. La función beneficio decrece en el intervalo (7, +∞).



La función presenta un máximo en $q = 7$.
El beneficio es máximo produciendo 7 unidades.

c) El precio óptimo de venta es p = 10 – q = 10 – 7 = 3 euros.

d) Para q = 7 tenemos que $B(7)=-2\cdot7^2+28\cdot7-14=84$. El beneficio máximo que se puede obtener es de 84 €.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases}3x-3 & si\ \ 0<x<3\\ ax^2-6x+3a & si\ \ x\geq 3\end{cases}$

a) Hallar el valor de *a* para que la función sea continua en *x = 3* (1 punto)
b) Para este valor de *a* y para $x\geq 3$, calcular la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $x=3$ (1,5 puntos)

a) Para que sea continua en *x = 3* deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 3x-3=9-3=6\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} ax^2-6x+3a=9a-18+3a=12a-18\\ f(3)=12a-18\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)\end{array}\right\}\Rightarrow 12a-18=6\Rightarrow 12a=24\Rightarrow \boxed{a=2}$$

La función es continua en *x = 3* para $a=2$

b) Para $a=2$ y para $x\geq 3$ la función es $f(x)=2x^2-6x+6$.
La ecuación de la recta tangente en *x = 3* es $y-f(3)=f'(3)(x-3)$.

$$f(x)=2x^2-6x+6\Rightarrow f(3)=2\cdot 3^2-6\cdot 3+6=6$$

$$f'(x)=4x-6\Rightarrow f'(3)=4\cdot 3-6=6$$

$$y-f(3)=f'(3)(x-3)\Rightarrow y-6=6(x-3)\Rightarrow y-6=6x-18\Rightarrow \boxed{y=6x-12}$$

La recta tangente en *x = 3* (para $x\geq 3$) tiene la ecuación $y=6x-12$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

a) Comprobamos cuando se anula el denominador de la función.

$$x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{matrix} f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1} \\ x=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow f(0)=\frac{1}{-1}=-1\Rightarrow A(0,-1)$$

$$\left.\begin{matrix} f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1} \\ y=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2-1}=0\Rightarrow x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow x=\sqrt{-1}\ \text{¡Imposible!}$$

El único punto de corte con los ejes es el punto A(0, –1).

b) **Asíntota vertical.** $x=a$.

¿ $x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{(-1)^2+1}{(-1)^2-1}=\frac{2}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1^2+1}{1^2-1}=\frac{2}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1+\dfrac{1}{\infty}}{1-\dfrac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

$y=1$ es asíntota horizontal.

c) Obtenemos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

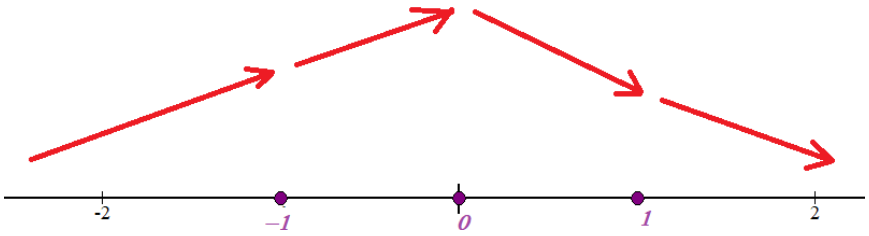
$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \Rightarrow -4x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 0$ y los valores excluidos del dominio: $x = -1$, $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomo $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2)=\frac{-4(-2)}{\left((-2)^2-1\right)^2}=\frac{8}{9}>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,0)$ tomo $x = -0.5$ y la derivada vale $f'(-0.5)=\frac{-4(-0.5)}{\left((-0.5)^2-1\right)^2}=\frac{2}{0.5625}>0$. La función crece en $(-1,0)$.
- En el intervalo $(0,1)$ tomo $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=\frac{-4(0.5)}{\left((0.5)^2-1\right)^2}=\frac{-2}{0.5625}<0$. La función decrece en $(0,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomo $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{-4(2)}{\left((2)^2-1\right)^2}=\frac{-8}{9}<0$. La función decrece en $(3,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ y decrece en $(0,1)\cup(1,+\infty)$

d) Observando el esquema superior podemos afirmar que la función presenta un máximo relativo en $x = 0$. No tiene mínimos relativos.

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x)=x^2+4$ y la recta $g(x)=x+4$. Calcular su área.

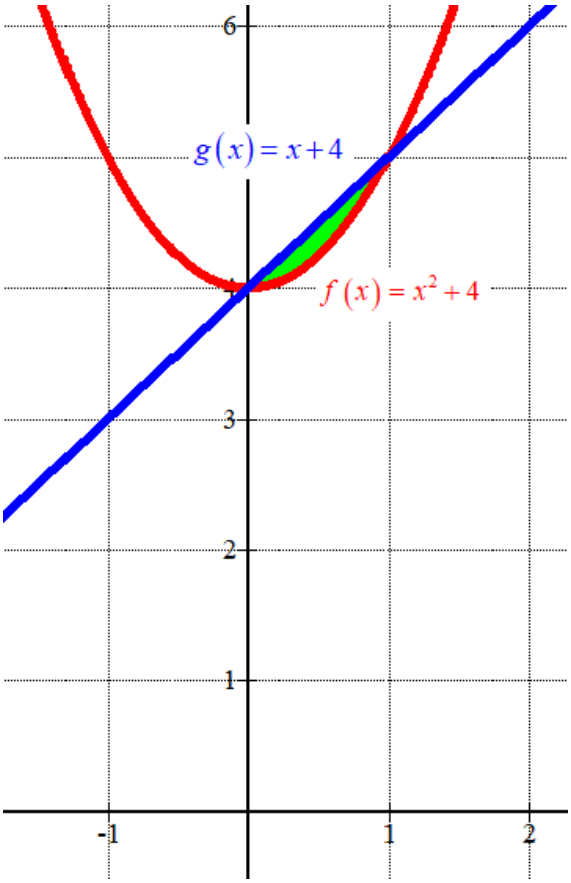
Buscamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2+4=x+4\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ x-1=0\rightarrow x=1 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para cada función y representamos el recinto del cual queremos hallar el área.

x	$y=x^2+4$
-1	5
0	4 *Vértice*
1	5
2	8

x	$g(x)=x+4$
-1	3
0	4
1	5
2	6



Como la función *g(x)* toma valores superiores a los de *f(x)* en el intervalo del recinto del cual queremos hallar el área, el valor del área es el valor de la integral definida entre $x = 0$ y $x = 1$ de la diferencia de las dos funciones.

$$g(x)-f(x)=x+4-\left(x^2+4\right)=x-x^2$$

$$Área=\int_0^1 g(x)-f(x)\,dx=\int_0^1 x-x^2 dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right]-\left[\frac{0^2}{2}-\frac{0^3}{3}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{6}\simeq 0.166u^2}$$

El área del recinto tiene un valor aproximado de 0.166 unidades cuadradas.

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$:

a) Calcular $\int f(x)\,dx$. (1 punto)

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función *f(x)* y las rectas $x=0$ y $x=1$ (1,5 puntos)

a) La integral es inmediata pues en el numerador está la derivada del denominador.

$$\int f(x)\,dx=\int \frac{e^x}{e^x+2}\,dx=\ln\left(e^x+2\right)+C$$

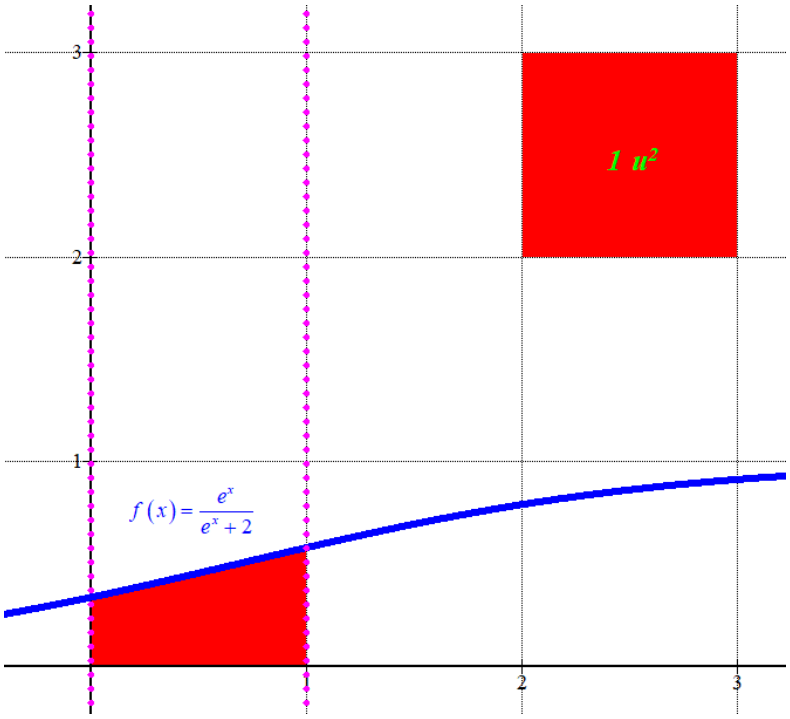
b) Veamos si la función corta el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{e^x}{e^x+2}=0 \Rightarrow e^x=0 \text{ ¡Imposible!}$$

La función no corta el eje de abscisas y además es positiva, por lo que el área de la región es el valor de la integral definida entre *x = 0* y *x =1* de $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$.

$$Área=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}\,dx=\left[\ln\left(e^x+2\right)\right]_0^1=\ln\left(e^1+2\right)-\ln\left(e^0+2\right)=\ln(e+2)-\ln 3\simeq \boxed{0.45u^2}$$

Hacemos la representación de la región para comprobar la bondad de la solución.

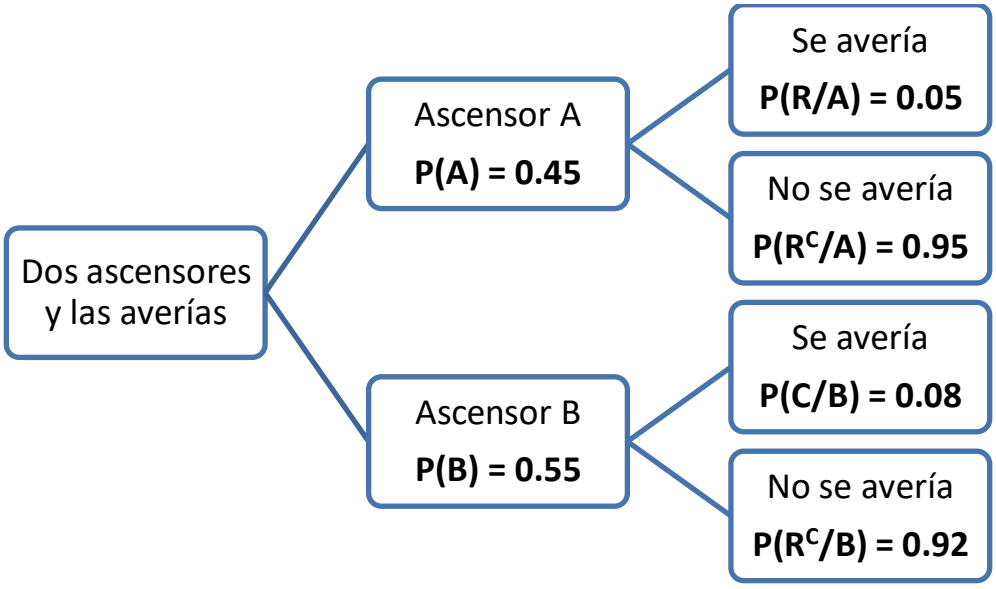


CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) En un edificio hay dos ascensores A y B. El 45% de los inquilinos del edificio usa el primero (A) y los restantes el segundo (B). El porcentaje de averías del ascensor A es del 5%, mientras que el segundo se avería un 8% de las veces que se utiliza. Cada vez que un ascensor sufre una avería, éste se para y no funciona.
   i. Calcular la probabilidad de que un ascensor, elegido al azar, se averíe. (0,75 puntos)
   ii. Si un inquilino queda atrapado un cierto día en el ascensor, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en el segundo? (0,75 puntos).

b) La duración de los contratos temporales sigue una distribución normal de media desconocida y una desviación típica de 3 meses. Una muestra aleatoria de 100 contratos temporales ha dado una duración media de 10 meses. Obtener un intervalo de confianza al 94% para la duración media de los contratos temporales. (1 punto).

a) Llamamos A al suceso "usa el ascensor A", B al suceso "usa el ascensor B" y R al suceso "el ascensor se avería".
Realizamos un diagrama de árbol de la situación planteada.



Con los datos contenidos en el diagrama respondemos a las preguntas planteadas.

iv. Nos piden $P(R)$. Usamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R) = P(A)P(R/A) + P(B)P(R/B) = 0.45 \cdot 0.05 + 0.55 \cdot 0.08 = \boxed{0.0665}$$

v. Nos piden calcular $P(B/R)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/R) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{P(B)P(R/B)}{P(R)} = \frac{0.55 \cdot 0.08}{0.0665} = \boxed{\frac{88}{133} \simeq 0.6617}$$

b) Sea X la variable aleatoria que da la duración de los contratos temporales en meses.
Sabemos que sigue una N(**μ**, 3).
La muestra es de 100 hogares y la media muestral es 10 meses → $n = 100$, $\bar{x}$ = 10 meses

Para un nivel de confianza del 94% calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0{,}94 \rightarrow \alpha = 0{,}06 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}97 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}88}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	[illegible]
1.8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9699

El error del intervalo viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.88 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}} = 0.564$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(10 - 0.564, 10 + 0.564\right) = \left(9.436, 10.564\right)$$

La duración de los contratos temporales con un nivel de confianza del 94 % se sitúa entre 9.436 meses y 10.564 meses.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

EBAU2023 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 3. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y\geq 2 \\ x-y\leq 4 \\ x\geq 1 \\ y\leq 2 \end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)
b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x,y)=4x-5y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de costes de una empresa $C(q)=q^2-16q+48$, donde q es el nivel de producción. Si la ecuación de demanda viene dada por la expresión $p=12-q$, dónde p es el precio unitario de venta. Determine:

a) La función de beneficios de la empresa en función del nivel de producción. (0,5 puntos).
b) El nivel de producción, *q*, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa. (1 punto)
c) El precio para el que se obtendría el máximo beneficio. (0,5 puntos)
d) El valor del beneficio máximo. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+5 & si\ \ x\le -1 \\ bx^2-2x+1 & si\ -1<x\le 2 \\ \dfrac{3x-1}{(x-1)^2} & si\ \ x>2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros *a* y *b* para que la función sea continua en todo su dominio. (1,5 puntos)
b) Determine la derivada *f ´(x)* para *x > 2*. (1 punto)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
b) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=3e^{x+2}$:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=3e^{x+2}$ en el punto *x = –2* (1,25 puntos)
b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x)=3e^{x+2}$, el eje de abscisa y la recta *x = 1* (1,25 puntos)

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Representar gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=9-x^2$ y $g(x)=3+x$ y calcular su área.

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A)=0,3$, $P(B/A)=0,6$ *y* $P(A/B)=0,3$:
   i. Calcular $P(A\cap B)$. (0,5 puntos)
   ii. Calcular $P(B)$. ¿Son los sucesos A y B independientes?, razone su respuesta (0,5 puntos)
   iii. Calcular $P(A\cup \overline{B})$ (0,5 puntos)

b) Las calificaciones de la asignatura de matemáticas de la población de una región española, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y varianza de 1.69 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 324 estudiantes de la región obteniendo una calificación media de 5,84 puntos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99%. (1 punto)

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para $a = 3$. (0,5 puntos)

La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2+a^2+0-2-0-a=a^2-a$.

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 1 \quad y \quad a \neq 0$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,3ª - Fila\,1ª \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{\overbrace{cccc}^{A/B}} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B también es 2, pero es menor que el número de incógnitas (3).

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

CASO 3. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&2&0&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}Fila\,3^a-Fila\,1^a\\1&1&1&1\\-1&0&-1&-1\\\hline 0&1&0&0\end{array}\right.\rightarrow\text{Nueva Fila }3^a\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&2&0&2\\0&1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}Fila\,2^a-2\cdot Fila\,3^a\\0&2&0&2\\0&-2&0&0\\\hline 0&0&0&2\end{array}\right.\rightarrow\text{Nueva Fila }3^a\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{1&0&1}^{A}&1\\0&2&0&2\\\underbrace{0&0&0}_{A}&2\end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, el rango de A/B es 3. Tienen rangos distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución)

Resumiendo: Para $a\neq 1\quad y\quad a\neq 0$ el sistema tiene una única solución, para $a=1$ el sistema tiene infinitas soluciones y para $a=0$ el sistema no tiene solución.

Lo resolvemos para *a = 3*. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1)

$$\left.\begin{array}{l}x+3y+z=1\\2y+3z=2\\x+y+z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\text{Ecuación }3^a\ -\ \text{Ecuación }1^a\\x&+y&+z&=1\\-x&-3y&-z&=-1\\\hline &-2y&&=0\end{array}\right.\rightarrow\text{Nueva ecuación }3^a\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x+3y+z=1\\2y+3z=2\\-2y=0\rightarrow\boxed{y=0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+z=1\\3z=2\rightarrow\boxed{z=\frac{2}{3}}\end{array}\right\}\Rightarrow x+\frac{2}{3}=1\Rightarrow\boxed{x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}}$$

Para *a = 3* la solución del sistema es $x=\frac{1}{3};\ y=0;\ z=\frac{2}{3}$.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y\geq 2 \\ x-y\leq 4 \\ x\geq 1 \\ y\leq 2 \end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x,y)=4x-5y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

a) Es un problema de programación lineal.
Dibujamos las rectas que delimitan la región S.

$3x+2y=2$

x	$y=\dfrac{2-3x}{2}$
0	1
2	–2
4	–5

$x-y=4$

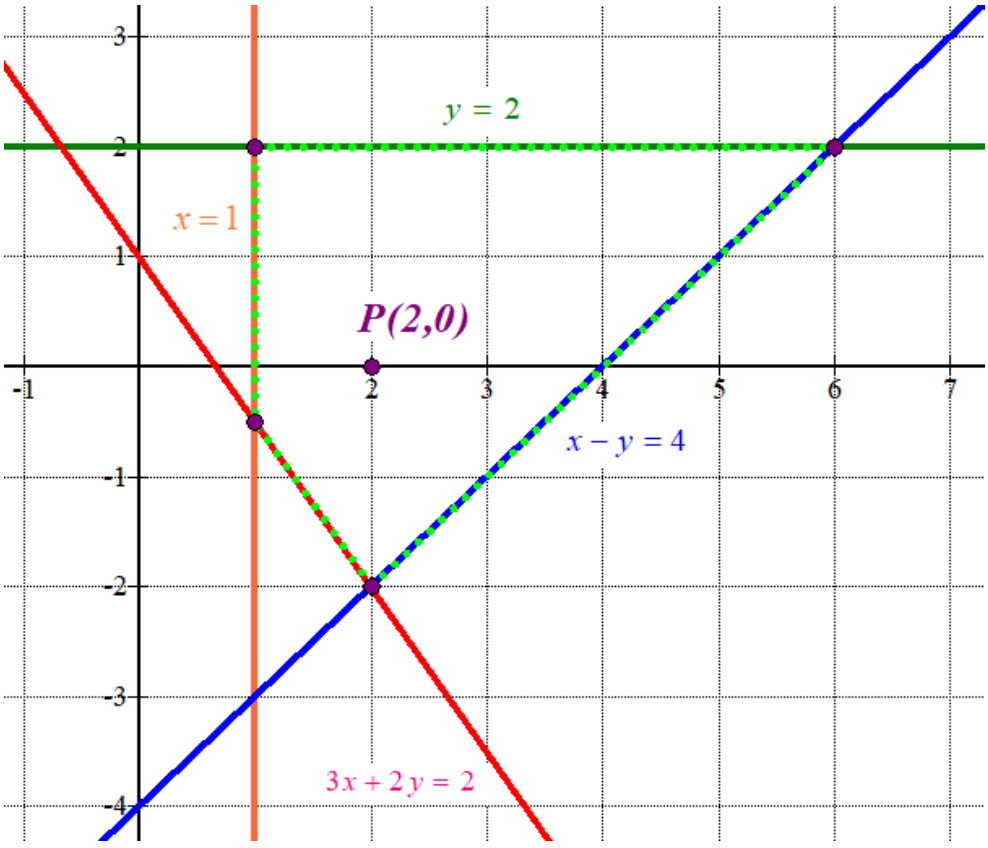
x	$y=x-4$
1	–3
2	–2
6	2

$y=2$

x	$y=2$
1	2
2	2
4	2

$x=1$

$x=1$	y
1	2
1	4
1	6

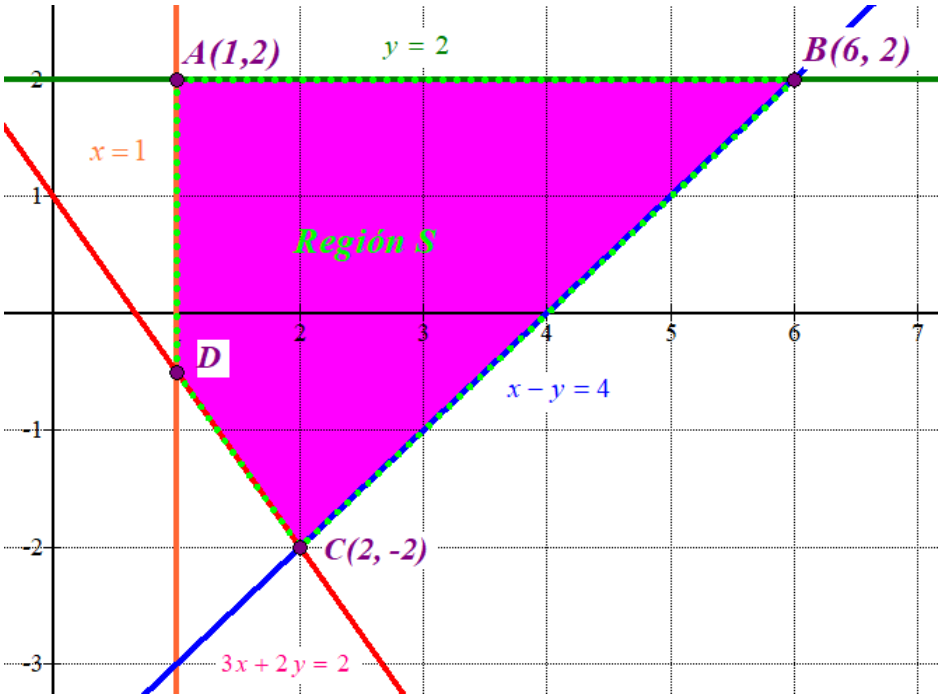


Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} 3x+2y\geq 2 \\ x-y\leq 4 \\ x\geq 1 \\ y\leq 2 \end{array}\right\}$ entonces la región S es la región del plano situada a la derecha de la recta vertical, por debajo de la recta horizontal **verde** y por encima de las rectas oblicuas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(2, 0) perteneciente a dicha región del plano cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 6+0\geq 2 \\ 2-0\leq 4 \\ 2\geq 1 \\ 0\leq 2 \end{array}\right\}$$ Se cumplen todas y la región S es correcta.

Coloreo de rosa la región S.



Hallamos las coordenadas del punto D.

$$D\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y=2 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3+2y=2\Rightarrow 2y=-1\Rightarrow y=\frac{-1}{2}=-0.5\Rightarrow \boxed{D(1,-0.5)}$$

Las coordenadas de los vértices son: A(1,2), B(6,2), C(2, –2) y D(1, –0.5)

b) Valoramos la función $f(x,y)=4x-5y$ en cada uno de los vértices en busca del mínimo y del máximo valor.

A(1, 2) → $f(1,2)=4-10=-6$ ¡Mínimo!

B(6, 2) → $f(6,2)=24-10=14$

$C(2,-2)$ → $f(2,-2)=8+10=18$ ¡Máximo!

D(1, –0.5) → $f(1,-0.5)=4+2.5=6.5$

El máximo valor de la función es 18 y se obtiene en el vértice C(2, -2).
El mínimo valor de la función es –6 y se obtiene en el vértice A(1, 2).

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de costes de una empresa $C(q) = q^2 - 16q + 48$, donde q es el nivel de producción. Si la ecuación de demanda viene dada por la expresión $p = 12 - q$, dónde p es el precio unitario de venta. Determine:

a) La función de beneficios de la empresa en función del nivel de producción. (0,5 puntos).
b) El nivel de producción, q, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa. (1 punto)
c) El precio para el que se obtendría el máximo beneficio. (0,5 puntos)
d) El valor del beneficio máximo. (0,5 puntos)

a) La función Beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes.
Como q representa el nivel de producción y su precio de venta es de p euros por unidad tenemos que los ingresos son $I(q) = pq = (12 - q)q = 12q - q^2$.

$$B(q) = I(q) - C(q) = 12q - q^2 - \left(q^2 - 16q + 48\right) = -2q^2 + 28q - 48$$

b) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los candidatos a máximos.

$$B(q) = -2q^2 + 28q - 48 \Rightarrow B'(q) = -4q + 28$$

$$B'(q) = 0 \Rightarrow -4q + 28 = 0 \Rightarrow -4q = -28 \Rightarrow q = \frac{-28}{-4} = 7$$

Comprobamos si es un máximo o mínimo sustituyendo en la segunda derivada.

$$B'(q) = -4q + 28 \Rightarrow B''(q) = -4 \Rightarrow B''(7) = -4 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función presenta un máximo en $q = 7$.
El beneficio es máximo con un nivel de producción de 7 unidades.

c) El precio sería $p = 12 - 7 = 5$. El precio sería de 5 por unidad.

d) El beneficio máximo es de $B(7) = -2 \cdot 7^2 + 28 \cdot 7 - 48 = 50$, que significa un beneficio de 50.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+5 & si\ \ x\le -1 \\ bx^2-2x+1 & si\ -1<x\le 2 \\ \dfrac{3x-1}{(x-1)^2} & si\ \ x>2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros *a* y *b* para que la función sea continua en todo su dominio. (1,5 puntos)
b) Determine la derivada *f ´(x)* para *x > 2*. (1 punto)

a) Para que sea continua debe serlo en *x = –1*, para ello deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} ax+5=-a+5 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} bx^2-2x+1=b(-1)^2-2(-1)+1=b+3 \\ f(-1)=-a+5 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow b+3=-a+5 \Rightarrow \boxed{a=2-b}$$

También debe ser continua en *x = 2*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} bx^2-2x+1=b(2)^2-2(2)+1=4b-3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{3(2)-1}{(2-1)^2}=\dfrac{5}{1}=5 \\ f(2)=4b-3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \end{array}\right\} \Rightarrow 4b-3=5 \Rightarrow 4b=8 \Rightarrow \boxed{b=2}$$

Sustituimos el valor de *b* en la primera ecuación → $a=2-2=0$
Los valores buscados son *a = 0*, *b = 2*.

b) Para *x > 2* la función es $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x-1)^2}$.

$$f'(x)=\frac{3(x-1)^2-2(x-1)(3x-1)}{\left((x-1)^2\right)^2}=\frac{3(x-1)^2-2(x-1)(3x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)\left[3(x-1)-2(3x-1)\right]}{(x-1)^4}=\frac{3(x-1)-2(3x-1)}{(x-1)^3}=\frac{3x-3-6x+2}{(x-1)^3}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-3x-1}{(x-1)^3}}$$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
b) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

a) El denominador de la función se anula para $x = 0$.
El dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No existe } f(0)=\frac{4}{0}\text{. No hay punto de corte con el eje OY.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2-4x+4}{x}=0 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(4)}}{2}=\frac{4\pm 0}{2}=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow A(2,0)$$

El único punto de corte con los ejes es el punto A(2, 0).

b) **Asíntota vertical.** $x=a$.
¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x+4}{x}=\frac{0^2-0+4}{0}=\frac{4}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\frac{2-\frac{4}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=\frac{2}{0}=\infty$$

No existe asíntota horizontal.

c) Obtenemos su derivada y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

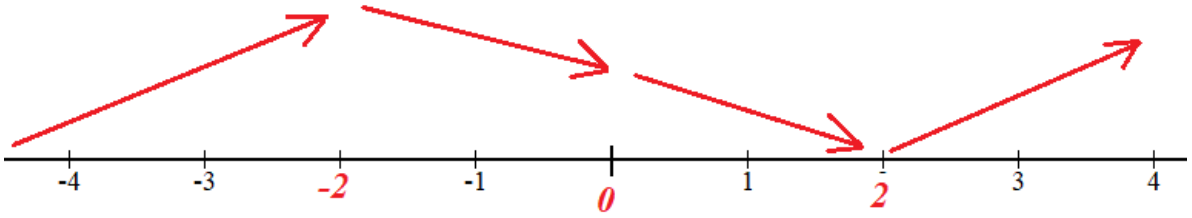
$$f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-4)x-1(x^2-4x+4)}{x^2}=\frac{2x^2-4x-x^2+4x-4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2}=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -2$ y $x = 2$, añadimos el valor excluido del dominio: $x = 0$.

- En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomo $x = -4$ y la derivada vale $f'(-4)=\frac{(-4)^2-4}{(-4)^2}=\frac{16-4}{16}=\frac{12}{16}>0$. La función crece en $(-\infty,-2)$.
- En el intervalo $(-2,0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\frac{(-1)^2-4}{(-1)^2}=\frac{1-4}{1}=-3<0$. La función decrece en $(-2,0)$.
- En el intervalo $(0,2)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\frac{1^2-4}{1^2}=\frac{1-4}{1}=-3<0$. La función decrece en $(0,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomo $x = 4$ y la derivada vale $f'(4)=\frac{4^2-4}{4^2}=\frac{16-4}{16}=\frac{12}{16}>0$. La función crece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(-2,0)\cup(0,2)$

d) Atendiendo al esquema superior la función presenta un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 2$.

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=3e^{x+2}$:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=3e^{x+2}$ en el punto $x = -2$ (1,25 puntos)

b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x)=3e^{x+2}$, el eje de abscisa y la recta $x = 1$ (1,25 puntos)

a) La ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=3e^{x+2}$ en el punto $x = -2$ es $y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$.

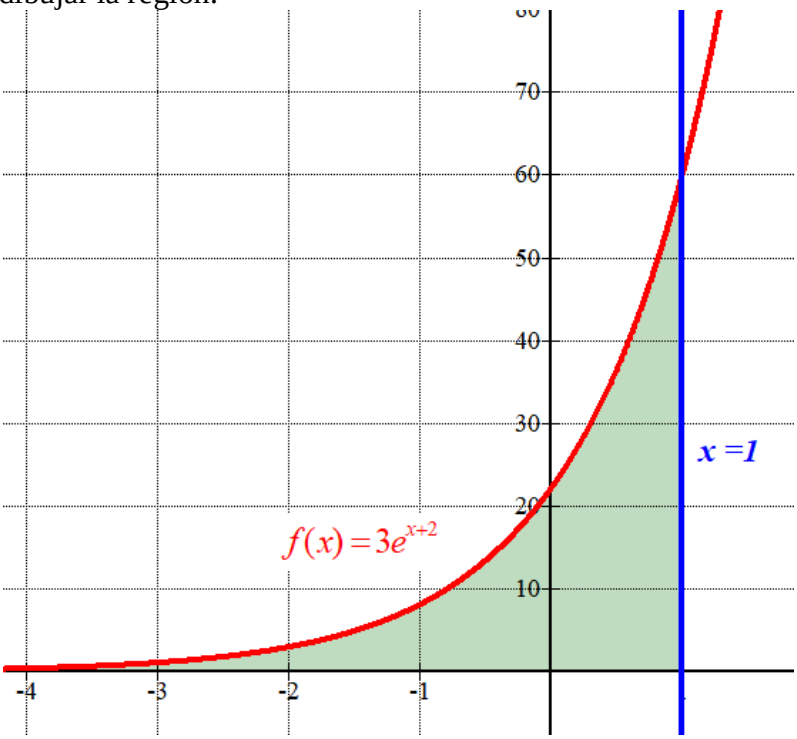
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=3e^{x+2} \Rightarrow f'(x)=3e^{x+2} \\ f(-2)=3e^{-2+2}=3e^{0}=3 \\ f'(-2)=3e^{-2+2}=3 \\ y-f(-2)=f'(-2)(x+2) \end{array}\right\} \Rightarrow y-3=3(x+2) \Rightarrow y=3+3x+6 \Rightarrow \boxed{y=3x+9}$$

b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=3e^{x+2} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3e^{x+2}=0 \Rightarrow \text{No existe}$$

Hacemos una tabla de valores para dibujar la región.

x	$y=3e^{x+2}$
-3	$3e^{-1}\simeq 1.1$
-2	3
0	$3e^{2}\simeq 22$
1	$3e^{3}\simeq 60$
2	$3e^{4}\simeq 163$



El valor del área es el valor de la integral definida entre $-\infty$ y 1 de la función.
Como uno de los límites de integración es $-\infty$ calculamos previamente la integral entre un valor "a" y 1, para obtener el valor del área como el límite de la integral cuando a tiende a $-\infty$.

$$\int_a^1 f(x)\,dx=\int_a^1 3e^{x+2}dx=\left[3e^{x+2}\right]_a^1=3e^{1+2}-3e^{a+2}=3e^{3}-3e^{a+2}$$

$$Área=\int_{-\infty}^1 f(x)\,dx=\int_{-\infty}^1 3e^{x+2}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^1 3e^{x+2}dx=\lim_{a\to-\infty}\left(3e^{3}-3e^{a+2}\right)=3e^{3}-3e^{-\infty}=\boxed{3e^{3}\simeq 60.26u^2}$$

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Representar gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=9-x^2$ y $g(x)=3+x$ y calcular su área.

Veamos cuando se cortan las gráficas de las funciones.

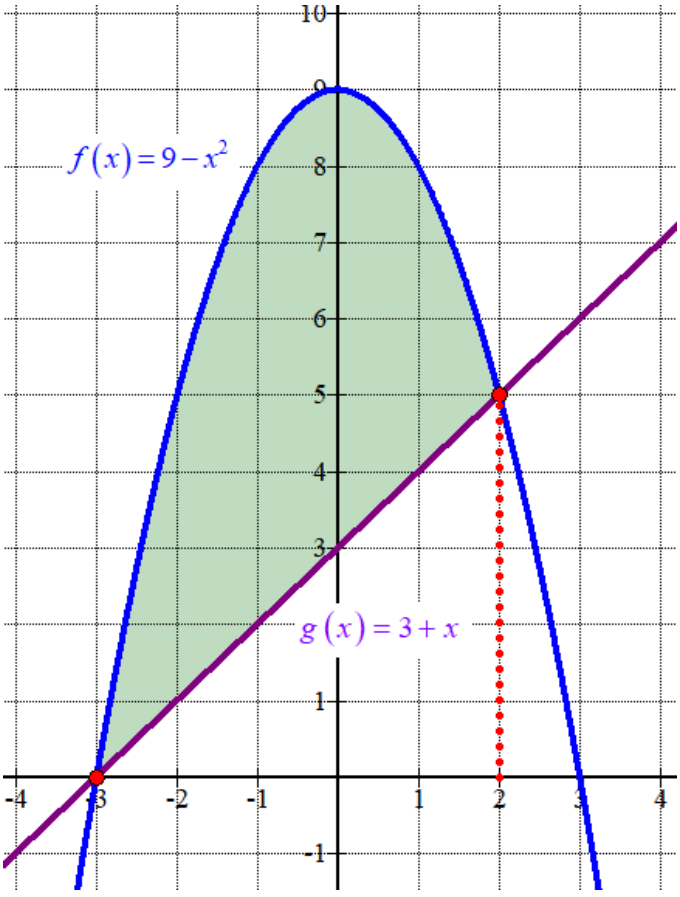
$$\left.\begin{matrix} f(x)=9-x^2 \\ g(x)=3+x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 9-x^2=3+x \Rightarrow 0=x^2+x-6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-6)}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{-1+5}{2}=2=x \\ \frac{-1-5}{2}=-3=x\end{cases}$$

Dibujamos las gráficas de la parábola y la recta entre –3 y 2.

x	$y=9-x^2$
–3	0
0	9
2	5

x	$y=3+x$
–3	0
0	3
2	5



El área de la región limitada por las gráficas de las dos funciones es el valor de la integral definida entre –3 y 2 de la diferencia entre la parábola y la recta.

$$Área=\int_{-3}^{2} 9-x^2-(3+x)\,dx=\int_{-3}^{2} 9-x^2-3-x\,dx=\int_{-3}^{2} 6-x^2-x\,dx=\left[6x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{2}=$$

$$=\left[6(2)-\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right]-\left[6(-3)-\frac{(-3)^3}{3}-\frac{(-3)^2}{2}\right]=12-\frac{8}{3}-2+18-9+\frac{9}{2}=\boxed{\frac{125}{6}\simeq 20.83\ u^2}$$

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A)=0,3$, $P(B/A)=0,6$ *y* $P(A/B)=0,3$:

i. Calcular $P(A\cap B)$. (0,5 puntos)

ii. Calcular $P(B)$. ¿Son los sucesos A y B independientes?, razone su respuesta (0,5 puntos)

iii. Calcular $P\left(A\cup\overline{B}\right)$ (0,5 puntos)

b) Las calificaciones de la asignatura de matemáticas de la población de una región española, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y varianza de 1.69 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 324 estudiantes de la región obteniendo una calificación media de 5,84 puntos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99%. (1 punto)

a)

i) Aplicando el teorema de Bayes tenemos:

$$P(B/A)=0,6\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=0,6\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{0,3}=0,6\Rightarrow\boxed{P(A\cap B)=0,6\cdot0,3=0,18}$$

ii) Aplicando el teorema de Bayes tenemos:

$$P(A/B)=0,3\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0,3\Rightarrow\frac{0,18}{P(B)}=0,3\Rightarrow0,18=0,3\cdot P(B)\Rightarrow\boxed{P(B)=\frac{0,18}{0,3}=0,6}$$

Para que sean independientes los sucesos A y B debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=0,18\\P(A)P(B)=0,3\cdot0,6=0,18\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0,18=P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B son independientes.

iii) Calculamos la probabilidad del suceso A.

$$P(A)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P(A\cap B)\Rightarrow0,3=P\left(A\cap\overline{B}\right)+0,18\Rightarrow P\left(A\cap\overline{B}\right)=0,3-0,18=0,12$$

Calculamos $P\left(A\cup\overline{B}\right)$.

$$\left.\begin{array}{r}P(A)=0.12\\P\left(\overline{B}\right)=1-P(B)=1-0,6=0,4\\P\left(A\cap\overline{B}\right)=0.12\\P\left(A\cup\overline{B}\right)=P(A)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\cap\overline{B}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow P\left(A\cup\overline{B}\right)=0,3+0,4-0,12=\boxed{0,58}$$

b) Sea X = Nota en matemáticas.

Como la varianza es 1.69 tenemos que la desviación típica es $\sigma=\sqrt{Varianza}=\sqrt{1.69}=1.3$

Sabemos que X = N(**μ**, 1.3).

La muestra es de 324 estudiantes → $n = 324$, $\bar{x} = 5.84$ puntos

Para un nivel de confianza del 99% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \propto = 0{,}99 \rightarrow \propto = 0{,}01 \rightarrow \propto/2 = 0{,}005 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}575}$$



El error del intervalo viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{1.3}{\sqrt{324}} \simeq 0.186 \; puntos$$

El intervalo de confianza para la media de la calificación en matemáticas de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(5.84 - 0.186, \;\; 5.84 + 0.186\right) = \left(5.654, \; 6.026\right)$$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

--207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES--

EBAU2023 - **JUNIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ x+ay+z=2 \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para $a = 0$. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa fabrica relojes smartwatch de dos tamaños de pantalla distintos: el tipo A, de 44 milímetros y el tipo B de 40 milímetros. Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total y el número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A. Los costes de producción de cada tipo de smartwatch son de 150 € para el tipo A y de 100 € los del B, disponiendo la empresa de un máximo de 6000 € a la semana para el coste total de producción. Además, se conoce que los relojes smartwatch tipo A generan un beneficio de 130 € y los de tipo B de 140 €.

a) Si la empresa quiere maximizar el beneficio, formule el problema que debe resolver y represente la región factible, calculando sus vértices. (1,5 puntos)
b) ¿Cuántos smartwatch de cada tipo habrá que producir a la semana para que el beneficio total de la empresa sea máximo?, ¿Cuál es este beneficio máximo? (1 punto)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q)=q^3+3q+10$ donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, de cada unidad producida es $p = 30$, se desea conocer:

a) La función beneficio de esta empresa. (0,5 puntos).
b) El número de unidades producidas que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1,5 puntos)
c) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} 2+\sqrt{x} & si\ \ 0<x\le 1 \\ \dfrac{8x-2}{2x} & si\ \ x>1 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de la función en todo su dominio. (0,5 puntos)
b) Estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en su dominio. (1 punto)
c) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$. (1 punto)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{2x^2}{9-x^2}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x)=x^2-2x+2$ y $g(x)=-x^2+6$. Calcular su área.

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{2\ln x}{x}$:

a) Calcular $\int f(x)dx$. (1 punto)
b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función *f(x)*, el eje de abscisa y las rectas $x=1$ y $x=e$ (1,5 puntos)

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) La Dirección General de Tráfico ha realizado un estudio estadístico en la Región de Murcia sobre el uso del casco de protección por parte de los usuarios de patinetes eléctricos. El estudio estima que el 60 % de los usuarios de estos patinetes son hombres y, de estos, el 30 % usa el casco; mientras que, entre las mujeres que usan este medio para desplazarse, son el 40 % las que usan casco de protección. Si elegimos un usuario de patinete eléctrico al azar.
   i. Calcule la probabilidad de que use casco de protección. (0,5 puntos)
   ii. Sabiendo que el usuario de patinete eléctrico usa casco de protección, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

b) El gasto medio por cliente, en euros, en la lotería de las pasadas Navidades se distribuye según una variable Normal de media desconocida y desviación típica igual de 10 euros. Se elige una muestra aleatoria de 225 clientes, resultando que han tenido un gasto medio de 65 euros. Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio de la lotería de Navidad de 2022 con un nivel de confianza del 97% (1 punto)

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ x+ay+z=2 \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para $a = 0$. (0,5 puntos)

La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a+1+2a-1-2-a^2 = -a^2+3a-2$.

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2+3a-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-1)(-2)}}{-2}=\frac{-3\pm 1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=\frac{-3+1}{-2}=1} \\ o \\ \boxed{a=\frac{-3-1}{-2}=2} \end{cases}$$

Analizamos por separado tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a\neq 1 \quad y \quad a\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} Fila\,2^{a}-2\cdot Fila\,1^{a} & & & \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,3ª - Fila\,1ª \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3ª \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 1 & 1}^{A/B} & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 1 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución)

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,2ª - Fila\,1ª \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2ª \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot Fila\,3ª - Fila\,1ª \\ \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3ª \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{Fila\,3ª \leftrightarrow Fila\,2ª\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{2 & 1 & 1}^{A/B} & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 al igual que el de A/B, pero el número de incógnitas es 3.
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq 1$ *y* $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución). Para $a = 1$ es incompatible (sin solución). Para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Lo resolvemos para *a = 0*. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1)

$$\left.\begin{array}{r} y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ x \quad\quad + z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 1 - z \\ 2x + y + z = 1 \\ x = 2 - z \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2 - z) + (1 - z) + z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 - 2z + 1 - z + z = 1 \Rightarrow -2z = -4 \Rightarrow \boxed{z = \frac{-4}{-2} = 2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{y = 1 - 2 = -1} \\ \boxed{x = 2 - 2 = 0} \end{array}\right.$$

La solución es *x = 0; y = –1;* $z = 2$.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa fabrica relojes smartwatch de dos tamaños de pantalla distintos: el tipo A, de 44 milímetros y el tipo B de 40 milímetros. Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total y el número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A. Los costes de producción de cada tipo de smartwatch son de 150 € para el tipo A y de 100 € los del B, disponiendo la empresa de un máximo de 6000 € a la semana para el coste total de producción. Además, se conoce que los relojes smartwatch tipo A generan un beneficio de 130 € y los de tipo B de 140 €.
a) Si la empresa quiere maximizar el beneficio, formule el problema que debe resolver y represente la región factible, calculando sus vértices. (1,5 puntos)
b) ¿Cuántos smartwatch de cada tipo habrá que producir a la semana para que el beneficio total de la empresa sea máximo?, ¿Cuál es este beneficio máximo? (1 punto)

a) Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = número de smartwatch del tipo A, y = número de smartwatch del tipo B.

Hacemos una tabla para aclarar los datos.

	Costes de producción	Beneficios
Nº smartwatch del tipo A (x)	150x	130x
Nº smartwatch del tipo B (y)	100y	140y
TOTALES	$150x+100y$	$130x+140y$

Deseamos maximizar el beneficio $B(x,y)=130x+140y$.

Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

"*Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total*" → $x+y\geq 10$
"*El número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A*" → $y\leq 10+x$
"*La empresa dispone de un máximo de 6000 € a la semana para el coste total de producción*" → $150x+100y\leq 6000$
"*El número de smartwatch debe ser positivo o cero*" → $x\geq 0; y\geq 0$

La región factible es la zona del plano que cumple el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 10 \\ y\leq 10+x \\ 150x+100y\leq 6000 \\ x\geq 0; y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y\geq 10-x \\ y\leq 10+x \\ 3x+2y\leq 120 \\ x\geq 0; y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$y=10-x$

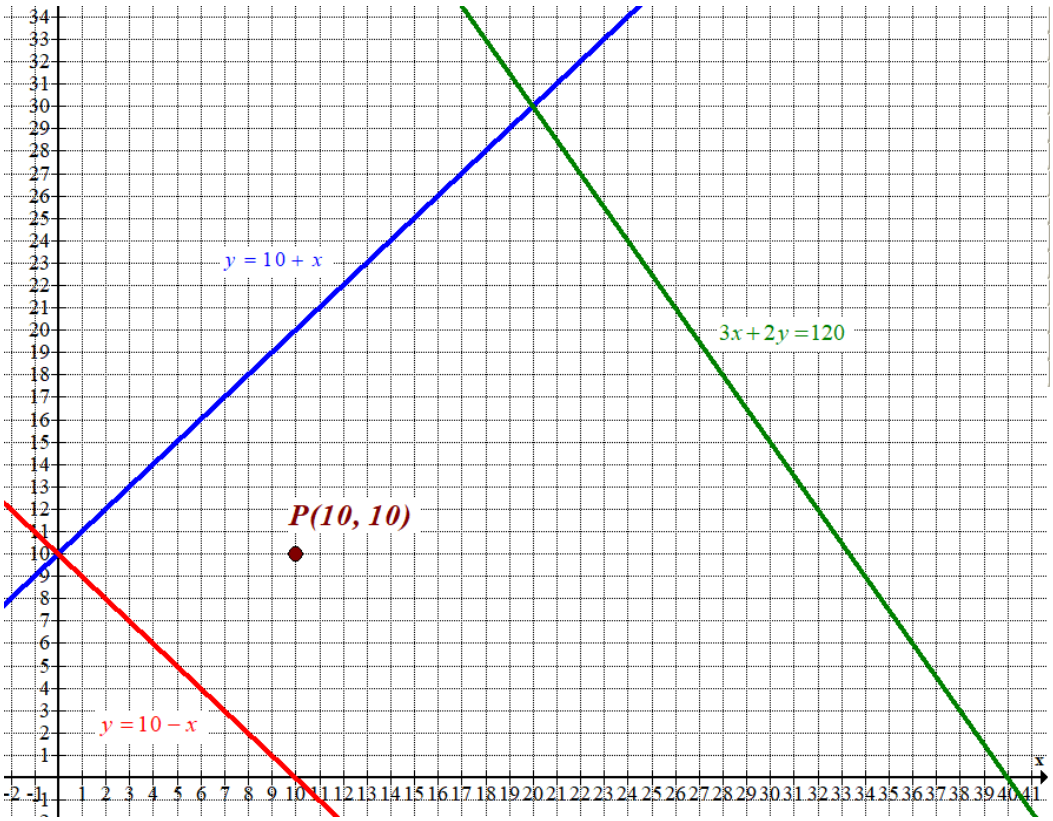
x	$y=10-x$
0	10
10	0

$y=10+x$

x	$y=10+x$
0	10
10	20
20	30

$3x+2y=120$

x	$y=\frac{120-3x}{2}$
0	60
20	30
40	0



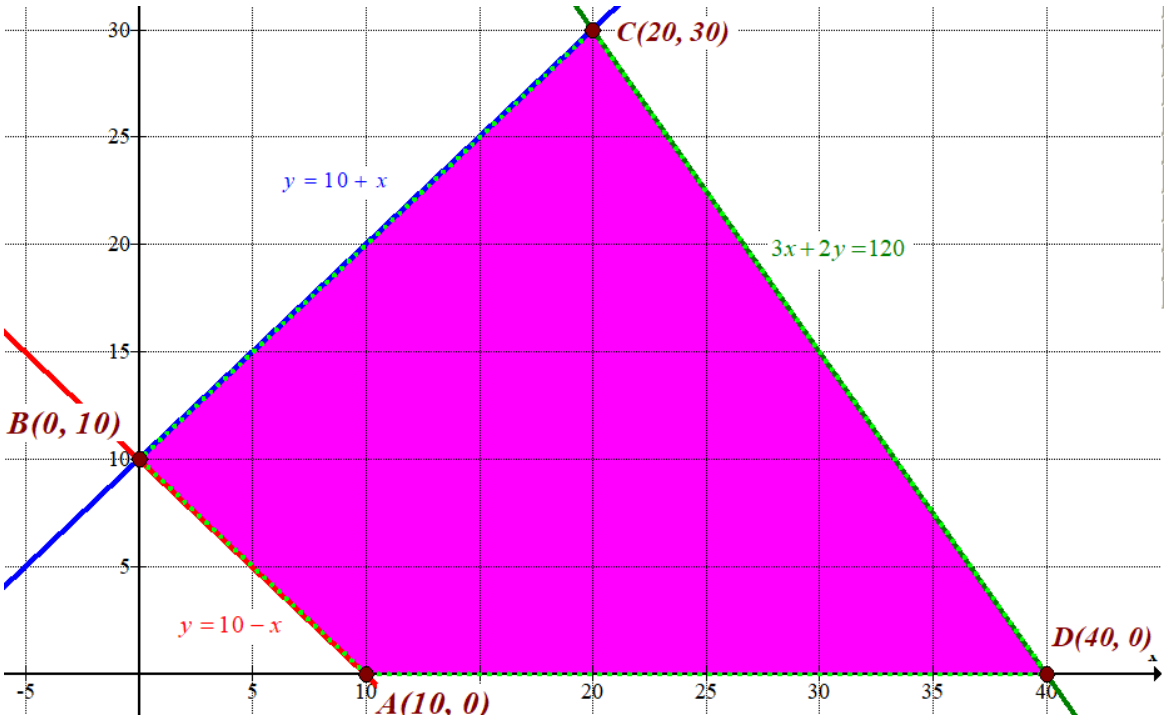
Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} y \geq 10 - x \\ y \leq 10 + x \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array}\right\}$

La región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas **azul** **y** **verde** y por encima de la roja.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región del plano cumple todas las restricciones.

$\left.\begin{array}{l} 10 \geq 10 - 10 \\ 10 \leq 10 + 10 \\ 30 + 20 \leq 120 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array}\right\}$ Se cumplen todas y la región factible es correcta.

Coloreo de rosa la región factible.



Las coordenadas de los vértices son: A(10,0), B(0,10), C(20, 30) y D(40, 0)

b) Valoramos la función beneficio $B(x,y)=130x+140y$ en cada uno de los vértices en busca del máximo valor.

A(10, 0) → $B(10,0)=130\cdot 10+140\cdot 0=1300$

B(0, 10) → $B(0,10)=130\cdot 0+140\cdot 10=1400$

$C(20,30)$ → $B(20,30)=130\cdot 20+140\cdot 30=6800$ ¡Máximo!

D(40, 0) → $B(40,0)=130\cdot 40+140\cdot 0=5200$

El máximo beneficio se obtiene en el punto C(20, 30). Significa fabricar 20 smartwatch del tipo A y 30 del tipo B.

El máximo beneficio es de 6800 euros.

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q)=q^3+3q+10$ donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, de cada unidad producida es $p = 30$, se desea conocer:

a) La función beneficio de esta empresa. (0,5 puntos).
b) El número de unidades producidas que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1,5 puntos)
c) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

a) La función Beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes.
Como q representa las unidades producidas y su precio de venta es de 30 euros por unidad tenemos que los ingresos son $I(q)=30q$.

$$B(q)=I(q)-C(q)=30q-\left(q^3+3q+10\right)=-q^3+27q-10$$

b) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los candidatos a máximos.

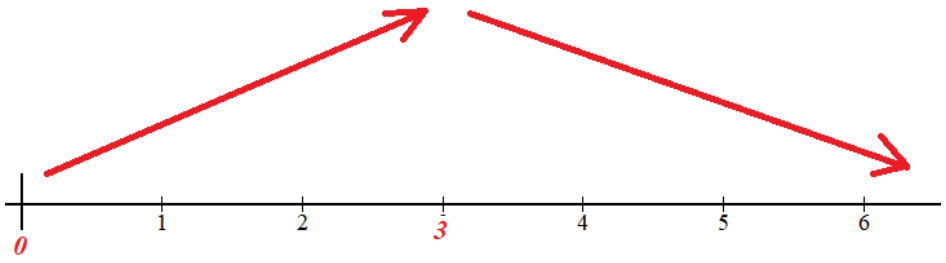
$$B(q)=-q^3+27q-10 \Rightarrow B'(q)=-3q^2+27$$

$$B'(q)=0 \Rightarrow -3q^2+27=0 \Rightarrow -3q^2=-27 \Rightarrow q^2=\frac{-27}{-3}=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q=\sqrt{9}=\pm 3$$

Solo tenemos en cuenta el valor positivo, pues el número de unidades producidas no puede tomar un valor negativo.
Comprobamos la evolución de la función antes de $q = 3$ y después de $q = 3$.

En el intervalo (0, 3) tomamos $q = 1$ y su derivada vale $B'(1)=-3\cdot 1^2+27=24>0$. La función beneficio crece en el intervalo (0, 3).
En el intervalo (3, +∞) tomamos $q = 4$ y su derivada vale $B'(4)=-3\cdot 4^2+27=-21<0$. La función beneficio decrece en el intervalo (3, +∞).



La función presenta un máximo en $q = 3$.
El beneficio es máximo produciendo 3 unidades.

c) El beneficio máximo es de $B(3)=-3^3+27\cdot 3-10=44$, que significa un beneficio de 44 €.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases}2+\sqrt{x} & si\ \ 0<x\le 1\\ \dfrac{8x-2}{2x} & si\ \ x>1\end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de la función en todo su dominio. (0,5 puntos)
b) Estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en su dominio. (1 punto)
c) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$. (1 punto)

a) Como la función radical existe entre 0 y 1 el primer trozo es continuo. El segundo trozo (la fracción) también lo es, pues el denominador no se anula a partir de *x = 1*.
Para que sea continua debe serlo en *x = 1* y deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2+\sqrt{x}=2+\sqrt{1}=3\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{8x-2}{2x}=\dfrac{8-2}{2}=3\\ f(1)=2+\sqrt{1}=3\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=3$$

La función es continua en *x = 1* y por tanto, es continua en todo su dominio $=(0,+\infty)$

b) En $(0,1]$ la función es $f(x)=2+\sqrt{x}$.
Su derivada es $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Esta derivada siempre es positiva. La función crece en $(0,1]$.
En $(1,+\infty)$ la función es $f(x)=\dfrac{8x-2}{2x}=\dfrac{4x-1}{x}$.
Su derivada es $f'(x)=\dfrac{4x-1\cdot(4x-1)}{x^2}=\dfrac{4x-4x+1}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}$. Esta derivada siempre es positiva. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función es creciente en todo su dominio $=(0,+\infty)$

c) La función en un entorno de *x = 2* es $f(x)=\dfrac{4x-1}{x}$ y su derivada es $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$.
La fórmula de la tangente a la gráfica en *x = 2* es $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

$$\left.\begin{array}{l}f(2)=\dfrac{4\cdot 2-1}{2}=\dfrac{7}{2}\\ f'(2)=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}\\ y-f(2)=f'(2)(x-2)\end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{7}{2}=\frac{1}{4}(x-2)\Rightarrow y-\frac{7}{2}=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{y=\frac{x}{4}+3}$$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

a) Comprobamos cuando se anula el denominador de la función.

$$9-x^2=0\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-3,3\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{matrix} f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2} \\ x=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow f(0)=\frac{0}{9}=0\Rightarrow A(0,0)$$

$$\left.\begin{matrix} f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2} \\ y=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{2x^2}{9-x^2}=0\Rightarrow 2x^2=0\Rightarrow x=0\Rightarrow A(0,0)$$

El único punto de corte con los ejes es el punto A(0, 0).

b) **Asíntota vertical.** $x=a$.

¿ $x=-3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{2x^2}{9-x^2}=\frac{2\cdot(-3)^2}{9-(-3)^2}=\frac{18}{0}=\infty$$

$x=-3$ es asíntota vertical

¿ $x=3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{2x^2}{9-x^2}=\frac{2\cdot(3)^2}{9-(3)^2}=\frac{18}{0}=\infty$$

$x=3$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{9-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}}{\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\dfrac{9}{x^2}-1}=\frac{2}{\dfrac{1}{\infty}-1}=\frac{2}{0-1}=-2$$

$y=-2$ es asíntota horizontal.

c) Obtenemos su derivada y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f(x)=\frac{2x^2}{9-x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x\left(9-x^2\right)-\left(-2x\right)2x^2}{\left(9-x^2\right)^2}=\frac{36x-4x^3+4x^3}{\left(9-x^2\right)^2}=\frac{36x}{\left(9-x^2\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{36x}{\left(9-x^2\right)^2}=0\Rightarrow 36x=0\Rightarrow x=0$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 0$ y los valores excluidos del dominio: $x = -3$, $x = 3$.

- En el intervalo $(-\infty,-3)$ tomo $x = -4$ y la derivada vale $f'(-4)=\frac{36(-4)}{\left(9-(-4)^2\right)^2}=\frac{-144}{49}<0$.

  La función decrece en $(-\infty,-3)$.

- En el intervalo $(-3,0)$ tomo $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2)=\frac{36(-2)}{\left(9-(-2)^2\right)^2}=\frac{-72}{25}<0$. La

  función decrece en $(-3,0)$.

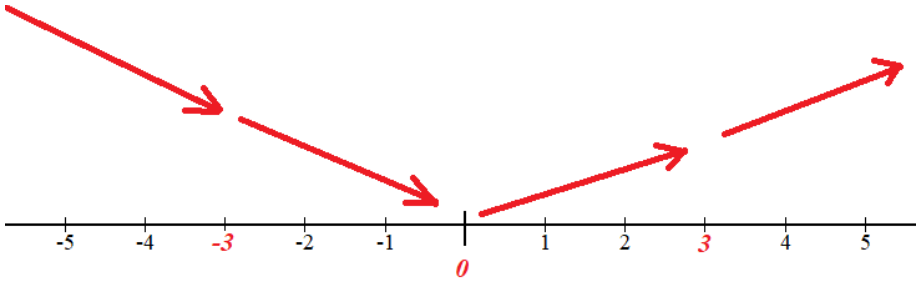
- En el intervalo $(0,3)$ tomo $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{36(2)}{\left(9-(2)^2\right)^2}=\frac{72}{25}>0$. La

  función crece en $(0,3)$.

- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomo $x = 4$ y la derivada vale $f'(4)=\frac{36(4)}{\left(9-(4)^2\right)^2}=\frac{144}{49}>0$. La

  función crece en $(3,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$ y crece en $(0,3)\cup(3,+\infty)$

d) Atendiendo al esquema superior la función presenta un mínimo relativo en $x = 0$.

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x)=x^2-2x+2$ y $g(x)=-x^2+6$. Calcular su área.

Buscamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

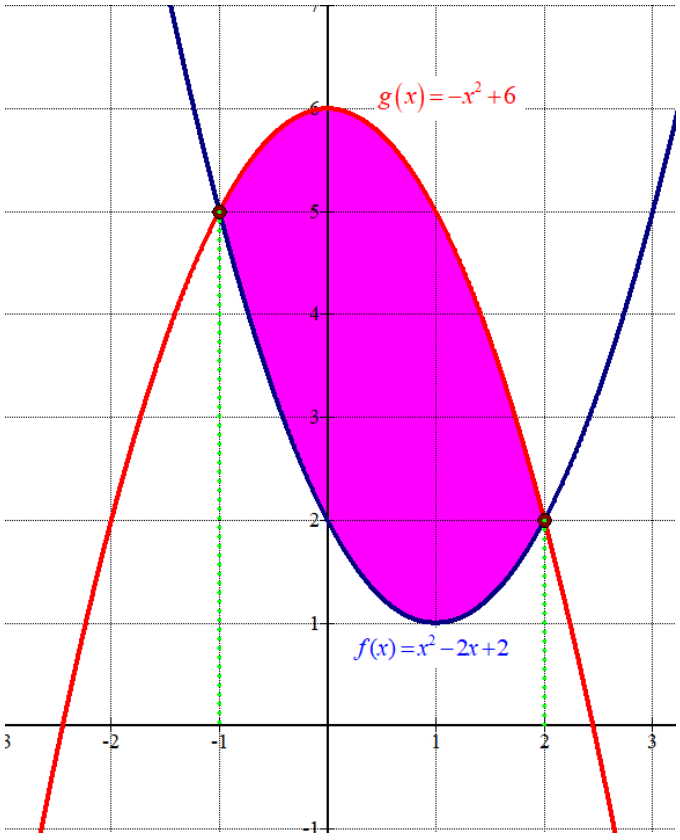
$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-2x+2=-x^2+6\Rightarrow 2x^2-2x-4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2=x\\ o\\ \frac{1-3}{2}=-1=x\end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para cada parábola.

x	$y=x^2-2x+2$
-1	5
0	2
1	1
2	2
-2	10
3	5

x	$y=-x^2+6$
-1	5
0	6
1	5
2	2
-2	2
3	-10



Como la función *g(x)* toma valores superiores a los de *f(x)* en el intervalo del recinto del cual queremos hallar el área, el valor del área es el valor de la integral definida entre $x=-1$ y $x=2$ de la diferencia de las dos funciones.

$$g(x)-f(x)=-x^2+6-\left(x^2-2x+2\right)=-2x^2+2x+4$$

$$Área=\int_{-1}^{2} g(x)-f(x)\,dx=\int_{-1}^{2}-2x^2+2x+4dx=\left[-2\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{2}=\left[-2\frac{x^3}{3}+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=$$

$$=\left[-2\frac{2^3}{3}+2^2+4\cdot 2\right]-\left[-2\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2+4(-1)\right]=-\frac{16}{3}+4+8-\frac{2}{3}-1+4=\boxed{9u^2}$$

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$:

a) Calcular $\int f(x)dx$. (1 punto)

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función *f(x)*, el eje de abscisa y las rectas $x=1$ y $x=e$ (1,5 puntos)

a) Resolvemos la integral usando un cambio de variable.

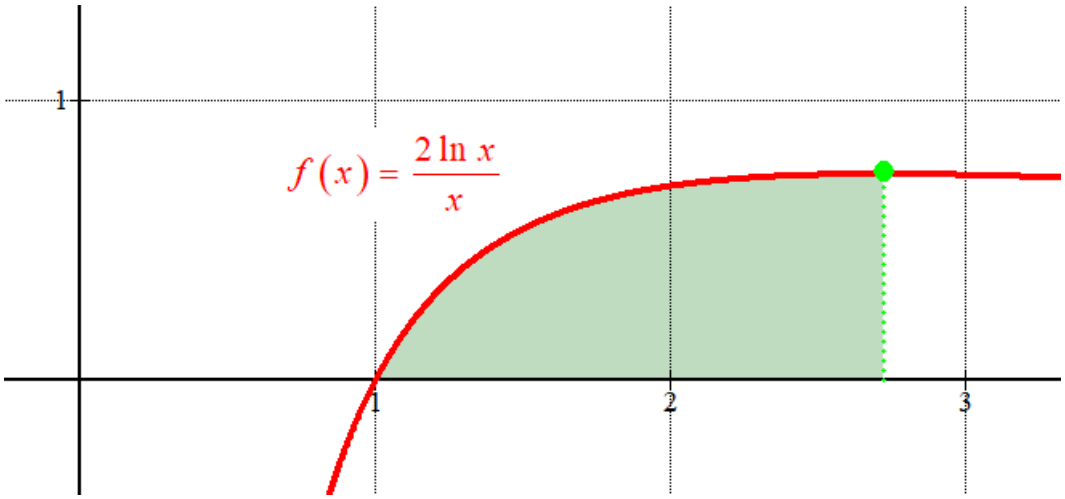
$$\int f(x)dx=\int \frac{2\ln x}{x}dx=\left\{\begin{array}{l}\ln x=t\\ \dfrac{1}{x}dx=dt\rightarrow dx=xdt\end{array}\right\}=\int \frac{2t}{\cancel{x}}\cancel{x}dt=\int 2tdt=t^2=(\ln x)^2+C$$

b) Veamos cuando corta la función el eje de abscisa.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}\\ y=0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2\ln x}{x}=0\Rightarrow 2\ln x=0\Rightarrow \ln x=0\Rightarrow x=1$$

Como este valor está en una de las rectas que delimitan la región el área de la región es el valor absoluto de la integral definida entre *x = 1* y *x = e* de $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$.

$$Área=\left|\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx\right|=\left|\left[(\ln(x))^2\right]_1^e\right|=(\ln(e))^2-(\ln(1))^2=1^2-0^2=\boxed{1u^2}$$



CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) La Dirección General de Tráfico ha realizado un estudio estadístico en la Región de Murcia sobre el uso del casco de protección por parte de los usuarios de patinetes eléctricos. El estudio estima que el 60 % de los usuarios de estos patinetes son hombres y, de estos, el 30 % usa el casco; mientras que, entre las mujeres que usan este medio para desplazarse, son el 40 % las que usan casco de protección. Si elegimos un usuario de patinete eléctrico al azar.

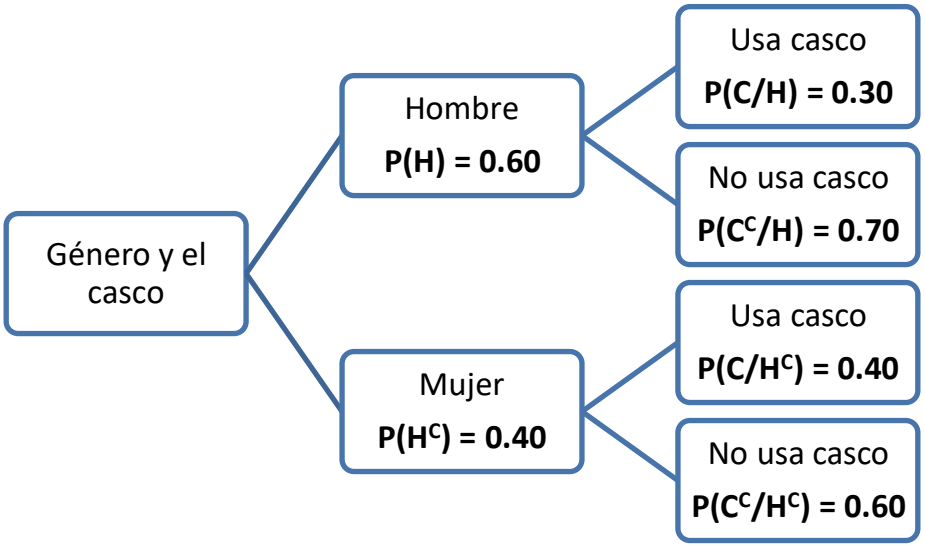
i. Calcule la probabilidad de que use casco de protección. (0,5 puntos)

ii. Sabiendo que el usuario de patinete eléctrico usa casco de protección, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

b) El gasto medio por cliente, en euros, en la lotería de las pasadas Navidades se distribuye según una variable Normal de media desconocida y desviación típica igual de 10 euros. Se elige una muestra aleatoria de 225 clientes, resultando que han tenido un gasto medio de 65 euros. Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio de la lotería de Navidad de 2022 con un nivel de confianza del 97% (1 punto)

a) Llamamos H al suceso "ser hombre" y C al suceso "usar casco de protección".

Realizamos un diagrama de árbol de la situación planteada.



Con los datos contenidos en el diagrama respondemos a las preguntas planteadas.

i. Nos piden $P(C)$. Usamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(H)P(C/H) + P(H^C)P(C/H^C) = 0.60 \cdot 0.30 + 0.40 \cdot 0.40 = \boxed{0.34}$$

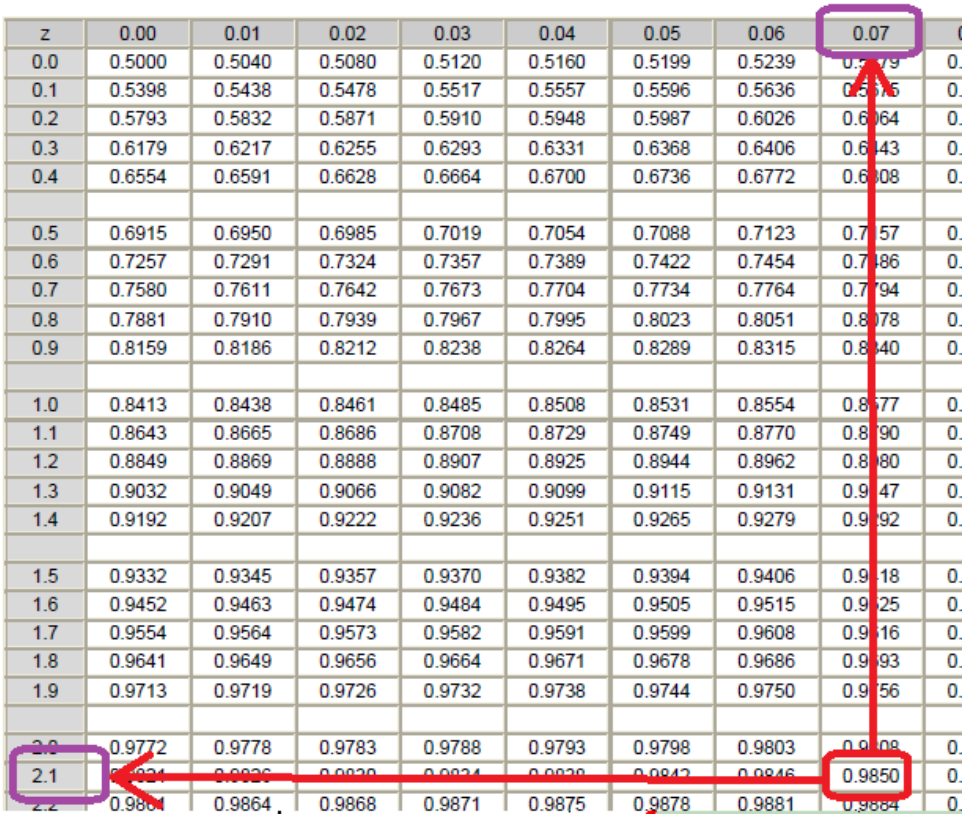
ii. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(H^C/C) = \frac{P(H^C \cap C)}{P(C)} = \frac{P(H^C)P(C/H^C)}{P(C)} = \frac{0.40 \cdot 0.40}{0.34} = \boxed{\frac{8}{17} \simeq 0.4706}$$

b) Sea X la variable aleatoria que da el gasto medio por cliente, en euros, en la lotería de las pasadas navidades. Sabemos que sigue una N(**μ**, 10).

La muestra es de 225 hogares → $n = 225$, $\bar{x} = 65$ €
Para un nivel de confianza del 97%

$$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884

El error del intervalo viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{225}} \simeq 1.4467$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(65 - 1.4467, 65 + 1.4467\right) = \left(63.5533, 66.4467\right)$$

El gasto en lotería con un nivel de confianza del 97 % se sitúa entre 63.55 € y 66.45 €.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EBAU2022 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & a\\ a & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el valor de *a* para el que $B^2=A$ (0,75 puntos)
b) Calcular la matriz inversa A^{-1} (0,75 puntos)
c) Para *a = 0*, encuentre la matriz X que satisface la ecuación $AX+B=C$ (1 punto)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 10\\ x+2y\ge 8\\ 2\le y\le x+6\\ x\le 6\end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)
b) Determine el punto de la región factible dónde la función $f(x,y)=-x+2y$ alcanza su valor mínimo. Calcule dicho valor. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La ecuación de demanda de un determinado producto viene dado por la expresión $p=400-2q$, y su función de coste total es $C(q)=0,2q^2+4q+400$, donde *q* es el número de unidades de dicho producto y *p* se expresa en euros por unidad. Determine:

a) La expresión de la función de beneficios de la empresa.
b) El nivel de producción, q, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa.
c) El precio para el que el beneficio es máximo.
d) El beneficio máximo.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función $f(x)=\begin{cases} xe^x & si\ \ x\le 0\\ ax+b & si\ \ 0<x<1\\ 1+x\ln x & si\ \ x\ge 1\end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros *a y b* para que la función sea continua en todo su dominio.
b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$. (1,5 puntos)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2-4}$, calcule:

a) El dominio de definición de la función y el punto de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
b) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f\left(x\right)=\dfrac{x}{1+x^2}$:

a) Calcular la derivada *f ´(x)* (1 punto)
b) Calcular $\int f\left(x\right)dx$. (1 punto)
c) Calcular $\int_0^1 f\left(x\right)dx$ (0,5 puntos)

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f\left(x\right)=4x-x^2$:

a) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la función *f(x)*, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=3$ (1 punto)
b) Calcule el área del recinto del apartado anterior. (1,5 puntos)

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Sean A y B dos sucesos independientes, tales que $P\left(A\right)=0,3$ *y* $P\left(A\cap B\right)=0,12$:
   i. Calcular P(B). (0,5 puntos)
   ii. Calcular $P\left(A\cup B\right)$. (0,5 puntos)
   iii. Calcular $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$. (0,5 puntos)
b) En una estación del AVE, el tiempo que tarda un viajero para acceder al tren desde que llega al control de equipajes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 2 minutos. Se tomó una muestra aleatoria de 50 viajeros, y se observó que el tiempo medio de espera era de 16 minutos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera de la maleta en ese aeropuerto con un nivel de confianza del 90 %. (1,5 puntos)

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & a\\ a & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el valor de *a* para el que $B^2=A$ (0,75 puntos)
b) Calcular la matriz inversa A^{-1} (0,75 puntos)
c) Para *a = 0*, encuentre la matriz X que satisface la ecuación $AX+B=C$ (1 punto)

a)

$$B^2=A\Rightarrow\begin{pmatrix}3 & a\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & a\\ a & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}9+a^2 & 3a+a\\ 3a+a & a^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}9+a^2=10\\ 4a=4\\ 4a=4\\ a^2+1=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=1\\ 4a=4\\ 4a=4\\ a^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=1\\ 4a=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{1}=\pm1\\ a=1\end{cases}\Rightarrow\boxed{a=1}$$

Para que $B^2=A$ el valor de "a" debe ser 1.

b) Comprobamos si el determinante de A es no nulo y existe su inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix}10 & 4\\ 4 & 2\end{vmatrix}=20-16=4\neq0$$

El determinante de A es no nulo y existe su inversa. La calculamos usando los adjuntos.

$$A=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}10 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}}{4}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -4\\ -4 & 10\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1/2 & -1\\ -1 & 5/2\end{pmatrix}}$$

c) Para *a = 0* la matriz B queda $B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX+B=C\Rightarrow AX=C-B\Rightarrow X=A^{-1}\left(C-B\right)$$

Sustituimos las matrices por su valor y obtenemos la expresión de X.

$$X=\begin{pmatrix}1/2 & -1\\ -1 & 5/2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1/2 & -1\\ -1 & 5/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2-1 & 1/2-4\\ -1+5/2 & -1+10\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-1/2 & -7/2\\ 3/2 & 9\end{pmatrix}}$$

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 10 \\ x+2y\ge 8 \\ 2\le y\le x+6 \\ x\le 6 \end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine el punto de la región factible dónde la función $f(x,y)=-x+2y$ alcanza su valor mínimo. Calcule dicho valor. (0,5 puntos)

a) Dibujo las rectas asociadas a cada inecuación y que delimitan la región factible.

$x+y=10$

x	$y=10-x$
0	10
10	0

$x+2y=8$

x	$y=\frac{8-x}{2}$
0	4
8	0

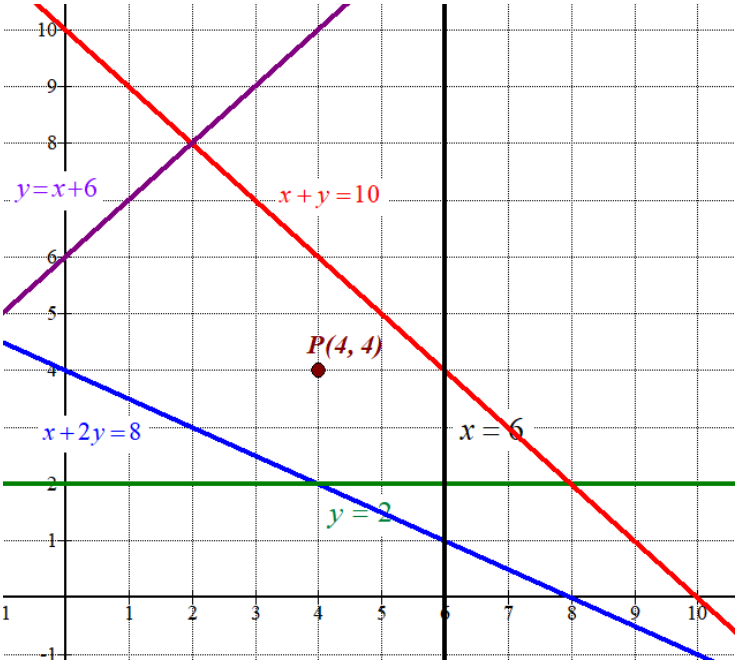
$y=2$

x	$y=2$
0	2
8	2

$y=x+6$

x	$y=x+6$
0	6
6	12

$x=6$ Recta *vertical*

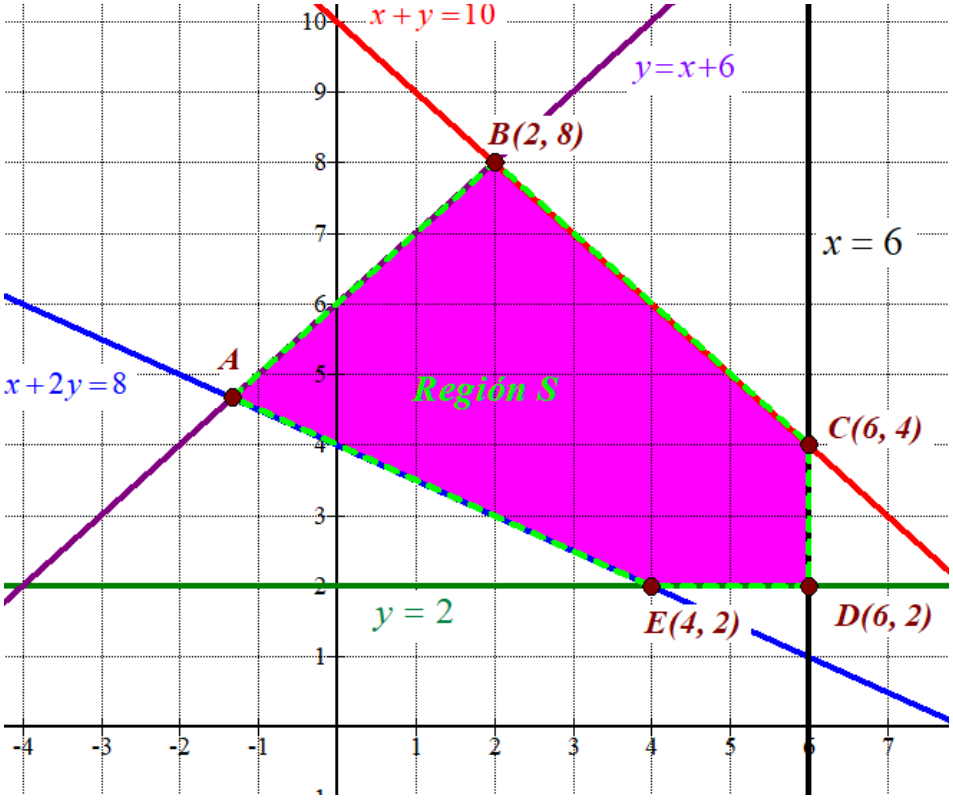


Como las inecuaciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\le 10 \\ x+2y\ge 8 \\ 2\le y\le x+6 \\ x\le 6 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano situada por debajo de las rectas roja y violeta, por encima de las rectas azul y verde, y a la izquierda de la recta vertical negra.

Comprobamos que el punto P(4, 4) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 4+4\le 10 \\ 4+8\ge 8 \\ 2\le 4\le 4+6 \\ 4\le 6 \end{array}\right\}$$ ¡Se cumplen todas!

Coloreamos de rosa la región e indicamos las coordenadas de los vértices.



Falta determinar las coordenadas del punto A. Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas que lo definen.

$$A \to \begin{cases} y = x+6 \\ x+2y = 8 \end{cases} \Rightarrow x+2(x+6)=8 \Rightarrow x+2x+12=8 \Rightarrow 3x=-4 \Rightarrow x=\frac{-4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-\frac{4}{3}+6=\frac{14}{3} \to A\left(\frac{-4}{3},\frac{14}{3}\right)$$

Los vértices tienen coordenadas $A\left(\frac{-4}{3},\frac{14}{3}\right)$, B(2, 8), C(6, 4), D(6, 2) y E(4, 2).

b) Valoramos la función objetivo $f(x,y)=-x+2y$ en cada uno de los vértices en busca del menor valor.

$A\left(\frac{-4}{3},\frac{14}{3}\right) \to f\left(\frac{-4}{3},\frac{14}{3}\right)=\frac{4}{3}+\frac{28}{3}=\frac{32}{3}\simeq 10.67$

B(2, 8) → $f(2,8)=-2+16=14$

C(6, 4) → $f(6,4)=-6+8=2$

D(6, 2) → $f(6,2)=-6+4=-2$ ¡Mínimo!

E(4, 2) → $f(4,2)=-4+4=0$

El valor mínimo de la función $f(x,y)=-x+2y$ en la región factible es –2 y se alcanza en el vértice D(6, 2).

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La ecuación de demanda de un determinado producto viene dado por la expresión $p = 400 - 2q$, y su función de coste total es $C(q) = 0,2q^2 + 4q + 400$, donde q es el número de unidades de dicho producto y p se expresa en euros por unidad. Determine:

a) La expresión de la función de beneficios de la empresa.
b) El nivel de producción, q, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa.
c) El precio para el que el beneficio es máximo.
d) El beneficio máximo.

a) Los ingresos son el producto del número de unidades (q) por el precio por unidad (p) → $I(q) = q(400 - 2q)$

Los beneficios son la diferencia entre los ingresos y el coste: $B(q) = I(q) - C(q)$

$$B(q) = I(q) - C(q) = q(400 - 2q) - (0.2q^2 + 4q + 400)$$

$$B(q) = 400q - 2q^2 - 0.2q^2 - 4q - 400 = -2.2q^2 + 396q - 400$$

b) Derivamos la función beneficios y la igualamos a cero.

$$B(q) = -2.2q^2 + 396q - 400 \Rightarrow B'(q) = -4.4q + 396$$

$$B'(q) = 0 \Rightarrow -4.4q + 396 = 0 \Rightarrow q = \frac{396}{4.4} = 90$$

Sustituimos este valor en la derivada segunda y comprobamos que da negativa.

$$B'(q) = -4.4q + 396 \Rightarrow B''(q) = -4.4 \Rightarrow B''(90) = -4.4 < 0$$

En $q = 90$ hay un máximo relativo de la función beneficio.

c) El precio para una producción de 90 unidades es p = 400 – 2 · 90 = 220 €.

d) El beneficio máximo que se obtiene produciendo 90 unidades es:

$$B(90) = -2.2 \cdot 90^2 + 396 \cdot 90 - 400 = 17420 \text{ €}$$

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función $f(x)=\begin{cases} xe^x & si\ \ x\le 0 \\ ax+b & si\ \ 0<x<1 \\ 1+x\ln x & si\ \ x\ge 1 \end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros *a y b* para que la función sea continua en todo su dominio.
b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$. (1,5 puntos)

a) Para que sea continua en su dominio la función debe ser continua en *x = 0* y en *x = 1*.

Continua en *x = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} xe^x=0e^0=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} ax+b=b \\ f(0)=0e^0=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{b=0}$$

Continua en *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} ax+b=a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1+x\ln x=1+1\ln 1=1 \\ f(1)=1+1\ln 1=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \end{array}\right\}\Rightarrow a+b=1\Rightarrow \{b=0\}\Rightarrow \boxed{a=1}$$

Los valores buscados son *a = 1* y *b = 0*.

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$ tiene la expresión: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

La función en el entorno de *x = 1* tiene una doble definición. Comprobamos que es derivable y hallamos el valor de su derivada.

$$f(x)=\begin{cases} xe^x & si\ \ x\le 0 \\ x & si\ \ 0<x<1 \\ 1+x\ln x & si\ \ x\ge 1 \end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} e^x+xe^x & si\ \ x<0 \\ 1 & si\ \ 0<x<1 \\ \ln x+x\dfrac{1}{x}=1+\ln x & si\ \ x>1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1=1 \\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1+\ln x=1+\ln 1=1 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(1^-)=f'(1^+)\Rightarrow f'(1)=1$$

La función es derivable en *x = 1* y el valor de la derivada es 1. La función en *x = 1* vale *f(1) = 1*. Sustituimos en la ecuación de la recta tangente.

$$\left.\begin{array}{l} y-f(1)=f'(1)(x-1) \\ f(1)=1 \\ f'(1)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow y-1=1(x-1)\Rightarrow \boxed{y=x}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$ tiene la expresión *y = x*.

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2-4}$, calcule:

a) El dominio de definición de la función y el punto de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
b) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.

a) El dominio de definición son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$f(x)=\frac{1-x^2}{x^2-4}\Rightarrow x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-2,+2\}$.

Los puntos de corte son:

$$x=0\Rightarrow f(0)=\frac{1-0^2}{0^2-4}=-\frac{1}{4}\Rightarrow\left(0,-\frac{1}{4}\right)$$

$$y=0\Rightarrow\frac{1-x^2}{x^2-4}=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1\Rightarrow(-1,0)\ y\ (1,0)$$

Hay tres puntos de corte con los ejes coordenados: $\left(0,-\dfrac{1}{4}\right);\ (-1,0)\ y\ (1,0)$.

b) **Asíntota vertical.** $x=a$.

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{1-x^2}{x^2-4}=\frac{1-2^2}{2^2-4}=\frac{-3}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical

¿ $x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{1-x^2}{x^2-4}=\frac{1-(-2)^2}{(-2)^2-4}=\frac{-3}{0}=\infty$$

$x=-2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x^2-4}=-1$$

$y=-1$ es asíntota horizontal.

c) Calculo la derivada y la igualo a cero en busca de los puntos críticos.

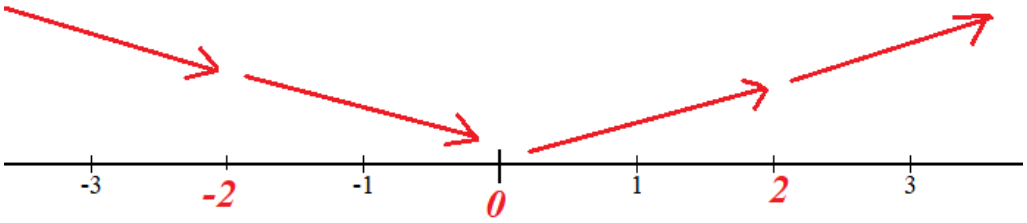
$$f(x)=\frac{1-x^2}{x^2-4}\Rightarrow f'(x)=\frac{(-2x)(x^2-4)-2x(1-x^2)}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x^3+8x-2x+2x^3}{(x^2-4)^2}=\frac{6x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{6x}{\left(x^2-4\right)^2}=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$.

- En $(-\infty,-2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3)=\frac{-18}{\left((-3)^2-4\right)^2}=-\frac{18}{25}<0$. La función decrece en $(-\infty,-2)$.
- En $(-2,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\frac{-6}{\left((-1)^2-4\right)^2}=-\frac{6}{9}<0$. La función decrece en $(-2,0)$.
- En $(0,2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\frac{6}{\left(1^2-4\right)^2}=\frac{6}{9}>0$. La función crece en $(0,2)$.
- En $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=\frac{18}{\left(3^2-4\right)^2}=\frac{18}{25}>0$. La función crece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y crece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$

d) Según el esquema anterior la función presenta un mínimo relativo en $x = 0$.
Como $f(0)=\frac{1-0^2}{0^2-4}=-\frac{1}{4}$ las coordenadas del mínimo relativo son $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$:

a) Calcular la derivada *f ´(x)* (1 punto)

b) Calcular $\int f(x)\,dx$. (1 punto)

c) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$ (0,5 puntos)

a)

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}$$

b)

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\boxed{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+K}$$

c)

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1=\left[\frac{1}{2}\ln(1+1^2)\right]-\left[\frac{1}{2}\ln(1+0^2)\right]=\boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$$

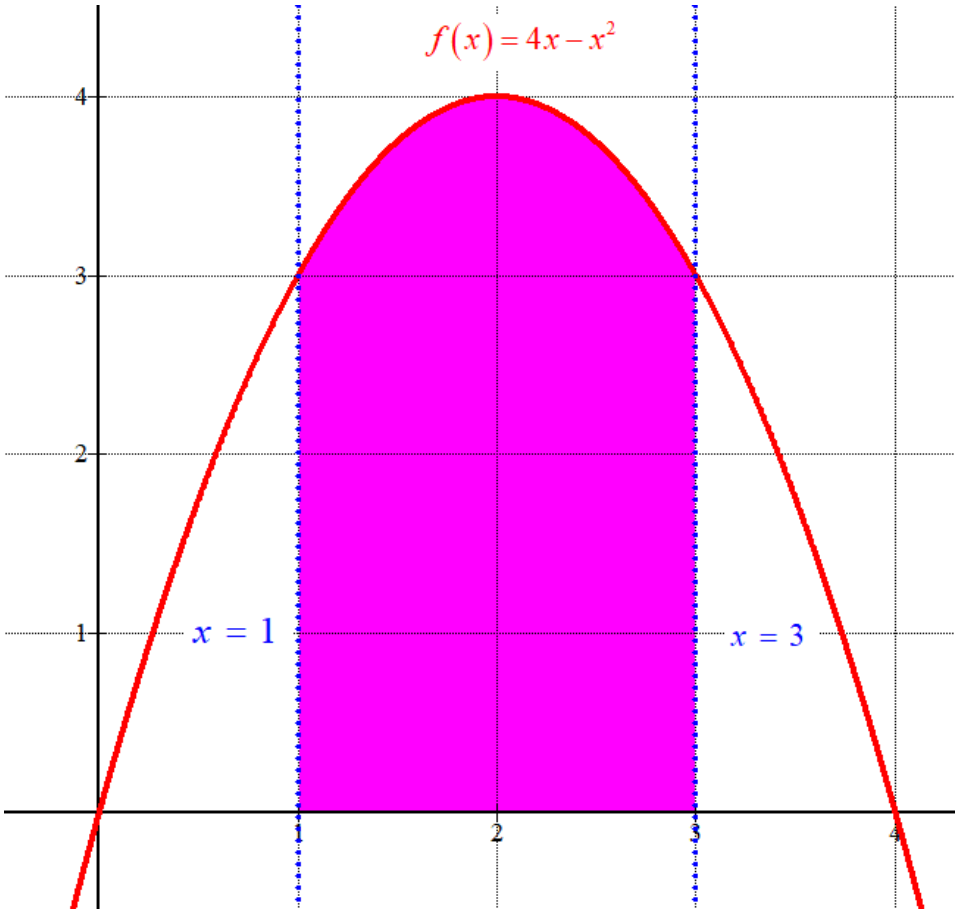
CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=4x-x^2$:

a) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la función *f(x)*, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=3$ (1 punto)

b) Calcule el área del recinto del apartado anterior. (1,5 puntos)

a) La gráfica de la función es una parábola. Para representarla hacemos una tabla de valores.

x	$y=4x-x^2$
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0



b) Según el dibujo el área de color rosa está entre 7 y 8 unidades cuadradas. Hacemos uso del cálculo integral para obtener su valor exacto.

$$Área=\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3 4x-x^2dx=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^3=$$

$$=\left[2\cdot 3^2-\frac{3^3}{3}\right]-\left[2\cdot 1^2-\frac{1^3}{3}\right]=18-9-2+\frac{1}{3}=\boxed{\frac{22}{3}\simeq 7.33u^2}$$

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Sean A y B dos sucesos independientes, tales que $P(A)=0,3$ *y* $P(A\cap B)=0,12$:

i. Calcular P(B). (0,5 puntos)

ii. Calcular $P(A\cup B)$. (0,5 puntos)

iii. Calcular $P(\overline{A}\cap\overline{B})$. (0,5 puntos)

b) En una estación del AVE, el tiempo que tarda un viajero para acceder al tren desde que llega al control de equipajes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 2 minutos. Se tomó una muestra aleatoria de 50 viajeros, y se observó que el tiempo medio de espera era de 16 minutos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera de la maleta en ese aeropuerto con un nivel de confianza del 90 %. (1,5 puntos)

a)

i. Si A y B son sucesos independientes significa que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=P(A)P(B)\\P(A)=0,3\\P(A\cap B)=0,12\end{array}\right\}\Rightarrow 0.12=0.3\cdot P(B)\Rightarrow \boxed{P(B)=\frac{0.12}{0.3}=0.4}$$

ii. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.3+0.4-0.12=\boxed{0.58}$

iii. Aplicamos una de las leyes de Morgan.

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.58=\boxed{0.42}$$

b) X = El tiempo que tarda un viajero para acceder al tren desde que llega al control de equipajes

X = N(μ, 2)

Tamaño de la muestra = n = 50. La media muestral = $\overline{x}=16$ minutos

Para un nivel de confianza del 90%

$1-\alpha=0,90\rightarrow\alpha=0,1\rightarrow\alpha/2=0'05\rightarrow 1-\alpha/2=0,95\rightarrow z_{\alpha/2}=\mathbf{1,64}$



El error del intervalo viene dado por la fórmula

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.64\cdot\frac{2}{\sqrt{50}}\simeq 0.464\,\text{minutos}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\overline{x}-Error,\overline{x}+Error\right)=\left(16-0.464,16+0.464\right)=\left(15.536,16.464\right)$$

La media del tiempo de espera con un nivel de confianza del 90 % se sitúa entre 15.536 y 16.464 minutos.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EBAU2022 - **JUNIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+ay-2z=1 \\ ax-2y+2z=-1 \\ ax+y=0 \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 1. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) La empresa Sportwear, especializada en ropa deportiva, quiere fabricar dos tipos de camisetas: técnica y casual. Para ello utiliza tejidos sostenibles con el medio ambiente: algodón orgánico y lino. Para fabricar una camiseta técnica necesita 70 g de algodón orgánico y 20 g de lino, y para fabricar una camiseta casual necesita 60 g de algodón orgánico y 10 g de lino. Actualmente, la empresa dispone para producir 4200 g de algodón orgánico y 800 g de lino. Además, para que sea rentable el proceso se debe fabricar al menos 10 camisetas tipo casual. Sabiendo que cada camiseta técnica da un beneficio de 5 € y cada casual de 4 €, calcule, justificando la respuesta:

a) El número de camisetas de cada tipo que debería fabricar para obtener el máximo beneficio. (2 puntos)
b) El valor de dicho beneficio máximo. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) Se estima que los beneficios, en miles de euros, obtenidos en una sala de conciertos inaugurada hace 5 años, viene dado por la función $B(t)=2t^3-15t^2+24t+26$ donde $t\in[0,5]$ es el tiempo, medido en años, que lleva funcionando la sala. Se quiere conocer:

a) ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio de la sala de conciertos? Razone su respuesta (2 puntos).
b) ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo? (0,5 puntos)

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-kx+3 & si\ \ x\le 2 \\ 2x+k & si\ \ x>2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de *k* para que la función sea continua en $x=2$. (1 punto)
b) Para este valor determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-1$. (1,5 puntos)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=x^2e^x$, calcule:

a) El dominio de definición de la función. (0,5 puntos)
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
c) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)
d) Calcule la derivada de la función $f(x)=x^2e^x$ en el punto de abscisa $x=1$. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar la región del plano limitado por las parábolas $f(x)=-x^2+2x+4$ y $g(x)=x^2-4x+4$. Calcular su área.

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+2}$:

a) Calcular $\int \dfrac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx$. (1 punto)
b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función *f(x)*, el eje de abscisa y la recta $x=1$ (1,5 puntos)

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) En el departamento informático de unos grandes almacenes se encuentran a la venta ordenadores de distintas marcas comerciales. Hay 100 ordenadores de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un ordenador esté obsoleto es 0.01 para la marca A; 0.02 para la marca B y 0.03 para la marca C. Un comprador elige un ordenador al azar.
   i. Calcule la probabilidad de que el ordenador esté obsoleto. (0,5 puntos)
   ii. Sabiendo que el ordenador elegido es obsoleto, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A? (1 punto)
b) El salario mensual de los hogares de un municipio se distribuye según una variable Normal con desviación típica igual a 160 euros. Seleccionados 40 hogares al azar, han tenido un salario medio mensual de 1100 euros. Calcule un intervalo de confianza para el salario medio mensual de los hogares de ese municipio con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+ay-2z=1 \\ ax-2y+2z=-1 \\ ax+y=0 \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 1. (0,5 puntos)

La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 4 & a & -2 \\ a & -2 & 2 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & 1 \\ a & -2 & 2 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} 4 & a & -2 \\ a & -2 & 2 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix}=0+2a^2-2a-\left(4a+0+8\right)=2a^2-6a-8$.

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0\Rightarrow 2a^2-6a-8=0\Rightarrow a^2-3a-4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(-4)}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}\Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=\frac{3+5}{2}=4} \\ o \\ \boxed{a=\frac{3-5}{2}=-1} \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a\neq 4 \quad y \quad a\neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=4$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} Fila\ 2ª-Fila\ 1ª & & & \\ 4 & -2 & 2 & -1 \\ -4 & -4 & 2 & -1 \\ \hline 0 & -6 & 4 & -2 \end{array}\right\}\rightarrow \text{Nueva Fila } 2ª$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,3^{a}-Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 2 & -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\cdot Fila\,3^{a}-Fila\,2^{a} \\ \begin{array}{cccc} 0 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -4 & 2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 al igual que el de A/B, pero el número de incógnitas es 3.
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones):

CASO 3. $a=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4\cdot Fila\,2^{a}+Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} -4 & -8 & 8 & -4 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & -9 & 6 & -3 \end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4\cdot Fila\,3^{a}+Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\cdot Fila\,3^{a}+Fila\,2^{a} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 9 & -6 & 3 \\ 0 & -9 & 6 & -3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 al igual que el de A/B, pero el número de incógnitas es 3.
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones):

Lo resolvemos para *a = 1*. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1)

$$\left.\begin{array}{l} 4x+y-2z=1 \\ x-2y+2z=-1 \\ x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+y-2z=1 \\ x-2y+2z=-1 \\ y=-x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x-x-2z=1 \\ x-2(-x)+2z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2z=1 \\ (+)\,\underline{3x+2z=-1} \\ 6x\quad\ =0\Rightarrow \boxed{x=0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{y=-0=0} \\ 0-2z=1\Rightarrow \boxed{z=-\dfrac{1}{2}} \end{array}\right.$$

La solución es $x = 0;\ y = 0;\ z=-\dfrac{1}{2}$.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) La empresa Sportwear, especializada en ropa deportiva, quiere fabricar dos tipos de camisetas: técnica y casual. Para ello utiliza tejidos sostenibles con el medio ambiente: algodón orgánico y lino. Para fabricar una camiseta técnica necesita 70 g de algodón orgánico y 20 g de lino, y para fabricar una camiseta casual necesita 60 g de algodón orgánico y 10 g de lino. Actualmente, la empresa dispone para producir 4200 g de algodón orgánico y 800 g de lino. Además, para que sea rentable el proceso se debe fabricar al menos 10 camisetas tipo casual. Sabiendo que cada camiseta técnica da un beneficio de 5 € y cada casual de 4 €, calcule, justificando la respuesta:
a) El número de camisetas de cada tipo que debería fabricar para obtener el máximo beneficio. (2 puntos)
b) El valor de dicho beneficio máximo. (0,5 puntos)

Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = número de camisetas técnicas fabricadas e y = número de camisetas casuales.
Hacemos una tabla para ordenar los datos.

	Gramos de algodón	Gramos de lino	Beneficios
Nº camisetas técnicas (x)	70x	20x	5x
Nº camisetas casuales (y)	60y	10y	4y
TOTALES	$70x+60y$	$20x+10y$	$5x+4y$

Deseamos maximizar el beneficio $B(x,y)=5x+4y$.

Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

"*La empresa dispone para producir 4200 g de algodón orgánico"* → $70x+60y\le 4200$

"*La empresa dispone para producir 800 g de lino*" → $20x+10y\le 800$

"*Se debe fabricar al menos 10 camisetas tipo casual*" → $y\ge 10$

"*El número de camisetas técnicas debe ser positivo o cero*" → $x\ge 0$

La región factible es la zona del plano que cumple el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 70x+60y\le 4200 \\ 20x+10y\le 800 \\ y\ge 10 \\ x\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 7x+6y\le 420 \\ 2x+y\le 80 \\ y\ge 10 \\ x\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$7x+6y=420$

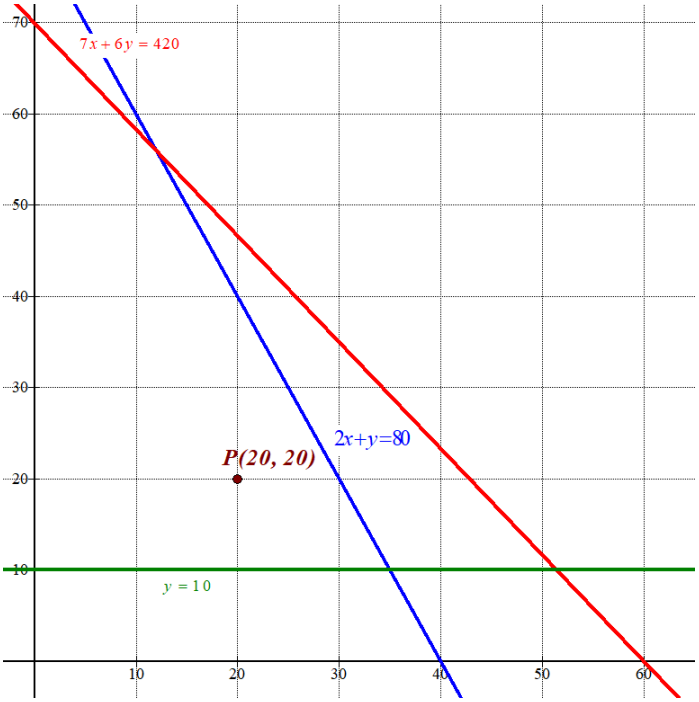
x	$y=\dfrac{420-7x}{6}$
0	70
12	56
60	0

$2x+y=80$

x	$y=80-2x$
0	80
12	56
40	0

$y=10$

x	$y=10$
0	10
12	10
40	10



Como las restricciones es una región que cumple $\left.\begin{array}{l} 7x+6y \le 420 \\ 2x+y \le 80 \\ y \ge 10 \\ x \ge 0 \end{array}\right\}$

Entonces es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas oblicuas **azul**, roja y por encima de la recta horizontal $y = 10$.

Comprobamos que el punto P(20, 20) cumple todas las restricciones.

$\left.\begin{array}{l} 7\cdot 20+6\cdot 20 \le 420 \\ 2\cdot 20+20 \le 80 \\ 20 \ge 10 \\ 20 \ge 0 \end{array}\right\}$ Se cumplen todas y la región factible es correcta.

Coloreo de rosa la región factible.



Conozco las coordenadas de los vértices A(0,0) y B(0,70) determinamos las coordenadas del resto resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

C → $\begin{cases} 2x+y=80 \\ 7x+6y=420 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=80-2x \\ 7x+6y=420 \end{cases} \Rightarrow 7x+6(80-2x)=420 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x+480-12x=420 \Rightarrow -5x=-60 \Rightarrow x=12 \Rightarrow y=80-2\cdot 12=56 \Rightarrow C(12,56)$

D → $\begin{cases} y=10 \\ 2x+y=80 \end{cases} \Rightarrow 2x+10=80 \Rightarrow 2x=70 \Rightarrow x=35 \Rightarrow D(35,10)$

Valoramos la función beneficio $B(x,y)=5x+4y$ en cada uno de los vértices en busca del máximo valor.

A(0, 10) → $B(0,10)=40$

B(0, 70) → $B(0,70)=0+280=280$

$C(12,56)$ → $B(12,56)=60+224=284$ Máximo

D(35, 10) → $B(35,10)=175+40=215$

a) El máximo beneficio se obtiene en el punto C(12, 56). Que significa fabricar 12 camisetas técnicas y 56 casuales.

b) El máximo beneficio es de 284 euros.

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) Se estima que los beneficios, en miles de euros, obtenidos en una sala de conciertos inaugurada hace 5 años, viene dado por la función $B(t)=2t^3-15t^2+24t+26$ donde $t\in[0,5]$ es el tiempo, medido en años, que lleva funcionando la sala. Se quiere conocer:

a) ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio de la sala de conciertos? Razone su respuesta (2 puntos).
b) ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo? (0,5 puntos)

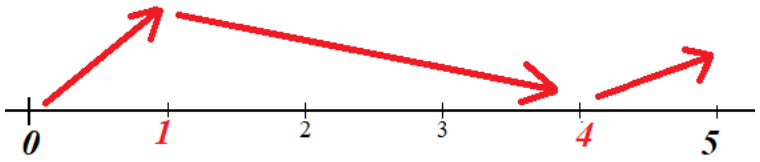
a) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los candidatos a máximos.

$$B(t)=2t^3-15t^2+24t+26 \Rightarrow B'(t)=6t^2-30t+24$$
$$B'(t)=0 \Rightarrow 6t^2-30t+24=0 \Rightarrow t^2-5t+4=0 \Rightarrow$$

$$t=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 4}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{5+3}{2}=4=t\\ \frac{5-3}{2}=1=t\end{cases}$$

Comprobamos la evolución de la función antes de *t = 1*, entre *t = 1* y *t = 4* y después de *t = 4*.

$$B'(0.5)=6\cdot 0.5^2-30\cdot 0.5+24=1.5-15+24=10.5>0 \rightarrow \text{Crece}$$
$$B'(2)=6\cdot 2^2-30\cdot 2+24=24-60+24=-12<0 \rightarrow \text{Decrece}$$
$$B'(5)=6\cdot 5^2-30\cdot 5+24=150-150+24=24>0 \rightarrow \text{Crece}$$



La función presenta un máximo en *t = 1*.
Comparamos el beneficio el 5º año con el año 1º.

$$B(1)=2\cdot 1^3-15\cdot 1^2+24\cdot 1+26=37$$
$$B(5)=2\cdot 5^3-15\cdot 5^2+24\cdot 5+26=21$$

El máximo beneficio se consigue el primer año.

b) El beneficio máximo es de $B(1)=37$, que significa un beneficio de 37000 €.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-kx+3 & si \;\; x\le 2 \\ 2x+k & si \;\; x>2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de *k* para que la función sea continua en $x=2$. (1 punto)
b) Para este valor determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-1$. (1,5 puntos)

a) Para que sea continua deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2-kx+3=2^2-k\cdot 2+3=7-2k \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 2x+k=2\cdot 2+k=4+k \\ f(2)=7-2k \end{array}\right\} \Rightarrow 7-2k=4+k \Rightarrow 3=3k \Rightarrow \boxed{k=1}$$

b) Con *k = 1* la función queda $f(x)=\begin{cases} x^2-x+3 & si \;\; x\le 2 \\ 2x+1 & si \;\; x>2 \end{cases}$

En $x=-1$ la función es $f(x)=x^2-x+3$.

La fórmula de la tangente a la gráfica en *x = –1* es $y-f(-1)=f'(-1)\left(x-(-1)\right)$.

$$f(-1)=(-1)^2-(-1)+3=1+1+3=5$$

$$f(x)=x^2-x+3 \Rightarrow f'(x)=2x-1 \Rightarrow f'(-1)=2(-1)-1=-3$$

Por lo que la recta tangente queda:

$$y-5=-3(x+1) \Rightarrow y-5=-3x-3 \Rightarrow \boxed{y=-3x+2}$$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=x^2e^x$, calcule:
a) El dominio de definición de la función. (0,5 puntos)
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
c) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)
d) Calcule la derivada de la función $f(x)=x^2e^x$ en el punto de abscisa $x=1$. (0,5 puntos)

a) El dominio es $\mathbb{R}$, pues la función es producto de una exponencial y de un monomio.

b) Obtenemos su derivada y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

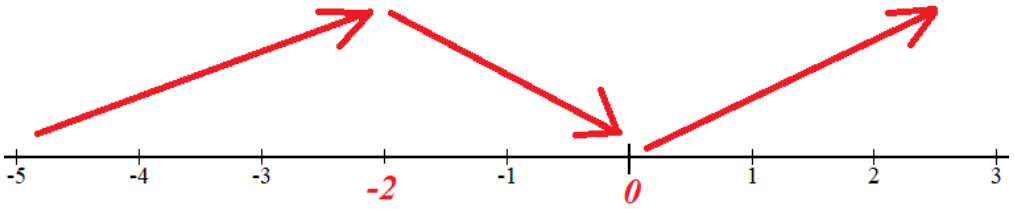
$$f(x)=x^2e^x \Rightarrow f'(x)=2xe^x+x^2e^x=\left(2x+x^2\right)e^x=x\left(2+x\right)e^x$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x\left(2+x\right)e^x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\2+x=0\Rightarrow x=-2\\e^x=0\Rightarrow \text{Imposible}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores: $x = -2$, $x = 0$.

$$f'(-3)=-3\left(2-3\right)e^{-3}=3e^{-3}>0\rightarrow \text{Crece}$$
$$f'(-1)=-1\left(2-1\right)e^{-1}=-e^{-1}<0\rightarrow \text{Decrece}$$
$$f'(1)=1\left(2+1\right)e^{1}=3e>0\rightarrow \text{Crece}$$

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(0,+\infty\right)$ y decrece en $\left(-2,0\right)$

c) Atendiendo al esquema superior la función presenta un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

Como $f(-2)=\left(-2\right)^2e^{-2}=\dfrac{4}{e^2}$ y $f(0)=0^2e^0=0$ el máximo relativo tiene coordenadas $\left(-2,\dfrac{4}{e^2}\right)$ y $\left(0,0\right)$ el mínimo relativo.

d) Nos piden calcular $f'(1)$.
La derivada de $f(x)=x^2e^x$ la hemos calculado en el apartado anterior y es $f'(x)=x\left(2+x\right)e^x$.
Sustituimos el valor $x = 1$ y obtenemos: $f'(1)=1\left(2+1\right)e^1=\boxed{3e}$

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar la región del plano limitado por las parábolas $f(x)=-x^2+2x+4$ y $g(x)=x^2-4x+4$. Calcular su área.

Buscamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

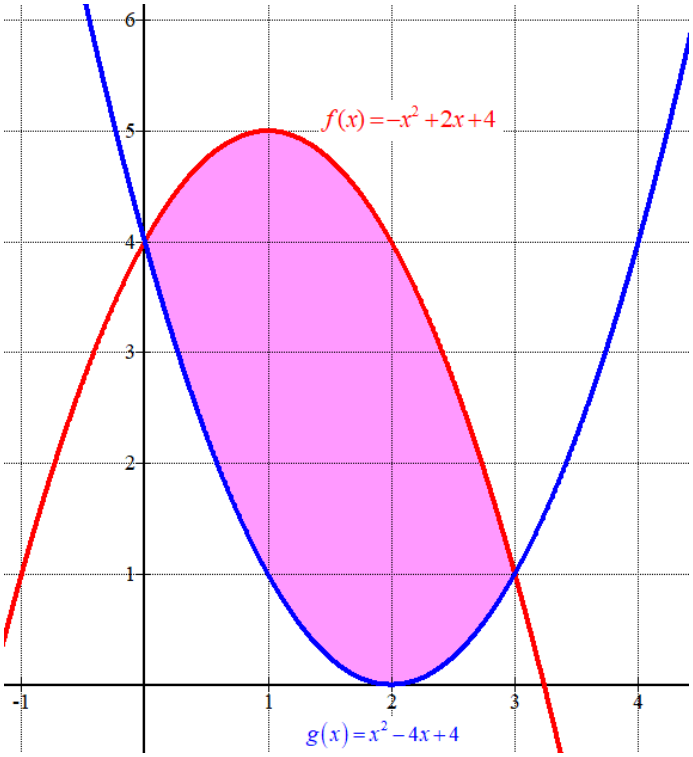
$$f(x)=g(x)\Rightarrow -x^2+2x+4=x^2-4x+4\Rightarrow 0=2x^2-6x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x(x-3)=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ x-3=0\Rightarrow x=3 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para cada parábola.

x	$y=-x^2+2x+4$
-1	1
0	4
1	5
2	4
3	1
4	-4

x	$y=x^2-4x+4$
-1	9
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4



El valor del área es la integral definida entre $x = 0$ y $x = 3$ de la diferencia de las dos funciones. Como $f(x)\geq g(x)$ tomamos la diferencia $f(x)-g(x)$.

$$f(x)-g(x)\Rightarrow -x^2+2x+4-\left(x^2-4x+4\right)=-2x^2+6x$$

$$Área=\int_0^3 f(x)-g(x)\,dx=\int_0^3 -2x^2+6x\,dx=\left[-2\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\left[-2\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^3=$$

$$=\left[-2\frac{3^3}{3}+3\cdot 3^2\right]-\left[-2\frac{0^3}{3}+3\cdot 0^2\right]=-18+27=\boxed{9u^2}$$

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+2}$:

a) Calcular $\int \dfrac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx$. (1 punto)

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función *f(x)*, el eje de abscisa y la recta $x=1$ (1,5 puntos)

a) Utilizamos un cambio de variable para hallar la integral indefinida pedida.

$$\int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx=\left\{\begin{array}{l} e^{x^2}+1=t \\ 2xe^{x^2}dx=dt\rightarrow dx=\dfrac{dt}{2xe^{x^2}}\end{array}\right\}=\int \frac{2xe^{x^2}}{t}\frac{dt}{2xe^{x^2}}=\int \frac{1}{t}dt=\ln t=\ln\left(e^{x^2}+1\right)+C$$

b) Veamos cuando corta la función el eje de abscisa.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+2} \\ y=0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+2}=0\Rightarrow 2xe^{x^2}=0\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ o \\ e^{x^2}=0\rightarrow \text{Imposible}\end{array}\right.$$

El área de la región es el valor absoluto de la integral definida entre *x = 0* y *x = 1* de $f(x)=\dfrac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+2}$.

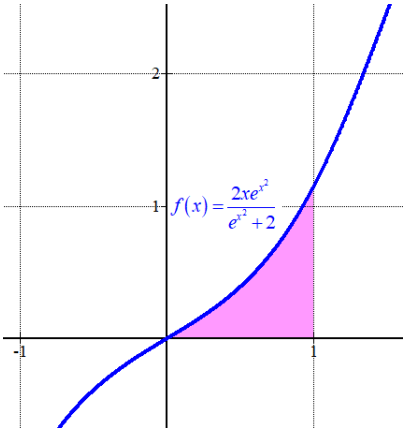
Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+2}dx=\left\{\begin{array}{l} e^{x^2}+2=t \\ 2xe^{x^2}dx=dt\rightarrow dx=\dfrac{dt}{2xe^{x^2}}\end{array}\right\}=\int \frac{2xe^{x^2}}{t}\frac{dt}{2xe^{x^2}}=\int \frac{1}{t}dt=\ln t=\ln\left(e^{x^2}+2\right)+C$$

Y ahora lo aplicamos al cálculo del área.

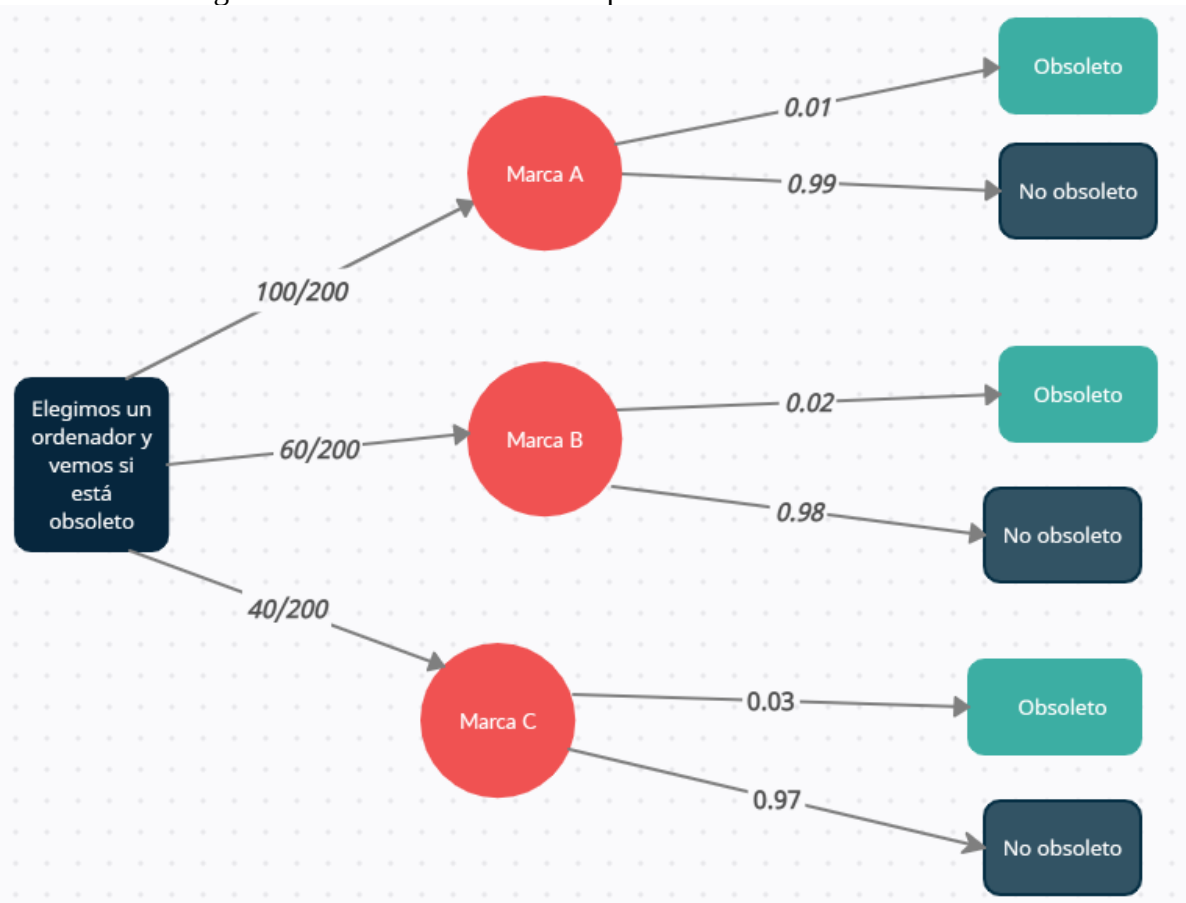
$$Área=\left|\int_0^1 \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+2}dx\right|=\left|\left[l\,n\left(e^{x^2}+2\right)\right]_0^1\right|=$$

$$=\left[l\,n\left(e^{1^2}+2\right)\right]-\left[l\,n\left(e^{0^2}+2\right)\right]=\ln(e+2)-\ln 3\simeq \boxed{0.45u^2}$$



CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)
a) En el departamento informático de unos grandes almacenes se encuentran a la venta ordenadores de distintas marcas comerciales. Hay 100 ordenadores de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un ordenador esté obsoleto es 0.01 para la marca A; 0.02 para la marca B y 0.03 para la marca C. Un comprador elige un ordenador al azar.
i. Calcule la probabilidad de que el ordenador esté obsoleto. (0,5 puntos)
ii. Sabiendo que el ordenador elegido es obsoleto, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A? (1 punto)
b) El salario mensual de los hogares de un municipio se distribuye según una variable Normal con desviación típica igual a 160 euros. Seleccionados 40 hogares al azar, han tenido un salario medio mensual de 1100 euros. Calcule un intervalo de confianza para el salario medio mensual de los hogares de ese municipio con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

a) En total hay 100 + 60 + 40 = 200 ordenadores.
Realizamos un diagrama de árbol de la situación planteada.



Con los datos contenidos en el diagrama respondemos a las preguntas planteadas.

i. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(Obsoleto) = P(Marca\,A)\,P(Obsoleto / Marca\,A) + P(Marca\,B)\,P(Obsoleto / Marca\,B) +$$
$$+ P(Marca\,C)\,P(Obsoleto / Marca\,C) =$$
$$= \frac{100}{200}\cdot 0.01 + \frac{60}{200}\cdot 0.02 + \frac{40}{200}\cdot 0.03 = \frac{1+1.2+1.2}{200} = \boxed{0.017}$$

ii. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/Obsoleto)=\frac{P(A\cap Obsoleto)}{P(Obsoleto)}=\frac{P(A)P(Obsoleto/A)}{P(Obsoleto)}=\frac{\frac{100}{200}\cdot 0.01}{0.017}=\boxed{\frac{5}{17}\simeq 0.294}$$

b) Sea X la variable aleatoria que da el salario mensual de los hogares de un municipio. Sabemos que sigue una N(**μ**, 160).
La muestra es de 40 hogares → *n = 40,* $\bar{x}$ = 1100 €
Para un nivel de confianza del 95%

$$1-\propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1-\propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

El error del intervalo viene dado por la fórmula

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\cdot\frac{160}{\sqrt{40}}\simeq 49.5845$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x}-Error,\bar{x}+Error\right)=\left(1100-49.5845,1100+49.5845\right)=\left(1050.4155,1149.5845\right)$$

La media del salario mensual con un nivel de confianza del 95 % se sitúa entre 1050.4 € y 1149.6 €.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EBAU2021 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 6 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcular el valor de *a* y *b* para que se cumpla: $AB=BA$.

b) Para *a = 1* y *b = 0*, resuelva la ecuación $XB-A=I$, siendo $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}3x+y\le 12\\ y\ge \dfrac{x}{2}-2\\ x-2y\ge -3\\ 2x+3y\ge 1\end{array}\right\}$$

a) Representar gráficamente la región del plano S definido por el sistema de inecuaciones anterior y determine los vértices de dicha región. (1,5 puntos)

b) Calcular los puntos de la región S dónde la función $f(x,y)=3x-2y$ alcanza sus valores máximos y mínimos. (1 punto)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) En un concierto celebrado en Murcia se ha estimado el número de miles de jóvenes que han asistido a él en función de la hora de llegada, *t*, mediante la función $f(t)=\dfrac{10}{(t-6)^2+1}$. Hallar la hora en el que había el mayor número de personas en el concierto. ¿Cuál fue esa cantidad máxima? Razone la respuesta.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=ax^2+3x+\dfrac{b}{x}$:

a) Calcule los valores *a* y *b* de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto (1,2) y determine si ese extremo es un máximo o un mínimo. (1,5 puntos)

b) Si en la función anterior *a = 2* y *b = 0*, determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa *x = 1* (1 punto)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x)=-x^2+4$ y $g(x)=x^2$. Calcular su área.

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x) = xe^{x^2}$:

a) Hallar la pendiente de esta función en el punto $x = 0$. (1 punto).

b) Calcular $\int xe^{x^2} dx$ (1 punto).

c) Calcular $\int_0^{1/2} xe^{x^2} dx$ (0,5 puntos)

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Se dispone de tres cajas con bolas de distintos colores. La primera contiene 10 bolas: 4 azules y 6 blancas. En la segunda caja hay una única bola azul y 5 blancas. En la tercera caja tenemos 3 bolas azules y 5 blancas. Cogemos una bola al azar de cualquiera de las cajas:

a) Calcule la probabilidad de que la bola cogida sea azul. (1 punto)

b) Si la bola elegida es blanca, calcule la probabilidad de que estuviera en la primera caja. (1,5 puntos)

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos) Dados dos sucesos de un experimento aleatorio A y B tales que $P(\overline{A}) = 0,45$, $P(B) = 0,35$ y $P(A \cup B) = 0,7$. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(A)$. (0,5 puntos)

b) $P(A \cap B)$. (1 punto)

c) $P(B / A)$. (0,5 puntos)

d) $P(\overline{A} / \overline{B})$. (0,5 puntos)

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 6 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcular el valor de *a* y *b* para que se cumpla: $AB=BA$.

b) Para *a = 1* y *b = 0*, resuelva la ecuación $XB-A=I$, siendo $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

a)

$$AB=BA\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ 6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}12 & 2\\ 3a & 3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3b & 2a\\ 3 & 12\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}12=3b\\ 2=2a\\ 3a=3\\ 3b=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4=b\\ 1=a\\ a=1\\ b=4\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}a=1\\ b=4\end{cases}}$$

Los valores necesarios para que $AB=BA$ son *a = 1* y *b = 4*.

b) Para *a = 1* y *b = 0* las matrices quedan $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}$

Necesitamos que B sea invertible, lo comprobamos.

$|B|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$ la matriz B tiene inversa.

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^{T}\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación $XB-A=I$ y determinamos la expresión de la matriz X.

$$XB-A=I\Rightarrow XB=I+A\Rightarrow X=\left(I+A\right)B^{-1}$$

$$X=\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-12 & 2\\ 3-6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial $XB-A=I$ es $X=\begin{pmatrix}-11 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y\le 12 \\ y\ge \dfrac{x}{2}-2 \\ x-2y\ge -3 \\ 2x+3y\ge 1 \end{array}\right\}$$

a) Representar gráficamente la región del plano S definido por el sistema de inecuaciones anterior y determine los vértices de dicha región. (1,5 puntos)

b) Calcular los puntos de la región S dónde la función $f(x,y)=3x-2y$ alcanza sus valores máximos y mínimos. (1 punto)

a) Dibujamos las rectas asociadas al sistema de inecuaciones y que delimitan la región S que satisface las inecuaciones.

$3x+y=12$

x	$y=12-3x$
3	3
4	0

$y=\dfrac{x}{2}-2$

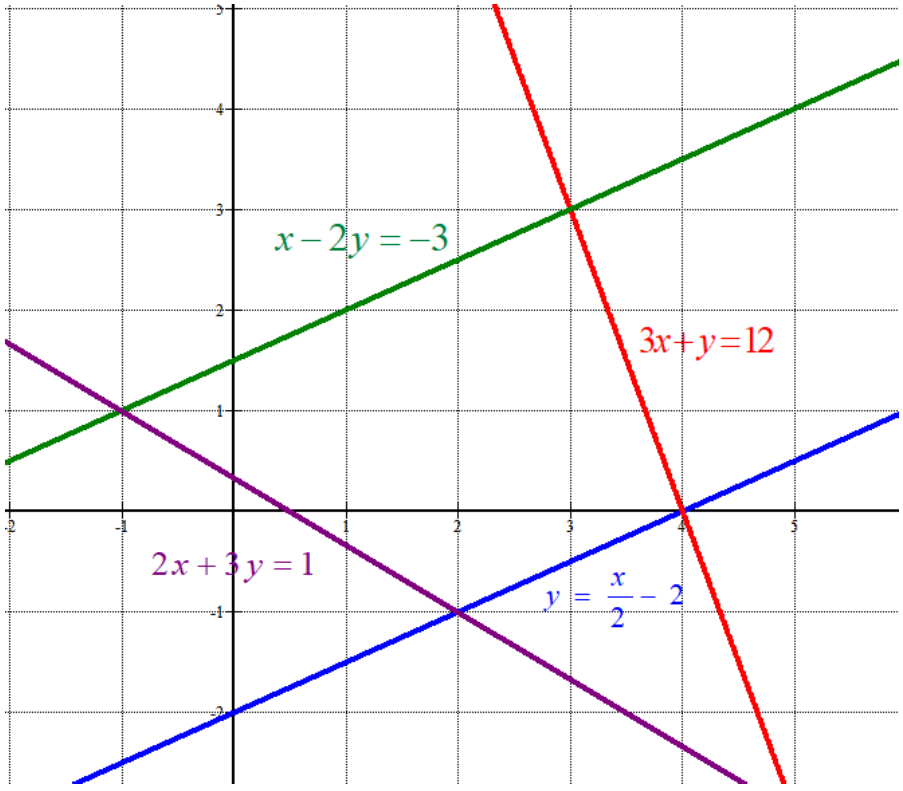
x	$y=\dfrac{x}{2}-2$
0	−2
4	0

$x-2y=-3$

x	$y=\dfrac{x+3}{2}$
−1	1
3	3

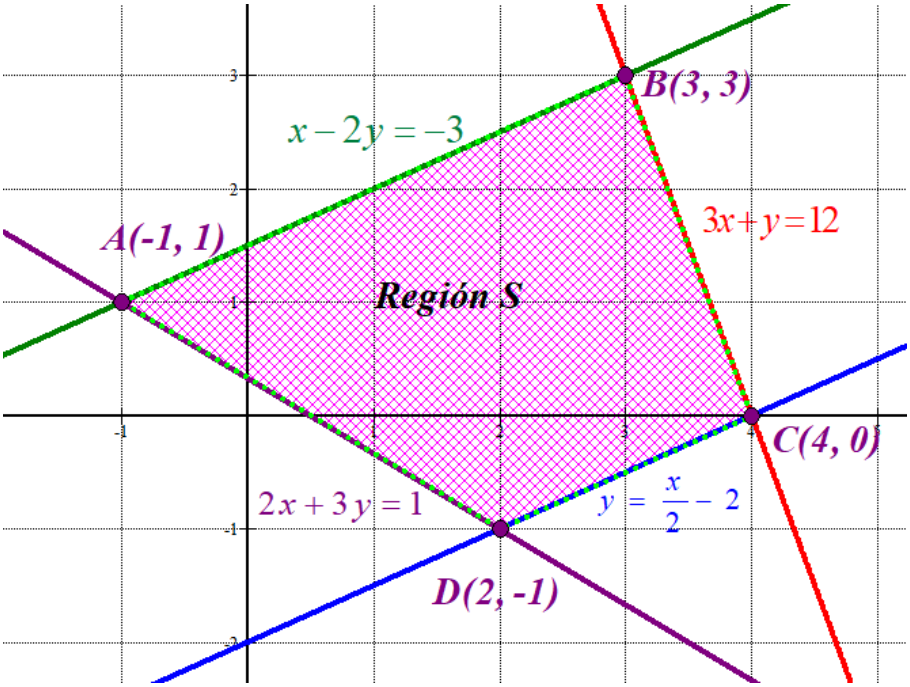
$2x+3y=1$

x	$y=\dfrac{1-2x}{3}$
−1	1
2	−1



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 3x+y\le 12 \\ y\ge \dfrac{x}{2}-2 \\ x-2y\ge -3 \\ 2x+3y\ge 1 \end{array}\right\}$ entonces la región S es la región del plano situada por debajo de las rectas roja y verde (las rectas superiores), por encima de las rectas azul y violeta (las rectas inferiores).

Coloreo de rosa la región S.



Los vértices de la región S tienen coordenadas A(–1, 1), B(3, 3), C(4, 0) y D(2, –1).

b) Valoramos la función $f(x,y)=3x-2y$ en cada uno de los vértices de la región S en busca de un valor máximo y otro mínimo.

A(–1, 1) → $f(-1,1)=-3-2=-5$ Mínimo

B(3, 3) → $f(3,3)=9-6=3$

C(4, 0) → $f(4,0)=12$ Máximo

D(2, –1) → $f(2,-1)=6+2=8$

El valor máximo se alcanza en el vértice C(4, 0) y el mínimo en el vértice A(–1, 1).

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) En un concierto celebrado en Murcia se ha estimado el número de miles de jóvenes que han asistido a él en función de la hora de llegada, *t*, mediante la función $f(t)=\dfrac{10}{(t-6)^2+1}$. Hallar la hora en el que había el mayor número de personas en el concierto. ¿Cuál fue esa cantidad máxima? Razone la respuesta.

La función es continua en todo $\mathbb{R}$ pues el denominador nunca se anula.

$(t-6)^2+1>0$, para cualquier valor de *t*.

Derivamos la función y obtenemos sus puntos críticos.

$$f(t)=\frac{10}{(t-6)^2+1}=\frac{10}{t^2-12t+36+1}=\frac{10}{t^2-12t+37}\Rightarrow$$

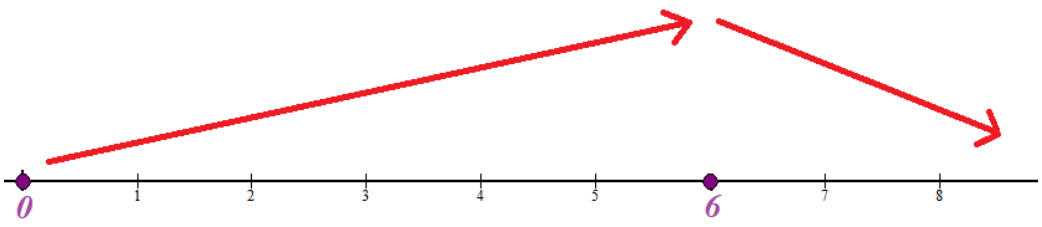
$$\Rightarrow f'(t)=\frac{-10(2t-12)}{(t^2-12t+37)^2}=\frac{-20(t-6)}{(t^2-12t+37)^2}$$

$$f'(t)=0\Rightarrow\frac{-20(t-6)}{(t^2-12t+37)^2}=0\Rightarrow -20(t-6)=0\Rightarrow \boxed{t=6}$$

Comprobamos el cambio de signo de la derivada antes y después de *t = 6*.

- En $(0,6)$ tomamos *t = 2* y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{-20(2-6)}{(2^2-24+37)^2}=\dfrac{80}{+}>0$. La función crece en $(0,6)$
- En $(6,+\infty)$ tomamos *t = 7* y la derivada vale $f'(7)=\dfrac{-20(7-6)}{(7^2-84+37)^2}=\dfrac{-20}{+}<0$. La función decrece en $(6,+\infty)$

La función es continua en $\mathbb{R}$ y sigue el esquema siguiente:



La función tiene un máximo relativo en *t = 6*.
El mayor número de personas en el concierto se produce a las 6 horas.
Como $f(6)=\dfrac{10}{(6-6)^2+1}=10$ la máxima afluencia es de 10000 jóvenes.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=ax^2+3x+\frac{b}{x}$:

a) Calcule los valores *a* y *b* de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto (1,2) y determine si ese extremo es un máximo o un mínimo. (1,5 puntos)
b) Si en la función anterior *a = 2* y *b = 0*, determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa *x = 1* (1 punto)

a) La función pasa por el punto de coordenadas (1,2) por lo que se cumple que *f(1) = 2*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^2+3x+\frac{b}{x} \\ f(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2=a\cdot 1^2+3+\frac{b}{1} \Rightarrow \boxed{a+b+1=0}$$

La función tiene un extremo relativo en el punto (1,2) significa que $f\,'(1)=0$.

$$f(x)=ax^2+3x+\frac{b}{x} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f\,'(x)=2ax+3-\frac{b}{x^2} \\ f\,'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=2a+3-\frac{b}{1} \Rightarrow \boxed{2a-b+3=0}$$

Juntamos las dos ecuaciones y resolvemos el sistema que se forma.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+1=0 \\ 2a-b+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-a-1 \\ 2a-b+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a+a+1+3=0 \Rightarrow 3a+4=0 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{4}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}}$$

Los valores buscados son $a=-\frac{4}{3}$ y $b=\frac{1}{3}$

La función queda $f(x)=-\frac{4}{3}x^2+3x+\frac{1/3}{x}=-\frac{4}{3}x^2+3x+\frac{1}{3x}$

Obtenemos la derivada segunda y determinamos si en *x = 1* hay un máximo o un mínimo.

$$f(x)=-\frac{4}{3}x^2+3x+\frac{1}{3x} \Rightarrow f\,'(x)=-\frac{8}{3}x+3-\frac{1}{3x^2}=-\frac{8}{3}x+3-\frac{1}{3}x^{-2}$$

$$f\,''(x)=-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}x^{-3}=-\frac{8}{3}+\frac{2}{3x^3}$$

$$f\,''(1)=-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{6}{3}=-2<0$$

Al ser la derivada segunda negativa en *x = 1* la función presenta un máximo en *x = 1*.

b) Para *a = 2* y *b = 0* la función queda $f(x)=2x^2+3x$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f\,'(1)(x-1)$.

$$f(x) = 2x^2 + 3x \Rightarrow f(1) = 2 + 3 = 5$$

$$f(x) = 2x^2 + 3x \Rightarrow f\,'(x) = 4x + 3 \Rightarrow f\,'(1) = 4 + 3 = 7$$

$$\left.\begin{array}{r} y - f(1) = f\,'(1)(x-1) \\ f(1) = 5 \\ f\,'(1) = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow y - 5 = 7(x-1) \Rightarrow \boxed{y = 7x - 2}$$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x)=-x^2+4$ y $g(x)=x^2$. Calcular su área.

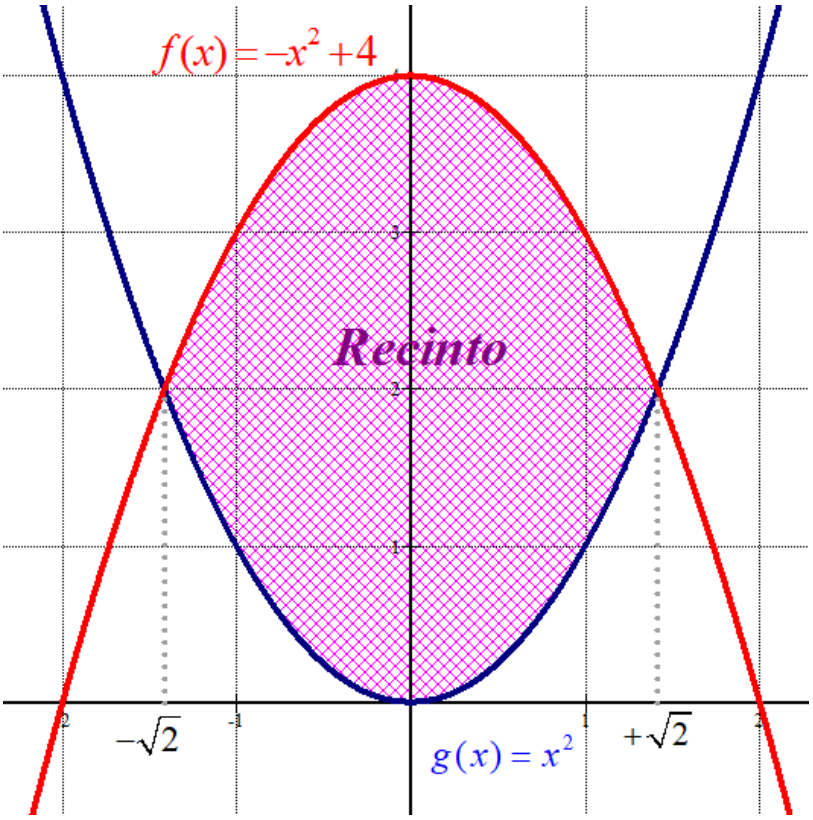
Vemos primero donde se cortan las funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+4 \\ g(x)=x^2 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2+4=x^2 \Rightarrow 4=2x^2 \Rightarrow 2=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

El recinto que debemos dibujar empieza en $x=-\sqrt{2}$ y acaba en $x=+\sqrt{2}$.
Hacemos una tabla de valores de cada función y las representamos.

x	$f(x)=-x^2+4$
–2	0
–1	3
0	4
1	3
2	0

x	$g(x)=x^2$
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4



El área del recinto es aproximadamente 8 unidades cuadradas (contando cuadraditos).
Calculamos el valor del área con más precisión haciendo uso del cálculo integral.

$$Área=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(-x^2+4\right)-x^2dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}-2x^2+4dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x\right]_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}}=$$

$$=\left[-\frac{2}{3}\left(\sqrt{2}\right)^3+4\left(\sqrt{2}\right)\right]-\left[-\frac{2}{3}\left(-\sqrt{2}\right)^3+4\left(-\sqrt{2}\right)\right]=$$

$$=-\frac{4\sqrt{2}}{3}+4\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{2}}{3}+4\sqrt{2}=8\sqrt{2}-\frac{8\sqrt{2}}{3}=\boxed{\frac{16\sqrt{2}}{3}\simeq 7.54\,u^2}$$

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x) = xe^{x^2}$:

a) Hallar la pendiente de esta función en el punto $x = 0$. (1 punto).

b) Calcular $\int xe^{x^2} dx$ (1 punto).

c) Calcular $\int_0^1 xe^{x^2} dx$ (0,5 puntos)

a) El valor de la pendiente en $x = 0$ es el valor de la derivada en $x = 0$, es decir, $f\,'(0)$.

$$f(x) = xe^{x^2} \Rightarrow f\,'(x) = e^{x^2} + xe^{x^2}(2x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} = e^{x^2}\left(1+2x^2\right)$$

$$f\,'(x) = e^{x^2}\left(1+2x^2\right) \Rightarrow f\,'(0) = e^{0^2}\left(1+2\cdot 0^2\right) = 1$$

El valor de la pendiente en el punto $x = 0$ es 1.

b) Determinamos la integral usando el cambio de variable.

$$\int xe^{x^2} dx = \left\{\begin{array}{c}\text{Cambio de variable}\\ x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt\\ dx = \dfrac{dt}{2x}\end{array}\right\} = \int \cancel{x} e^t \frac{dt}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t =$$

$$= \left\{\begin{array}{c}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ x^2 = t\end{array}\right\} = \boxed{\frac{e^{x^2}}{2} + K}$$

c) Es una integral casi inmediata, falta ajustar un poco.

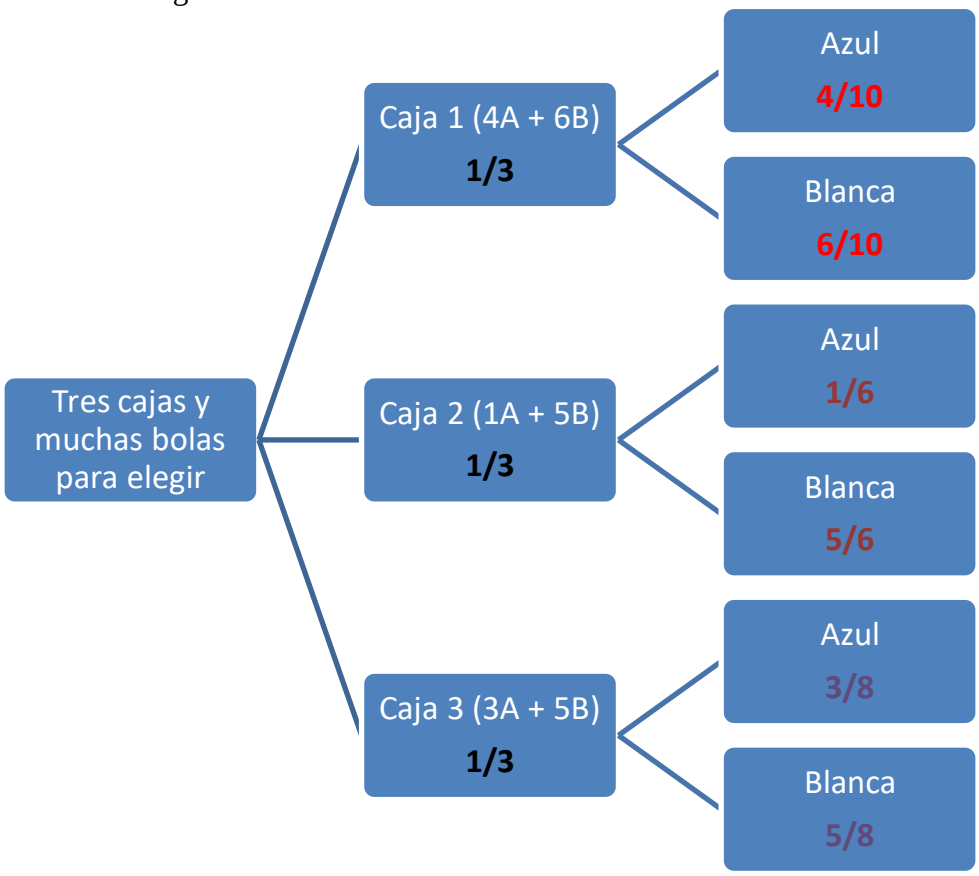
$$\int_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2} dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{e^{1^2}}{2}\right] - \left[\frac{e^{0^2}}{2}\right] = \boxed{\frac{e-1}{2}}$$

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Se dispone de tres cajas con bolas de distintos colores. La primera contiene 10 bolas: 4 azules y 6 blancas. En la segunda caja hay una única bola azul y 5 blancas. En la tercera caja tenemos 3 bolas azules y 5 blancas. Cogemos una bola al azar de cualquiera de las cajas:

a) Calcule la probabilidad de que la bola cogida sea azul. (1 punto)

b) Si la bola elegida es blanca, calcule la probabilidad de que estuviera en la primera caja. (1,5 puntos)

Construimos un diagrama de árbol.



Llamamos A = Sacar bola azul, B = Sacar bola blanca, C1 = Elegir la caja 1, C2 = Elegir la caja 2, C3 = Elegir la caja 3

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total y las probabilidades que aparecen en el diagrama de árbol.

$$P(A) = P(\mathrm{C1})P(A/\mathrm{C1}) + P(\mathrm{C2})P(A/C2) + P(\mathrm{C3})P(A/C3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} = \boxed{\frac{113}{360} \simeq 0.314}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C1/B) = \frac{P(C1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C1)P(B/C1)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}}{1 - \frac{113}{360}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{247}{360}} = \boxed{\frac{72}{247} \simeq 0.29}$$

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos) Dados dos sucesos de un experimento aleatorio A y B tales que $P(\overline{A}) = 0,45$, $P(B) = 0,35$ y $P(A \cup B) = 0,7$. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(A)$. (0,5 puntos)

b) $P(A \cap B)$. (1 punto)

c) $P(B/A)$. (0,5 puntos)

d) $P(\overline{A}/\overline{B})$. (0,5 puntos)

a) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,45 = \boxed{0.55}$

b)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,7 = 0,55 + 0,35 - P(A \cap B)$

$\boxed{P(A \cap B) = 0,55 + 0,35 - 0,7 = 0,2}$

c)

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,55} = \boxed{\frac{4}{11} \simeq 0,366}$$

d)

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - 0,7}{1 - 0,35} = \boxed{\frac{6}{13} \simeq 0,46}$$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EBAU2021 - **JUNIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ ax+2z=0 \\ ay-z=a \end{array}\right\}$$

Resolverlo para a = 1.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) En un terreno en la huerta de Beniel se quieren plantar dos tipos distintos de naranjos: A y B. No se puede cultivar más de 8 hectáreas con naranjos de tipo A ni más de 10 hectáreas con naranjos de tipo B. Cada hectárea de naranjos de tipo A necesita 4 m^3 de agua anuales y cada una de tipo B, 3 m^3. Se dispone anualmente de 45 m^3 de agua. Cada hectárea de tipo A requiere una inversión de 500 € y cada una de tipo B, 225 €. Se dispone de 4575 € para realizar dicha inversión. Si cada hectárea de naranjos de tipo A y B producen, respectivamente, 500 y 300 kilos anuales de naranjas:

a) Calcular las hectáreas de cada tipo de naranjo que se deben planta para maximizar la producción de naranjas. Razone la respuesta.
b) Obtener la producción máxima.

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) El coste de producción de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x)=\frac{1}{4}x^2+35x+25$ y su precio de venta es: $p=50-\frac{x}{4}$ euros. Hallar:

a) El número de unidades que debe venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.
b) El precio al que deben venderse las unidades obtenidas en el apartado a).
c) El beneficio máximo.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=ax^3+bx+c$, calcular el valor de a, b y c para que:

a) La función pase por el origen de coordenadas y tenga en el punto (1, –1) un mínimo local.
b) Para los valores obtenidos en el apartado anterior, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x)=-x^2+4x+3$ y la recta $g(x)=3+x$. Calcular su área.

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto $x = 0$. (1 punto).

b) Calcular $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ (1 punto).

c) Calcular $\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}dx$ (0,5 puntos)

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) En un viaje de estudios el 52 % de los jóvenes son hombres. De ellos el 35 % son rubios, así como el 40 % de las mujeres. Si elegimos a un estudiante al azar:

a) Calcule la probabilidad de que sea rubio. (1 punto)

b) Sabiendo que NO es rubio, ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1,5 puntos)

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos) Alex y Fran son dos amigos que practican asiduamente en las pistas el baloncesto. La probabilidad de que Alex enceste un tiro libre es del 65 % y de que lo haga Fran es del 48 %. Dado que los dos sucesos son independientes, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos al lanzar un tiro libre:

a) Ambos encesten un tiro libre. (1 punto)

b) Solo Alex encesta la pelota. (1 punto)

c) Al menos uno de ellos encesta la pelota. (0,5 puntos)

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ ax+2z=0 \\ ay-z=a \end{array}\right\}$$

Resolverlo para a = 1.

La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & -1 & a \end{array}\right)$.

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix}=0+0+a^2-0+3a-2a=a^2+a$.

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0\Rightarrow a^2+a=0\Rightarrow a(a+1)=0\Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ o \\ a+1=0\rightarrow \boxed{a=-1} \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a\neq 0 \quad y \quad a\neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=0$

En este caso el sistema queda muy sencillo, lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ 2z=0 \\ z=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ \boxed{z=0} \end{array}\right\}\Rightarrow x+3y=5\Rightarrow \boxed{x=5-3y}$$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones):
$x=5-3t; \quad y=t; \quad z=0; \quad t\in\mathbb{R}$

CASO 3. $a=-1$

En este caso el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=5 \\ -x\quad +2z=0 \\ -y\ -z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} + \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ -x\quad +2z=0 \\ x\ +3y\ +z=5 \\ \hline 3y\ +3z=5 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+z=5 \\ 3y+3z=5 \\ -y\ -z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} + 3 \cdot \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \\ 3y\ +3z=5 \\ -3y\ -3z=-3 \\ \hline 0\ =2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+z=5 \\ 3y+3z=5 \\ 0=2 \end{array}\right\} \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución).

Lo resolvemos para $a = 1$. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1)

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ x+2z=0 \\ y-z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ x+2z=0 \\ y=1+z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3(1+z)+z=5 \\ x+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3+3z+z=5 \\ x+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+4z=2 \\ x+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+4z=2 \\ x=-2z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2z+4z=2 \Rightarrow 2z=2 \Rightarrow \boxed{z=1} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x=-2\cdot 1=-2} \\ \boxed{y=1+1=2} \end{array}\right.$$

La solución es $x = -2; y = 2; z = 1$.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) En un terreno en la huerta de Beniel se quieren plantar dos tipos distintos de naranjos: A y B. No se puede cultivar más de 8 hectáreas con naranjos de tipo A ni más de 10 hectáreas con naranjos de tipo B. Cada hectárea de naranjos de tipo A necesita 4 m^3 de agua anuales y cada una de tipo B, 3 m^3. Se dispone anualmente de 45 m^3 de agua. Cada hectárea de tipo A requiere una inversión de 500 € y cada una de tipo B, 225 €. Se dispone de 4575 € para realizar dicha inversión. Si cada hectárea de naranjos de tipo A y B producen, respectivamente, 500 y 300 kilos anuales de naranjas:

a) Calcular las hectáreas de cada tipo de naranjo que se deben planta para maximizar la producción de naranjas. Razone la respuesta.
b) Obtener la producción máxima.

Es un problema de programación lineal. Llamamos x = número de hectáreas para los naranjos tipo A e y = número de hectáreas para los naranjos tipo B.

Hacemos una tabla para establecer las expresiones a manejar en las inecuaciones.

	AGUA	INVERSIÓN	PRODUCCIÓN
Nº hectáreas A (x)	4x	500x	500x
Nº hectáreas B (y)	3y	225y	300y
TOTALES	$4x+3y$	$500x+225y$	$500x+300y$

Deseamos maximizar la producción $f(x,y)=500x+300y$.

Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

"*Se dispone anualmente de 45 m^3 de agua*" → $4x+3y\le 45$

"*Se dispone de 4575 € para realizar dicha inversión*" → $500x+225y\le 4575$

"*No se puede cultivar más de 8 hectáreas con naranjos de tipo A*" → $0\le x\le 8$

"*No se puede cultivar más de 10 hectáreas con naranjos de tipo B*" → $0\le y\le 10$

La región factible es la zona del plano que cumple el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+3y\le 45 \\ 500x+225y\le 4575 \\ 0\le x\le 8 \\ 0\le y\le 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+3y\le 45 \\ 20x+9y\le 183 \\ 0\le x\le 8 \\ 0\le y\le 10 \end{array}\right\}$$

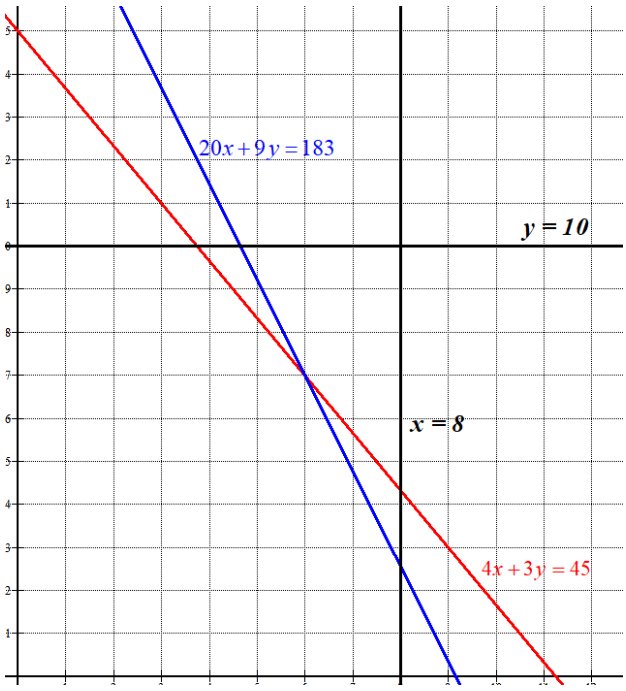
Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$4x+3y=45$

x	$y=\dfrac{45-4x}{3}$
0	15
15	–5

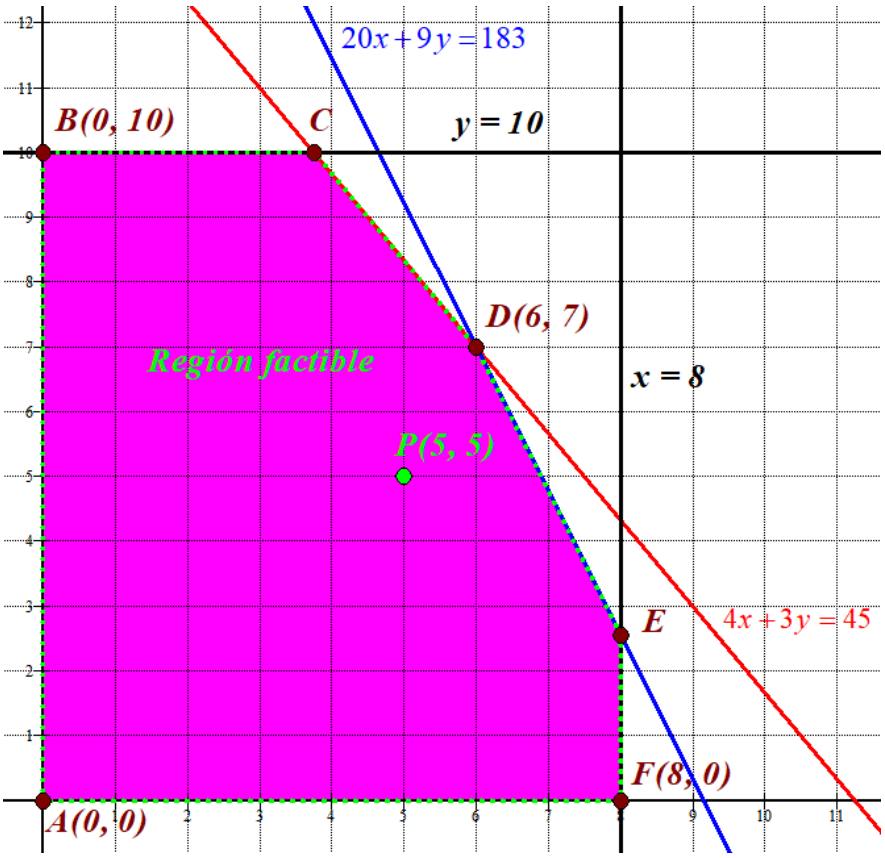
$20x+9y=183$

x	$y=\dfrac{183-20x}{9}$
6	7
0	$183/9=2,33$



La región factible es una región del primer cuadrante que cumple $\left.\begin{array}{l} 4x+3y\le 45 \\ 20x+9y\le 183 \\ 0\le x\le 8 \\ 0\le y\le 10 \end{array}\right\}$

Entonces es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas **azul**, roja y la recta horizontal $y = 10$ y a la izquierda de la recta vertical $x = 8$.
Coloreo de rosa la región factible. Coloreamos dicha región.



Comprobamos que el punto P(5, 5) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 4\cdot 5+3\cdot 5\le 45 \\ 20\cdot 5+9\cdot 5\le 183 \\ 0\le 5\le 8 \\ 0\le 5\le 10 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 20+15\le 45 \\ 100+40\le 183 \\ 0\le 5\le 8 \\ 0\le 5\le 10 \end{array}\right\}$$ Se cumplen todas y la región factible es correcta.

Conozco las coordenadas de los vértices A(0,0), B(0,10), D(6,7) y F(8, 0), determinamos las coordenadas del resto resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$\text{C} \rightarrow \begin{cases} y=10 \\ 4x+3y=45 \end{cases} \Rightarrow 4x+30=45 \Rightarrow x=\frac{15}{4} \Rightarrow C\left(\frac{15}{4},10\right)$$

$$\text{E} \rightarrow \begin{cases} x=8 \\ 20x+9y=183 \end{cases} \Rightarrow 160+9y=183 \Rightarrow y=\frac{23}{9} \Rightarrow E\left(8,\frac{23}{9}\right)$$

Valoramos la función producción $f(x,y)=500x+300y$ en cada uno de los vértices en busca del máximo valor.

A(0, 0) → $f(0,0)=0$ kg

B(0, 10) → $f(0,10)=3000$ kg

$C\left(\frac{15}{4},10\right)$ → $f\left(\frac{15}{4},10\right)=500\frac{15}{4}+300\cdot 10=4875$ kg

D(6, 7) → $f(6,7)=500\cdot 6+300\cdot 7=5100$ kg ¡Máximo!

$E\left(8,\frac{23}{9}\right)$ → $f\left(8,\frac{23}{9}\right)=500\cdot 8+300\frac{23}{9}=\frac{14300}{3}\approx 4766$ kg

F(8, 0) → $f(8,0)=4000$ kg

La máxima producción que se puede obtener sometiéndose a las restricciones del ejercicio son 5100 kg de naranjas. Obteniéndose en el punto D(6, 7).
Se obtiene la máxima producción con 6 hectáreas del naranjo tipo A y 7 hectáreas del naranjo tipo B.

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) El coste de producción de *x* unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x)=\frac{1}{4}x^2+35x+25$ y su precio de venta es: $p=50-\frac{x}{4}$ euros. Hallar:

a) El número de unidades que debe venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.
b) El precio al que deben venderse las unidades obtenidas en el apartado a).
c) El beneficio máximo.

El beneficio es la diferencia entre ingresos y costes. Al vender *x* unidades y cada una al precio de $p=50-\frac{x}{4}$ se obtienen unos ingresos de $I(x)=p\cdot x=\left(50-\frac{x}{4}\right)x=50x-\frac{x^2}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} I(x)=50x-\frac{x^2}{4} \\ C(x)=\frac{1}{4}x^2+35x+25 \\ B(x)=I(x)-C(x) \end{array}\right\} \Rightarrow B(x)=50x-\frac{x^2}{4}-\left(\frac{1}{4}x^2+35x+25\right)=50x-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x^2-35x-25$$

$$B(x)=-\frac{2}{4}x^2+15x-25 \Rightarrow B(x)=-\frac{1}{2}x^2+15x-25$$

Derivamos la función beneficio en busca de los puntos críticos.

$$B(x)=-\frac{1}{2}x^2+15x-25 \Rightarrow B'(x)=-\frac{2}{2}x+15=-x+15$$

$$B'(x)=0 \Rightarrow -x+15=0 \Rightarrow \boxed{x=15}$$

Comprobamos con la derivada segunda si este valor corresponde a un máximo o a un mínimo local.

$$\left.\begin{array}{r} B'(x)=-x+15 \Rightarrow B''(x)=-1 \\ x=15 \end{array}\right\} \Rightarrow B''(15)=-1<0$$

La función Beneficio tiene un máximo relativo en *x = 15* unidades.

a) Deben venderse 15 unidades para obtener un beneficio máximo.

b) El precio es $p=50-\frac{x}{4}=50-\frac{15}{4}=\frac{185}{4}=46.25$ euros.

c) Si *x = 15* → el beneficio es $B(15)=-\frac{1}{2}15^2+15\cdot 15-25=87.5€$

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=ax^3+bx+c$, calcular el valor de a, b y c para que:
a) La función pase por el origen de coordenadas y tenga en el punto (1, –1) un mínimo local.
b) Para los valores obtenidos en el apartado anterior, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

a) La función pasa por el punto O(0, 0) y por (1,–1).

$$f(x)=ax^3+bx+c \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \rightarrow 0+0+c=0 \Rightarrow \boxed{c=0} \\ f(1)=-1 \rightarrow a+b+c=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a+b=-1}$$

Si la función tiene un mínimo en *x = 1* entonces la derivada se anula en dicho valor.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx+c \Rightarrow f\,'(x)=3ax^2+b \\ x=1 \text{ es mínimo } \Rightarrow f\,'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a\cdot 1^2+b=0 \Rightarrow \boxed{3a+b=0}$$

Unimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=-1 \\ 3a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-1-a \\ 3a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a-1-a=0 \Rightarrow 2a-1=0 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{b=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}}$$

Los valores buscados son $a=\frac{1}{2}$; $b=-\frac{3}{2}$ y $c=0$

b) Para $a=\frac{1}{2}$; $b=-\frac{3}{2}$ y $c=0$ la función queda $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x$
Usamos la derivada para estudiar su crecimiento y decrecimiento.

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x \Rightarrow f\,'(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}$$

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x^2=\frac{3}{3}=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Los puntos críticos son *x = –1* y *x = 1*. Estudiamos lo que ocurre antes, entre y después de dichos valores.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale $f\,'(-2)=\frac{3}{2}(-2)^2-\frac{3}{2}=6-\frac{3}{2}=4.5>0$ y la función crece en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f\,'(0)=\frac{3}{2}0^2-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}<0$ y la función decrece en $(-1,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f\,'(2)=\frac{3}{2}2^2-\frac{3}{2}=4.5>0$ y la función crece en $(1,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(-1,1)$.

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x)=-x^2+4x+3$ y la recta $g(x)=3+x$. Calcular su área.

Averiguamos donde coinciden las gráficas de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=-x^2+4x+3 \\ g(x)=3+x \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow 3+x=-x^2+4x+3 \Rightarrow -x^2+4x+3-3-x=0 \Rightarrow -x^2+3x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(-x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ o \\ -x+3=0 \rightarrow \boxed{x=3} \end{cases}$$

El recinto limitado por las dos gráficas está entre $x = 0$ y $x = 3$.

Para representar la parábola necesitamos el vértice y lo obtenemos con la derivada, pues es un punto crítico de la función.

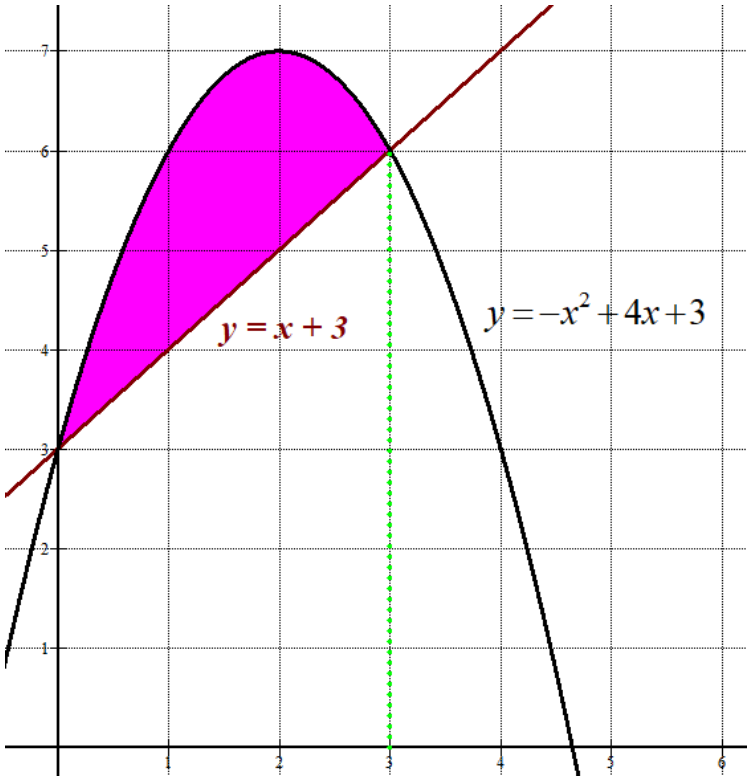
$$f(x)=-x^2+4x+3 \Rightarrow f'(x)=-2x+4$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -2x+4=0 \Rightarrow -2x=-4 \Rightarrow x=\frac{-4}{-2}=2$$

El vértice está en $x = 2$.
Hacemos una tabla de valores

x	$y=-x^2+4x+3$
0	3
1	$-1+4+3=6$
2	$-4+8+3=7$ Vértice
3	$-9+12+3=6$

x	$y=3+x$
0	3
3	6



El área se calcula con la integral definida entre $x = 0$ y $x = 3$ de la diferencia entre las dos funciones (superior – inferior).

$$Área=\int_0^3 -x^2+4x+3-(x+3)\,dx=\int_0^3 -x^2+3x\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right]_0^3=$$

$$=\left[-\frac{3^3}{3}+3\frac{3^2}{2}\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+3\frac{0^2}{2}\right]=-9+\frac{27}{2}=\boxed{4.5\ u^2}$$

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f(x)* en el punto *x = 0* (1 punto).

b) Calcular $\int \dfrac{2x}{x^2+1}dx$ (1 punto).

c) Calcular $\int_1^2 \dfrac{2x}{x^2+1}dx$ (0,5 puntos)

a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica en *x = 0* tiene ecuación $y-f(0)=f\,'(0)(x-0)$.

$$f(0)=\frac{2\cdot 0}{0^2+1}=0$$

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{2\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f\,'(0)=\frac{-2\cdot 0^2+2}{\left(0^2+1\right)^2}=\frac{2}{1}=2$$

La recta tangente tiene ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} y-f(0)=f\,'(0)(x-0)\\ f(0)=0\\ f\,'(0)=2\end{array}\right\}\Rightarrow y-0=2(x-0)\Rightarrow \boxed{y=2x}$$

b) Aplicamos un cambio de variable.

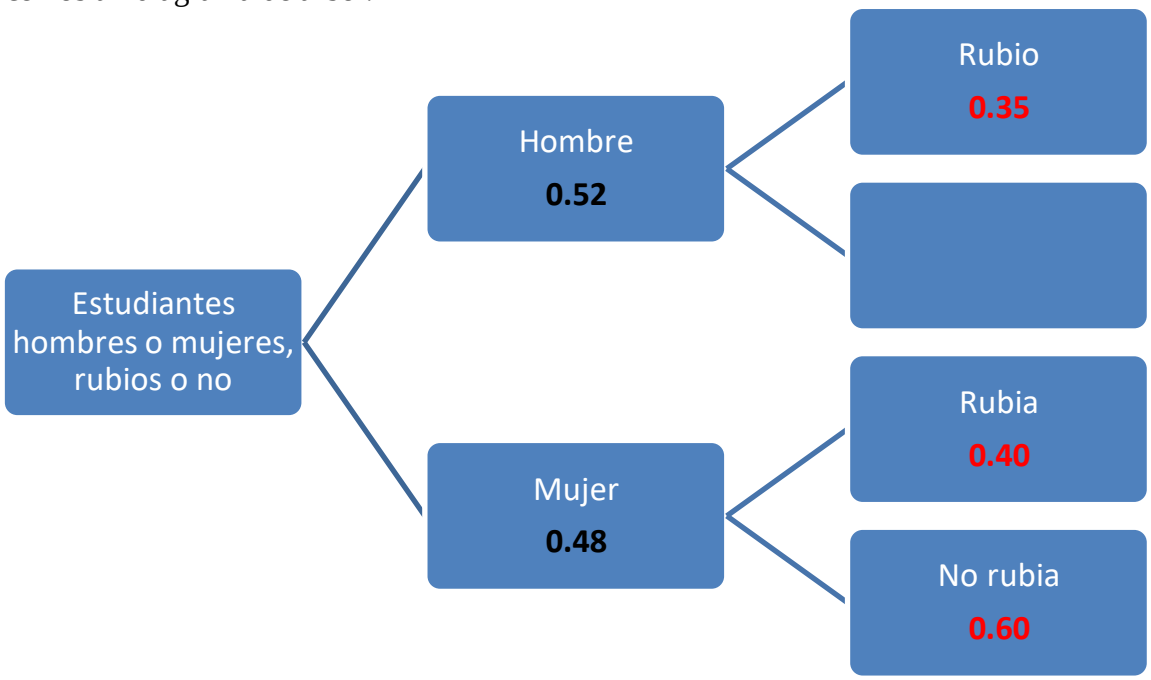
$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx=\int \frac{1}{x^2+1}2xdx\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ x^2+1=t\Rightarrow 2xdx=dt\end{array}\right\}=\int\frac{1}{t}dt=\ln t=\boxed{\ln\left(x^2+1\right)+K}$$

c) Aplicamos lo obtenido en el apartado anterior.

$$\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}dx=\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_1^2=\left[\ln\left(2^2+1\right)\right]-\left[\ln\left(1^2+1\right)\right]=\boxed{\ln 5-\ln 2}$$

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) En un viaje de estudios el 52 % de los jóvenes son hombres. De ellos el 35 % son rubios así como el 40 % de las mujeres. Si elegimos a un estudiante al azar:
a) Calcule la probabilidad de que sea rubio. (1 punto)
b) Sabiendo que NO es rubio, ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1,5 puntos)

Hacemos un diagrama de árbol.



Llamemos H = "Ser hombre" y R = "Ser rubio o rubia".
Los sucesos contrarios son $\overline{H}$ = "Ser mujer" y $\overline{R}$ = "No ser rubio, ni rubia"

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R)=P(H\cap R)+P(\overline{H}\cap R)=P(H)P(R/H)+P(\overline{H})P(R/\overline{H})=$$
$$=0.52\cdot 0.35+0.48\cdot 0.4=\boxed{0.374}$$

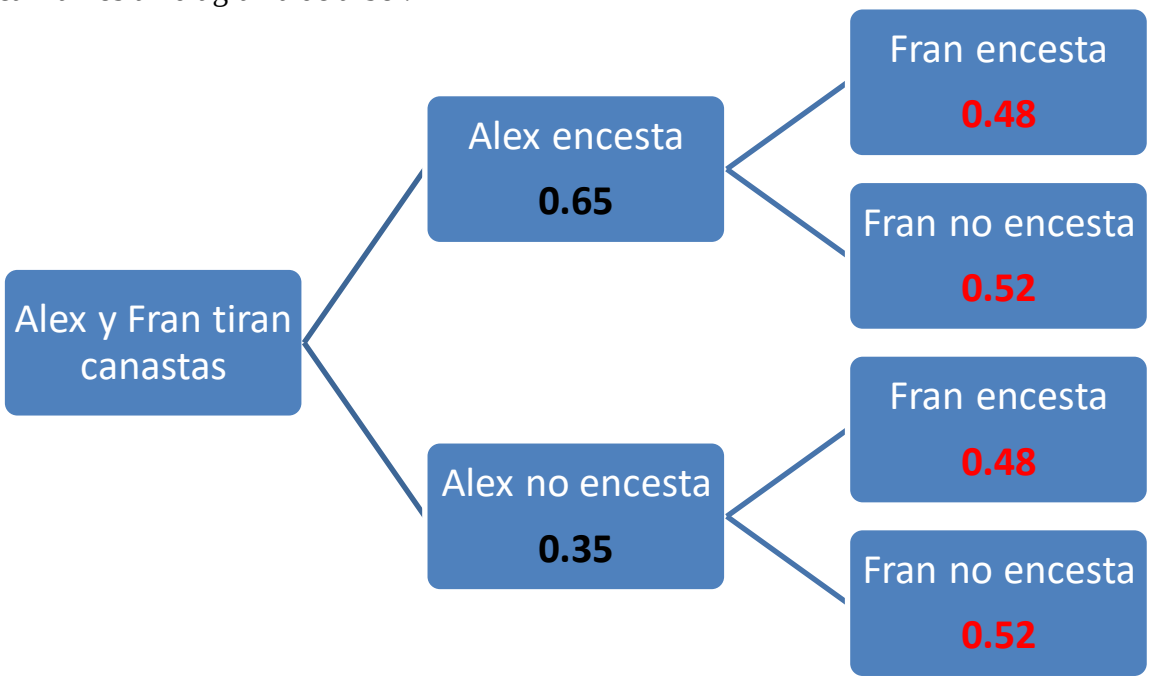
b) Es una probabilidad a posteriori que resolvemos utilizando el teorema de Bayes.

$$P(\overline{H}/\overline{R})=\frac{P(\overline{H}\cap\overline{R})}{P(\overline{R})}=\frac{P(\overline{H})P(\overline{R}/\overline{H})}{1-P(R)}=\frac{0.48\cdot 0.6}{1-0.374}=\boxed{\frac{144}{313}=0.46}$$

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos) Alex y Fran son dos amigos que practican asiduamente en las pistas el baloncesto. La probabilidad de que Alex enceste un tiro libre es del 65 % y de que lo haga Fran es del 48 %. Dado que los dos sucesos son independientes, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos al lanzar un tiro libre:

a) Ambos encesten un tiro libre. (1 punto)
b) Solo Alex encesta la pelota. (1 punto)
c) Al menos uno de ellos encesta la pelota. (0,5 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



Al ser sucesos independientes la probabilidad de encestar de Fran es igual en las dos ramas.

a) Que ambos encesten solo ocurre en la rama superior del árbol, por lo que:

$$P(\text{Ambos encestan}) = P(\text{Encesta Alex})\,P(\text{Encesta Fran}) = 0.65 \cdot 0.48 = \boxed{0.312}$$

b) Que solo Alex encesta significa que enceste Alex y no enceste Fran. Esto solo ocurre en la rama segunda.

$$P(\text{Sólo encesta Alex}) = P(\text{Encesta Alex y no encesta Fran}) =$$
$$= P(\text{Encesta Alex})\,P(\text{No encesta Fran}) = 0.65 \cdot 0.52 = \boxed{0.338}$$

c) Que al menos uno de ellos enceste se cumple en todas las ramas menos en la inferior donde no encesta ninguno de los dos. Por ello lo hacemos con el suceso contrario que es más sencillo.

$$P(\text{Al menos uno de ellos encesta}) = 1 - P(\text{Ninguno de ellos encesta}) =$$
$$= 1 - P(\text{No encesta Alex})\,P(\text{No encesta Fran}) = 1 - 0.35 \cdot 0.52 = \boxed{0.818}$$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 5 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2 puntos. Si se responde a más de 5 preguntas, sólo se corregirán las cinco primeras que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

a) Calcule $(A-B)$ (0,5 puntos)

b) Calcule $(A-B)^{-1}$ (0,5 puntos)

c) Hallar la matriz X que verifica $AX-A=BX+B$ (1 punto)

CUESTIÓN 2. (2 puntos) Sea S la región del plano definida por las inecuaciones.

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\geq 2x-4,\ y\leq x-1,\ 2y\geq x,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$$

a) Representar la región S y obtener sus vértices.

b) Maximizar la función $f(x,y)=x-3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el máximo.

c) Minimizar la función $f(x,y)=x-3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el mínimo.

CUESTIÓN 3. Se ha estimado en una empresa que su beneficio en los próximos 10 años viene dado por la función: $B(t)=\begin{cases}at-t^2 & si \quad 0\leq t\leq 6\\ 2t & si \quad 6<t\leq 10\end{cases}$ siendo t el tiempo transcurrido en años.

a) Calcular el valor del parámetro a para que la función de beneficios sea continua. (0,5 puntos)

b) Para $a = 8$ represente su gráfica y diga en qué intervalo de tiempo la función crece o decrece. (1 punto)

c) Para $a = 8$ indique en qué momento, de los 6 primeros años, se obtiene el máximo beneficio y cuál es su valor. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 4. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=(x^2-2)\ln x$ (1 punto)

b) $f(x)=e^{4x^3+2}$ (1 punto)

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

CUESTIÓN 5. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x)=4-x^2$ y la recta $g(x)=2+x$. Calcular su área.

CUESTIÓN 6. (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la parábola $f(x)=-x^2+6x$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

CUESTIÓN 7. Entre los alumnos ERASMUS que han llegado este curso a la Universidad de Murcia el 75% hablan inglés, el 50% hablan francés y un 5% no hablan ninguno de estos dos idiomas. Elegido un alumno al azar:

a) Calcule la probabilidad de que hable inglés o francés. (0,5 puntos)
b) Calcule la probabilidad de que hable inglés y francés. (0,5 puntos)
c) Calcule la probabilidad de que, hablando inglés, no hable francés. (1 punto)

CUESTIÓN 8. En una empresa multinacional el 60% de las reuniones se realizan a través de videoconferencia. El 40% de los empleados que asisten a estas videoconferencias son de países de la Unión Europea, mientras que en las reuniones presenciales solo el 20% son trabajadores que no pertenecen a la Unión Europea. Si elegimos un trabajador al azar:

a) Calcule la probabilidad de que pertenezca a la Unión Europea (1 punto)
b) Sabiendo que el trabajador es de la Unión Europea, ¿Cuál es la probabilidad de que haya asistido a la reunión por videoconferencia (1 punto)

CUESTIÓN 9. (2 puntos) El precio medio de los aspiradores de una gran superficie se distribuye según una distribución normal de desviación típica 100 €. Se toma una muestra aleatoria de 9 aspiradoras de distintas marcas obteniendo un precio medio de 178.89 €. Determine un intervalo de confianza al 99% para el precio medio.
Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 99% el error cometido de estimación del precio no supere los 50 €.

CUESTIÓN 10. (2 puntos) Se sabe que el peso de los tarros de cacao de un supermercado es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 1,8 gramos. Se toma una muestra aleatoria de 9 tarros y se obtiene un peso medio de 89 gramos. Obtenga un intervalo de confianza, al 95% para la media de esta población.

¿Cuál será el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido de estimación del peso no supere 1 gramo, a un nivel de confianza del 95%?

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

a) Calcule $(A-B)$ (0,5 puntos)

b) Calcule $(A-B)^{-1}$ (0,5 puntos)

c) Hallar la matriz X que verifica $AX-A=BX+B$ (1 punto)

a) $A-B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

b) Veamos si la matriz tiene inversa viendo si su determinante es no nulo.

$$|A-B|=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

El determinante es no nulo y existe su inversa.

$$(A-B)^{-1}=\frac{Adj(A-B)^{T}}{|A-B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}}{-2}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ -1 & 1/2\end{pmatrix}$$

c) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX-A=BX+B\Rightarrow AX-BX=A+B\Rightarrow (A-B)X=A+B\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A-B)^{-1}(A-B)X=(A-B)^{-1}(A+B)\Rightarrow X=(A-B)^{-1}(A+B)$$

Sustituimos el valor de las matrices y operamos hasta obtener la expresión de la matriz X.

$$X=(A-B)^{-1}(A+B)$$
$$X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right]$$
$$X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$
$$X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 2-4\end{pmatrix}$$
$$X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & -2\end{pmatrix}$$
$$\boxed{X=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}}$$

CUESTIÓN 2. (2 puntos) Sea S la región del plano definida por las inecuaciones.

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\geq 2x-4,\ y\leq x-1,\ 2y\geq x,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$$

a) Representar la región S y obtener sus vértices.

b) Maximizar la función $f(x,y)=x-3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el máximo.

c) Minimizar la función $f(x,y)=x-3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el mínimo.

a) Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones y que delimitan la región S.

$y=2x-4$

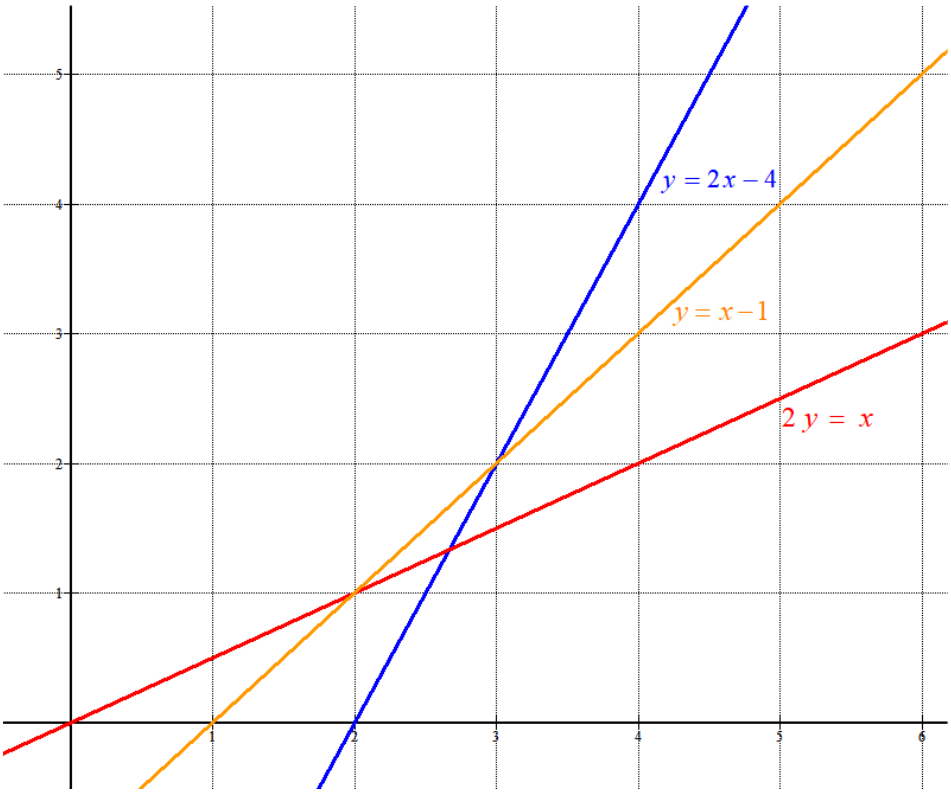
x	$y=2x-4$
2	0
4	4

$y=x-1$

x	$y=x-1$
0	1
2	1

$2y=x$

x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
2	1

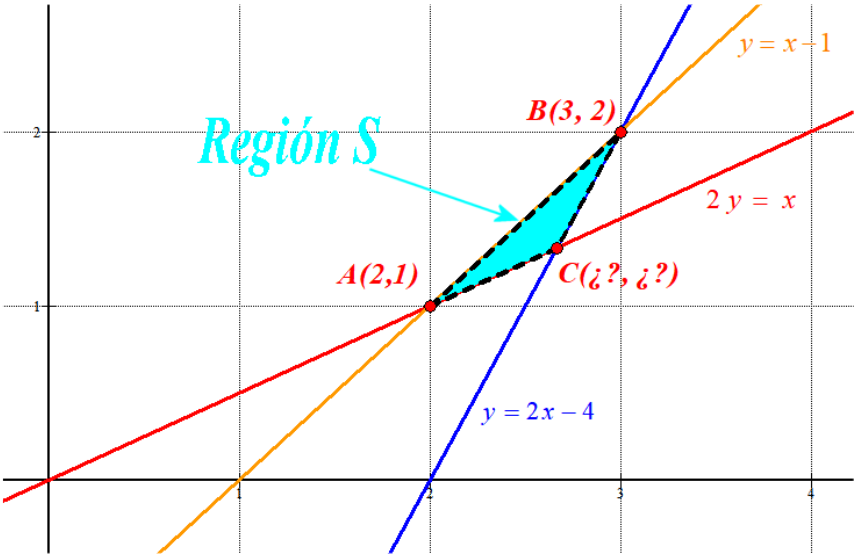


$x\geq 0,\ y\geq 0$

Primer cuadrante

Por las restricciones impuestas en el ejercicio la región S está situada por encima de la recta azul ($y\geq 2x-4$), por debajo de la recta naranja ($y\leq x-1$) y por encima de la recta roja ($2y\geq x$).

La región S es la pintada de azul claro.



Las coordenadas de los vértices A y B se aprecian en el dibujo: A(2, 1), B(3,2).

Las coordenadas del vértice C lo obtenemos resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x - 4 \\ 2y = x \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2x-4) = x \Rightarrow 4x - 8 = x \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3} \Rightarrow 2y = \frac{8}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3} \Rightarrow C\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

b) Valoramos la función $f(x, y) = x - 3y$ en cada vértice.

- A(2, 1) → $f(2,1) = 2 - 3 = -1$ ¡Máximo!
- B(3,2) → $f(3,2) = 3 - 6 = -3$
- $C\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$ → $f(x, y) = \frac{8}{3} - 3\frac{4}{3} = \frac{8-12}{3} = -\frac{4}{3}$

El máximo valor que alcanza la función en la región S es –1 en el punto A(2, 1)**.**

c) Con lo obtenido en el apartado anterior podemos afirmar que el valor mínimo que alcanza la función en la región S es –3 en el punto B(3, 2).

CUESTIÓN 3. Se ha estimado en una empresa que su beneficio en los próximos 10 años viene dado por la función: $B(t)=\begin{cases} at-t^2 & si \quad 0\le t\le 6 \\ 2t & si \quad 6<t\le 10 \end{cases}$ siendo *t* el tiempo transcurrido en años.

a) Calcular el valor del parámetro *a* para que la función de beneficios sea continua. (0,5 puntos)
b) Para *a = 8* represente su gráfica y diga en qué intervalo de tiempo la función crece o decrece. (1 punto)
c) Para *a = 8* indique en qué momento, de los 6 primeros años, se obtiene el máximo beneficio y cuál es su valor. (0,5 puntos)

a) Para que sea continua debe serlo en *x = 6* y debe cumplir:

- Existe $B(6)=6a-6^2=6a-36$
- Existe $\lim_{t\to 6} B(t)=\begin{cases} \lim_{t\to 6^-} at-t^2=6a-36 \\ \lim_{t\to 6^+} 2t=12 \end{cases} \Rightarrow 12=6a-36 \Rightarrow 6a=48 \Rightarrow a=8$
- Son iguales → $\lim_{t\to 6} B(t)=B(6)=12$

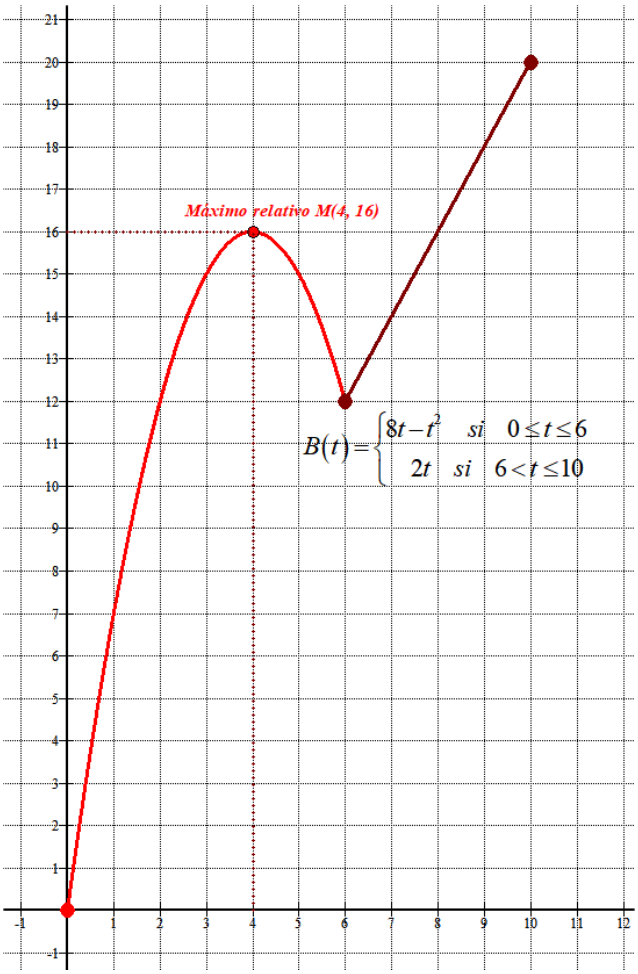
Tomando $a = 8$ se cumplen las tres condiciones y la función *B(t)* es continua.

b) Para $a = 8$ la función es $B(t)=\begin{cases} 8t-t^2 & si \quad 0\le t\le 6 \\ 2t & si \quad 6<t\le 10 \end{cases}$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

t	$B(t)=8t-t^2$
0	0
2	12
4	16
6	12

t	$B(t)=2t$
6	12 Punto vacio
10	20



Observando la gráfica tenemos que la función crece del año *0* hasta el 4º año y entre el año 6º y el año 10º.
Decrece entre el año *4º* y el 6º.

c) Para $a = 8$ observamos en la gráfica que en los 6 primeros años (la parábola) el máximo beneficio se obtiene en el año 4, siendo este beneficio de 16.

$$B(t)=8t-t^2 \Rightarrow B'(t)=8-2t \\ B'(t)=0 \Rightarrow 8-2t=0 \Rightarrow 8=2t \Rightarrow t=4$$

CUESTIÓN 4. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\left(x^2-2\right)\ln x$ (1 punto)

b) $f(x)=e^{4x^3+2}$ (1 punto)

a) Aplicamos la fórmula de la derivada de un producto de funciones.

$$f(x)=\left(x^2-2\right)\ln x \Rightarrow f\,'(x)=(2x)\ln x+\left(x^2-2\right)\frac{1}{x}=\boxed{2x\ln x+\frac{x^2-2}{x}}$$

b) Aplicamos la regla de la cadena.

$$f(x)=e^{4x^3+2} \Rightarrow \boxed{f\,'(x)=12x^2e^{4x^3+2}}$$

CUESTIÓN 5. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x)=4-x^2$ y la recta $g(x)=2+x$. Calcular su área.

Averiguamos los puntos de corte de ambas gráficas.

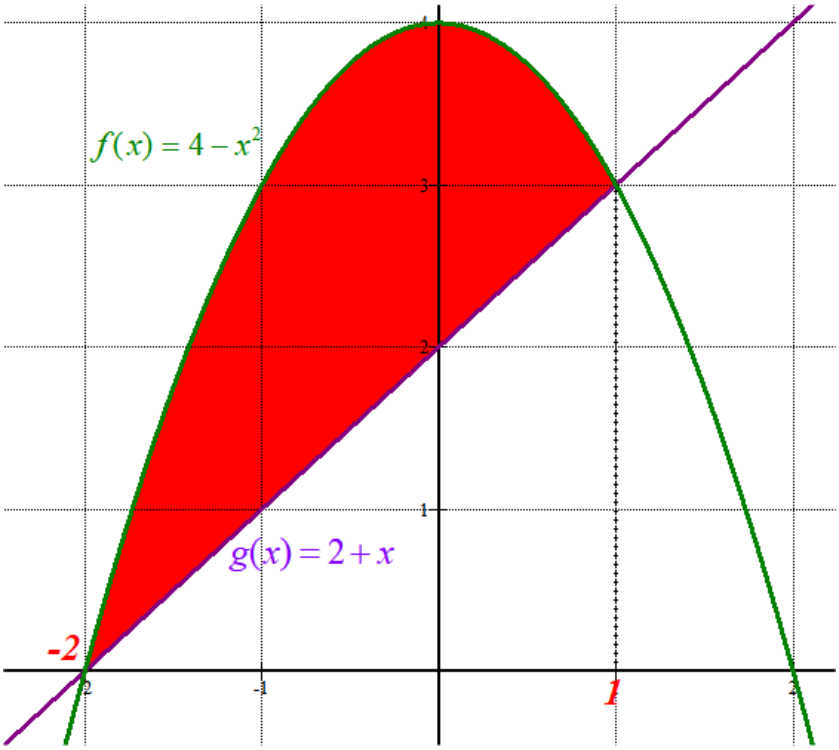
$$f(x)=g(x)\Rightarrow 4-x^2=2+x\Rightarrow 0=x^2+x-2\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{-1+3}{2}=1=x\\ \frac{-1-3}{2}=-2=x\end{cases}$$

Los puntos de corte son $\begin{cases}x=1\Rightarrow f(1)=4-1=3\Rightarrow P(1,3)\\ x=-2\Rightarrow f(-2)=4-4=0\Rightarrow Q(-2,0)\end{cases}$

Completamos la tabla de valores y dibujamos la recta $g(x)=2+x$ y la parábola $f(x)=4-x^2$. Pintamos de rojo la región del plano que buscamos.

x	$y=2+x$
-1	1
0	2

x	$y=4-x^2$
-2	0
-1	3
0	4
1	3



$$Área=\int_{-2}^{1} f(x)-g(x)dx=\int_{-2}^{1} 4-x^2-(2+x)\,dx=\int_{-2}^{1} 4-x^2-2-x dx=\int_{-2}^{1} 2-x^2-x dx=$$

$$=\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}=\left[2-\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right]-\left[2(-2)-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}\right]=$$

$$=2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+4-\frac{8}{3}+2=8-3-\frac{1}{2}=\boxed{4.5\,u^2}$$

CUESTIÓN 6. (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la parábola $f(x) = -x^2 + 6x$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

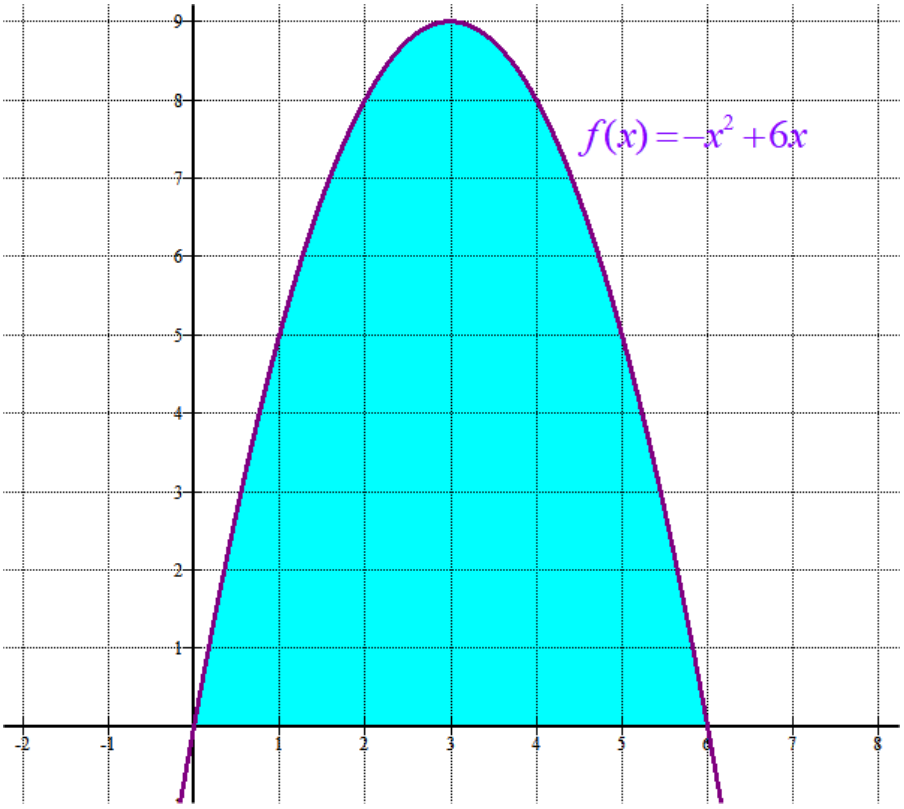
¿Dónde se corta la función $f(x) = -x^2 + 6x$ y el eje OX ($y = 0$)?

$$\left.\begin{matrix} y = -x^2 + 6x \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 = -x^2 + 6x \Rightarrow x(-x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x + 6 = 0 \rightarrow x = 6 \end{cases}$$

La gráfica de la parábola corta el eje OX en los puntos P(0,0) y Q(6,0).

Hacemos primero la gráfica de la parábola y pintamos de azul el recinto del cual queremos determinar el área.

x	$y = -x^2 + 6x$
0	0
2	8
4	8
6	0



$$Área = \int_0^6 -x^2 + 6x\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} \right]_0^6 = \left[-\frac{6^3}{3} + 6\frac{6^2}{2} \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 6\frac{0^2}{2} \right] = -72 + 108 = \boxed{36\,u^2}$$

CUESTIÓN 7. Entre los alumnos ERASMUS que han llegado este curso a la Universidad de Murcia el 75% hablan inglés, el 50% hablan francés y un 5% no hablan ninguno de estos dos idiomas. Elegido un alumno al azar:

a) Calcule la probabilidad de que hable inglés o francés. (0,5 puntos)
b) Calcule la probabilidad de que hable inglés y francés. (0,5 puntos)
c) Calcule la probabilidad de que, hablando inglés, no hable francés. (1 punto)

Realizamos una tabla de contingencia que nos determine el resto de información.

	Habla francés	No habla francés	
Habla inglés			**75**
No habla inglés		**5**	
	50		**100**

Completamos la tabla.

	Habla francés	No habla francés	
Habla inglés	**30**	**45**	**75**
No habla inglés	**20**	**5**	**25**
	50	**50**	**100**

Respondemos a las preguntas utilizando la regla de Laplace y los datos de la tabla.

a) De los 100 alumnos hay 30 que hablan los dos idiomas, 20 que habla francés y no inglés y 45 que habla inglés y no francés.

$$P(\text{Hable inglés o francés}) = \frac{30+20+45}{100} = \boxed{\frac{95}{100} = 0.95}$$

b) De los 100 alumnos hay 30 que hablan los dos idiomas.

$$P(\text{Hable inglés y francés}) = \boxed{\frac{30}{100} = 0.3}$$

c) De los 75 alumnos que hablan inglés solo 45 no habla francés.

$$P(\text{No hable francés / Habla inglés}) = \frac{\text{Nº de alumnos que hablan inglés y no francés}}{\text{Nº alumnos que hablan inglés}} =$$

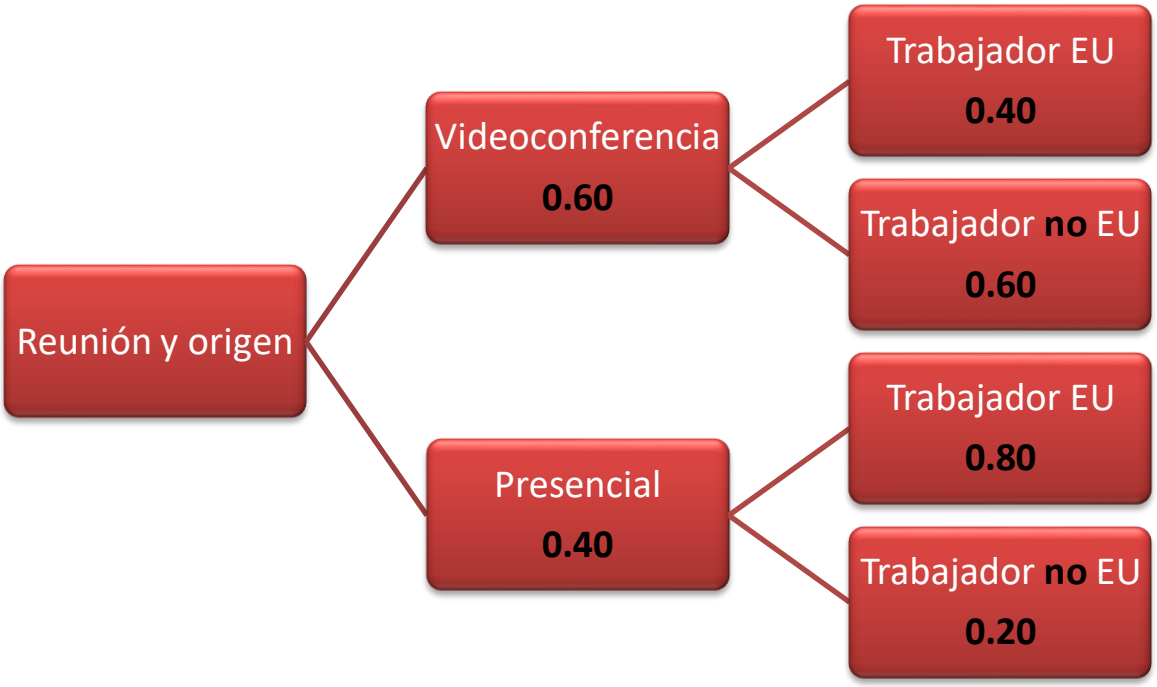
$$= \frac{45}{75} = \boxed{\frac{3}{5} = 0.6}$$

CUESTIÓN 8. En una empresa multinacional el 60% de las reuniones se realizan a través de videoconferencia. El 40% de los empleados que asisten a estas videoconferencias son de países de la Unión Europea, mientras que en las reuniones presenciales solo el 20% son trabajadores que no pertenecen a la Unión Europea. Si elegimos un trabajador al azar:

a) Calcule la probabilidad de que pertenezca a la Unión Europea (1 punto)

b) Sabiendo que el trabajador es de la Unión Europea, ¿Cuál es la probabilidad de que haya asistido a la reunión por videoconferencia (1 punto)

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(Trabajador\ EU) = P(Viedoconferencia)\,P(Trabajador\ EU\ /\ Viedoconferencia) +$$
$$+P(\text{Presencial})\,P(\text{Trabajador EU / Presencial}) =$$
$$= 0.60 \cdot 0.40 + 0.40 \cdot 0.80 = 0.24 + 0.32 = \boxed{0.56}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(Videoconferencia\ /\ Trabajador\ EU) = \frac{P(Videoconferencia\ y\ Trabajador\ EU)}{P(Trabajador\ EU)} =$$
$$= \frac{0.60 \cdot 0.40}{0.56} = \frac{0.24}{0.56} = \boxed{\frac{3}{7} = 0.4286}$$

CUESTIÓN 9. (2 puntos) El precio medio de los aspiradores de una gran superficie se distribuye según una distribución normal de desviación típica 100 €. Se toma una muestra aleatoria de 9 aspiradoras de distintas marcas obteniendo un precio medio de 178.89 €. Determine un intervalo de confianza al 99% para el precio medio.
Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 99% el error cometido de estimación del precio no supere los 50 €.

1ª parte del ejercicio

Sea X la variable aleatoria que mide el precio de un aspirador.
Sabemos que sigue una N(**μ**, 100).

La muestra es de 9 aspiradoras → n = 9, $\bar{x}$ = 178.89 €

Para un nivel de confianza del 99%



$1 - \propto = 0{,}99 \rightarrow \propto = 0{,}01 \rightarrow \propto/2 = 0'005 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2}$ **= 2,575**

El error del intervalo viene dado por la fórmula

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{100}{\sqrt{9}} = 85.8384$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(178.89 - 85.84, 178.89 + 85.84\right) = \left(93.05, 264.73\right)$$

2ª parte del ejercicio

Volvemos a utilizar el que la variable X = N(**μ**, 100) y que para un nivel de confianza del 99% tenemos $z_{\alpha/2}$ = 2,575. Despejamos n en la fórmula del error (50).

$$Error = 50 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{100}{\sqrt{n}} = 50 \Rightarrow 2.575 \cdot \frac{100}{50} = \sqrt{n}$$

$$n = \left(2.575 \cdot \frac{100}{50}\right)^2 = 26.52$$

La muestra debe ser de al menos 27 aspiradores.

CUESTIÓN 10. (2 puntos) Se sabe que el peso de los tarros de cacao de un supermercado es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 1,8 gramos. Se toma una muestra aleatoria de 9 tarros y se obtiene un peso medio de 89 gramos. Obtenga un intervalo de confianza, al 95% para la media de esta población.

¿Cuál será el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido de estimación del peso no supere 1 gramo, a un nivel de confianza del 95%?

X = Peso de un tarro de cacao. X = N(μ, 1.8)
La muestra es de tamaño $n = 9$ y la media muestral es $\bar{x} = 89$ gramos.

Con un nivel de confianza del 95% tenemos que



$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0{,}025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{1.8}{\sqrt{9}} = 1.176$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(89 - 1.176,\ 89 + 1.176\right) = \left(87.824,\ 90.176\right)$$

Con el nivel de confianza del 95% ya hemos calculado $z_{\alpha/2}$ **= 1,96.**
El Error de 1 lo ponemos en la fórmula y despejamos n.

$$Error = 1 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1.8}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 1.96 \cdot 1.8 = \sqrt{n}$$
$$n = \left(1.96 \cdot 1.8\right)^2 = 12{,}4468$$

La muestra debe ser al menos de 13 tarros de cacao.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

EBAU2020 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 5 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2 puntos. Si se responde a más de 5 preguntas, sólo se corregirán las cinco primeras que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$$

Resolverlo para a = 3.

CUESTIÓN 2. (2 puntos) La repoblación forestal de un bosque quemado en un gran incendio se va a llevar a cabo por dos empresas diferentes de jardinería. Hay que repoblar con pinos, eucaliptos y chopos. La primera empresa es capaz de plantar, en una semana, 30 pinos, 20 eucaliptos y 20 chopos. La segunda empres planta 20 pinos, 30 eucaliptos y 20 chopos. El coste semanal se estima en 33.000 € para la primera empresa de jardinería y de 35.000 € para la segunda. Se necesita plantar un mínimo de 60 pinos, 120 eucaliptos y 100 chopos. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

CUESTIÓN 3. (2 puntos) El beneficio semanal obtenido en una empresa de ordenadores viene dado para la función $B(x)=-2x^2+24x-36$, donde x representa el número de ordenadores vendidos semanalmente. Calcular el número de ordenadores vendidos cada semana para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es este beneficio máximo?

CUESTIÓN 4. Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$:

a) Determinar los valores de a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en $x=1$ y la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto de abscisa $x=0$ tenga de pendiente $m=-1$. (1 punto)

b) Si en la función anterior $a=-2$ y $b=-4$, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos. (1 punto)

CUESTIÓN 5. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x)=x^2-4x+6$ y $g(x)=-2x^2+5x+6$. Calcular su área.

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x)=\frac{1}{x+1}$:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto x = 1 (1 punto)
b) Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función f(x) el eje OX y las rectas de ecuación x = 0 y x = 1. (1 punto)

CUESTIÓN 7. En una ferretería se encuentran mezclados 100 tornillos de color azul, 60 de color blanco y 40 de color rojo. La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es de 0.01 si es azul, 0.02 si es blanco y de 0.03 si es rojo. Un comprador elige un tornillo al azar.

a) Calcule la probabilidad de que el tornillo sea defectuoso. (1 punto)
b) Sabiendo que el tornillo es defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanco? (1 punto)

CUESTIÓN 8. (2 puntos) Dado dos sucesos independientes *A* y *B* se conoce que $P(A)=0,3$ y que $P(\overline{B})=0,4$. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(A\cup B)$ (0.75 puntos)
b) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ (0.5 puntos)
c) $P(A/\overline{B})$ (0.75 puntos)

CUESTIÓN 9. Se ha estimado que el consumo medio de gasolina de los automóviles de un concesionario se distribuye según una distribución normal con una desviación típica de 0,5 litros. Se han probado 10 automóviles, elegidos aleatoriamente, de este concesionario por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares, obteniendo un consumo medio de 6,5 litros por cada 100 km.

a) Determine un intervalo de confianza, al 95% de confianza, para la media del gasto de gasolina de estos vehículos. (1.25 puntos)
b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 95%, el error cometido del consumo de gasolina sea inferior a 0,2. (0,75 puntos)

CUESTIÓN 10. En un laboratorio farmacéutico se analiza el PH de una solución y se supone que este sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,02. Con un ensayo de 6 mediciones de la misma solución se obtuvo un PH de 7,91.

a) Determine un intervalo de confianza al 95% para la media de todas las determinaciones de PH de la misma solución obtenida por el mismo método. (1,25 puntos).
b) Con el mismo nivel de confianza anterior. ¿cuál será el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea inferior a 0,01? (0,75 puntos)

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1. (2 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$$

Resolverlo para a = 3.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

con determinante $|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2+a^2-2-a=a^2-a$.

Si igualamos a cero el determinante.

$$|A|=0\Rightarrow a^2-a=0\Rightarrow a(a-1)=0\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a-1=0\Rightarrow a=1 \end{cases}$$

Existen tres casos diferentes a estudiar.

CASO 1. $a\neq 0$ *y* $a\neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y por tanto su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución. Es compatible determinado.

CASO 2. $a=0$

En este caso el sistema queda muy sencillo. Intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l} x+z=1 \\ 2y=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=1 \\ y=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=1 \\ x+1+z=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=1 \\ x+z=0 \end{array}\right\}$$

Las dos ecuaciones tienen igual el primer miembro, pero distinto el segundo. Este sistema no tiene solución. Es un sistema incompatible.

CASO 3. $a=1$

En este caso el sistema queda muy sencillo. Intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2y+z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª = Ecuación 3ª} \\ \text{Eliminamos la ecuación 3ª} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2y+z=2 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ \boxed{z=2-2y} \end{array}\right\}\Rightarrow x+y+2-2y=1\Rightarrow \boxed{x=y-1}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones. Es compatible indeterminado.

Lo resolvemos para a = 3.
Estamos en el caso 1 y tiene una única solución.

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+z=1 \\ 2y+3z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{ Ecuación } 1^{\text{a}} \\ x \quad +y \quad +z \quad =1 \\ -x \quad -3y \quad -z \quad =-1 \\ \hline \quad -2y \qquad\quad =0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ 2y+3z=2 \\ -2y \quad =0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ 2y+3z=2 \\ \boxed{y=0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+0+z=1 \\ 0+3z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=1 \\ \boxed{z=\frac{2}{3}} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x+\frac{2}{3}=1 \Rightarrow \boxed{x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}}$$

La solución es $x=\frac{1}{3};\quad y=0;\ z=\frac{2}{3}$

CUESTIÓN 2. (2 puntos) La repoblación forestal de un bosque quemado en un gran incendio se va a llevar a cabo por dos empresas diferentes de jardinería. Hay que repoblar con pinos, eucaliptos y chopos. La primera empresa es capaz de plantar, en una semana, 30 pinos, 20 eucaliptos y 20 chopos. La segunda empres planta 20 pinos, 30 eucaliptos y 20 chopos. El coste semanal se estima en 33.000 € para la primera empresa de jardinería y de 35.000 € para la segunda. Se necesita plantar un mínimo de 60 pinos, 120 eucaliptos y 100 chopos. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

Es un problema de programación lineal.
Llamamos "x" al número de semanas que trabaja la primera empresa e "y" al número de semanas que trabaja la segunda empresa.
Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Pinos	Eucaliptos	Chopos	Coste semanal
Nº semanas primera empresa (x)	30x	20x	20x	33000x
Nº semanas segunda empresa (y)	20y	30y	20y	35000y
TOTALES	$30x+20y$	$20x+30y$	$20x+20y$	$33000x+35000y$

La función objetivo que deseamos minimizar es el coste $C(x,y)=33000x+35000y$.
Las restricciones son:

"*Se necesita plantar un mínimo de 60 pinos*" → $30x+20y\geq 60$

"*Se necesita plantar un mínimo de 120 eucaliptos*" → $20x+30y\geq 120$

"*Se necesita plantar un mínimo de 100 chopos*" → $20x+20y\geq 100$

Las cantidades son positivas → $x\geq 0;\quad y\geq 0$

Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} 30x+20y\geq 60 \\ 20x+30y\geq 120 \\ 20x+20y\geq 100 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y\geq 6 \\ 2x+3y\geq 12 \\ x+y\geq 5 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Representamos las rectas asociadas a cada una de las restricciones.

$3x+2y=6$

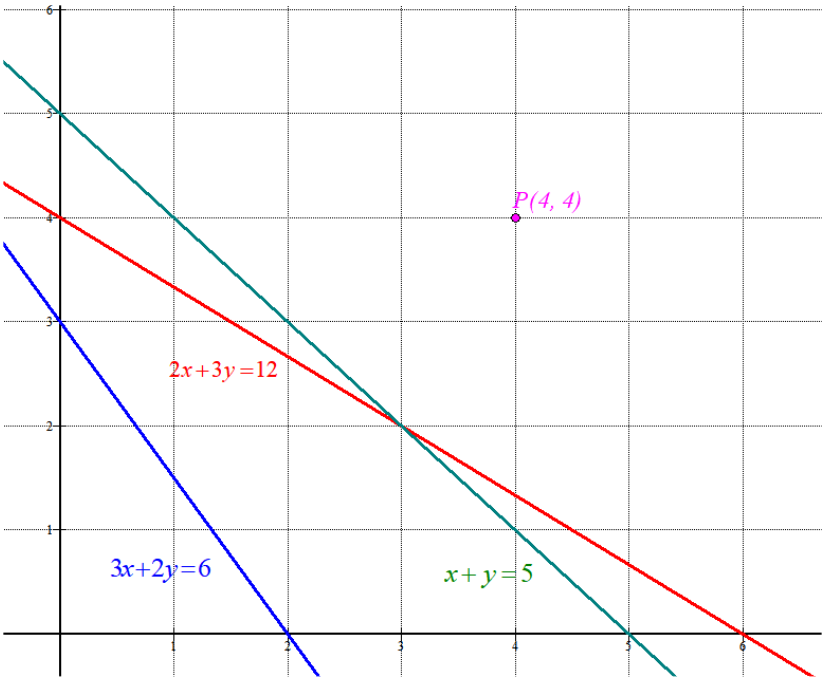
x	$y=\frac{6-3x}{2}$
0	3
2	0

$2x+3y=12$

x	$y=\frac{12-2x}{3}$
0	4
6	0

$x+y=5$

x	$y=5-x$
0	5
5	0



Comprobamos si el punto P(4, 4) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 12+8\geq 6 \\ 8+12\geq 12 \\ 4+4\geq 5 \\ 4\geq 0 \\ 4\geq 0 \end{array}\right\}$$ Cumple todas las restricciones, la región factible es la zona rayada.



Valoramos la función objetivo $C(x,y)=33000x+35000y$ en cada uno de los vértices en busca de un valor mínimo.

A(0, 5) → $C(0,5)=0+175000=175000$
B(3, 2) → $C(3,2)=99000+70000=169000$ €
C(6, 0) → $C(6,0)=198000+0=198000$

El mínimo coste cumpliendo las restricciones pedidas se consigue en el vértice B(3, 2).

Con 3 semanas de la primera empresa y 2 semanas de la segunda empresa se consiguen plantar los árboles pedidos con un coste mínimo de 169000 €.

CUESTIÓN 3. (2 puntos) El beneficio semanal obtenido en una empresa de ordenadores viene dado para la función $B(x) = -2x^2 + 24x - 36$, donde x representa el número de ordenadores vendidos semanalmente. Calcular el número de ordenadores vendidos cada semana para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es este beneficio máximo?

Hallamos la derivada de la función.

$$B(x) = -2x^2 + 24x - 36 \Rightarrow B'(x) = -4x + 24$$

Igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos de la función.

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 24 = 0 \Rightarrow -4x = -24 \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos $x = 6$.

$$B'(x) = -4x + 24 \Rightarrow B''(x) = -4 \Rightarrow B''(6) = -4 < 0$$

Como la derivada segunda es negativa en $x = 6$ la función tiene un máximo en dicho valor.

Para $x = 6$ la función beneficio vale $B(6) = -2 \cdot 6^2 + 24 \cdot 6 - 36 = -72 + 144 - 36 = 36$

El beneficio es máximo al vender 6 ordenadores semanalmente y dicho beneficio máximo tiene un valor de 36.

CUESTIÓN 4. Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$:

a) Determinar los valores de *a* y *b* de forma que la función tenga un extremo relativo en $x=1$ y la recta tangente a la gráfica de la función *f(x)* en el punto de abscisa $x=0$ tenga de pendiente $m=-1$. (1 punto)

b) Si en la función anterior $a=-2$ y $b=-4$, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos. (1 punto)

a) Si la función tiene un extremo relativo en *x = 1* la derivada se anula en *x = 1*.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+1 \Rightarrow f\,'(x)=3x^2+2ax+b$$
$$f\,'(1)=0 \Rightarrow 3\cdot 1^2+2a\cdot 1+b=0 \Rightarrow \boxed{3+2a+b=0}$$

Si la recta tangente en *x = 0* tiene pendiente m = –1 quiere decir que la derivada de la función en *x = 0* vale –1 $\rightarrow f\,'(0)=-1$.

$$f\,'(0)=-1 \Rightarrow 3\cdot 0^2+2a\cdot 0+b=-1 \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

Y sustituyendo este valor en la primera igualdad obtenida.

$$\left.\begin{array}{l} 3+2a+b=0 \\ b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3+2a-1=0 \Rightarrow 2a=-2 \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

Los valores buscados son $\boxed{a=b=-1}$

b) Si $a=-2$ y $b=-4$ la función queda $f(x)=x^3-2x^2-4x+1$.
Calculamos su derivada e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

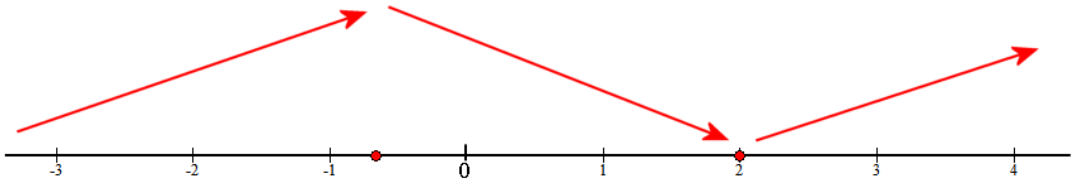
$$f(x)=x^3-2x^2-4x+1 \Rightarrow f\,'(x)=3x^2-4x-4$$

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x)=0 \\ f\,'(x)=3x^2-4x-4 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2-4x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2+48}}{6}=\frac{4\pm 8}{6}=\begin{cases}\frac{4+8}{6}=2 \\ \frac{4-8}{6}=\frac{-2}{3}\end{cases}$$

Estos dos valores dividen la recta real en tres partes, veamos si la función crece o decrece en cada una de ellas.

- En $\left(-\infty,\frac{-2}{3}\right)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale $f\,'(-1)=3(-1)^2-4(-1)-4=3>0$. La función crece en $\left(-\infty,\frac{-2}{3}\right)$.
- En $\left(\frac{-2}{3},2\right)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f\,'(0)=-4<0$. La función decrece en $\left(\frac{-2}{3},2\right)$.
- En $(2,+\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f\,'(3)=3\cdot 3^2-4\cdot 3-4=27-12-4=11>0$. La función crece en $(2,+\infty)$.

La función evoluciona siguiendo el esquema del dibujo.



Observamos que la función presenta un máximo relativo en $x=\frac{-2}{3}$ y un mínimo relativo en $x=2$.

La función crece en $\left(-\infty,\frac{-2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $\left(\frac{-2}{3},2\right)$.

CUESTIÓN 5. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x)=x^2-4x+6$ y $g(x)=-2x^2+5x+6$. Calcular su área.

Veamos donde se cortan las dos parábolas.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-4x+6=-2x^2+5x+6\Rightarrow 3x^2-9x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x(x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x-3=0\Rightarrow x=3\end{cases}$$

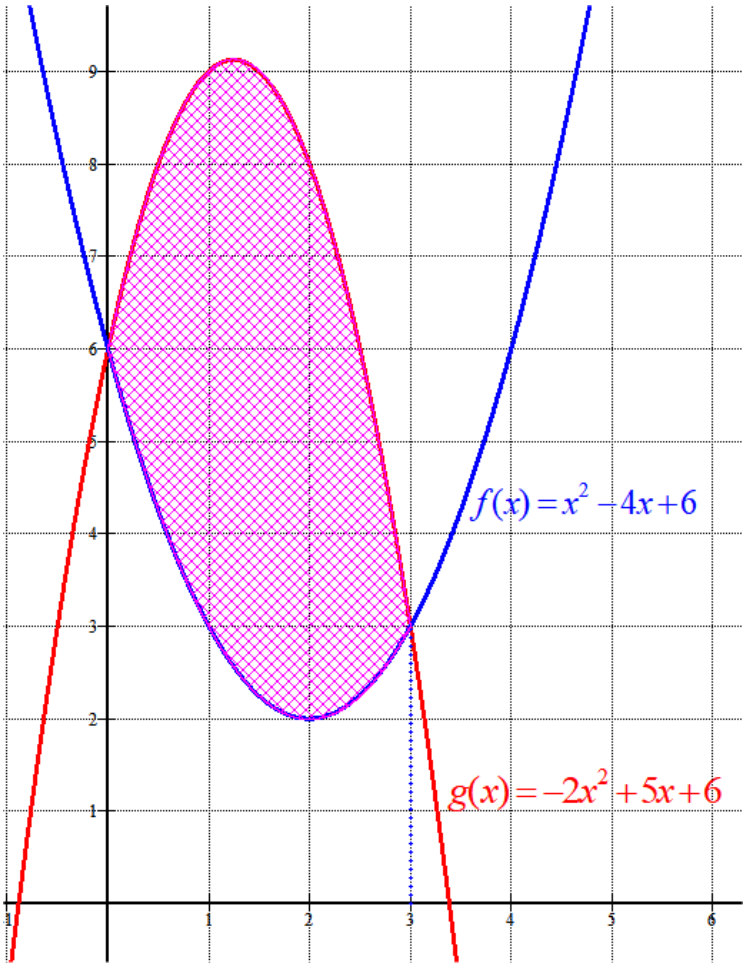
Hacemos una tabla de valores de ambas funciones en el intervalo [0, 3].

$f(x)=x^2-4x+6$

x	$y=x^2-4x+6$
0	6
1	$1-4+6=3$
2	$4-8+6=2$
3	$9-12+6=3$

$g(x)=-2x^2+5x+6$

x	$y=-2x^2+5x+6$
0	6
1	$-2+5+6=9$
2	$-4+10+6=12$
3	$-18+15+6=3$



Por el dibujo y contando los cuadraditos debemos obtener un valor del área entre 13 y 14 u^2. Calculamos el área como la integral definida entre 0 y 3 de *g(x) – f(x)*.

$$Área=\int_0^3 -2x^2+5x+6-\left(x^2-4x+6\right)dx=\int_0^3 -2x^2+5x+6-x^2+4x-6dx=$$

$$=\int_0^3 -3x^2+9xdx=\left[-x^3+9\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\left[-3^3+9\frac{3^2}{2}\right]-\left[-0^3+9\frac{0^2}{2}\right]=-27+\frac{81}{2}=\boxed{13,5\,u^2}$$

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f(x)* en el punto *x = 1* (1 punto)
b) Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función *f(x)* el eje OX y las rectas de ecuación *x = 0* y *x = 1*. (1 punto)

a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto $x = a$ tiene la expresión:

$$y - f(a) = f\,'(a)\left(x - a\right)$$

Para la función $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ en $x = 1$ la tangente debe tener ecuación:

$$f(x)=\frac{1}{x+1} \Rightarrow f\,'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\dfrac{1}{1+1}=0,5 \\ f\,'(1)=\dfrac{-1}{(1+1)^2}=-0,25 \end{array}\right\} \Rightarrow y-0,5=-0,25(x-1) \Rightarrow y=-0,25x+0,5+0,25$$

La tangente tiene ecuación $y=-0,25x+0,75$

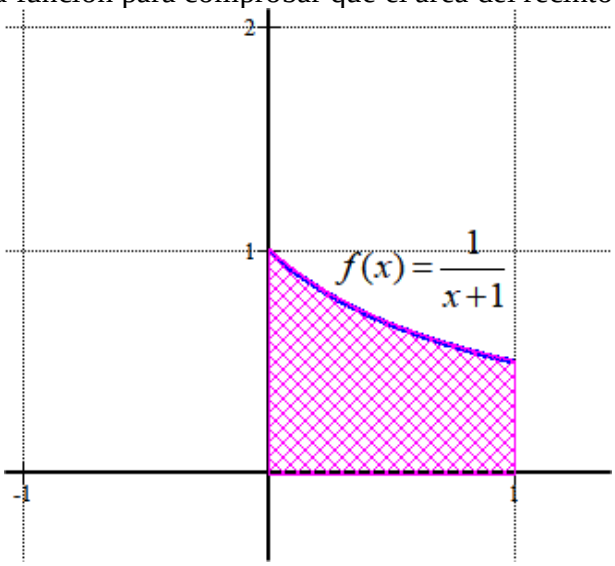
b) Veamos si la función corta al eje en el intervalo [0, 1].

$f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1}=0 \Rightarrow 1=0$ No existen puntos de corte con el eje OX

El área pedida es la integral definida entre 0 y 1 de la función $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

$$Área=\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx=\left[\ln|1+x|\right]_0^1=\left[\ln|1+1|\right]-\left[\ln|1+0|\right]=\boxed{\ln 2=0,69\ u^2}$$

No lo pide, pero dibujo la función para comprobar que el área del recinto tiene ese valor.



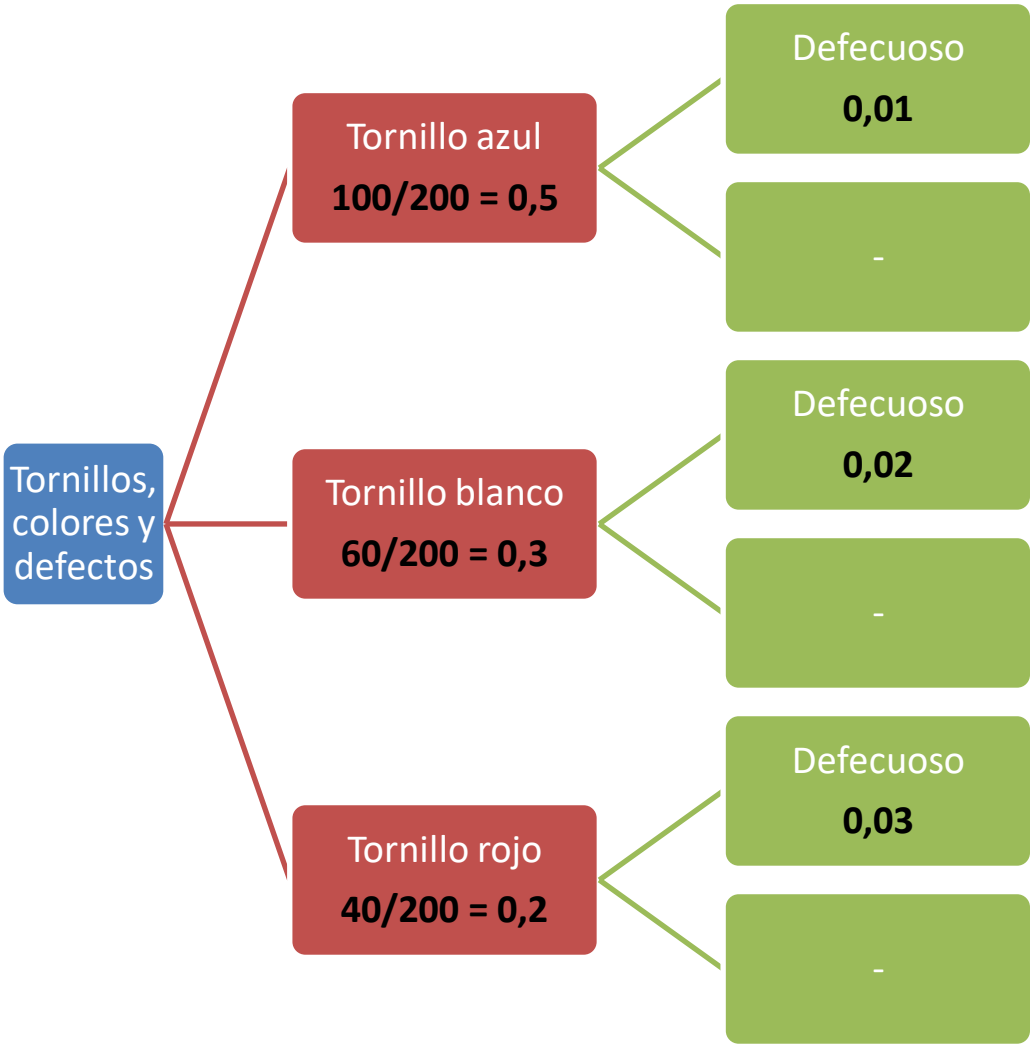
De forma aproximada se corresponde el valor del área obtenida con la del dibujo.

CUESTIÓN 7. En una ferretería se encuentran mezclados 100 tornillos de color azul, 60 de color blanco y 40 de color rojo. La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es de 0.01 si es azul, 0.02 si es blanco y de 0.03 si es rojo. Un comprador elige un tornillo al azar.

a) Calcule la probabilidad de que el tornillo sea defectuoso. (1 punto)

b) Sabiendo que el tornillo es defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanco? (1 punto)

Hacemos un diagrama de árbol para clarificar la situación. Hay un total de 100 + 60 + 40 = 200 tornillos.



a) Este suceso aparece en tres ramas del diagrama de árbol, calculamos la probabilidad de cada rama y las sumamos. Estamos aplicando el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Elegir tornillo defectuoso}) = 0,5 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,03 = 0,005 + 0,006 + 0,006 = \boxed{0,017}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Sea blanco } / \text{Es defectuoso}) = \frac{P(\text{Sea blanco } \cap \text{Es defectuoso})}{P(\text{Sea defectuoso})} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,02}{0,017} = \frac{0,006}{0,017} = \boxed{\frac{6}{17} = 0,353}$$

CUESTIÓN 8. (2 puntos) Dado dos sucesos independientes A y B se conoce que $P(A)=0,3$ y que $P(\overline{B})=0,4$. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(A\cup B)$ (0.75 puntos)

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ (0.5 puntos)

c) $P(A/\overline{B})$ (0.75 puntos)

a) Como $P(\overline{B})=0,4\Rightarrow 1-P(B)=0,4\Rightarrow P(B)=0,6$

Como A y B son independientes se cumple que $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0,3\cdot 0,6=0,18$

Por lo que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,3+0,6-0,18=\boxed{0,72}$

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0,72=\boxed{0,28}$

c) $P(A/\overline{B})=\dfrac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{0,4}=\dfrac{0,3-0,18}{0,4}=\dfrac{0,12}{0,4}=\boxed{0,3}$

OTRA FORMA DE HACER ESTE EJERCICIO.

Como $P(A)=0,30$ y $P(\overline{B})=0,40$, deducimos que $P(B)=0,60$.

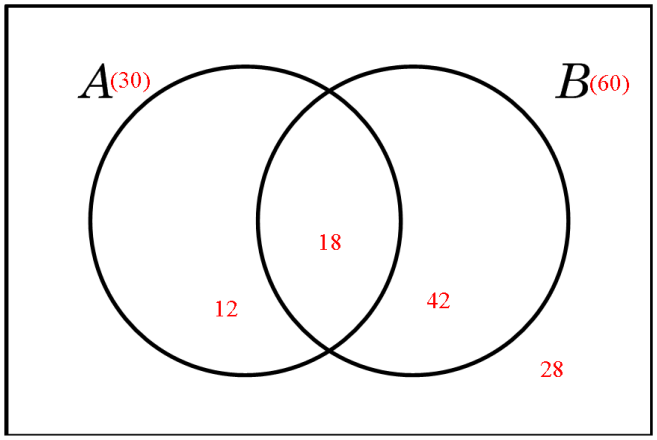
Como A y B son independientes se cumple que $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0,3\cdot 0,6=0,18$.

Esta información la colocamos en un diagrama de Venn donde suponemos 100 elementos en el total y por tanto 30 en A, 60 en B, 18 en la intersección de A y B. Restando también podemos poner 12 en $A\cap\overline{B}$ y 42 en $\overline{A}\cap B$. Por último, si hay en $A\cup B$ un total de 12 + 18 + 42 = 72, entonces en $\overline{A\cup B}$ hay 28.

a) $P(A\cup B)=\dfrac{12+18+42}{100}=\boxed{0,72}$

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\dfrac{28}{100}=\boxed{0,28}$

c) $P(A/\overline{B})=\dfrac{12}{12+28}=\boxed{0,3}$



CUESTIÓN 9. Se ha estimado que el consumo medio de gasolina de los automóviles de un concesionario se distribuye según una distribución normal con una desviación típica de 0,5 litros. Se han probado 10 automóviles, elegidos aleatoriamente, de este concesionario por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares, obteniendo un consumo medio de 6,5 litros por cada 100 km.

a) Determine un intervalo de confianza, al 95% de confianza, para la media del gasto de gasolina de estos vehículos. (1.25 puntos)
b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 95%, el error cometido del consumo de gasolina sea inferior a 0,2. (0,75 puntos)

a) X = Consumo medio de gasolina de un automóvil de un concesionario
X = N(μ, 0.5)

La muestra es de tamaño n = 10 y la media muestral es $\bar{x} = 6.5$ litros

Con un nivel de confianza del 95% tenemos que

$$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

Con estos datos obtenemos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{10}} = 0.31$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(6.5 - 0.31, 6.5 + 0.31\right) = \left(6.19, 6.81\right)$$

b) Con el nivel de confianza del 95% ya hemos calculado $z_{\alpha/2}$ **= 1,96.**
El Error de 0,2 lo ponemos en la fórmula del error y despejamos n.

$$Error = 0.2 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{n}} = 0{,}2 \Rightarrow 1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}2} = \sqrt{n}$$

$$n = \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}2}\right)^2 = 24{,}01$$

La muestra debe ser al menos de 25 automóviles.

CUESTIÓN 10. En un laboratorio farmacéutico se analiza el PH de una solución y se supone que este sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,02. Con un ensayo de 6 mediciones de la misma solución se obtuvo un PH de 7,91.

a) Determine un intervalo de confianza al 95% para la media de todas las determinaciones de PH de la misma solución obtenida por el mismo método. (1,25 puntos).
b) Con el mismo nivel de confianza anterior. ¿cuál será el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea inferior a 0,01? (0,75 puntos)

a) Sea X la variable aleatoria que mide el PH de una solución. Sabemos que sigue una distribución normal N(**μ**, 0,02).

La muestra es de 6 mediciones → n = 6 y la media muestral es $\bar{x}$ = 7,91.
Para un nivel de confianza del 95%

$$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

El error del intervalo viene dado por la fórmula

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}02}{\sqrt{6}} = 0{,}016$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(7.91 - 0.016,\ 7.91 + 0.016\right) = \left(7.894,\ 7.926\right)$$

b) Con el mismo nivel de confianza tenemos $z_{\alpha/2}$ **= 1,96.**
Aplicamos la fórmula del error y despejamos n.

$$Error = 0.01 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}02}{\sqrt{n}} = 0{,}01 \Rightarrow 1{,}96 \cdot \frac{0{,}02}{0{,}01} = \sqrt{n}$$

$$n = \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}02}{0{,}01}\right)^2 = 15{,}36$$

La muestra debe ser de al menos 16 mediciones (número entero superior al obtenido).

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. SEPTIEMBRE 2019

OBSERVACIONES IMPORTANTES: *El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa de opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.*

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ ax-y-z=a-1 \\ 3x-2az=a-1 \end{array}\right\}$$ **(2,5 puntos)**

Resolverlo para a = 0 **(0,5 puntos)**

CUESTIÓN A2. Determine el punto de la gráfica de la función $f(x)=-x^3+6x^2-7x+5$ en la que la pendiente de la recta tangente sea máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto? **(2 puntos)**

CUESTIÓN A3. Representar gráficamente la región limitada por las funciones $f(x)=9-x^2$ y $g(x)=x^2-9$. Calcula su área. **(2 puntos)**

CUESTIÓN A4. En un taller mecánico el 70% de los coches que se reparan son del modelo A y el resto de un modelo B. Después de 6 meses, el 95% de los coches del modelo A no vuelven al taller mientras que del modelo B solo no vuelven el 80%. Si elegimos un coche al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva al taller antes de 6 meses? **(0,75 puntos)**
b) Si se observa que antes de los seis meses vuelve al taller, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B? **(0,75 puntos)**

CUESTIÓN A5. Se sabe que la estatura de los individuos de Murcia es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 6 cm. Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos y da una media de 176 cm. Obtenga un intervalo de confianza, con un 99% de confianza, para la media de la estatura de la población. **(1,5 puntos)**

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Un joven emprendedor quiere montar una empresa informática donde comercializará dos tipos de ordenadores. El tipo A dispondrá de 1 disco duro y 1 una unidad de memoria de pequeña capacidad, mientras que el tipo B tendrá 2 discos duros y su unidad de memoria será de alta capacidad. En total cuenta con 40 unidades de memoria de pequeña capacidad y 30 unidades de memoria de alta capacidad y 80 discos duros. Por cada ordenador del tipo A espera obtener un beneficio de 150 euros y del tipo B de 250 euros.

a) ¿Cuál es la mejor decisión sobre el número de ordenadores a montar de cada tipo? **(2,5 puntos)**
b) Con esta producción, ¿habría algún excedente en el material mencionado? **(0,5 puntos)**

CUESTIÓN B2. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. **(0,75 puntos)**
b) $f(x) = xe^{2x}$. **(0,75 puntos)**

CUESTIÓN B3. Dada la función $f(x) = 2e^{x+1}$,

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $x = 1$. **(1 punto)**
b) Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$. **(1 punto)**

CUESTIÓN B4. En un hospital de la región de Murcia se está probando una nueva terapia para dejar de fumar. De los pacientes que entran en este ensayo el 45% prueba la terapia y el resto no. Después de un año el 70% de los que siguieron la terapia y el 40% de los que no la siguieron han dejado de fumar. Se elige al azar a un paciente fumador de este hospital:

a) Calcule la probabilidad de que después de un año haya dejado de fumar. **(0,75 puntos)**
b) Si transcurrido un año el paciente sigue fumando, calcule la probabilidad de que haya seguido la nueva terapia. **(0,75 puntos)**

CUESTIÓN B5. En un estudio realizado por una empresa se ha obtenido que el intervalo de confianza de una variable, a un nivel de confianza del 95%, es: (6,824 9,176). Hallar la media y el tamaño de la muestra para obtener dicho intervalo conociendo que la varianza de la distribución es de 9. Explique cada uno de los pasos realizados. **(2 puntos)**

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ ax-y-z=a-1 \\ 3x-2az=a-1 \end{array}\right\}$$ **(2,5 puntos)**

Resolverlo para a=0 **(0,5 puntos)**

La matriz de coeficientes del sistema y su matriz ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{pmatrix} \quad A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ a & -1 & -1 & a-1 \\ 3 & 0 & -2a & a-1 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{vmatrix}=4a-3-3+2a^2=2a^2+4a-6$

Si igualamos a cero.

$$|A|=0 \Rightarrow 2a^2+4a-6=0 \Rightarrow a^2+2a-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases} =\dfrac{-2+4}{2}=1 \\ =\dfrac{-2-4}{2}=-3 \end{cases}$$

Estudiamos tres casos distintos.

CASO 1. $a\neq 1$ y $a\neq -3$

El determinante de A es no nulo y el rango de A es 3. Al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

CASO 2. $a=1$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \\ 3x-2z=0 \end{array}\right\}$$ Utilizamos Gauss para estudiar su compatibilidad.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \\ 3x-2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{La ecuación 2ª la sustituimos por} \\ 2\cdot\text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ \\ \begin{array}{rrrr} 2x & -2y & -2z & =0 \\ -2x & -y & +z & =0 \\ \hline & -3y & -z & =0 \end{array} \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \text{La ecuación 3ª la sustituimos por} \\ 2\cdot\text{Ecuación 3ª - 3}\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ \\ \begin{array}{rrrr} 6x & & -4z & =0 \\ -6x & -3y & +3z & =0 \\ \hline & -3y & -z & =0 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ -3y-z=0 \\ -3y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ -3y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=z \\ -3y=z \end{array}\right\}$$

Este sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones, dependiendo de los valores de z.

OTRA FORMA DE RESOLVER ESTE CASO 2
Estudiando los rangos.

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

El determinante de A es 0. El rango de A es menor de 3.
¿El rango de A es 2? Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª.
$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-1 = -3 \neq 0$. El rango de A es 2

Como la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ que solo añade una columna de ceros. El rango de A/B y el de A son el mismo.

Rango de A = 2 = Rango de A/B < 3 = número de incógnitas.
El sistema tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $a=-3$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ -3x-y-z=-4 \\ 3x+6z=-4 \end{array}\right\}$$ Utilizamos Gauss para estudiar su compatibilidad.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ -3x-y-z=-4 \\ 3x\quad\quad +6z=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{La ecuación 2ª se sustituye por} \\ 2\cdot\text{Ecuación 2ª} + 3\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ \\ \begin{array}{rrrr} -6x & -2y & -2z & =-8 \\ 6x & +3y & -3z & =0 \\ \hline & y & -5z & =-8 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{La ecuación 3ª se sustituye por} \\ 2\cdot\text{Ecuación 3ª - 3}\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ \\ \begin{array}{rrrr} 6x & & +12z & =-8 \\ -6x & -3y & +3z & =0 \\ \hline & -3y & +15z & =-8 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ y-5z=-8 \\ -3y+15z=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{La ecuación 3ª se sustituye por} \\ 3\cdot\text{Ecuación 2ª} + \text{Ecuación 3ª} \\ \\ \begin{array}{rrrr} 3y & -15z & = & -24 \\ -3y & +15z & = & -8 \\ \hline & 0 & = & -32 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ y-5z=-8 \\ 0=-32 \end{array}\right\}$$

El sistema ecuaciones es incompatible. No tiene solución al ser la última ecuación una igualdad imposible.

OTRA FORMA DE DISCUTIR EL CASO 3
Con el estudio de los rangos de la matriz.

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -3 & -1 & -1\\ 3 & 0 & 6\end{pmatrix}$

El determinante de A es 0. El rango de A es menor de 3.
¿El rango de A es 2? Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª.

$\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-2+3=1\neq 0$. El rango de A es 2

¿Cuál es el rango de $A/B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 0\\ -3 & -1 & -1 & -4\\ 3 & 0 & 6 & -4\end{pmatrix}$?

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 3ª columna.

$\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & -4\\ 3 & 0 & -4\end{vmatrix}=8-12-12=-16\neq 0$. El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 ≠ 3 = rango de A/B. El sistema es incompatible. No tiene solución.

Resolvamos el sistema para $a=0$. Estamos en el caso 1, es decir, el sistema tiene una única solución.

$$\left.\begin{array}{l}2x+y-z=0\\ -y-z=-1\\ 3x=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x+y-z=0\\ -y-z=-1\\ \boxed{x=-\frac{1}{3}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-\frac{2}{3}+y-z=0\\ y=1-z\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}+(1-z)-z=0\Rightarrow -2z=-1+\frac{2}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow\boxed{z=\frac{1}{6}}\Rightarrow\boxed{y=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}}$$

La solución es $x=-\frac{1}{3};\ y=\frac{5}{6};\ z=\frac{1}{6}$

CUESTIÓN A2. Determine el punto de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$ en la que la pendiente de la recta tangente sea máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto? **(2 puntos)**

La pendiente de la recta tangente en $x = a$ es $f\,'(a)$.

Queremos hacer máxima la pendiente $f\,'(a)$ por lo que debe cumplirse que se anule la segunda derivada ($f\,''(a) = 0$) y que la derivada tercera sea negativa ($f\,'''(a) < 0$).
Averigüemos cuando se anula la derivada segunda.

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x) = -3x^2 + 12x - 7 \Rightarrow f\,''(x) = -6x + 12 \\ f\,''(a) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -6x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{-12}{-6} = 2$$

En $x = 2$ hay un punto crítico de la derivada primera.

Como $f\,''(x) = -6x + 12 \Rightarrow f\,'''(x) = -6 \Rightarrow f\,'''(2) = -6 < 0$

En $x = 2$ hay un máximo de la pendiente de la tangente de la función.

La ecuación de esta tangente en $x = 2$ es:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = -2^3 + 6(2)^2 - 14 + 5 = -8 + 24 - 14 + 5 = 7 \\ f\,'(2) = -3(2)^2 + 24 - 7 = -12 + 24 - 7 = 5 \\ y - f(2) = f\,'(2)(x - 2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 7 = 5(x - 2) \Rightarrow y - 7 = 5x - 10 \Rightarrow \boxed{y = 5x - 3}$$

CUESTIÓN A3. Representar gráficamente la región limitada por las funciones $f(x)=9-x^2$ y $g(x)=x^2-9$. Calcula su área. **(2 puntos)**

Encontremos los posibles puntos de corte entre estas dos funciones.

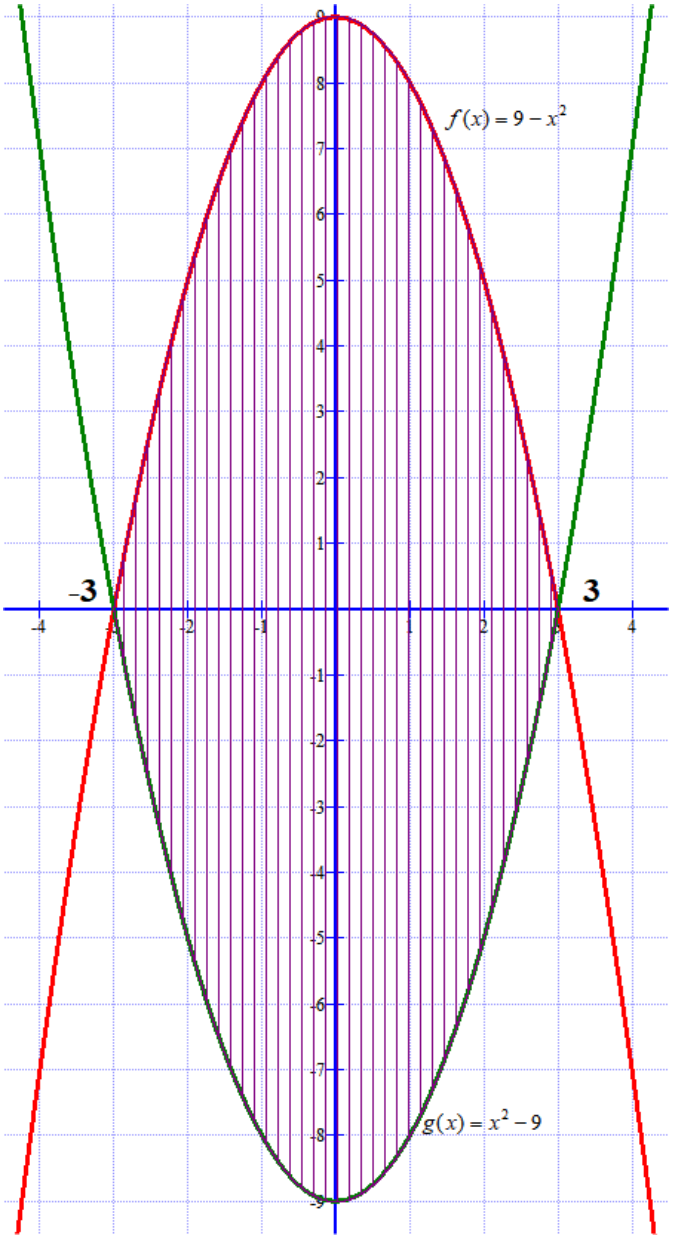
$f(x)=g(x)\Rightarrow 9-x^2=x^2-9\Rightarrow 18=2x^2\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$

Se cortan en $x=-3$ y en $x=+3$.

Hacemos una tabla de valores

x	$y=9-x^2$
–3	0
–1	8
0	9
1	8
3	0

x	$y=x^2-9$
–3	0
–1	–8
0	–9
1	–8
3	0



Calculamos el área de la región con una integral definida de la diferencia de las dos funciones ($f(x)-g(x)$) entre –3 y 3.

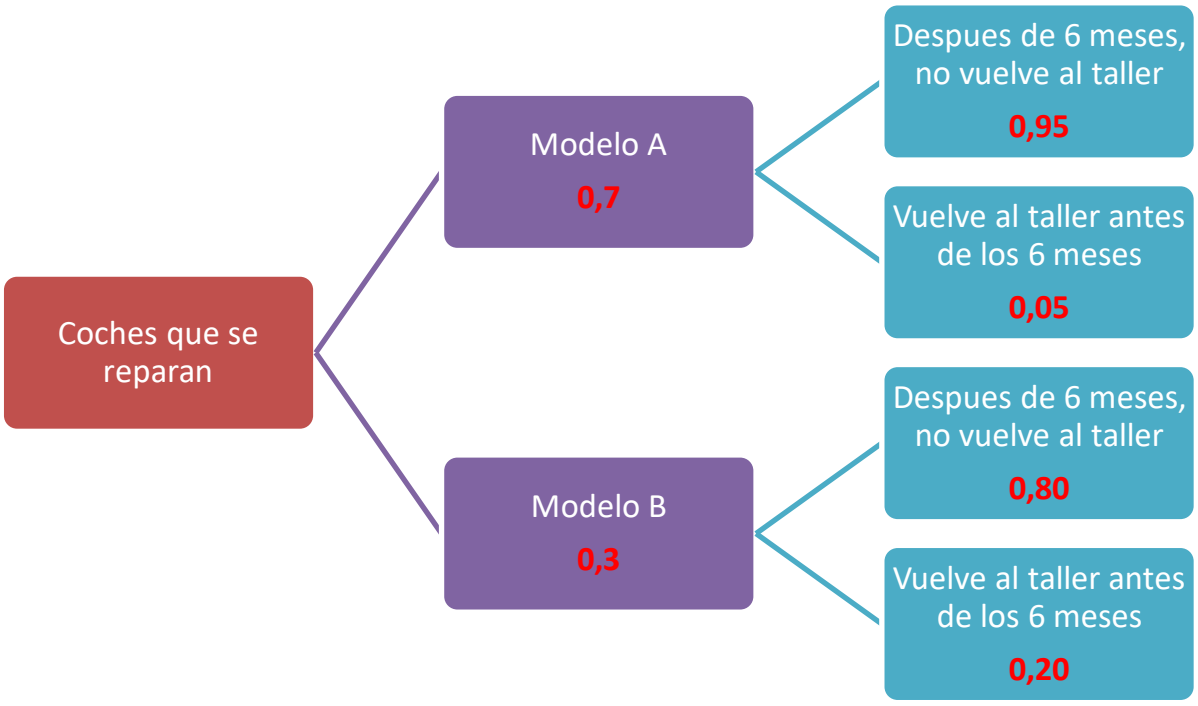
$$Área=\int_{-3}^{3}9-x^2-\left(x^2-9\right)dx=\int_{-3}^{3}9-x^2-x^2+9dx=\int_{-3}^{3}18-2x^2dx=$$

$$=\left[18x-\frac{2x^3}{3}\right]_{-3}^{3}=\left[18\cdot 3-\frac{2\cdot 3^3}{3}\right]-\left[18(-3)-\frac{2\cdot(-3)^3}{3}\right]=54-18-\left[-54+18\right]=\boxed{72\,u^2}$$

CUESTIÓN A4. En un taller mecánico el 70% de los coches que se reparan son del modelo A y el resto de un modelo B. Después de 6 meses, el 95% de los coches del modelo A no vuelven al taller mientras que del modelo B solo no vuelven el 80%. Si elegimos un coche al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva al taller antes de 6 meses? **(0,75 puntos)**
b) Si se observa que antes de los seis meses vuelve al taller, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B? **(0,75 puntos)**

Construimos un diagrama de árbol



a) Utilizamos los datos del diagrama de árbol y aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Vuelve al taller antes de los 6 meses}) =$$
$$= P(\text{Es del modelo A})\,P(\text{Vuelve al taller antes de los 6 meses / Es del modelo A}) +$$
$$+P(\text{Es del modelo B})\,P(\text{Vuelve al taller antes de los 6 meses / Es del modelo B}) =$$
$$= 0,7 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,20 = 0,035 + 0,06 = \boxed{0,095}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea del modelo B / Vuelve al taller antes de los 6 meses}) =$$
$$= \frac{P(\text{Sea del modelo B y Vuelve al taller antes de los 6 meses})}{P(\text{Vuelve al taller antes de los 6 meses})} = \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,095} = \boxed{0,6313}$$

CUESTIÓN A5. Se sabe que la estatura de los individuos de Murcia es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 6 cm. Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos y da una media de 176 cm. Obtenga un intervalo de confianza, con un 99% de confianza, para la media de la estatura de la población. **(1,5 puntos)**

X = Estatura de un murciano en cm. $X \approx N(\mu, 6)$

El tamaño de la muestra es n = 225 individuos y la media muestral es $\bar{x} = 176$ cm.

Para un nivel de confianza del 99% obtenemos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$1-\alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,995 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Busco en la tabla de} \\ \text{la N(0,1)} \end{matrix} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2,57+2,58}{2} = 2,575$$

El error se obtiene con la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575 \cdot \frac{6}{\sqrt{225}} = 1,03$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(176-1,03, 176+1,03\right) = \left(174.97, 177.03\right)$$

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Un joven emprendedor quiere montar una empresa informática donde comercializará dos tipos de ordenadores. El tipo A dispondrá de 1 disco duro y 1 una unidad de memoria de pequeña capacidad, mientras que el tipo B tendrá 2 discos duros y su unidad de memoria será de alta capacidad. En total cuenta con 40 unidades de memoria de pequeña capacidad y 30 unidades de memoria de alta capacidad y 80 discos duros. Por cada ordenador del tipo A espera obtener un beneficio de 150 euros y del tipo B de 250 euros.
a) ¿Cuál es la mejor decisión sobre el número de ordenadores a montar de cada tipo? **(2,5 puntos)**
b) Con esta producción, ¿habría algún excedente en el material mencionado? **(0,5 puntos)**

a) Llamamos "***x***" al número de ordenadores del tipo A e "***y***" al número de ordenadores del tipo B.

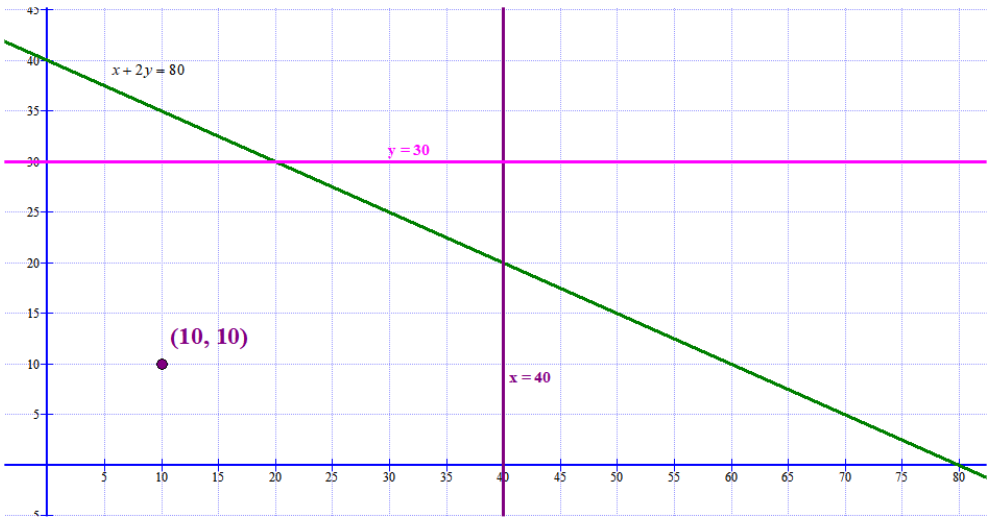
Las restricciones asociadas al problema se expresan con las inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \text{Cada ordenador del tipo A tiene una memoria de pequeña capacidad } \rightarrow x \leq 40 \\ \text{Cada ordenador del tipo B tiene una memoria de alta capacidad } \rightarrow y \leq 30 \\ \text{Cada ordenador del tipo A tiene un disco duro y cada uno del B tiene dos } \rightarrow x + 2y \leq 80 \end{array}\right\}$$

Y la función beneficio es $B(x, y) = 150x + 250y$

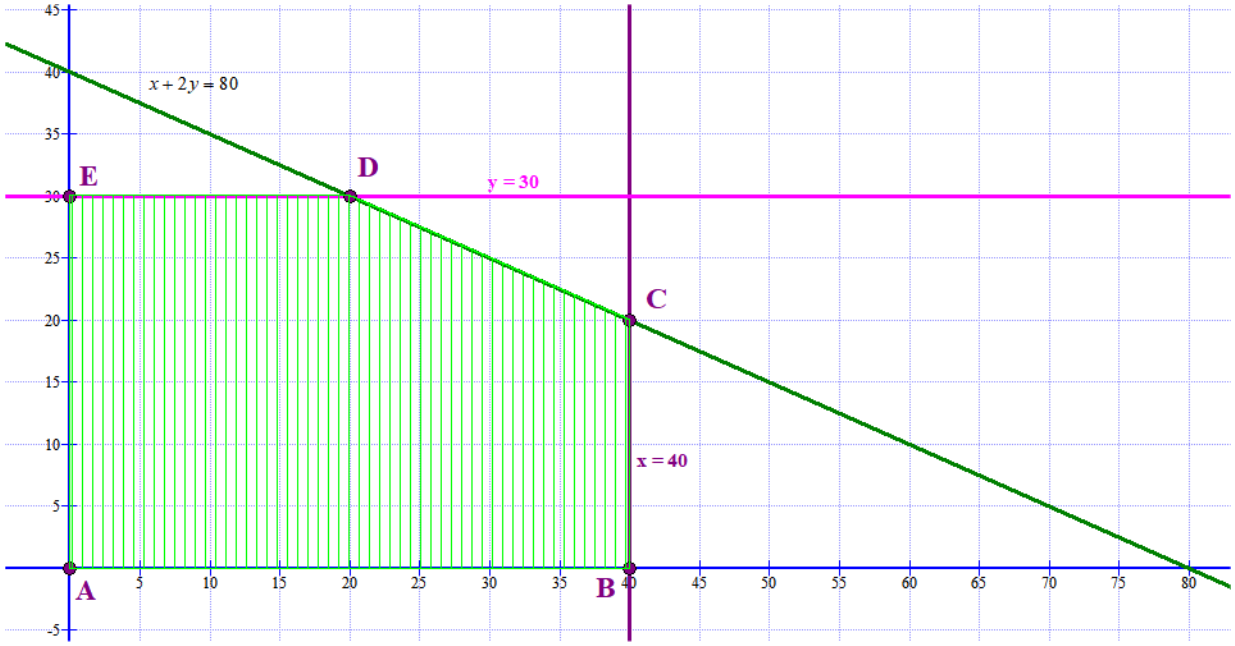
Hacemos una tabla de valores para dibujar la recta $x + 2y = 80$. Las otras rectas no precisan de tabla para poder dibujar su gráfica.

x	$y = \dfrac{80 - x}{2}$
0	40
80	0
40	20
20	30



Probando el punto (10, 10) vemos que cumple todas las restricciones, luego la región factible es la zona rayada y los candidatos a maximizar la función beneficio son los puntos A, B, C, D y E.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \geq 0 \\ 10 \geq 0 \\ 10 \leq 40 \\ 10 \leq 30 \\ 10 + 20 \leq 80 \end{array}\right\}$$



Valoramos la función beneficio en cada uno de los vértices de la región factible.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(40, 0) → $B(40,0)=6000+0=6000$

C(40, 20) → $B(40,20)=6000+5000=11000$ ¡Máximo!

D(20, 30) → $B(20,30)=3000+7500=10500$

E(0, 30) → $B(0,30)=0+7500=7500$

El máximo beneficio se obtiene en el punto C(40, 20). Hay que fabricar 40 ordenadores del tipo A y 20 del tipo B para maximizar el beneficio.

b) 40 ordenadores del tipo A necesitan 40 unidades de memoria de pequeña capacidad, como solo hay 40, aquí no hay excedentes.
20 ordenadores del tipo B necesitan 20 unidades de memoria de alta capacidad, como hay 30 sobran 10 unidades de memoria de alta capacidad.
40 ordenadores del tipo A y 20 ordenadores del tipo B necesitan 40 + 40 = 80 discos duros, como solo hay 80 no hay excedentes en discos duros.

Solo sobran 10 memorias de alta capacidad.

CUESTIÓN B2. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$. **(0,75 puntos)**

b) $f(x)=xe^{2x}$. **(0,75 puntos)**

a) Aplicamos la fórmula de derivación de un cociente.

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{x\left(1-2\ln x\right)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$\boxed{f\,'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}}$$

b) Aplicamos la fórmula de derivación de un producto.

$$f(x)=xe^{2x}\Rightarrow f\,'(x)=e^{2x}+x\cdot 2e^{2x}=e^{2x}\left(1+2x\right)$$

$$\boxed{f\,'(x)=e^{2x}\left(1+2x\right)}$$

CUESTIÓN B3. Dada la función $f(x)=2e^{x+1}$,

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto *x = 1*. **(1 punto)**

b) Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=1$. **(1 punto)**

a) La recta tangente a la función $f(x)=2e^{x+1}$ en *x = 1* es $y-f(1)=f\,'(1)(x-1)$

Como la derivada de la función es $f\,'(x)=2e^{x+1}$

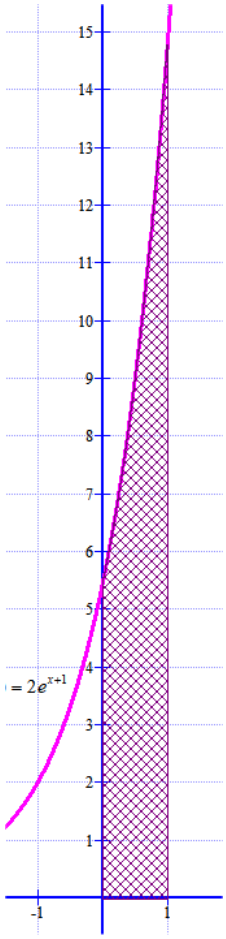
$$\left.\begin{array}{l} f(1)=2e^{1+1}=2e^2 \\ f\,'(1)=2e^{1+1}=2e^2 \\ y-f(1)=f\,'(1)(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-2e^2=2e^2(x-1) \Rightarrow y-2e^2=2e^2x-2e^2 \Rightarrow \boxed{y=2e^2x}$$

b) La función $f(x)=2e^{x+1}$ es siempre positiva y no corta el eje de abscisas, por lo que el área pedida es la integral definida de la función entre 0 y 1.

$$\int_0^1 2e^{x+1}dx=\left[2e^{x+1}\right]_0^1=2e^{1+1}-2e^{0+1}=2e^2-2e=\boxed{9{,}34\,u^2}$$

No lo pide, pero dibujamos la región de la cual queremos hallar el área para comprobar el resultado.

El área obtenida se corresponde aproximadamente con el número de cuadraditos rayados en el dibujo.

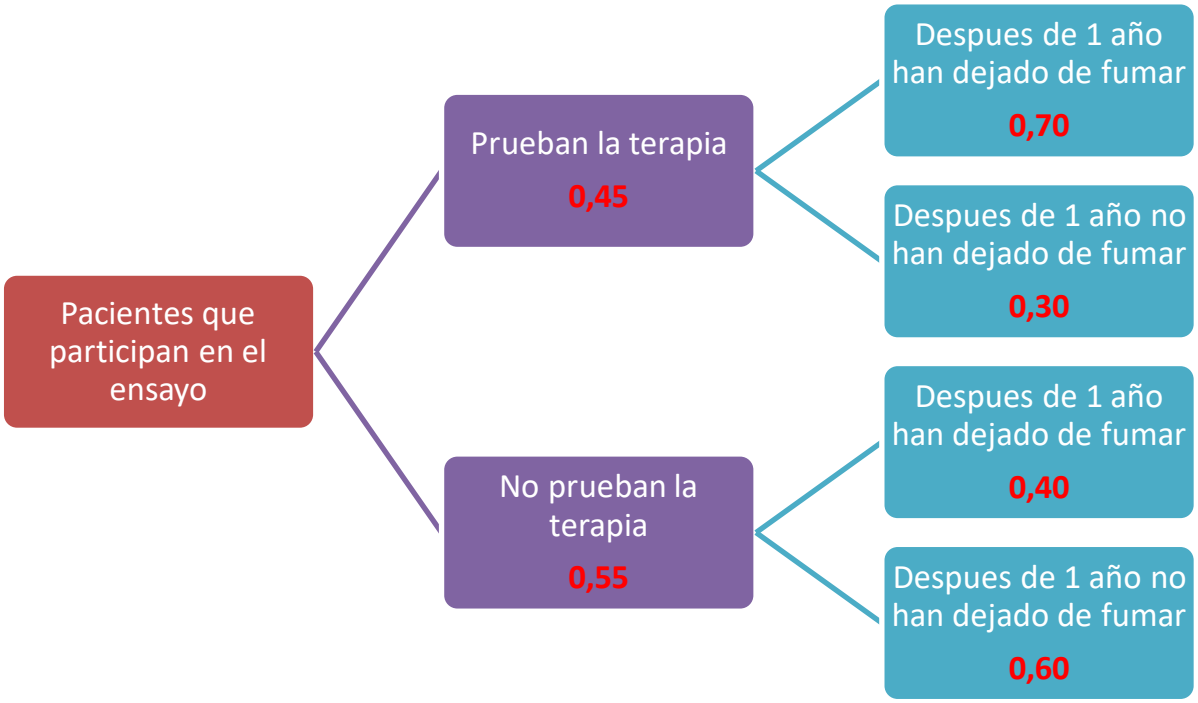


CUESTIÓN B4. En un hospital de la región de Murcia se está probando una nueva terapia para dejar de fumar. De los pacientes que entran en este ensayo el 45% prueba la terapia y el resto no. Después de un año el 70% de los que siguieron la terapia y el 40% de los que no la siguieron han dejado de fumar. Se elige al azar a un paciente fumador de este hospital:

a) Calcule la probabilidad de que después de un año haya dejado de fumar. **(0,75 puntos)**

b) Si transcurrido un año el paciente sigue fumando, calcule la probabilidad de que haya seguido la nueva terapia. **(0,75 puntos)**

Construimos el diagrama de árbol



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total y los datos del diagrama de árbol.

$$P(\text{Haya dejado de fumar al cabo del año}) =$$

$$= P(\text{Haya probado la terapia}) \cdot P(\text{Haya probado la terapia y deje de fumar al año}) +$$
$$+ (\text{No haya probado la terapia}) \cdot P(\text{No haya probado la terapia y deje de fumar al año}) =$$

$$= 0,45 \cdot 0,7 + 0,55 \cdot 0,4 = 0,315 + 0,22 = \boxed{0,535}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Haya seguido la terapia / No ha dejado de fumar}) =$$

$$= \frac{P(\text{Haya seguido la terapia y no ha dejado de fumar})}{P(\text{No ha dejado de fumar})} = \frac{0,45 \cdot 0,3}{1 - 0,535} = \frac{0,135}{0,465} = \boxed{0,2903}$$

CUESTIÓN B5. En un estudio realizado por una empresa se ha obtenido que el intervalo de confianza de una variable, a un nivel de confianza del 95%, es: (6,824 9,176). Hallar la media y el tamaño de la muestra para obtener dicho intervalo conociendo que la varianza de la distribución es de 9. Explique cada uno de los pasos realizados. **(2 puntos)**

Si la varianza es 9 la desviación típica es $\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{9} = 3$

Obtenemos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza es del 95%

$$1-\alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Busco en la tabla de} \\ \text{la N(0,1)}\end{matrix}\right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(6.824, 9.176\right)$$

Si sumo los extremos del intervalo de confianza y divido por 2 obtenemos la media muestral:

$$\bar{x} = \frac{6,824 + 9,176}{2} = 8$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(8 - Error, 8 + Error\right) = \left(6.824, 9.176\right)$$

Luego $8 + Error = 9.176 \Rightarrow Error = 9.176 - 8 = 1,176$

Y utilizando la fórmula del error obtenemos el valor de n (tamaño de la muestra).

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 1,176 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 3}{1,176} = 5 \Rightarrow n = 5^2 = 25$$

El tamaño de la muestra es 25 y la media es 8.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. JUNIO 2019

OBSERVACIONES IMPORTANTES: *El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa de opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.*

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

a) Calcule A^{-1} . **(1 punto)**
b) Calcule el valor del parámetro **a** para que $B+C=A^{-1}$. **(1 punto)**
c) Calcule el valor del parámetro **a** para que $A+B+C=3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

CUESTIÓN A2. Una empresa, que vende un cierto artículo al precio unitario de 40 euros, tiene por función de coste, $C(x)=2x^2+4x+98$, donde x es el número de unidades producidas del artículo. Calcular el número de unidades que debe vender para que el beneficio de la empresa sea máximo. Obtener el beneficio (ingresos menos los costes) máximo obtenido. **(2 puntos)**

CUESTIÓN A3. Dada la función $f(x)=\begin{cases}x+a & si \quad x<1\\ x^2-2 & si \quad 1\le x\le 3\\ x+b & si \quad x>3\end{cases}$

a) Determinar a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$. **(1 punto)**
b) Hallar $\int_1^3 f(x)dx$. **(1 punto)**

CUESTIÓN A4. En el coro universitario el 65% de sus componentes son mujeres. El 30% de las mujeres y el 25% de los hombres son bilingües. Si elegimos al azar a un componente del coro:
a) ¿Cuál es la probabilidad que sea bilingüe? **(0,75 puntos)**
b) Sabiendo que es bilingüe, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **(0,75 puntos)**

CUESTIÓN A5. El tiempo, en años, de renovación de un ordenador portátil se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica de 0,9 años. Si tomamos al azar a 900 usuarios, se obtiene una media muestral de 3,5 años. Hallar el intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de renovación de un ordenador portátil. **(1,5 puntos)**

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 euros y 12 euros, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulces deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta. **(3 puntos)**

CUESTIÓN B2.

a) Sea la función $f(x)=ax^3+bx$, calcular los valores de ay b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1,1)$ y que en este punto la pendiente de la recta tangente vale –3. **(1 punto)**

b) Si en la función anterior $a=1$ y $b=-12$, determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos extremos. **(1 punto)**

CUESTIÓN B3. Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la recta $y=6-2x$ y la parábola $y=-x^2+2x+3$. Calcular su área. **(2 puntos)**

CUESTIÓN B4. Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0,3$, $P(B)=0,2$ y $P(A/B)=0,5$. Calcular $P(A\cap B)$ y $P(A\cup B)$. **(1,5 puntos)**

CUESTIÓN B5. El tiempo en minutos de conexión a Internet de los estudiantes de un centro de secundaria, sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Para poder estimar la media del tiempo de conexión, se construye un intervalo de confianza con un error menor o igual a 5 minutos, con un nivel de confianza del 95%. Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar. **(1,5 puntos)**

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

a) Calcule A^{-1} . **(1 punto)**
b) Calcule el valor del parámetro **a** para que $B+C=A^{-1}$. **(1 punto)**
c) Calcule el valor del parámetro **a** para que $A+B+C=3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

a) Para que exista la inversa de A debe tener determinante no nulo:
$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$. Existe la inversa A^{-1}.
La calculamos.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\ \text{debe cumplir } A^{-1}A=I\Rightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2a+b & a+b\\ 2c+d & c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2a+b=1\\ a+b=0\\ 2c+d=0\\ c+d=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2a+b=1\\ a=-b\\ 2c+d=0\\ c=1-d\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}-2b+b=1\\ 2-2d+d=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}-b=1\\ -d+2=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}b=-1\\ d=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}a=1\\ c=1-2=-1\end{matrix}\right\}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}}$$

b)

$$B+C=A^{-1}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & a-1\\ a-1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}1=1\\ a-1=-1\\ a-1=-1\\ 2=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{a=0}$$

c)

$$A+B+C=3I\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3 & a\\ a & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{a=0}$$

CUESTIÓN A2. Una empresa, que vende un cierto artículo al precio unitario de 40 euros, tiene por función de coste, $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$, donde *x* es el número de unidades producidas del artículo. Calcular el número de unidades que debe vender para que el beneficio de la empresa sea máximo. Obtener el beneficio (ingresos menos los costes) máximo obtenido. **(2 puntos)**

La función Ingresos es $I(x) = 40x$

La función beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes.

$$B(x) = I(x) - C(x) = 40x - \left(2x^2 + 4x + 98\right) = 40x - 2x^2 - 4x - 98 = -2x^2 + 36x - 98$$

Para averiguar el máximo de esta función calculamos su derivada y la igualamos a cero.

$$B(x) = -2x^2 + 36x - 98 \Rightarrow B'(x) = -4x + 36$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 36 = 0 \Rightarrow -4x = -36 \Rightarrow x = \frac{-36}{-4} = 9 \text{ unidades}$$

Para comprobar si 9 unidades es un máximo calculamos la derivada segunda y sustituimos *x = 9*.

$$B'(x) = -4x + 36 \Rightarrow B''(x) = -4 \Rightarrow B''(9) = -4 < 0$$

Al ser la derivada segunda negativa en $x = 9$ unidades este valor es un **máximo** de la función beneficio.

Este **beneficio máximo** es $B(9) = -2 \cdot 9^2 + 36 \cdot 9 - 98 = -162 + 324 - 98 = 324 - 260 =$ 64 euros

CUESTIÓN A3. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x+a & si \quad x<1 \\ x^2-2 & si \quad 1\le x\le 3 \\ x+b & si \quad x>3 \end{cases}$

a) Determinar a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$. **(1 punto)**

b) Hallar $\int_1^3 f(x)dx$. **(1 punto)**

a) Para que la función $f(x)=\begin{cases} x+a & si \quad x<1 \\ x^2-2 & si \quad 1\le x\le 3 \\ x+b & si \quad x>3 \end{cases}$ sea continua lo debe ser en *x = 1* y en *x = 3*.

En *x = 1* es continua:

- Existe $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x+a=a+1$
- Existe $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x^2-2=1-2=-1$
- Existe $f(1)=1^2-2=-1$
- Deben ser iguales. $a+1=-1\Rightarrow \boxed{a=-2}$

En *x = 3* es continua:

- Existe $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} x^2-2=9-2=7$
- Existe $\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} x+b=3+b$
- Existe $f(3)=3+b$
- Deben ser iguales. $3+b=7\Rightarrow \boxed{b=4}$

Los valores de los parámetros que hacen continua la función son $a=-2$ y $b=4$.

b) Como es una integral definida en el intervalo $(1,3)$ la función en dicho intervalo tiene la expresión $f(x)=x^2-2$. Calculamos el valor de la integral pedida.

$$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 x^2-2dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x\right]_1^3=\left(\frac{3^3}{3}-2\cdot 3\right)-\left(\frac{1^3}{3}-2\cdot 1\right)=3-\frac{1}{3}+2=5-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{14}{3}}$$

CUESTIÓN A4. En el coro universitario el 65% de sus componentes son mujeres. El 30% de las mujeres y el 25% de los hombres son bilingües. Si elegimos al azar a un componente del coro:
a) ¿Cuál es la probabilidad que sea bilingüe? **(0,75 puntos)**
b) Sabiendo que es bilingüe, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **(0,75 puntos)**

Construyamos una tabla de contingencia relativa al problema:

El 30% del 65% que son mujeres son bilingües, esto es, $\frac{30\cdot 65}{100}=\frac{1950}{100}=19,5\%$ del total.

El 25% del 35% que son hombres son bilingües, esto es, $\frac{25\cdot 35}{100}=\frac{875}{100}=8,75\%$ del total.

A pesar de obtener valores decimales en el número de personas, que resulta algo irreal, utilizamos estos datos pues deseamos calcular probabilidades de sucesos.

	Bilingües	**No bilingües**	
Hombres	**8,75%**		
Mujeres	**19,5%**		**65%**
			100%

Completemos los datos que faltan:

	Bilingües	**No bilingües**	
Hombres	**8,75%**	**26,25%**	**35%**
Mujeres	**19,5%**	**45,5%**	**65%**
	28,25%	**71,75%**	**100%**

a) Utilizamos los datos obtenidos en la tabla de contingencia y aplicamos la regla de Laplace.

P(Elegido un componente que sea bilingüe) = 28,25% = $\boxed{0,2825}$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(\text{Elegido un componente que sea mujer, sabiendo que es bilingüe}\right)=$$

$$=P\left(Mujer\ /\ Bilingüe\right)=\frac{P(Mujer\ y\ bilingüe)}{P\left(Bilingüe\right)}=\frac{19,5}{28,25}=\boxed{0,69}$$

CUESTIÓN A5. El tiempo, en años, de renovación de un ordenador portátil se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica de 0,9 años. Si tomamos al azar a 900 usuarios, se obtiene una media muestral de 3,5 años. Hallar el intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de renovación de un ordenador portátil. **(1,5 puntos)**

Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo de renovación de un ordenador portátil. Sabemos que sigue una N(**μ**, 0,9).

Utilizamos la fórmula $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ para establecer el intervalo de confianza.

El tamaño de la muestra es n = 900, la media muestral es $\bar{x}$ = 3,5 años.

Obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(3{,}5 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}9}{\sqrt{900}}, 3{,}5 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}9}{\sqrt{900}} \right)$$

El intervalo de confianza es $(3{,}4412\,,\,3'5588)$

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 euros y 12 euros, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulces deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta. **(3 puntos)**

Llamemos x = número de dulces del tipo A e y = número de dulces del tipo B.

Para elaborar "x" dulces del tipo A necesitaré $\frac{1}{2}x = \frac{x}{2}$ kilos de azúcar y $8x$ huevos.

Para elaborar "y" dulces del tipo B necesitaré x kilos de azúcar y $6x$ huevos.

Las restricciones aplicables al problema son:

Las cantidades deben ser positivas → $\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}\right\}$

En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos → $\left.\begin{matrix} \frac{x}{2} + y \leq 10 \\ 8x + 6y \leq 120 \end{matrix}\right\}$

Reunimos las restricciones en un sistema y simplificamos las expresiones.

$$\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \frac{x}{2} + y \leq 10 \\ 8x + 6y \leq 120 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 20 \\ 4x + 3y \leq 60 \end{matrix}\right\}$$

Dibujemos la región factible (donde está la solución del problema).

$4x + 3y = 60$

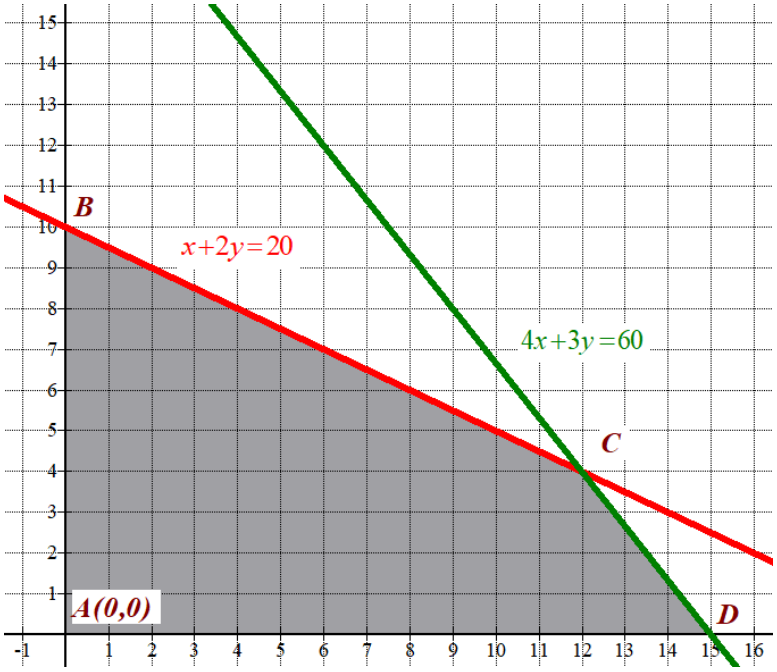
x	$y = \frac{60 - 4x}{3}$
0	20
12	4
15	0

$x + 2y = 20$

x	$y = \frac{20 - x}{2}$
0	10
12	4
20	0



Las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+2y \leq 20 \\ 4x+3y \leq 60 \end{array}\right\}$, por lo que la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas dibujadas. Coloreamos la zona de gris.



Nuestra solución estará en uno de los vértices del polígono gris del dibujo. Averiguamos sus coordenadas:

$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x+2y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=20 \Rightarrow y=10$ Un punto es B(0,10)

$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ 4x+3y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x=60 \Rightarrow x=15$ Un segundo punto es D(15,0)

$\left.\begin{array}{l} x+2y=20 \\ 4x+3y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y+20 \\ 4x+3y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow 4(-2y+20)+3y=60 \Rightarrow -8y+80+3y=60$

$-5y=-20 \Rightarrow y=4 \Rightarrow x=-2\cdot 4+20=20-8=12$

Un tercer punto es C(12,4)

Determinemos la función beneficio sabiendo que por "x" dulces del tipo A ganaré $15x$ y por "y" dulces del tipo B ganaré $12y$. Conjuntamente: $Beneficio = 15x+12y$.

Sustituyendo en cada punto podremos decidir el punto solución:

$$A(0,0) \rightarrow Beneficio(0,0) = 0\,€$$
$$B(0,10) \rightarrow Beneficio(0,10) = 15\cdot 0+12\cdot 10 = 120\,€$$
$$D(15,0) \rightarrow Beneficio(15,0) = 15\cdot 15+12\cdot 0 = 225\,€$$
$$C(12,4) \rightarrow Beneficio(12,4) = 15\cdot 12+12\cdot 4 = 228\,€$$ ¡Máximo!

El máximo beneficio se obtiene para $x = 12$ e $y = 4$.
El máximo beneficio (228 €) se obtiene con 12 dulces del tipo A y 4 del tipo B.

CUESTIÓN B2.

a) Sea la función $f(x)=ax^3+bx$, calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1,1)$ y que en este punto la pendiente de la recta tangente vale –3. **(1 punto)**

b) Si en la función anterior $a=1$ y $b=-12$, determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos extremos. **(1 punto)**

a) Primera condición: Pase por el punto $(1,1)$ → $f(1)=1$.

$$f(1)=a\cdot 1^3+b\cdot 1=a+b\Rightarrow 1=a+b$$

Segunda condición: La pendiente de la recta tangente en $x=1$ vale –3.
La pendiente de la recta tangente en (1,1) es el valor de la derivada en $x=1$.
$f(x)=ax^3+bx\Rightarrow f\,'(x)=3ax^2+b$ sustituyendo $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x)=3ax^2+b \\ f\,'(1)=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow 3a\cdot 1^2+b=-3\Rightarrow 3a+b=-3$$

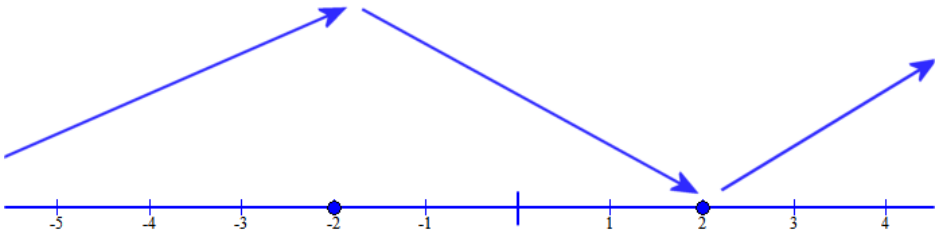
Juntando las dos ecuaciones nos surge un sistema que resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ 3a+b=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=1-a \\ 3a+b=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow 3a+1-a=-3\Rightarrow 2a=-4\Rightarrow a=-2$$
$$b=1-a\Rightarrow b=1+2=3$$

Los valores pedidos son $a=-2$ y $b=3$.

b) Sustituimos en la función los valores dados y queda $f(x)=x^3-12x$.
Calculemos su derivada: $f\,'(x)=3x^2-12$
Igualamos a cero: $f\,'(x)=0\Rightarrow 3x^2-12=0\Rightarrow 3x^2=12\Rightarrow x^2=\frac{12}{3}=4\Rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$
Teniendo en cuenta estos dos puntos críticos obtenidos estudiamos el comportamiento de la derivada en los distintos intervalos en que se divide la recta real:

- En $(-\infty,-2)$ tomamos un valor $x=-3\Rightarrow f\,'(-3)=3(-3)^2-12=27-12=15>0$. La función crece.
- En $(-2,2)$ tomamos un valor $x=0\Rightarrow f\,'(0)=3(0)^2-12=-12<0$. La función decrece.
- En $(2,+\infty)$ tomamos un valor $x=3\Rightarrow f\,'(3)=3(3)^2-12=27-12=15>0$. La función crece.



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(-2,2)$
Tiene un máximo relativo en $x=-2$ y un mínimo relativo en $x=2$.

CUESTIÓN B3. Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la recta $y=6-2x$ y la parábola $y=-x^2+2x+3$. Calcular su área. **(2 puntos)**

Para representar la recta basta con una tabla de valores:

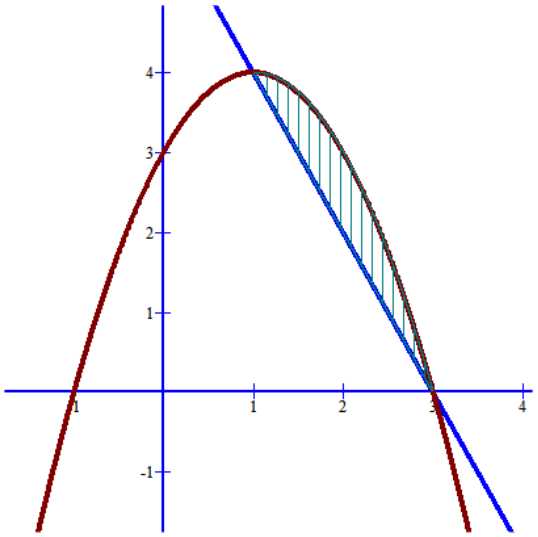
x	$y=6-2x$
1	$6-2=4$
0	$6-0=6$

Y para representar la parábola, hallamos su vértice y algunos puntos más:

$$y=-x^2+2x+3 \Rightarrow x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{-2}=1 \Rightarrow y_v=-1^2+2\cdot 1+3=-1+2+3=4$$

$$V\acute{e}rtice(1,4)$$

x	$y=-x^2+2x+3$
1	4
0	$-0+0+3=3$
2	$-2^2+2\cdot 2+3=3$
-1	$-(-1)^2+2\cdot(-1)+3=-1-2+3=0$



Hallamos los puntos de corte de la recta y la parábola.

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+2x+3 \\ y=6-2x \end{array}\right\} \Rightarrow 6-2x=-x^2+2x+3 \Rightarrow x^2-4x+3=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} x=\dfrac{4+2}{2}=3 \\ x=\dfrac{4-2}{2}=1 \end{cases}$$

El área de la región limitada por las dos funciones es una integral definida con límites de integración 1 y 3. La función a integrar es la diferencia entre la parábola y la recta.

$$\acute{A}rea=\int_1^3 -x^2+2x+3-(6-2x)\,dx=\int_1^3 -x^2+4x-3dx=\left[\frac{-x^3}{3}+2x^2-3x\right]_1^3=$$

$$=\left(\frac{-3^3}{3}+2\cdot 3^2-3\cdot 3\right)-\left(\frac{-1^3}{3}+2\cdot 1^2-3\cdot 1\right)=-9+18-9-\left(\frac{-1}{3}+2-3\right)=$$

$$=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}u^2$$

El área de la región es 4/3 u^2.

CUESTIÓN B4. Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0,3$, $P(B)=0,2$ y $P(A/B)=0,5$. Calcular $P(A\cap B)$ y $P(A\cup B)$. **(1,5 puntos)**

Utilizamos el teorema de Bayes: $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

$$P(A/B)=0,5\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0,5\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{0,2}=0,5\Rightarrow\boxed{P(A\cap B)=0,5\cdot 0,2=0,1}$$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\boxed{P(A\cup B)=0,3+0,2-0,1=0,4}$$

CUESTIÓN B5. El tiempo en minutos de conexión a Internet de los estudiantes de un centro de secundaria, sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Para poder estimar la media del tiempo de conexión, se construye un intervalo de confianza con un error menor o igual a 5 minutos, con un nivel de confianza del 95%. Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar. **(1,5 puntos)**

Para el nivel de confianza del 95% corresponde un valor crítico de $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

$$1 - \propto = 0,95 \rightarrow \propto = 0,05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

El error lo igualamos a 5 y utilizamos la fórmula $Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$1,96 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} = 5 \Rightarrow 19,6 = 5 \cdot \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{19,6}{5} = 3,92 \Rightarrow n = 3,92^2 = 15,36$$

La muestra debe tener un tamaño mínimo de 16 estudiantes (número entero mayor al obtenido).

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. SEPTIEMBRE 2018

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2x\\ 0\\ z\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0\\ y\\ 1\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -5\end{pmatrix}$.

Hallar x, y, z para que se cumpla $A^t\left(B+C\right)=D$. (3 puntos)

CUESTIÓN A2. Dada la función $f(x)=x^3\ln\left(2x+5\right)+ax+b$ con a y b números reales. Hallar a y b para que se cumpla $f(0)=2$ y $f'(0)=1$. (1,5 puntos)

CUESTIÓN A3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_1^2\left(-x^3+3x-2\right)dx$. (0,75 puntos)

b) $\int\frac{3x^2}{x^3+1}dx$. (0,75 puntos)

c) $\int 2e^{2x}dx$. (0,5 puntos)

CUESTIÓN A4. Sabiendo que $P(A\cup B)=0,95$, $P(A\cap B)=0,35$ y $P(\text{A}/\text{B})=0,5$. Hallar $P\left(A\right)$, $P\left(B\right)$ y $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$ (2 puntos)

CUESTIÓN A5. En una muestra aleatoria de 100 individuos se ha obtenido para el peso una media de 60 kg. Se sabe que el peso en la población de la que procede la muestra sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 kg.

a) Obtener un intervalo de confianza al 92% para el peso medio de la población. (1,25 puntos)
b) ¿Qué error máximo se comete en la estimación anterior? (0,25 puntos)

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Un agricultor puede utilizar, como máximo, 120 hectáreas de terreno para dos tipos de cultivo, A y B. Quiere dedicar, al menos, 25 hectáreas al cultivo A, y el terreno dedicado al cultivo B debe ser como mínimo el doble que el dedicado al cultivo A. Cada hectárea de cultivo A le produce 300 € de beneficio, mientras que cada hectárea de cultivo B le produce 215 €. Hallar las hectáreas que debe dedicar a cada uno de los cultivos para conseguir el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderá dicho beneficio? (3 puntos)

CUESTIÓN B2. Dada la función $f(x) = 5x^3 e^{2x} + \frac{1}{x^2+1}$:

a) Calcular $f'(0)$. (1,5 puntos)
b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (0, 1). (0,5 puntos)

CUESTIÓN B3. Hallar el valor del parámetro ***a*** para que se cumpla $\int_0^1 \left(ax^3 - 9x^2 + 10\right)dx = 2a$. (1,5 puntos)

CUESTIÓN B4. En un grupo hay 12 mujeres y 8 hombres. Se eligen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, tres personas.

a) Hallar la probabilidad de que las tres personas sean mujeres. (0,5 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres personas no sean del mismo sexo? (0,75 puntos)
c) Hallar la probabilidad de que salgan, al menos, dos hombres. (0,75 puntos)

CUESTIÓN B5. En una muestra aleatoria de tamaño 150 de individuos de una población se ha obtenido que 32 utilizan el tranvía. Hallar un intervalo de confianza al 99% para la proporción de individuos de la población que utilizan el tranvía. (1,5 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2x\\ 0\\ z\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0\\ y\\ 1\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -5\end{pmatrix}$.

Hallar x, y, z para que se cumpla $A^t\left(B+C\right)=D$. (3 puntos)

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ -1/2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^t\left(B+C\right)=D\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ -1/2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}2x\\ 0\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ y\\ 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ -1/2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x\\ y\\ z+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -5\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x\\ y\\ z+1\end{pmatrix}=2x-3y-z-1\\ \begin{pmatrix}-1/2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x\\ y\\ z+1\end{pmatrix}=-x+y+2z+2\Rightarrow\begin{pmatrix}2x-3y-z-1\\ -x+y+2z+2\\ y-z-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -5\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x\\ y\\ z+1\end{pmatrix}=y-z-1\end{cases}$$

Queda un sistema de ecuaciones que resolvemos.

$$\begin{cases}2x-3y-z-1=3\\ -x+y+2z+2=1\\ y-z-1=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-3y-z=4\\ -x+y+2z=-1\\ y-z=-4\end{cases}\Rightarrow y=z-4\Rightarrow\begin{cases}2x-3\left(z-4\right)-z=4\\ -x+z-4+2z=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-3z+12-z=4\\ -x+3z=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-4z=-8\\ -x+3z=3\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Multiplico la fila 2ª por 2}\\ \text{y las sumo}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}2x-4z=-8\\ -2x+6z=6\\ \hline 2z=-2\end{cases}$$

$\boxed{z=-1}\Rightarrow 2x+4=-8\Rightarrow 2x=-12\Rightarrow\boxed{x=-6}$

$\boxed{y=-1-4=-5}$

La solución es $x=-6;\ y=-5;\ z=-1$

CUESTIÓN A2. Dada la función $f(x)=x^3\ln(2x+5)+ax+b$ con a y b números reales. Hallar a y b para que se cumpla $f(0)=2\ y\ f'(0)=1$. (1,5 puntos)

Vayamos imponiendo las condiciones:

Primera condición $f(0)=2$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3\ln(2x+5)+ax+b \\ f(0)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0^3\ln(2\cdot 0+5)+a\cdot 0+b=2\Rightarrow b=2$$

Como $f(0)=2$, entonces $b=2$.

Segunda condición $f'(0)=1$

$$f(x)=x^3\ln(2x+5)+ax+b\Rightarrow f'(x)=3x^2\ln(2x+5)+x^3\frac{2}{2x+5}+a+0$$

$$f'(0)=3\cdot 0^2\ln(2\cdot 0+5)+0^3\frac{2}{2\cdot 0+5}+a=a$$

Como $f'(0)=1$, entonces $a=1$.

Los valores buscados son $a=1$ y $b=2$.

CUESTIÓN A3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_1^2 \left(-x^3+3x-2\right)dx$. (0,75 puntos)

b) $\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx$. (0,75 puntos)

c) $\int 2e^{2x}dx$. (0,5 puntos)

a)

$$\int_1^2 \left(-x^3+3x-2\right)dx = \left[-\frac{x^4}{4}+3\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2 = \left(-\frac{2^4}{4}+3\frac{2^2}{2}-2\cdot 2\right)-\left(-\frac{1^4}{4}+3\frac{1^2}{2}-2\cdot 1\right)=$$

$$=\left(-4+6-4\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-2\right)=-2+\frac{3}{4}=\boxed{\frac{-5}{4}}$$

b) Utilizamos un cambio de variable.

$$\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ x^3+1=t\rightarrow 3x^2dx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{3x^2}\end{array}\right\} = \int \frac{\cancel{3x^2}}{t}\frac{dt}{\cancel{3x^2}} =$$

$$= \int \frac{1}{t}dt = \ln t = \left\{\begin{array}{c}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ x^3+1=t\end{array}\right\} = \boxed{\ln(x^3+1)+K}$$

c) Utilizamos un cambio de variable.

$$\int 2e^{2x}dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ e^{2x}=t\rightarrow 2e^{2x}dx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{2e^{2x}}=\dfrac{dt}{2t}\end{array}\right\} = \int 2t\frac{dt}{2t} =$$

$$= \int dt = t = \left\{\begin{array}{c}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ e^{2x}=t\end{array}\right\} = \boxed{e^{2x}+K}$$

CUESTIÓN A4. Sabiendo que $P(A\cup B)=0,95$, $P(A\cap B)=0,35$ y $P(\text{A}/\text{B})=0,5$. Hallar $P(A)$, $P(B)$ y $P(\overline{A}/\overline{B})$. (2 puntos)

Utilizamos la fórmula $P(\text{A}/\text{B})=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ para el cálculo de la probabilidad condicionada:

$$P(\text{A}/\text{B})=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow 0,5=\frac{0,35}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{0,35}{0,5}=0,7\Rightarrow \boxed{P(B)=0,7}$$

Utilizando la fórmula de la probabilidad de la unión de 2 sucesos:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$0,95=P(A)+0,7-0,35$$
$$0,95-0,7+0,35=P(A)$$
$$\boxed{P(A)=0,6}$$

De nuevo, utilizamos la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}$$
$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,7=0,3$$
$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-\text{P}(\text{A}\cup\text{B})=1-0,95=0,05$$
$$P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0,05}{0,3}=0,166$$
$$\boxed{P(\overline{A}/\overline{B})=0'166}$$

CUESTIÓN A5. En una muestra aleatoria de 100 individuos se ha obtenido para el peso una media de 60 kg. Se sabe que el peso en la población de la que procede la muestra sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 kg.
a) Obtener un intervalo de confianza al 92% para el peso medio de la población. (1,25 puntos)
b) ¿Qué error máximo se comete en la estimación anterior? (0,25 puntos)

a) Sea X la variable aleatoria que mide el peso de los individuos de una población. Sabemos que sigue una N(**μ**, 20).

Utilizamos la fórmula $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ para establecer el intervalo de confianza.

Obtenemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 92%.

$$1 - \alpha = 0.92 \rightarrow \alpha = 0.08 \rightarrow \alpha/2 = 0.04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$$

El tamaño de la muestra es n = 100, la media muestral es $\bar{x} = 60$ y la desviación típica es $\sigma = 20$.

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(60 - 1'75 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}, 60 + 1'75 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} \right)$$

$$\boxed{\text{Intervalo de confianza} = (56,5\ ,\ 63'5)}$$

b) El error máximo que se puede cometer es:

$$\left.\begin{array}{l} z_{\alpha/2} = 1.75 \\ n = 100 \\ \sigma = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'75 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 3,5\ kg\ .$$

OPCIÓN B

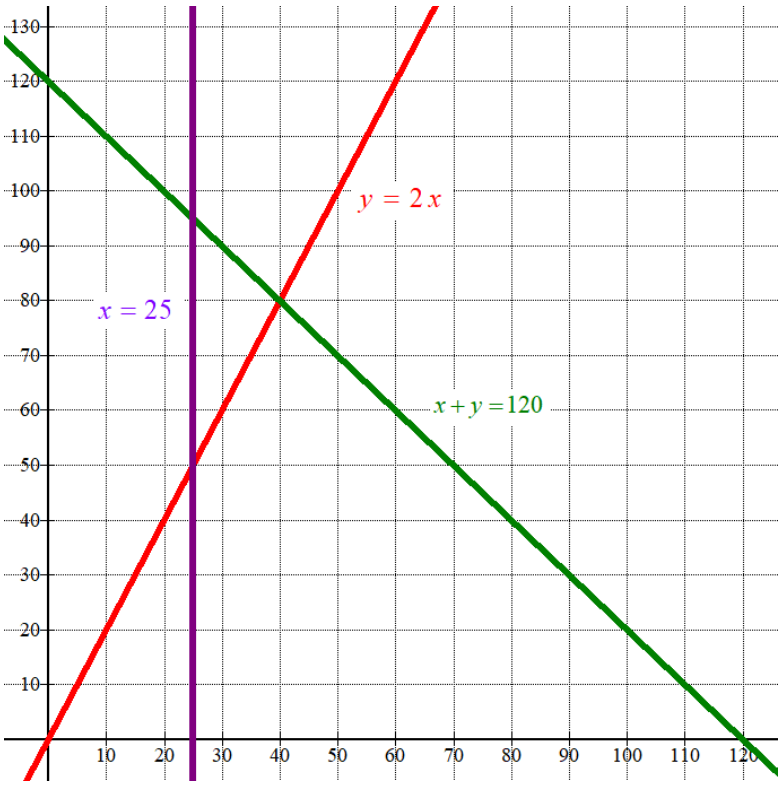
CUESTIÓN B1. Un agricultor puede utilizar, como máximo, 120 hectáreas de terreno para dos tipos de cultivo, A y B. Quiere dedicar, al menos, 25 hectáreas al cultivo A, y el terreno dedicado al cultivo B debe ser como mínimo el doble que el dedicado al cultivo A. Cada hectárea de cultivo A le produce 300 € de beneficio, mientras que cada hectárea de cultivo B le produce 215 €. Hallar las hectáreas que debe dedicar a cada uno de los cultivos para conseguir el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderá dicho beneficio? (3 puntos)

Llamemos x = número de hectáreas del cultivo A e y = número de hectáreas del cultivo B.

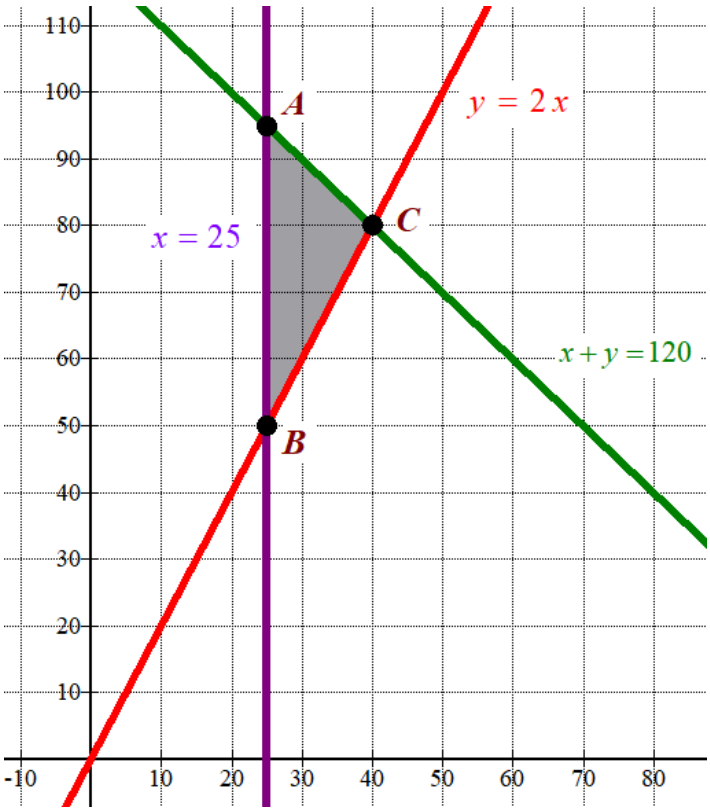
Detallemos cuales son las restricciones del problema:
El terreno dedicado al cultivo B debe ser como mínimo el doble que el dedicado a A → $y \geq 2x$.
Un agricultor puede utilizar, como máximo, 120 hectáreas de terreno para dos tipos de cultivo, A y B → $x + y \leq 120$.
Quiere dedicar, al menos, 25 hectáreas al cultivo A → $x \geq 25$.
Las cantidades deben ser positivas → $\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}\right\}$.
Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 120 \\ x \geq 25 \\ y \geq 2x \end{matrix}\right\}$$

Dibujemos las rectas que delimitan la región factible (donde está la solución del problema).



La región factible es la región del primer cuadrante situada a la derecha de la recta vertical ($x = 25$), por debajo de la recta oblicua decreciente ($x + y = 120$) y por encima de la recta oblicua creciente ($y = 2x$).



Nuestra solución estará en uno de los vértices del triángulo blanco del dibujo. Averiguamos sus coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 25 \\ y = 120 - x \end{array}\right\} \Rightarrow y = 120 - 25 = 95 \Rightarrow A(25, 95)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 25 \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2 \cdot 25 = 50 \Rightarrow \mathrm{B}(25, 50)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 120 - x \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow 120 - x = 2x \Rightarrow 120 = 3x \Rightarrow x = 120 / 3 = 40 \Rightarrow \mathrm{C}(40, 80)$$

Determinemos la función beneficio (*Cada hectárea de cultivo A le produce 300 € de beneficio, mientras que cada hectárea de cultivo B le produce 215 €*):

$$Beneficio(x) = 300x + 215y$$

Sustituyendo cada vértice podremos decidir la solución:

$$A(25,95) \rightarrow Beneficio(25,95) = 300 \cdot 25 + 215 \cdot 95 = 27925 \text{ €}$$
$$B(25,50) \rightarrow Beneficio(25,50) = 300 \cdot 25 + 215 \cdot 50 = 18250 \text{ €}$$
$$C(40,80) \rightarrow Beneficio(40,80) = 300 \cdot 40 + 215 \cdot 80 = 29200 \text{ €} \quad \text{¡Máximo!}$$

El máximo beneficio se obtiene para $x = 40$ e $y = 80$.
Para 40 hectáreas del cultivo A y 80 hectáreas del cultivo B se obtiene un máximo beneficio con un valor de 29200 €.

CUESTIÓN B2. Dada la función $f(x)=5x^3e^{2x}+\dfrac{1}{x^2+1}$:

a) Calcular $f'(0)$. (1,5 puntos)

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (0, 1). (0,5 puntos)

a) Determinemos la expresión de la derivada de la función.

$$f(x)=5x^3e^{2x}+\frac{1}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=15x^2e^{2x}+5x^3\cdot 2e^{2x}+\frac{0\cdot\left(x^2+1\right)-1\cdot(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)=15x^2e^{2x}+10x^3e^{2x}-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Damos a la derivada el valor $x=0$.

$$f'(x)=15x^2e^{2x}+10x^3e^{2x}-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(0)=15\cdot 0^2e^{2\cdot 0}+10\cdot 0^3e^{2\cdot 0}-\frac{2\cdot 0}{\left(0^2+1\right)^2}=0+0-\frac{0}{1}=\boxed{0}$$

Obtenemos que $f'(0)=0$.

b) Partimos de la ecuación general de la recta tangente a la gráfica de la función $y=f(x)$ en un punto $x=a$:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

La aplicamos para $a=0$.

$$\left.\begin{array}{l} y-f(0)=f'(0)(x-0)\\ f(0)=5\cdot 0^3e^{2\cdot 0}+\dfrac{1}{0^2+1}=1\\ f'(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow y-1=0\cdot x\Rightarrow \boxed{y=1}$$

CUESTIÓN B3. Hallar el valor del parámetro ***a*** para que se cumpla $\int_0^1 \left(ax^3 - 9x^2 + 10\right)dx = 2a$. (1,5 puntos)

Resolvamos la integral definida:

$$\int_0^1 \left(ax^3 - 9x^2 + 10\right)dx = \left[\frac{ax^4}{4} - 9\frac{x^3}{3} + 10x\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{a\cdot 1^4}{4} - 9\frac{1^3}{3} + 10\cdot 1\right) - \left(\frac{a\cdot 0^4}{4} - 9\frac{0^3}{3} + 10\cdot 0\right) = \frac{a}{4} - 3 + 10 = \frac{a}{4} + 7$$

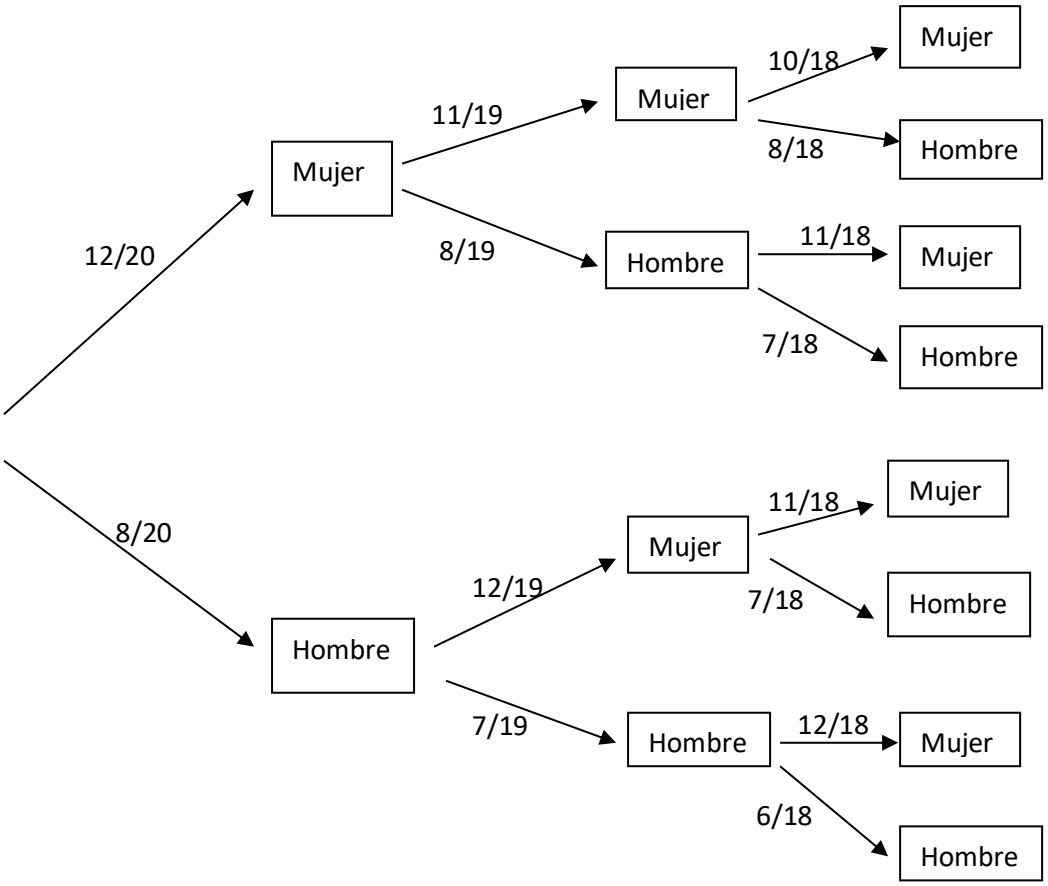
Igualamos el valor obtenido a "*2a*" y resolvemos la ecuación.

$$\frac{a}{4} + 7 = 2a$$
$$a + 28 = 8a$$
$$28 = 7a$$
$$a = \frac{28}{7} = 4$$
$$\boxed{a = 4}$$

El valor buscado es $a = 4$.

CUESTIÓN B4. En un grupo hay 12 mujeres y 8 hombres. Se eligen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, tres personas.
a) Hallar la probabilidad de que las tres personas sean mujeres. (0,5 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres personas no sean del mismo sexo? (0,75 puntos)
c) Hallar la probabilidad de que salgan, al menos, dos hombres. (0,75 puntos)

Construyamos el árbol correspondiente a este experimento aleatorio:



a) Probabilidad de elegir 3 mujeres solo se produce en la rama superior siendo su probabilidad

$$Probabilidad\ de\ elegir\ 3\ mujeres = \frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}\cdot\frac{10}{18} = \frac{11}{57} = \boxed{0,19}$$

b) Probabilidad de que 3 personas no sean del mismo sexo aparece en muchos casos, por ello, lo haremos con el suceso contrario.
Probabilidad de que 3 personas no sean del mismo sexo es lo mismo que 1 – Probabilidad de que sean del mismo sexo.

$$\text{Probabilidad de que 3 personas no sean del mismo sexo} =$$
$$= 1 - \left(\text{Probabilidad de que sean tres mujeres o tres hombres}\right) =$$
$$= 1 - \left(\frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}\cdot\frac{10}{18} + \frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{6}{18}\right) = 1 - \left(\frac{11}{57} + \frac{14}{255}\right) = \boxed{0,75}$$

c) Mirando el árbol y contando desde arriba hasta abajo, se eligen, al menos, dos hombres en el caso 4º, 6º, 7º y 8º. Por lo que la probabilidad del suceso pedido se obtiene sumando las probabilidades de que ocurra cada una de estos sucesos:

Probabilidad de elegir, al menos, 2 hombres =

= P(Mujer Hombre Hombre) + P(Hombre Mujer Hombre) +

+ P(Hombre Hombre Mujer) + P(Hombre Hombre Hombre) =

$$= \frac{12}{20}\cdot\frac{8}{19}\cdot\frac{7}{18} + \frac{8}{20}\cdot\frac{12}{19}\cdot\frac{7}{18} + \frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{12}{18} + \frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{6}{18} = \frac{2352}{6840} = \boxed{0,34}$$

CUESTIÓN B5. En una muestra aleatoria de tamaño 150 de individuos de una población se ha obtenido que 32 utilizan el tranvía. Hallar un intervalo de confianza al 99% para la proporción de individuos de la población que utilizan el tranvía. (1,5 puntos).

Los datos son $p = \frac{32}{150} = 0,21; \quad n = 150$.

Para un nivel de confianza del 99% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \propto = 0,99 \rightarrow \propto = 0,01 \rightarrow \propto/2 = 0'005 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2,575}$$

El intervalo de confianza para la proporción de personas que utilizan el tranvía es:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}},\ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \right) =$$

$$= \left(0,21 - 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,21 \cdot (0,79)}{150}},\ 0,21 + 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,21 \cdot (0,79)}{150}} \right) = \boxed{(0,124\ ,\ 0,2957)}$$

La proporción de individuos de la población que utilizan el tranvía está entre 12.4% y 29.57%.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. JUNIO 2018

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa de opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Discute el siguiente sistema en función del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ ax+y-2z=4 \end{array}\right\} \text{(2'5 puntos)}$$

Resuélvelo para **a = 2**. (0'5 puntos)

CUESTIÓN A2. Una empresa fabrica un determinado producto, que vende al precio de 15 euros. La función de costes, que representa el coste (en unidades monetarias) en función del número de unidades de producto, es $C(\mathrm{x}) = 2x^2 - 45x + 100$, donde x es el número de unidades de producto. Hallar el número de unidades que ha de vender para obtener el máximo beneficio, sabiendo que el beneficio es igual al ingreso total obtenido por la venta menos los costes. Calcular el beneficio máximo (2 puntos)

CUESTIÓN A3. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de la función $y = x^2 - x - 2$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. Hacer la representación gráfica de dicha área. (1,5 puntos)

CUESTIÓN A4. El examen de una asignatura consta de tres pruebas. La primera prueba es superada por el 80% de los alumnos que la realizan. Esta prueba es eliminatoria, por lo que si no se supera no se pueden realizar las otras, y se suspende la asignatura. La segunda prueba tiene dos convocatorias en las que puede superarse, la ordinaria y la extraordinaria (para alumnos que no la hayan aprobado en la ordinaria). Superan esta prueba el 35% de los alumnos en la convocatoria ordinaria y el 50% de los alumnos que se presentan a la extraordinaria. La tercera prueba solo pueden realizarla los alumnos que tienen las otras dos pruebas superadas, y la supera el 75% de los alumnos presentados.

a) Calcular la probabilidad de superar las dos primeras pruebas. (1,5 puntos)
b) Si el requisito para aprobar la asignatura es que se superen las tres pruebas, hallar la probabilidad de aprobar la asignatura. (0,5 puntos)

CUESTIÓN A5. En una muestra aleatoria de tamaño 200 de árboles de una población se ha obtenido que 45 tienen una plaga. Hallar el intervalo de confianza al 90% para la proporción de árboles que tienen la plaga. (1,5 puntos)

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Una fábrica produce dos modelos de bolsos, tipo A y tipo B. Cada bolso tipo A requiere 5 m^2 de piel y 5 horas de trabajo y cada bolso del modelo B requiere 5 m^2 de piel y 10 horas de trabajo. Dispone de 200 m^2 de piel y 225 horas de trabajo. Además, quiere producir mayor o igual número de bolsos tipo A que B. El beneficio obtenido es de 50 euros por cada bolso tipo A y 80 euros por cada bolso tipo B. Hallar el número de bolsos que debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo. (3 puntos)

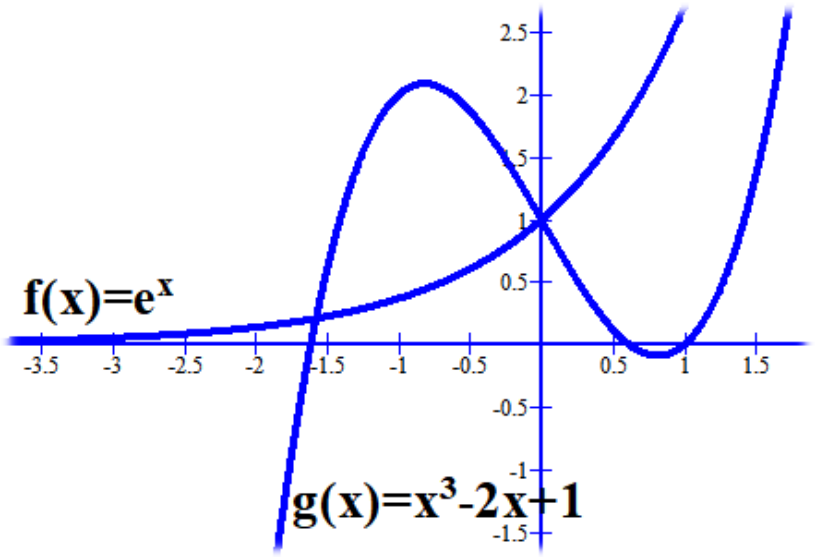
CUESTIÓN B2. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{-1}{\sqrt[5]{5x+1}}$. (0,75 puntos)

b) $g(x)=x^2\ln(x^2)$. (0,75 puntos)

c) $h(x)=e^{-3x+x^2}$. (0,5 puntos)

CUESTIÓN B3. Dadas las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=x^3-2x+1$, cuyas gráficas aparecen en la siguiente figura:



Hallar el área del recinto limitado por las dos gráficas y las rectas x = -1 y x = 0. (1,5 puntos)

CUESTIÓN B4. La probabilidad de que un autobús llegue con retraso a una parada es 0,2. Si pasa cuatro veces a lo largo del día por la parada, calcular la probabilidad de que:

a) No llegue con retraso ninguna de las veces.
b) Llegue con retraso al menos una vez.
c) Al menos tres veces llegue con retraso.
d) Llegue con retraso exactamente dos veces consecutivas. (2 puntos)

CUESTIÓN B5. La altura para una determinada población sigue una distribución normal con una desviación típica conocida σ. Para hallar un intervalo de confianza para la media de la población se ha tomado una muestra aleatoria simple de 100 individuos, obteniéndose una altura media de 145 cm. Si el intervalo de confianza con un nivel de significación 0'05 construido a partir de los datos anteriores es $(135,2\ ,\ 154,8)$, hallar el valor de σ. (1,5 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Discute el siguiente sistema en función del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ ax+y-2z=4 \end{array}\right\}$$ (2'5 puntos)

Resuélvelo para **a = 2**. (0'5 puntos)

Del sistema consideramos su matriz de coeficientes y calculamos su determinante:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2+2a+0-(-a+0+1) = 3a-3$$

Averiguamos cuando se anula el determinante $\rightarrow 3a-3=0 \Rightarrow 3a=3 \Rightarrow a=1$

Distinguimos dos casos:

Caso 1º. a ≠ 1

El determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo, y por tanto:
Rango A = Rango matriz ampliada = 3 = número de incógnitas → El sistema tiene una única solución (Sistema Compatible Determinado)

Caso 2º. a = 1

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ x+y-2z=4 \end{array}\right\}$$

Lo transformamos en un sistema triangular equivalente.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ x+y-2z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} Fila3^{a}-Fila1^{a} \rightarrow Fila3^{a} \\ x+y-2z=4 \\ \underline{-x-2y+z=-6} \\ -y-z=-2 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ -y-z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} Fila3^{a}+Fila2^{a} \rightarrow Fila3^{a} \\ -y-z=-2 \\ \underline{y+z=1} \\ 0=-1 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ 0=-1 \end{array}\right\}$$

La última ecuación es una ecuación imposible y el sistema no tiene solución. Sistema incompatible.

Para a = 2 el sistema es compatible determinado (CASO 1), hallemos su solución

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ 2x+y-2z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} Fila3^{a}-2\cdot Fila1^{a}\rightarrow Fila3^{a} \\ 2x+y-2z=4 \\ \underline{-2x-4y+2z=-12} \\ -3y=-8 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ y+z=1 \\ \boxed{y=\frac{8}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2\cdot\frac{8}{3}-z=6 \\ \frac{8}{3}+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-z=6-\frac{16}{3}=\frac{2}{3} \\ \boxed{z=1-\frac{8}{3}=\frac{-5}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow x+\frac{5}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}=-1}$$

La solución es $x=-1;\ y=\frac{8}{3};\ z=\frac{-5}{3}$ -

CUESTIÓN A2. Una empresa fabrica un determinado producto, que vende al precio de 15 euros. La función de costes, que representa el coste (en unidades monetarias) en función del número de unidades de producto, es $C(\mathrm{x}) = 2x^2 - 45x + 100$, donde x es el número de unidades de producto. Hallar el número de unidades que ha de vender para obtener el máximo beneficio, sabiendo que el beneficio es igual al ingreso total obtenido por la venta menos los costes. Calcular el beneficio máximo (2 puntos).

La función Beneficio que deseamos maximizar es:

$$B(x) = Ingresos - Costes = 15x - \left(2x^2 - 45x + 100\right) = -2x^2 + 60x - 100$$

Derivamos e igualamos a cero para encontrar los puntos críticos de la función Beneficio.

$$B'(x) = -4x + 60 = 0$$

$$x = \frac{-60}{-4} = 15 \text{ unidades del producto}$$

Usamos la segunda derivada para comprobar si en $x = 15$ la función $B(x)$ tiene un máximo relativo.

$$B'(x) = -4x + 60 \Rightarrow B''(x) = -4 \Rightarrow B''(15) = -4 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa en $x = 15$ la función $B(x)$ tiene un máximo relativo.

Con la producción de 15 unidades obtenemos un beneficio máximo.

Calculamos el valor de este beneficio máximo sustituyendo en la función $B(x)$ el valor de $x = 15$.

$$B(15) = -2 \cdot 15^2 + 60 \cdot 15 - 100 = -450 + 900 - 100 = 350$$

El beneficio máximo es de 350 unidades monetarias.

CUESTIÓN A3. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de la función $y = x^2 - x - 2$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. Hacer la representación gráfica de dicha área. (1,5 puntos)

Averigüemos donde la función $y = x^2 - x - 2$ corta al eje OX ($y = 0$).

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - x - 2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = x^2 - x - 2 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} = \frac{1+3}{2} = 2 \\ = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

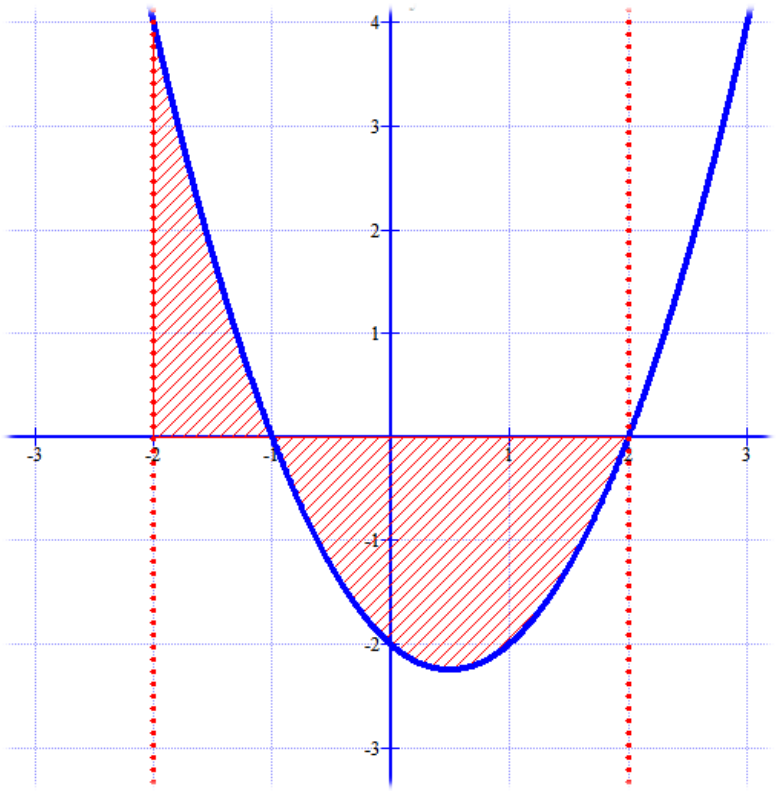
El valor $x = -1$ está situado entre $x = -2$ y $x = 2$, por lo que el área pedida se calculará como la suma del valor absoluto de dos integrales definidas, una entre –2 y –1 y otra entre –1 y 2.

$$Área = \left| \int_{-2}^{-1} x^2 - x - 2 dx \right| + \left| \int_{-1}^{2} x^2 - x - 2 dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^{-1} \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^{2} \right| =$$

$$= \left| \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 2(-2) \right) \right| +$$

$$+ \left| \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) \right) \right| =$$

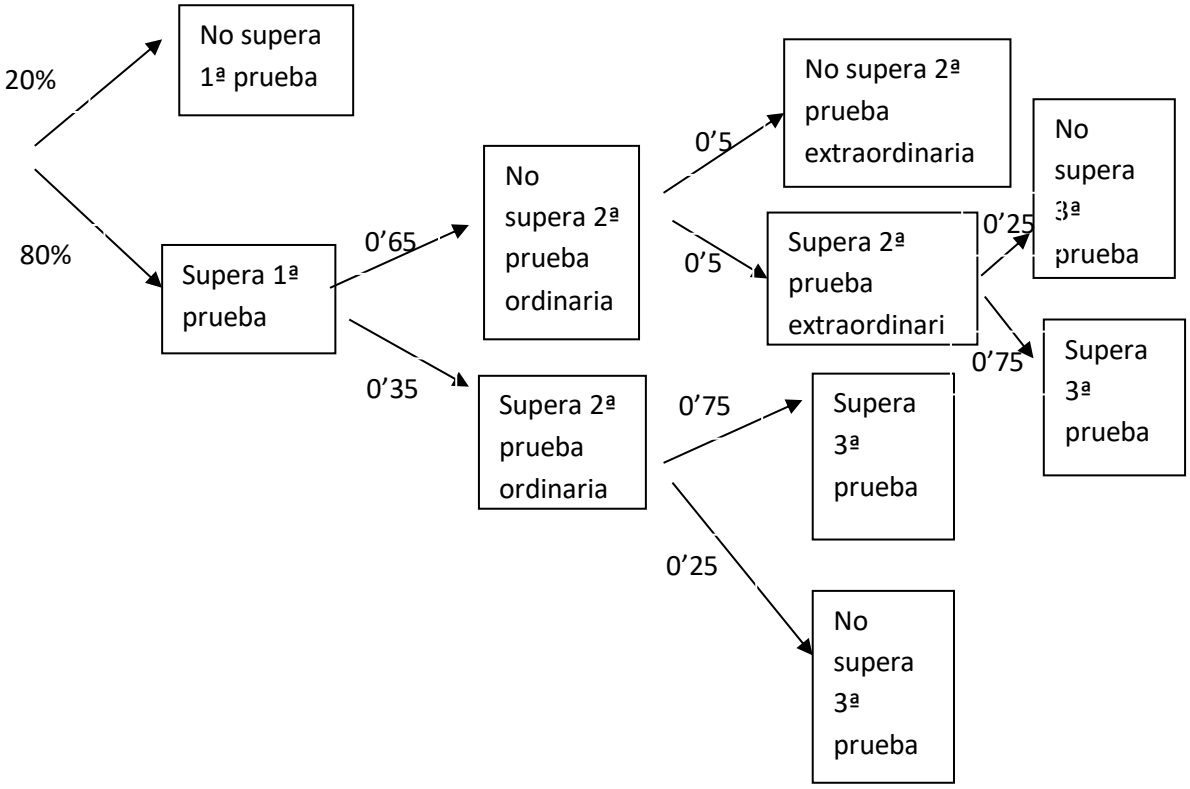
$$= \left| \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{-8}{3} - 2 + 4 \right) \right| + \left| \frac{8}{3} - 2 - 4 - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \right| = \boxed{\frac{19}{3} \text{ u}^2}$$



CUESTIÓN A4. El examen de una asignatura consta de tres pruebas. La primera prueba es superada por el 80% de los alumnos que la realizan. Esta prueba es eliminatoria, por lo que si no se supera no se pueden realizar las otras, y se suspende la asignatura. La segunda prueba tiene dos convocatorias en las que puede superarse, la ordinaria y la extraordinaria (para alumnos que no la hayan aprobado en la ordinaria). Superan esta prueba el 35% de los alumnos en la convocatoria ordinaria y el 50% de los alumnos que se presentan a la extraordinaria. La tercera prueba solo pueden realizarla los alumnos que tienen las otras dos pruebas superadas, y la supera el 75% de los alumnos presentados.

a) Calcular la probabilidad de superar las dos primeras pruebas. (1,5 puntos)
b) Si el requisito para aprobar la asignatura es que se superen las tres pruebas, hallar la probabilidad de aprobar la asignatura. (0,5 puntos)

Construyamos un árbol que nos aclare la situación



Con este esquema, respondemos a las preguntas:

a) P(Superar las dos primeras pruebas) = 0'8 · 0'35 + 0'8 · 0'65 · 0'5 = **0'504**

b) P(Superar las tres pruebas) = 0'8 · 0'35 · 0'75 + 0'8 · 0'65 · 0'5 · 0'75 = **0'405**

CUESTIÓN A5. En una muestra aleatoria de tamaño 200 de árboles de una población se ha obtenido que 45 tienen una plaga. Hallar el intervalo de confianza al 90% para la proporción de árboles que tienen la plaga. (1,5 puntos)

Buscamos en la tabla de la normal $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90%.

$$1 - \propto = 0{,}90 \rightarrow \propto = 0{,}1 \rightarrow \propto/2 = 0'05 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}645}$$

Conocemos el tamaño de la muestra n = 200 y la proporción muestral $p = \frac{45}{200} = 0'225$.

$1 - p = 1 - \frac{45}{200} = \frac{155}{200}$

La fórmula del intervalo de confianza es $\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}, \quad p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \right)$

Con un 90 % de nivel de confianza y con los datos del ejercicio el intervalo sería:

$$\left(\frac{45}{200} - 1'645 \cdot \sqrt{\frac{\frac{45}{200} \cdot \frac{155}{200}}{200}}, \quad \frac{45}{200} + 1'645 \cdot \sqrt{\frac{\frac{45}{200} \cdot \frac{155}{200}}{200}} \right) =$$

$$= (0'225 - 0'049, \quad 0'225 + 0'049) =$$

$$= (0'176, 0'274)$$

La proporción de árboles que tienen la plaga seria entre un 17 % y un 27%.

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Una fábrica produce dos modelos de bolsos, tipo A y tipo B. Cada bolso tipo A requiere 5 m^2 de piel y 5 horas de trabajo y cada bolso del modelo B requiere 5 m^2 de piel y 10 horas de trabajo. Dispone de 200 m^2 de piel y 225 horas de trabajo. Además, quiere producir mayor o igual número de bolsos tipo A que B. El beneficio obtenido es de 50 euros por cada bolso tipo A y 80 euros por cada bolso tipo B. Hallar el número de bolsos que debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo. (3 puntos)

Llamemos x al número de bolsos del modelo A e y al número de bolsos del modelo B.

El beneficio es $B(x,y)=50x+80y$. Función a maximizar.

Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ En\ cuanto\ a\ la\ piel\ (dispone\ de\ 200\,m^2) \rightarrow 5x+5y \leq 200 \Rightarrow x+y \leq 40 \\ En\ cuanto\ a\ horas\ \text{de}\ trabajo\ (dispone\ de\ 225\ horas) \rightarrow 5x+10y \leq 225 \Rightarrow x+2y \leq 45 \\ Quiere\ producir\ mayor\ o\ igual\ número\ de\ bolsos\ tipo\ A\ que\ B \rightarrow x \geq y \end{cases}$$

Las rectas que separan la zona solución son

$x=0$

$y=0$

$x+y=40 \rightarrow y=40-x$

$x+2y=45 \rightarrow y=\dfrac{45-x}{2}$

$y=x$

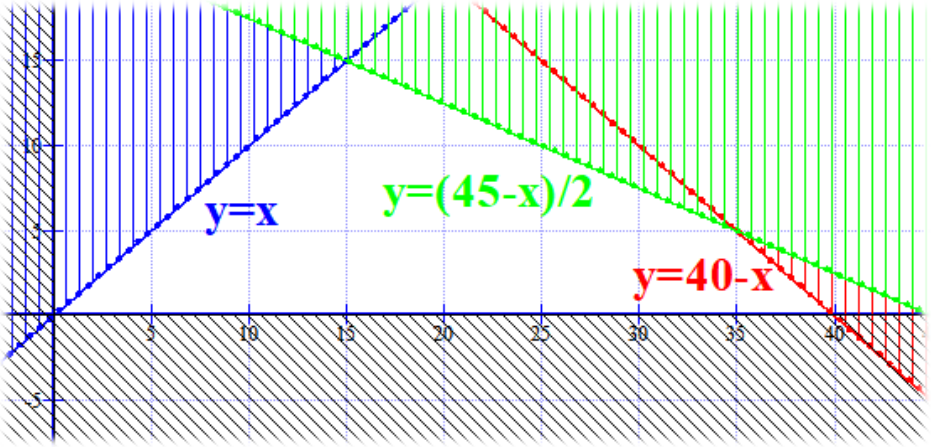
Vamos a dibujar las rectas para delimitar la región factible.

x	$y=40-x$
40	0
0	40

x	$y=\dfrac{45-x}{2}$
45	0
5	20

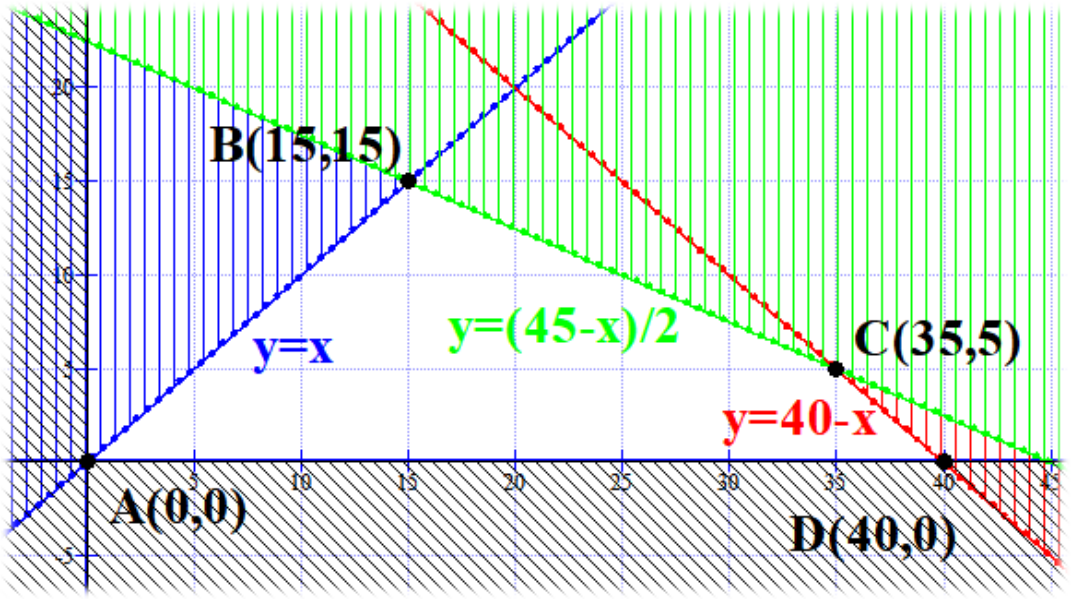
x	$y=x$
40	40
0	0

Dibujando dichas rectas y rayando la parte del plano que no es solución, obtendremos un dibujo parecido al siguiente:



Determinemos los vértices de la región factible, que son los puntos candidatos a ser máximos para la función beneficio $B(x,y)=50x+80y$.

Son los puntos de corte de las rectas que delimitan la región factible (de color blanco) Resolviendo cada uno de los sistemas, obtenemos:



Valoremos la función objetivo $B(x,y)=50x+80y$ en cada uno de estos puntos y decidimos cual tiene el máximo beneficio.

$$A(0,0)\rightarrow B(0,0)=0\ €$$
$$B(15,15)\rightarrow B(15,15)=750+1200=1950\ €$$
$$C(35,5)\rightarrow B(35,5)=1750+400=2150\ € \text{ ¡Máximo!}$$
$$D(40,0)\rightarrow B(40,0)=2000+0=2000\ €$$

El beneficio máximo es para el punto C (35, 5) que significa fabricar 35 bolsos del tipo A y 5 del tipo B. Dicho beneficio máximo es de 2150 €.

CUESTIÓN B2. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{-1}{\sqrt[5]{5x+1}}$. (0,75 puntos)

b) $g(x)=x^2\ln(x^2)$. (0,75 puntos)

c) $h(x)=e^{-3x+x^2}$. (0,5 puntos)

a) Cambiamos la expresión de la función convirtiendo la raíz en potencia. Así será más fácil de derivar.

$$f(x)=\frac{-1}{\sqrt[5]{5x+1}}=-(5x-1)^{-1/5}$$

Derivamos y simplificamos la expresión final de la derivada.

$$f(x)=-(5x-1)^{-1/5}\Rightarrow f'(x)=-\frac{-1}{5}(5x-1)^{-1/5-1}\cdot 5=(5x-1)^{-6/5}=\boxed{\frac{1}{\sqrt[5]{(5x-1)^6}}}$$

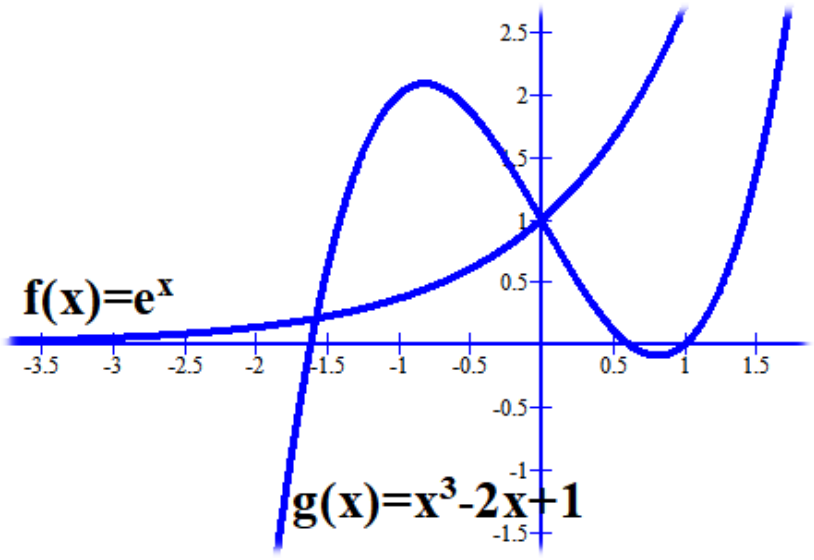
b) Utilizamos la fórmula de derivación de un producto.

$$g'(x)=2x\ln(x^2)+x^2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x=\boxed{2x\ln(x^2)+2x}$$

c) Utilizamos la regla de la cadena.

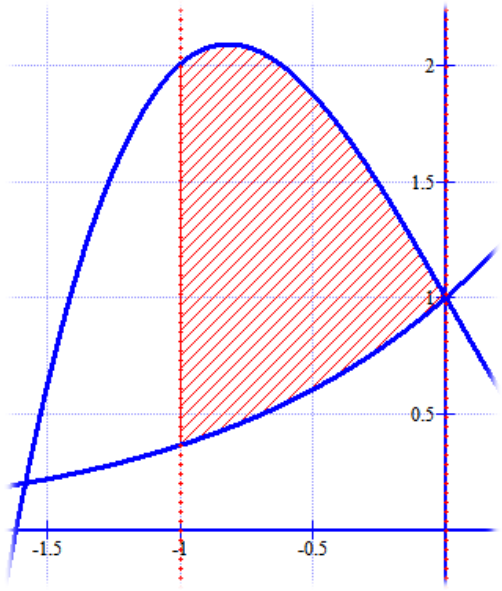
$$h'(x)=e^{-3x+x^2}\cdot(-3+2x)$$

CUESTIÓN B3. Dadas las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=x^3-2x+1$, cuyas gráficas aparecen en la siguiente figura:



Hallar el área del recinto limitado por las dos gráficas y las rectas $x=-1$ y $x=0$. (1,5 puntos)

Le añadimos al dibujo las dos rectas verticales $x=-1$ y $x=0$.



Obtenemos el valor del área de la zona rayada como la integral definida entre -1 y 0 de la diferencia entre las dos funciones.

$$Área=\int_{-1}^{0}\left(x^3-2x+1\right)-e^x dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^2+x-e^x\right]_{-1}^{0}=$$

$$=\left(\frac{0^4}{4}-0^2+0-e^0\right)-\left(\frac{(-1)^4}{4}-(-1)^2-1-e^{-1}\right)=-1-\frac{1}{4}+1+1+\frac{1}{e}=\boxed{1'11\,u^2}$$

CUESTIÓN B4. La probabilidad de que un autobús llegue con retraso a una parada es 0,2. Si pasa cuatro veces a lo largo del día por la parada, calcular la probabilidad de que:
a) No llegue con retraso ninguna de las veces.
b) Llegue con retraso al menos una vez.
c) Al menos tres veces llegue con retraso.
d) Llegue con retraso exactamente dos veces consecutivas. (2 puntos)

PRIMERA FORMA DE RESOLVERLO

Usando propiedades de la probabilidad.

a) P(no llega con retraso ninguna vez)=P(No llega con retraso la 1ª y No llega con retraso la 2ª y No llega con retraso la 3ª y No llega con retraso la 4ª) = 0'8 · 0'8 · 0'8 · 0'8 = $\boxed{0'41}$

b) P(Llegue con retraso al menos una vez) = 1 – P(No llega con retraso ninguna vez) = 1 – 0'41 = $\boxed{0'59}$

c) P(Al menos tres veces llegue con retraso) = P(Llegue con retraso las 4 veces) + P(Llegue sin retraso solo la 1ª vez) + P(Llegue sin retraso solo la 2ª vez) + P(Llegue sin retraso solo la 3ª vez) + P(Llegue sin retraso solo la 4ª vez) = 0'2 · 0´2 · 0´2 · 0´2 + 0'8 · 0'2 · 0'2 · 0'2 + 0'2 · 0'8 · 0'2 · 0'2 + 0'2 · 0'2 · 0'8 · 0'2 + 0'2 · 0'2 · 0'2 · 0'8 = $\boxed{0'0272}$

d) P(Llegue con retraso exactamente 2 veces consecutivas) = P(Llegue con retraso solo la 1ª y la 2ª vez) + P(Llegue con retraso solo la 2ª y la 3ª vez) + P(Llegue con retraso solo la 3ª y la 4ª vez) = 0'2 · 0'2 · 0'8 · 0'8 + 0'8 · 0'2 · 0'2 · 0'8 + 0'8 · 0'8 · 0'2 · 0'2 = 3 · 0'2 · 0'2 · 0'8 · 0'8 = $\boxed{0'077}$

SEGUNDA FORMA DE RESOLVERLO

Con el uso de la binomial.
Decido que sea X = "número de veces que pasa con retraso el autobús en las 4 veces diarias"
Esta es una variable binomial pues las repeticiones son independientes entre sí y solo puede ocurrir "pasar con retraso" o " pasar sin retraso".
p = P(el autobús pase con retraso") = 0,2. q = P(el autobús pase sin retraso) = 1 – 0,2 = 0,8.

X es B(4, 0´2)

a) $P(X=0)=\binom{4}{0}0'2^0\cdot 0'8^4=0'8^4=\boxed{0,4096}$

b) $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\binom{4}{0}0'2^0\cdot 0'8^4=1-0'8^4=1-0,4096=\boxed{0,5904}$

c)

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)=\binom{4}{3}0'2^3\cdot 0'8^1+\binom{4}{4}0'2^4\cdot 0'8^0=$$

$$=4\cdot 0'2^3\cdot 0'8^1+0'2^4=\boxed{0,0272}$$

d) Este apartado no podemos hacerlo con binomial, pues especifica que sean consecutivas. No dice que llegue con retraso dos veces, sino dos veces **consecutivas**.

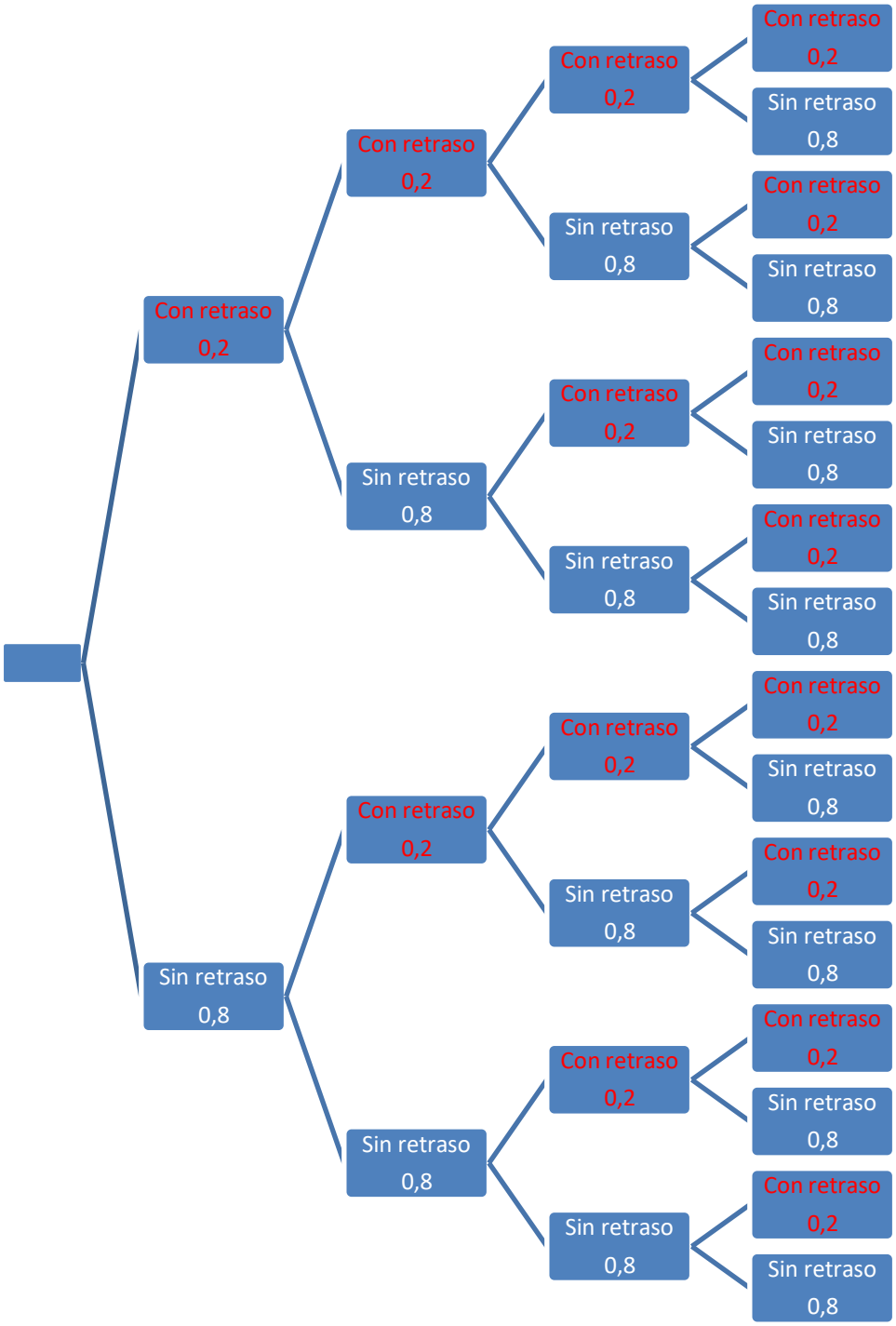
Hay $\binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2}=6$ formas de llegar 2 veces con retraso. Pero de esas 6 solamente 3 son las formas de que lo haga de forma consecutiva: 1ª y 2ª parada, 2ª y 3ª parada, 3ª y 4ª parada.

La probabilidad pedida es:

P(Llegue con retraso dos veces consecutivas = $3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0'8^2 =$ $\boxed{0{,}0768}$

TERCERA FORMA DE RESOLVERLO

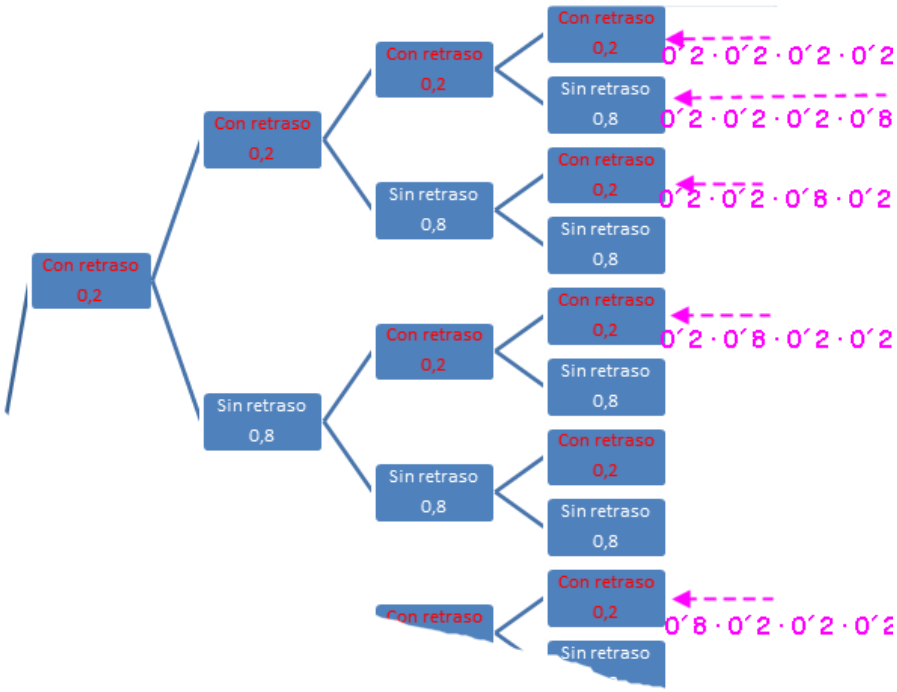
Con diagrama de árbol.



a) Este suceso ocurre solo en la rama inferior.
P(no llega con retraso ninguna vez) = P(Llega sin retraso 1ª, 2ª, 3ª y 4ª parada) =
$= 0'8 \cdot 0'8 \cdot 0'8 \cdot 0'8 =$ $\boxed{0'41}$

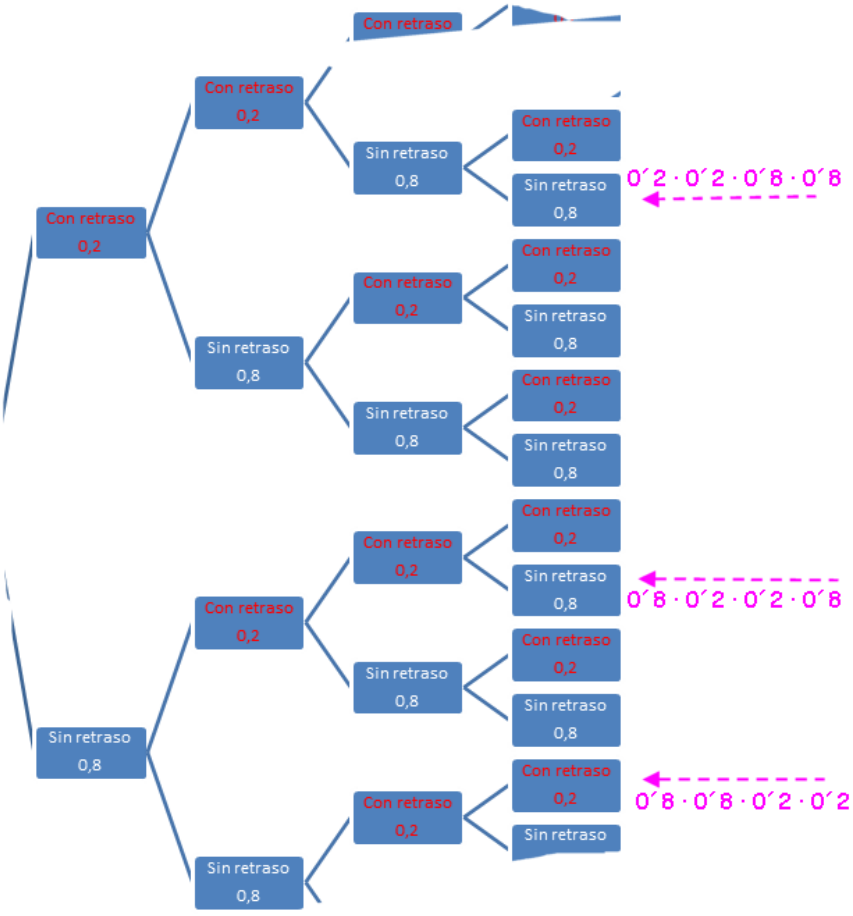
b) Este suceso ocurre en muchas ramas. Lo intentamos hacer con el suceso contrario.
P(Llegue con retraso al menos una vez) = 1 – P(Llega sin retraso siempre) = 1 – 0'41 = $\boxed{0'59}$

c) Este suceso ocurre en las ramas que remarco:



P(Al menos tres veces llegue con retraso) =
$= 0'2 \cdot 0'2 \cdot 0'2 \cdot 0'2 + 0'2 \cdot 0'2 \cdot 0'2 \cdot 0'8 + 0'2 \cdot 0'2 \cdot 0'8 \cdot 0'2 + 0'2 \cdot 0'8 \cdot 0'2 \cdot 0'2 + 0'8 \cdot 0'2 \cdot 0'2 \cdot 0'2 = \boxed{0'0272}$

d) Este suceso ocurre en las ramas que se señalan:



P(Llegue con retraso exactamente 2 veces consecutivas) =
$= 0'2 \cdot 0'2 \cdot 0'8 \cdot 0'8 + 0'8 \cdot 0'2 \cdot 0'2 \cdot 0'8 + 0'8 \cdot 0'8 \cdot 0'2 \cdot 0'2 =$
$= 3 \cdot 0'2 \cdot 0'2 \cdot 0'8 \cdot 0'8 = \boxed{0'077}$

CUESTIÓN B5. La altura para una determinada población sigue una distribución normal con una desviación típica conocida σ. Para hallar un intervalo de confianza para la media de la población se ha tomado una muestra aleatoria simple de 100 individuos, obteniéndose una altura media de 145 cm. Si el intervalo de confianza con un nivel de significación 0'05 construido a partir de los datos anteriores es (135´2, 154´8), hallar el valor de σ. (1,5 puntos)

Como la media muestral es el valor central del intervalo de confianza podemos determinar el error en ese intervalo de confianza como 154'8 – 145 = 9'8
Como el error sigue la fórmula:

$$E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Los datos proporcionados son n = 100 y $\alpha = 0'05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

Utilizando la fórmula del error despejamos y obtenemos el valor de σ.

$$9'8 = 1'96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \rightarrow 9'8 \cdot 10 = 1'96 \cdot \sigma \rightarrow \boxed{\sigma = \frac{98}{1'96} = 50}$$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. SEPTIEMBRE 2017

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa de opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Tres automóviles A, B y C salen del mismo punto en tres momentos distintos y los tres circulan a una velocidad constante de 100 km por hora. Actualmente la suma de las distancias recorridas por los tres es de 800 km y la distancia recorrida por A es el triple de la recorrida por B. Hallar la distancia recorrida por cada uno de ellos en la actualidad, sabiendo que cuando pase media hora (es decir, cuando todos hayan recorrido 50 km más) la suma de las distancias recorridas por A y B será 50 km más que la recorrida por C. (3 puntos)

CUESTIÓN A2. Dada la función $f(\mathrm{x}) = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$ donde *a* y *b* son números reales, hallar el valor de *a* y *b* para que se cumpla que $f(0)=1$ y $f'(0)=1$. (1,25 puntos)

CUESTIÓN A3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & si \quad x < -3 \\ x^2+2x+1 & si \quad -3 \le x \end{cases}$$

a) Hacer la representación gráfica de dicha función. (0'5 puntos)
b) Hallar el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y la recta $y = 2x+5$. (1'75 puntos)

CUESTIÓN A4. Para que un producto cosmético tenga un informe favorable de una agencia de sanidad debe superar tres pruebas de evaluación de garantía sanitaria. Las pruebas son independientes y todos los productos se someten a las tres pruebas. Se sabe, por otras ocasiones, que la probabilidad de superar la primera prueba es 0,8, la de superar la segunda es 0,75 y la de superar la tercera 0,85. Hallar:

a) La probabilidad de que un producto tenga el informe favorable. (1 punto)
b) La probabilidad de que un producto no tenga el informe favorable por fallar solamente en una prueba. (1 punto)

CUESTIÓN A5. El consumo de carne por persona en un año para una población es una variable aleatoria con distribución normal con desviación típica igual a 2 kg. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 individuos y se obtienen los siguientes consumos anuales por persona (en kg):

24; 20; 12; 10; 30; 27; 35; 30; 25; 39.

Determinar el intervalo de confianza al 90% para el consumo medio de carne por persona al año para la población. (1,5 puntos)

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Una perfumería prepara dos lotes de productos, el lote 1 contiene 2 perfumes, 2 jabones y 1 crema corporal y el lote 2 está formado por 1 perfume, 2 jabones y 2 cremas corporales. Sabiendo que dispone de 150 perfumes, 180 jabones y 150 cremas corporales y que el beneficio obtenido es de 45 euros por cada lote del tipo 1 y de 30 euros por cada lote del tipo 2, hallar el número de lotes que debe hacer de cada tipo para obtener el beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio? (3 puntos)

CUESTIÓN B2. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$. (0,75 puntos)

b) $g(x)=x^2e^{x^2}$. (0,75 puntos)

c) $h(x)=\dfrac{\ln\left(x^2\right)}{x}$. (0,75 puntos)

CUESTIÓN B3. Dada la función $f(x)=2e^{2x-2}$ hallar la función primitiva $F\left(x\right)$ que cumple que $F\left(1\right)=0$. (1,25 puntos)

CUESTIÓN B4. En un grupo el 60% de los alumnos aprueba la asignatura A y el 30% aprueba la asignatura B. Se sabe, además, que el 10% de los alumnos que aprueba la asignatura B aprueba también la asignatura A. Hallar el porcentaje de alumnos del grupo que aprueba alguna de las dos asignaturas. (2 puntos)

CUESTIÓN B5. La estatura de los individuos de una población es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 0,4 m. Para estimar la media se toma una muestra aleatoria de tamaño n y se encuentra un valor medio de la estatura igual a 1,6 m. Si el intervalo de confianza al 95% construido a partir de esos datos es (1,5216 , 1,6784), calcula el valor de n. (1,5 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Tres automóviles A, B y C salen del mismo punto en tres momentos distintos y los tres circulan a una velocidad constante de 100 km por hora. Actualmente la suma de las distancias recorridas por los tres es de 800 km y la distancia recorrida por A es el triple de la recorrida por B. Hallar la distancia recorrida por cada uno de ellos en la actualidad, sabiendo que cuando pase media hora (es decir, cuando todos hayan recorrido 50 km más) la suma de las distancias recorridas por A y B será 50 km más que la recorrida por C. (3 puntos)

Damos nombre a las incógnitas de las cuales queremos averiguar su valor. Llamamos "a" a la distancia recorrida por el automóvil A, "b" a la distancia recorrida por el automóvil B y "c" a la distancia recorrida por el automóvil C.

Obtenemos las ecuaciones del sistema.

"La suma de las distancias recorridas por los tres es de 800 km" → $a+b+c=800$

"La distancia recorrida por A es el triple de la recorrida por B → $a=3b$

"Cuando todos hayan recorrido 50 km más la suma de las distancias recorridas por A y B será 50 km más que la recorrida por C" → $(a+50)+(b+50)=(c+50)+50$

Juntamos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=800 \\ a=3b \\ (a+50)+(b+50)=(c+50)+50 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b+c=800 \\ a=3b \\ a+b+100=c+100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b+c=800 \\ a=3b \\ a+b=c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 3b+b+c=800 \\ 3b+b=c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4b+c=800 \\ 4b=c \end{array}\right\} \Rightarrow 8b=800 \Rightarrow \boxed{b=100}$$

Y sustituyendo en la ecuación $a=3b \rightarrow \boxed{a=300}$

Y sustituyendo en la ecuación $4b=c \rightarrow \boxed{c=400}$

La solución del problema es A recorre 300 km, B recorre 100 km y C recorre 400 km.

CUESTIÓN A2. Dada la función $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ donde *a* y *b* son números reales, hallar el valor de *a* y *b* para que se cumpla que $f(0)=1$ y $f'(0)=1$. (1,25 puntos)

Apliquemos la primera condición: $f(0)=1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1} \\ f(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=\frac{a\cdot 0+b}{0^2+1} \Rightarrow 1=\frac{b}{1} \Rightarrow \boxed{b=1}$$

Calculemos la derivada de la función para poder aplicar la segunda condición $f'(0)=1$

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{a\cdot\left(x^2+1\right)-2x\left(ax+b\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Aplicamos la segunda condición $f'(0)=1$.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=\dfrac{a\cdot\left(x^2+1\right)-2x\left(ax+b\right)}{\left(x^2+1\right)^2} \\ f'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=\frac{a\cdot\left(0^2+1\right)-2\cdot 0\cdot\left(a\cdot 0+b\right)}{\left(0^2+1\right)^2} \Rightarrow 1=\frac{a-0}{1} \Rightarrow \boxed{1=a}$$

El valor de a y b buscado es $a=b=1$.

CUESTIÓN A3. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & si \quad x<-3\\ x^2+2x+1 & si\ -3\le x\end{cases}$$

a) Hacer la representación gráfica de dicha función. (0'5 puntos)
b) Hallar el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y la recta $y=2x+5$. (1'75 puntos)

a) Para representar la función a trozos $f(x)=\begin{cases}-x+1 & si \quad x<-3\\ x^2+2x+1 & si\ -3\le x\end{cases}$ realizaremos dos tablas de valores, sabiendo que son un trozo de recta y un trozo de parábola.

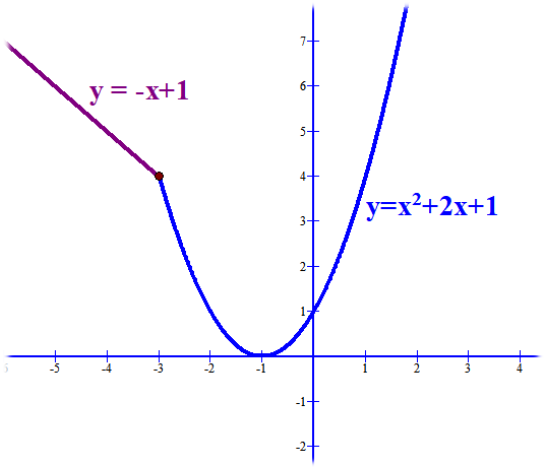
x	$f(x)=-x+1$
–3 (no vale)	3 +1= 4
–4	4 +1= 5
–5	5 +1= 6

x	$f(x)=x^2+2x+1$
–3 (si vale)	9 – 6 +1 = 4
–2	4 – 4 +1 = 1
–1	1 – 2 + 1 = 0
0	0 + 0 + 1 = 1
1	1 + 2 + 1 = 4

Para trazar mejor la parábola determinemos su vértice:

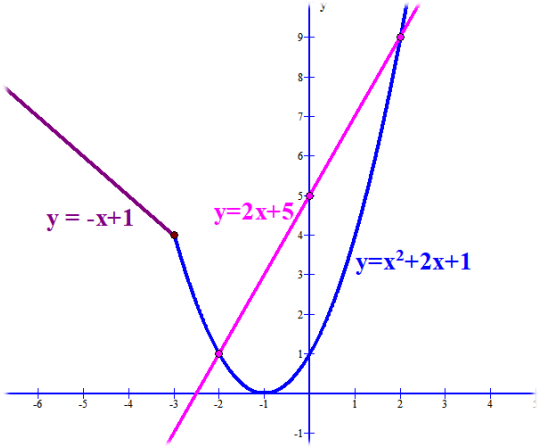
$x_v=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-2}{2}=-1\Rightarrow y_v=f(-1)=1-2+1=0$

El vértice de la parábola es V=$(-1,0)$



b) Añadimos a la gráfica anterior la de la recta $y=2x+5$ con tabla de valores:

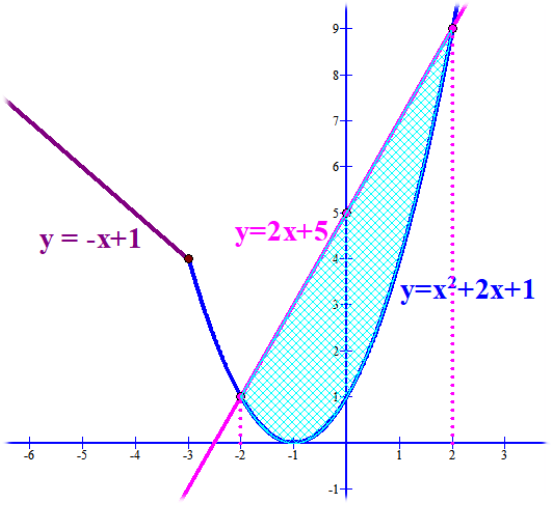
x	$y=2x+5$
–2	1
0	5
2	9



Averiguamos donde se cortan la recta y la parábola.

$$\begin{cases}y=2x+5\\ f(x)=x^2+2x+1\end{cases}\Rightarrow x^2+2x+1=2x+5\Rightarrow x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

El recinto pedido está delimitado por la recta $y = 2x + 5$ y la parábola $y = x^2 + 2x + 1$ entre los valores de $x = -2$ y $x = 2$.



Calculamos su área con la integral definida:

$$\int_{-2}^{2} 2x+5-\left(x^2+2x+1\right)dx = \int_{-2}^{2} 2x+5-x^2-2x-1dx = \int_{-2}^{2} -x^2+4\,dx =$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{-2^3}{3}+4\cdot 2\right]-\left[\frac{-(-2)^3}{3}+4(-2)\right] =$$

$$= \left[\frac{-8}{3}+8\right]-\left[\frac{8}{3}-8\right] = \frac{16}{3}+\frac{16}{3} = \frac{32}{3} = 10'6$$

El valor del área pedida tiene un valor de 10’6 unidades^2

CUESTIÓN A4. Para que un producto cosmético tenga un informe favorable de una agencia de sanidad debe superar tres pruebas de evaluación de garantía sanitaria. Las pruebas son independientes y todos los productos se someten a las tres pruebas. Se sabe, por otras ocasiones, que la probabilidad de superar la primera prueba es 0,8, la de superar la segunda es 0,75 y la de superar la tercera 0,85. Hallar:

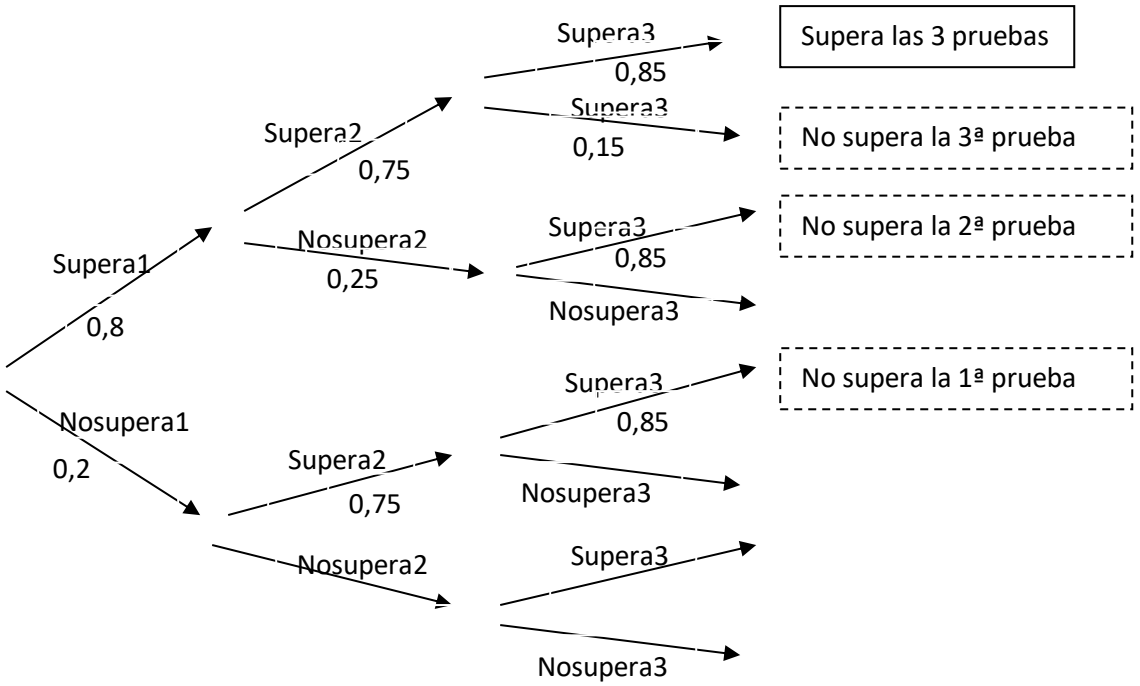
a) La probabilidad de que un producto tenga el informe favorable. (1 punto)

b) La probabilidad de que un producto no tenga el informe favorable por fallar solamente en una prueba. (1 punto)

Demos nombre a los sucesos que vamos a utilizar:
Superar la 1ª Prueba = Supera1 y No superar la 1ª Prueba= Nosupera1
Superar la 2ª Prueba = Supera2 y No superar la 2ª Prueba= Nosupera2
Superar la 3ª Prueba = Supera3 y No superar la 3ª Prueba= Nosupera3.

Sabemos que *P(Supera1) = 0,8*; *P(Supera2) = 0,75; P(Supera3) = 0,85*
P(Nosupera1) = 0,2; *P(Nosupera2) = 0,25; P(Nosupera3) = 0,15.*

Construyamos un árbol que nos permita aclarar como es este experimento aleatorio:



a) La probabilidad de informe favorable = P(Supera1) · P(Supera2) · P(Supera3) = 0,8·0,75·0,85 = = 0,51

b) La probabilidad de que un producto no tenga el informe favorable por fallar solamente en una prueba = P(Supera1) · P(Supera2) · P(Nosupera3) + P(Supera1) · P(Nosupera2) · P(Supera3) + P(Nosupera1) · P(Supera2) · P(Supera3) = 0,8·0,75·0,15 + 0,8·0,25·0,85 + 0,2·0,75·0,85 = = 0,3875

CUESTIÓN A5. El consumo de carne por persona en un año para una población es una variable aleatoria con distribución normal con desviación típica igual a 2 kg. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 individuos y se obtienen los siguientes consumos anuales por persona (en kg):

24; 20; 12; 10; 30; 27; 35; 30; 25; 39.

Determinar el intervalo de confianza al 90% para el consumo medio de carne por persona al año para la población. (1,5 puntos)

La media de la muestra es:

$$\bar{x} = \frac{24+20+12+10+30+27+35+30+25+39}{10} = 25,2 \text{ kg de carne por persona al año}$$

Los datos son $\bar{x} = 25,2 \quad \sigma = 2 \quad n = 10$

Para el nivel de confianza del 90% corresponde un valor crítico de $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,65$

$$1 - \propto = 0,90 \rightarrow \propto = 0,1 \rightarrow \propto/2 = 0'05 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,65}$$

Entonces el intervalo de confianza tiene extremos:

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 25.2 \pm 1.65 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = 25.2 \pm 1.04 = \begin{cases} 25.2 - 1.04 = 24.16 \\ 25.2 + 1.04 = 26.24 \end{cases}$$

El intervalo de confianza al 90% para el consumo medio de carne por persona al año para la población es de $(24.16\,,\,26.24)$.

Con un nivel de confianza del 90% el consumo medio de carne por persona al año está entre 24.16 kg y 26.24 kg.

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Una perfumería prepara dos lotes de productos, el lote 1 contiene 2 perfumes, 2 jabones y 1 crema corporal y el lote 2 está formado por 1 perfume, 2 jabones y 2 cremas corporales. Sabiendo que dispone de 150 perfumes, 180 jabones y 150 cremas corporales y que el beneficio obtenido es de 45 euros por cada lote del tipo 1 y de 30 euros por cada lote del tipo 2, hallar el número de lotes que debe hacer de cada tipo para obtener el beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio? (3 puntos)

Número de lotes del tipo 1 = x
Número de lotes del tipo 2 = y
Beneficio = 45x +30y
Determinemos las inecuaciones correspondientes a las restricciones.

"El lote 1 contiene 2 perfumes, 2 jabones y 1 crema corporal y el lote 2 está formado por 1 perfume, 2 jabones y 2 cremas corporales. Sabiendo que dispone de 150 perfumes, 180 jabones y 150 cremas corporales" →

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \textit{Perfumes} \rightarrow 2x + y \leq 150 \\ \textit{Jabones} \rightarrow 2x + 2y \leq 180 \rightarrow x + y \leq 90 \\ \textit{Crema corporal} \rightarrow x + 2y \leq 150 \end{array}\right\}$$

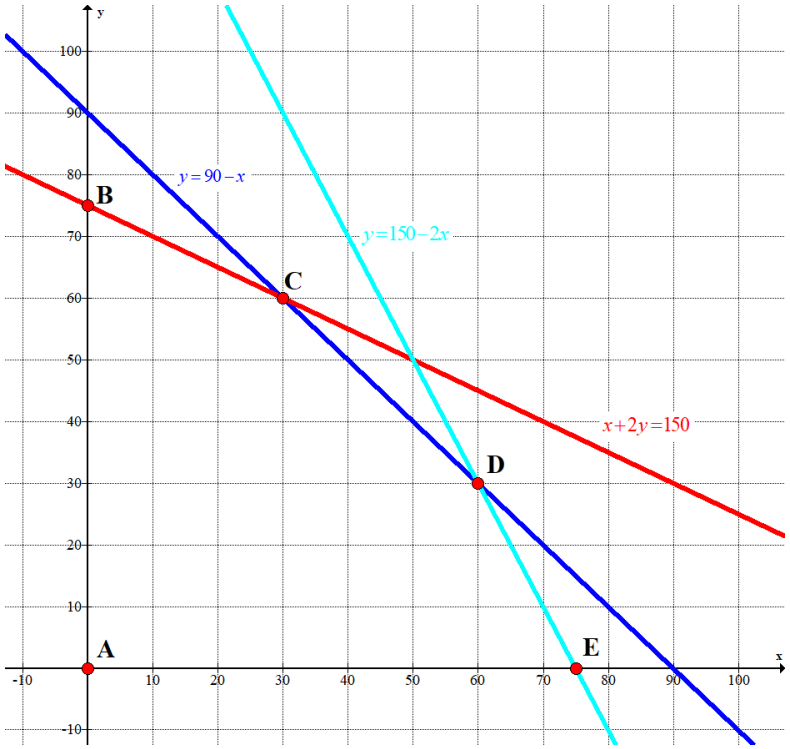
Dibujamos la región factible.

x	$y = 150 - 2x$
0	150
50	50

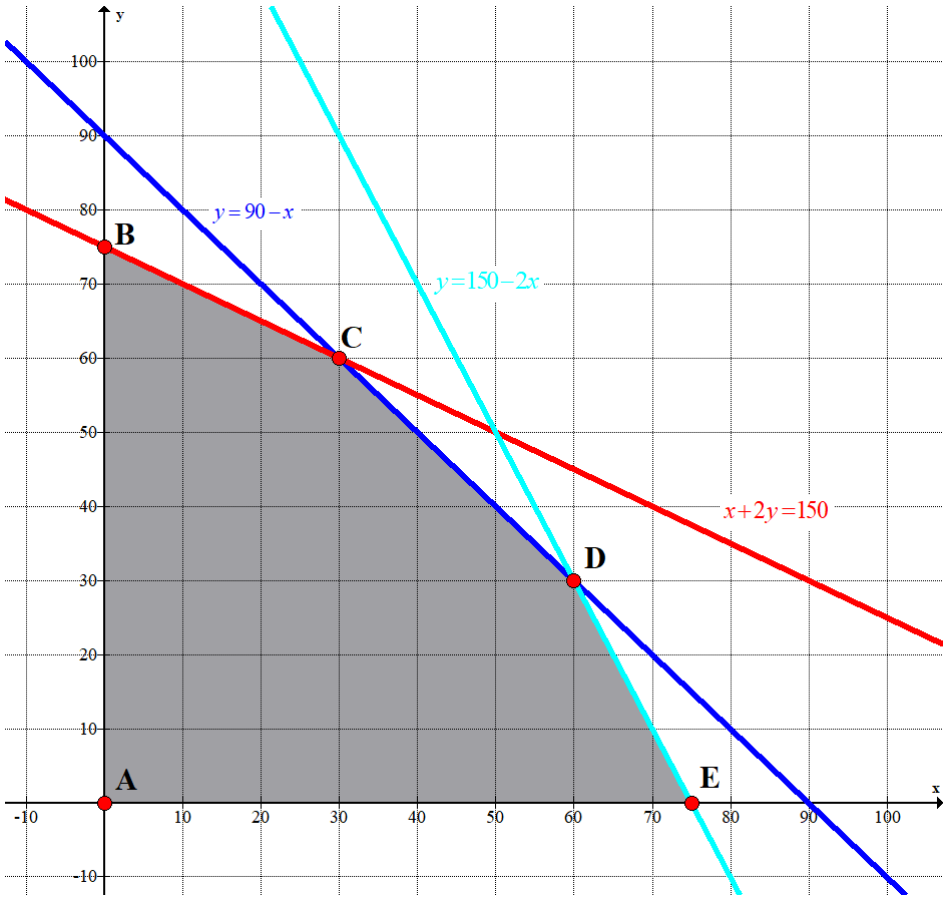
x	$y = 90 - x$
0	90
50	40

x	$y = \frac{150 - x}{2}$
0	75
50	50

Tomo la escala de 10 en 10 y represento las rectas asociadas a cada una de las restricciones:



Dadas las condiciones la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas dibujadas. La coloreamos de gris.



El punto A tiene coordenadas (0, 0), el B tiene coordenadas (0, 75) y el E es (75, 0).
Las coordenadas del punto C son:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=150 \\ y=90-x \end{array}\right\} \Rightarrow x+2(90-x)=150 \Rightarrow x+180-2x=150 \Rightarrow x=30 \rightarrow y=90-30=60$$

El punto C=(30, 60)

Las coordenadas del punto D son:

$$\left.\begin{array}{l} y=150-2x \\ y=90-x \end{array}\right\} \Rightarrow 150-2x=90-x \Rightarrow 60=x \rightarrow y=90-60=30$$

El punto D=(60, 30)

Determinemos el beneficio obtenido en los vértices de la región factible.

A (0,0) → Beneficio = 0

B(0,75) → Beneficio = 45·0 +30·75 = 2250 euros

C(30,60) →Beneficio = 45·30 + 30·60 = 1350 + 1800 = 3150 euros

D(60, 30) → Beneficio = 45·60 + 30·30 = 2700 + 900 = 3600 euros

E(75,0) → Beneficio = 45·75 + 30·0 = 3375 euros

El beneficio máximo tiene un valor de 3600 euros y se obtiene con 60 lotes del tipo 1 y 30 lotes del tipo 2.

CUESTIÓN B2. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$. (0,75 puntos)

b) $g(x)=x^2e^{x^2}$. (0,75 puntos)

c) $h(x)=\dfrac{\ln\left(x^2\right)}{x}$. (0,75 puntos)

a) Aplicamos la fórmula de la derivada de un cociente.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x+1}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{2x+1}-x\cdot\frac{2}{2\cdot\sqrt{2x+1}}}{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{2x+1}-\frac{x}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}=$$

$$=\frac{\frac{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-x}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}=\frac{2x+1-x}{\left(2x+1\right)\sqrt{2x+1}}=\boxed{\frac{x+1}{\left(2x+1\right)^{3/2}}}$$

b) Aplicamos la fórmula de la derivada de un producto.

$$g(x)=x^2e^{x^2}\Rightarrow g'(x)=2xe^{x^2}+x^2e^{x^2}\cdot 2x=2xe^{x^2}+2x^3e^{x^2}$$

c) Aplicamos la fórmula de la derivada de un cociente.

$$h(x)=\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}\Rightarrow h'(x)=\frac{\frac{2x}{x^2}\cdot x-1\cdot\ln\left(x^2\right)}{x^2}=\frac{2-\ln\left(x^2\right)}{x^2}$$

CUESTIÓN B3. Dada la función $f(x)=2e^{2x-2}$ hallar la función primitiva $F(x)$ que cumple que $F(1)=0$. (1,25 puntos)

Calculamos la primitiva $F(x)$ usando el cambio de variable.

$$F(x)=\int 2e^{2x-2}dx=\left\{\begin{array}{r}\text{Cambio de variable } 2x-2=t\\ 2dx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{2}\end{array}\right\}=\int 2e^{t}\frac{dt}{2}=\int e^{t}dt=e^{t}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ 2x-2=t\end{array}\right\}=e^{2x-2}+C$$

Como además debe cumplir $F(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l}F(x)=e^{2x-2}+C\\ F(1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow 0=e^{2\cdot 1-2}+C\Rightarrow 0=e^{0}+C\Rightarrow C=-1$$

La primitiva pedida es $F(x)=e^{2x-2}-1$.

CUESTIÓN B4. En un grupo el 60% de los alumnos aprueba la asignatura A y el 30% aprueba la asignatura B. Se sabe, además, que el 10% de los alumnos que aprueba la asignatura B aprueba también la asignatura A. Hallar el porcentaje de alumnos del grupo que aprueba alguna de las dos asignaturas. (2 puntos)

Construyamos una tabla con las probabilidades de los sucesos A = aprueba la asignatura A, B = aprueba la asignatura B, $\overline{A}$ = suspende la asignatura A y $\overline{B}$ = suspende la asignatura B.

	A	$\overline{A}$	
B			30%
$\overline{B}$			
	60%		100%

Como dicen que el 10% de los alumnos que aprueba la asignatura B (30% del total) aprueba también la asignatura A, esto será un 10% del 30% que son un $\frac{10\cdot 30}{100} = 3$ → 3% del total. Lo ponemos en la tabla y terminamos de completarla:

	A	$\overline{A}$	
B	**3 %**	27%	**30%**
$\overline{B}$	57%	13%	70%
	60%	40%	**100%**

A partir de los datos de la tabla:

El porcentaje de alumnos del grupo que aprueba alguna de las dos asignaturas =
= 3 + 27 + 57 = 87%.

CUESTIÓN B5. La estatura de los individuos de una población es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 0,4 m. Para estimar la media se toma una muestra aleatoria de tamaño n y se encuentra un valor medio de la estatura igual a 1,6 m. Si el intervalo de confianza al 95% construido a partir de esos datos es (1,5216 , 1,6784), calcula el valor de n. (1,5 puntos)

La media muestral es el valor central del intervalo de confianza (1,5216 , 1,6784):

$$\bar{x} = \frac{1'5216 + 1'6784}{2} = 1'6$$

Los datos son $\bar{x} = 1,6 \quad \sigma = 0'4 \quad n = desconocido$

Para el nivel de confianza del 95% corresponde un valor crítico de $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

$1 - \propto = 0,95 \rightarrow \propto = 0,05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

Si el intervalo de confianza al 95% construido a partir de esos datos es (1'5216, 1'6784) entonces

$$\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'6784 \Rightarrow 1'6 + 1'96 \cdot \frac{0'4}{\sqrt{n}} = 1'6784 \Rightarrow 1'96 \cdot \frac{0'4}{\sqrt{n}} = 0'0784$$

$$1'96 \cdot 0'4 = 0'0784 \cdot \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1'96 \cdot 0'4}{0'0784} \Rightarrow n = \left(\frac{1'96 \cdot 0'4}{0'0784} \right)^2 = 100$$

También podríamos haberlo conseguido con $\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'5216$

El tamaño de la muestra aleatoria es de 100 elementos.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. JUNIO 2017

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa de opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calcular A^t. (0,25 puntos)
b) Calcular A · B. (0,75 puntos)
c) Hallar la matriz $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ que cumple A · B ·X = C + I donde $C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad. (2 puntos)

CUESTIÓN A2. El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo *t* (en años) viene dado por la función

$$f(t)=t^3-24t^2+180t+8000 \quad 0\le t\le 11$$

Calcular:

a) La cantidad de agua almacenada en el último año (t = 11). (0,25 puntos)
b) El año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo. (1,5 puntos)
c) El volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo. (0,25 puntos)

CUESTIÓN A3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_1^2 \left(-x^2+3x+1\right)dx$. (0,75 puntos)

b) $\int \frac{2}{x+2}dx$. (0,75 puntos)

CUESTIÓN A4. Una urna contiene tres bolas numeradas del 1 al 3. Se extraen sucesivamente las tres bolas.

a) Calcular la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean impares. (1 punto)
b) Determinar si los siguientes sucesos son independientes: S_1:"sale número par antes de alguno de los impares" y S_2:"los dos números impares salen consecutivamente". (1 punto)

CUESTIÓN A5. En una muestra aleatoria de 175 individuos de una población se ha obtenido que 30 tienen más de 65 años. Hallar un intervalo de confianza al 90% para la proporción de mayores de 65 años de la población. (1,5 puntos)

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B. Hallar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste. Determinar dicho coste mínimo. (3 puntos)

CUESTIÓN B2. Dadas las funciones $f(x)=x^3-7x^2+a$ y $g(x)=\sqrt{2x-1}+bx$ donde a y b son números reales, hallar a y b sabiendo que $f(1)=g(1)$ y $f'(1)=g'(1)$. (2,5 puntos)

CUESTIÓN B3. Hallar el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x)=x^2+2x-3$, la recta $y=x-1$ y las rectas $x=1$ y $x=2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área. (1,5 puntos)

CUESTIÓN B4. En una población se ha determinado que cada 100 consumidores de agua mineral, 30 consumen la marca A, 25 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30% de consumidores de A, el 20% de consumidores de B y el 40% de consumidores de C son mujeres. Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población y resulta ser mujer, hallar la probabilidad de que consuma la marca A. (1,75 puntos)

CUESTIÓN B5. La duración de un tipo de bombillas sigue una distribución normal con desviación típica de 120 horas. Para estimar la duración media se quiere calcular un intervalo de confianza al 99%. Determinar el tamaño mínimo que debe tener la muestra utilizada para que el error cometido en la estimación sea menor de 25 horas. (1,25 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calcular A^t. (0,25 puntos)
b) Calcular A · B. (0,75 puntos)
c) Hallar la matriz $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ que cumple A · B ·X = C + I donde $C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad. (2 puntos)

a) $A^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

b)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+2+3 & -1+0+3\\ 0+2-1 & 0+0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

c)

$$A\cdot B\cdot X = C + I$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3a+2c & 3b+2d\\ a-c & b-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}3a+2c=2\\ 3b+2d=-2\\ a-c=0\\ b-d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a+2c=2\\ 3b+2d=-2\\ a=c\\ b=d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3c+2c=2\\ 3d+2d=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5c=2\\ 5d=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=2/5\\ d=-2/5\end{cases}$$

$$a=c=2/5$$

$$b=d=-2/5$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}2/5 & -2/5\\ 2/5 & -2/5\end{pmatrix}}$$

CUESTIÓN A2. El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo *t* (en años) viene dado por la función

$$f(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000 \quad 0 \le t \le 11$$

Calcular:

a) La cantidad de agua almacenada en el último año (*t* = 11). (1,5 puntos)
b) El año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo. (1,5 puntos)
c) El volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo. (0,25 puntos)

a) $f(11) = 11^3 - 24 \cdot 11^2 + 180 \cdot 11 + 8000 = \boxed{8407 \text{ millones de litros}}$

b) Utilicemos la derivada de la función $f(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000$.

$$f'(t) = 3t^2 - 48t + 180$$

$$f'(t) = 0 \rightarrow 3t^2 - 48t + 180 = 0 \xrightarrow{\text{Simplificamos dividiendo entre 3}} t^2 - 16t + 60 = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2} = \begin{cases} = \dfrac{16+4}{2} = 10 \\ = \dfrac{16-4}{2} = 6 \end{cases}$$

Hay dos candidatos a ser máximo: t = 6 y t = 10.

Con la segunda derivada vemos cual es el máximo.

$$f''(t) = 6t - 48 \Rightarrow \begin{cases} t = 6 \rightarrow f''(6) = 36 - 48 = -12 < 0 \rightarrow t = 6 \text{ es máximo} \\ \text{t=10} \rightarrow f''(10) = 60 - 48 = 12 > 0 \rightarrow t = 10 \text{ es mínimo} \end{cases}$$

La función tiene un máximo relativo en *t = 6*.
Lo comparamos con los valores de la función en los extremos del intervalo de definición.

$$f(0) = 0^3 - 24 \cdot 0^2 + 180 \cdot 0 + 8000 = 8000$$
$$f(6) = 6^3 - 24 \cdot 6^2 + 180 \cdot 6 + 8000 = 8432$$
$$f(10) = 10^3 - 24 \cdot 10^2 + 180 \cdot 10 + 8000 = 8400$$
$$f(11) = 11^3 - 24 \cdot 11^2 + 180 \cdot 11 + 8000 = 8047$$

El almacenamiento máximo se produjo en el año 6.

c) Para t = 6 los millones de litros almacenados se obtienen con el valor de *f(6)*.

$$f(6) = 6^3 - 24 \cdot 6^2 + 180 \cdot 6 + 8000 = \boxed{8432 \text{ millones de litros}}$$

CUESTIÓN A3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_1^2 \left(-x^2+3x+1\right)dx$. (0,75 puntos)

b) $\int \frac{2}{x+2}dx$. (0,75 puntos)

a) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \left(-x^2+3x+1\right)dx = -\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+x+K$$

Utilizamos este resultado para calcular la integral definida pedida.

$$\int_1^2 \left(-x^2+3x+1\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2 = \left(-\frac{2^3}{3}+3\frac{2^2}{2}+2\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+3\frac{1^2}{2}+1\right)=$$

$$=\frac{-8}{3}+6+2+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-1=-\frac{7}{3}+7-\frac{3}{2}=\frac{-14+42-9}{6}=\boxed{\frac{19}{6}}$$

b)

$$\int \frac{2}{x+2}dx = 2\int \frac{1}{x+2}dx = \boxed{2\ln|x+2|+C}$$

CUESTIÓN A4. Una urna contiene tres bolas numeradas del 1 al 3. Se extraen sucesivamente las tres bolas.

a) Calcular la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean impares. (1 punto)
b) Determinar si los siguientes sucesos son independientes: S_1:"sale número par antes de alguno de los impares" y S_2:"los dos números impares salen consecutivamente". (1 punto)

Escribamos las distintas formas en que podemos extraer esas tres bolas:

123
132
231
213
312
321

Todas ellas son igual de probables. Para calcular las probabilidades basta con contar los casos favorables y los posibles y aplicar la regla de Laplace

a) Calcular la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean impares.

123
132
231 OK
213 OK
312
321

$$P\left(2\ \textit{últimas bolas impares}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0'33$$

b) Determinar si los siguientes sucesos son independientes: S_1: "sale número par antes de alguno de los impares" y S_2: "los dos números impares salen consecutivamente".

123 OK
132
231 OK
213 OK
312
321 OK

S_1 = "Par antes de alguno impar"="Salga par en 1º o 2º lugar"={123, 231, 213, 321}

123
132 OK
231 OK
213 OK
312 OK
321

S_2 = "Los impares consecutivos"={132, 231, 213, 312}

$$S_1\cap S_2=\{123,\ 231,\ 213,\ 321\}\cap\{132,\ 231,\ 213,\ 312\}=\{231,213\}$$

Para que los dos sucesos sean independientes debe cumplirse $P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2)$

$$\left.\begin{array}{l} P(S_1 \cap S_2) = \dfrac{2}{6} \\ P(S_1) \cdot P(S_2) = \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{4}{6} = \dfrac{16}{36} = \dfrac{4}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow P(S_1 \cap S_2) = \frac{2}{6} \neq \frac{4}{9} = P(S_1) \cdot P(S_2)$$

Siendo distintos los resultados, los sucesos S_1 y S_2 son dependientes

CUESTIÓN A5. En una muestra aleatoria de 175 individuos de una población se ha obtenido que 30 tienen más de 65 años. Hallar un intervalo de confianza al 90% para la proporción de mayores de 65 años de la población. (1,5 puntos)

Buscamos en la tabla de la normal $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90%.

$$1 - \propto = 0{,}90 \rightarrow \propto = 0{,}1 \rightarrow \propto/2 = 0'05 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}645}$$

Conocemos n = 175

$$p = \frac{30}{175} = 0'171 \rightarrow 1 - p = 1 - \frac{30}{175} = \frac{145}{175}$$

La fórmula del intervalo de confianza es $\left(p - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}, \quad p + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \right)$

Al 90 % de confianza y con los datos del ejercicio sería:

$$\left(\frac{30}{175} - 1'645 \cdot \sqrt{\frac{\frac{30}{175} \cdot \frac{145}{175}}{175}}, \quad \frac{30}{175} + 1'645 \cdot \sqrt{\frac{\frac{30}{175} \cdot \frac{145}{175}}{175}} \right)$$

$$(0'171 - 0'049, \quad 0'171 + 0'049) =$$
$$(0'122, 0'22)$$

El intervalo de confianza de la proporción de mayores de 65 años de la población con las condiciones pedidas es entre un 12 % y un 22%.

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B. Hallar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste. Determinar dicho coste mínimo. (3 puntos)

Llamemos "*x*" a los metros de tela pedidos al distribuidor A, que cuestan a 2 €/m.
Este pedido cuesta $2x$ €.

Llamemos "*y*" a los metros de tela pedidos al distribuidor B, que cuestan a 3 €/m.
Este pedido cuesta $3y$ €

El coste de la compra es $C(x,y) = 2x+3y$. Función a minimizar.

Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{r} \text{El pedido a A (x) es como minimo 200 m y como maximo 700 m} \rightarrow 200 \le x \le 700 \\ \text{El pedido a B (y) es como minimo 200 m y como maximo 700 m} \rightarrow 200 \le y \le 700 \\ \text{Un pedido total (x+y) de un minimo de 600 m} \rightarrow 600 \le x+y \\ \text{El pedido a A (x) como máximo el doble del pedido a B (y)} \rightarrow x \le 2y \end{array}\right\}$$

Dibujemos la región factible atendiendo a estas restricciones:

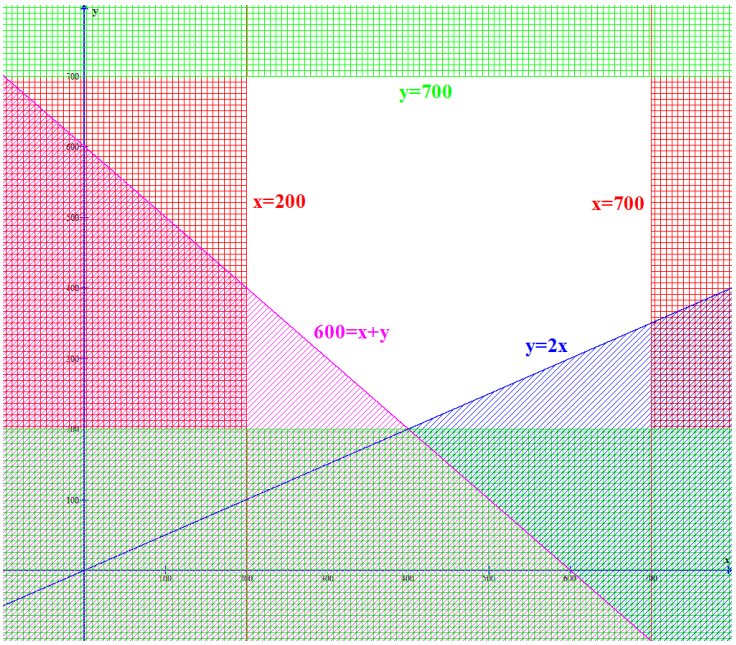
Las rectas que delimitan la zona solución son

$x=200 \quad x=700 \quad y=200 \quad y=700 \quad x+y=600 \rightarrow y=600-x \quad x=2y \rightarrow y=\frac{x}{2}$

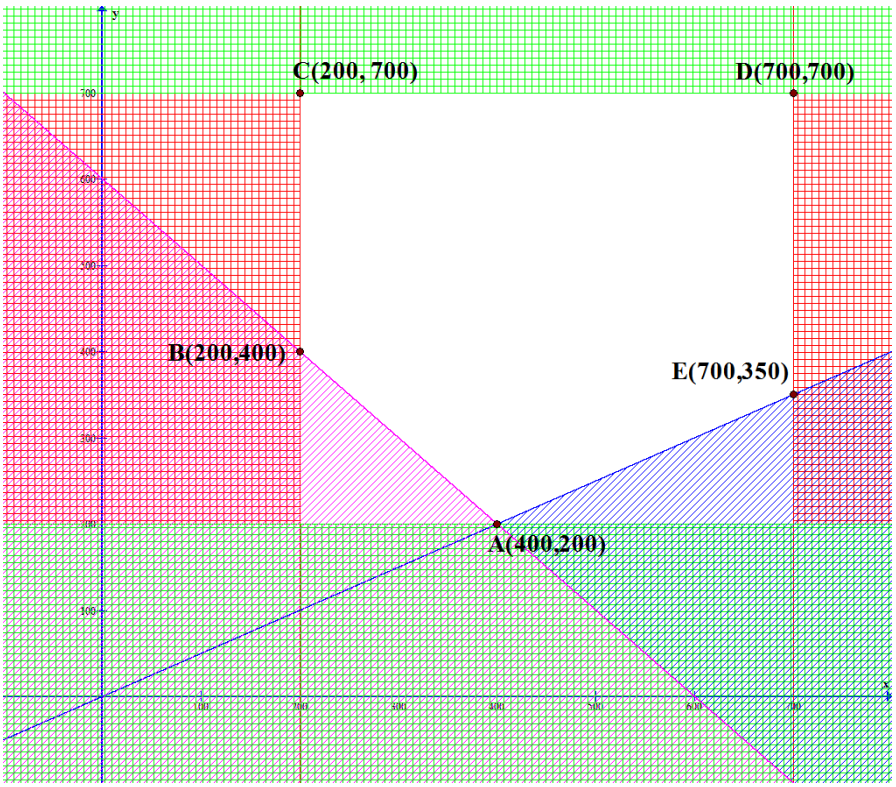
x	$y=600-x$
200	400
600	0

x	$y=\frac{x}{2}$
200	100
600	300

Dibujando dichas rectas y rayando la parte del plano que no es solución, obtendremos un dibujo parecido al siguiente, donde la zona blanca es la región factible:



Determinemos los puntos candidatos a ser máximos para la función coste $C(x,y) = 2x+3y$.
Son los puntos de corte de las rectas que delimitan la región factible (de color blanco)
Resolviendo cada uno de los sistemas, obtenemos:



Valoremos la función objetivo $C(x,y) = 2x+3y$ en cada uno de estos puntos y decidimos cual tiene el mínimo coste.

$$A(400,200) \rightarrow C(400,200) = 800+600 = 1400\ € \text{ ¡Mínimo!}$$
$$B(200,400) \rightarrow C(200,400) = 400+1200 = 1600\ €$$
$$C(400,200) \rightarrow C(200,700) = 400+2100 = 2500\ €$$
$$D(700,700) \rightarrow C(700,700) = 1400+2100 = 3500\ €$$
$$E(700,350) \rightarrow C(700,350) = 1400+1050 = 2450\ €$$

El coste mínimo es para el punto A (400, 200) que significa un pedido de 400 metros al distribuidor A y 200 metros al distribuidor B. Dicho coste mínimo es de 1400 €.

CUESTIÓN B2. Dadas las funciones $f(x)=x^3-7x^2+a$ y $g(x)=\sqrt{2x-1}+bx$ donde a y b son números reales, hallar a y b sabiendo que $f(1)=g(1)$ y $f'(1)=g'(1)$. (2,5 puntos)

Aplicando la condición $f(1)=g(1)$ obtendremos la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^3-7\cdot 1^2+a=1-7+a=a-6 \\ g(1)=\sqrt{2\cdot 1-1}+b\cdot 1=\sqrt{1}+b=b+1 \end{array}\right\} \Rightarrow a-6=b+1 \Rightarrow a=b+7$$

Aplicando la condición $f'(1)=g'(1)$ obtendremos la ecuación:

$$f(x)=x^3-7x^2+a \rightarrow f'(x)=3x^2-14x$$
$$g(x)=\sqrt{2x-1}+bx \rightarrow g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot 2+b$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=3-14=-11 \\ g'(1)=\dfrac{2}{2\sqrt{2-1}}+b=1+b \\ f'(1)=g'(1) \end{array}\right\} \Rightarrow -11=1+b \Rightarrow b=-12$$

Juntando las dos ecuaciones obtenemos un sistema que resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a=b+7 \\ b=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-12+7=-5$$

Los valores buscados son $a=-5$ y $b=-12$.

CUESTIÓN B3. Hallar el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x)=x^2+2x-3$, la recta $y=x-1$ y las rectas $x=1$ y $x=2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área. (1,5 puntos)

La función $f(x)=x^2+2x-3$ es una parábola, la dibujamos hallando su vértice y una tabla de valores.

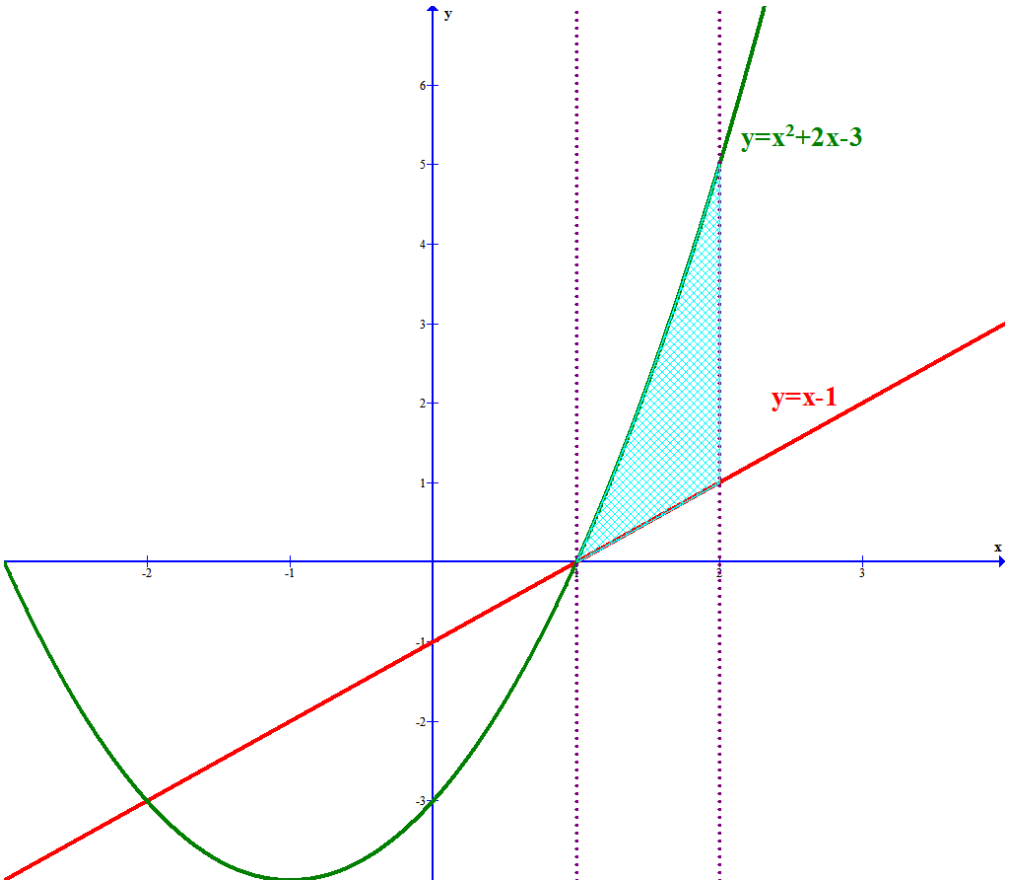
$$f(x)=x^2+2x-3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} f'(x)=2x+2 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1$$

El vértice está en el punto del plano V(–1, –4).

x	$y=x^2+2x-3$
–1	$(-1)^2+2(-1)-3=-4$
0	$0^2+2\cdot 0-3=-3$
1	$1^2+2\cdot 1-3=0$
–2	$(-2)^2+2(-2)-3=4-4-3=-3$
–3	$(-3)^2+2(-3)-3=9-6-3=0$

De la recta $y=x-1$ realizamos la tabla de valores siguiente:

x	$y=x-1$
1	0
2	1



El área de esa región azul limitada por la parábola (color verde) y la recta (color rojo) entre las líneas de puntos x = 1 y x = 2 se obtiene con la integral definida:

$$Área = \int_1^2 \left(x^2 + 2x - 3\right) - \left(x - 1\right) dx = \int_1^2 x^2 + 2x - 3 - x + 1 dx =$$

$$= \int_1^2 x^2 + x - 2 dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + 2 - 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{3} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{11}{6} u^2 = 1'83\, u^2}$$

El área de la región es de 1.83 unidades cuadradas.

CUESTIÓN B4. En una población se ha determinado que cada 100 consumidores de agua mineral, 30 consumen la marca A, 25 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30% de consumidores de A, el 20% de consumidores de B y el 40% de consumidores de C son mujeres. Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población y resulta ser mujer, hallar la probabilidad de que consuma la marca A. (1,75 puntos)

La marca C la consumen 100 – (30 + 25) = 45 consumidores de agua mineral.
Calculemos cuantos consumidores de cada marca son mujeres:

$$30\%\ de\ 30\ = \frac{30\cdot 30}{100} = 9 \text{ mujeres consumen la marca A}$$

$$20\%\ de\ 25\ = \frac{20\cdot 25}{100} = 5 \text{ mujeres consumen la marca B}$$

$$40\%\ de\ 45\ = \frac{40\cdot 45}{100} = 18 \text{ mujeres consumen la marca C}$$

En total, de cada 100 consumidores de agua mineral 9 + 5 + 18 = 32 son mujeres. Y de todas las mujeres consumidoras de agua mineral 9 consumen la marca A.
Aplicamos la regla de Laplace y obtenemos la probabilidad pedida.

$$P\left(consumir\ la\ marca\ A\ sabiendo\ que\ es\ mujer\right) = \frac{9}{32} = \boxed{0'28}$$

CUESTIÓN B5. La duración de un tipo de bombillas sigue una distribución normal con desviación típica de 120 horas. Para estimar la duración media se quiere calcular un intervalo de confianza al 99%. Determinar el tamaño mínimo que debe tener la muestra utilizada para que el error cometido en la estimación sea menor de 25 horas. (1,25 puntos)

El error sigue la fórmula:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Los datos proporcionados son $\sigma = 120$

Obtenemos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 99%.

$$1 - \alpha = 0'99 \rightarrow \alpha = 0'01 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0'995 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2'575$$

La fórmula del error queda:

$$E = 2'575 \cdot \frac{120}{\sqrt{n}} = \frac{309}{\sqrt{n}}$$

Como el error debe ser menor de 25 horas tenemos la inecuación:

$$E = \frac{309}{\sqrt{n}} < 25$$
$$309 < 25 \cdot \sqrt{n}$$
$$\frac{309}{25} < \sqrt{n}$$
$$\left(\frac{309}{25}\right)^2 < n$$
$$152'76 < n$$

El tamaño mínimo de la muestra para tener un error menor de 25 horas es de 153 bombillas.